



## Introduction à la résistance des matériaux

Jean-Pierre Basset, Patrice Cartraud, Christian Jacquot, Antoine Leroy,  
Bernard Peseux, Pierre Vaussy

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Basset, Patrice Cartraud, Christian Jacquot, Antoine Leroy, Bernard Peseux, et al..  
Introduction à la résistance des matériaux. École d'ingénieur. Nantes, France. 2007, pp.178.  
<cel-00594957>

**HAL Id: cel-00594957**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00594957>**

Submitted on 22 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

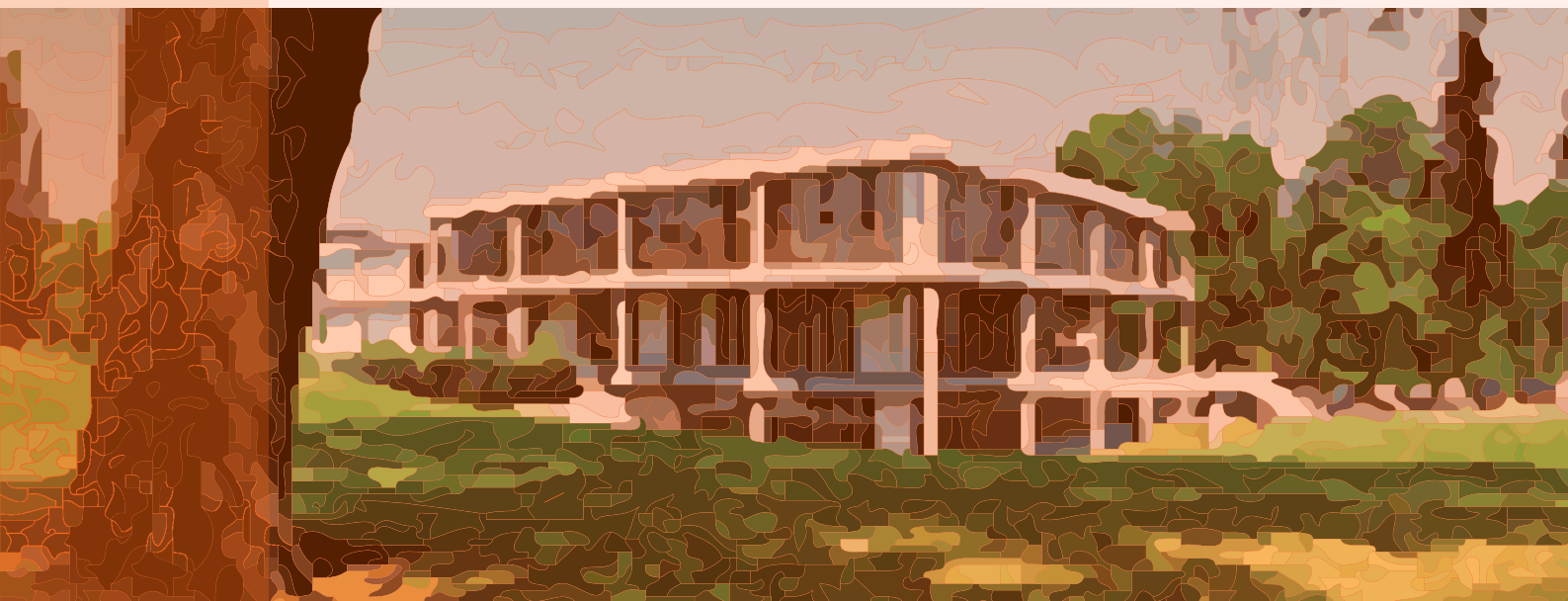


Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License



Centrale  
Nantes

# Introduction à la résistance des matériaux



École Centrale de Nantes — 2007

*Jean-Pierre Basset*

*Patrice Cartraud*

*Christian Jacquot*

*Antoine Leroy*

*Bernard Peseux*

*Pierre Vaussy*

Ce document est sous licence Creative Commons: paternité; pas d'utilisation commerciale; partage des conditions initiales à l'identique; 3.0 France

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



# Table des matières

<b>1 Généralités</b>	<b>7</b>
Concepts généraux	7
Représentation et repère	8
Description lagrangienne	9
<b>2 Petites déformations d'un milieu continu</b>	<b>11</b>
Déplacement et transformation	11
Interprétation géométrique de la transformation	13
Déformation autour d'un point	14
Variation d'angle entre deux axes de référence	16
Variation angulaire de deux directions quelconques	16
Dilatation cubique	17
Éléments propres de la matrice des déformations	18
Invariants du tenseur des déformations	18
Conditions d'intégrabilité	18
Représentation de MOHR	19
<b>3 Contraintes dans un milieu continu</b>	<b>25</b>
Équilibre d'un domaine solide	25
Notion de contraintes	26
État de contrainte en un point	28
Propriétés de la matrice des contraintes	30
Représentation géométrique des contraintes	34
<b>4 Relation de comportement en élastostatique</b>	<b>41</b>
Coefficients élastiques	41
Essai de torsion	45
Critères limites de dimensionnement	48
<b>5 Énergie de déformation d'un milieu continu élastique</b>	<b>51</b>
Énergie de déformation	51
Potentiel élastique	53
<b>6 Élasticité linéaire</b>	<b>57</b>
Position du problème	57
Résolution	60
Principe de SAINT-VENANT	63
Applications	64

<b>7</b>	<b>Introduction à la théorie des poutres</b>	<b>73</b>
	Introduction	73
	Problème de SAINT-VENANT	73
	Une théorie approchée des poutres	81
<b>8</b>	<b>Treillis</b>	<b>87</b>
	Définition	87
	Effort normal	87
	Contraintes et déformations	88
	Équations cinématiques	89
	Énergie de déformation	89
	Résolution	89
<b>9</b>	<b>Théorèmes énergétiques</b>	<b>91</b>
	Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI	91
	Théorème de CASTIGLIANO	92
<b>10</b>	<b>Flexion des poutres droites</b>	<b>101</b>
	Poutre droite et notations générales	101
	Équations locales	102
	Flexion plane	104
<b>11</b>	<b>Assemblages hyperstatiques de poutres</b>	<b>113</b>
	Hyperstaticité des systèmes plans	113
	Applications	113
	Poutre sur appuis dénivelables	117
	Méthode des trois moments	119
<b>12</b>	<b>Effort tranchant</b>	<b>125</b>
	Position du problème	125
	Contraintes de cisaillement et effort tranchant dans une section droite	126
	Solution approchée et formule de BREDT	128
	Centre de cisaillement	135
<b>13</b>	<b>Torsion des poutres</b>	<b>137</b>
	Centres de torsion et de cisaillement	137
	Poutres de section pleine	138
	Section pleine admettant un centre de symétrie	139
	Poutres de section à paroi mince fermée	142
<b>14</b>	<b>Stabilité de l'équilibre des poutres élastiques longues</b>	<b>145</b>
	Formulation du problème	145
	Modélisation linéaire du flambement	147
	Flambement des pièces longues	149
	Influence de l'effort tranchant	152
	Calcul de la charge critique d'EULER	155
	Déversement des poutres en flexion simple	164
	Torsion et traction/compression	167
	Stabilité des arcs et anneaux	168

---

**A Problème de Saint-Venant** 171

Méthode des déplacements 171

Méthode des contraintes 175

Comparaison des deux méthodes 178



# Généralités

## 1.1 Concepts généraux

La résistance des matériaux, appelée également mécanique des corps déformables, fait appel aux notions d'équilibre de la mécanique statique, aux notions de déplacements étudiées en cinématique et aux propriétés des matériaux, auxquelles on a recours pour évaluer les dimensions de pièces structurales ou d'éléments de machines. L'objet de cet enseignement est l'étude statique des milieux continus déformables.

La résistance des matériaux est une partie de la mécanique qui a pour objectif le développement de modèles permettant de dimensionner les structures. Ces modèles sont élaborés dans le cadre d'hypothèses simplificatrices. Ils constituent le premier niveau des méthodes de calcul des structures. Ils se rapportent en général à des corps géométriquement simples qui constituent les éléments de base de la construction mécanique et du génie civil :

- les corps élancés pour lesquels une dimension est beaucoup plus grande que les deux autres et qui sont appelés poutres ;
- les corps minces, plaques et coques, pour lesquels une dimension, l'épaisseur, est beaucoup plus petite que les deux autres.

L'étude de la résistance des matériaux a pour but d'assurer qu'on utilise dans une pièce donnée, une quantité minimale de matériau, tout en satisfaisant aux exigences suivantes :

Résistance — la pièce doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées ;

Rigidité — la pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée ;

Stabilité — la pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement, déversement) ;

Endurance — la pièce, si elle est soumise à un chargement cyclique (répété), doit pouvoir, sans rupture, supporter un certain nombre de cycles (fatigue).

Dans les problèmes traités, nous supposerons que les matériaux satisfont à un certain nombre d'exigences. Cela nous permettra à la fois de réduire la complexité des



développements mathématiques et de conserver cependant une certaine généralité. Les hypothèses de base que nous posons sont les suivantes :

1. À l'échelle microscopique, la matière a une structure granulaire avec des liaisons résultant d'actions à distance. On s'intéressera à un matériau idéal continu, sans fissure ni cavité. Cette hypothèse de continuité du matériau permet d'isoler une partie infinitésimale de celui-ci et d'exprimer son comportement selon un système de coordonnées, à l'aide de fonctions mathématiques continues ;
2. Pour des éléments de machines ou de constructions, il est commode de travailler à l'échelle macroscopique. On peut alors, dans nombre de cas, représenter la matière par un modèle idéalisé *homogène, isotrope, continu*. Un matériau *continu* présente des propriétés physiques et mécaniques qui peuvent être variables mais suivent des lois continues et à dérivées continues en fonction des coordonnées des points. Un matériau *homogène* a les mêmes propriétés en tout point. La plupart des matériaux d'ingénierie satisfont à ce critère, du moins à l'échelle macroscopique. Même des matériaux qui sont peu homogènes (béton, bois, matériaux composites...) peuvent être considérés comme homogènes pour des calculs simplifiés.

Un matériau *isotrope* a, en un point donné, les mêmes propriétés dans toutes les directions. Les matériaux qui ont des orientations préférentielles (bois, matériaux laminés...) ne sont pas isotropes et ils font l'objet de méthodes de calcul spécialisées ;

3. Les transformations correspondent à des petits déplacements et à des petites déformations, en statique, et sans échange de chaleur ;
4. Les hypothèses liées à la géométrie des poutres, des plaques ou des coques permettent de ramener les équations de la mécanique des milieux continus à des équations différentielles ordinaires auxquelles on peut associer une forme générale de solution correspondant aux sollicitations type. La linéarité des modèles développés permet la superposition des solutions élémentaires en vue du traitement d'un problème pratique ;
5. Les liaisons internes à la matière sont représentées par des forces de surface que l'on appelle contraintes. L'équilibre d'un élément courant à l'intérieur de la matière est assuré sous l'action des contraintes et des forces extérieures directement appliquées dont celles des liaisons mécaniques du système à son environnement.

## 1.2 Représentation et repère

Sous l'action de forces externes ou de changements de température, un corps déformable réagit de telle sorte que chacun de ses points se déplace dans l'espace. On cherchera à préciser la position des particules (ou points matériels) qui constituent

le corps déformable à chaque instant. Pour étudier l'évolution d'un système il est

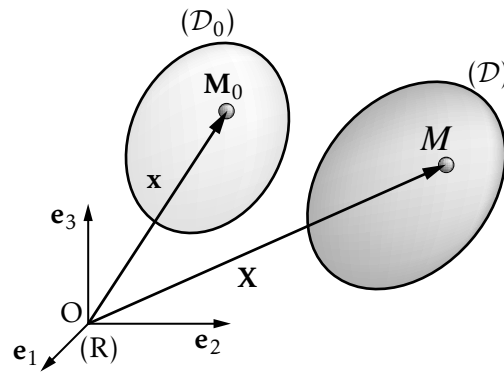


FIGURE 1.1 – Repère et configurations initiale et déformée du système étudié

nécessaire de procéder à sa description et à son repérage. Le solide est étudié dans un référentiel absolu ou galiléen de repère orthonormé, centré en  $O$  :  $R(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

L'ensemble des particules constituant le corps déformable occupe à chaque instant  $t$ , un ensemble de positions dans l'espace euclidien : c'est la configuration actuelle  $(\mathcal{D})$  du système à l'instant  $t$ . Le repérage de la configuration peut se faire au moyen du vecteur position  $\mathbf{OM}$ . On pourra définir ce vecteur par ses coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  dans  $(R)$ . On introduit aussi la notion de configuration de référence (ou configuration initiale) : c'est la configuration particulière  $(\mathcal{D}_0)$  du système à l'instant initial  $t_0$ . Les coordonnées des vecteurs positions  $\mathbf{OM}_0$  dans le repère  $(R)$  seront notées  $(x_1, x_2, x_3)$ . Ainsi, on note  $\mathbf{OM}_0 = \mathbf{x}$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $\mathbf{OM} = \mathbf{X}$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$ .

### 1.3 Description lagrangienne

Pour définir le mouvement d'un corps déformable dans le référentiel  $(R)$  on peut, ayant choisi une configuration de référence  $(\mathcal{D}_0)$ , se donner à chaque instant l'expression du vecteur position  $\mathbf{OM}$  de la particule située en  $\mathbf{M}_0$  dans  $(\mathcal{D}_0)$  :

$$\mathbf{OM} = \Phi(\mathbf{OM}_0, t) \quad (1.1)$$

ou encore :

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

où  $\Phi$  est une fonction vectorielle qui vérifie :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}, 0), \quad \forall \mathbf{M}_0 \in (\mathcal{D}_0), \quad \forall t \quad (1.3)$$

On dit que l'on se donne une description lagrangienne du mouvement du corps déformable puisque l'on suit le mouvement d'une particule que l'on identifie sur la configuration initiale. Pour que cette description représente effectivement un mouvement de milieu continu, on impose à la fonction  $\Phi$  de satisfaire les conditions mathématiques suivantes :

- $\Phi$  doit être une bijection de  $(\mathcal{D}_0)$  sur  $(\mathcal{D})$  pour tout  $t$ . On désigne par  $\Psi$  sa fonction réciproque telle que  $\forall t, \forall M_0 \in (\mathcal{D}_0)$  et  $\forall M \in (\mathcal{D})$  :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{OM}_0 = \Psi(\mathbf{OM}, t) \\ \mathbf{x} = \Psi(\mathbf{X}, t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{OM} = \Phi(\mathbf{OM}_0, t) \\ \mathbf{X} = \Phi(\mathbf{x}, t) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

- $\Phi$  et  $\Psi$  sont continues par rapport à l'ensemble des variables d'espace et de temps.  
 –  $\Phi$  et  $\Psi$  sont en règle générale supposées de classe  $\mathcal{C}^1$ , voire  $\mathcal{C}^2$ .

Des hypothèses ci-dessus, introduites pour formaliser les concepts de milieu continu, résultent les conséquences suivantes :

1. Deux points matériels qui occupent dans  $(\mathcal{D}_0)$  des positions infiniment voisines, restent infiniment voisins dans toute configuration ;
2. Des points matériels qui occupent dans  $(\mathcal{D}_0)$  un domaine connexe, occupent dans  $(\mathcal{D})$  un domaine connexe de même ordre (volume, surface, courbe). Ce domaine, transporté par le mouvement, est appelé domaine matériel ;
3. Les points matériels qui se trouvent dans  $(\mathcal{D}_0)$ , à l'intérieur d'une surface fermée, restent à tout instant  $t$  à l'intérieur de la surface transportée (surface matérielle) ;
4. Les points matériels situés sur la frontière  $(\partial\mathcal{D}_0)$  dans  $(\mathcal{D}_0)$ , demeurent sur cette frontière à tout instant. Autrement dit, la frontière du système est une surface matérielle ;
5. On désigne par  $J(\mathbf{x}, t)$  le jacobien de  $\Phi$  à l'instant  $t$  en  $(x_1, x_2, x_3)$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées premières des  $X_i$  par rapport aux  $x_j$  :

$$J(\mathbf{x}, t) = \frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \quad (1.5)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant continûment dérivables, on en déduit que  $J(\mathbf{x}, t)$  est continu par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $t$ . De plus il ne peut être ni nul ni infini, les matrices jacobiennes de  $\Phi$  et  $\Psi$  devant être inversibles. Il conserve donc un signe constant sur  $(\mathcal{D}_0)$  et au cours du mouvement. En conséquence puisque  $J(\mathbf{x}, 0) = 1, \forall M_0 \in (\mathcal{D}_0)$ ,  $J(\mathbf{x}, t)$  est positif et :

$$0 < J(\mathbf{x}, t) < +\infty, \quad \forall M_0 \in (\mathcal{D}_0), \quad \forall t \quad (1.6)$$

Le jacobien s'interprète comme la dilatation volumique dans le mouvement entre les configurations  $(\mathcal{D}_0)$  et  $(\mathcal{D})$ .

# Petites déformations d'un milieu continu

Nous travaillerons, comme il a été mentionné au chapitre 1, sur le problème quasi statique, sans échange de chaleur avec l'extérieur, du comportement d'un milieu continu soumis à des charges extérieures appelées sollicitations.

Les petites déformations d'un milieu continu ( $\mathcal{D}_0$ ) limité par une surface ( $\partial\mathcal{D}_0$ ) munie en tout point d'une normale extérieure sont connues quand, étant donné un point courant  $M_0$  appartenant à ( $\mathcal{D}_0$ ), on sait calculer les déplacements de  $M_0$ , les variations de longueur et d'angle de deux segments de droite quelconques issus de  $M_0$  et la variation de volume d'un élément courant en  $M_0$ .

## 2.1 Déplacement et transformation

### 2.1.1 Vecteur déplacement

Dans un repère fixe, on note  $M_0(\mathbf{x})$  ou  $M_0(x_1, x_2, x_3)$  un point dans la configuration initiale et  $M(\mathbf{X})$  ou  $M(X_1, X_2, X_3)$ , le point correspondant dans la configuration déformée. Le vecteur déplacement de  $M_0$  est  $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ , il est noté  $\mathbf{U}(M_0)$  :

$$\mathbf{U}(M_0) = u_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

Nous supposons que les déplacements  $u_i$  sont petits devant les dimensions du domaine ( $\mathcal{D}$ ) étudié. Les  $X_i$  seront représentés par des fonctions uniformes et continues des  $x_j$ , en conséquence :

- sont exclus les problèmes de chocs, de fissuration et de glissement qui correspondent à des discontinuités de la transformation ;
- à un point initial  $M_0$  correspond un seul point matériel  $M$  après déformation : il s'agit d'une transformation bijective ;
- seuls les cas où les  $u_i$  et les  $\partial u_i / \partial x_j$  peuvent être représentés par des fonctions continues qui restent des grandeurs du premier ordre sont considérés.

### 2.1.2 Transformation géométrique

Dans la configuration initiale, considérons deux points voisins  $M_0(x_1, x_2, x_3)$  et  $P_0(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ . Le vecteur  $M_0P_0$  se transforme en  $MP$  comme décrit sur la figure 2.1.

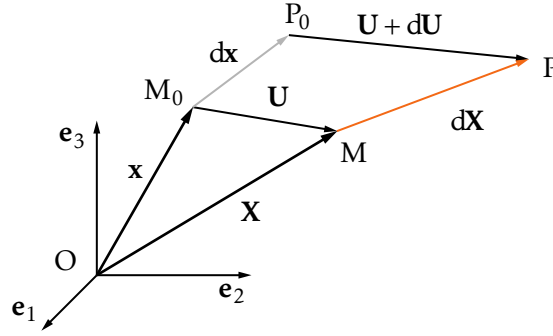


FIGURE 2.1 – Champ de déplacement

$$M \begin{cases} X_1 = x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3) \\ X_2 = x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3) \\ X_3 = x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad P \begin{cases} X_1 + dX_1 = x_1 + dx_1 + u_1(x_1, x_2, x_3) + du_1 \\ X_2 + dX_2 = x_2 + dx_2 + u_2(x_1, x_2, x_3) + du_2 \\ X_3 + dX_3 = x_3 + dx_3 + u_3(x_1, x_2, x_3) + du_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

On a :

$$MP = dX = dx + dU \quad (2.3)$$

et après différentiation, on obtient :

$$dX_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (2.4)$$

autrement dit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \partial_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

soit, en écriture contractée :

$$dX = dx + H dx = (I + H) dx \quad (2.6)$$

ou encore sous forme tensorielle :

$$d\bar{X} = (\bar{I} + \bar{H}) \cdot d\bar{x} \quad (2.7)$$

avec  $\bar{H}$  tenseur gradient des déplacements et  $H$ , sa matrice dans la base  $(e_1 e_2 e_3)$ . La transformation est linéaire et bijective.

### 2.1.3 Décomposition du tenseur des gradient des déplacements

En tout point  $M_0$  de  $(\mathcal{D}_0)$ , nous allons décomposer  $\mathbf{H}$  en une somme de deux matrices, l'une symétrique, l'autre antisymétrique. Posons :

$$\varepsilon(M_0) = \frac{\mathbf{H}(M_0) + \mathbf{H}(M_0)^t}{2}; \quad \boldsymbol{\Omega}(M_0) = \frac{\mathbf{H}(M_0) - \mathbf{H}(M_0)^t}{2} \quad (2.8)$$

les deux matrices dont les composantes sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

L'équation (2.6) devient alors :

$$d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} + \varepsilon) d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

Nous montrerons que  $\varepsilon(M_0)$  est la matrice des déformations pures et  $\boldsymbol{\Omega}(M_0)$ , la matrice de rotation.

## 2.2 Interprétation géométrique de la transformation

La relation (2.10) permettant de passer d'un vecteur élémentaire quelconque  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0$  à son transformé  $\mathbf{M}\mathbf{P}$  peut être composée en une somme d'applications linéaires :

- une translation (on retrouve  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0$ );
- une rotation de vecteur  $\omega = 1/2 \text{rot } \mathbf{U}$  représentée par la matrice  $\boldsymbol{\Omega}$ ;
- une déformation pure définie par la matrice  $\varepsilon$ .

Le rotationnel s'interprète comme une rotation d'ensemble d'axe  $\text{rot } \mathbf{U}$  autour du point  $M_0$  à condition que le déplacement résultant  $d\mathbf{U}$  soit infiniment petit devant  $d\mathbf{X}$ . Il n'introduit pas de déformation au voisinage de  $M_0$  si :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1 \quad (2.11)$$

Cette hypothèse est très forte, elle limite l'étude des déformations des milieux continus étudiés ici à celles des déformations infinitésimales. Si elle n'est pas respectée, il faut faire appel à la théorie des grandes déformations.

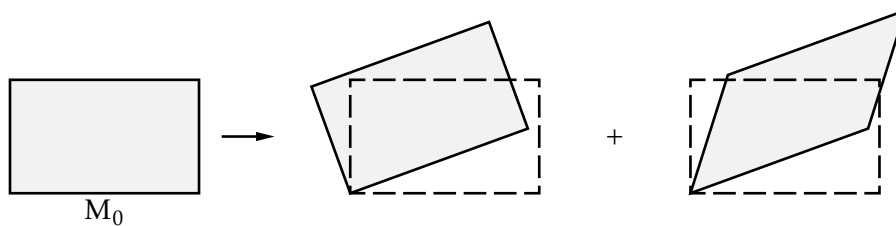


FIGURE 2.2 – Transformation par composition d'une translation, d'une rotation et d'une déformation

## 2.3 Déformation autour d'un point

### 2.3.1 Variation de longueur d'un segment et dilatation linéique

Le vecteur  $\mathbf{MP}$  est de longueur  $dX$ , de même, le vecteur  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0$  est de longueur  $dx$  et son vecteur unitaire est  $\mathbf{l}_0$  de cosinus directeurs  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  et on peut écrire :

$$\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0 = d\mathbf{x} = dx\mathbf{l}_0 \quad (2.12)$$

on a donc :

$$dX^2 = d\mathbf{X}^t \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^t(\mathbf{I} + \mathbf{H}^t)(\mathbf{I} + \mathbf{H})d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^t(\mathbf{I} + (\mathbf{H}^t + \mathbf{H}) + \mathbf{H}^t\mathbf{H})d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

Avec l'hypothèse des petites transformations, c'est-à-dire lorsque les termes de  $\mathbf{H}$  sont petits devant l'unité, on peut négliger le terme quadratique  $\mathbf{H}^t\mathbf{H}$  devant  $\mathbf{H}$  et il vient :

$$dX^2 \simeq d\mathbf{x}^t(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon})d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^t}{2} \quad (2.15)$$

et en développant :

$$dX^2 \simeq dx^2 \mathbf{l}_0^t(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{l}_0 = dx^2(1 + 2\mathbf{l}_0^t\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{l}_0) \quad (2.16)$$

La matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , la matrice du tenseur des petites déformations  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (partie symétrique du tenseur gradient des déplacements) et donc les composantes de cette matrice symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.17)$$

La dilatation linéique dans la direction  $\mathbf{l}_0$ , notée  $\varepsilon_l$ , est définie par :

$$\varepsilon_l = \frac{dX - dx}{dx} \quad (2.18)$$

En exprimant :

$$\frac{dX^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{(dX - dx)(dx + dX)}{dx^2} \quad (2.19)$$

et compte tenu de l'hypothèse des petites déformations, on peut écrire :

$$\frac{dX^2 - dx^2}{dx^2} \simeq \frac{(dX - dx)(dx + dx)}{dx^2} = 2 \frac{(dX - dx)}{dx} = 2\varepsilon_l \quad (2.20)$$

et à partir de (2.15), en calculant (2.20), on déduit qu'avec l'hypothèse des petites perturbations, la dilatation linéique dans la direction  $\mathbf{l}_0$  est donnée par :

$$\varepsilon_l = \mathbf{l}_0^t\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{l}_0 = \alpha_1^2\varepsilon_{11} + \alpha_2^2\varepsilon_{22} + \alpha_3^2\varepsilon_{33} + 2\alpha_1\alpha_2\varepsilon_{12} + 2\alpha_2\alpha_3\varepsilon_{23} + 2\alpha_3\alpha_1\varepsilon_{31} \quad (2.21)$$

Elle s'exprime donc en fonction des six composantes de la matrice des déformations et des cosinus directeurs de la direction  $\mathbf{l}_0$ . Les  $\varepsilon_{ii}$  sont les dilatations linéiques dans chacune des directions des axes du référentiel. Pour vérifier cette proposition, considérons successivement  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^t$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^t$  et  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^t$ . Il vient par identification :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\mathbf{e}_1} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\mathbf{e}_2} \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\mathbf{e}_3} \quad (2.22)$$

La dilatation linéique dans la direction  $\mathbf{l}_0$  peut être obtenue par une autre démarche. Compte tenu de l'expression du tenseur des déformations  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  et de l'hypothèse sur l'ordre de grandeur des termes de  $\mathbf{H}$ , on en déduit que les termes de la matrice des déformations  $\varepsilon$  sont petits devant l'unité,  $\mathbf{l}_0$  étant l'unitaire, il s'ensuit que :

$$\frac{dX}{dx} = \sqrt{1 + 2\mathbf{l}_0^t \varepsilon \mathbf{l}_0} \approx 1 + \mathbf{l}_0^t \varepsilon \mathbf{l}_0 \quad (2.23)$$

et donc que :

$$\mathbf{l}_0^t \varepsilon \mathbf{l}_0 = \frac{dX - dx}{dx} \quad (2.24)$$

Il apparaît ainsi que  $\mathbf{l}_0^t \varepsilon \mathbf{l}_0$ , caractérise la variation relative de longueur  $\varepsilon_l$  (dilatation linéique) dans la direction  $\mathbf{l}_0$ , au point considéré.

### 2.3.2 Vecteur déformation

Un vecteur courant  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0 = dx\mathbf{l}_0$  se déforme en  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}$  d'unitaire  $\mathbf{l}$ . Le vecteur  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$  noté  $\delta\mathbf{M}_0\mathbf{P}$  est le vecteur déformation tel que  $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{D}(M_0, \mathbf{l}_0) dx$  avec  $\mathbf{D}(M_0, \mathbf{l}_0) = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \mathbf{l}_0$ . On a  $\mathbf{D}(M_0, \mathbf{l}_0) = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_0 \wedge (\mathbf{D} \wedge \mathbf{l}_0)$ , soit  $\mathbf{D}(M_0, \mathbf{l}_0) = \mathbf{l}_0^t \varepsilon \cdot \mathbf{l}_0 + g\mathbf{t}_0$  où  $g = \mathbf{t}_0^t \varepsilon \mathbf{l}_0$ . En

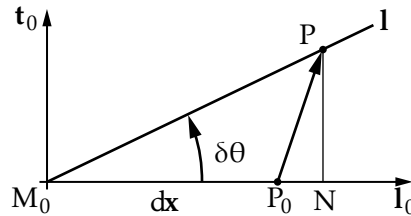


FIGURE 2.3 – Décomposition du vecteur déformation

projetant  $\delta\mathbf{M}_0\mathbf{P}$  sur  $\mathbf{l}_0$  et sur  $\mathbf{t}_0$ , vecteur directement perpendiculaire à  $\mathbf{l}_0$ , la déformation se traduit dans le plan  $M_0P_0P$  pour  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0$  par deux composantes, celle sur  $\mathbf{l}_0$  correspondant à l'allongement, celle sur  $\mathbf{t}_0$  correspondant à la déviation angulaire  $\delta\theta$  de la direction  $\mathbf{l}_0$  :

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \delta\mathbf{M}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\mathbf{N} + \mathbf{NP} = \overline{M_0P_0} \varepsilon(M_0, \mathbf{l}_0) \mathbf{l}_0 + \overline{M_0P_0} g(M_0, \mathbf{l}_0) \mathbf{t}_0 \quad (2.25)$$

soit :

$$\mathbf{D}(M_0, \mathbf{l}_0) = \varepsilon(M_0, \mathbf{l}_0) \mathbf{l}_0 + g(M_0, \mathbf{l}_0) \mathbf{t}_0 \quad (2.26)$$

où  $\overline{P_0N}$  est l'allongement de  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0$  donc  $\varepsilon(M_0, \mathbf{l}_0) = \varepsilon_l$  est l'allongement relatif suivant  $\mathbf{l}_0$  et  $\overline{NP} = \tan(\delta\theta) \approx \delta\theta$  est la déviation angulaire de  $\mathbf{l}_0$ , notée  $g(M_0, \mathbf{l}_0)$ .



## 2.4 Variation d'angle entre deux axes de référence

Nous allons montrer que la diminution de chaque angle droit du référentiel s'exprime en fonction des quantités  $2g_i$  appelées glissements et notés :

$$\gamma_{12} = 2g_3 = -\delta\theta_{12} \quad \gamma_{13} = 2g_2 = -\delta\theta_{13} \quad \gamma_{23} = 2g_1 = -\delta\theta_{23} \quad (2.27)$$

Considérons deux unitaires  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  de la base locale. Compte tenu de la décomposition du vecteur déformation pure  $(\varepsilon(M_0, \ell_0), \mathbf{g}(M_0, \ell_0))$  de l'équation (2.26), nous allons étudier la variation de l'angle droit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  avec l'hypothèse des petites perturbations. On a :

$$g(M_0, \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{D}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_1) \quad g(M_0, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{D}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2) \quad (2.28)$$

Dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , on a pour la diminution de l'angle  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  :

$$\begin{aligned} -\delta\theta_{12} &= g(M_0, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 + g(M_0, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{D}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_2, \mathbf{D}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ &= -(\mathbf{D}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3 + (\mathbf{D}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{D}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_3) + (\mathbf{D}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{D}(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= 2\varepsilon_{12} = 2g_3 = \gamma_{12} \end{aligned} \quad (2.29)$$

On trouve des résultats similaires pour les autres angles entre les axes du référentiel. Les coefficients  $\varepsilon_{ij}$  de la matrice  $\varepsilon$  sont appelés les demi glissements  $g_k$ . Ils caractérisent la variation des angles droits entre les axes du référentiel.

## 2.5 Variation angulaire de deux directions quelconques

Dans la configuration initiale, en un point  $M_0$ , on considère deux directions quelconques  $\mathbf{M}_0\mathbf{P}_0 = d\mathbf{x} = dx\mathbf{l}$  et  $\mathbf{M}_0\mathbf{Q}_0 = d\mathbf{x}' = dx'\mathbf{l}'$ , qui font entre elles un angle  $\alpha$ . Ces directions sont transformées en  $\mathbf{M}\mathbf{P} = d\mathbf{X}$  et  $\mathbf{M}\mathbf{Q} = d\mathbf{X}'$  qui font entre elles un angle  $\alpha + d\alpha$ . Nous allons calculer la variation angulaire  $\alpha + d\alpha$ . On a d'une part :

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = \|d\mathbf{X}\| \cdot \|d\mathbf{X}'\| \cos(\alpha + d\alpha) = dX dX' \cos(\alpha + d\alpha) \quad (2.30)$$

soit encore d'après (2.6) :

$$\cos(\alpha + d\alpha) = \frac{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}'}{dX dX'} = \frac{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}'}{dx(1 + \varepsilon_l) dx'(1 + \varepsilon_{l'})} \quad (2.31)$$

d'autre part, en tenant compte de (2.10) :

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = d\mathbf{x}^t(\mathbf{I} + \mathbf{H}^t)(\mathbf{I} + \mathbf{H}) d\mathbf{x}' \cong d\mathbf{x}^t(\mathbf{I} + 2\varepsilon) d\mathbf{x}' = dx\mathbf{l}^t(\mathbf{I} + 2\varepsilon)\mathbf{l}' dx' \quad (2.32)$$

et donc :

$$\cos(\alpha + d\alpha) = \frac{\mathbf{l}^t(\mathbf{I} + 2\varepsilon)\mathbf{l}'}{(1 + \varepsilon_l)(1 + \varepsilon_{l'})} \quad (2.33)$$

Avec l'hypothèse des petites déformations,  $d\alpha$  est petit et :

$$\cos(\alpha + d\alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha d\alpha \quad (2.34)$$

et dans le cas particulier où les deux directions initiales  $l$  et  $l'$  sont perpendiculaires, la variation angulaire (diminution algébrique) est notée  $\alpha + d\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$  et :

$$\gamma(\mathbf{l}, \mathbf{l}') = \frac{\mathbf{l}^t (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{l}'}{(1 + \varepsilon_l)(1 + \varepsilon_{l'})} \quad (2.35)$$

Or, dans l'hypothèse des petites déformations,  $\gamma(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$  est petit et en tenant compte de  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}' = 0$ , une approximation de la relation précédente est donnée par :

$$\gamma(\mathbf{l}, \mathbf{l}') = 2\mathbf{l}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{l}' \quad (2.36)$$

Lorsque les directions  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{l}'$  coïncident avec les directions ( $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , ou  $\mathbf{e}_3$ ) du repère, les relations (2.27) sont restituées.

## 2.6 Dilatation cubique

Un parallélépipède élémentaire découpé dans le solide avant déformation a pour volume  $dv_0 = dx_1 dx_2 dx_3$  et devient après déformation :

$$dv = dX_1(x_1, x_2, x_3) dX_2(x_1, x_2, x_3) dX_3(x_1, x_2, x_3) \quad (2.37)$$

La dilatation cubique relative est :

$$\theta(M_0) = \frac{dv - dv_0}{dv_0} \quad (2.38)$$

Les  $X_j$  étant des fonctions continues des  $x_i$ , on a bien sûr comme pour tout changement de variables :

$$dv = \frac{D(X_j)}{D(x_i)} dv_0 = J dv_0 \quad (2.39)$$

Le déterminant  $J$  est le jacobien de la transformation définie au chapitre 1. La généralisation de (2.4) à  $i = 1, 2, 3$  entraîne :

$$\frac{D(X_j)}{D(x_i)} = \begin{vmatrix} \partial_1 X_1 & \partial_2 X_1 & \partial_3 X_1 \\ \partial_1 X_2 & \partial_2 X_2 & \partial_3 X_2 \\ \partial_1 X_3 & \partial_2 X_3 & \partial_3 X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & 1 + \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & 1 + \partial_3 u_3 \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

En développant le jacobien et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, il vient :

$$dv = dv_0 (1 + \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = dv_0 (1 + \theta) \quad (2.41)$$

soit, à partir de  $\mathbf{U}(M_0) = (u_1(M_0), u_2(M_0), u_3(M_0))^t$  :

$$\theta = \mathbf{div} \mathbf{U}(M_0) \quad (2.42)$$

## 2.7 Éléments propres de la matrice des déformations

La matrice  $\varepsilon$  est une matrice hermitienne qui admet trois valeurs propres réelles et trois vecteurs propres perpendiculaires associés. Dans la base propre locale  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$ , la matrice est diagonale :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & & \\ & \varepsilon_{II} & \\ & & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Les directions  $\mathbf{e}_I$ ,  $\mathbf{e}_{II}$  et  $\mathbf{e}_{III}$  sont les directions principales des déformations et  $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_{II}$  et  $\varepsilon_{III}$  sont les dilatations linéiques principales. Pour les directions principales, les glissements sont nuls.

## 2.8 Invariants du tenseur des déformations

Les trois invariants du tenseur des déformations sont définis à partir de l'équation caractéristique :

$$\det(\varepsilon - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 \quad (2.44)$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \mathbf{div} \mathbf{U} \\ &= \text{trace } \varepsilon \\ &= \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &= \Theta(M_0) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left( (\text{trace } \varepsilon)^2 - \text{trace}(\varepsilon^2) \right) \\ &= \varepsilon_I \varepsilon_{II} + \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} + \varepsilon_{III} \varepsilon_I \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 - g_3^2 - g_2^2 - g_1^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$I_3(\varepsilon) = \varepsilon_I \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} = \det \varepsilon \quad (2.47)$$

## 2.9 Conditions d'intégrabilité

Ce sont les conditions que doivent vérifier les composantes de la matrice symétrique  $\varepsilon$  pour que cette matrice soit celle des déformations infinitésimales. Il faut, d'après (2.17) :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^t + \mathbf{H}) \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{H}$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{U}$  champ de vecteur déplacement infinitésimal. Il faut donc qu'il existe un champ de vecteur  $\mathbf{U}$ , dont les neuf dérivées partielles premières  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$  satisfassent aux six équations scalaires (2.17) où la matrice  $\varepsilon$  est donnée. Les conditions cherchées sont dites conditions d'intégrabilité du vecteur  $\mathbf{U}$  ou encore

conditions de compatibilité des composantes  $\varepsilon_{ij}$  de la matrice  $\varepsilon$ . Pour les obtenir, on part de la définition (2.17). En dérivant deux fois les six équations qui donnent les  $\varepsilon_{ij}$ , il vient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_i} \right) \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

Une combinaison linéaire de ces relations conduit aux conditions de compatibilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lk}}{\partial x_j \partial x_i} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

On démontre que ces conditions nécessaires sont également suffisantes.

## 2.10 Représentation de MOHR

### 2.10.1 Directions perpendiculaires à une direction principale

En un point  $M_0$ , supposons que l'on connaisse la direction principale  $\mathbf{e}_{III}$  des déformations<sup>[1]</sup>, le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  perpendiculaire à la direction  $\mathbf{e}_{III}$  est alors plan principal des déformations. Dans ce plan, on cherche les deux autres directions principales et les déformations linéiques principales associées ainsi que les directions de glissement maximum. Cette recherche peut se faire d'une manière algébrique en cherchant les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Nous allons ici entreprendre cette recherche d'une manière géométrique en utilisant la représentation plane de MOHR des déformations en travaillant dans le plan principal  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et en considérant uniquement la matrice  $2 \times 2$  représentative de l'état de déformation dans ce plan comme décrit sur la figure (2.4). Si les directions  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$  et

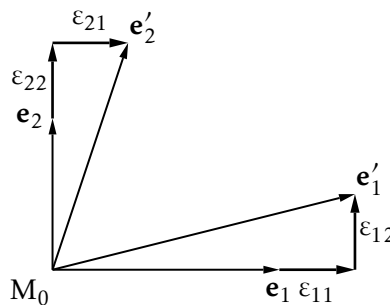


FIGURE 2.4 – Plan principal des déformations  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

[1] C'est le cas lorsqu'on considère un point  $M_0$  de la surface libre d'une pièce de normale  $\mathbf{e}_{III}$ .

déformations principales  $(\varepsilon_I, \varepsilon_{II})$  sont connues, alors la dilatation linéique dans une direction  $\mathbf{l}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  est donnée par (2.21) :

$$\varepsilon_l = \varepsilon_I \cos^2 \alpha + \varepsilon_{II} \sin^2 \alpha \quad (2.52)$$

La distorsion angulaire entre les directions  $\mathbf{l}_0$  et  $\mathbf{t}_0$ , perpendiculaires<sup>[2]</sup>, s'écrit :

$$\frac{1}{2} \gamma(\mathbf{l}_0, \mathbf{t}_0) = \frac{1}{2} \gamma_{lt} = g = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.53)$$

soit encore, en exprimant ces relations en fonction de l'angle double :

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2\alpha \\ g &= \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.54)$$

Lorsque dans le plan  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$ , ou bien  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , on fait varier l'angle de la direction  $\mathbf{l}_0$ , dans le plan  $(g)$ , le point  $M_l$  représentatif de l'état de déformation dans cette direction décrit le cercle  $C(C, R)$  de centre  $C = (0, \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2})$  et de rayon  $R = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$ . C'est le cercle de MOHR des déformations du plan principal  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$ . Lorsque l'angle  $\alpha$  varie

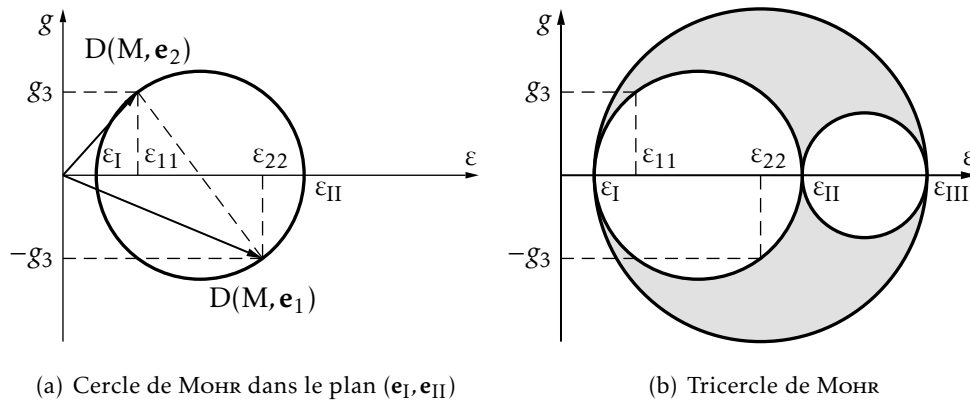


FIGURE 2.5 – Différentes configurations du cercle de MOHR

de  $\pi$  dans le plan  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$ , le point  $M_l$  décrit complètement le cercle  $C(O, R)$ .

En considérant successivement les trois plans principaux de déformations, on peut construire trois cercles de MOHR et on obtient ainsi le *tricercler de MOHR* des déformations. D'autre part, on peut montrer que pour une direction  $\mathbf{n}$  quelconque, le point représentatif de l'état de déformation dans le plan  $(\varepsilon, g)$  avec  $\varepsilon = \mathbf{n}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}$  et  $g = |\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}|$  se situe dans la partie délimitée par les trois cercles de MOHR correspondant aux plans principaux. Sur le tricercler de MOHR, le point où le glissement  $g$  est maximum (égal au rayon du grand cercle de MOHR) est à  $\pi/2$  des points représentatifs des directions principales donc, dans le plan  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{III})$ , les directions  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{t}$  de distorsion angulaire maximum sont les *directions bissectrices* des directions principales.

[2] On rappelle que les directions  $\mathbf{l}_0$  et  $\mathbf{t}_0$  sont telles que la base  $(\mathbf{t}_0, \mathbf{l}_0, \mathbf{e}_{III})$  est directe.

### 2.10.2 Extensométrie

La déformation en un point peut être évaluée expérimentalement à l'aide de *rosettes*.

#### Description de la rosette

Une jauge de déformation peut être assimilée à une résistance métallique constituée d'un fil rectiligne très fin, que l'on colle sur la surface de la structure étudiée. On transmet ainsi au fil de la résistance les déformations de la structure, d'où une variation de sa longueur, qui produit une variation de sa résistance, qu'on mesure grâce à un pont de Wheastone. On peut alors en déduire la déformation du fil, ce qui correspond à une mesure de la dilatation linéique dans sa direction. On peut ainsi obtenir avec précision l'allongement linéique  $x$  selon la direction  $x$  de la jauge.

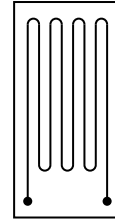


FIGURE 2.6 – Jauge de déformation

Pour mesurer la dilatation linéique dans une direction donnée, il suffit de coller une jauge dans cette direction. Cependant dans le cas général de déformation dans un plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , il faut trois mesures de déformations pour connaître exactement l'état de déformation en un point :  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{12}$  ou bien l'état de déformation principal comprenant les déformations linéiques  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$  et directions  $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$ . Ces mesures se font à l'aide de *rosettes* qui donnent les déformations dans les directions  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Dans la pratique, on trouve des rosettes à  $45^\circ$  et à  $60^\circ$  (voir figure 2.7).

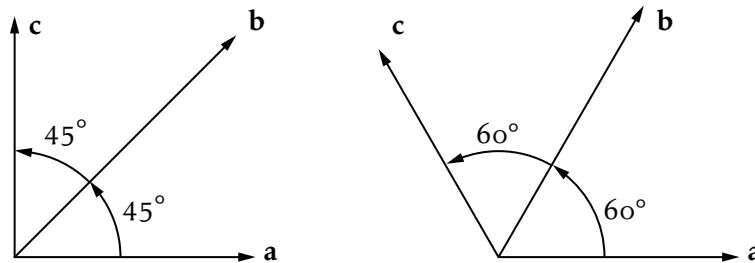


FIGURE 2.7 – Rosettes

#### Dépouillement

À partir de  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  et  $\varepsilon_c$ , les dilatations linéiques dans trois directions  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , on peut déterminer les valeurs principales des déformations. En notant l'état de déformation principal en un point  $M_0$  d'une surface par :

$$\varepsilon_{(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & \\ & \varepsilon_{II} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

la déformation linéique dans une direction faisant un angle  $a$ ,  $\mathbf{a}(\cos a, \sin a)$ , par rapport à la direction  $\mathbf{e}_I$ , est donnée par la relation (2.54) :

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \quad (2.56)$$

de même dans les directions  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , on obtient si  $\alpha$  est l'angle de la rosette, soit  $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$  :

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2(a + \alpha) \quad (2.57)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2(a + 2\alpha) \quad (2.58)$$

Le système de trois équations (2.56), (2.57) et (2.58) permet de déterminer les deux déformations linéiques principales  $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_{II}$  et l'angle noté  $a$  entre la direction principale  $\mathbf{e}_I$  et la direction  $\mathbf{a}$ .

### Rosette à 45°

L'angle des directions  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  et  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  est 45°, donc les relations (2.56) et (2.58) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos\left(2a + \frac{\pi}{2}\right) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos(2a + \pi) \end{aligned} \quad (2.59)$$

soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} - \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \sin 2a \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} - \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \end{aligned} \quad (2.60)$$

et on déduit par exemple en posant :

$$d = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} \quad \text{et} \quad r = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \quad (2.61)$$

que :

$$\varepsilon_I = d + r \quad \text{et} \quad \varepsilon_{II} = d - r \quad (2.62)$$

avec :

$$d = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2}; \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2 + (\varepsilon_a + \varepsilon_c - 2\varepsilon_b)^2}; \quad \tan 2a = \frac{\varepsilon_b - d}{\varepsilon_c - d} \quad (2.63)$$

### Rosette à 60°

L'angle des directions  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  et  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  est 60°, donc les relations (2.56), (2.57) et (2.58) s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos\left(2a + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos\left(2a + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2a \\
 \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} - \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \left( \frac{1}{2} 2a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2a \right) \\
 \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos 2a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2a \right)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

et on déduit :

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \\
 r &= \frac{1}{3} \sqrt{(2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + 3(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \\
 \tan 2a &= \frac{\sqrt{3} \varepsilon_c - \varepsilon_b}{3 \varepsilon_a - d}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$





# Contraintes dans un milieu continu

## 3.1 Équilibre d'un domaine solide

### 3.1.1 Bilan de forces

Au sein d'un solide homogène, isolons par la pensée un domaine de volume  $V$  et de frontière  $S$ . Ce domaine ( $\mathcal{D}$ ) peut être sollicité par deux types de forces :

- les forces de volume qui s'exercent sur toutes les particules de ( $\mathcal{D}$ ). Ce sont des actions à distance. Si  $dV$  est un domaine élémentaire de ( $\mathcal{D}$ ) centré au point  $M$ , la force élémentaire volumique peut s'écrire :

$$d\mathbf{F}_v(M) = \mathbf{f}_v(M)\rho(M) dV \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{f}_v$  est un vecteur densité de force et  $\rho(M)$ , la masse volumique locale. La norme de  $d\mathbf{F}_v(M)$  tend vers zéro comme  $dV$  ; si on considère une dimension caractéristique du volume élémentaire comme un infiniment petit du premier ordre,  $d\mathbf{F}_v(M)$  est donc un infiniment petit d'ordre trois.

- les forces de surface qui s'exercent uniquement sur les particules de la surface  $S$  frontière de  $V$ <sup>[1]</sup>. Elles représentent les actions de contact produites par le milieu environnant contigu à  $S$ . Si  $dS$  est une surface élémentaire de  $S$  centrée en  $M$  la force élémentaire surfacique peut s'écrire :

$$d\mathbf{F}_s(M) = \mathbf{f}_s(M) dS \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{f}_s(M)$  a la dimension d'une pression. La norme de  $d\mathbf{F}_s(M)$  tend vers zéro comme  $dS(M)$  ;  $d\mathbf{F}_s(M)$  est donc un infiniment petit d'ordre deux.

Ⓜ Si, parmi les forces surfaciques, il existe des forces ponctuelles ou des couples, de module fini, on ne peut évidemment pas définir de vecteur  $\mathbf{f}_s(M)$  pour ces efforts dits concentrés.

[1] Il peut s'agir, par exemple, de la pression sur un corps immergé dans un fluide.

### 3.1.2 Équations d'équilibre

#### Conditions d'équilibre d'un solide

Pour qu'une position  $(S_0)$  d'un solide  $(S)$ , dans un espace galiléen, soit une position d'équilibre, il faut et il suffit que, au repos, le torseur des efforts extérieurs sur  $(S)$  placé dans la position  $(S_0)$  soit le torseur nul.

Ⓜ Les conditions d'équilibre d'un solide  $(S)$  fournissent six équations scalaires (trois dans le cas d'un système plan). Supposons que le torseur des efforts extérieurs soit la somme d'un torseur d'efforts donnés  $\mathcal{T}_d(S)$  et d'un torseur d'efforts inconnus (de liaison)  $\mathcal{T}_l(S)$ , les conditions d'équilibre du solide  $S$  s'écrivent alors :

$$\mathcal{T}_d(S) + \mathcal{T}_l(S) = (0, 0)$$

autrement dit, six équations scalaires. Si le nombre d'inconnues de liaison est égal à six, ces six équations permettent de les calculer. Le solide est dit isostatique. Si le nombre d'inconnues est supérieur à six, le solide est dit hyperstatique.

Le solide considéré étant supposé fixe par rapport à un repère galiléen de référence, l'équilibre statique du volume matériel  $V$  se traduit par les deux équations vectorielles :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f}_S(M) dS + \iiint_V \mathbf{f}_V(M) \rho(M) dV + \sum_i \mathbf{F}_i(P_i) &= \mathbf{0} \\ \iint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_S(M) dS + \iiint_V \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_V(M) \rho(M) dV + \sum_i \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i(P_i) + \sum_j \mathbf{C}_j &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\iint_S \mathbf{f}_S(M) dS$  représente les efforts répartis sur la surface,  $\iiint_V \mathbf{f}_V(M) \rho(M) dV$ , les forces de volume,  $\sum_j \mathbf{F}_j(P_j)$  représente l'ensemble des efforts concentrés appliqués en certains points de la surface et  $\sum_j \mathbf{C}_j$ , l'ensemble des moments concentrés appliqués en certains points de la surface.

## 3.2 Notion de contraintes

### 3.2.1 Hypothèses

Les déplacements du milieu sont faibles devant ses dimensions et les déformations sont des termes infiniment petits du premier ordre — voir chapitre 2. Il en résulte que :

- l'effet des forces n'est pas modifié par les déplacements qu'elles provoquent ;
- le calcul des contraintes est effectué dans la configuration initiale du milieu et non dans l'état déformé.

### 3.2.2 Vecteur contrainte

Si un solide est en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, il existe en un point courant  $M$  du solide des forces intérieures qui assurent la cohésion interne de ce solide. Ces efforts intérieurs sont appelés *contraintes*. On peut mettre en évidence ces forces en divisant le solide en deux parties (I) et (II) par une surface plane  $S_c$  quelconque passant par  $M$  comme indiqué sur la figure 3.1. L'équilibre du solide

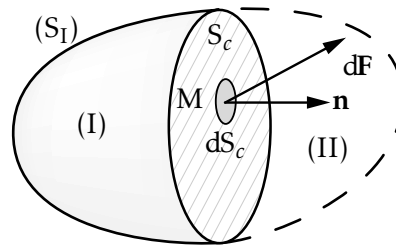


FIGURE 3.1 – Division par la pensée d'un solide en deux parties

étant assuré, toute partie de ce solide est elle-même en équilibre. On admet que les actions de (II) sur (I) (ce sont des actions de contact) sont réparties de manière continue sur  $S_c$ . Écrivons l'équilibre de la partie (I). La section  $S_c$  de (I) est munie d'une normale unitaire  $\mathbf{n}$ , extérieure à (I).

La partie (I) est en équilibre sous l'action :

- des forces extérieures volumiques qui s'exercent sur toutes les particules de (I) ainsi que des forces extérieures réparties ou concentrées qui s'exercent sur la surface  $S_1$  du solide ;
- des forces surfaciques sur  $S_c$  représentant l'action de (II) sur (I).

Sur toute surface élémentaire  $dS_c$  centrée en  $M$  appartenant à  $S_c$ , l'action de (II) sur (I) peut être définie par le vecteur force élémentaire  $d\mathbf{F}(M)$ . Cette force élémentaire est une force extérieure dans les équations d'équilibre de la partie (I) mais devient une force intérieure dans les équations d'équilibre de la totalité du solide considéré. On appelle *vecteur contrainte* en  $M$ , relativement à la direction  $\mathbf{n}$ , le vecteur :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \lim_{dS_c \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}(M)}{dS_c} \quad (3.4)$$

Le vecteur contrainte est donc défini en un point du solide et sa détermination dépend de l'orientation de la surface élémentaire (ou facette) sur laquelle il s'exerce. Il a la dimension d'une pression et s'exprime dans l'unité légale le Pascal ( $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$ ) ou l'un de ses multiples le mégapascal (MPa).

### 3.2.3 Décomposition du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte en  $M$  sur une facette  $dS_c$  centrée en  $M$  peut être projeté sur la normale  $\mathbf{n}$  à la facette et dans son plan.

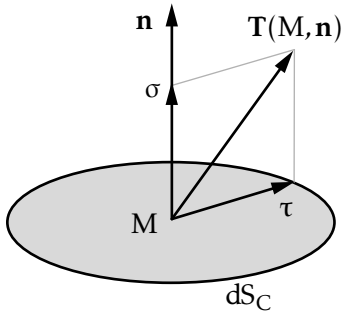


FIGURE 3.2 – Décomposition du vecteur contraintes

On appelle contrainte normale sur  $dS_C$  :

$$\sigma = \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

et contrainte tangentielle ou de cisaillement :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) - \sigma \mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n}) \quad (3.6)$$

Il y a quelques cas particuliers intéressants :

- si  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma = 0$ , la facette  $dS_C$  est soumise à un cisaillement pur ;
- si  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ , la facette est soumise à une traction ou à une compression pures.

### 3.3 État de contrainte en un point

L'état de contrainte en un point  $M$  du solide sera parfaitement connu si, en ce point, et quelle que soit l'orientation de la facette centrée en  $M$ , on peut déterminer le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n})$ .

Montrons que la connaissance du vecteur contrainte sur trois facettes orthogonales deux à deux, de sommet commun  $M$ , suffit pour déterminer le vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque (centrée en  $M$ ).

Considérons un volume élémentaire tel que le tétraèdre de la figure 3.3 où les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont suffisamment proches de  $M$  pour pouvoir supposer que le vecteur contrainte est constant sur chacune de ses quatre faces. Les trois facettes  $(MBC)$ ,  $(MAC)$  et  $(MAB)$  sont respectivement de normale extérieure  $-\mathbf{e}_1$ ,  $-\mathbf{e}_2$  et  $-\mathbf{e}_3$ . Décomposons le vecteur contrainte sur ces trois facettes en sa composante normale et sa composante tangentielle, elle-même projetée sur la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_1) = -(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_2) = -(\sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = -(\sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La facette  $(ABC)$  est de normale extérieure  $\mathbf{n}$  dont les cosinus directeurs sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Soit  $S$  son aire. Celle des trois autres facettes s'exprime en fonction de  $S$  et des cosinus directeurs de  $\mathbf{n}$  ; on a  $S_{MBC} = \alpha S$ ,  $S_{MAC} = \beta S$  et  $S_{MAB} = \gamma S$ . La première des équations d'équilibre du tétraèdre s'écrit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_1)\alpha S + \mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_2)\beta S + \mathbf{T}(\mathbf{M}, -\mathbf{e}_3)\gamma S + \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n})S + \mathbf{f}_V(\mathbf{M})\rho V_{MABC} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

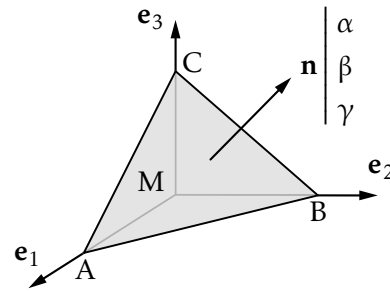


FIGURE 3.3 – Volume élémentaire

La force volumique étant un infiniment petit d'ordre supérieur à celui des termes surfaciques, il vient, lorsque  $S$  tend vers zéro :

$$\mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_1)\alpha S + \mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_2)\beta S + \mathbf{T}(M, -\mathbf{e}_3)\gamma S + \mathbf{T}(M, \mathbf{n})S = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

d'où la propriété annoncée :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \alpha\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_1) + \beta\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_2) + \gamma\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_3) \quad (3.10)$$

Appelons  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les composantes du vecteur contrainte sur la facette de normale extérieure  $\mathbf{n}$ , on obtient, par projection de l'équation d'équilibre (3.10) :

$$\begin{aligned} X &= \alpha\sigma_{11} + \beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{13} \\ Y &= \alpha\sigma_{21} + \beta\sigma_{22} + \gamma\sigma_{23} \\ Z &= \alpha\sigma_{31} + \beta\sigma_{32} + \gamma\sigma_{33} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Pour un point  $M$  fixé,  $\mathbf{n}$  est un vecteur arbitraire et  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  un vecteur indépendant de la base choisie, donc la matrice  $\boldsymbol{\sigma}(M)$  est la matrice d'un endomorphisme.

• **Exemple Traction pure** — On considère le barreau de la figure 3.4 soumis à un effort normal  $N$ . Le barreau est coupé en deux parties (I) et (II) séparées par une section droite  $S_c$ . En supposant la contrainte uniforme sur cette section de normale  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1$ , la matrice des

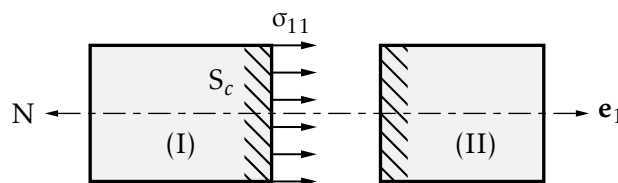


FIGURE 3.4 – Essai de traction pure

contraintes en  $M$  est :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Le vecteur contrainte en  $M$  sur une facette de normale  $\mathbf{n}$ , d'angle  $\alpha$  avec  $\mathbf{e}_1$ , est :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sigma_{11}\mathbf{n} = \sigma_{11} \cos \alpha \mathbf{e}_1 \quad (3.14)$$

•

### 3.4 Propriétés de la matrice des contraintes

Réécrivons les équations d'équilibre d'un domaine de volume  $V$  et de surface frontière  $S$  :

– pour la résultante :

$$\iint_S \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS + \iiint_V \mathbf{f}_V(M) \rho(M) dV = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

– pour le moment :

$$\iint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS + \iiint_V \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_V(M) \rho(M) dV = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

#### 3.4.1 Équations d'équilibre

Dans l'équation (3.15), l'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de volume à l'aide de la formule d'OSTROGRADSKI et devient :

$$\iint_S \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS = \iint_S \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{n} dS = \iiint_V \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(M) dV \quad (3.17)$$

La première équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\iiint_V (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(M) + \mathbf{f}_V(M) \rho(M)) dV = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit le volume choisi, l'intégrand doit être nul, d'où :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(M) + \mathbf{f}_V(M) \rho(M) = \mathbf{0} \quad \forall M \in D \quad (3.19)$$

sachant que  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(M) = \sigma_{ij,j}(M) \mathbf{e}_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , l'équation vectorielle peut s'écrire :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_{V_i} = 0 \quad \forall i \in [1, 2, 3] \quad (3.20)$$

ce qui conduit aux trois équations d'équilibre au point  $M$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho f_{V_1} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho f_{V_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_{V_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ⓜ Les équations d'équilibre (3.21) peuvent aussi s'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho f_{V_r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho f_{V_\theta} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_{V_z} &= 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

### 3.4.2 Réciprocité des cisaillements

Effectuons maintenant la même opération sur l'équation (3.16) de façon à nous ramener à une seule intégrale de volume. En posant  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ , ou pour une composante  $k$  quelconque,  $T_k = \sigma_{kl} n_l$ , l'intégrale de surface devient :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) dS &= \iint_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k \mathbf{e}_i dS = \mathbf{e}_i \iint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \\ &= \mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{kl})_{,l} dV = \mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} (x_{j,l} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l}) dV \end{aligned} \quad (3.22)$$

mais  $x_{j,l} \sigma_{kl} = \delta_{jl} \sigma_{kl} = \sigma_{kj}$ , d'où :

$$\iint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) dS = \mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + x_j \sigma_{kl,l}) dV \quad (3.23)$$

D'autre part :

$$\iiint_V \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{M}) \rho(\mathbf{M}) dV = \mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_{V_k} dV \quad (3.24)$$

En regroupant les deux intégrales de volume, l'équation (3.16) devient :

$$\mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} (x_{j,l} \sigma_{kl} + x_j (\sigma_{kl,l} + \rho f_{V_k})) dV = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

qui, compte tenu de l'équation (3.20), se simplifie pour donner :

$$\mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_{j,l} \sigma_{kl} dV = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

mais  $x_{j,l} \sigma_{kl} = \delta_{jl} \sigma_{kl} = \sigma_{kj}$ , donc :

$$\mathbf{e}_i \iiint_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Cette relation ne peut être vraie pour toute forme de volume  $V$ , que si, en chaque point  $\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$  soit en développant, et en ne gardant que les termes non nuls :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{123} \sigma_{32} + \varepsilon_{132} \sigma_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{231} \sigma_{13} + \varepsilon_{213} \sigma_{31} &= 0 \\ \varepsilon_{312} \sigma_{21} + \varepsilon_{321} \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ces trois relations constituent une propriété des contraintes en un point  $M$  appelée réciprocité des cisaillements. Par exemple, sur deux facettes orthogonales centrées en  $M$ , de normales extérieures  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  et en supposant  $\sigma_{13}$  nulle, les deux



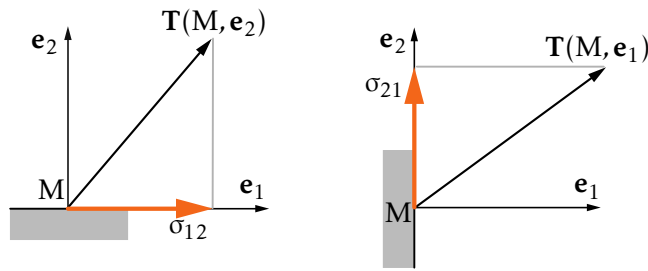


FIGURE 3.5 – Illustration de l'égalité  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

vecteurs contraintes  $\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_1)$  et  $\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_2)$  sont tels que  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , égalité illustrée sur la figure 3.5. Plus généralement, si  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  sont deux vecteurs unitaires orthogonaux quelconques, alors :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) \quad (3.29)$$

La matrice des contraintes en un point quelconque  $M$  du milieu étudié est donc symétrique et prend la forme suivante dans une base quelconque  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

La figure 3.6 rappelle la signification des termes de la matrice  $\sigma(M)$ . Le terme  $\sigma_{ij}$  représente la composante dans la direction  $\mathbf{e}_i$  du vecteur contrainte sur la facette de normale  $\mathbf{e}_j$ . La connaissance de l'état de contrainte en un point  $M$  du milieu nécessite

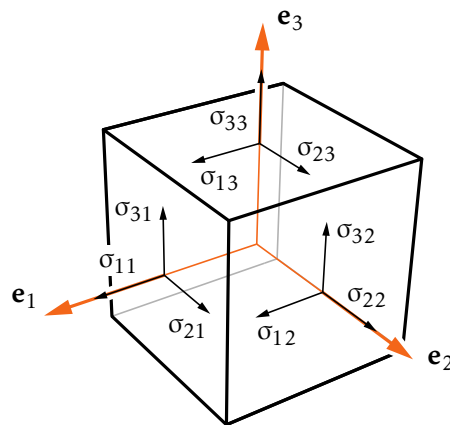


FIGURE 3.6 – Termes  $\sigma_{ij}$  avec  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  et  $\sigma_{32} = \sigma_{23}$

donc la détermination des six grandeurs  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{31}$ .

### 3.4.3 Contraintes principales

La matrice des contraintes  $\sigma(M)$  étant symétrique, elle est diagonalisable. Il existe donc au moins un repère  $(M; \mathbf{e}_I \mathbf{e}_{II} \mathbf{e}_{III})$  dans lequel la matrice s'écrit :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_I & & 0 \\ & \sigma_{II} & \\ 0 & & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Les valeurs propres de la matrice  $\sigma(M)$  sont les contraintes normales principales I, II et III en M, s'exerçant sur trois facettes orthogonales deux à deux, dont les directions des normales (appelées directions principales des contraintes) sont définies par les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Chaque facette dont la normale est colinéaire à une direction principale ne subit donc aucun cisaillement et travaille uniquement en traction ou compression suivant le signe de la contrainte normale principale associée.

### 3.4.4 Conditions aux limites

En un point M de (S), frontière du domaine de normale extérieure  $\mathbf{n}$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  est égal à la répartition surfacique  $\mathbf{f}_s(M)$  :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n} = \mathbf{f}_s(M) \quad (3.32)$$

### 3.4.5 Cas particuliers

Il existe quelques cas particuliers de répartition des contraintes :

- état non contraint : les trois contraintes principales sont nulles, le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  est nul quelle que soit l'orientation de la facette centrée en M ;
- état anti-plan : deux des trois contraintes principales sont nulles ;
- état plan : une des trois contraintes principales est nulle ;
- état isotrope : les trois contraintes principales sont égales ;
- état axisymétrique : deux des trois contraintes principales sont égales.

### 3.4.6 Invariants scalaires

L'équation caractéristique issue de  $\det(\sigma(M) - \lambda \mathbf{I}) = 0$  s'écrit, après développement :

$$\lambda^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2)\lambda - \det \sigma(M) = 0 \quad (3.33)$$

or les contraintes normales principales ne dépendent que de l'état de contrainte au point M, ce qui signifie que les racines de l'équation caractéristique ne dépendent pas de la base dans laquelle est exprimée  $\sigma(M)$  ou encore que les coefficients de l'équation caractéristique sont invariants. On peut donc définir (de la même façon

que pour les déformations) trois invariants scalaires :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ S_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ S_3 &= \det(\sigma(M)) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.4.7 Décomposition en parties sphérique et déviatoire

Posons :

$$\sigma(M) = \frac{S_1}{3}\mathbf{I} + \sigma_D(M) \quad (3.35)$$

Le terme  $\sigma_D(M)$  est appelé partie déviatoire de  $\sigma(M)$ , elle est de trace nulle et a mêmes directions propres que  $\sigma(M)$  ; les valeurs propres valent :

$$\sigma_I - \frac{S_1}{3}; \quad \sigma_{II} - \frac{S_1}{3}; \quad \sigma_{III} - \frac{S_1}{3} \quad (3.36)$$

Le terme  $\sigma_S(M) = \frac{S_1}{3}\mathbf{I}$  est appelé partie sphérique de  $\sigma(M)$ , elle a même trace que  $\sigma(M)$ , trois valeurs propres égales à  $S_1/3$  et admet donc toute direction comme direction propre.

Il s'ensuit que la partie du vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  due à  $\sigma_S(M)$  est normale à la facette et que son module ne dépend pas de  $\mathbf{n}$  (valeurs propres confondues), et d'autre part que la partie déviatoire  $\sigma_D(M)$  est seule responsable du cisaillement et de la différence de avec  $S_1/3$ .

## 3.5 Représentation géométrique des contraintes

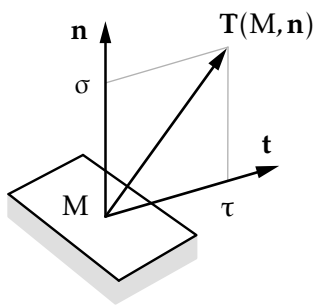


FIGURE 3.7 – Vecteur  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$

On représente le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  en un point  $M$ , dans un plan contenant  $M$  et défini par les axes  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$ , supports respectivement de la composante normale et de la composante tangentielle du vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sigma\mathbf{n} + \tau\mathbf{t}$ . Le vecteur  $\mathbf{t}$  est tel que :

- Si  $\mathbf{n}$  n'appartient pas à un plan principal, alors  $\tau = \tau\mathbf{t}$  et  $\tau = \sqrt{T^2 - \sigma^2}$  ;
- Si  $\mathbf{n}$  appartient au plan principal orthogonal à  $\mathbf{e}_I$  alors le triplet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{e}_I)$  est une base directe et  $\tau = \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}$ .

Dans la base principale des contraintes  $(M; \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$ , le vecteur contraintes  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  a pour expression :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = n_I\sigma_I\mathbf{e}_I + n_{II}\sigma_{II}\mathbf{e}_{II} + n_{III}\sigma_{III}\mathbf{e}_{III} \quad (3.37)$$

où  $n_I$ ,  $n_{II}$  et  $n_{III}$  sont les cosinus directeur de  $\mathbf{n}$  dans la base principale. On en déduit immédiatement que :

$$\mathbf{T}^2(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \sigma^2 + \tau^2 = n_I^2 \sigma_I^2 + n_{II}^2 \sigma_{II}^2 + n_{III}^2 \sigma_{III}^2 \quad (3.38)$$

et enfin :

$$\sigma = \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = n_I \sigma_I + n_{II} \sigma_{II} + n_{III} \sigma_{III} \quad (3.39)$$

avec  $n_I^2 + n_{II}^2 + n_{III}^2 = 1$ . De ces trois équations aux trois inconnues  $n_j^2$ , on tire :

$$\begin{aligned} n_I^2 &= \frac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_{II} + \sigma_{III})\sigma + \sigma_{II}\sigma_{III}}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \\ n_{II}^2 &= \frac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_{III})\sigma + \sigma_I\sigma_{III}}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})} \\ n_{III}^2 &= \frac{\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_{II})\sigma + \sigma_I\sigma_{II}}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En supposant  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ , pour réaliser  $n_j^2 \geq 0$ , il faut donc vérifier :

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_{II} + \sigma_{III})\sigma + \sigma_{II}\sigma_{III} &\geq 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_{III})\sigma + \sigma_I\sigma_{III} &\leq 0 \\ \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_{II})\sigma + \sigma_I\sigma_{II} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'extrémité du vecteur contrainte dans le plan  $(\tau, \sigma)$  ne peut donc appartenir qu'à la zone grisée limitée par les trois cercles de MOHR de diamètres  $\sigma_I - \sigma_{II}$ ,  $\sigma_{II} - \sigma_{III}$  et  $\sigma_I - \sigma_{III}$ .

La représentation dans le plan de MOHR de l'extrémité du vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque par rapport à la base principale n'est pas particulièrement simple. Nous nous limiterons dans la suite au tracé dans le plan de MOHR de l'état de contrainte sur une facette dont la normale est orthogonale à une des directions principales. Supposons, par exemple, que la facette a sa normale orthogonale à  $\mathbf{e}_I$ . Dans ce cas  $n_I$  est nul et la première inéquation devient une équation. L'extrémité du vecteur contrainte appartient donc au cercle de diamètre  $\sigma_{II} - \sigma_{III}$ , et de centre  $C(\frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}, 0)$ . En général, le problème se pose ainsi : tracer les cercles de MOHR relatifs à l'état de contrainte en M représenté par la matrice :

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

connue dans une base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dont une des directions de la base est principale.

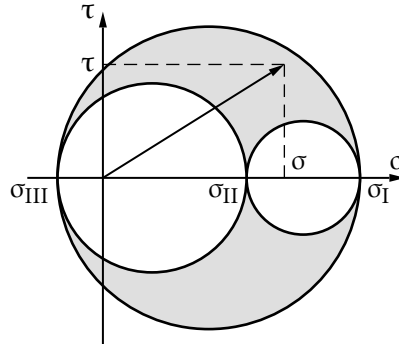


FIGURE 3.8 – Vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque dans le plan de MOHR

**Convention de Mohr** Pour chaque facette dont la normale est orthogonale à une direction principale, on définit une base directe  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1)$ . Dans le plan de Mohr,  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  sera représenté par :

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad \tau = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) \quad (3.43)$$

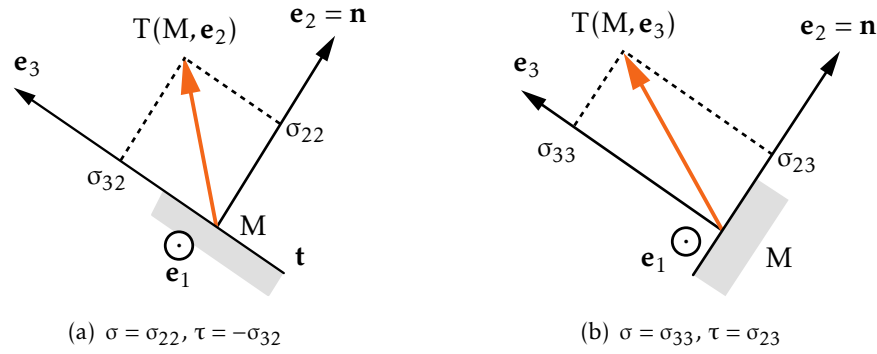


FIGURE 3.9 – Vecteur contrainte dans une base locale

Sur une facette de normale  $\mathbf{n}$  quelconque faisant un angle avec  $\mathbf{e}_2$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$  de composantes  $\sigma$  et  $\tau$  est donné par :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \cos \alpha + \sigma_{23} \sin \alpha \\ \sigma_{23} \cos \alpha + \sigma_{33} \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sigma_{22} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{23} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{33} \sin^2 \alpha \\ \tau &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{23} \sin^2 \alpha - \sigma_{23} \cos^2 \alpha - \sigma_{33} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.45)$$

avec  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1 = \sin \alpha \mathbf{e}_2 - \cos \alpha \mathbf{e}_3$ , soit, en passant à l'arc double :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{23} \sin 2\alpha \\ \tau &= \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \sin 2\alpha - \sigma_{23} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (3.46)$$

On obtient l'équation du cercle de Mohr dans le plan principal  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . La connaissance des deux vecteurs,  $\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_2)$  et  $\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_3)$  indiqués sur la figure 3.10 suffit pour tracer le cercle représentant l'état de contrainte sur toute facette centrée en M et de normale orthogonale à  $\mathbf{e}_1$ . Les extrémités des deux vecteurs sont des points diamétralement opposés du cercle. Ce cercle est centré sur l'axe des abscisse  $(\sigma_{22} + \sigma_{33})/2$  et son rayon vaut :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \sigma_{23}^2} \quad (3.47)$$

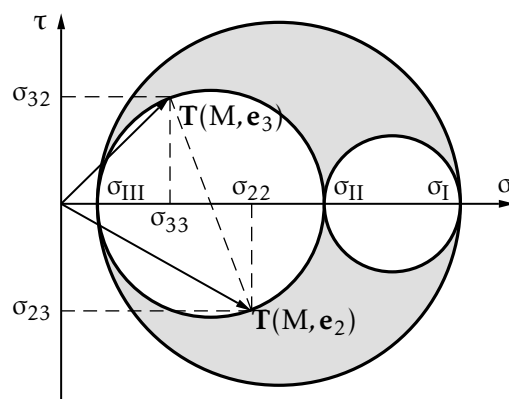
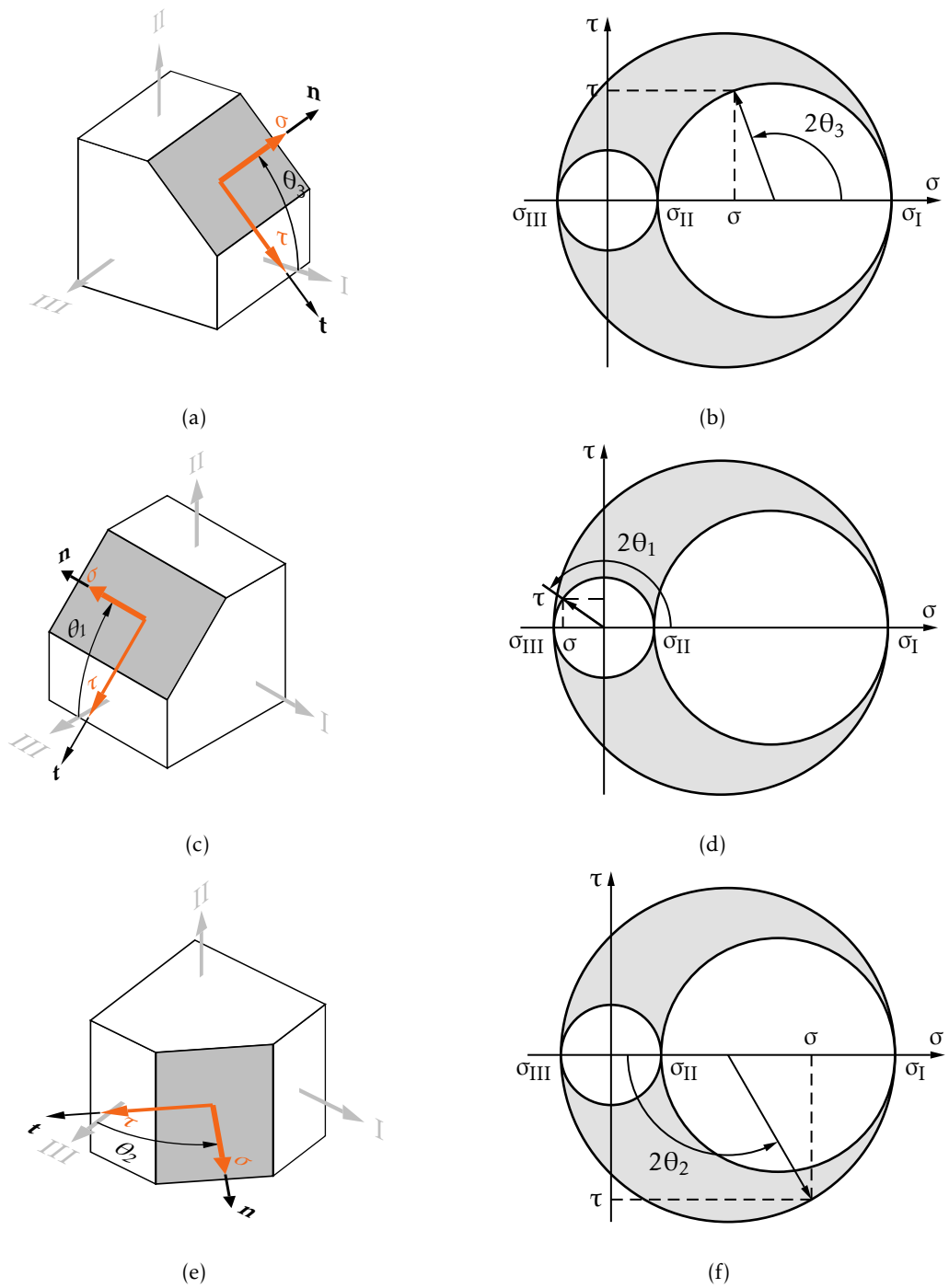


FIGURE 3.10 – Différentes configurations du cercle de MOHR

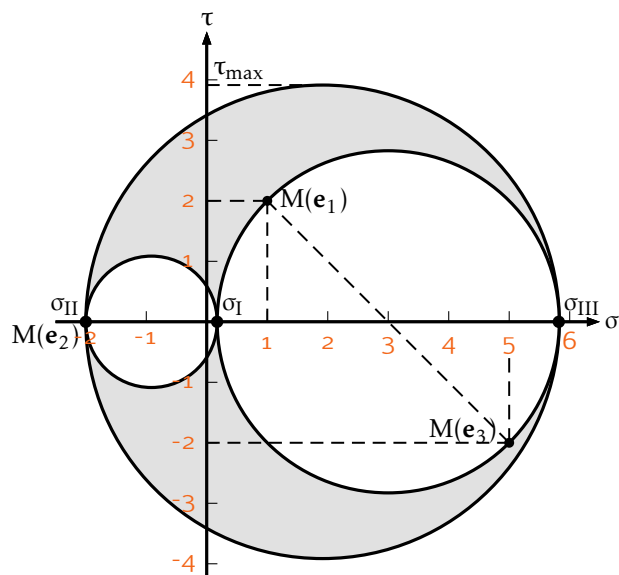
- **Exemple** On considère l'état de contrainte en M, dont la matrice dans la base  $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$  s'écrit :

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{les composantes sont en hbar}) \quad (3.48)$$

Il a pour représentation dans le plan de MOHR de la figure 3.12. On trouve  $\sigma_{III} = 3 + 2\sqrt{2} = 5,8$  hbar,  $\sigma_I = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,171$  hbar,  $\sigma_{II} = -2$  hbar et  $\tau_{\max} = 2,5 + \sqrt{2} = 3,9$  hbar. On rappelle que 1 hbar = 10 MPa. •



**FIGURE 3.11** – Représentation dans le plan de MOHR de l'extrémité du vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque



**FIGURE 3.12** – Extrémité du vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque dans le plan de MOHR





# Relation de comportement en élastostatique

Basée sur l'hypothèse des petites perturbations, la théorie des déformations du chapitre 2 a été développée à partir d'une formulation linéarisée en fonction des composantes du gradient des déplacements. Cette première linéarité dite géométrique a permis de scinder la transformation du milieu sous l'action du champ de déplacement  $\mathbf{U}$  en une déformation et une rotation représentées respectivement par les opérateurs  $\varepsilon_{ij}$  et  $\Omega_{ij}$  en tout point du milieu.

En faisant l'hypothèse d'un état de contrainte indépendant de la rotation, ce dernier ne dépend plus que de l'état de déformation  $\varepsilon_{ij}$ . Lorsque les déformations n'excèdent pas une valeur de l'ordre de 1%, on met en évidence un deuxième type de linéarité concernant les relations entre contraintes et déformations. Dans un domaine restreint, la relation entre contraintes et déformations est linéaire : c'est la linéarité de comportement. Ces deux linéarités vérifiées simultanément sont à l'origine du chapitre 6 détaillant l'*élasticité linéaire*.

## 4.1 Coefficients élastiques

Les solides sont caractérisés par le fait que des déformations ne peuvent exister que si des contraintes sont, ou ont été, appliquées. Si on se restreint aux matériaux métalliques, dans un domaine limité en contraintes, les déformations sont réversibles, c'est le domaine d'élasticité. Pour des contraintes plus élevées, des déformations irréversibles (plastiques) apparaissent. Enfin, il existe un troisième phénomène extrêmement important engendré par les sollicitations, c'est l'endommagement qui conduit à la rupture. Les relations liant contraintes et déformations sont fondées sur l'expérimentation et principalement sur les essais mécaniques de traction/compression et de torsion.

Nous nous limitons ici aux essais mécaniques appliqués à des matériaux isotropes. Signalons également que les relations contraintes-déformations sont formulées dans un cadre thermodynamique cohérent et en accord avec différents principes de la physique.

#### 4.1.1 Essais mécaniques et caractéristiques mécaniques

L'objet des essais mécaniques est d'obtenir une relation entre contraintes et déformations. Le rêve du praticien de l'identification serait un appareil réalisé autour d'un petit cube représentant l'élément de volume et permettant d'appliquer indépendamment les six composantes du tenseur des contraintes ou les six composantes du tenseur des déformations. Dans la réalité, ce sont des machines de traction-compression ou des machines de traction-torsion ou plus rarement des machines d'essais bidimensionnelles et tridimensionnelles. Ajoutons la possibilité de faire des essais en température et l'on aura la panoplie complète de l'expérimentateur en lois de comportement.

#### 4.1.2 Éprouvettes d'essais

D'une façon générale, on appelle éprouvette la pièce qui permet d'isoler un élément de volume représentatif servant à identifier le comportement du matériau considéré. Sa géométrie est l'aboutissement d'une réflexion, issue d'un certain nombre de critères. La norme européenne EN 10002 reprend la norme internationale ISO 783 1968 et fixe les modalités d'essai de traction pour les matériaux métalliques comme celle indiquée sur la figure 4.1. La principale règle est le respect de la taille du volume élémentaire représentatif (V.E.R.). La dimension de l'élément de volume représentatif (V.E.R.) devra être égale à 15 à 20 fois la dimension de l'hétérogénéité élémentaire du matériau considéré.

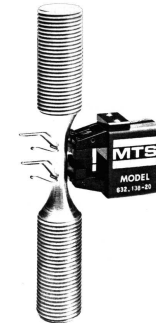


FIGURE 4.1 – Éprouvettes de traction

#### 4.1.3 Essai de traction simple

La figure 4.2 représente une machine de traction et son dispositif d'acquisition. Cette machine permet de caractériser le matériau considéré en traction ou compression



FIGURE 4.2 – Machine de traction M.T.S. avec son système d'acquisition

jusqu'à la phase ultime de la rupture. Durant l'essai mécanique de traction, l'éprou-

vette est sollicitée par une force créée par un vérin hydraulique. Durant l'essai, on étudie comment varie la contrainte normale dans l'axe de l'éprouvette  $\sigma_{11}$  en fonction de la déformation normale axiale  $\varepsilon_{11}$ . Dans le cas d'une éprouvette constituée d'un matériau homogène isotrope, on peut déterminer le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau considéré. Ces deux coefficients caractérisent le matériau dans son domaine d'élasticité.

#### 4.1.4 Mesure de la déformation

On utilise un extensomètre mécanique ou optique qui mesure le déplacement relatif de deux repères distants d'une longueur  $L_0$  tracés sur l'éprouvette. Au départ, la longueur entre les deux repères est  $L_0$ , après sollicitation de l'éprouvette la longueur entre les deux repères devient  $L$ . La déformation  $\varepsilon_{11}$  dans l'axe de l'éprouvette est la quantité scalaire suivante :

$$\varepsilon_{11} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (4.1)$$

Un autre moyen pour la mesure de déformation est la jauge de déformation à fil résistant collée sur l'éprouvette d'essai. La jauge se déforme de manière proportionnelle à l'éprouvette. La jauge ne peut pas être décollée pour une autre utilisation.

#### 4.1.5 Mesure de la contrainte

La contrainte est inaccessible à la mesure directe. Un système dynamométrique permet d'obtenir la force  $F$  créée par la machine d'essai. La contrainte axiale uniformément répartie dans la section  $S$  de l'éprouvette est définie par :

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} \quad (4.2)$$

##### Courbe d'écroissage

La courbe d'écroissage représente la contrainte axiale  $\sigma_{11}$  en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_{11}$ . Elle est le résultat de l'essai de traction ou de compression simple. La figure 4.3 représente la courbe d'écroissage pour différents matériaux.

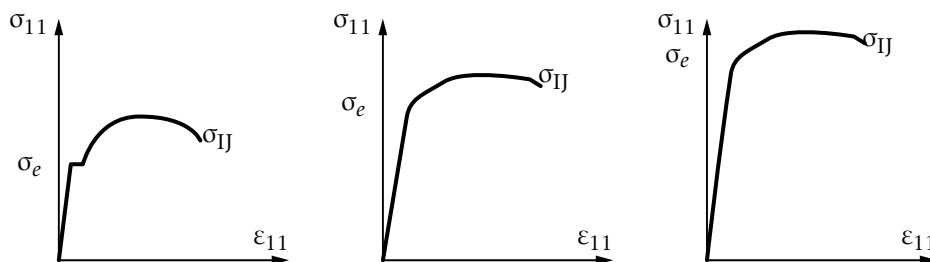


FIGURE 4.3 – Courbes d'écroissage obtenues avec une machine de traction

### Domaine d'élasticité

Tant que la contrainte reste inférieure à une certaine valeur  $\sigma_e$ , le phénomène de déformation ne met en jeu que des mouvements relatifs d'atomes réversibles et linéaires par rapport à la contrainte. On définit :

- E, le module d'Young (1807) qui exprime la raideur de l'éprouvette ;
- $\nu$ , le coefficient de Poisson. Une jauge placée normalement à l'axe de traction, mesure la déformation de contraction transversale. Son rapport avec la déformation longitudinale est constant et permet de définir le coefficient de Poisson :

$$-\nu = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (4.3)$$

Dans le domaine d'élasticité  $|\sigma_{11}| \leq \sigma_e$ , la loi d'élasticité unidimensionnelle est définie, dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , par :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

On peut montrer que dans le cas des matériaux isotropes, seuls deux coefficients sont nécessaires pour caractériser le comportement du matériau dans le domaine élastique. Certaines valeurs sont listées dans le tableau 4.1.

matériaux	E (MPa)	$\nu$	T (°C)
acier XC 10	216 000	0,29	20
acier inoxydable A316	196 000 170 000 131 000	0,29 0,29 0,3	20 200 700
T300/914 fibre carbone et résine époxy	150 000	0,34	20
duralumin AU4G	72 000	0,32	20
béton	30 000	0,2	20
bois (sens fibre)	17 000	0,45	20
résine époxy 914	10 800	0,3	20
polymère araldite	3 000	0,4	20
caoutchouc	2	0,5	20

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques de quelques matériaux

#### 4.1.6 Limite d'élasticité

Les mécanismes responsables des non linéarités de la courbe d'érouissage sont dépendants des matériaux. Les propos suivants sont relatifs aux matériaux métalliques. À partir de  $\sigma_e$ , il apparaît des déformations permanentes ou plastiques dues à des déplacements de couches d'atomes par glissements. Les déformations élastiques  $\varepsilon^e$  continuent d'exister à l'échelle des atomes, les déformations plastiques prennent

naissance à l'échelle plus grande des assemblages d'atomes ou plutôt des défauts d'empilement des atomes. Au lieu d'être bien organisés en maille géométrique, les métaux contiennent des lignes de défauts d'empilement dues aux champs électromagnétiques locaux irréguliers, les dislocations. Lors de sollicitations élasto-plastiques du matériau, la déformation totale est  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Si ces dislocations n'existaient pas, les métaux seraient environ cent fois plus résistants mais on ne pourrait pas les mettre en formes, ils seraient élastiques — mouvement relatif d'atome — et fragiles — décohésion des atomes. Ces dislocations permettent le glissement des couches d'atomes dans des plans. Les déformations plastiques s'accompagnent d'une consolidation du matériau, c'est le phénomène d'écrouissage. Hors du domaine d'élasticité, la courbe est non linéaire et la contrainte monotone croissante. Cette courbe est la caractéristique de plasticité du matériau.

#### 4.1.7 Endommagement et rupture

L'essai de traction se poursuivant, des micro-cavités ou micro-fissures s'amorcent par décohésion d'atomes au voisinage de défauts ou impuretés là où les sollicitations extérieures créent des concentrations de contraintes. C'est le phénomène d'endommagement. Il se situe à une échelle plus grande que la plasticité, l'échelle des cristaux (1/1000 à 1/10 mm). Des micro-fissures se rejoignent pour former une macro fissure qui se propage jusqu'à rupture de l'éprouvette en deux parties pour la contrainte ultime  $\sigma_e$  ou la déformation à rupture  $\varepsilon_r$ . La dégradation  $d$  du matériau peut être mise en évidence par le changement du module d'Young lors du chargement :

$$d = 1 - \frac{E'}{E} \quad (4.5)$$

On distingue classiquement l'endommagement fragile qui conduit à la rupture sans déformation plastique appréciable (béton), l'endommagement ductile qui s'accompagne de grandes déformations plastiques (aciers faiblement alliés), l'endommagement de fatigue qui est provoqué par la répétition de sollicitations durant un grand nombre de cycles.

## 4.2 Essai de torsion

Dans le cas des matériaux isotropes, cet essai est utilisé pour déterminer le module de cisaillement du matériau considéré. L'éprouvette est rigidement maintenue à une extrémité et sollicitée sur l'autre extrémité par un couple appliqué perpendiculairement à l'axe du barreau. La figure 4.4 représente un essai de torsion. Le rapport de la contrainte de cisaillement à la déformation de cisaillement représente le module d'élasticité de cisaillement. Si on développe en plan une surface cylindrique de rayon  $r$  de l'éprouvette en découpant cette surface suivant une génératrice déformée,

analogue à celle étudiée pour introduire le cisaillement. La distorsion angulaire  $\gamma$  est relié à la contrainte tangentielle  $\tau$  par la loi de Hooke :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.6)$$

On constate que :

$$\gamma = \frac{r\alpha}{L} \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha}{L} = \theta \quad (4.7)$$

avec  $\theta$ , angle unitaire de torsion. L'expression de la contrainte est  $\tau = G\theta r$ .

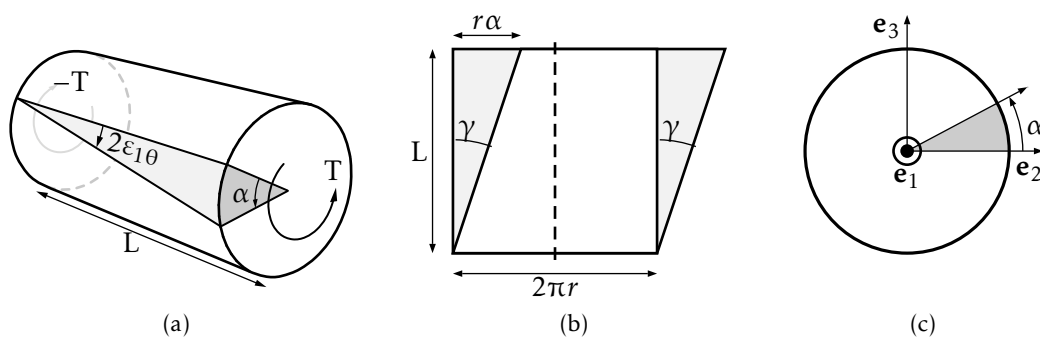


FIGURE 4.4 – Essai de Torsion

#### 4.2.1 Loi d'élasticité linéaire tridimensionnelle

Tant que la contrainte reste inférieure à la limite d'élasticité caractérisée par , les déformations sont réversibles et le plus souvent linéaires. La loi de Hooke (1676) traduit ces propriétés dans le cas de sollicitations unidimensionnelles étendues plus tard aux cas tridimensionnels. La loi de Hooke s'applique à tous les solides dans leur domaine d'élasticité pour rendre compte de leur déformation élastique qui ne dépassent jamais 0,2%, 0,5% ou au plus 1% (sauf le caoutchouc). Un matériau est *isotrope* s'il possède les mêmes propriétés mécaniques élastiques dans toutes les directions en un point quelconque du corps. Un matériau isotrope est caractérisé par deux constantes élastiques indépendantes. Lorsque le matériau ne présente pas une forme quelconque de symétrie élastique, il est dit *anisotrope*. Un matériau *anisotrope* est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes. Lorsqu'un matériau possède trois plans perpendiculaires de symétrie élastique, il est dit *orthotrope* (neuf constantes élastiques indépendantes). Un matériau est dit élastique linéaire s'il existe une relation linéaire bi-univoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (4.8)$$

où les tenseurs des modules  $C_{ijkl}$  et des complaisances  $S_{ijkl}$  d'élasticité sont inverses l'un de l'autre. Le respect des symétries matérielles impose :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} & \text{car } \sigma \text{ est symétrique} \\ S_{ijkl} &= S_{ijlk} & \text{car } \varepsilon \text{ est symétrique} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le tenseur des modules est donc défini par 36 composantes indépendantes. La convexité de l'énergie libre impose la relation suivante :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (4.10)$$

Le tenseur des modules  $C_{ijkl}$  est donc composé de 21 constantes élastiques indépendantes pour un matériau anisotrope.

#### 4.2.2 Matériaux isotropes et loi de Hooke

Un matériau pour lequel les composantes du tenseur  $C_{ijkl}$  sont identiques dans toutes les directions en un point quelconque est fonction de deux paramètres et est dit *isotrope*. Le tenseur des modules se décompose sous la forme suivante :

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.11)$$

Les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  représentent les coefficients de Lamé. Le tenseur des complaisances  $S_{ijkl}$  d'élasticité s'écrit aussi en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson. En fonction des coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  ou des constantes d'élasticité  $E$  et  $\nu$ , les relations contraintes déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad \text{et par inversion} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (4.12)$$

soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) & \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{\tau_3}{G} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})) & \gamma_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G} = \frac{\tau_1}{G} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) & \gamma_{31} &= \frac{\sigma_{31}}{G} = \frac{\tau_2}{G} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les relations entre les coefficients et le module d'Young et le coefficient de Poisson sont :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.15)$$



### 4.2.3 Cas particuliers

#### État de déformations planes

Un état de déformations planes, est caractérisé par un champ des déplacements bi-dimensionnel (composantes non nulles suivant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ ) et tel que  $\varepsilon_{33} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ .

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})) \\ \gamma_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G} = \frac{\tau_3}{G}\end{aligned}\quad (4.16)$$

et  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ . Les coefficients de Lamé sont définis par la relation (4.15).

#### État de Contraintes planes

Un état de contraintes planes, est caractérisé par un champ des déplacements bi-dimensionnel (composantes non nulles suivant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ ) et tel que  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ .

Dans ces conditions :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}); \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_3}{G}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (4.17)$$

Dans ce cas, les coefficients de Lamé deviennent :

$$\mu' = \frac{\nu E}{2(1 + \nu^2)}; \quad \lambda' = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.18)$$

## 4.3 Critères limites de dimensionnement

Les critères limites de dimensionnement, ou critères de rupture, sont utilisés lorsque l'on cherche à concevoir une pièce, pour s'assurer que celle-ci est capable de résister aux sollicitations qu'on lui fait subir. Ils reposent sur l'hypothèse d'un comportement élastique fragile. Ils sont en général déduits des critères de limite d'élasticité utilisés notamment pour l'analyse du comportement en plasticité des matériaux métalliques. Dans le cas unidimensionnel (traction) cette vérification se réduit à assurer que  $|\sigma_{11}| \leq \sigma_e$  avec  $\sigma_e$ , la limite élastique en traction. Dans le cas tridimensionnel, il faut vérifier un critère de limite d'élasticité qui s'écrit :

$$f(\sigma) \leq \sigma_e \quad (4.19)$$

où  $f(\sigma)$  est une fonction réelle, la fonction seuil élastique. Il existe un grand nombre de critères, certains sont valables pour des matériaux isotropes fragiles (fontes, béton), d'autres pour des matériaux ductiles (alliages cuivreux, alliages d'aluminium, aciers doux). Il n'existe pas de critères universels valables pour tous les matériaux.

### 4.3.1 Critère de COULOMB

Ce critère est défini par une relation linéaire entre la contrainte normale et le cisaillement. Il est applicable aux sols mais pas aux métaux.

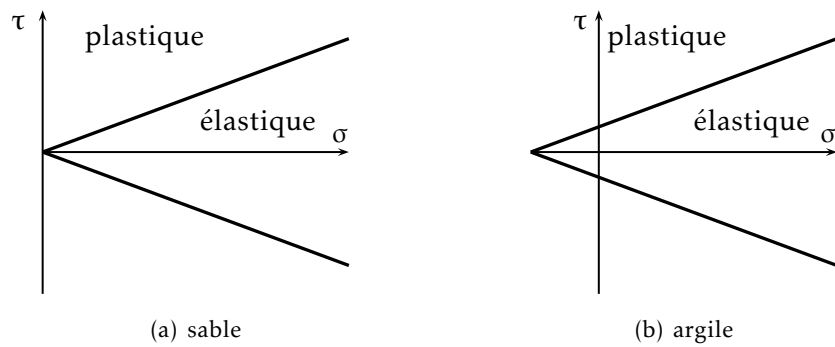


FIGURE 4.5 – Critère de COULOMB

### 4.3.2 Critère de TRESCA

Ce critère s'applique plutôt aux matériaux ductiles. Des essais sur des matériaux ductiles confirment que le début de la plastification en traction a lieu suivant des plans inclinés à  $45^\circ$  par rapport à la direction de chargement. Cette direction correspond à un état de contrainte de cisaillement maximum et  $\tau_e$  est la contrainte tangentielle de cisaillement :

$$\frac{1}{2} \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \tau_e \quad \text{ou} \quad \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \sigma_e \quad (4.20)$$

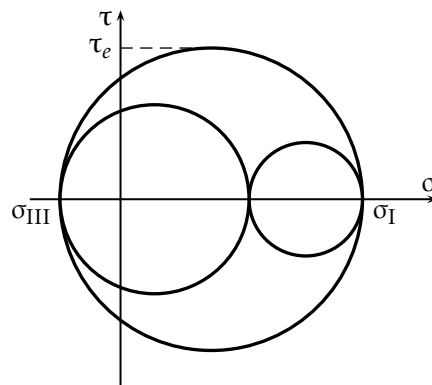


FIGURE 4.6 – Critère de TRESCA

### 4.3.3 Critère de MOHR-CACQUOT

Si on considère une éprouvette et son état de contrainte en un point quelconque  $\sigma(M)$  associé à un chargement donné, si l'on trace pour chaque chargement le plus grand cercle de MOHR correspondant au passage dans le domaine plastique, on constate qu'ils admettent une enveloppe supposée unique ne dépendant que du matériau : *la courbe intrinsèque*. C'est une courbe souvent ouverte obtenue à partir d'essais simples : traction, compression cisaillement. On peut approcher la courbe intrinsèque par deux droites tangentes aux cercles de MOHR de traction pure et de compression pure.

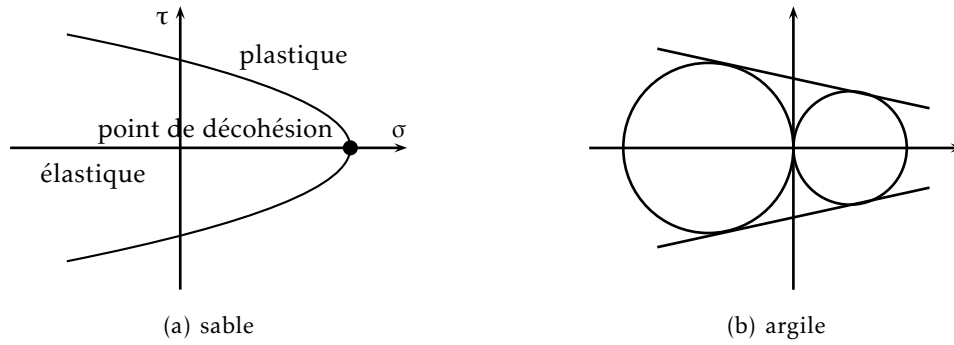


FIGURE 4.7 – Critère de MOHR-CACQUOT

Ⓜ Si la limite élastique en traction  $\sigma_e$  est égale à la limite élastique en compression  $\sigma'_e$  on retrouve le critère de TRESCA.

On peut également approcher la courbe intrinsèque par une parabole. Dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , l'équation générale est :

$$\sigma = -A\tau^2 + B \quad (4.21)$$

les constantes A et B dépendent du matériau. Si on choisit la parabole tangente aux cercles de MOHR de traction et compression, on a :

$$\sigma = -\frac{2\tau^2}{\sigma_e + \sigma'_e} - \frac{\sigma_e - \sigma'_e}{8(\sigma_e + \sigma'_e)} \quad (4.22)$$

et le critère de plasticité s'écrit :

$$(\sigma_I - \sigma_{III})^2 - (\sigma'_e + \sigma_e)(\sigma_I + \sigma_{III}) \leq -\sigma'_e \sigma_e \quad (4.23)$$

#### 4.3.4 Critère de VON MISES

Ce critère s'applique également aux matériaux ductiles et met en œuvre l'énergie de distorsion. Notant qu'un état de contrainte hydrostatique change seulement le volume et non la forme du matériau, le critère s'écrit :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\sigma_D \sigma_D)} \leq \sigma_e \quad \text{avec} \quad \sigma_{Dij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \delta_{ij} \quad (4.24)$$

# Énergie de déformation d'un milieu continu élastique

## 5.1 Énergie de déformation

### 5.1.1 Expression générale et relation avec le travail des forces

Isolons un corps (D) élastique auquel nous ferons subir une transformation quasi statique et sans échange de chaleur le faisant passer d'un état initial (*i*) à un état final (*f*) sous l'action de forces extérieures directement appliquées. Si on note :

- $dQ$ , la quantité de chaleur fournie (nulle ici) ;
- $dT_e$ , le travail des forces extérieures ;
- $dT_i$ , le travail des forces intérieures ;
- $dE_c$ , la variation d'énergie cinétique (nulle ici) ;
- $dU$ , la variation d'énergie interne,

alors, l'équation de conservation qui s'écrit :

$$dQ + dT_e = dE_c + dU \quad (5.1)$$

et le théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_c = dT_e + dT_i \quad (5.2)$$

vont nous permettre d'exprimer le travail des forces intérieures en négligeant la quantité de chaleur fournie et la variation d'énergie cinétique :

$$dT_e + dU - dT_i \quad (5.3)$$

Le travail des forces extérieures appliquées à un milieu continu se déformant très lentement en restant à une température voisine de l'ambiante est égal à sa variation d'énergie interne (potentiel élastique). Il est égal et opposé au travail des forces intérieures (forces résistantes). Il ne dépend que de l'état final et de l'état initial étant donné la réversibilité de la transformation.

### 5.1.2 Potentiel élastique en fonction des contraintes et déformations

Compte tenu de la loi de comportement linéaire, l'énergie de déformation :

- ne dépend que de l'état initial et de l'état final ;
- peut s'exprimer à partir des paramètres de la déformation. Ceux de la translation et de la rotation n'interviennent pas ;
- est un scalaire, nous pourrions travailler avec n'importe quels axes, en particulier avec des axes locaux et principaux.

On peut par un raisonnement simple, calculer l'énergie de déformation en fonction des contraintes et des déformations et ramener le résultat à une expression en fonction des seules contraintes ou des seules déformations en utilisant la loi de comportement. L'énergie de déformation s'exprime en fonction des sollicitations et des déplacements. En un point courant d'un solide, considérons un parallélépipède élémentaire principal, de côtés  $dX_I$ ,  $dX_{II}$ ,  $dX_{III}$ . Les faces sont soumises respectivement à des contraintes principales qui prennent pour valeur  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  en fin de transformation. Par hypothèse de comportement élastique, au cours de la transformation les forces extérieures et les contraintes qui en résultent évoluent progressivement. Supposons qu'à tout instant, lors de leur application, les forces extérieures soient proportionnelles à un paramètre  $\lambda$  évoluant lentement, et tel que partant d'une valeur nulle avant application, il atteigne l'unité en fin de déformation. À un instant courant les contraintes principales valent  $\lambda\sigma_I$ ,  $\lambda\sigma_{II}$  et  $\lambda\sigma_{III}$ . Les déformations qui en résultent sont  $\lambda\varepsilon_I$ ,  $\lambda\varepsilon_{II}$  et  $\lambda\varepsilon_{III}$ . On peut reconstituer le processus de déformation en imaginant qu'au voisinage d'une valeur courante  $\lambda$  si l'on donne une variation  $d\lambda$ , les contraintes ont pour valeurs  $(\lambda + d\lambda)\sigma_I$ ,  $(\lambda + d\lambda)\sigma_{II}$ ,  $(\lambda + d\lambda)\sigma_{III}$ . Les forces correspondantes appliquées sur chaque face, vont travailler dans des déplacements élémentaires, soit  $d\lambda\varepsilon_I dX_I$ ,  $d\lambda\varepsilon_{II} dX_{II}$ ,  $d\lambda\varepsilon_{III} dX_{III}$ . Le travail à fournir pour obtenir la déformation est la somme des travaux effectués par les contraintes réparties respectivement sur les facettes perpendiculaires à  $X_I$ ,  $X_{II}$ ,  $X_{III}$  lorsque  $\lambda$  passe de 0 à 1 <sup>[1]</sup>:

$$dW^{(4)} = \lambda \begin{pmatrix} \sigma_I dX_{II} dX_{III} \\ \sigma_{II} dX_I dX_{III} \\ \sigma_{III} dX_I dX_{II} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_I dX_I \\ \varepsilon_{II} dX_{II} \\ \varepsilon_{III} dX_{III} \end{pmatrix} d\lambda \quad (5.4)$$

Pour un volume élémentaire  $dv = dX_I dX_{II} dX_{III}$  on a <sup>[2]</sup>:

$$dW^{(3)} = \int_0^1 \lambda d\lambda (\sigma_I \varepsilon_I + \sigma_{II} \varepsilon_{II} + \sigma_{III} \varepsilon_{III}) dX_I dX_{II} dX_{III} \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \quad (5.5)$$

donc par unité de volume :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} (\sigma_I \varepsilon_I + \sigma_{II} \varepsilon_{II} + \sigma_{III} \varepsilon_{III}) \quad (5.6)$$

[1] Dans l'équation (5.4), l'exposant <sup>(4)</sup> indique que  $dW$  est une différentielle du quatrième ordre

[2] Dans l'équation (5.5), l'exposant <sup>(3)</sup> indique que  $dW$  est une différentielle du troisième ordre

L'énergie est l'invariant linéaire du tenseur associé à  $\sigma\epsilon$ , c'est-à-dire dans des axes quelconques :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \text{trace}(\sigma\epsilon) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33}) + \epsilon_{12}\sigma_{12} + \epsilon_{13}\sigma_{13} + \epsilon_{23}\sigma_{23} \quad (5.7)$$

En utilisant la loi de Hooke pour éliminer les déformations ou les contraintes, on remarque que :

- l'énergie de déformation s'exprime en fonction des contraintes seules :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2E} (I_1^2(\sigma) - 2(1+\nu)I_2(\sigma)) \quad (5.8)$$

avec (cf chapitre 3) :

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2(\sigma) &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

- l'énergie de déformation s'exprime en fonction des déformations seules :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} ((\lambda + 2\mu)I_1^2(\epsilon) - 4\mu I_2(\epsilon)) \quad (5.10)$$

avec (chapitre 2) :

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon) &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\ I_2(\epsilon) &= \epsilon_{11}\epsilon_{12} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{31}^2 - \epsilon_{23}^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

et les coefficients de Lamé (chapitre 4) :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.12)$$

L'énergie totale de déformation d'un solide est égale à :

$$W = \frac{1}{2} \int_D (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + 2(\sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{23}\epsilon_{23} + \sigma_{13}\epsilon_{13})) dv \quad (5.13)$$

autrement dit :

$$W = \frac{1}{2} \int_D \sigma^t \epsilon dv \quad (5.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\} \quad \text{vecteur contrainte} \\ \epsilon &= \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\} \quad \text{vecteur déformation} \end{aligned} \quad (5.15)$$

## 5.2 Potentiel élastique

### 5.2.1 Travail des sollicitations extérieures

Soit un système matériel élastique initialement en équilibre. Appliquons lui *progressivement* un système de sollicitations (forces et couples) l'amenant jusqu'à un nouvel

état d'équilibre. Les forces extérieures (charges et forces de liaison) qui constituent à tout instant un système en équilibre, effectuent un *travail non nul indépendant du repère choisi*.

Ce travail se retrouve bien sûr intégralement en travail des forces élastiques puisque nous avons supposé que pour toutes ces transformations, il n'y avait pas d'énergie cinétique, d'énergie dissipée sous forme de chaleur et que nous supposons toujours que les réactions des liaisons intérieures ne travaillent pas.

### 5.2.2 Énergie interne en fonction des forces extérieures

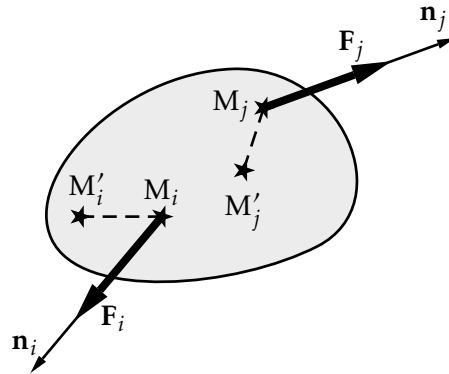


FIGURE 5.1 – Application des efforts extérieurs

Soient  $M_i$  et  $M_j$  deux points courants du solide où sont appliquées les forces  $F_i, F_j$  de supports définis respectivement par les vecteurs unitaires  $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$ , comme indiquée sur la figure 5.1. Nous noterons  $v_i$  la composante sur  $\mathbf{n}_i$ , du déplacement de  $M_i$ . On l'appelle flèche.

La linéarité des déformations en fonction des efforts nous permet d'obtenir les déplacements en un point  $M_i$  sous la forme générale :

$$v_i = \sum_j A_{ij} F_j \quad (5.16)$$

Les coefficients  $A_{ij}$  représentent la flèche créée en  $M_i$  par une force unité appliquée en  $M_j$ . On les appelle *coefficients d'influence*. Considérons un paramètre  $\lambda$  d'application progressive des efforts. Au voisinage de  $\lambda$  pour une évolution  $d\lambda$  :

- $F_i$  passe de  $\lambda F_i$  à  $(1 + d)\lambda F_i$  ;
- $v_i$  passe de  $\lambda v_i$  à  $(1 + d)\lambda v_i$ ,

d'où un accroissement du déplacement suivant  $\mathbf{n}_i$  de  $d\lambda v_i$ . Le travail élémentaire correspondant est  $dT = F_i v_i d\lambda$  et pour toute la transformation et pour toutes les forces :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i F_i v_i = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i A_{ij} F_i F_j \quad (5.17)$$

donc :

$$T = \int_D \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i A_{ij} F_i F_j \quad (5.18)$$

Ⓜ Les efforts extérieurs peuvent être des forces ou des couples ; avec ces derniers, les déplacements sont définis, par analogie aux flèches, de la manière suivante : en un point courant  $M_i$ , le vecteur rotation local dû à toutes les forces et à tous les couples appliqués donne la rotation  $\theta_i$ , analogue de  $v_i$ , par projection sur l'axe du moment du couple appliqué en  $M_i$  :

$$\theta_i = \sum_j B_{ij} \mu_j \quad T = \frac{1}{2} \sum_i \theta_i \mu_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{ij} \mu_i \mu_j$$





# Élasticité linéaire

Ce chapitre s'intéresse à l'évolution d'un système mécanique qui, à partir d'un état initial non chargé (les contraintes sont nulles en tout point), va atteindre un nouvel état d'équilibre sous l'action de sollicitations extérieures. On propose de déterminer ce nouvel état, la connaissance des contraintes dans le système permettant l'analyse de sa tenue aux sollicitations, à l'aide des critères vus précédemment.

L'étude est limitée à un système constitué d'un matériau homogène et isotrope, à comportement élastique linéaire<sup>[1]</sup>, subissant des déformations isothermes, sous l'action de sollicitations extérieures appliquées très progressivement.

La présentation comprend le système d'équations à résoudre ainsi que des méthodes utiles à la recherche d'une solution analytique, cœur de la théorie de l'élasticité linéaire.

Il convient de préciser qu'une solution analytique n'est accessible que dans des situations relativement simples, et que pour traiter un problème pratique, l'ingénieur doit en général avoir recours à des méthodes numériques. Cependant, il est souvent possible d'approcher un problème complexe par un problème simplifié, dont on connaît la solution analytique, ce qui permet une analyse critique des résultats obtenus par des méthodes numériques. D'autre part, la théorie de l'élasticité peut résoudre une grande variété de problèmes et est à la base de théories simplifiées telle que la théorie des poutres utilisée en Résistance des Matériaux.

## 6.1 Position du problème

### 6.1.1 Équations de champs

On a vu, au chapitre 3, que les contraintes sont caractérisées par six composantes, et régies par trois équations d'équilibre :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

ce qui donne en coordonnées cartésiennes :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (6.2)$$

[1] Ce comportement suppose l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations.

Il est évident que ces équations sont insuffisantes pour déterminer complètement les contraintes. Comme le suggère l'expérience<sup>[2]</sup>, le matériau constitutif joue un rôle dans la réponse du système, il faut donc faire intervenir sa loi de comportement. Celle-ci s'écrit dans le cas d'un matériau isotrope (chapitre 4) :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (6.3)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Si on ajoute la relation déformations-déplacements, qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.4)$$

on dispose de  $3 + 6 + 6 = 15$  équations de champs aux dérivées partielles pour 15 inconnues correspondant aux composantes des contraintes, des déformations et du déplacement. Ces équations posées sur le système  $(\Omega)$  sont complétées par des conditions aux limites portant sur la frontière  $\partial\Omega$ . Dans la pratique, ces conditions aux limites permettent de fixer les constantes d'intégration qui apparaissent lors de l'intégration des équations aux dérivées partielles.

### 6.1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites font partie intégrante des données du problème et précisent l'action du milieu extérieur sur le contour  $\partial\Omega$  du système. Les conditions aux limites portent sur les déplacements ou les contraintes et en tout point de  $\partial\Omega$ , on connaît, dans trois directions orthogonales, la composante du déplacement ou du vecteur contrainte. Généralement, on partitionne  $\partial\Omega$  en  $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$  avec  $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma = \emptyset$  et en imposant  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_d$  sur  $\partial\Omega_u$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}_d$  sur  $\partial\Omega_\sigma$ .

On dit que sur  $\partial\Omega_u$ , les conditions aux limites portent sur les déplacements, alors que sur  $\partial\Omega_\sigma$ , elles portent sur les contraintes. On donne ci-dessous quelques exemples de conditions aux limites :

1. essai de traction sur une éprouvette cylindrique dont la base a pour surface  $S$ , illustré sur la figure 6.1 : la frontière  $\partial\Omega$  est l'union des bases du cylindre en  $x = 0$  et  $x = l$  et de la surface latérale du cylindre  $S_l$ . En tout point de  $\partial\Omega$ , le vecteur contrainte est connu ( $\partial\Omega_u = \emptyset$ ) :
  - sur  $S_l$  :  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$  (condition de bord libre) ;
  - en  $x = 0$  :  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = -\frac{F}{S} \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$  ;
  - en  $x = l$  :  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \frac{F}{S} \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ .
2. solide fixé sur une partie de son contour  $\partial\Omega_u$  :  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  ;
3. solide en contact sans frottement avec un solide indéformable : sur la surface de contact, on a :
  - absence de frottement :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = 0 \text{ avec } \mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$$

[2] Il s'agit, principalement, des essais de traction sur une éprouvette en acier ou en aluminium.

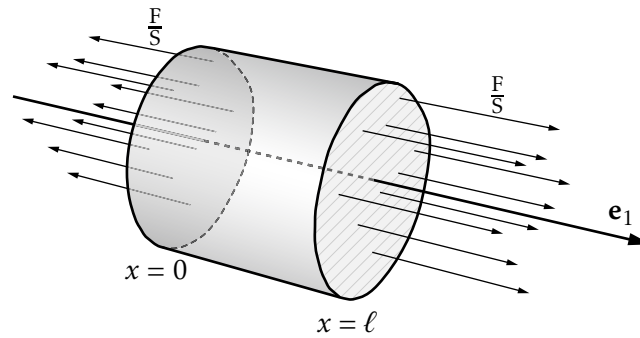


FIGURE 6.1 – Essai de traction sur une éprouvette cylindrique

- contact persistant avec le solide indéformable :

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{U} = 0$$

Sur ce dernier exemple, il apparaît qu'en un point de  $\partial\Omega$ , les conditions aux limites peuvent porter à la fois sur les déplacements et les contraintes, mais que dans chaque direction, on connaît soit la composante du vecteur contrainte, soit la composante du déplacement. Cette propriété est essentielle pour la démonstration de l'unicité de la solution d'un problème d'élasticité, on parle de problème régulier ou bien posé.

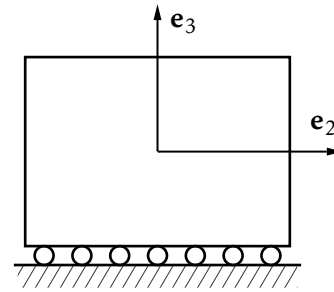


FIGURE 6.2 – Contact sans frottement

### 6.1.3 Récapitulatif

L'ensemble des équations précédentes constitue la formulation du problème d'élasticité. Les données de ce problème sont :

- la géométrie du système ;
- la loi de comportement du matériau, soit les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  (ou  $E$  et  $\nu$ ) ;
- les forces de masse ;
- les conditions aux limites.

Le problème à résoudre s'écrit alors : trouver les champs  $\mathbf{U}$ ,  $[\varepsilon]$  et  $[\sigma]$  solutions de (en cartésiennes) :

- équations de champs :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (6.5a)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (6.5b)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.5c)$$

- conditions aux limites où  $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$  avec  $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma = \emptyset$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u \quad (6.5d)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\sigma \quad (6.5e)$$

## 6.2 Résolution

Avant d'aborder la résolution des problèmes d'élasticité, il importe de s'intéresser aux problèmes d'existence et d'unicité de la solution. La question de l'existence de la solution dépasse le cadre de ce cours. On retiendra seulement que les données du problème doivent être compatibles avec l'équilibre global du système. Cela signifie que les données portant sur les forces de masse et les conditions aux limites doivent permettre la nullité du tenseur des efforts extérieurs. Dans la pratique, dès lors que  $\partial\Omega_u$  n'est pas vide et tel que l'on ne peut avoir de mouvement d'ensemble du solide, cette condition est automatiquement vérifiée. Dans le cas contraire, on doit vérifier que le tenseur des efforts extérieurs constitués des forces de masse et des efforts associés aux conditions aux limites portant sur les contraintes est nul<sup>[3]</sup>.

L'unicité de la solution joue un rôle fondamental dans la résolution d'un problème d'élasticité. En effet, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre un problème. Ainsi, l'approche consiste à proposer une solution puis à vérifier que toutes les équations du problème sont satisfaites. Le résultat d'unicité permet alors de conclure qu'on a obtenu la solution du problème.

La linéarité du problème entraîne l'unicité de la solution. Cette linéarité exprime que pour un système de géométrie et de matériaux donnés, si<sup>[4]</sup> :

- $(\mathbf{U}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\sigma}_1)$  est solution du problème de données  $(\mathbf{f}_1, \text{CL}_1)$  ;
- $(\mathbf{U}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\sigma}_2)$  est solution du problème de données  $(\mathbf{f}_2, \text{CL}_2)$  ;

alors le problème de données  $(\lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2, \lambda_1 \text{CL}_1 + \lambda_2 \text{CL}_2)$  admet pour solution  $(\lambda_1 \mathbf{U}_1 + \lambda_2 \mathbf{U}_2, \lambda_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2, \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2)$ . Ce résultat est encore appelé *principe de superposition*. On peut alors montrer l'unicité de la solution d'un problème régulier, en s'appuyant sur le fait que l'énergie de déformation élastique est une forme définie positive. Nous admettrons ce résultat ici. La notion d'unicité de la solution mérite d'être précisée. En effet, la solution en contraintes et en déformations est effectivement unique, alors qu'en déplacement, elle est définie éventuellement à un déplacement de solide rigide près (solution de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ), sauf si les conditions aux limites portant sur les déplacements permettent de déterminer complètement ce déplacement (dans le cas de l'essai de traction, la solution en déplacement n'est pas unique). On distingue deux approches pour la résolution du problème, selon que la recherche de la solution est conduite en choisissant le champ de déplacement ou le champ de contraintes comme inconnue principale.

### 6.2.1 Approche en déplacement

Cette méthode consiste à choisir le champ de déplacement comme inconnue principale. Dans la pratique, on se donne une certaine forme pour ce champ, et on cherche à vérifier toutes les équations du problème. Ce champ doit satisfaire les conditions

[3] Il est possible de vérifier cette condition sur l'essai de traction dans lequel les forces de masse sont négligées.

[4] Par la suite, les conditions aux limites seront désignées par CL.

aux limites en déplacement. D'autre part, à partir de ce champ, on calcule sans difficulté les déformations, puis les contraintes en utilisant la loi de comportement. On peut alors étudier si les équations d'équilibre et les conditions aux limites portant sur les contraintes sont vérifiées. Pour un matériau homogène, il est plus commode d'exprimer directement les équations d'équilibre en termes de déplacement. On obtient ainsi, en combinant les équations (6.5b) et (6.5c) du problème d'élasticité :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} \\ &= \lambda \varepsilon_{kk,i} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) \\ &= \lambda \varepsilon_{kk,i} + \mu (u_{i,jj} + (u_{j,j})_{,i})\end{aligned}\quad (6.6)$$

Or, on a  $\varepsilon_{kk} = u_{k,k} = u_{j,j}$ , d'où les équations d'équilibre en termes de déplacement, équations dites de Lamé-Navier :

$$(\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu u_{i,kk} + \rho f_i = 0 \quad (6.7)$$

On pourra aussi utiliser ces équations sous la forme :

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

ou encore :

$$(\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{U}) - \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{U}) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6.9)$$

Si le champ de déplacement est irrotationnel, les équations se réduisent à :

$$(\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{U}) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

ce qui implique que  $\mathbf{rot} \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}$  et que  $\rho \mathbf{f}$  est de la forme  $\rho \mathbf{f} = \mathbf{grad} d\Phi$ . Il s'ensuit qu'on obtient après intégration :

$$(\lambda + 2\mu) \mathbf{div} \mathbf{U} + \Phi = \text{cste} \quad (6.11)$$

Le processus de résolution avec la méthode en déplacement est :

- postuler un champ de déplacement ;
- vérifier les conditions aux limites sur les déplacements ;
- vérifier les équations de LAMÉ-NAVIER ;
- vérifier les conditions aux limites sur les contraintes.

On conclut par unicité.

### 6.2.2 Approche en contraintes

La seconde méthode de résolution consiste à rechercher directement les contraintes. Le champ de contrainte doit vérifier les conditions aux limites en contraintes et les équations d'équilibre.

Si tel est le cas, on pourra toujours lui associer une matrice  $\varepsilon$  en utilisant la loi de comportement sous sa forme inverse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (6.12)$$

En revanche, on n'est pas assuré que cette matrice corresponde à une matrice de déformations, c'est-à-dire que l'on puisse trouver un champ  $\mathbf{U}$  tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.13)$$

Ce problème a été abordé dans le chapitre sur les déformations, où on a exprimé les conditions nécessaires et suffisantes, dites de compatibilité des déformations, pour que le champ  $\mathbf{U}$  existe. Ces six équations peuvent être mises sous la forme :

$$\Delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kk,ij} - (\varepsilon_{jk,ik} + \varepsilon_{ik,jk}) = 0 \quad (6.14)$$

En utilisant la loi de comportement, on peut exprimer ces relations en termes de contraintes de la façon suivante, sachant que  $\Delta x = x_{,mm}$  :

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij}\right)_{,mm} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ll,ij} - \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) + \frac{\nu}{E}(\sigma_{ll,ik}\delta_{jk} + \sigma_{ll,jk}\delta_{ik}) = 0 \quad (6.15)$$

ou encore :

$$(1+\nu)\sigma_{ij,mm} - \nu\sigma_{ll,mm}\delta_{ij} + \sigma_{ll,ij} - (1+\nu)(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) = 0 \quad (6.16)$$

Dans la pratique, on n'utilise pas ces équations sous cette forme, on recombine avec les équations d'équilibre. D'autre part, d'après la loi de comportement, on a :

$$\sigma_{ll,mm} = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{ll,mm} \quad (6.17)$$

et à partir des équations de LAMÉ-NAVIER, on établit que :

$$(\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,ii} + \mu(u_{i,kk})_{,i} + \rho f_{i,i} = 0 \quad (6.18)$$

d'où l'on tire que :

$$\varepsilon_{ll,mm} = \frac{-\rho f_{i,i}}{\lambda + 2\mu} \quad (6.19)$$

et par suite :

$$\sigma_{ll,mm} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\rho f_{i,i} \quad (6.20)$$

On obtient alors les équations dites de *BELTRAMI-MICHELL* :

$$\sigma_{ij,mm} + \frac{\nu}{1-\nu}\rho f_{l,l}\delta_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{ll,ij} + \rho f_{j,i} + \rho f_{i,j} = 0 \quad (6.21)$$

Si le champ de contraintes proposé vérifie ces équations, on pourra alors intégrer le champ de déformations et obtenir le déplacement  $\mathbf{U}$  défini à un déplacement de solide rigide près. Il restera alors à satisfaire les conditions aux limites sur les déplacements.

Le processus de résolution est donc :

- postuler un champ de contraintes ;
- vérifier les conditions aux limites sur les contraintes ;
- vérifier les équations d'équilibre ;
- vérifier les équations de BELTRAMI-MICHELL ;
- intégrer le champ de déplacement ;
- vérifier les conditions aux limites sur les déplacements.

On conclut par unicité.

Ⓜ Lorsque les forces de masse sont constantes, tout champ de contraintes constant ou affine par rapport aux variables d'espace satisfait les équations de BELTRAMI-MICHELL.

Si les forces de masse sont nulles, tout champ de contraintes constant vérifie à la fois les équations d'équilibre et les équations de BELTRAMI-MICHELL.

Si on étudie un problème sans condition aux limites portant sur les déplacements, quand le champ de contraintes proposé satisfait les conditions aux limites sur les contraintes, les équations d'équilibre et les équations de BELTRAMI-MICHELL, on peut affirmer qu'on a obtenu la solution en contraintes du problème. Pour l'exemple de la traction simple, on en déduit que  $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$  est la solution du problème.

### 6.2.3 Choix d'une méthode de résolution

Pour un problème d'élasticité linéaire admettant une solution analytique, le choix d'une méthode de résolution doit être guidé par l'intuition qui incite à faire des hypothèses sur la forme des déplacements ou des contraintes. Cependant, comme toute solution doit satisfaire les conditions aux limites du problème, on privilégiera en général l'inconnue sur laquelle les conditions aux limites sont les plus nombreuses.

La proposition d'un candidat à la solution d'un problème est alors une étape délicate, et on ne manquera pas d'exploiter toutes les informations disponibles. En particulier, on utilisera les propriétés géométriques des données du problème (géométrie du système et conditions aux limites) qui peuvent conduire à chercher une solution indépendante d'une ou plusieurs variables d'espace. Enfin, signalons que lorsque les deux méthodes de résolution sont utilisables, on préférera la méthode des déplacements, moins lourde au niveau des calculs que la méthode des contraintes (l'intégration des déformations est assez fastidieuse).

## 6.3 Principe de SAINT-VENANT

Dans la pratique, la formulation des conditions aux limites est difficile, car on ne dispose le plus souvent que d'informations globales sur  $\partial\Omega$ . Ainsi, sur  $\partial\Omega_\sigma$ , on connaît



le torseur résultant des efforts appliqués, mais pas leur répartition exacte, d'où l'impossibilité de définir un problème régulier. Autrement dit, avec de telles données, le problème d'élasticité admet une infinité de solutions, et le problème est alors de savoir laquelle choisir.

La réponse à cette question est donnée par le principe de SAINT-VENANT.

**Principe de SAINT-VENANT** Si la distribution surfacique  $\mathbf{T}_d$  sur une partie  $\partial\Omega_{SV}$  de  $\partial\Omega_\sigma$  est remplacée par une distribution qui lui est *statiquement équivalente* — c'est-à-dire que les torseurs de ces deux distributions sont identiques, les champs de contraintes et de déplacement de la solution du problème d'équilibre élastique sont pratiquement inchangés dans toute partie du solide suffisamment éloignée de  $\partial\Omega_{SV}$ .

Ainsi, si on est capable de trouver une solution d'un problème dont les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_{SV}$  sont exprimées en termes de torseur résultant, on peut considérer cette solution valable dans  $\Omega$ , sauf au voisinage de  $\partial\Omega_{SV}$ . Ce principe autorise une certaine souplesse dans la formulation des conditions aux limites, et permet également d'étendre le champ d'applications de solutions de problèmes réguliers. Par exemple, la solution de l'essai de traction simple vue auparavant est valable loin des bases d'un cylindre sur lesquelles on applique deux efforts  $F$  opposés.

Ce principe empirique est bien vérifié par l'expérience et par les résultats donnés par les méthodes numériques.

## 6.4 Applications

**Formulation en déplacement en élastostatique** Trouver  $\mathbf{U}(\mathbf{M})$  solution des équations d'équilibre tel que les conditions de compatibilité et la loi de comportement soient vérifiées, c'est-à-dire que si on choisit une formulation en déplacement,  $\mathbf{U}(\mathbf{M})$  soit solution des équations de Navier-Lamé.

### 6.4.1 Problèmes axisymétriques

Les problèmes axisymétriques, c'est-à-dire tels que la géométrie et le chargement soient de révolution, font partie d'une classe de problèmes importante en mécanique. Nous allons étudier ici les cylindres sous pression et les disques en rotation uniforme.

#### Champ des déplacements

En un point quelconque le champ des déplacements, en coordonnées cylindriques est de la forme :

$$\mathbf{U}(\mathbf{M}) = u(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + v(r, \theta, z)\mathbf{e}_z + w(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta \quad (6.22)$$

et dans le cas d'un chargement de révolution, la composante  $w$  est nulle.

### Champ des déformations

Les termes de la matrice des déformations  $\varepsilon$ , sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= u_{,r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{u_{,\theta} - w}{r} + w_{,r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u + w_{,\theta}}{r} & \text{et} & \quad \gamma_{\theta z} = w_{,z} + \frac{v_{,\theta}}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= v_{,z} & \gamma_{rz} &= u_{,z} + v_{,r} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Dans le cas d'un chargement de révolution,  $u$  et  $v$  ne dépendent que de  $r$  et de  $z$  et les composantes non nulles de la matrice des déformations, sont :

$$\varepsilon_{rr} = u_{,r} \quad \varepsilon_{zz} = v_{,z} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{u_{,z} + v_{,r}}{2} \quad (6.24)$$

### Loi de comportement

Dans le cas de problèmes axisymétriques, la relation générale contraintes-déformations, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu \\ \nu & 1 & \nu \\ \nu & \nu & 1 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

### Équations d'équilibre

En coordonnées cylindriques, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} + \rho f_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho f_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Dans le cas d'un chargement de révolution d'axe  $\mathbf{e}_3$ , la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  ne varie pas dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta z}$  et les composantes de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_z$  sont nulles du faite de la réciprocité des cisaillements. Dans ces conditions, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho f_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

#### 6.4.2 Cylindres soumis à des pressions uniformes

##### Étude des cylindres sans effet de fond

Dans cette configuration de la figure 6.4, le chargement selon  $\mathbf{e}_3$  est nul et, compte tenu des résultats précédents concernant les problèmes axisymétriques, les équations

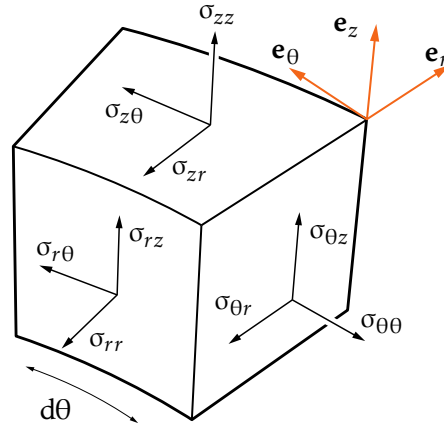


FIGURE 6.3 – Volume élémentaire en coordonnées cylindriques

tions de LAMÉ-CLAPEYRON se réduisent à l'équation scalaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (6.28)$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (6.29)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  des constantes d'intégration. Les composantes du champ des défor-

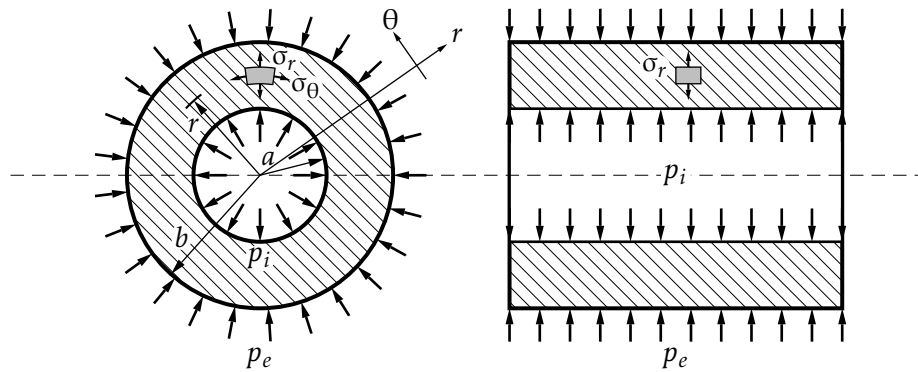


FIGURE 6.4 – Cylindres épais et chargement de révolution

mations sont alors égales à :

$$\varepsilon_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (6.30)$$

et l'expression des contraintes est :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( C_1(1+\nu) - C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right) \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( C_1(1+\nu) + C_2 \frac{(1-\nu)}{r^2} \right) \quad (6.31)$$

soit également en introduisant des constantes simplificatrices A et B :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad (6.32)$$

Les conditions aux limites naturelles  $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d$  déterminent ces constantes, ce qui, dans le cas particulier considéré, entraîne :

$$\sigma_{rr}(R_1) = -p_{\text{int}} = -p_1 \quad \text{et} \quad \sigma_{rr}(R_2) = -p_{\text{ext}} = -p_2 \quad (6.33)$$

On obtient alors :

$$-p_1 = A - \frac{B}{R_1^2}; \quad -p_2 = A - \frac{B}{R_2^2} \quad (6.34)$$

ce qui conduit à :

$$A = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}; \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.35)$$

et les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont égales à :

$$C_1 = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}; \quad C_2 = \frac{1 + \nu}{E} \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 - p_2)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.36)$$

Ⓜ La somme des contraintes  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2A$  est constante et donc indépendante de  $r$ . De même, la dilatation linéique  $\varepsilon_{zz}$  est constante.

**Cylindre soumis seulement à une pression intérieure** Dans ce cas  $p_2 = 0$  et :

$$A = p_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = p_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = A R_2^2 \quad (6.37)$$

d'où on déduit :

$$\sigma_{rr} = p_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) \quad \text{et} \quad \sigma_{\theta\theta} = p_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right) \quad (6.38)$$

et :

$$u = p_1 \frac{R_1^2}{E(R_2^2 - R_1^2)} r \left( (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R_2^2}{r^2} \right) \quad (6.39)$$

**Cylindre soumis seulement à une pression extérieure** Dans ce cas  $p_1 = 0$  et :

$$A = -p_2 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = -p_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = A R_1^2 \quad (6.40)$$

d'où on déduit :

$$\sigma_{rr} = -p_2 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \quad \text{et} \quad \sigma_{\theta\theta} = -p_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) \quad (6.41)$$

et :

$$u = -p_2 \frac{r R_2^2}{E(R_2^2 - R_1^2)} \left( (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R_1^2}{r^2} \right) \quad (6.42)$$

**Effet longitudinal ou effet de fond** Jusqu'ici, nous avons considéré un état plan de contrainte, c'est-à-dire que nous avons supposé qu'il n'y avait pas de contrainte agissant dans la direction  $\mathbf{e}_3$ . La déformation longitudinale est alors *non nulle* :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{2\nu}{E} \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.43)$$

Dans le cas où le cylindre subit une contrainte longitudinale, due par exemple à l'effet de fond (cylindre de longueur finie muni de fonds), cette contrainte n'affecte pas la répartition des contraintes radiale et tangentielle. Toutefois, elle influe sur le déplacement radial et sur les déformations. C'est pourquoi nous devons tenir compte de cet effet et le superposer à celui que nous avons étudié ci-dessus.

L'état plan de déformation, cas particulier où aucune déformation axiale ne peut se produire, mérite d'être étudié. La dilatation linéique  $\varepsilon_{zz}$  nulle entraîne :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (6.44)$$

soit :

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{R_1^2 p_1 - R_2^2 p_2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.45)$$

**Cylindres composés et frettage** Des pressions intérieure  $p_1$  ou extérieure  $p_2$  peuvent induire des contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  très élevées. Une augmentation de l'épaisseur du tube, ne suffit pas toujours pour maintenir un niveau de contrainte acceptable. On a alors recours au frettage.

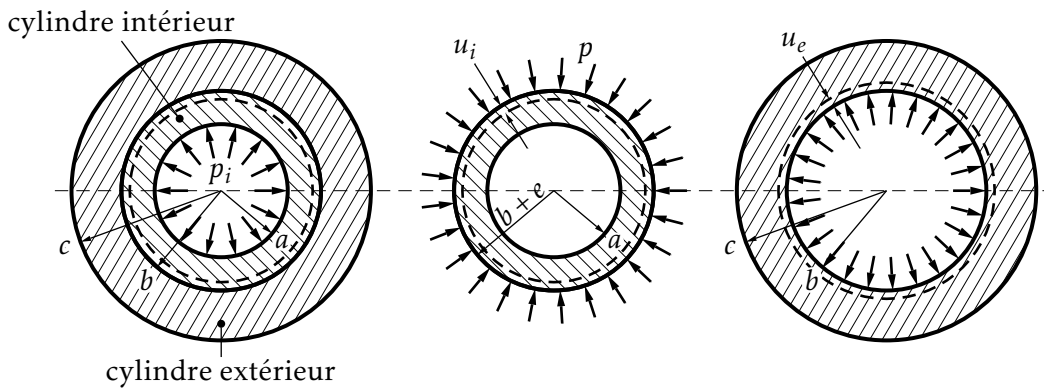


FIGURE 6.5 – Frettage

**Pression de serrage** Soit  $u_1(r)$  le déplacement radial dans le cylindre intérieur (1) de caractéristiques mécaniques  $E_1$ , et  $u_2(r)$  le déplacement dans le cylindre extérieur (2) de caractéristiques mécaniques  $E_2$ . Avant montage, le rayon extérieur  $R_2'$  du cylindre intérieur est supérieur à  $R_2''$  rayon intérieur du cylindre extérieur. Le serrage (jeu négatif) est noté  $e$  et est égal à :  $e = R_2' - R_2''$ . La pression de serrage est

déterminée en écrivant que le rayon commun final  $R_2$  est égal à :

$$R_2 = R'_2 + u_1(R'_2) = R''_2 + u_2(R''_2) \quad (6.46)$$

soit :

$$e = u_2(R''_2) - u_1(R'_2) \quad (6.47)$$

Les expressions précédentes entraînent, avec  $R'_2 = R''_2 = R_2$  :

$$u_1(R_2) = -p \frac{R_2^3}{E_1(R_2^2 - R_1^2)} \left( (1 - \nu_1) + (1 + \nu_1) \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \quad (6.48)$$

et :

$$u_2(R_2) = p \frac{R_2^3}{E_2(R_3^2 - R_2^2)} \left( (1 - \nu_2) + (1 + \nu_2) \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) \quad (6.49)$$

et la pression de serrage  $p$  est donnée par :

$$p = e \left[ \frac{R_2}{E_2} \left( \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + \nu_2 \right) + \frac{R_2}{E_1} \left( \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \nu_1 \right) \right]^{-1} \quad (6.50)$$

et dans le cas où les deux cylindres sont faits du même matériau, l'équation (6.50) se simplifie :

$$p = \frac{Ee(R_3^2 - R_2^2)(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2^3(R_3^2 - R_1^2)} \quad (6.51)$$

### 6.4.3 Disque d'épaisseur uniforme en rotation

Lorsqu'un disque tourne à vitesse constante autour de son axe, les effets dynamiques peuvent être considérés dans un repère mobile lié au disque, comme des forces centrifuges s'exerçant partout dans la masse de ce disque. Ces forces de volume sont axisymétriques et sont d'intensité  $\rho f_r = \rho \omega^2 r$  (en  $N/m^3$ ) avec  $\rho$  masse volumique du matériau.

Compte tenu de la symétrie du corps, les contraintes ne varient pas selon la direction longitudinale, elles sont axisymétriques et ne dépendent que de la coordonnée  $r$ . Les équations d'équilibre se réduisent à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (6.52)$$

Comme précédemment, en combinant, le déplacement radial  $u(r)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 r \quad (6.53)$$

À la solution générale (6.8) de l'équation sans second membre, on ajoute la solution particulière :

$$u_p = -(1 - \nu^2) \frac{\rho \omega^2 r^3}{8E} \quad (6.54)$$

et la solution complète est :

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - (1 - \nu^2) \frac{\rho \omega^2 r^3}{8E} \quad (6.55)$$

et les contraintes sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ C_1(1 + \nu) - C_2 \frac{(1 - \nu)}{r^2} - (3 + \nu)(1 - \nu^2) \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ C_1(1 + \nu) + C_2 \frac{(1 - \nu)}{r^2} - (1 + 3\nu)(1 - \nu^2) \frac{\rho \omega^2 r^2}{8E} \right] \end{aligned} \quad (6.56)$$

### Disque annulaire en rotation

Pour ce type de disque de rayons  $a$  et  $b$ , les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0 \quad \sigma_{rr}|_{r=b} = 0 \quad (6.57)$$

et en appliquant ces conditions à l'équation précédente donnant  $\sigma_{rr}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (3 + \nu) \frac{\rho \omega^2 b^2}{8} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 - \left( \frac{r}{b} \right)^2 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= (3 + \nu) \frac{\rho \omega^2 b^2}{8} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \left( \frac{r}{b} \right)^2 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \\ u &= (3 + \nu)(1 - \nu) \frac{\rho \omega^2 b^2 r}{8E} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1 - \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \left( \frac{r}{b} \right)^2 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

La répartition des contraintes et du déplacement radial est illustrée graphiquement sur la figure suivante : Les valeurs limites des différentes grandeurs sont égales à :

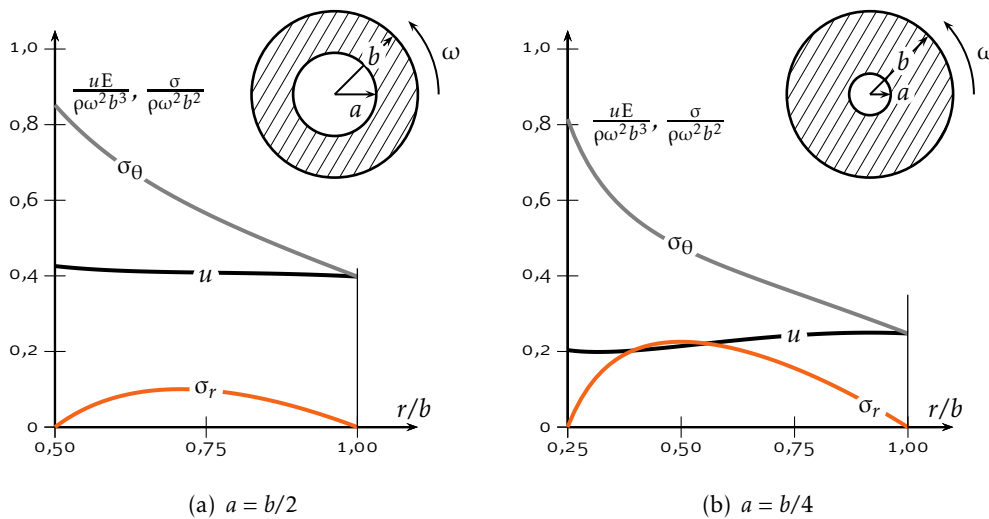


FIGURE 6.6 – Répartition des contraintes et déplacement radial d'un cylindre en rotation

– pour  $r = a$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1-\nu}{4}\rho\omega^2b^2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{3+\nu}{1-\nu}\right] \\ u &= \frac{3+\nu}{4E}\rho\omega^2b^2a\left[1 + \frac{1-\nu}{3+\nu}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\end{aligned}\quad (6.59)$$

– pour  $r = b$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1-\nu}{4}\rho\omega^2b^2\left[1 + \frac{3+\nu}{1-\nu}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \\ u &= \frac{3+\nu}{4E}\rho\omega^2b^2a\left[\frac{1-\nu}{3+\nu} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\end{aligned}\quad (6.60)$$

et la contrainte radiale maximum est obtenue pour  $r = \sqrt{ab}$  et est égale à :

$$(\sigma_{rr})_{\max} = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2b^2\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 \quad (6.61)$$

#### Disque plein en rotation

Pour ce type de disque de rayon  $b$  ( $a = 0$ ) les conditions aux limites sont  $u|_{r=0} = 0$  et  $\sigma_{rr}|_{r=b} = 0$  et en appliquant ces conditions aux équations donnant  $\sigma_{rr}$  et  $u(r)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (3+\nu)\frac{\rho\omega^2b^2}{8}\left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= (3+\nu)\frac{\rho\omega^2b^2}{8}\left[1 + \frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] \\ u &= (1-\nu)\frac{\rho\omega^2b^3}{8E}\left[(3+\nu)\left(\frac{r}{b}\right) - (1+\nu)\left(\frac{r}{b}\right)^3\right]\end{aligned}\quad (6.62)$$

Les contraintes sont maximum pour  $r = 0$  et :

$$(\sigma_{rr})_{\max} = (\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2b^2 \quad (6.63)$$

le déplacement radial maximum obtenu pour  $r = b$  vaut :

$$u = \frac{1-\nu}{4E}\rho\omega^2b^3 \quad (6.64)$$





# Introduction à la théorie des poutres

## 7.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des poutres, c'est-à-dire à des solides élan- cés dont une dimension est grande devant les deux autres. Cette particularité géo- métrique incite à rechercher des hypothèses simplificatrices pour décrire leur com- portement, à l'aide d'une modélisation mono-dimensionnelle, afin d'éviter la com- plexité de l'approche tridimensionnelle. Pour justifier ces hypothèses, il convient cependant de pouvoir disposer d'une solution rigoureuse de référence. C'est l'objec- tif de l'étude du problème dit de SAINT-VENANT, qui sera traitée dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle.

Afin de ne pas alourdir la présentation, seuls les résultats essentiels seront four- nis, sans rentrer dans le détail de la résolution des problèmes d'élasticité. Le lecteur désireux d'approfondir ces questions pourra se reporter aux quelques références bi- bliographiques données à la fin de ce document.

## 7.2 Problème de SAINT-VENANT

### 7.2.1 Position du problème

On étudie la réponse élastique d'un solide cylindrique de section constante  $S$ , d'axe  $\mathbf{e}_1$  et de longueur  $\ell$  : le domaine final est donc  $\Omega = [0; \ell] \times S$  comme indiqué sur la figure 7.1. Ce solide est uniquement sollicité sur ses sections extrêmes : les efforts volumiques sont donc nuls et la surface latérale  $S_\ell = [0; \ell] \times \partial S$  est libre. D'autre part, les sollicitations sur les sections extrêmes  $S_0$  et  $S_1$  ne sont connues que par leurs torseurs résultants, aux centres de surface  $G_0$  et  $G_1$  de ces sections. Ainsi, les torseurs  $(\mathbf{R}_0, \mathbf{M}_{G_0})$  et  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{M}_{G_1})$  sont donnés et le problème à résoudre s'écrit en cartésiennes :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \tag{7.1}$$

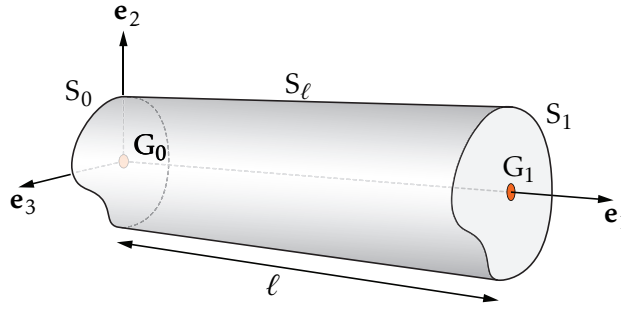


FIGURE 7.1 – Notations d'une poutre

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) &= \mathbf{0} \text{ sur } S_\ell \\ \mathbf{R}|_{x_1=0} &= \mathbf{R}_0; \quad \mathbf{M}_G|_{x_1=0} = \mathbf{M}_{G_0} \\ \mathbf{R}|_{x_1=\ell} &= \mathbf{R}_1; \quad \mathbf{M}_G|_{x_1=\ell} = \mathbf{M}_{G_1} \end{aligned}$$

et les notations :

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_1) dS; \quad \mathbf{M}_G = \int_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{e}_1) dS$$

Il en résulte que l'on ne peut mettre les conditions aux limites sous la forme :

$$\forall \mathbf{M} \in \partial\Omega, \forall \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U} \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) \quad \text{donnés} \quad (7.2)$$

et donc que le problème précédent n'est pas régulier et admet une infinité de solutions. Cependant, d'après le principe de SAINT-VENANT, loin de  $S_0$  et  $S_1$ , l'écart entre les solutions est négligeable, ce qui signifie que toute solution du problème peut être considérée comme valable dans cette zone, et ce, quelle que soit la façon dont sont appliquées les sollicitations sur les sections extrêmes (à torseur égal). Il apparaît ainsi que la solution obtenue sera exploitable à condition que la longueur du cylindre soit grande devant les dimensions de la section. Enfin, le problème précédent ne possédant pas de conditions aux limites de type déplacement imposé, il admettra des solutions à condition que l'équilibre global soit respecté, ce qui impose :

$$\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}_{G_0} + \mathbf{M}_{G_1} + \ell \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

### 7.2.2 Recherche d'une solution

Grâce à la linéarité du problème, on peut utiliser le principe de superposition et décomposer le problème précédent en six problèmes élémentaires, correspondant à des sollicitations de nature différente. Nous écrivons donc la résultante en force :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{13} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

et la résultante en moment :

$$\mathbf{M}_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

où  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{M}_{G_0}$  se déduisent de  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{M}_{G_1}$  en utilisant l'équilibre global. Nous pouvons envisager successivement les six cas dont quatre sont schématisés sur la figure 7.2. Les deux autres cas sont les flexions pure et simple dans le plan  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ . Étant donné

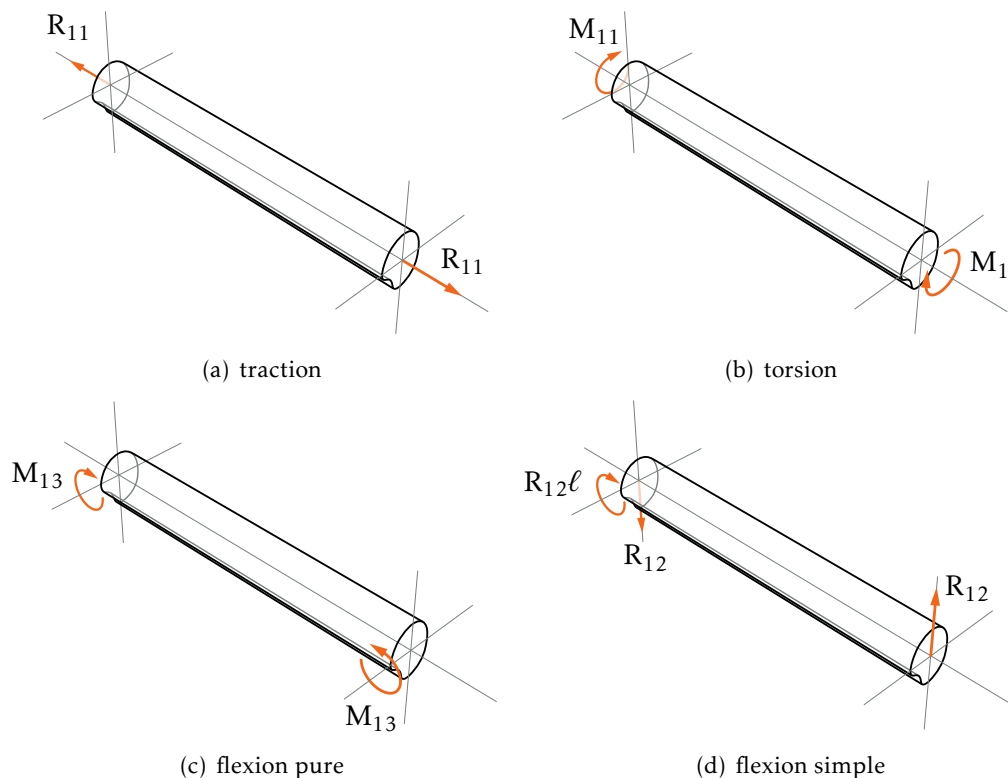


FIGURE 7.2 – Chargements d'une poutre. Les axes sont ceux de la figure 7.1

que toutes les conditions aux limites portent sur les contraintes, on est amené à utiliser l'approche en contraintes pour résoudre ce problème. On cherchera donc le champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre et de BELTRAMI-MICHELL, et les conditions aux limites, soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ \sigma_{ij,mm} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,jj} &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) &= \mathbf{0} \text{ sur } S_\ell \\ \mathbf{R}|_{x_1=0} &= \mathbf{R}_0; \quad \mathbf{M}_G|_{x_1=0} = \mathbf{M}_{G_0} \\ \mathbf{R}|_{x_1=\ell} &= \mathbf{R}_1; \quad \mathbf{M}_G|_{x_1=\ell} = \mathbf{M}_{G_1} \end{aligned}$$

### Traction-compression

Ce problème a déjà été abordé au cours du chapitre précédent et on vérifie sans difficulté que :

$$\sigma = \frac{R_{11}}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

est solution du problème pour le cas de charge 7.2(a) et où  $A$  représente l'aire de la section droite. On en déduit en utilisant la loi de comportement que :

$$\varepsilon = \frac{R_{11}}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

et après intégration, à un déplacement de solide rigide près :

$$\mathbf{U} = \frac{R_{11}}{EA} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

On obtient donc un déplacement axial selon  $\mathbf{e}_1$  linéaire en  $x_1$ , et des déplacements transversaux (selon  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ ) indépendants de  $x_1$ . Pour une section rectangulaire de dimension  $a \times b$ , la déformée selon l'axe de la poutre et la section est indiquée sur la figure 7.3. Pour une poutre élancée (ou longue), c'est à dire si la longueur  $\ell$  est très

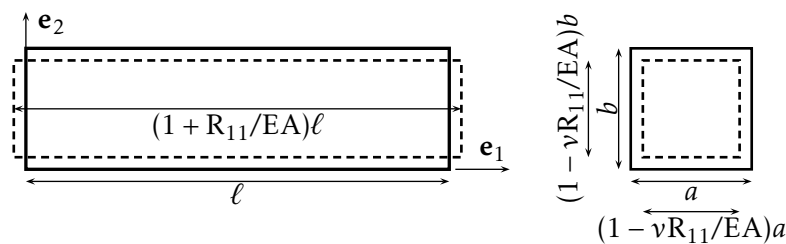


FIGURE 7.3 – Contraction d'une section sous chargement axial : effet de Poisson

supérieure aux dimensions de la section, on note que le changement de forme de la section est négligeable devant le déplacement axial.

### Flexion pure

On s'intéresse maintenant aux cas de charge 7.2(c), le chargement étant dû uniquement à des moments aux extrémités, portés par l'axe  $\mathbf{e}_2$  (ou  $\mathbf{e}_3$ ). On peut montrer que pour le cas du moment autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ , si les directions  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  sont principales

d'inertie<sup>[1]</sup>, alors :

$$\sigma = -\frac{M_{13}}{I_{33}}x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad I_{33} = \int_S x_2^2 dS \quad (7.10)$$

où  $I_{33}$  est moment quadratique principal.

Ainsi, la matière travaille en traction ou en compression selon le signe de  $x_2$ , et pour  $M_{13} > 0$ , les contraintes normales  $\sigma_{11}$  se répartissent comme indiqué sur la figure 7.4. La loi de comportement donne :

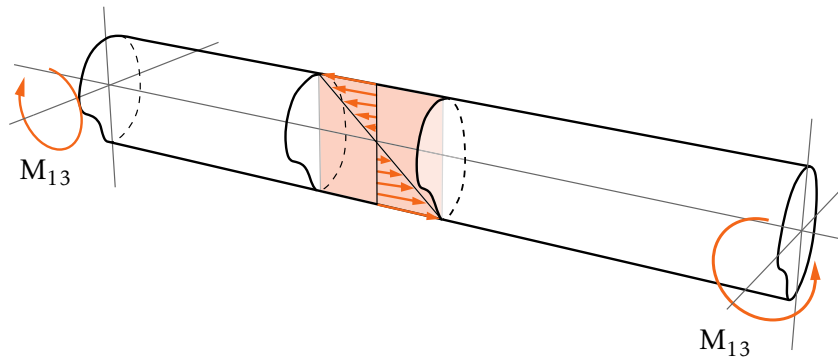


FIGURE 7.4 – Répartition des contraintes normales en flexion pure. Les axes sont ceux de la figure 7.1

$$\varepsilon = -\frac{M_{13}}{I_{33}}x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Et après intégration on trouve, à un déplacement de solide rigide près :

$$\mathbf{U} = \frac{M_{13}}{EI_{33}} \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_3^2)) \\ \nu x_2x_3 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Ainsi, le centre de surface ( $x_2 = x_3 = 0$ ) subit un déplacement selon  $\mathbf{e}_2$  de valeur :

$$v = \frac{1}{2} \frac{M_{13}}{EI_{33}} x_1^2 \quad (7.13)$$

et décrit donc une parabole. Si on calcule alors la courbure  $K$  de la courbe  $v(x_1)$ , celle-ci est obtenue grâce à la formule :

$$K = \frac{v_{,11}}{(1 + (v_{,1})^2)^{3/2}} \quad (7.14)$$

[1] Il semble opportun de rappeler que les directions  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  sont principales d'inertie si leur produit croisé est nul, soit :

$$\int_S x_i x_j dS = 0$$

Or,  $v_{,1}$  est un terme de  $\mathbf{H}$  et donc, dans l'hypothèse des petites transformations, est très petit devant 1, si bien que  $K \approx v_{,11}$ . En outre, dans le cas présent,  $K$  est constant et vaut  $K = \frac{M_{13}}{EI_{33}}$ , la déformée de la ligne des centres de surface est donc un cercle de rayon  $1/K$ .

Par la suite, on appellera *ligne moyenne* (ou fibre moyenne), la ligne des centres de surface.

Si on s'intéresse à la déformée d'une section droite ( $x_1 = \text{cste}$ ), on obtient pour une section rectangulaire la déformée ci-dessous, avec un changement de forme (gonflement ou contraction) directement lié au signe de  $x_2$  compte tenu de l'expression de  $\sigma_{11}$ , ce qui traduit l'effet POISSON. Pour une poutre longue, on peut considérer

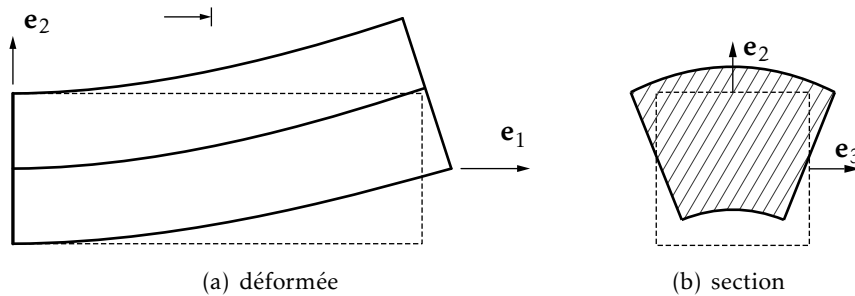


FIGURE 7.5 – Flexion simple

que le déplacement selon  $e_2$  est quasiment constant sur la section, et que les déplacements correspondants au changement de forme de la section sont négligeables par rapport à ce dernier. Si on calcule le vecteur rotation  $\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{U}$ , on obtient  $\omega = \frac{M_{13}}{EI_{33}} (v x_3 e_1 + x_1 e_3)$ . Ainsi, dans une section à  $x_1 = \text{cste}$ , la rotation est constante autour de  $e_3$ . La déformée de cette section est donc plane, avec dans le plan le changement de forme représenté auparavant. D'autre part,  $\omega_3 = \frac{M_{13}}{EI_{33}} x_1$ , est égal à la pente  $v_{,1}$  du déplacement de la ligne moyenne, ce qui signifie que la déformée de la section droite est perpendiculaire à la déformée de la ligne moyenne. On peut aussi justifier ce résultat en remarquant que  $\gamma_{12} = 0$ , d'où le fait que les transformés de  $e_1$  et  $e_2$  restent perpendiculaires. Cette propriété est schématisée sur la figure 7.5.

Le cas de la flexion autour de l'axe  $e_2$  (cas de charge 7.2(c)) se traite de façon analogue et il suffit de transposer les résultats précédents pour obtenir :

$$\sigma_{11} = \frac{M_{12}}{I_{22}} x_3 \quad \text{et} \quad w = -\frac{1}{2} \frac{M_{12}}{EI_{22}} x_1^2 \quad (7.15)$$

avec  $I_{22} = \int_S x_3^2 dS$  moment quadratique principal et  $w$  déplacement selon  $e_3$  de la ligne moyenne.

### Torsion

On considère le cas de charge 7.2(b) avec un moment axial aux extrémités. La résolution du problème montre que  $\bar{\sigma}$  est de la forme dans la base  $\{e_i\}$  :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

avec  $\sigma_{12} = \frac{M_{11}}{J} \hat{\psi}_{,3}$ ,  $\sigma_{13} = -\frac{M_{11}}{J} \hat{\psi}_{,2}$  et  $J = 2 \int_S \hat{\psi} dS$  où  $\hat{\psi}(x_2, x_3)$  est solution d'un problème de Laplacien posé sur la section :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\psi} + 2 &= 0 & \text{dans } S \\ \hat{\psi} &= 0 & \text{sur } \partial S \end{aligned} \quad (7.17)$$

On en déduit :

$$\varepsilon = \frac{M_{11}}{2GJ} \begin{bmatrix} 0 & \hat{\psi}_{,3} & -\hat{\psi}_{,2} \\ \hat{\psi}_{,3} & 0 & 0 \\ -\hat{\psi}_{,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

et après intégration, à un champ de solide rigide près, que :

$$U = \frac{M_{11}}{GJ} \begin{pmatrix} \varphi(x_2, x_3) \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

avec  $\varphi_{,2} = \hat{\psi}_{,3} + x_3$  et  $\varphi_{,3} = -\hat{\psi}_{,2} + x_2$ . Ainsi, les contraintes et déformations sont indépendantes de  $x_1$ . Le champ de déplacement se décompose en un déplacement axial indépendant de  $x_1$ , et en déplacements transversaux dus à la rotation  $\frac{M_{11}}{GJ} x_1 e_1$  qui s'applique sur toute la section, autour de l'axe  $Ge_1$ . On a donc la relation  $\frac{M_{11}}{GJ} = \omega_{1,1}$ . Dans le cas de la section circulaire et du tube à section circulaire, on montre que  $\varphi = 0$ . On a alors la déformée indiquée sur la figure 7.6. Cependant, dans le cas

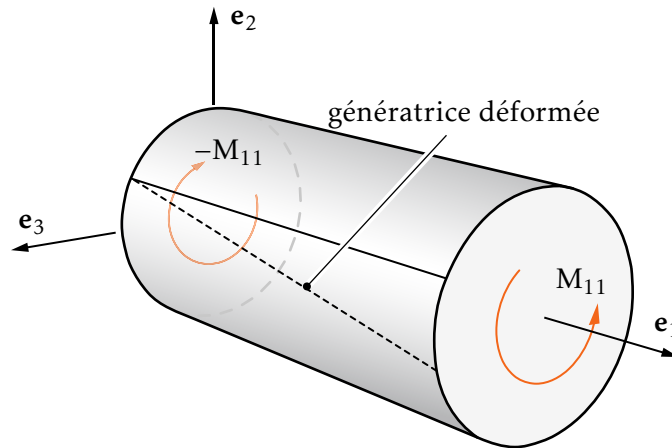


FIGURE 7.6 – Torsion d'une poutre à section circulaire

général,  $\varphi \neq 0$  et la section ne reste pas plane, on dit qu'elle gauchit.



### Flexion simple

On considère maintenant le problème 7.2(d). Le champ de contrainte  $\bar{\sigma}$  est trouvé, dans la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de la forme :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

avec :

$$\sigma_{11} = \frac{-R_{12}(\ell - x_1)x_2}{I_{33}}; \quad \sigma_{12} = \frac{-R_{12}}{2I_{33}} \left( x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) + \chi_{,3}; \quad \sigma_{13} = -\chi_{,2} \quad (7.21)$$

où  $\chi$  étant solution d'un problème de Laplacien posé sur la section :

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0 \quad \text{dans } S \\ \chi_{,3}n_2 - \chi_{,2}n_3 &= \frac{R_{12}}{2I_{33}} \left( x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) n_2 \quad \text{sur } \partial S \end{aligned} \quad (7.22)$$

On ne reportera pas ici les expressions des déformations et des déplacements, mais si on calcule la courbure, on obtient :

$$v_{,11}(x_1) = \frac{-R_{12}(\ell - x_1)}{EI_{33}} \quad (7.23)$$

soit une formule analogue au cas de la flexion pure en remarquant que le moment<sup>[2]</sup> s'exerçant sur la section située à l'abscisse  $x_1$  vaut  $R_{12}(\ell - x_1)\mathbf{e}_3$ . Si on veut pousser plus loin l'analyse, il est nécessaire de résoudre le problème en  $\chi$ . Or, ce problème n'admet pas en général de solution analytique, sauf dans le cas de sections de forme très simple, comme une section circulaire par exemple. Ainsi, si on considère une section circulaire de rayon  $a$ , on peut montrer que le glissement  $\gamma_{12}$  dû au cisaillement  $\sigma_{12}$  est négligeable par rapport à la rotation de la ligne moyenne  $v_{,1}$ , dès lors que la poutre est suffisamment élancée, soit  $\ell \gg a$ . On peut dans ce cas conclure que, comme en flexion pure, les sections déformées restent planes et orthogonales à la déformée de la ligne moyenne. L'effet dû au cisaillement est donc négligeable dans ce cas. Une autre façon de mettre en évidence ce résultat consiste à comparer les énergies de déformation dues aux contraintes de flexion  $\sigma_{11}$  à celles des contraintes de cisaillement  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$ . On constate alors que leur rapport devient très grand si  $\ell \gg a$ . Il apparaît ainsi que pour une poutre élancée, l'action de la résultante des efforts selon  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  est négligeable par rapport aux effets de la flexion. Ceci se traduit sur la déformée par un gauchissement négligeable par rapport aux déplacements de flexion, et sur l'énergie par la prépondérance de l'énergie de flexion.

Le cas de charge correspondant à la flexion simple dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  se traite de la même façon et on obtient :

$$\sigma_{11} = \frac{-R_{13}(\ell - x_1)x_3}{I_{22}} \quad (7.24)$$

[2] Il s'agit en fait du moment de flexion défini dans le chapitre suivant.

### 7.3 Une théorie approchée des poutres

Le problème précédent, bien que simple par sa géométrie et ses conditions aux limites (notamment en raison de la latitude donnée par la formulation des conditions aux limites sur les sections extrêmes), donne lieu à des calculs fastidieux avec une approche tridimensionnelle.

Il serait donc très utile de proposer une modélisation simplifiée des poutres (classiquement appelée Résistance des Matériaux) pour obtenir rapidement les informations jugées essentielles (déformée, répartition des contraintes) sous l'action d'efforts extérieurs connus globalement. Il s'agit donc de réaliser le passage d'une modélisation tridimensionnelle à une schématisation mono-dimensionnelle.

Pour ce faire, on va largement exploiter les résultats obtenus sur le problème de SAINT-VENANT, et faire l'hypothèse qu'ils restent valables dans des situations impliquant d'autres types de chargement et de conditions aux limites.

#### 7.3.1 Contraintes intégrées et efforts internes

Lorsque l'on superpose les différents cas de charge considérés précédemment, il apparaît que l'état de contrainte est anti-plan, c'est-à-dire de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

D'autre part, on a obtenu :

$$\sigma_{11} = \frac{R_{11}}{A} - \frac{(M_{13} + R_{12}(l - x_1))x_2}{I_{33}} + \frac{(M_{12} - R_{13}(l - x_1))x_3}{I_{22}} \quad (7.26)$$

expression dans laquelle interviennent les efforts et couples appliqués aux extrémités de la poutre.

Cependant, si on coupe la poutre étudiée au niveau d'une section d'abscisse  $x_1$ , on fait apparaître les efforts internes, dont le torseur résultant en G sur la section de normale extérieure  $\mathbf{e}_1$  a pour éléments de réduction  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{M}_{\text{int}}$ , définis par :

– une résultante :

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \int_S \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_1) dS \xrightarrow{\text{dans } \mathbf{e}_i} \mathbf{R}_{\text{int}} = \int_S \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} dS = \begin{pmatrix} N \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

où  $N$  est l'effort normal et  $(V_2, V_3)$ , les composantes de l'effort tranchant ;

– un moment en G :

$$\mathbf{M}_{\text{int}} = \int_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_1) dS \xrightarrow{\text{dans } \mathbf{e}_i} \mathbf{M}_{\text{int}} = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} dS = \begin{pmatrix} T \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

avec  $T$ , moment de torsion et  $(M_2, M_3)$ , composantes du moment de flexion.

On a ainsi une schématisation mono-dimensionnelle des efforts internes, illustrée sur la figure 7.7, et les différentes quantités introduites plus haut sont encore appelées contraintes intégrées (ou généralisées). Le torseur des efforts intérieurs joue pour la section de la poutre le rôle du vecteur contrainte en un point d'un milieu continu.

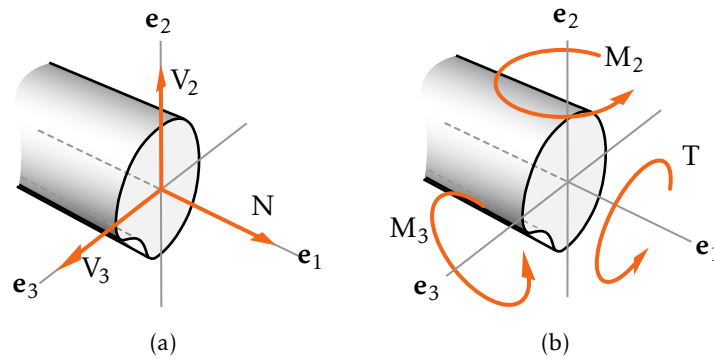


FIGURE 7.7 – Efforts internes

Ce torseur sera obtenu à partir de l'équilibre global d'un tronçon de poutre tronqué à la section étudiée (voir la flexion simple), et va donc s'exprimer à partir des efforts et couples appliqués aux extrémités de la poutre. On peut aussi obtenir des équations d'équilibre locales sur les composantes du torseur des efforts internes en isolant un tronçon élémentaire de longueur  $dx_1$ , cette démarche étant l'analogue en monodimensionnel de l'écriture de l'équilibre d'un cube élémentaire en tridimensionnel. Ce torseur étant connu, on peut exprimer les composantes des contraintes en fonction de celui-ci. On obtient pour la contrainte normale  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{A} - \frac{M_3 x_2}{I_{33}} + \frac{M_2 x_3}{I_{22}} \quad (7.29)$$

Ce résultat a été trouvé pour le problème de SAINT-VENANT, pour lequel  $N$  est constant, alors que  $M_2$  et  $M_3$  sont linéaires en  $x_1$ . On supposera qu'il reste valable quelle que soit l'évolution de  $N$ ,  $M_2$  et  $M_3$  avec  $x_1$ . En ce qui concerne les contraintes de cisaillement, des formules ont été établies pour le problème de SAINT-VENANT où le moment de torsion  $T$  et l'effort tranchant  $\mathbf{V}$  sont constants. Ces formules font appel à la résolution d'un problème posé sur la section. On fera là aussi l'hypothèse que ces formules sont applicables dans le cas général, en remplaçant dans le problème de SAINT-VENANT  $R_{12}$ ,  $R_{13}$  et  $M_{11}$  par la valeur des contraintes intégrées dans la section étudiée, soit  $V_2(x_1)$ ,  $V_3(x_1)$  et  $T(x_1)$  respectivement. À ce stade, on distingue donc :

- une description globale à l'aide des efforts intérieurs sur une section de la poutre (torseur résultant sur une section) ;
- une description locale des contraintes, l'accès à la contrainte normale  $\sigma_{11}$  étant immédiat, le calcul des contraintes de cisaillement étant plus difficile.

Il est important de mentionner qu'en général c'est la contrainte normale qui joue un rôle prédominant dans le dimensionnement de poutres longues travaillant en

flexion, on pourra donc dans ce cas négliger les contraintes de cisaillement, ou se contenter d'une approximation.

### 7.3.2 Hypothèses cinématiques

Dans le paragraphe précédent, on a proposé une modélisation mono-dimensionnelle des efforts intérieurs, il convient maintenant de définir le déplacement de la poutre dans le cadre de cette modélisation, et on pressent qu'il va falloir faire des hypothèses sur la déformation des sections afin de « gagner » deux dimensions.

On va pour cela s'appuyer à nouveau sur les résultats obtenus pour le problème de SAINT-VENANT. En particulier, on avait remarqué qu'excepté pour le cas de la torsion, on avait une bonne approximation de la déformation de la section de la poutre en considérant que celle-ci subissait un mouvement d'ensemble, qui après déformation la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne. Ceci conduit à :

**Hypothèse de NAVIER-BERNOULLI** Pour une poutre longue sollicitée en traction et flexion, les sections droites ne se déforment pas et restent orthogonales à la ligne moyenne.

La cinématique de la section est donc régie par six degrés de liberté et on choisit naturellement pour les degrés de liberté de translation les composantes du déplacement du centre de surface de la section. Ainsi, le déplacement de solide rigide de la section se traduit, pour un point M quelconque appartenant à la section de centre de surface G par :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(G) + \mathbf{MG} \wedge \boldsymbol{\theta} \quad (7.30)$$

soit, écrit dans la base d'étude :

$$\mathbf{U}(M) = \begin{pmatrix} u(x_1) - x_2\theta_3(x_1) + x_3\theta_2(x_1) \\ v(x_1) - x_3\theta_1(x_1) \\ w(x_1) + x_2\theta_1(x_1) \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

en notant  $\boldsymbol{\theta}$  la rotation de la section (on n'utilise pas  $\omega$  car  $\boldsymbol{\theta}$  est attachée à un déplacement de solide rigide) et  $u$ ,  $v$  et  $w$  les composantes de  $\mathbf{U}(G)$ . La conservation de l'angle droit entre la section et la ligne moyenne conduit à  $\theta_3 = v_{,1}$  et  $\theta_2 = -w_{,1}(x_1)$ , si bien que finalement on a :

$$\mathbf{U}(M) = \begin{pmatrix} u(x_1) - x_2v_{,1}(x_1) - x_3w_{,1}(x_1) \\ v(x_1) - x_3\theta_1(x_1) \\ w(x_1) + x_2\theta_1(x_1) \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

La rotation  $\theta_1$ , quant à elle, ne peut être reliée au déplacement de la ligne moyenne.

En comparant le champ de déplacement précédent à la solution du problème de torsion de SAINT-VENANT, on constate que la rotation de la section  $\theta_1$  est bien

restituée. En revanche, et c'est une conséquence directe de l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI, le gauchissement n'apparaît pas. Ceci résulte du fait qu'une modélisation mono-dimensionnelle ne saurait représenter des phénomènes variables sur la section, tels que le gauchissement. On conclura que pour la torsion, le champ de déplacement adopté permet d'obtenir la rotation de torsion. Quant au gauchissement, on pourra si nécessaire le calculer en procédant comme pour le problème de SAINT-VENANT. On retrouve ici les deux échelles (globale et locale) de description de la poutre évoquées au paragraphe précédent.

### 7.3.3 Loi de comportement généralisée

La loi de comportement généralisée a pour objectif de relier les contraintes intégrées à des déformations associées au champ de déplacement défini au 7.3.2.

On utilise à nouveau les résultats obtenus sur le problème de Saint-Venant, qui permettent d'écrire :

$$N = EAu_{,1}; \quad M_3 = EI_{33}v_{,11}; \quad M_2 = -EI_{22}w_{,11}; \quad T = GJ\theta_{1,1} \quad (7.33)$$

ceci sous l'hypothèse que le moment de flexion soit décomposé selon les axes principaux d'inertie. On fait donc apparaître quatre déformations appelées déformations généralisées qui permettent de décrire la déformation de la ligne moyenne :

- l'extension  $u_{,1}$  ;
- les courbures  $v_{,11}$  et  $-w_{,11}$  ;
- la déformation de torsion :  $\theta_{1,1}$ .

On remarque que l'on n'a pas de relation impliquant les efforts tranchants. Cela est lié au fait que ceux-ci sont obtenus après intégration sur la section des contraintes de cisaillement pour lesquelles on a  $\sigma_{12} = G\gamma_{12}$  et  $\sigma_{13} = G\gamma_{13}$ . Or, l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI néglige ces glissements, les efforts tranchants ne pourront donc être obtenus à partir de la loi de comportement.

Ⓜ Une autre façon d'établir les relations (7.33) consiste à calculer les déformations associées à  $U(M)$ , puis en utilisant la loi de HOOKE, les contraintes sur la section et après intégration, les contraintes intégrées. On retrouverait alors les trois premières relations de (7.33) et les deux efforts tranchants nuls. On aurait en revanche un résultat différent pour la torsion, ce qui résulte de la non prise en compte du gauchissement dans l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI. D'autre part, cette approche mettrait en évidence les incompatibilités entre les hypothèses faites sur la forme des contraintes et des déplacements, ce qui est dû à l'impossibilité de restituer l'effet POISSON avec l'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI.

#### 7.3.4 Bilan

On a mentionné en 7.3.1, sans les expliciter, l'existence d'équations d'équilibre locales portant sur les contraintes intégrées. Ces équations sont au nombre de six, car exprimant l'équilibre d'un tronçon élémentaire (trois équations de résultante et trois équations de moment), et mettent en jeu les six composantes du tenseur des efforts internes.

Ces équations ont été complétées par quatre relations de comportement en 7.3.3, qui font intervenir quatre déformations généralisées.

D'autre part, ces déformations généralisées sont reliées aux quatre variables cinématiques  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $\theta_1$  introduites en 7.3.2 pour décrire le déplacement de la poutre.

On a donc quatorze équations pour quatorze inconnues, et un système à résoudre qui a la même structure que celui obtenu en tridimensionnel, à ceci près qu'on est passé d'équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires en  $x_1$ . Il reste à compléter ces équations par des conditions aux limites, qui porteront sur les sections extrêmes de la poutre et qui s'écrivent de la façon suivante : dans la direction  $e_i$ , on connaît :

- soit la composante de la résultante du tenseur des efforts extérieurs appliqués, soit la composante du déplacement de la ligne moyenne ;
- soit la composante du moment du tenseur des efforts extérieurs appliqués, soit la composante de la rotation de la section.

On dispose donc sur une section de six conditions aux limites en tridimensionnel.

Enfin, on n'oubliera pas de tenir compte de celles qui provoquent des discontinuités sur le tenseur des efforts dues à l'application de forces ou couples concentrés, ou encore de celles dues à des conditions sur les déplacements dans une section courante de la poutre.



# Treillis

## 8.1 Définition

Un treillis, du type de celui illustré sur la figure 8.1, est un assemblage de poutres reliées entre elles par des articulations parfaites : les nœuds du treillis. On supposera que le chargement, sous forme de forces ponctuelles, est appliqué aux nœuds du treillis. Dans ces conditions, chaque poutre n'est soumise qu'à l'effort normal et on les appelle alors des *barres*. Il y a transmission des efforts dans le sens des barres uniquement.

L'étude d'un treillis revient :

- à la détermination des efforts normaux dans chacune des barres ;
- au calcul des déplacements des nœuds.

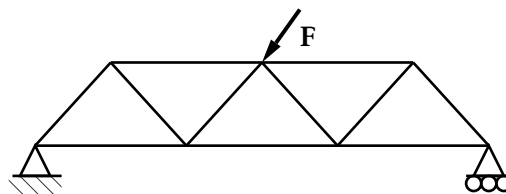


FIGURE 8.1 – Exemple de treillis

## 8.2 Effort normal

### 8.2.1 Équilibre d'une barre

Isolons un nœud de liaison de plusieurs barres, ainsi que les barres correspondantes illustrées sur la figure 8.2. Soit  $\mathbf{F}_{IJ}$ , l'effort de liaison à l'extrémité I de la barre IJ, c'est-à-dire l'action du nœud I sur la barre IJ, et  $\mathbf{F}_{JI}$ , l'effort à l'extrémité J de la barre JI<sup>[1]</sup>. L'équilibre de la barre IJ, donne :

$$\mathbf{F}_{IJ} + \mathbf{F}_{JI} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{IJ} \wedge \mathbf{F}_{JI} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

[1] On rappelle qu'au niveau de la liaison rotoïde, aucun moment n'est transmis.



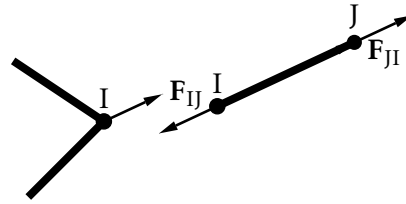


FIGURE 8.2 – Efforts aux nœud de liaison

et par conséquent,  $\mathbf{F}_{IJ}$  et  $\mathbf{I}J$  sont colinéaires. D'autre part en pratiquant une coupure dans la barre  $IJ$ , il vient :

$$\mathbf{F}_{IJ} = N_{IJ}\mathbf{u}_{IJ} = -\mathbf{F}_{JI} = N_{JI}\mathbf{u}_{JI} \quad (8.2)$$

avec  $\mathbf{u}_{IJ}$ , vecteur unitaire de la direction  $IJ$ , et donc  $N_{IJ} = N_{JI}$  représente l'effort normal constant dans la barre  $IJ$  :

- si  $N_{IJ} > 0$ , la barre est en traction ;
- si  $N_{IJ} < 0$ , la barre est en compression.

Ainsi, on a démontré que le torseur des efforts intérieurs dans la barre se réduit au seul effort normal, celui-ci étant constant dans la barre.

### 8.2.2 Équilibre d'un nœud

Soit  $\mathbf{F}'_{IJ}$ , l'effort au nœud  $I$  exercé par la barre  $IJ$ . Il faut d'autre part vérifier le principe d'action-réaction, soit :

$$\mathbf{F}_{IJ} + \mathbf{F}'_{IJ} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

d'autre part l'équilibre du nœud  $I$  traduit que les forces sont concourantes :

$$\sum_k \mathbf{F}'_{IJ} + \mathbf{F}_I = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

où  $k$  représente l'indice des barres qui sont articulées au nœud  $I$  et  $\mathbf{F}_I$ , la force extérieure ponctuelle appliquée au nœud  $I$ .

## 8.3 Contraintes et déformations

On considère une barre  $IJ$  de longueur  $\ell_{IJ}$  et de section  $S_{IJ}$ . La contrainte normale dans une section droite, supposée uniformément répartie dans la section s'écrit :

$$\sigma_{IJ} = \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \frac{N_{IJ}}{S_{IJ}} \mathbf{u}_{JI} \cdot \mathbf{u}_{JI} = \frac{N_{IJ}}{S_{IJ}} \quad (8.5)$$

et compte-tenu de la forme du torseur des efforts internes, la matrice des contraintes dans une base orthogonale contenant  $\mathbf{u}_{JI}$  a pour seul terme non nul  $\sigma_{IJ}$ . La loi de Hooke permet d'exprimer la déformation dans la barre :

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{\sigma_{IJ}}{E_{IJ}} \quad (8.6)$$

et puisqu'on a supposé qu'il n'y avait pas d'effort appliqué entre les nœuds de la barre, les contraintes et déformations sont constantes le long de la barre. On en déduit :

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{\sigma_{IJ}}{E_{IJ}} = \frac{\Delta \ell_{IJ}}{\ell_{IJ}} = \frac{N_{IJ}}{E_{IJ} S_{IJ}} \quad (8.7)$$

## 8.4 Équations cinématiques

On cherche le lien entre la déformation linéique  $\varepsilon_{IJ}$  dans la barre IJ et les déplacements des deux extrémités de la barre. La définition de la dilatation linéique dans la barre IJ conduit à :

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{\Delta \ell_{IJ}}{\ell_{IJ}} = \frac{\bar{u}_J - \bar{u}_I}{l_{IJ}} \quad (8.8)$$

où  $\bar{u}_I$  et  $\bar{u}_J$  sont respectivement les déplacements des extrémités I et J de la barre dans la direction de la barre c'est-à-dire, les composantes des déplacements des extrémités suivant le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{IJ}$ .

## 8.5 Énergie de déformation

On a vu la forme générale de l'énergie de déformation dans l'expression (5.13). Dans le cas particulier d'un barreau soumis à un effort normal  $N(x)$ , l'énergie est égale à :

$$W = \frac{1}{2} \int_D \sigma_{11} \varepsilon_{11} dv = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_S \sigma_{11} \varepsilon_{11} dS dx \quad (8.9)$$

soit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{N(x) N(x)}{ES} S dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{N^2(x)}{ES} dx \quad (8.10)$$

et dans le cas d'une barre IJ d'un treillis soumise à l'action d'un effort normal  $N_{IJ}$  qui est constant, il vient :

$$W_{IJ} = \frac{1}{2} \frac{N_{IJ}^2}{(ES)_{IJ}} \ell_{IJ} \quad (8.11)$$

## 8.6 Résolution

Un problème de treillis est complètement déterminé dès lors que les efforts normaux dans les barres et les déplacements sont connus.

La détermination des efforts normaux s'obtient en écrivant que chacun des nœuds est en équilibre, voir l'équation (8.4). Il y a lieu de considérer différentes situations :

- si les équations d'équilibre de la statique suffisent à déterminer complètement les efforts de liaison ainsi que les efforts normaux dans les barres, le système est dit isostatique et dans ce cas si  $b$  est le nombre de barres du système et  $n$  le nombre de nœuds, la relation qui lie  $b$  et  $n$  est :

- $b + 6$  (inconnues) =  $3n$  (équations) dans le cas d'un treillis tridimensionnel ;
- $b + 3 = 2n$  dans le cas d'un treillis plan.
- si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, le système est hyperstatique et il faut avoir recours à des méthodes spécifiques pour résoudre le problème et en particulier aux théorèmes de l'énergie qui seront étudiés au chapitre suivant ;
- si le nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations le système est hypostatique ou mobile, c'est un mécanisme.

# Théorèmes énergétiques

Nous avons vu, au chapitre 5, l'expression de l'énergie de déformation en fonction des contraintes et des déformations, ainsi que la relation entre l'énergie de déformation et le travail des forces extérieures.

Dans ce chapitre nous allons déduire de l'énergie de déformation les théorèmes énergétiques dont l'utilisation est très importante en *résistance des matériaux* et en *calcul des structures* d'une manière plus générale.

## 9.1 Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI

**Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI** Dans un système élastique soumis successivement à deux systèmes d'efforts (forces et couples)  $F_i$  et  $\phi_j$  assurant chacun l'équilibre, le travail du système  $F$  pour les déplacements élastiques  $\omega$  provoqués par l'application du système  $\phi$  est égal au travail du système  $\phi$  pour les déplacements  $v$  provoqués par l'application de  $F$ , soit :

$$\omega^T \mathbf{F} = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\phi} \quad (9.1)$$

**Preuve (1)** Supposons le potentiel interne nul dans l'état initial. Appliquons  $F$ , il vient :

$$T_F = \frac{1}{2} \sum_i F_i v_i \quad (9.2)$$

puis  $\phi$ , alors :

$$T_{F+\phi} = T_F + \sum_i F_i \omega_i + \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \omega_j \quad \Leftrightarrow \quad T_{F+\phi} = T_F + \sum_i F_i \omega_i + T_\phi \quad (9.3)$$

Recommençons en appliquant  $\phi$  en premier puis  $F$ , on a bien sûr  $T_{F+\phi} = T_{\phi+F}$ , donc :

$$\frac{1}{2} \sum_i F_i v_i + \sum_i F_i \omega_i + \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \omega_j = \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \omega_j + \sum_j \phi_j v_j + \frac{1}{2} \sum_i F_i v_i \quad (9.4)$$

et finalement :

$$\sum_i F_i \omega_i = \sum_j \phi_j v_j \quad (9.5)$$

Preuve (2) On avait :

$$v_i = \sum_j A_{ij} F_j, \quad \omega_j = \sum_i A_{ji} \phi_i, \quad T_F = \frac{1}{2} \sum_I F_i v_i \quad \text{et} \quad T_\Phi = \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \omega_j \quad (9.6)$$

Supposons  $F_i$  réduit à une seule force tout comme  $\phi_j$ . Le théorème de MAXWELL-BETTI s'écrit :

$$F_i \omega_i = \phi_j v_j \Leftrightarrow F_i A_{ij} \phi_j = \phi_j A_{ji} F_i \Leftrightarrow A_{ji} = A_{ij} \quad (9.7)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  des coefficients d'influence  $A_{ij}$  est symétrique et  $T$  est une forme quadratique :

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{F}^t \mathbf{A} \mathbf{F} \quad (9.8)$$

**Ligne d'influence** Une force unité en  $C$  donne en  $K$  une flèche  $v_K$  qui est aussi la flèche que donnerait en  $C$  une force unité appliquée en  $K$ .

La déformée de la ligne moyenne de la poutre  $AB$  sous l'action d'une force unité en  $C$  donne donc en chaque point courant  $K$  la flèche qu'on obtiendrait en  $C$  sous l'action d'une force unité appliquée en ce point courant  $K$  : on appelle cette déformée la ligne d'influence de la flèche en  $C$  due à une force unité.

## 9.2 Théorème de CASTIGLIANO

**Théorème de CASTIGLIANO** Le déplacement du point d'application d'une force dans sa direction ou la rotation du bras de levier d'un couple dans la direction de ce couple, est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la force ou au couple.

Preuve Nous avons vu que  $T$  s'écrivait sous forme matricielle d'après l'équation (9.8) :

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{F}^t \mathbf{A} \mathbf{F} \quad (9.9)$$

d'où, par dérivation :

$$\frac{\partial T}{\partial F_i} = \frac{1}{2} \sum_j A_{ij} F_j + \frac{1}{2} \sum_j F_j A_{ij} = \sum_j A_{ij} F_j \quad (9.10)$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (5.16) :

$$\frac{\partial T}{\partial F_i} = v_i \quad (9.11)$$

### 9.2.1 Applications

Le théorème de CASTIGLIANO permet de calculer simplement les déplacements de points d'une structure qui seraient obtenus autrement par composition de déplacements élémentaires et cela souvent au prix de calculs lourds.

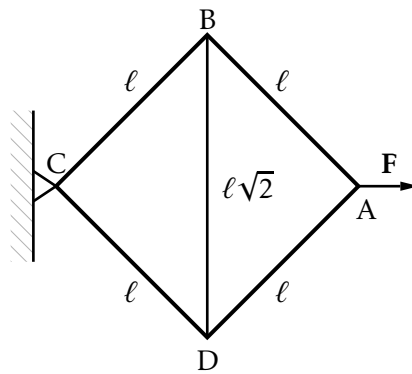


FIGURE 9.1 – Exemple de treillis

• **Exemple Treillis** — Soit le carré et sa diagonale BD de la figure 9.1. Ce treillis est constitué par quatre barres de même section, la barre diagonale diffère des précédentes uniquement par la longueur. Les liaisons sont toutes des articulations. On veut calculer le déplacement  $v_A$  du point A sous l'action de F appliquée en A dans la direction CA.

La solution est la suivante. On peut déterminer facilement les tensions dans les barres :

- effort de traction dans les quatre cotés :  $F \frac{\sqrt{2}}{2}$
- effort de compression dans la diagonale : F

L'énergie interne d'une barre en traction ou compression est :

$$W = \frac{1}{2} \int_S \int_0^\ell \sigma_{11} \varepsilon_{11} dx dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{F}{S} \frac{F}{ES} S dx = \frac{1}{2} \frac{F^2 \ell}{ES} \quad (9.12)$$

d'où l'énergie totale est égale à :

$$W_t = W_{AB} + W_{AD} + W_{CD} + W_{CB} + W_{BD} \quad (9.13)$$

soit :

$$W_t = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{\ell}{SE} F^2 \quad (9.14)$$

et le déplacement de A dans la direction de F :

$$v_A = \frac{\partial W_t}{\partial F} = (2 + \sqrt{2}) \frac{\ell F}{ES} \quad (9.15)$$

### 9.2.2 Méthode de la sollicitation évanouissante

Lorsque l'on cherche le déplacement d'un point dans une direction où il n'y a pas de force appliquée au point considéré, on utilise la méthode dite de la *sollicitation évanouissante* qui consiste à :

1. introduire une sollicitation virtuelle (force ou moment) associée au déplacement que l'on cherche.
2. calculer le potentiel élastique correspondant aux sollicitations réelles et virtuelle. La sollicitation virtuelle entraîne des modifications des forces de liaison. Le système doit être en équilibre sous l'action des forces réellement appliquées et de la sollicitation virtuelle.

3. dériver le potentiel élastique, par rapport à la sollicitation virtuelle  $F$ , et en faisant  $F$  nul dans le résultat on obtient le déplacement cherché.

La linéarité des déplacements en fonction des efforts et l'expression du second degré de l'énergie en fonction des efforts justifient cette façon de faire.

• **Exemple Potence** — Soit une potence ABC chargée en B par une force verticale comme celle indiquée sur la figure 9.2. Calculer le déplacement horizontal  $v_x$  de B ? La méthode est

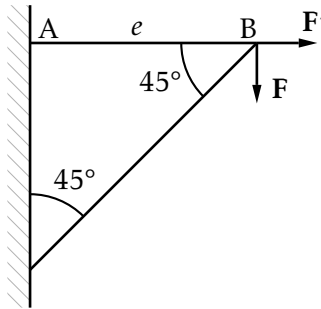


FIGURE 9.2 – Potence

la suivante :

- Introduire  $F'$  horizontale appliquée en B
- Déterminer les efforts dans les barres du système sous l'action de  $F$  et  $F'$
- Calculer l'énergie de déformation  $W$  de la structure.
- Dériver  $W$  par rapport à  $F'$
- Imposer  $F' = 0$

$$W = \frac{\ell}{2ES} [(F + F')^2 + 2F^2\sqrt{2}] \quad \text{et} \quad v_x(B) = \left( \frac{\partial W}{\partial F'} \right)_{F'=0} = \left( \frac{\ell}{ES} (F + F') \right)_{F'=0} = \frac{F\ell}{ES} \quad (9.16)$$

$v_x(B) > 0$  donc le déplacement à lieu dans le sens de  $F'$ . Le déplacement horizontal de A correspond à l'allongement de la barre AB. •

### 9.2.3 Systèmes hyperstatiques

#### Degré d'hyperstaticité

Le degré d'hyperstaticité  $h$  d'une structure est la somme de ses degrés d'hyperstaticité interne et externe :

$$h = h_i + h_e \quad (9.17)$$

Afin de pouvoir calculer tous les efforts, efforts de liaison et efforts de cohésion, on ajoute aux équations de la statique  $h$  équations de compatibilité des déplacements.

**Degré d'hyperstaticité externe** Lorsqu'à l'aide des équations de la statique on ne peut pas calculer tous les efforts de liaison de la structure étudiée on dit que cette structure est hyperstatique extérieurement. Son degré d'hyperstaticité externe  $h_e$  est

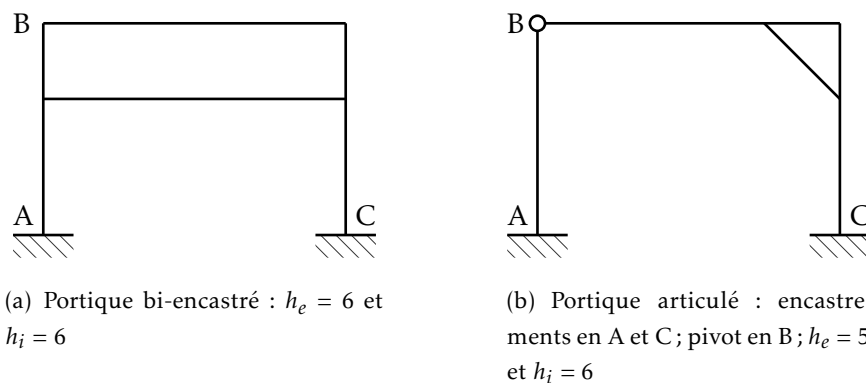


FIGURE 9.3 – Différentes configurations d'un portique

le nombre d'efforts de liaison non calculables à l'aide des équations de la statique, efforts dits hyperstatiques.

- Les efforts de liaison indépendants des efforts hyperstatiques sont appelés *isostatiques*. Ils peuvent permettre un prédimensionnement des liaisons ;
- Les efforts de liaison dépendants des efforts hyperstatiques sont appelés *épi-statiques*. Ils sont connus littéralement. On ne peut obtenir leurs valeurs numériques sans connaître celles des efforts hyperstatiques.

**Degré d'hyperstaticité interne** Lorsqu'à l'aide des équations de la statique, on ne peut pas calculer tous les efforts de cohésion (efforts intérieurs) d'une section droite d'une poutre de la structure étudiée, on dit que cette structure est *hyperstatique intérieurement*. Son degré d'hyperstaticité interne  $h_i$  est le nombre d'efforts de cohésion non calculables à l'aide des équations de la statique.

Nous allons voir comment déterminer si un système est hyperstatique intérieurement. Considérons une structure constituée de solides fabriqués à l'aide de poutres. Nous voulons connaître les efforts de cohésion en chacune de ses sections droites. Supposons que, pour cela, nous scissions une poutre de cette structure en une section droite P :

- si cette coupure ajoute un solide à la structure alors les efforts de cohésion en P sont calculables grâce aux équations de la statique qu'apporte ce solide supplémentaire ;
- si cette coupure n'ajoute pas de solide à la structure alors les six efforts de cohésion en P sont hyperstatiques car non calculables à l'aide, uniquement, des équations de la statique.

**Exemples** Voyons le cas de la potence en relation avec la figure 9.4 :

système — la condition d'encastrement implique l'existence de six inconnues ;

potence — le solide *potence* permet d'écrire six équation de la statique et on en déduit le degré d'hyperstaticité extérieur  $h_e = 0$ .



1<sup>re</sup> coupe — il y a toujours un seul solide. Les six efforts de cohésion hyperstatique.  
 2<sup>e</sup> coupe — il y a maintenant deux solides. Les six nouveaux efforts de cohésion sont calculables grâce à six nouvelles équations de la statique.

Ces deux coupes permettent de trouver  $h_i = 0$ . En reprenant la condition  $h_e = 0$ , on trouve finalement :

$$h = h_e + h_i = 0 + 6 = 6 \quad (9.18)$$

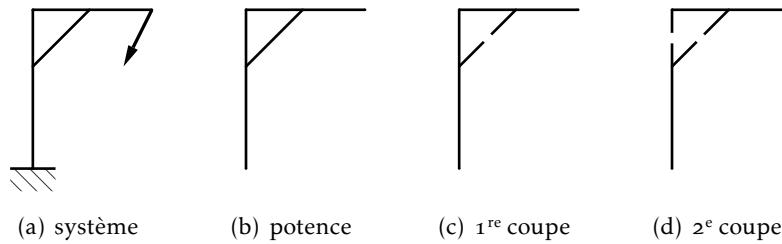


FIGURE 9.4 – Calcul du degré d'hyperstaticité d'un potence

Voyons le cas de la potence en relation avec la figure 9.5. Le système comprend un encastrement et deux pivots, ce qui induit seize efforts de liaison. Les deux sous-solides permettent d'écrire douze équations ce qui mène à un degré d'hyperstaticité  $h_e = 4$ . Quel que soit l'endroit où l'on coupe cela fait apparaître un solide supplémentaire donc  $h_i = 0$ . Finalement, le degré d'hyperstaticité :

$$h = h_e + h_i = 4 + 0 = 4 \quad (9.19)$$

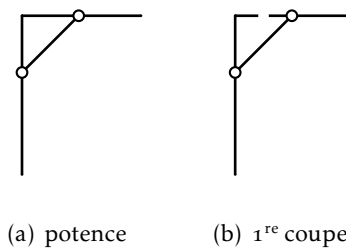


FIGURE 9.5 – Calcul du degré d'hyperstaticité d'un potence avec rotules

### Méthodologie

Nous avons un système composé d'une structure hyperstatique et d'un chargement. Nous cherchons un système équivalent constitué d'une structure obtenue par modification de la structure initiale (changement de liaisons et création de coupures) et d'un chargement lui aussi modifié (chargement supplémentaire dû aux hyperstatismes). Pour que ce système soit effectivement équivalent au système initial, il faut que les points de sa structure subissent les mêmes déplacements que ceux de la structure initiale.

**Structure** On remplace la structure hyperstatique initiale  $S_h$  par une structure isostatique *équivalente*  $S_i$  :

- $h_e = 0$ ,  $S_i$  possède les mêmes liaisons que  $S_h$  ;
- $h_e \neq 0$ ,  $S_i$  ne possède pas les mêmes liaisons que  $S_h$ .

Une liaison initiale  $L$  ayant des efforts hyperstatiques est remplacée par une liaison  $L'$  obtenue en supprimant des blocages. Le nombre total de blocages supprimés est égal au degré d'hyperstaticité du système :

- $h_i = 0$ ,  $S_i$  est constituée des mêmes solides que  $S_h$  ;
- $h_i \neq 0$ ,  $S_i$  n'est pas constituée des mêmes solides que  $S_h$ .

Un solide  $Q$  de  $S_h$  possédant des efforts de cohésion hyperstatiques est remplacé dans  $S_i$  par un solide  $Q'$  obtenu en coupant  $Q$ . Cette coupure transforme  $Q$  en un solide ouvert et non en deux solides distincts.

**Chargement** La structure *équivalente* supporte le chargement de la structure initiale et un chargement supplémentaire. Ce dernier est constitué des forces et des couples remplaçant ceux supprimés en modifiant les liaisons et des forces et des couples remplaçant les contraintes disparues en faisant des coupures.

**Équations** Nous avons les équations provenant du principe fondamental de la statique appliqué à notre système équivalent et, en plus, les  $h$  équations de compatibilité des déplacements linéaires et angulaires obtenues en écrivant que les efforts du chargement supplémentaire, efforts remplaçant les efforts hyperstatiques du système initial, sont tels que les déplacements (translations et rotations) que subissent les points de la structure isostatique sont les mêmes que ceux des points de la structure initiale.

Les efforts hyperstatiques du système initial sont alors égaux aux efforts correspondants du système isostatique équivalent.

### Calcul des systèmes hyperstatiques extérieurs

Soit un système hyperstatique (S) de *degré d'hyperstaticité*  $h_e = n$ . Il admet un système *isostatique équivalent* (S') obtenu en supprimant  $n$  réactions surabondantes et en les remplaçant par des forces (ou moments)  $R_i$  inconnus et considérés comme des charges extérieures.

(S) et (S') ayant des états d'équilibre identiques, les  $R_i$  doivent être telles que les conditions mécaniques imposées par les liaisons soient vérifiées par le système isostatique soumis aux réactions surabondantes  $R_i$ . Avec l'hypothèse d'invariabilité des appuis et d'impossibilité de rotation avec les encastremets on a, d'après le théorème de CASTIGLIANO :

$$\frac{\partial W}{\partial R_1} = \frac{\partial W}{\partial R_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial R_n} = 0 \quad (9.20)$$

• **Exemple** Considérons la poutre droite ABC sur trois appuis et chargée par  $F_1$  et  $F_2$ . Déterminer  $R_A, R_B, R_C$ .

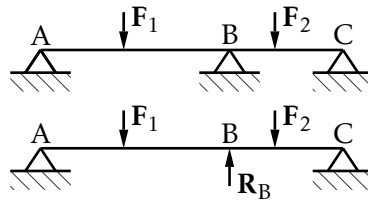


FIGURE 9.6 – différentes configurations du cercle de Mohr

Le système est hyperstatique de degré 1. Le système isostatique équivalent est tel que  $R_B$  conduise à  $v_B = \frac{\partial W}{\partial R_B} = 0$ . Cette valeur correspond à un minimum de l'énergie de déformation car :

$$W = W(R_B, F_1, F_2) \quad (9.21)$$

Soit  $R_{B0}$  la valeur correcte de  $R_B$ , pour  $R_B > R_{B0}$  la flèche varie dans le même sens que  $R_B$ , donc :

$$\frac{\partial v_B}{\partial R_B} > 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial R_B^2} \right) > 0 \quad (9.22)$$

$R_{B0}$  minimise l'énergie de déformation. •

### Calcul des systèmes hyperstatiques intérieurement

Supposons que l'on ait une réaction hyperstatique intérieure — effort dans une barre surabondante, par exemple. Nous pratiquerons une coupe sur cette barre en un point quelconque, afin d'obtenir par application d'une force convenable  $R$  un système isostatique équivalent au système hyperstatique étudié et imaginons cette coupe sans épaisseur. Les deux forces  $R$  apparaissant sur la coupure sont opposées

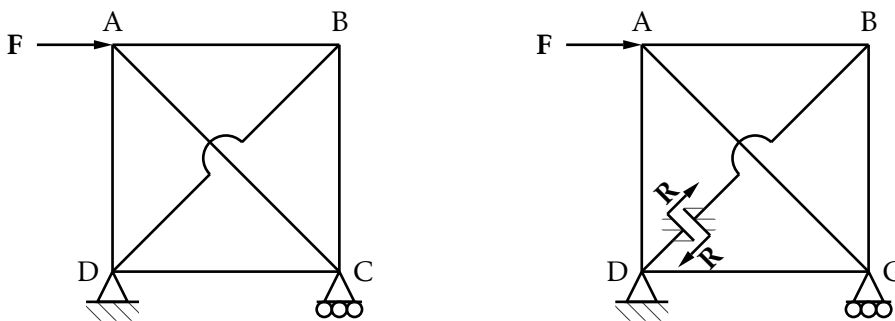


FIGURE 9.7 – Système hyperstatique intérieurement

et subissent le même déplacement de leur point d'application, la coupure étant sans épaisseur. Chaque force travaille dans la déformation mais leurs travaux sont opposés, donc  $\frac{\partial W}{\partial R} = 0$ .

Si nous nous étions placés en D nous aurions été ramenés au problème hyperstatique extérieur précédent pour lequel  $\frac{\partial W}{\partial R} = 0$  puisque le point  $D \in DB$  est fixe. Il ne s'agit là évidemment que d'un cas particulier.

**Théorème de MÉNABRÉA** Dans un système de corps élastiques, les valeurs que prennent les réactions hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes minimisent l'énergie de déformation du système.

**Exemple** Les équations de la statique ne suffisent pas à déterminer les efforts dans toutes les barres du système. Étant donné la symétrie de la figure, l'effort dans l'une des diagonales sera l'inconnue hyperstatique. On coupera donc soit DB, soit CA. Effectuons la coupe sur CA :

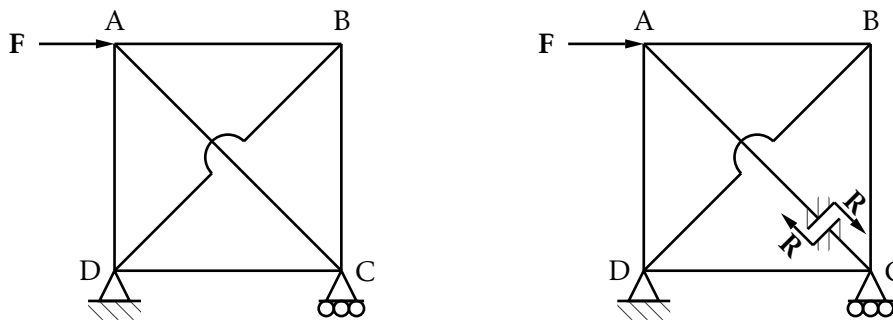


FIGURE 9.8 – Système hyperstatique intérieurement

- la statique permet de déterminer tous les efforts quand F et R sont connus ;
- l'énergie de déformation du système est égale à la somme des énergies de déformation à l'effort normal de chacune des six barres. Elle vaut :

$$W = \frac{(2 + \sqrt{2})(F - R)^2 \ell}{2SE} \quad (9.23)$$

- l'application du théorème de MÉNABRÉA donne :

$$\frac{\partial W}{\partial R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2} F \quad (9.24)$$

L'énergie de déformation vaut :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\ell}{ES} F^2 [1 + \sqrt{2}] \quad (9.25)$$

et le déplacement vertical de C est :

$$v_c = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{F \ell}{ES} [1 + \sqrt{2}] \quad (9.26)$$

L'étude des assemblages de poutres hyperstatiques pour lesquelles les nœuds de jonction sont rigides, est abordée au chapitre 11.



## Flexion des poutres droites

On a vu, au chapitre 7, qu'une modélisation simplifiée des poutres pouvait être obtenue à partir de l'hypothèse de BERNOULLI (hypothèse cinématique) et de l'hypothèse de l'état anti-plan des contraintes. Sur la figure 10.1, le point courant est  $M(x_1, x_2, x_3)$ .

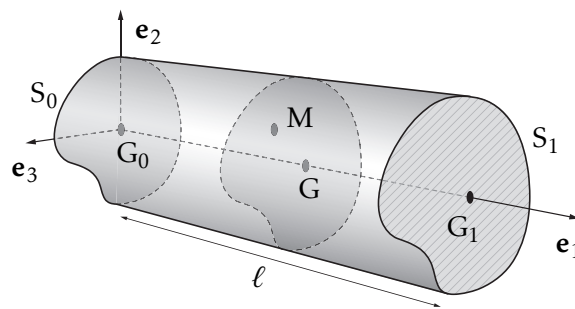


FIGURE 10.1 – Poutre droite et notations générales

### 10.1 Poutre droite et notations générales

**Hypothèse de BERNOULLI** Toute section droite d'une poutre, perpendiculaire à la ligne moyenne, subit un déplacement de solide rigide qui la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne déformée, c'est-à-dire qu'en particulier, elle reste plane et droite.

Puisque les sections restent planes et du fait des notations précédentes, le déplacement d'un point quelconque d'une section droite s'exprime en fonction du déplacement du centre de flexion correspondant et de la rotation de la section soit :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(G) + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{GM} = \begin{pmatrix} u + x_3\theta_2 - x_2\theta_3 \\ v - x_3\theta_1 \\ w + x_2\theta_1 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

La matrice  $\varepsilon$  des déformations associée est donnée par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} u_{,1} + x_3\theta_{2,1} - x_2\theta_{3,1} & \frac{1}{2}(v_{,1} - x_3\theta_{1,1} - \theta_3) & \frac{1}{2}(w_{,1} + x_2\theta_{1,1} + \theta_2) \\ & 0 & 0 \\ & \text{sym} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

De même, les sections droites restent droites, c'est-à-dire  $\theta_2 = -w_{,1}$  et  $\theta_3 = v_{,1}$  et le champ des déplacements et la matrice des déformations deviennent :

$$\mathbf{U}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} u - x_3w_{,1} - x_2v_{,1} \\ v - x_3\theta_1 \\ w + x_2\theta_1 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} u_{,1} - x_3w_{,11} - x_2v_{,11} & -\frac{1}{2}x_3\theta_{1,1} & \frac{1}{2}x_2\theta_{1,1} \\ & 0 & 0 \\ & \text{sym} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

**Hypothèse de l'état de contrainte anti-plan** On choisit une loi de comportement approchée en supposant que seules les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  sont non nulles. On obtient :

$$\sigma_{11} = E(u_{,1} - x_3w_{,11} - x_2v_{,11}) \quad \sigma_{12} = -Gx_3\theta_{1,1} \quad \sigma_{13} = -Gx_2\theta_{1,1} \quad (10.4)$$

et les contraintes généralisées correspondantes fournissent les lois de comportement généralisées :

$$\begin{aligned} N &= EAu_{,1} & V_2 &= 0 & V_3 &= 0 \\ T &= GJ\theta_{1,1} & M_2 &= -EI_{22}w_{,11} & M_3 &= EI_{33}v_{,11} \end{aligned} \quad (10.5)$$

L'hypothèse de BERNOLLI ne permet pas d'obtenir directement les efforts tranchants  $V_2$  et  $V_3$ .

## 10.2 Équations locales

Les équations locales qui caractérisent le comportement des poutres sont obtenues en isolant un tronçon élémentaire de longueur  $dx_1$  similaire à celui de la figure 10.2

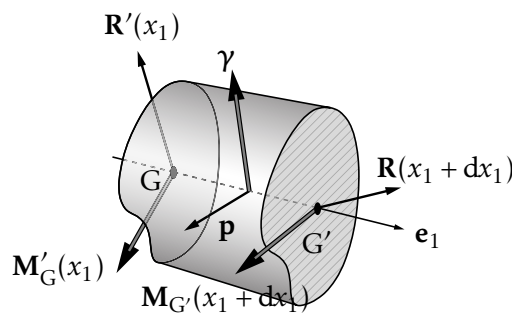


FIGURE 10.2 – Équilibre d'un tronçon infinitésimal de poutre

puis en écrivant qu'il est en équilibre :

- au point G de la section droite à l'abscisse  $x_1$  de normale  $\mathbf{e}_1$ , le torseur des éléments de réduction est  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_G)$ , sur la section droite en vis à vis, c'est-à-dire en G de la section droite d'abscisse  $x_1$  et de normale  $-\mathbf{e}_1$ , il est  $(\mathbf{R}', \mathbf{M}'_G)$ , et le principe d'action réaction donne  $(\mathbf{R}', \mathbf{M}'_G) = -(\mathbf{R}, \mathbf{M}_G)$ ;
- au point G' de la section droite d'abscisse  $x_1 + dx_1$  et de normale  $+\mathbf{e}_1$ , il est  $(\mathbf{R}(x_1 + dx_1), \mathbf{M}_{G'}(x_1 + dx_1))$ .

Les forces de volume, appliquées sur le tronçon, sont pour ce problème monodimensionnel des répartitions linéiques. On supposera que ces répartitions linéiques d'efforts sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= n\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\gamma} &= \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (10.6)$$

### 10.2.1 Équilibre d'un tronçon de poutre

En utilisant la relation  $(\mathbf{R}(x_1 + dx_1), \mathbf{M}_{G'}(x_1 + dx_1)) = (\mathbf{R} + d\mathbf{R}, \mathbf{M}_G + d\mathbf{M}_G)$ , les théorèmes généraux induisent :

**Théorème de la résultante** La somme des forces extérieures appliquées au tronçon est nulle :

$$-\mathbf{R} + \mathbf{R} + d\mathbf{R} + \mathbf{p} dx_1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}_{,1} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (10.7)$$

**Théorème du moment** Le moment des forces extérieures, exprimé par exemple en G', est nul :

$$-\mathbf{M} + \mathbf{M} + d\mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma} dx_1 + \int_0^{dx_1} ((\lambda - dx_1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{p} d\lambda) + (-dx_1)\mathbf{e}_1 \wedge (-\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (10.8)$$

soit, en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\mathbf{M}_{,1} + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (10.9)$$

Il en résulte que le problème des poutres est caractérisé par deux équations vectorielles, qui constituent les équations locales :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{,1} + \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{,1} + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{R} + \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10.10)$$

c'est-à-dire six équations scalaires par projection :

$$\begin{aligned} N_{,1} + n &= 0 & V_{2,1} + q_2 &= 0 & V_{3,1} + q_3 &= 0 \\ T_{,1} + \gamma_1 &= 0 & M_{2,1} - V_3 + \gamma_2 &= 0 & M_{3,1} + V_2 + \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$



auxquelles, on associe les lois de comportement généralisées (10.5).

Ces équations sont complétées par des conditions aux limites géométriques sur une partie de la frontière du domaine  $\partial\Omega_u$  : conditions de déplacements (translations ou rotations) donnés aux extrémités, et par des conditions naturelles sur la partie de frontière du domaine  $\partial\Omega_\sigma$  complémentaire de  $\partial\Omega_u$  : conditions sur les efforts ou couples extérieurs donnés aux extrémités.

Ⓜ Lorsque sur une poutre, un chargement concentré, force ou couple, est appliqué en travée, c'est-à-dire entre les extrémités, la discontinuité correspondante est traitée en considérant que la poutre est constituée de deux ou plusieurs tronçons indépendants envisagés chacun comme une poutre avec des charges appliquées aux extrémités. On écrit alors des conditions de continuité pour raccorder les tronçons.

### 10.3 Flexion plane

Les problèmes de flexion plane dans le plan principal d'inertie ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ) se rencontrent lorsque les charges extérieures appliquées à la poutre sont telles que le torseur des forces intérieures dans une section quelconque se réduit à un effort tranchant  $V_2$  et à un moment de flexion  $M_3$ , c'est-à-dire que les charges appliquées sont ou bien des forces suivant  $\mathbf{e}_2$  ou des couples d'axe  $\mathbf{e}_3$ .

#### 10.3.1 Mise en équations

On s'intéresse maintenant au déplacement de flexion de la poutre dans le plan principal d'inertie ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ). Le champ des déplacements général (10.3) se ramène à :

$$\mathbf{U}(M) = \begin{pmatrix} -x_2 v_{,1} \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = v_{,1} \mathbf{e}_3 \quad (10.12)$$

**Équations locales** Les équations locales, en supposant qu'il n'y a pas de répartition linéique de couple  $\gamma_3$ , se réduisent à deux équations :

$$V_{2,1} = -q_2 \quad \text{et} \quad V_2 = -M_{3,1} \quad \Rightarrow \quad M_{3,11} = q_2 \quad (10.13)$$

et la loi de comportement permet d'obtenir l'équation locale exprimée en fonction du déplacement  $v$  :

$$EI_{33} v_{,1111} - q_2 = 0 \quad \text{avec} \quad M_3 = EI_{33} v_{,11} \quad \text{et} \quad V_2 = -EI_{33} v_{,111} \quad (10.14)$$

**Conditions aux limites** Dans les sections d'abscisse  $x_1 = 0$  et  $x_1 = l$  (elles définissent les parties de frontière  $\partial\Omega_u$  ou  $\partial\Omega_\sigma$ ), le torseur des forces intérieures s'ex-

prime en fonction du torseur des forces extérieures et on a :

$$\begin{array}{lcl} V_2(0) = -Y_0 & \text{et} & V_2(\ell) = Y_\ell \\ M_3(0) = -\Gamma_0 & & M_3(\ell) = \Gamma_\ell \end{array} \quad (10.15)$$

les efforts extérieurs sont ou bien des efforts directement appliqués, connus, ou bien des réactions d'appuis, a priori inconnues.

**Flexion plane des poutres en déplacement** Trouver le déplacement  $v(x_1)$  solution du problème :

$$EI_{33}v_{,1111} - q_2 = 0, \quad x_1 \in [0; \ell] \quad (10.16)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{lcl} v(0) = v_d(0) & & V_2(0) = -Y_0 \\ \theta_3(0) = v_{,1}(0) = \theta_{3d}(0) & \text{ou} & M_3(0) = -\Gamma_0 \\ v(\ell) = v_d(\ell) & & V_2(\ell) = Y_\ell \\ \theta_3(\ell) = v_{,1}(\ell) = \theta_{3d}(\ell) & & M_3(\ell) = \Gamma_\ell \end{array} \quad (10.17)$$

• **Exemple** On considère une poutre chargée à gauche (section  $x_1 = 0$ ) par une force extérieure verticale ascendante  $\mathbf{F}$  et encastrée à droite (section  $x_1 = \ell$ ). Dans ces conditions, la partie de frontière  $\partial\Omega_u$  est la section droite  $x_1 = \ell$  où les conditions d'encastrement sont  $v(\ell) = \theta_3(\ell) = v_{,1}(\ell) = 0$  et la partie de frontière  $\partial\Omega_\sigma$  est la section droite  $x_1 = 0$  où les conditions de chargement sont  $V_2(0) = -F$  et  $M_3(0) = 0$ . •

### 10.3.2 Diagrammes de l'effort tranchant et du moment de flexion

Nous allons étudier les variations de ces deux grandeurs en fonction de l'abscisse  $x_1$  d'une section droite courante.

#### Éléments de réduction sur une facette à gauche

Sur cette facette, les efforts intérieurs peuvent être calculés de deux manières :

- tronçon gauche : l'effort tranchant est opposé à la résultante des efforts extérieurs appliqués sur la partie de poutre  $[0; x_1]$ . Le moment de flexion est opposé au moment résultant en G des efforts appliqués sur la partie  $[0; x_1]$ .
- tronçon droit : l'effort tranchant est égal à la résultante des efforts extérieurs appliqués sur la partie  $[x_1; \ell]$ . Le moment de flexion est égal au moment résultant en G des efforts appliqués sur la partie de poutre  $[x_1; \ell]$ .

En effet, l'équilibre du tronçon gauche de poutre donne :

$$\sum_{i, \text{gauche}} \mathbf{F}_i + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i, \text{gauche}} \Gamma_i + \sum_{i, \text{gauche}} \mathbf{G}\mathbf{P}_i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F}_i \mathbf{e}_2 + \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (10.18)$$

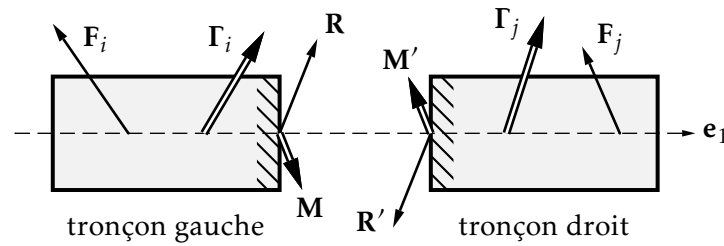


FIGURE 10.3 – Efforts appliqués sur la poutre

et l'équilibre de la poutre donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i,\text{gauche}} \mathbf{F}_i + \sum_{i,\text{droite}} \mathbf{F}_i &= \mathbf{0} \\ \sum_{i,\text{gauche}} \boldsymbol{\Gamma}_i + \sum_{i,\text{gauche}} \text{GP}_i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F}_i \mathbf{e}_2 + \sum_{i,\text{droite}} \boldsymbol{\Gamma}_i + \sum_{i,\text{droite}} \text{GP}_i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F}_i \mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10.19)$$

soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \sum_{i,\text{gauche}} \mathbf{F}_i = \sum_{i,\text{droite}} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M} &= - \left( \sum_{i,\text{gauche}} \boldsymbol{\Gamma}_i + \sum_{i,\text{gauche}} \text{GP}_i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F}_i \mathbf{e}_2 \right) = \sum_{i,\text{droite}} \boldsymbol{\Gamma}_i + \sum_{i,\text{droite}} \text{GP}_i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F}_i \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (10.20)$$

Pour tracer les variations de ces deux éléments, il faut déterminer complètement les efforts extérieurs appliqués sur la poutre, notamment les réactions d'appuis.

Ⓜ On peut de même exprimer les efforts intérieurs sur une section à droite en utilisant le trièdre lié à la section.

On trace de façon indépendante les variations de l'effort tranchant et du moment de flexion puis on vérifie que  $V_2 = -M_{3,1}$ .

• **Exemple** On considère la poutre illustrée sur la figure 10.4. On a  $R_A = -P$  et  $M_A = -P\ell$ , d'où  $V_2 = -R_A = P$  et  $M_3 = -M_A + R_A x_1 = P(\ell - x_1)$ . Les variations de l'effort tranchant et du moment de flexion sont indiquées sur la figure 10.5. Le diagramme ainsi tracé, les

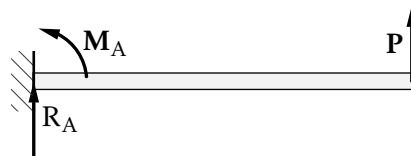


FIGURE 10.4 – Poutre encastree

discontinuités correspondent aux forces extérieures appliquées à la poutre en sens et module.

•

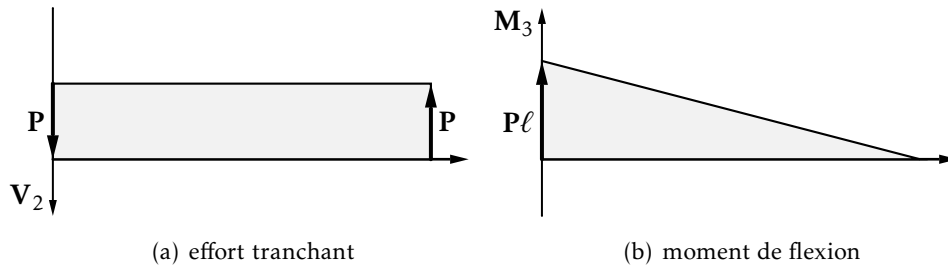


FIGURE 10.5 – efforts intérieurs

### Calcul des contraintes

Les hypothèses de BERNOULLI et d'état de contrainte anti-plan impliquent que pour la flexion plane, l'état de contrainte est caractérisé par la seule composante  $\sigma_{11}$  :

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_{33}}x_2 \quad (10.21)$$

La loi de comportement approchée fournit la déformation linéique  $\varepsilon_{11} = -\frac{M_3}{EI_{33}}x_2$  et l'énergie de déformation de flexion dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_S \varepsilon_{11} \sigma_{11} dS dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI_{33}^2} \int_S x_2^2 dS dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI_{33}} dx_1 \quad (10.22)$$

L'hypothèse de BERNOULLI fait que l'énergie de déformation associée au cisaillement n'est pas prise en compte dans cette expression.

### 10.3.3 Calcul des déplacements - flèches et rotations

#### Méthode des déplacements : résolution du problème aux limites

On cherche à résoudre le problème caractérisé par l'équation locale en déplacement et les conditions aux limites associées.

Pour illustrer la démarche, on considère la poutre de la figure 10.6 encastree à gauche, soumise à une force répartie en travée  $q$  et à une charge verticale  $P$  à l'extrémité droite.

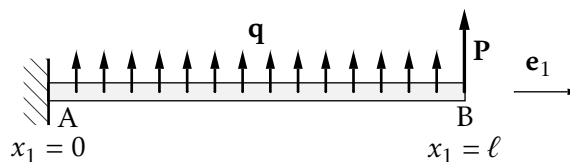


FIGURE 10.6 – Poutre encastree sous chargement réparti

Le problème est celui de la résolution de l'équation locale :

$$EI_{33}v_{,1111} - q = 0 \quad x_1 \in [0; \ell] \quad (10.23)$$

accompagnée des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & & \theta_3(0) = v_{,1}(0) = 0 \\ V_2(\ell) = P = -EI_{33}v_{,111}(\ell) & & M_3(\ell) = 0 = EI_{33}v_{,11}(\ell) \end{aligned} \quad (10.24)$$

On a donc en intégrant quatre fois l'équation différentielle  $EI_{33}v_{,1111} = q$  :

$$EI_{33}v = \frac{qx_1^4}{24} + \frac{C_1x_1^3}{6} + \frac{C_2x_1^2}{2} + C_3x_1 + C_4 \quad (10.25)$$

les quatre constantes d'intégration sont déterminées en prenant en compte les quatre conditions aux limites, soit :

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \Rightarrow C_4 = 0 \\ \theta_3(0) = v_{,1}(0) = 0 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ V_2(\ell) = P = -EI_{33}v_{,111}(\ell) & \Rightarrow q\ell + C_1 + P = 0 \\ M_3(\ell) = 0 = EI_{33}v_{,11}(\ell) & \Rightarrow \frac{q\ell^2}{2} + C_1\ell + C_2 = 0 \end{aligned} \quad (10.26)$$

autrement dit, par inversion :

$$C_4 = 0; \quad C_3 = 0; \quad C_1 = -q\ell - P; \quad C_2 = \frac{q\ell^2}{2} + P\ell \quad (10.27)$$

Les flèche et rotation sont données en tout point par :

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \frac{1}{EI_{33}} \left[ \frac{q}{24}x_1^4 - (q\ell + P)\frac{x_1^3}{6} + \left( \frac{q\ell^2}{2} + P\ell \right) \frac{x_1^2}{2} \right] \\ \theta_3(x_1) &= \frac{1}{EI_{33}} \left[ \frac{q}{6}x_1^3 - (q\ell + P)\frac{x_1^2}{2} + \left( \frac{q\ell^2}{2} + P\ell \right) x_1 \right] \end{aligned} \quad (10.28)$$

et en particulier en  $x_1 = \ell$  :

$$v(\ell) = \frac{q\ell^4}{8EI_{33}} + \frac{P\ell^3}{3EI_{33}}; \quad \theta_3(\ell) = \frac{q\ell^3}{6EI_{33}} + \frac{P\ell^2}{2EI_{33}} \quad (10.29)$$

### Méthode des forces à partir du moment de flexion

On cherche à résoudre le problème en partant des équations d'équilibre global du tronçon de poutre :

$$\begin{aligned} V_{2,1} + q_2 &= 0 \\ M_{3,1} + V_2 + \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10.30)$$

dans lesquelles on tient compte de la loi de comportement  $M_3 = EI_{33}v_{,11}$ . On commence donc par déterminer le moment de flexion en tout point de la poutre. Pour ce faire, il est en général nécessaire de calculer les réactions associées aux conditions aux limites en déplacement imposé, ce qui s'obtient en écrivant l'équilibre global de la poutre. Ensuite deux intégrations permettent d'obtenir la rotation et la flèche.

• **Exemple** On considère la poutre 10.6. Les efforts extérieurs sont d'une part les efforts directement appliqués  $q$  et  $P$  et les réactions à l'encastrement :  $R_A$  et  $M_A$ . Elles sont données par :

$$R_A + q\ell + P = 0 \quad \text{et} \quad M_A + q\frac{\ell^2}{2}P\ell = 0 \quad (10.31)$$

et l'effort tranchant et le moment de flexion sont donnés par :

$$\begin{aligned} V_2 &= -R_A - qx_1 = (q\ell + P) - qx_1 \\ M_3 &= M_A + R_Ax_1 + q\frac{x_1^2}{2} = q\frac{\ell^2}{2} - q\ell x_1 + q\frac{x_1^2}{2} + P(\ell - x_1) \end{aligned} \quad (10.32)$$

La loi de comportement fournit alors :

$$EI_{33}v_{,11} = q\frac{\ell^2}{2} - q\ell x_1 + q\frac{x_1^2}{2} + P\ell - Px_1 \quad (10.33)$$

et après intégration, on a :

$$EI_{33}v = q\frac{\ell^2 x_1^2}{4} - q\ell\frac{x_1^3}{6} + q\frac{x_1^4}{24} + P\ell\frac{x_1^2}{2} - P\frac{x_1^3}{6} + D_1x_1 + D_2 \quad (10.34)$$

Les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes d'intégration sont  $v(0) = 0$  et  $\theta_3(0) = 0$ . On obtient  $D_1 = D_2 = 0$  et la flèche et la rotation sont données en tout point par :

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \frac{1}{EI_{33}} \left[ \frac{q}{24}x_1^4 - (q\ell + P)\frac{x_1^3}{6} + \left( \frac{q\ell^2}{2} + P\ell \right) \frac{x_1^2}{2} \right] \\ \theta_3(x_1) &= \frac{1}{EI_{33}} \left[ \frac{q}{6}x_1^3 - (q\ell + P)\frac{x_1^2}{2} + \left( \frac{q\ell^2}{2} + P\ell \right) x_1 \right] \end{aligned} \quad (10.35)$$

et en particulier en  $x_1 = \ell$  :

$$v(\ell) = \frac{q\ell^4}{8EI_{33}} + \frac{P\ell^3}{3EI_{33}}; \quad \theta_3(\ell) = \frac{q\ell^3}{6EI_{33}} + \frac{P\ell^2}{2EI_{33}} \quad (10.36)$$

•

**Interprétation du diagramme du moment de flexion** La loi de comportement et l'hypothèse de BERNOULLI fournissent la relation :

$$\theta_{3,1}(x_1) = v_{,11}(x_1) = \frac{M_f}{EI_{33}} \quad (10.37)$$

Une intégration entre deux sections droites A et B donne :

$$\int_A^B \theta_{3,1}(x_1) dx_1 = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M_f}{EI_{33}} dx_1 \quad (10.38)$$

Donc, la différence de rotation entre les sections droites A et B est égale à l'aire délimitée par la courbe de flexion divisé par la rigidité de flexion  $EI_{33}$  et comprise entre A et B. De même la flèche de la section B peut s'obtenir à partir de la connaissance de la flèche et de la rotation de la section A et du moment de flexion. En effet, en intégrant entre A et B la relation  $\theta_3 = v_{,1}$ , on a :

$$\int_A^B v_{,1} dx_1 = v_B - v_A = \int_A^B \theta_3 dx_1 \quad (10.39)$$

et une intégration par partie de la seconde intégrale donne :

$$\int_A^B \theta_3 dx_1 = x_1 \theta \Big|_A^B - \int_A^B x_1 d\theta = x_B \theta_B - x_A \theta_A - \int_A^B x_1 d\theta \quad (10.40)$$

et en remplaçant  $d$ , on peut écrire :

$$\int_B^A x_1 d\theta = \int_A^B \frac{M_3}{EI_{33}} x_1 dx_1 \quad (10.41)$$

en récapitulant, on a donc :

$$\begin{aligned} v_B - v_A &= x_B \theta_B - x_A \theta_A - \int_A^B \frac{M_3}{EI_{33}} x_1 dx_1 \\ &= x_B \left( \theta_A + \int_A^B \frac{M_3}{EI_{33}} dx_1 \right) - x_A \theta_A - \int_A^B \frac{M_3}{EI_{33}} x_1 dx_1 \end{aligned} \quad (10.42)$$

soit :

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M_f}{EI_{33}} (x_B - x_1) dx_1 \quad (10.43)$$

La flèche en B est obtenue en superposant un déplacement de solide rigide et un déplacement de flexion pure. En effet d'une manière générale on a :

- déplacement de solide rigide entre A et B sous la forme d'une translation de A et rotation autour de A :

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A + \theta_A \wedge \mathbf{AB} \quad (10.44)$$

- déplacement en B dû à la flexion seule lors duquel une section droite  $M'$  à l'abscisse  $x_1 + dx_1$  tourne par rapport à la section droite  $M$  à l'abscisse  $x_1$  d'un angle  $d\theta_M$ , et le déplacement induit en B est :

$$d\mathbf{U}_B = d\theta_M \wedge \mathbf{MB} \quad (10.45)$$

Compte tenu de la flexion plane de la poutre dans le plan principal  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  considérée ici, il vient :

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M_f}{EI_{33}} (x_B - x_1) dx_1 \quad (10.46)$$

Ⓜ Ces deux relations sont intéressantes à utiliser lorsque le diagramme du moment de flexion est simple et lorsqu'on connaît les flèche et rotation dans une section donnée. Par exemple en reprenant la poutre précédente, on peut déterminer la rotation en B :

$$\begin{aligned} \theta_B - \theta_A &= \theta_B = \int_0^\ell \frac{1}{EI_{33}} \left( q \frac{\ell^2}{2} - q\ell x_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P\ell - Px_1 \right) dx_1 \\ \theta_B &= \theta_3(\ell) = \frac{q\ell^3}{6EI_{33}} + \frac{P\ell^2}{2EI_{33}} \end{aligned}$$

On pourrait de même calculer la flèche en B.

**Application du théorème de CASTIGLIANO**

Le calcul de l'énergie de déformation de flexion et l'application du théorème de CASTIGLIANO permet d'obtenir le déplacement du point d'application d'une force ou de la rotation d'un couple. L'exemple de la poutre précédente, permet d'obtenir la flèche en B, puisque la force P y est appliquée. En effet :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI_{33}} dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{1}{EI_{33}} \left( q \frac{\ell^2}{2} - q\ell x_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P\ell - Px_1 \right)^2 dx_1 \quad (10.48)$$

et :

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^\ell \frac{M_3}{EI_{33}} \frac{\partial M_3}{\partial P} dx_1 \\ &= \int_0^\ell \frac{1}{EI_{33}} \left( q \frac{\ell^2}{2} - q\ell x_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P\ell - Px_1 \right) (\ell - x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (10.49)$$

c'est-à-dire :

$$v_B = v(\ell) = \frac{q\ell^4}{8EI_{33}} + \frac{P\ell^3}{3EI_{33}} \quad (10.50)$$

On obtient le déplacement du point d'application de P dans le sens de P.



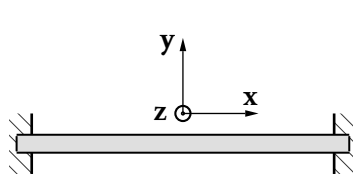


# Assemblages hyperstatiques de poutres

## 11.1 Hyperstaticité des systèmes plans

Le degré d'hyperstaticité d'un système est indépendant du chargement qui lui est appliqué. Ce degré ne dépend que de son agencement. Aussi faut-il prendre beaucoup de précautions lorsqu'on parle de degré d'hyperstaticité en se limitant à la notion de problème plan. En effet, le nombre  $h$  pourra être différent lorsque l'étude sera faite d'un point de vue plan ou d'un point de vue spatial. La simplification plane nous amène souvent à trouver une valeur de  $h$  plus faible, appelée quand même, par abus de langage *degré d'hyperstaticité*; ceci risque donc de cacher des difficultés qui apparaîtront à d'autres moments de la conception.

• **Exemple Poutre bi-encastree** — Le torseur sthénique d'un encastrement contient six et trois composantes en études spatiale et plane, respectivement. Les autres quantités sont listées sur la figure 11.1.



étude	spatiale	plane
nombre d'inconnues	$I_s = 12$	$I_s = 6$
nombre d'équations	$E_s = 6$	$E_s = 3$
degré d'hyperstaticité $h = I_s - E_s$	$h = 6$	$h = 3$

FIGURE 11.1 – Hyperstaticité d'une poutre bi-encastree

Dans cet exemple, le degré d'hyperstaticité pour l'étude spatiale est égal à 6 mais pour l'étude plane, il est égal à 3. Le passage du point de vue spatial au point de vue plan fait perdre, en apparence, trois hyperstatismes dont il faudra bien tenir compte à un moment donné. ●

## 11.2 Applications

### 11.2.1 Poutre sur trois appuis, problème plan

Le système étudié est la poutre illustrée sur la figure 11.2 telle que  $AB = BC = \ell$  et  $CD = 2\ell$ . Elle est supportée par un pivot en A et par des supports ponctuels en C et

D. Ces conditions entraînent un degré d'hyperstaticité  $h = 1$  : il y a par conséquent un effort hyperstatique  $Y_C$ . Ce dernier est égal à une force  $F$  qui impose la nullité de la flèche en C. Afin de résoudre ce problème, considérons les trois équations de la

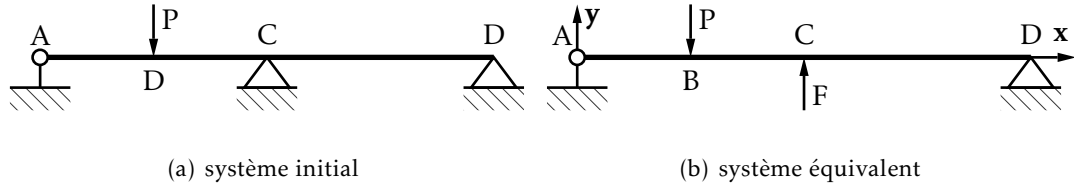


FIGURE 11.2 – Poutre sur trois appuis

statique :

$$X_A = 0; \quad Y_A - P + F + Y_D = 0; \quad 4Y_D \ell + 2F\ell - P\ell = 0 \quad (11.1)$$

ainsi que l'équation de compatibilité des déplacements :

$$v_C = 0 \quad (11.2)$$

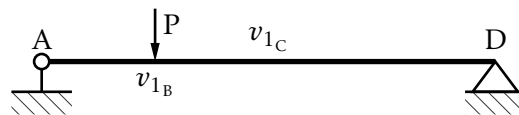
Il existe au moins deux méthodes de résolution.

**Méthode par superposition** Le déplacement au point C est décomposé comme suit :

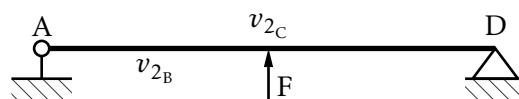
$$v_C = v_{1C} + v_{2C} \quad (11.3)$$

concept illustré sur la figure 11.3. L'intégration des déformées est réalisée grâce aux formules des aires et du moment des aires :

$$\theta_{1A} = -\frac{7 P \ell^2}{8 EI}; \quad \theta_{1D} = \frac{5 P \ell^2}{8 EI}; \quad \theta_{2A} = \frac{F \ell^2}{EI}; \quad v_{1C} = -\frac{11 P \ell^3}{12 EI}; \quad v_{2C} = \frac{4 F \ell^3}{3 EI} \quad (11.4)$$



(a) solution  $v_{1C}$



(b) solution  $v_{2C}$

FIGURE 11.3 – Méthode par superposition

**Méthode de CASTIGLIANO** Dans cette formulation le déplacement lié à l'inconnu hyperstatique s'écrit :

$$v_C = \frac{\partial W}{\partial F} \quad (11.5)$$

puisqu'  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{F}$  sont orientés dans la même direction. Autrement dit :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\ell \frac{(Y_A x)^2}{2EI} dx + \int_\ell^{2\ell} \frac{(Y_A x - P(x-\ell))^2}{2EI} dx + \int_{2\ell}^{4\ell} \frac{(Y_D(4\ell-x))^2}{2EI} dx \\ &= \frac{\ell^3}{24EI} (7P^2 - 22PF + 16F^2) \end{aligned} \quad (11.6)$$

Concernant les efforts, nous obtenons :

$$X_A = 0; \quad Y_A = \frac{13}{32}P \approx 0,4P; \quad Y_C = \frac{11}{16}P \approx 0,69P; \quad Y_D = -\frac{3}{32}P \approx -0,09P \quad (11.7)$$

et la solution finale en déplacement s'écrit :

$$v(x) = \begin{cases} \frac{P}{6}x^3 - \frac{6\ell^2 P}{13}x & 0 \leq x < \ell \\ -\frac{19P}{78}(x-\ell)^3 + \frac{LP}{2}(x-\ell)^2 - \frac{\ell^2 P}{26}(x-\ell) - \frac{23\ell^3 P}{78} & \ell \leq x < 2\ell \\ \frac{P}{26}(x-2\ell)^3 - \frac{3\ell P}{13}(x-2\ell)^2 + \frac{4\ell^2 P}{13}(x-2\ell) & 2\ell \leq x \leq 4\ell \end{cases} \quad (11.8)$$

dont l'allure générale est donnée sur la figure 11.4(a).

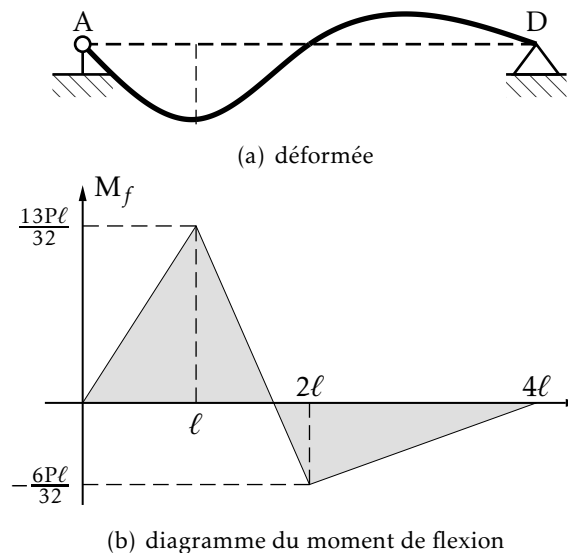


FIGURE 11.4 – Diagrammes

### 11.2.2 Portique symétrique, limitation plane

Considérons le système de la figure 11.7 tel que  $AB = H$ ,  $AJ = JE = L$  et comprenant deux encastremets et six inconnues. Pour un solide, il y a trois équations d'équilibre

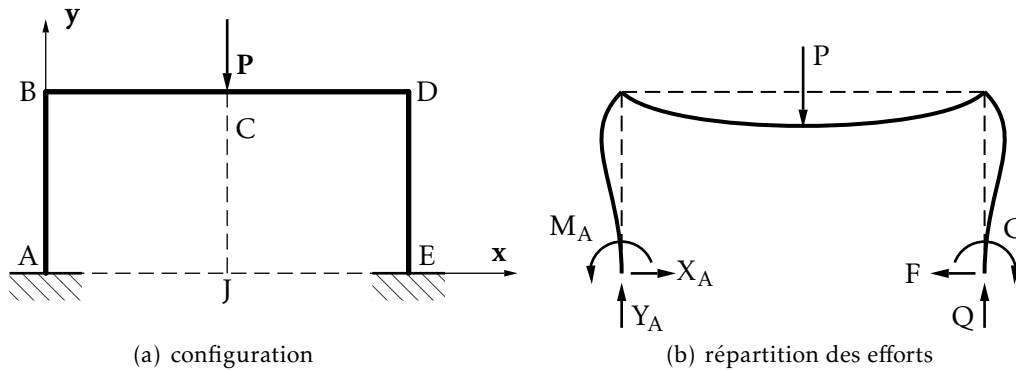


FIGURE 11.5 – structure et chargement symétriques

donc  $h_e = 3$ . De plus, quel que soit l'endroit où l'on coupe, on obtient deux solides donc  $h_i = 0$  et  $h = 3$ .

**Résolution classique** Les efforts  $F$ ,  $Q$  et  $C$  sont tels que la translation  $T$  ainsi que la rotation de  $E$  sont nulles. Ainsi, il y a trois équations de compatibilité à écrire.

– équations d'équilibre

$$X_A - F = 0 \quad (11.9a)$$

$$Y_A + Q - P = 0 \quad (11.9b)$$

$$M_A - C + 2QL - PL = 0 \quad (11.9c)$$

– équations de compatibilité

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (11.10a)$$

$$v_E = 0 \quad (11.10b)$$

$$\theta_E = 0 \quad (11.10c)$$

**Résolution avec utilisation de la symétrie** D'après la figure 11.7, le système (structure, liaisons avec le bâti, chargement) est symétrique par rapport à l'axe  $(J, \mathbf{y})$  donc les déformées et les efforts de liaison sont symétriques par rapport à cet axe. Les équations issues de la symétrie sont :

$$Y_A = Q \quad \text{ne correspond pas à une équation d'équilibre} \quad (11.11a)$$

$$X_A = F \quad \text{correspond à l'équation (11.9a)} \quad (11.11b)$$

$$M_A = C \quad \text{correspond à l'équation (11.9c)} \quad (11.11c)$$

En plus de ces trois équations de symétrie, nous avons également l'équation d'équilibre (11.9b). Nous avons quatre équations obtenues simplement et, par conséquent, il reste deux équations de compatibilité à écrire. Lesquelles? Laquelle est-elle déjà écrite?

Les équations (11.9b) et (11.11b) permettent d'obtenir  $Q$  :

$$Y_A = Q = \frac{1}{2}P \quad (11.12)$$

Les deux équations de compatibilité qu'il faut encore écrire sont donc celles correspondant aux deux inconnues restantes  $F$  et  $C$ , soit :

$$u_E = \theta_E = 0 \quad (11.13)$$

Cette utilisation de la symétrie permet de simplifier les calculs de portiques, cadres et anneaux, symétriques bien sûr, dont le chargement respecte la même symétrie.

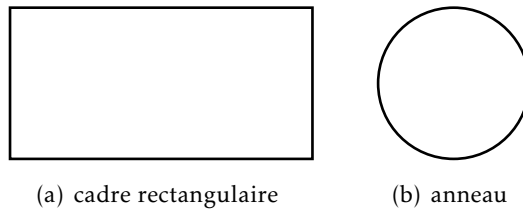


FIGURE 11.6 – configurations symétriques

### 11.2.3 Anneau dynamométrique

Déterminez la raideur d'un anneau dynamométrique en acier, de section droite rectangulaire  $b \times h$ , de rayon moyen  $R$ . Quelle charge maximum peut-il servir à mesurer

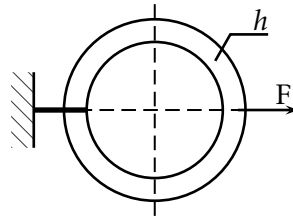


FIGURE 11.7 – Anneau dynamométrique

sachant que la contrainte maximum en utilisation normale est le dixième de la limite élastique du matériau? Calculez les variations de longueur du diamètre horizontal  $AB$  et du diamètre vertical  $CD$  en fonction de la charge radiale  $F$ .

## 11.3 Poutre sur appuis dénivélables

Un appui dénivélable de raideur  $k$  exerce sur la poutre qu'il soutient une force  $\mathbf{R}$  proportionnelle à son allongement  $\Delta$ , avec :

$$\mathbf{R} = -k \Delta \quad (11.14)$$

La poutre exerce sur le ressort la force  $\mathbf{P}$ , avec  $\mathbf{P} = +k \Delta$ . Le bâti exerce sur le ressort

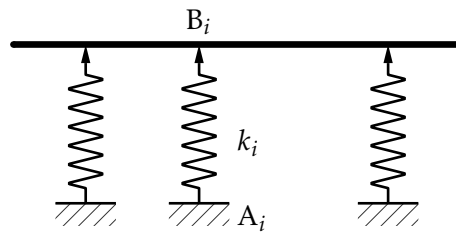


FIGURE 11.8 – Poutre sur appuis dénivelables

la force  $\mathbf{R}$ . L'énergie de déformation du ressort est :

$$W = \frac{1}{2}k\Delta^2 \quad (11.15)$$

L'effort hyperstatique choisi peut être soit la réaction en A soit l'effort de liaison en B. On l'appelle  $F$ , avec  $F = k|\Delta|$ .

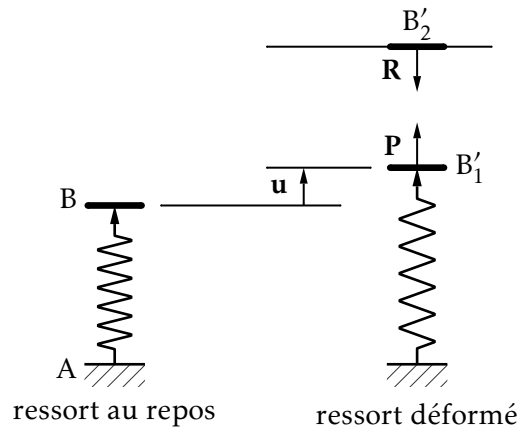


FIGURE 11.9 – raideur

On ne peut pas appliquer directement les théorèmes sur l'énergie élastique aux poutres dont certaines liaisons sont déformables car les déplacements d'ensemble peuvent avoir lieu sans déformation de la poutre. Il faut alors considérer le système élastique constitué par la poutre et les appuis dénivelables, calculer son énergie de déformation et écrire que chaque réaction de ressort choisie comme inconnue hyperstatique minimise l'énergie de déformation globale.

### 11.3.1 Effort hyperstatique : liaison interne

**Résolution à l'aide des déformées** On écrit la compatibilité du déplacement du point B de la poutre et de l'allongement du ressort.

**Résolution à l'aide de l'énergie** Le système dont on calcule l'énergie est l'ensemble poutre-appuis dénivelables. La réaction en B est un effort de liaison interne. Il lui correspond une équation fournie par le théorème de MÉNABRÉA. On écrit que

l'effort  $F$  minimise l'énergie, d'où l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial W}{\partial F} = 0 \quad (11.16)$$

### 11.3.2 Effort hyperstatique : liaison externe

**Résolution à l'aide des déformées** On écrit que le déplacement de l'extrémité A du ressort est nul.

**Résolution à l'aide de l'énergie** Le système dont on calcule l'énergie est l'ensemble poutre-appuis dénivelables. La réaction en A est un effort de liaison externe. L'équation fournie le sera par le théorème de CASTIGLIANO. Sachant que le déplacement de A est nul on obtient l'équation de compatibilité suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial F} = 0 \quad (11.17)$$

## 11.4 Méthode des trois moments

Cette méthode s'applique aux structures constituées de poutres droites, lorsque le problème est plan et que les déformées dues à l'effort normal et celles dues à l'effort tranchant sont négligées.

### 11.4.1 Formule des rotations

Nous calculons les rotations aux extrémités du tronçon par la superposition des quatre cas suivants :

- le tronçon, sans charge, subit les déplacements  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$ .
- le tronçon, sur appuis en A et B, est soumis au couple  $M_A$  en A.
- le tronçon, sur appuis en A et B, est soumis au couple  $M_B$  en B.
- le tronçon, sur appuis en A et B, supporte les charges  $Ch$ .

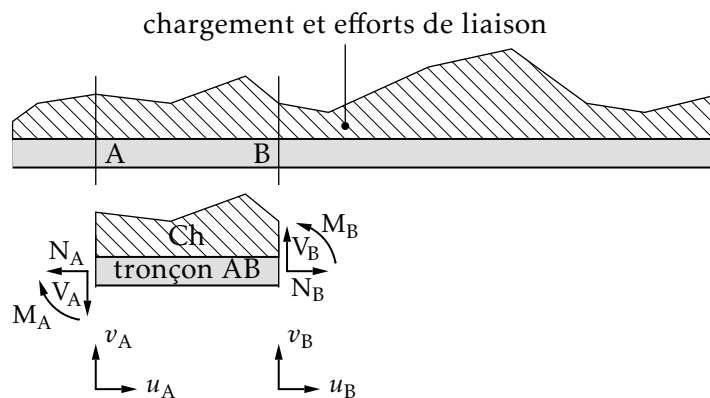


FIGURE 11.10 – tronçon et moments



La superposition donne donc pour le tronçon AB :

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{v_B - v_A}{L} + \theta_A(M_A) + \theta_A(M_B) + \theta_A(Ch) \\ \theta_B &= \frac{v_B - v_A}{L} + \theta_B(M_A) + \theta_B(M_B) + \theta_B(Ch)\end{aligned}\quad (11.18)$$

Si le produit EI est constant, les formules des rotations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{v_B - v_A}{L} - \frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_B L}{6EI} + \theta_A(Ch) \\ \theta_B &= \frac{v_B - v_A}{L} + \frac{M_A L}{6EI} + \frac{M_B L}{3EI} + \theta_B(Ch)\end{aligned}\quad (11.19)$$



FIGURE 11.11 – Superposition

#### 11.4.2 Formule des trois moments

De même, pour le tronçon BC nous avons :

$$\begin{aligned}\theta_B &= \frac{v_C - v_B}{L'} + \theta_B(M_B) + \theta_B(M_C) + \theta_B(Ch') \\ \theta_C &= \frac{v_C - v_B}{L'} + \theta_C(M_B) + \theta_C(M_C) + \theta_C(Ch')\end{aligned}\quad (11.20)$$

où  $Ch'$  est le chargement sur le tronçon BC. La méthode qui consiste à écrire l'égalité de la rotation de part et d'autre du point B s'appelle *méthode des trois moments* car l'équation obtenue est fonction des trois moments de flexion  $M_A$ ,  $M_B$  et  $M_C$ . Dans le cas de deux tronçons de même longueur d'une poutre au produit EI constant la formule des trois moments s'écrit :

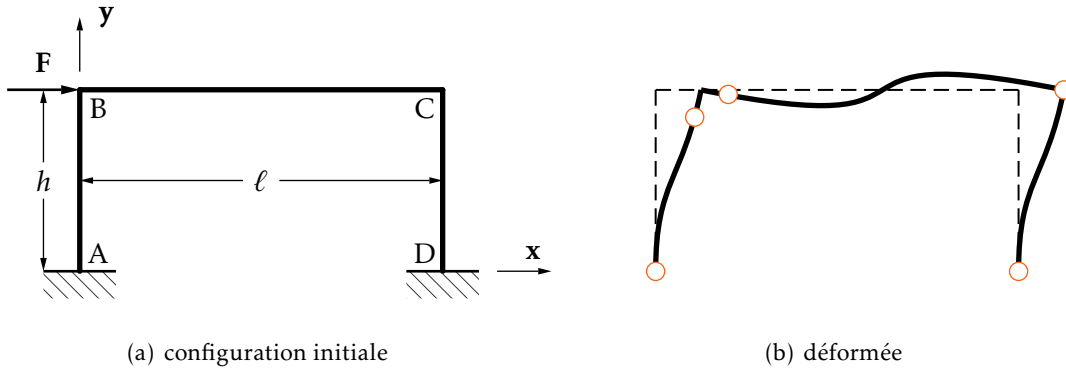
$$M_A + 4M_B + M_C - \frac{6EI}{L^2}(v_C - 2v_B + v_A) = \frac{6EI}{L}(\theta_B(Ch') - \theta_B(Ch))\quad (11.21)$$

Si, de plus, les points A, B et C sont à flèche nulle alors la formule des trois moments se met sous la forme ci-dessous :

$$M_A + 4M_B + M_C = \frac{6EI}{L}(\theta_B(Ch') - \theta_B(Ch))\quad (11.22)$$

• **Exemple** Portique chargé en un nœud — Le moment quadratique *utile* des poteaux est  $I_1$ , celui de la traverse est  $I_2$ . Le portique est en acier et le champ de déplacement est le suivant :

$$\mathbf{U}_B = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U}_C = \begin{pmatrix} u_C \\ v_C \\ 0 \end{pmatrix}\quad (11.23)$$



**FIGURE 11.12** – Portique chargé en un nœud. Il faut envisager cinq coupures  $\circ$  pour résoudre

On néglige les déformées d'effort normal, d'où les relations  $u_B = u_C = v_B = v_C = 0$ . Le degré d'hyperstaticité est trois et les efforts hyperstatiques respectifs sont ceux de l'encastrement en D. En faisant le bilan des inconnues, il y a trois efforts par coupure et le déplacement  $u = u_B = u_C$ , soit 16 inconnues. Le bilan des équations entraîne :

- trois équations d'équilibre par tronçon ;
- trois équations d'équilibre pour le nœud B ;
- deux formules des trois moments ;
- deux rotations nulles.

soit un total de 16 équations. L'écriture des équations d'équilibre nous donne les schémas de la figure 11.13.

Il nous reste à écrire les quatre équations de compatibilité aux quatre inconnues suivantes : le déplacement horizontal  $u$  et les trois efforts hyperstatiques  $P$ ,  $Q$  et  $C$ .

Pour chaque tronçon, nous n'avons pas de charge entre les extrémités. Ainsi, dans les formules, les termes de rotation dus aux charges sont tous nuls.

- poteau :

$$\begin{aligned}\theta_B &= \frac{-u}{h} + \frac{(C + Qh - PL)h}{3EI_1} + \frac{(C - PL - Fh)h}{6EI_1} \\ \theta_C &= \frac{-u}{h} - \frac{(C + Qh)h}{3EI_1} - \frac{Ch}{6EI_1}\end{aligned}\quad (11.24)$$

- traverse :

$$\begin{aligned}\theta_B &= -\frac{(C + Qh - PL)L}{3EI_2} - \frac{(C + Qh)L}{6EI_2} \\ \theta_C &= \frac{(C + Qh - PL)L}{6EI_2} + \frac{(C + Qh)L}{3EI_2}\end{aligned}\quad (11.25)$$

- encastrement :

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{-u}{h} - \frac{(C + Qh - PL)h}{6EI_1} - \frac{(C - PL - Fh)h}{3EI_1} = 0 \\ \theta_D &= \frac{-u}{h} + \frac{(C + Qh)h}{6EI_1} + \frac{Ch}{3EI_1} = 0\end{aligned}\quad (11.26)$$

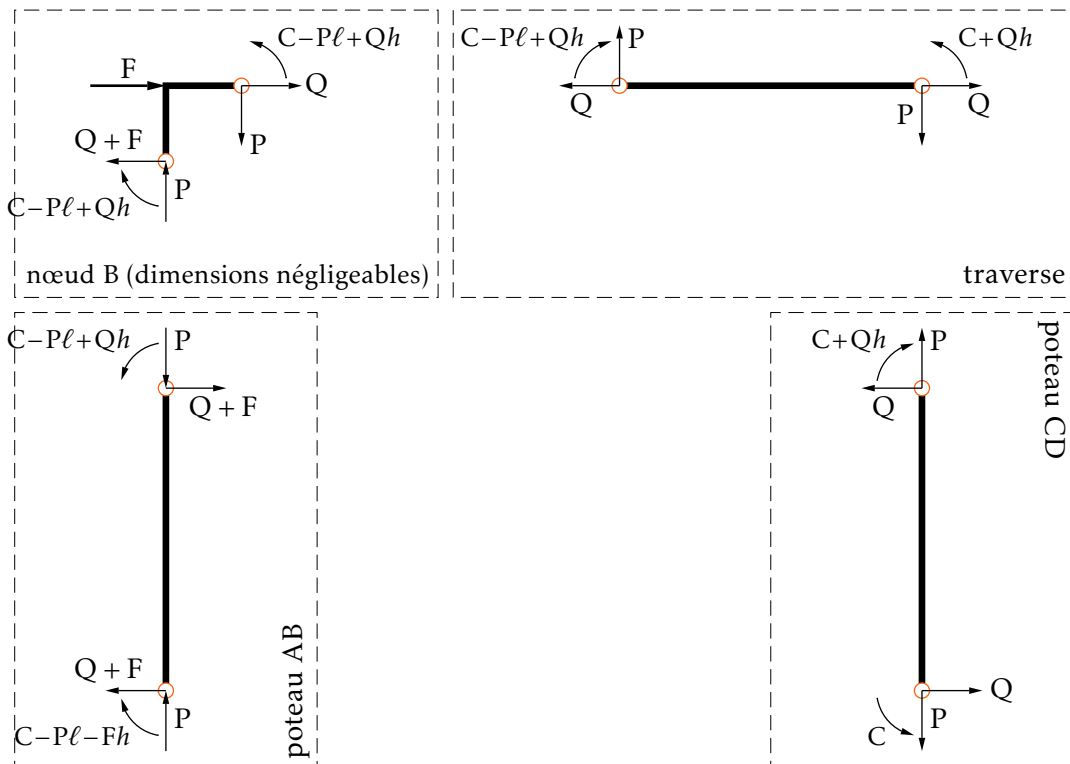


FIGURE 11.13 – Éclatement du portique. Les inconnues hyperstatiques sont  $P$ ,  $Q$  et  $C$

On pose  $U = \frac{6EI_1}{h^2}u$ ,  $\alpha = \frac{h}{6EI_1}$  et  $\beta = \frac{L}{6EI_2}$ . Le système s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} -\alpha & 3(\alpha+\beta) & 2\alpha+3\beta & -3\alpha-2\beta \\ -\alpha & -3(\alpha+\beta) & -2\alpha-3\beta & \beta \\ -\alpha & -3\alpha & -\alpha & 3\alpha \\ -\alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ C \\ Qh \\ PL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} Fh \quad (11.27)$$

d'où, en posant  $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$  et en divisant les équations par  $-\alpha$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3(1+\lambda) & -(2+3\lambda) & 3+2\lambda \\ 1 & 3(1+\lambda) & 2+3\lambda & -\lambda \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ C \\ Qh \\ PL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} Fh \quad (11.28)$$

A l'aide de quelques combinaisons simples, le système matriciel devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3(1+\lambda) & -(2+3\lambda) & 3+2\lambda \\ 2 & 0 & 0 & 3+\lambda \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6+\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ C \\ Qh \\ PL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} Fh \quad (11.29)$$

Nous obtenons, avec  $\lambda = \frac{L}{h} \frac{I_1}{I_2}$  :

$$P = \frac{-3}{6+\lambda} \frac{Fh}{L}; \quad Q = -\frac{F}{2}; \quad C = \frac{3+\lambda}{2(6+\lambda)} Fh; \quad u = \frac{3+2\lambda}{6+\lambda} \frac{Fh^3}{12EI_1} \quad (11.30)$$

Les diagrammes respectifs sont indiqués sur la figure 11.14. ●

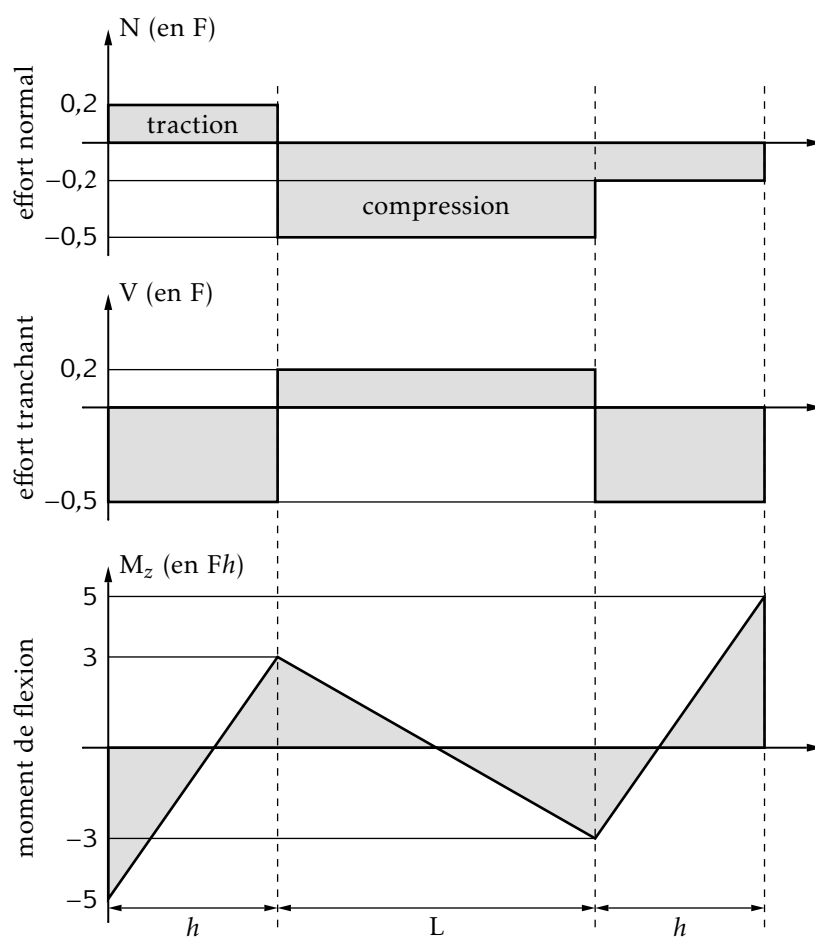


FIGURE 11.14 – Diagrammes d'efforts avec  $\lambda = 2$ ,  $h = 3,2$  m et  $L = 6$  m



## Effort tranchant

Nous avons vu, dans un chapitre précédent, que l'effort tranchant dans une section droite représentait la projection dans cette section de la résultante du torseur de cohésion interne (calculé au centre de gravité de la section) des efforts exercés par la partie droite sur la partie gauche d'un solide soumis à des sollicitations extérieures.

Dans le cas général, l'effort tranchant a une direction quelconque dans la section droite. Nous supposons dans la suite qu'il est colinéaire à la direction principale d'inertie,  $\mathbf{e}_2$ , de la section. Si ce n'était pas le cas on décomposerait le vecteur  $\mathbf{V}$  suivant les deux directions principales de la section et on traiterai parallèlement les effets de  $V_2$  et de  $V_3$ .

### 12.1 Position du problème

Dans une section droite quelconque d'abscisse  $x_1$  où le torseur de cohésion interne se réduit à  $V_2$ , nous cherchons une répartition de contraintes telle que le principe d'équivalence soit respecté. On doit donc vérifier :

$$\iint_S \sigma_{11}(M) dS = 0 \quad \iint_S \sigma_{12}(M) dS = V_2 \quad \iint_S \sigma_{13}(M) dS = 0 \quad (12.1)$$

Si on suppose que  $\sigma_{11}$  est identiquement nulle en tout point de la surface, l'effort tranchant n'induit qu'une répartition de contrainte de cisaillement. L'existence de ces contraintes implique, par les lois de Hooke, l'existence de glissement  $g$  ; il y a alors gauchissement de la section droite. Dans le cas où  $\tau$  est constant en tout point la section reste plane mais pas droite.

On ne peut prévoir l'allure du champ de déplacement, donc les termes de la matrice des déformations qui nous permettrait de remonter aux contraintes.

Les deux équations :

$$\iint_S \sigma_{12}(M) dS = V_2 \quad \iint_S \sigma_{13}(M) dS = 0 \quad (12.2)$$

fournissent, comme solution possible,  $\sigma_{13} = 0$  et  $\sigma_{12} = V_2/A$  mais ce résultat est incompatible avec les conditions aux limites sur le contour de la section droite

qui imposent que la contrainte de cisaillement lui soit tangent. On remarque que  $\sigma_{12} = V_2/A$  est la valeur moyenne du cisaillement dû à  $V_2$ .

La détermination des contraintes de cisaillement dans la section nécessite donc de traiter le problème comme un problème d'élastostatique (résolution de quinze équations aux dérivées partielles liant le champ de déplacement, les contraintes et les déformations en un point du matériau).

Pour une section pleine on peut montrer que résoudre ce problème revient à traiter un problème de DIRICHLET dont la solution est connue dans le cas de la section circulaire ; on obtient pour une section de rayon  $R$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(x_2, x_3) &= \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \frac{V_2}{I_{33}} \left( R^2 - x_2^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} x_3^2 \right) \\ \sigma_{13}(x_2, x_3) &= \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \frac{V_2}{I_{33}} x_2 x_3\end{aligned}\quad (12.3)$$

Ⓜ Dans ce cas particulier, le module de la contrainte de cisaillement dans la section est maximum au centre de la section  $x_2 = x_3 = 0$  et vaut :

$$|\tau|_{\max} = \sqrt{\sigma_{12}^2(0,0) + \sigma_{13}^2(0,0)} = \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \frac{V_2}{I_{33}} R^2$$

soit, pour l'acier,  $\nu = 0,25$  et  $|\tau|_{\max} = 1,4V_2/A$ .

La détermination des contraintes de cisaillement dans une section droite d'une poutre exigeant la résolution de problèmes de DIRICHLET, ce qui est souvent trop compliqué pour les applications courantes, diverses théories approchées ont donc été développées. Ces théories présentent la propriété remarquable de relier la répartition des contraintes de cisaillement à celle des contraintes normales.

Revenons donc au problème de SAINT-VENANT en considérant une poutre cylindrique soumise à un chargement extérieur. Le principe de SAINT-VENANT implique que la théorie des poutres soit appliquée loin du point d'application des forces extérieures. Elle ne pourra donc pas être appliquée aux sections droites directement sollicitées par des forces extérieures transmises par des rivets, chapes, clavettes ou résultant de l'action d'une cisaille par exemple.

Dans la suite nous distinguerons les poutres de sections massives et celles de sections à paroi mince.

## 12.2 Contraintes de cisaillement et effort tranchant dans une section droite

Le problème de SAINT-VENANT présenté au chapitre 7 a montré que pour une poutre cylindrique chargée uniquement à ses extrémités et sur laquelle on néglige l'effet des forces volumiques, la matrice des contraintes en tout point du matériau peut

s'écrire sous la forme suivante dans la base  $(e_i)$  :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) & \sigma_{12}(x_2, x_3) & \sigma_{13}(x_2, x_3) \\ \sigma_{12}(x_2, x_3) & 0 & 0 \\ \sigma_{13}(x_2, x_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

et que la contrainte normale s'exprime, en fonction des composantes du torseur des efforts internes par :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{N}{A} - \frac{M_3(x_1)}{I_{33}}x_2 + \frac{M_2(x_1)}{I_{22}}x_3 \quad (12.5)$$

En conservant les hypothèses du problème de SAINT-VENANT considérons l'élément de poutre défini comme suit : (voir la figure 12.1)

- soit un élément de courbe (C) reliant deux points quelconques A et B du contour d'une section droite de la poutre ;
- isolons, loin des extrémités, un tronçon de longueur  $dx_1$  ;
- coupons cet élément par une surface cylindrique, de génératrices parallèles à la direction  $e_1$ , s'appuyant sur (C) et isolons un des deux volumes obtenus.

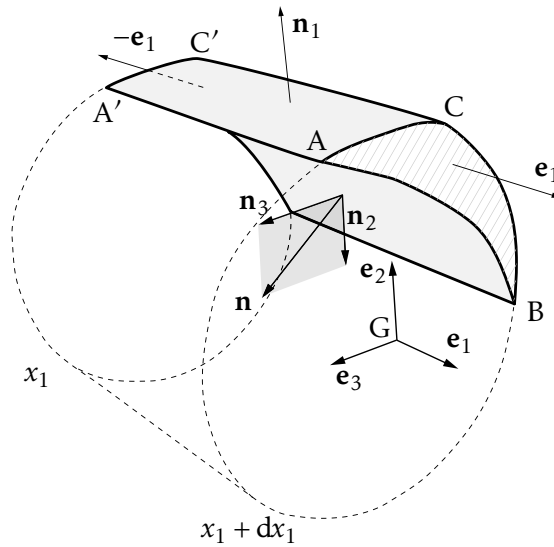


FIGURE 12.1 – Élément de poutre

L'équation d'équilibre de ce volume matériel, en projection suivant  $e_1$ , s'écrit :

$$e_1 \cdot \left( \iint_{A'B'C'} T(M, -e_1) dS_M + \iint_{ABC} T(M, e_1) dS_M + \iint_{ABB'A'} T(M, n) dS \right) = 0 \quad (12.6)$$

ou encore, compte tenu de la forme générale de la matrice des contraintes :

$$\begin{aligned} - \iint_{A'B'C'} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) dS + \iint_{ABC} \sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) dS \\ + \iint_{ABB'A'} \sigma_{12}(x_2, x_3)n_2 + \sigma_{13}(x_2, x_3)n_3 dS = 0 \end{aligned} \quad (12.7)$$



En regroupant les deux premières intégrales on obtient :

$$\iint \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dS + dx_1 \int_{(C)} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = 0 \quad (12.8)$$

ou, en utilisant l'équation (??) et les équations liant moments fléchissants et efforts tranchants :

$$\begin{aligned} \frac{dM_3}{dx_1}(x_1) &= -V_2; & \frac{dM_2}{dx_1}(x_1) &= V_3 \\ \frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{ABC}} x_2 dS + \frac{V_3}{I_{22}} \iint_{S_{ABC}} x_3 dS + \int_{(C)} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds &= 0 \end{aligned} \quad (12.9)$$

Si, comme nous l'avons supposé dans l'introduction, l'effort tranchant est colinéaire à la direction principale  $\mathbf{e}_2$ , la formule (12.9) devient :

$$\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{ABC}} x_2 dS + \int_{(C)} (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) ds = 0 \quad (12.10)$$

## 12.3 Solution approchée et formule de BREDT

### 12.3.1 Lignes de glissement

**Ligne de glissement** Les lignes de glissement sont des courbes telles qu'en chacun de leurs points, le vecteur cisaillement est tangent à cette courbe. Le contour de la section droite est une ligne de glissement nul et la forme de ces lignes ne dépend que de la géométrie de la section. Elles sont solutions de l'équation :

$$\frac{dx_2}{\sigma_{13}} = \frac{dx_3}{\sigma_{12}} \quad (12.11)$$

En mécanique des fluides, il existe des lignes similaires dites *lignes de courant*.

La figure 12.2(b) donne le tracé de certaines lignes de glissement ainsi que l'évolution du vecteur cisaillement sur chacune d'elles dans le cas d'une section circulaire pour laquelle la solution est connue. L'examen des résultats obtenus dans le cas de la section circulaire pleine permet de tirer un certain nombre de conclusions qui aboutissent dans ce paragraphe à l'introduction d'une théorie simplifiée facilitant le calcul des contraintes dues à l'effort tranchant pour une section quelconque sans passer par la résolution du problème élastostatique :

- la composante du vecteur cisaillement, orthogonale à la direction de l'effort tranchant, peut en général être négligée devant la composante qui lui est colinéaire ;
- par symétrie, le cisaillement s'annule aux points du contour situés sur l'axe de symétrie support de l'effort tranchant ;
- le maximum du cisaillement se situe toujours sur l'axe de symétrie orthogonal à l'effort tranchant. La distance du point à cet axe joue un rôle prépondérant dans l'évolution du cisaillement.

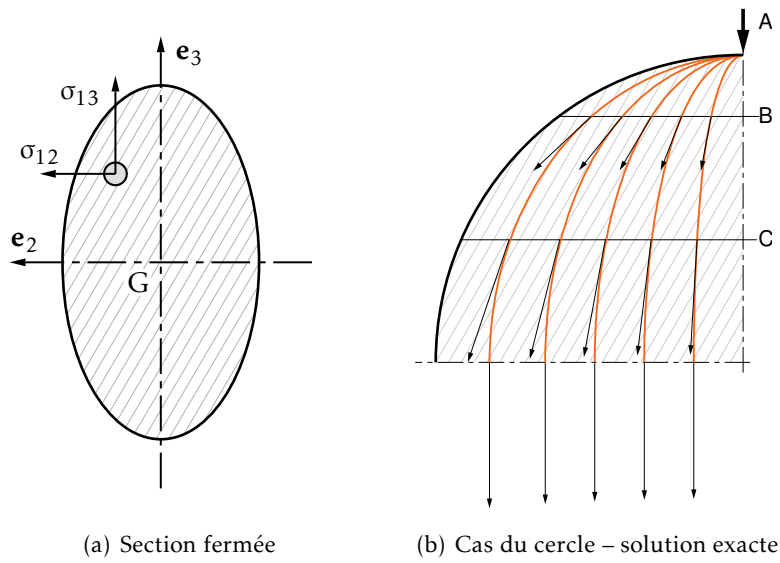


FIGURE 12.2 – Lignes de glissement et vecteurs cisaillement

12.3.2 Formule de BREDT

On suppose connues, dans la section droite, les lignes de glissement. Le contour de la section droite est une ligne de glissement.

Si  $\mathbf{V} = V_2 \mathbf{e}_2$  et si la courbe (C) définie au paragraphe 12.2 est orthogonale aux lignes de glissement, la formule (12.10) devient :

$$\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{ABC}} x_2 dS_M + \int_{(C)} \tau(M) ds = 0 \tag{12.12}$$

où  $\tau(M)$  est la valeur du cisaillement en un point de la courbe (C) mesurée suivant la direction  $\mathbf{n}$ . Appelons  $\tau_m(C)$ , la valeur moyenne du cisaillement le long de (C) et  $L_{AB}$ , la longueur de l'arc de coupe AB, nous pouvons donc écrire :

$$\tau(C) = -\frac{1}{L_{AB}} \frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{ABC}} x_2 dS \tag{12.13}$$

12.3.3 Applications de la formule de BREDT

Section massive

Une section droite de poutre est dite massive si les paramètres géométriques de la section sont du même ordre de grandeur.

La formule de BREDT ne présente un intérêt que si l'on connaît, par un moyen quelconque, le faisceau des lignes de glissement, ce qui est rarement le cas. On est donc conduit à faire des approximations pour obtenir une valeur, approchée, du cisaillement :

On suppose, généralement, que la composante orthogonale à la courbe (C) reliant les points A à B

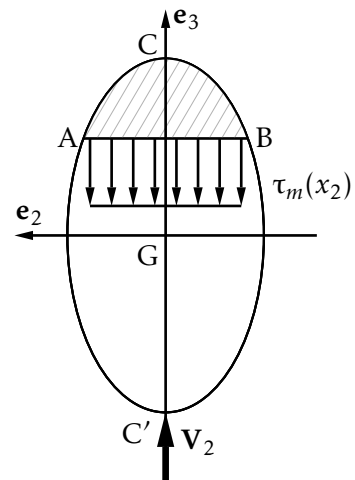


FIGURE 12.3 – Section fermée

reste peu différente de sa valeur moyenne sur tout segment A'B', voisin de AB, orthogonale à l'effort tranchant. Cette valeur moyenne ne dépend alors que de la distance de ce segment à l'origine (G) du repère local lié à la section.

La formule de BREDT devient, en appelant  $A_3(x_2)$  le moment statique de l'aire ABC par rapport à l'axe principal (G,  $\mathbf{e}_3$ ) et  $L(I_2)$ , la longueur de la coupe AB :

$$\tau_M = -\frac{V_2}{L(x_2)} \frac{A_3(x_2)}{I_{33}} \quad \text{avec} \quad A_3(x_2) = \iint_{S_{ABC}} x_2 dS \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_m \mathbf{n} \quad (12.14)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface ABC. Dans le cas de la section circulaire pleine la formule de BREDT donne :

$$\tau_m = \frac{4}{3} \frac{V_2}{A} \left(1 - \frac{x_2^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_2 \quad (12.15)$$

à comparer à :

$$\sigma_{12}(x_2, x_3) = \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \frac{V_2}{I_{33}} \left(R^2 - x_2^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} x_3^2\right) \quad (12.16)$$

Le résultat approché résulte de l'écriture d'équations d'équilibre globales alors que le résultat exact prend en compte les déplacements. En changeant de nature de matériau, on pourrait s'attendre à des écarts importants entre les deux formulations mais pour les métaux le coefficient de Poisson varie peu et les résultats de la formule approchée sont acceptables.

• **Exemple** Pour la section circulaire d'une poutre en acier, en son centre, on trouve :

$$\sigma_{12}(0,0) = \frac{7}{5} \frac{V_2}{A} = 1,4 \frac{V_2}{A}; \quad \tau_m(0) = \frac{4}{3} \frac{V_2}{A} = 1,33 \frac{V_2}{A} \quad (12.17)$$

Les contraintes dues à l'effort tranchant seul sont données par la matrice :

$$[\boldsymbol{\sigma}(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

L'énergie de déformation par unité de volume s'écrit en fonction des invariants  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{S_1^2 - 2(1+\nu)S_2}{2E} \quad (12.19)$$

avec  $S_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 0$  et  $S_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2$  soit  $S_2 \approx -\tau_m^2$  d'où :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\tau_m^2}{2G} \quad (12.20)$$

On en déduit immédiatement l'énergie de déformation pour un tronçon de poutre de longueur  $dx$  par intégration sur la longueur :

$$dW = \left( \iint \frac{\tau_m^2}{2G} dS \right) dx_1 \quad (12.21)$$

ou encore en utilisant la formule de BREDT :

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{1}{2G} \frac{V_2^2}{I_{33}^2} \iint \frac{\left[ \iint_{S_{ABC}} x_2 dS \right]^2}{L_{AB}^2} dS \Rightarrow \lambda = \frac{A}{I_{33}^2} \iint \frac{\left[ \iint_{S_{ABC}} x_2 dS \right]^2}{L_{AB}^2} dS \quad (12.22)$$

Ce coefficient  $\lambda$  adimensionnel ne dépend ni du matériau ni du chargement aussi est-il appelé coefficient de forme de la section. Finalement :

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{\lambda}{2G} \frac{V_2^2}{A} \quad (12.23)$$

L'application de la formule de BREDT fournit donc la valeur moyenne de la composante du cisaillement colinéaire à  $V_2$ . La validité des deux approximations faites :

- colinéaire à  $V_2$
- uniforme sur tout segment orthogonal à  $V_2$

dépend de la géométrie de la section droite. Ces approximations sont d'autant moins valables que l'on s'éloigne de l'axe central orthogonal à  $V_2$  mais ceci est compensé par le fait que le vecteur cisaillement tend alors vers zéro.

### Section à paroi mince

On appelle section à paroi mince, une section limitée par deux courbes voisines dont la distance  $e$  est faible devant les deux dimensions extérieures de la section. Une telle section est présentée sur la figure 12.4. Les conditions aux limites imposent que les

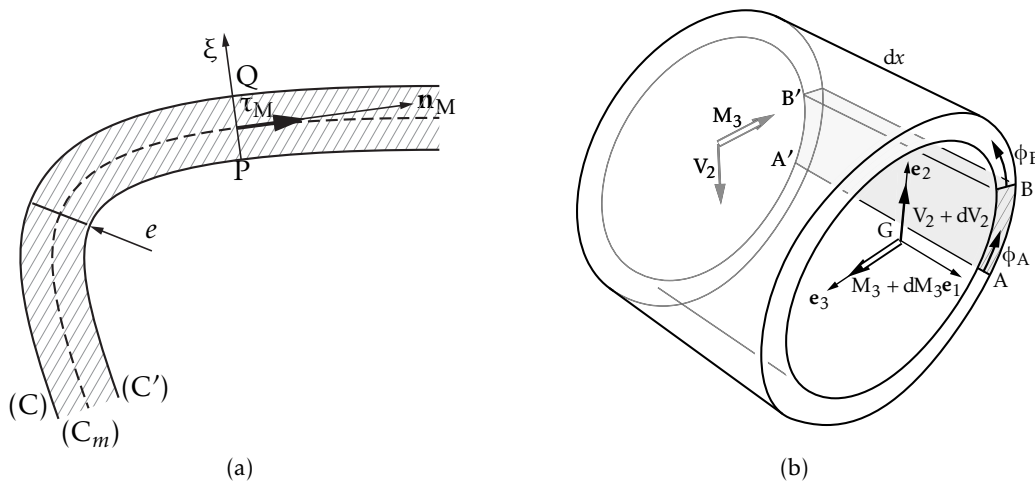


FIGURE 12.4 – Section à paroi mince

deux courbes frontières de la section soient des *lignes de glissement*. La direction du vecteur cisaillement est donc, en tout point de la section, considérée comme la tangente à la courbe moyenne de la section (figure 12.4(a)). Nous postulons que la contrainte de cisaillement est constante suivant l'épaisseur et tangente à la courbe moyenne. Nous définissons le *flux de cisaillement* à travers un segment quelconque

centré en M par :

$$\phi = \tau \cdot e = \int_Q^P \tau(\xi) d\xi \quad (12.24)$$

Par analogie avec ce que nous avons écrit pour établir la formule de BREDT, on peut déterminer la différence de flux de cisaillement entre deux points A et B du contour moyen.

L'équation d'équilibre du tronçon de poutre ABB'A' (figure 12.4(b)) de longueur  $dx_1$ , en projection sur la direction  $e_1$  de la fibre moyenne conduit à :

$$\phi_B = \phi_A - \frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{AB}} x_2 dS \quad (12.25)$$

**Section ouverte** Pour une section ouverte (figure 12.5), nous savons que par réciprocity des cisaillements celui-ci ne peut être que nul en A et en B. Le flux y est donc nul. L'application de la formule établie ci-dessus donne alors le flux en tout point M du contour moyen de la section ouverte par :

$$\phi_M = -\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{VM}} x_2 dS \quad (12.26)$$

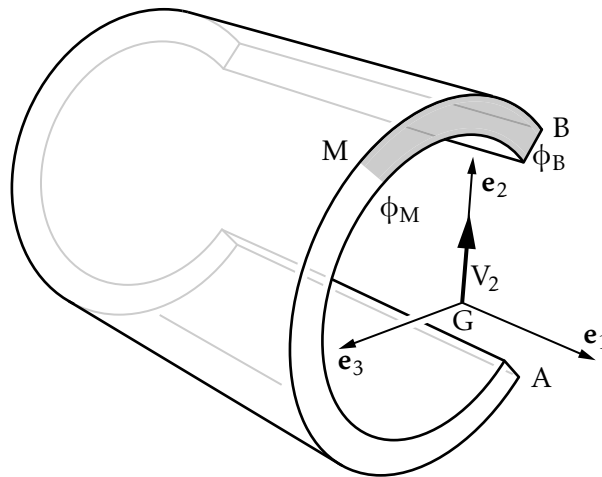


FIGURE 12.5 – Section ouverte

**Section fermée** Pour des sections fermées, comme sur la figure 12.6, l'application de la formule générale nécessite la connaissance d'un des deux flux A ou B :

- Si  $\mathbf{V}$  est dirigé selon un axe de symétrie de la section, en C et C' la symétrie et la continuité du cisaillement impose  $C = C' = 0$ . On peut donc n'étudier qu'une demi-section et la traiter comme une section ouverte ;
- Si la section est quelconque la formule de BREDT ne suffit pas à déterminer le flux de cisaillement en un point quelconque puisque dans ce cas il n'existe pas de point où le flux est connu.

La relation manquante est obtenue par l'étude des déformations. En faisant l'hypo-

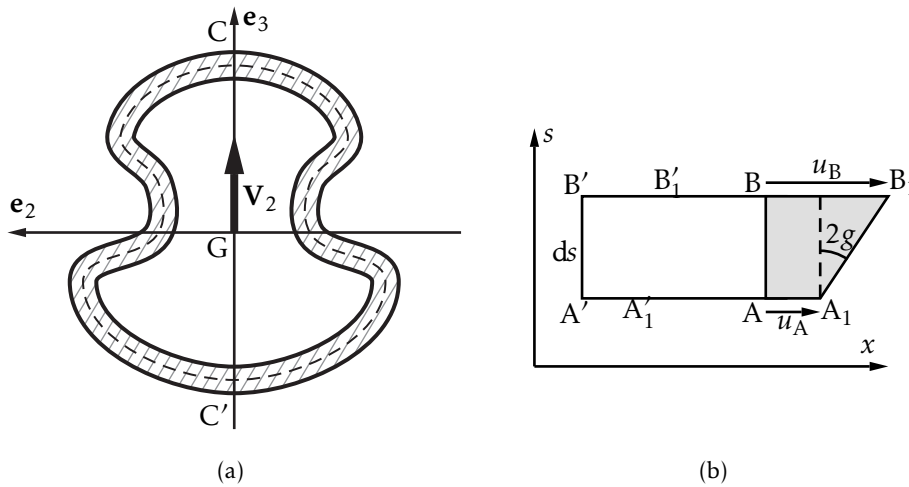


FIGURE 12.6 – Section fermée

thèse que l'effort tranchant n'induit pas de torsion dans la poutre (ceci implique que l'effort tranchant dans la section droite passe par le centre de cisaillement de la section), alors la portion de poutre  $ABB'A'$  se déforme pour donner un parallélogramme dont les cotés  $A_1A'_1$  et  $B_1B'_1$  restent parallèles à l'axe  $(G, e_1)$ . On a :

$$2g = \frac{\tau}{G} \quad \text{et} \quad u_B - u_A = \int_A^B 2g \, ds \quad (12.27)$$

Si le point B fait un tour sur le contour on doit alors retrouver  $u_B = u_A$  ceci implique donc :

$$\oint_{(C)} 2g \, ds = 0 \quad (12.28)$$

d'où la nullité de la circulation du cisaillement sur le contour :

$$\oint_{(C)} \frac{\phi(s)}{e(s)} \, ds = 0 \quad \text{puisque localement} \quad \tau(s) = \frac{\phi(s)}{e(s)} \quad (12.29)$$

### Section cloisonnée

Les sections cloisonnées sont constituées de domaines limités par des parois minces dans lesquelles on peut utiliser le principe de calcul du cisaillement en paroi mince. Les points de raccord de ces parois s'appellent des nœuds et chaque contour fermé simplement connexe englobe une maille.

- A et B sont les nœuds de la section ;
- (1) et (2) définissent les mailles ;
- on parcourt un contour de maille dans le sens positif (sens trigonométrique) ;
- les flux de cisaillement sont comptés positifs dans le sens de parcours choisi pour leurs branches. Sur la figure 12.7(a),  $\phi_2$  est positif pour la maille (2) et négatif pour la maille (1) ;

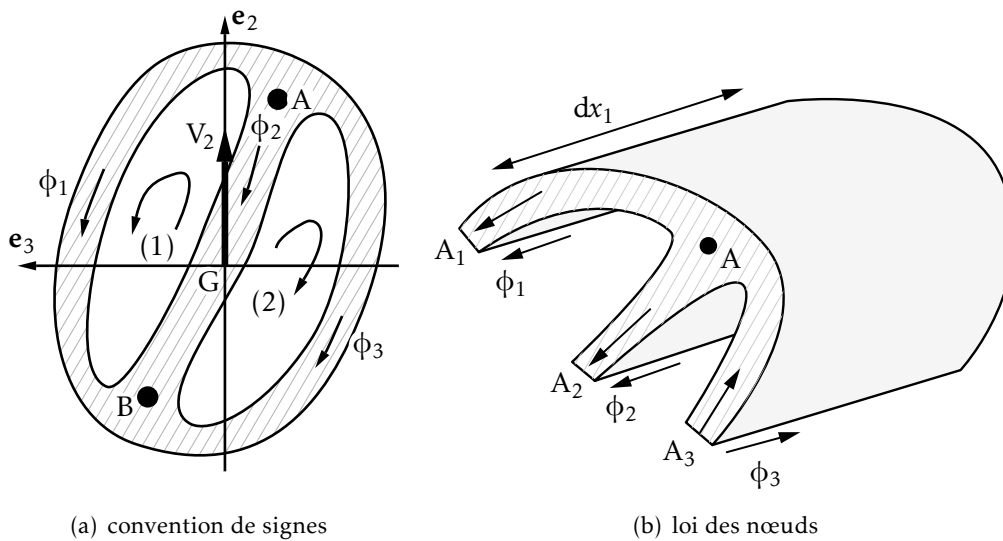


FIGURE 12.7 – exemple de section cloisonnée

– le calcul algébrique permet de les déterminer en valeur et en signe.

Trois lois permettent de calculer le cisaillement dans les sections cloisonnées, la loi des branches, la loi des nœuds et la loi des mailles.

**Loi des branches** Entre deux points courants N et M, d'une même branche, rencontrés dans le sens de parcours choisi, la formule de BREDT en fonction des flux, appelée loi des branches, s'écrit :

$$\phi_M - \phi_N = -\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{MN}} x_2 \, dS \quad (12.30)$$

**Loi des nœuds** Le flux des cisaillements dans les parois au voisinage d'un nœud assurent l'équilibre de celui-ci.

Sur la figure 12.7(b), l'équilibre du prisme élémentaire entourant le nœud A peut s'écrire :

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = -\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{A_1A_2A_3}} x_2 \, dS \quad (12.31)$$

Deux cas d'application de la formule sont intéressants :

– tôles minces raccordées directement : dans ce cas le moment statique de l'aire  $S_{A_1A_2A_3}$  peut être considéré nul. La formule devient :

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0 \quad (12.32)$$

– tôles minces assemblées par raidisseur (figure 12.8). On peut, en général, négliger le moment statique des tôles devant celui des raidisseurs (R) :

$$\phi_1(A_1) + \phi_2(A_2) - \phi_3(A_3) = -\frac{V_2}{I_{33}} \iint_{S_{(R)}} x_2 \, dS \quad (12.33)$$

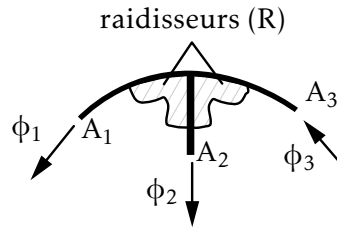


FIGURE 12.8 – tôles associées par raidisseurs

**Loi des mailles** Sur le contour fermé de chaque maille, la circulation du vecteur cisaillement est nulle. Pour une maille quelconque ( $i$ ) de contour ( $C_i$ ), on peut donc écrire :

$$\oint_{(C_i)} \frac{\phi}{e} d\ell = 0 \quad (12.34)$$

Les trois lois énoncées ci-dessus permettent de déterminer les flux de cisaillement en tout point d'une section cloisonnée.

Soient  $N$ , le nombre de nœuds de la section,  $B$ , le nombre de branches et  $M$  le nombre de mailles indépendantes tels que  $M = B - N + 1$ . Pour une section droite telle que celle de la figure 12.7(a), on a donc six inconnues, les trois flux dans les trois branches et les flux en trois points précis, par exemple en  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . La mise en équations du problème fait intervenir deux inconnues par branche, soit au total  $2B$  inconnues. Pour résoudre le problème on dispose des équations suivantes :

- deux équations tirées de la loi des mailles, appliquée, par exemple, aux mailles (1) et (2); autant d'équations que de mailles indépendantes ( $M$  équations);
- trois équations issues de la loi des branches appliquée à chacune d'entre elles; autant d'équations que de branches ( $B$  équations);
- une équation tirée de la loi des nœuds appliquée, par exemple au nœud  $A$ ; une équation de moins que de nœuds ( $N - 1$  équations).

soit, au total, un ensemble de  $2B$  équations. Toute autre équation ne peut être qu'une combinaison linéaire de celles précédemment écrites.

## 12.4 Centre de cisaillement

Le cisaillement dans la section droite de la poutre a été calculé à partir de la seule équivalence :

$$\iint \tau dS = V \quad (12.35)$$

donc, *a priori* :

$$\iint \mathbf{GM} \wedge \tau dS \neq 0 \quad (12.36)$$



Il existe un point C de la section droite, appelé centre de cisaillement (ou centre de torsion), défini par :

$$\iint \mathbf{CM} \wedge \boldsymbol{\tau} dS = \mathbf{0} \quad (12.37)$$

ou encore, si O est un point fixe de la section, par :

$$\mathbf{OC} \wedge \mathbf{V} = \iint \mathbf{OM} \wedge \boldsymbol{\tau} dS \quad (12.38)$$

La détermination algébrique de C se fait comme suit :

- on choisit judicieusement le point O de manière à simplifier le calcul de l'intégrale (12.38) ;
- si la section droite d'une poutre possède un axe de symétrie, C appartient à cet axe. Les sections massives ayant, en général, deux axes de symétrie, C est donc confondu avec le centre de surface G ;
- ayant supposé  $\mathbf{V}$  porté par la direction principale  $\mathbf{e}_2$ , le centre de cisaillement C sera connu par sa coordonnée  $x_3(C)$  sur l'axe principal  $(G, \mathbf{e}_3)$ . C est le point de cet axe par rapport auquel les contraintes de cisaillement, induites par  $V_2$ , ont un moment nul.

Ⓜ **Détermination pratique de C** — Le point C est également défini comme étant le point où doit être appliqué l'effort tranchant de façon à n'induire aucune rotation de torsion.

Nous avons montré que l'étude des poutres à l'effort tranchant nécessite de distinguer celles-ci par leur section droite :

- si la section est massive, la méconnaissance de la direction du cisaillement nous a amenés à énoncer la formule de BREDT qui est approchée. Les valeurs des contraintes de cisaillement sont généralement faibles.
- si la section est à paroi mince, on connaît mieux la direction du vecteur cisaillement, la théorie est donc précise. L'aire réduite de la section droite entraîne des contraintes qui peuvent atteindre un niveau élevé.
- la valeur moyenne  $\tau_m = \frac{V_2}{A}$  donne un ordre de grandeur appréciable très simple à calculer ;
- un calcul est à faire pour le cisaillement dû à  $V_2$ , un autre pour  $V_3$ .

## Torsion des poutres

L'objet de ce chapitre est d'établir les notions de base permettant le calcul des poutres en torsion. Nous avons développé en annexe la solution du problème de SAINT-VENANT par la méthode des déplacements et par la méthode des contraintes. Cette solution nous permet tout d'abord de mettre en place, de manière exacte, les formules de calcul des sections circulaires en torsion. Nous établissons ensuite des formules approchées pour les sections pleines admettant un centre de symétrie, puis pour les sections à parois minces, composées d'une ou de plusieurs cellules fermées.

### 13.1 Centres de torsion et de cisaillement

On a mis en évidence au chapitre 12, l'existence du centre de cisaillement. On montre ici qu'il est confondu avec le centre de torsion.

Considérons une poutre cylindrique d'axe, dont une section  $S$  est soumise uniquement à des contraintes de cisaillement. Le torseur des efforts internes sur  $S$  de normale extérieure  $\mathbf{e}_1$  a pour éléments de réduction en  $G$ , centre de surface de  $S$  :

$$\mathbf{V} = \int_S \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) dS \quad \mathbf{M}(G) = \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) dS \quad (13.1)$$

$\mathbf{V}$  et  $\mathbf{M}(G)$  sont respectivement perpendiculaire et colinéaire à  $(O, \mathbf{e}_1)$ .

Considérons un premier état de chargement, indicé 1, où ce torseur est un glisseur. L'effort tranchant est non nul  $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{0}$ . Il existe donc un point  $C$  de la section droite  $S$  tel que  $\mathbf{M}_1(C) = \mathbf{M}_1(G) + \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{GC} = \mathbf{0}$ . Ce point est appelé le centre de cisaillement de la section droite. Considérons un second état de chargement, indicé 2, tel que  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ , le torseur des efforts internes se réduit alors à un couple  $(\mathbf{0}, \mathbf{M}_2)$ . Calculons le travail du torseur des efforts internes du premier chargement dans les déplacements du second et réciproquement, puis appliquons le théorème de MAXWELL-BETTI.

Nous avons vu dans l'introduction à l'étude des poutres que les hypothèses cinématiques reviennent à considérer que le champ des déplacements dans une section droite est un torseur (champ de déplacements de solide rigide vide), d'éléments de

réduction en  $G(\theta, \mathbf{u}(G))$  et :

$$\theta \approx \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}(P) = \Omega \quad (13.2)$$

Compte tenu de  $\mathbf{M}_1(C) = \mathbf{0}$ , le travail du torseur 1 dans les déplacements dus au second est :

$$W_{12} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{M}_1(G)) \cdot (\Omega_2, \mathbf{u}_2(G)) = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{u}_2(G) + \Omega_2 \cdot (\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{CG}) \quad (13.3)$$

le travail du torseur 2 dans les déplacements dus au premier est :

$$W_{21} = (\mathbf{0}, \mathbf{V}_2(G)) \cdot (\Omega_1, \mathbf{u}_1(G)) = \Omega_1 \cdot \mathbf{V}_2(G) \quad (13.4)$$

Nous en déduisons par MAXWELL-BETTI :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{u}_2(G) + \Omega_2 \wedge \mathbf{GC}) &= \Omega_1 \cdot \mathbf{V}_2(G) \\ \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{u}_2(C) &= \Omega_1 \cdot \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (13.5)$$

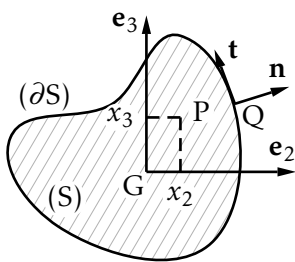
Nous constatons que si la rotation  $\Omega_1$  due à l'effort tranchant est nulle, alors le déplacement  $\mathbf{u}_2(C)$  dû à la torsion est nul et réciproquement.

Le point C est donc à la fois le point où le moment des contraintes de cisaillement dues à un effort tranchant est nul (centre de cisaillement) et le point autour duquel tourne la section soumise à un moment de torsion (centre de torsion).

Ⓜ Notons que le centre de torsion se trouve toujours sur les éléments de symétrie de la section.

## 13.2 Poutres de section pleine

### 13.2.1 Problème de SAINT-VENANT



La solution du problème de SAINT-VENANT en torsion (cf. annexe A.1) se réduit à la connaissance de la fonction de gauchissement  $(x_2, x_3)$ , solution du problème aux valeurs limites :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 & \text{sur } S \\ \frac{d\varphi}{dn} &= \mathbf{GP} \cdot \mathbf{t} & \text{sur } \partial S \end{aligned} \quad (13.6)$$

FIGURE 13.1 – Section quelconque

### 13.2.2 Solution pour une section circulaire

Pour une section circulaire pleine, la condition de contour montre que la fonction  $\varphi$  admet une dérivée normale nulle sur le contour. D'après la sous-section A.1.5 :

$$\int_{\partial S} \varphi \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\partial S} \varphi \mathbf{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \text{div}(\varphi \mathbf{grad } \varphi) dS = \int_S (\mathbf{grad } \varphi)^2 dS \quad (13.7)$$

L'intégrale sur  $S$  du carré de  $\mathbf{grad } \varphi$  étant nulle,  $\mathbf{grad } \varphi$  est nul partout dans  $S$ , donc la fonction est constante sur  $S$ . Nous en déduisons :

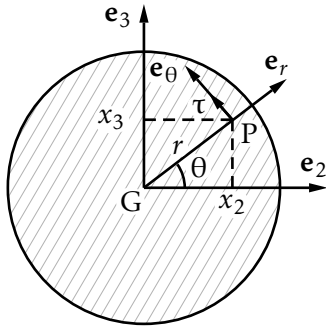


FIGURE 13.2 – Section circulaire

$$J = I_O = \int_S (x_2^2 + x_3^2) dS = \int_S r^2 dS \quad (13.8)$$

Notons que pour une section circulaire de rayon  $R$ ,  $I_0 = 2I_{22} = 2I_{33} = R_4/2$ . Le moment de torsion est relié à la rotation par unité de longueur par :

$$T = GI_0 \frac{d\Omega_1}{dx_1} \quad (13.9)$$

Le vecteur contrainte en un point  $P$  quelconque d'une section droite est donné par :

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad \sigma_{12} = -x_3 G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \quad \text{et} \quad \sigma_{13} = x_2 G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \quad (13.10)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$   $x_2 = r \cos \theta$ ,  $x_3 = r \sin \theta$ . Le vecteur contrainte a pour coordonnées :

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = r G \frac{d\Omega_1}{dx_1} (-\sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3) = \tau \mathbf{e}_\theta \quad (13.11)$$

Le cisaillement est donc normal à la direction radiale et d'intensité :

$$\tau = \frac{T}{I_0} r \quad (13.12)$$

### 13.3 Section pleine admettant un centre de symétrie

#### 13.3.1 Hypothèses

L'état de contrainte, en un point d'une section de normale  $\mathbf{e}_1$ , dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_1)$  est anti-plan, de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{1r} \\ 0 & 0 & \sigma_{1\theta} \\ \sigma_{1r} & \sigma_{1\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

L'origine des coordonnées étant au centre de surface  $G$  (aussi centre de symétrie, donc centre de torsion) de la section nous faisons l'hypothèse  $\sigma_{1\theta} = r f(\theta)$  et  $\sigma_{1r} \approx 0$ . Il est à remarquer que sous ces hypothèses, la condition limite de surface latérale libre a peu de chance d'être vérifiée. Les formules que nous allons établir sont approchées, utilisables pour des sections de poutre admettant un centre de symétrie et sans point anguleux.

#### 13.3.2 Calcul de la contrainte de cisaillement

Écrivons la condition d'équilibre du prisme  $GABG'A'B'$  d'ouverture  $d\theta$  et de longueur  $dx_1$  en projection suivant  $\mathbf{e}_1$ , comme indiqué sur la figure 13.3 :

$$\mathbf{e}_1 \cdot dx_1 \int_{GG'B'B} \sigma_{1\theta} dr = dx_1 \int_{GG'A'A} \sigma_{1\theta} dr = C dx_1 \quad (13.14)$$

avec :

$$C = \int_0^{R(\theta)} r f(\theta) dr; \quad f(\theta) = \frac{2C}{R^2(\theta)} \Rightarrow \sigma_{1\theta} = \frac{2Cr}{R^2(\theta)} \quad (13.15)$$

Nous obtenons la valeur de la constante C en écrivant que le moment en G des

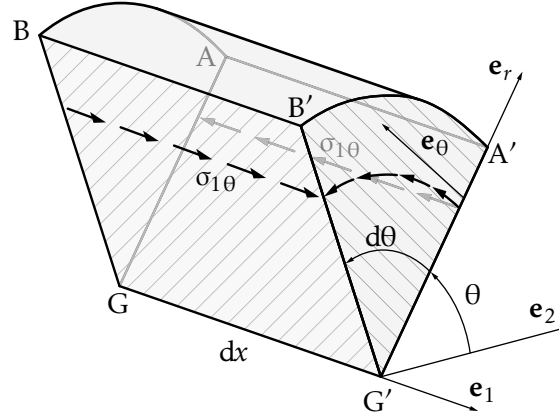


FIGURE 13.3 – Contrainte de cisaillement

contraintes de cisaillement sur cette section est égal au moment de torsion :

$$T \mathbf{e}_1 = \int_S \mathbf{GP} \wedge (\sigma_{1\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{1r} \mathbf{e}_r) dS = \int_S r \sigma_{1\theta} dS \mathbf{e}_1 = \int_S \frac{2Cr^2}{R^2(\theta)} dS \mathbf{e}_1 \quad (13.16)$$

soit :

$$T = 2C \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \frac{r^2}{R^2(\theta)} r dr d\theta = \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta \quad (13.17)$$

Par conséquent, en désignant par A l'aire de la section, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta = 2A \Rightarrow C = \frac{T}{A} \quad \text{et} \quad \sigma_{1\theta} = \frac{2Tr}{AR^2(\theta)} \quad (13.18)$$

### 13.3.3 Calcul de la rotation d'une section droite

En nous inspirant de la méthode des déplacements de l'annexe A.1, prenons pour champ de déplacements sur la base des coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{U}(P) = \alpha \varphi(r, \theta) \mathbf{e}_1 + \alpha x_1 \mathbf{e}_1 \wedge r \mathbf{e}_r = \alpha \varphi(r, \theta) \mathbf{e}_1 + \alpha r x_1 \mathbf{e}_\theta \quad (13.19)$$

Nous en déduisons  $u_r = 0$ ,  $u_\theta = \alpha r x_1$  et  $u_1 = \alpha \varphi(r, \theta)$ . La matrice de petites déformations en P sur la base  $\mathbf{e}_i$  s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{2}(u_{\theta,r} + \frac{u_{r,\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r}) & \frac{1}{2}(u_{r,1} + u_{1,r}) \\ & \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}(u_{\theta,1} + \frac{u_{1,\theta}}{r}) \\ \text{sym} & & u_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha\varphi_{,r} \\ & 0 & \frac{1}{2}(\alpha r + \frac{\alpha\varphi_{,\theta}}{r}) \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

Le calcul du vecteur rotation d'ensemble au point P donne  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_1 = \alpha x_1 \frac{d\Omega_1}{dx_1} = \alpha$ . L'expression de la variation de l'angle droit  $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_1)$ , c'est-à-dire du glissement  $\varepsilon_{1\theta}$  en fonction des déplacements est :

$$2\varepsilon_{1\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x_1} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r \right) \frac{d\Omega_1}{dx_1} \quad (13.21)$$

La loi de comportement nous donne pour le cisaillement :

$$\sigma_{1\theta} = G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r \right) \quad (13.22)$$

G est le module de glissement du matériau. Il est égal au paramètre de LAMÉ. Calculons, compte tenu de l'expression de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{1\theta}$  en fonction du moment de torsion T, la circulation de  $\sigma_{1\theta}$  sur la circonférence de rayon r :

$$\int_0^{2\pi} \sigma_{1\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2T}{AR^2(\theta)} r d\theta \quad (13.23)$$

Calculons d'autre part cette même intégrale à partir de l'expression du cisaillement issue du glissement :

$$\int_0^{2\pi} \sigma_{1\theta} d\theta = G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r \right) d\theta \quad (13.24)$$

et égalons les deux expressions.

$$\frac{2T}{A} r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2(\theta)} = G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \left( \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + r \int_0^{2\pi} d\theta \right) \quad (13.25)$$

La première intégrale du second membre est nulle, la seconde vaut  $2\pi r$ , nous obtenons :

$$\frac{d\Omega_1}{dx_1} = \frac{T}{\pi GA} \int_0^{2\pi} \boxed{\frac{d\theta}{R^2(\theta)}} \quad (13.26)$$

L'intégrale ne dépend que des caractéristiques de la section, et finalement, d'après la formule obtenue par la méthode des déplacements :

$$\frac{d\Omega_1}{dx_1} = \frac{T}{GJ}; \quad J = \frac{\pi A}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2(\theta)}} \quad (13.27)$$

où J représente l'inertie de torsion.

#### 13.3.4 Énergie de déformation en torsion

Son expression a été établie dans l'annexe A-1 Méthode des déplacements. Elle est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{GJ} dx_1 \quad (13.28)$$

## 13.4 Poutres de section à paroi mince fermée

### 13.4.1 Hypothèses

L'épaisseur  $e$  des parois de la poutre est petite devant les dimensions de la section droite. Cela permet de faire les deux hypothèses suivantes :

- le cisaillement en tout point d'une section droite est tangent au contour ;
- le cisaillement en tout point d'une section droite est constant dans l'épaisseur.

### 13.4.2 Section composée d'une cellule

Soit  $s$  l'abscisse curviligne sur le contour moyen (C) et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}, \mathbf{t})$  la base locale au point courant du contour,  $\mathbf{t}$  étant un vecteur unitaire tangent au contour dirigé suivant les abscisses curvilignes croissantes. Si on désigne par la contrainte de cisaillement suivant  $\mathbf{t}$ , nous appelons  $\varphi = \tau(s)e(s)$ , le flux de cisaillement dans l'épaisseur. Isolons

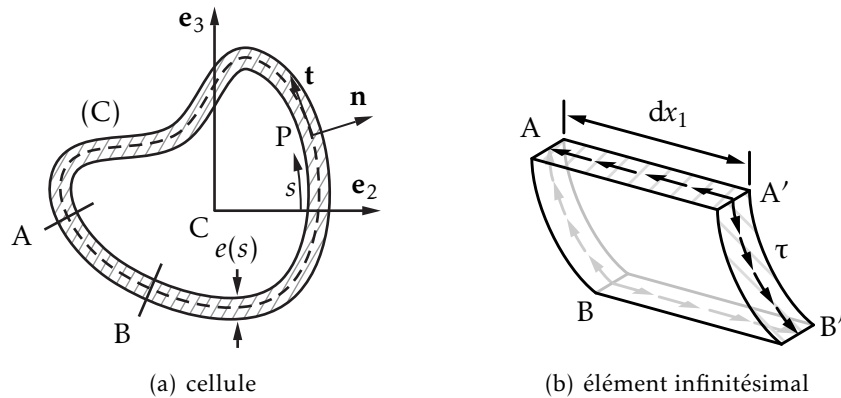


FIGURE 13.4 – Section à paroi mince fermée unicellulaire

un élément de paroi compris entre deux sections d'abscisses  $x_1$  et  $x_1 + dx_1$ . L'équilibre de l'élément suivant s'écrit  $(\tau e)_A dx_1 = (\tau e)_B dx_1$ . Le flux de cisaillement sur un contour fermé est constant. Pour une poutre dont la section est constituée d'un seul contour moyen fermé (C), le moment de torsion s'écrit :

$$T = \mathbf{e}_1 \cdot \oint_C \mathbf{CP} \wedge \tau e \mathbf{t} ds = \varphi \mathbf{e}_1 \cdot \oint_C \mathbf{CP} \wedge \mathbf{t} ds \quad (13.29)$$

L'intégrale  $\mathbf{e}_1 \cdot \oint_C \mathbf{CP} \wedge \mathbf{t} ds = 2A_{(C)}$  représente deux fois l'aire enfermée par le contour (C). Nous en déduisons la première formule de BREDT-LEDUC :

$$T = 2A_{(C)} \varphi \quad (13.30)$$

Calculons la circulation du vecteur  $\tau \mathbf{t}$  sur le contour (C) avec  $\tau(s) = \varphi/e(s)$  :

$$\oint_{(C)} \tau ds = \oint_{(C)} \varphi \frac{ds}{e(s)} \quad (13.31)$$

La loi de comportement nous permet de calculer le cisaillement en fonction du glissement  $2\varepsilon_{1t} = \tau/G$  et, d'autre part,  $2\varepsilon_{1t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_t}{\partial x_1}\right)$  donc :

$$\oint_{(C)} \tau ds = G \oint_{(C)} \left( \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right) ds \quad (13.32)$$

Au second ordre près, on peut écrire  $du_t = (\mathbf{CP} \wedge d\Omega_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{t}$  :

$$\oint_{(C)} \varphi \frac{ds}{e(s)} = G \oint_{(C)} \frac{\partial u_1}{\partial s} ds + G \frac{d\Omega_1}{dx_1} \mathbf{e}_1 \cdot \oint_{(C)} \mathbf{CP} \wedge \mathbf{t} ds \quad (13.33)$$

La première intégrale du second membre est nulle, la seconde représente deux fois l'aire enfermée par le contour (C), nous obtenons donc la seconde formule de BREDT-LEDUC :

$$\frac{d\Omega_1}{dx_1} = \frac{1}{2GA_{(C)}} \oint_{(C)} \varphi \frac{ds}{e(s)} \quad (13.34)$$

En utilisant la première formule de BREDT-LEDUC :

$$\frac{d\Omega_1}{dx_1} = \frac{T}{4GA_{(C)}^2} \oint_{(C)} \frac{ds}{e(s)} \quad (13.35)$$

En comparant à l'équation (13.27), nous déduisons l'expression du moment d'inertie de torsion J pour une section formée d'une cellule fermée à paroi mince :

$$J = \frac{4A_{(C)}^2}{\oint_{(C)} \frac{ds}{e(s)}} \quad (13.36)$$

### 13.4.3 Section composée de plusieurs cellules fermées

Considérons une section de poutre à paroi mince composée de plusieurs cellules fermées numérotées de 1 à n, à l'image de la figure 13.5. Désignons par  $C_i$  le contour

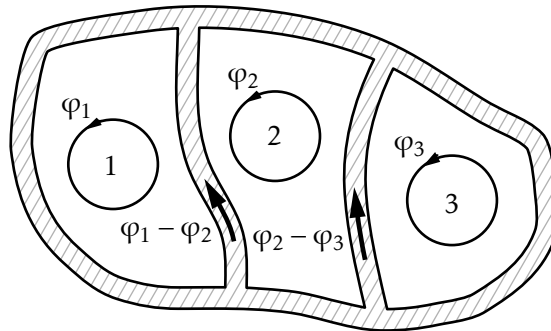


FIGURE 13.5 – Section composée de plusieurs cellules fermées

fermé entourant la cellule  $i$  et par  $C_{ij}$ , la branche commune aux contours  $C_i$  et  $C_j$ . En remarquant que le flux dans une branche commune  $C_{ij}$  est  $i - j$ , et que chaque cellule subit la même rotation que la section entière, nous pouvons appliquer la seconde formule de BREDT-LEDUC pour chaque cellule  $i$ , sous la forme :

$$\frac{d\Omega_1}{dx_1} = \frac{1}{2GA_j} \oint_{C_j} \varphi_j \frac{ds}{e(s)} - \int_{C_{ij}} \varphi_j \frac{ds}{e(s)} \quad (13.37)$$



qui fournit  $n - 1$  équations, et la première formule sous la forme :

$$T_i = 2A_i\varphi_i \quad (13.38)$$

$T_i$  représente la participation de la cellule  $i$  au moment de torsion de sorte que :

$$T = \sum_i T_i \quad (13.39)$$

L'équation  $n$  est alors :

$$T = 2 \sum_i A_i\varphi_i \quad (13.40)$$

Le problème se réduit à la résolution d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues  $\varphi_i$ .

#### 13.4.4 Poutres de section à paroi mince ouverte

La rigidité de telles sections est très faible. Nous pouvons cependant en calculer une approximation en utilisant un développement limité de la solution analytique du problème de SAINT-VENANT pour le rectangle, en se limitant au premier ordre du rapport  $h/b$  des dimensions du rectangle. Nous obtenons respectivement pour la rigidité et la contrainte maximale de cisaillement d'un contour ouvert de longueur développée  $L$  et d'épaisseur  $e$ , assimilable à un rectangle  $L_e$  :

$$J \approx \frac{Le^3}{3}; \quad \tau_{\max} \approx \frac{3T}{Le^2} \quad (13.41)$$

# Stabilité de l'équilibre des poutres élastiques longues

## 14.1 Formulation du problème

Jusqu'à présent, nous avons étudié les poutres longues en supposant que les déplacements restaient suffisamment faibles pour que l'effet des charges appliquées ne soit pas modifié par les déplacements des différents points de la poutre. Cette hypothèse n'est pas toujours valable. Dans bien des cas, elle perd son sens avant que des déformations plastiques aient lieu.

Avec la théorie mono-dimensionnelle des poutres réduites à leur ligne moyenne et dans laquelle les efforts internes sont décomposés en effort tranchant, effort normal, moment de flexion, moment de torsion, on n'obtient pas la même décomposition quand on procède avec des axes locaux liés à la position initiale de la fibre moyenne ou à sa position déformée.

En prenant en compte ces modifications au voisinage de la limite de validité de l'hypothèse de la résistance des matériaux, la variation du torseur des forces intérieures issue des déformations ne peut pas toujours équilibrer la variation du torseur des forces extérieures et le système devient instable. Il en résulte une instabilité qui peut prendre trois formes :

1. flambement des poutres droites comprimées ou *problème d'EULER* illustré sur la figure 14.4.

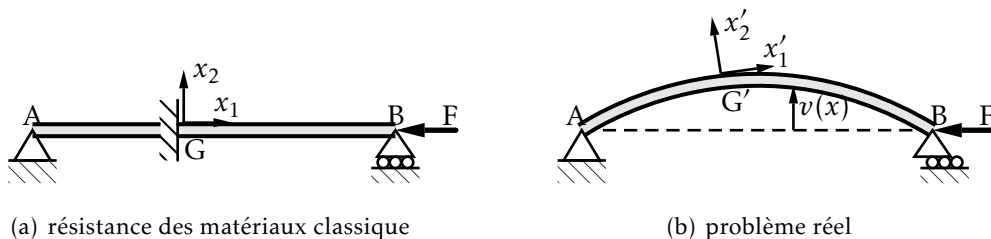


FIGURE 14.1 – Flambement des poutres droites comprimées

Dans ce cadre, les différences sont les suivantes :

– résistance des matériaux classique :

$$N = -F; \quad V_2 = 0; \quad M_3 = 0; \quad T = 0 \tag{14.1}$$

– réalité au second ordre :

$$N = -F; \quad V_2 = F \frac{dv}{dx}; \quad M_3 = -Fv(x); \quad T = 0 \tag{14.2}$$

2. déversement des poutres droites fléchies

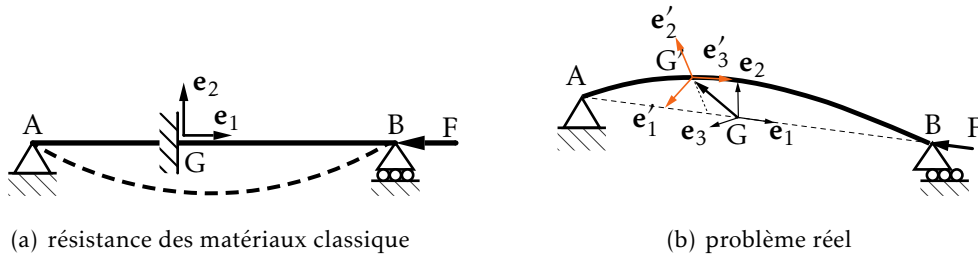


FIGURE 14.2 – Déversement des poutres fléchies

– résistance des matériaux classique : AB et  $v(x)$  sont dans le plan initial de la poutre et du chargement,  $M_3 \neq 0$  porté par  $e_3$ ,  $V_2 \neq 0$  porté par  $e_2$  :

$$N = -F; \quad V_2 = 0; \quad M_3 = 0; \quad T = 0 \tag{14.3}$$

– problème réel : la déformée est une courbe gauche :  $M'_2$  et  $M'_3$  sont portés par  $e'_2$  et  $e'_3$ ;  $V'_2$  et  $V'_3$  sont portés par  $e'_2$  et  $e'_3$  avec  $N' \neq 0$  et  $T' \neq 0$ . Le champ de déplacement est tel que  $G(x, 0, 0)$  et  $G'(\approx x + u(x), v(x), w(x))$ .

Le couplage moment de flexion/moment de torsion peut conduire à l'instabilité dite de déversement.

3. instabilité en compression-torsion des pièces droites comprimées

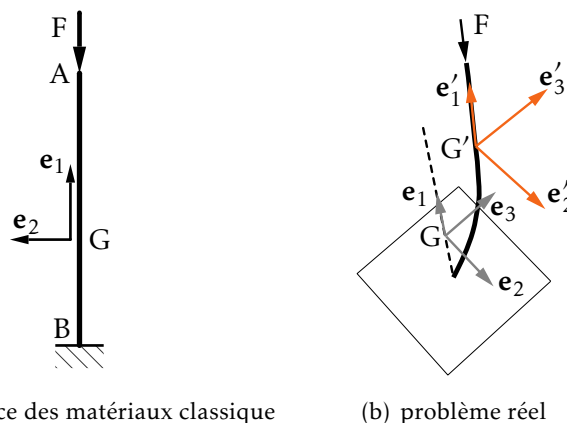


FIGURE 14.3 – Instabilité de compression-torsion des poutres droites comprimées

– résistance des matériaux classique :  $N \neq 0$  avec une déformée de compression ;

- problème réel : la déformée est une courbe gauche,  $N' \neq N$ ,  $M'_2$  et  $M'_3 \neq 0$  sont portés par  $\mathbf{e}'_2$  et  $\mathbf{e}'_3$ ,  $V'_2$  et  $V'_3 \neq 0$  sont portés par  $\mathbf{e}'_2$  et  $\mathbf{e}'_3$  et enfin  $T' \neq 0$ . Le champ de déplacement est tel que  $G(x, 0, 0)$  et  $G'(\approx x + u(x), v(x), w(x))$ . Le couplage effort normal/moment de torsion peut donner lieu à une instabilité dite de compression-torsion.

## 14.2 Modélisation linéaire du flambement

Ce cadre est dû à EULER.

### 14.2.1 Hypothèses

La poutre droite AB, de section constante appuyée à ses extrémités, est soumise à l'effort de compression  $F$  porté par AB et à un système de forces extérieures ( $\mathcal{F}$ ). Dans une section droite courante (S) située à l'abscisse  $x$  à partir de A, le torseur des

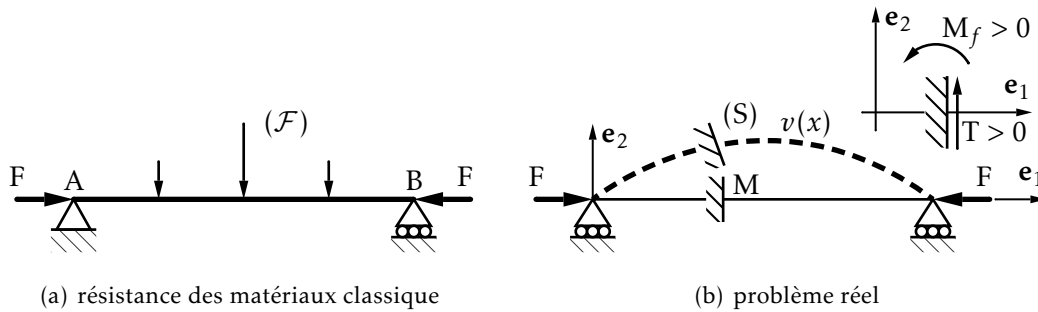


FIGURE 14.4 – Flambement des poutres droites comprimées

forces extérieures de gauche (réaction, forces et moments appliqués) s'écrit :

- $N = -F$ , projection de  $F$  sur la normale extérieure à la facette ;
- $T =$  somme des projections sur  $\mathbf{e}_2$  des forces appliquées sur le tronçon  $\overline{AM}$  y compris la réaction en A.

Il apparaît un moment de flexion supplémentaire dû au moment de  $F$  par rapport au centre de gravité de la section après déplacement. En notant  $\mu(x)$  le moment fléchissant en  $M$  calculé dans les hypothèses de la résistance des matériaux et dû aux charges appliquées le long de la poutre et aux réactions aux appuis, on a :

$$N(x) = -F; \quad V_2(x) = F \frac{dv}{dx}; \quad M_3(x) = \mu(x) - Fv(x) \quad (14.4)$$

### 14.2.2 Mise en équation en négligeant l'effort tranchant

#### Équation d'équilibre

L'équation de la déformée élastique de la poutre s'écrit en prenant en compte le seul effet de flexion :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} \approx \mu(x) - Fv(x) \quad (14.5)$$

En négligeant les variations de longueur dues à l'effort normal et en posant  $k^2 = \frac{F}{EI}$ , l'équation différentielle (14.5) devient :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = \frac{\mu(x)}{EI} \quad (14.6)$$

Lorsque la poutre a une section constante, soit  $I$  constant, cette équation est linéaire à coefficients constants.

#### Cas d'une poutre comprimée non chargée

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (14.7)$$

Cette solution correspond au problème de la poutre droite non chargée aussi dit *problème d'EULER*. Les conditions aux limites imposent que la flèche s'annule aux appuis. Si  $\ell$  est la longueur de la poutre, il vient  $A = 0$  et  $A \cos k\ell + B \sin k\ell = 0$  dont les solutions sont  $B = 0$ , qui correspond à la solution banale et qui revient à dire que la poutre reste droite et :

$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi \quad n = 1, 2 \quad (14.8)$$

et les forces correspondantes sont, du fait de la définition de  $k$  :

$$F = \frac{n^2\pi^2EI}{\ell^2} \quad n = 1, 2, \dots \Rightarrow F_c = \frac{\pi^2EI}{\ell^2} \quad (14.9)$$

Si l'effort atteint les valeurs critiques (14.9), l'équation différentielle admet une solution non nulle, c'est-à-dire que la poutre se déforme. La plus petite charge qui provoque l'instabilité correspond à  $n = 1$ . On l'appelle charge critique d'EULER que l'on note  $F_c$ . La déformée de la ligne moyenne de la poutre est une sinusoïde.

D'après la condition (14.9), il faut toujours étudier la charge critique d'EULER pour un flambement autour de l'axe principal d'inertie minimum de la section. Trois cas sont à distinguer dans le comportement de la poutre :

- $F < F_c$  : équilibre stable ;
- $F = F_c$  : une faible augmentation de  $F$  provoque le flambement c'est un équilibre instable ;
- $F > F_c$  : flambement.

La charge critique d'EULER correspond à l'effort qui provoque l'instabilité et ne doit pas être confondue avec la charge de compression maximale que peut supporter un poteau :

- elle est déduite de l'équation sans second membre du problème réel ;
- c'est aussi la charge sous laquelle, en modèle linéaire, on passe d'une déformée de compression rectiligne, cadre de la résistance des matériaux classique, à une déformée courbe de compression/flexion.

Dans une telle configuration courbe de flexion/compression, une poutre réelle s'effondre par plastification de la section la plus chargée si la compression  $F$  reste appliquée ce qui est pratiquement toujours le cas.

### Cas d'une poutre droite comprimée et chargée transversalement

L'intégrale particulière de l'équation avec second membre est obtenue par la méthode de variation de la constante :

$$\frac{dA}{dx} \cos kx + \frac{dB}{dx} \sin kx = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{dA}{dx} k \sin kx + \frac{dB}{dx} k \cos kx = \frac{\mu(x)}{EI} \quad (14.10)$$

avec  $k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ , il vient :

$$A(x) = -\frac{k}{F} \int_0^x \mu(t) \sin kt \, dt \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{k}{F} \int_0^x \mu(t) \cos kt \, dt \quad (14.11)$$

L'intégrale particulière est donc :

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{-k}{F} \left( \int_0^x \mu(t) \sin kt \cos kx \, dt - \int_0^x \mu(t) \cos kt \sin kx \, dt \right) \\ &= \frac{-k}{F} \int_0^x \mu(t) \sin k(t-x) \, dt \end{aligned} \quad (14.12)$$

et la déformée est donnée par :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx - \frac{k}{F} \int_0^x \mu(t) \sin k(t-x) \, dt \quad (14.13)$$

Il est nécessaire de connaître  $\mu(t)$  pour intégrer. On calcule A et B pour respecter les conditions aux limites, soit :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B \sin k\ell - k \int_0^\ell \mu(x) \sin k(x-\ell) \, dx = 0 \quad (14.14)$$

Deux cas se présentent :

- $\sin k\ell \neq 0$ , B est calculable et la flèche  $v(x)$  est connue ;
- $\sin k\ell = 0$ , B n'est pas calculable et  $v(x)$  est inconnue. Il y a flambement.

Il s'ensuit l'obtention de la charge critique différente de la formule (14.9).

## 14.3 Flambement des pièces longues

Le modèle d'EULER développé précédemment et réduit à l'équation sans second membre, concerne des poutres géométriquement parfaites non chargées transversalement. Dans les cas pratiques, les poutres ont des défauts géométriques et sont soumises à des charges latérales qui provoquent de la flexion, dont les effets doivent être pris en compte lors du calcul de la charge critique. Nous allons étudier d'abord l'effet d'un défaut de forme.

### 14.3.1 Influence de la courbure initiale

En construction, les poutres présentent toujours des défauts géométriques. Il est important de savoir quelle peut être leur influence sur la stabilité de l'ouvrage. Considérons la poutre AB sur appuis simples de la figure 14.5.

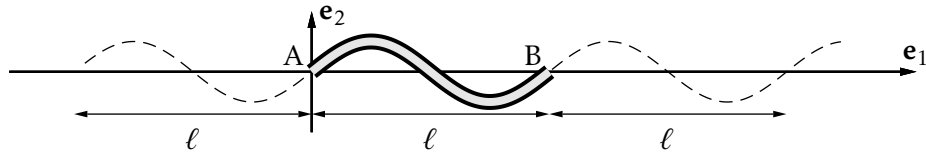


FIGURE 14.5 – Poutre avec courbure initiale

Nous supposons qu'elle présente une flèche initiale  $y_0(x)$ . En prolongeant  $y_0(x)$  comme l'indique la figure, on obtient une fonction périodique qui coïncide avec  $y_0(x)$  sur l'intervalle AB. Physiquement, la fonction qui convient remplit les conditions de Dirichlet pour être développée en séries de Fourier. Elle ne contient que des sinus si la fonction prolongée est choisie impaire :

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.15)$$

Intéressons-nous au terme fondamental. Le résultat pourra facilement être généralisé puisque  $y_0(x)$  et l'équation différentielle de flambement sont linéaires. Soient :

- $y_0$ , la flèche initiale mesurée par rapport à AB théorique ;
- $y_1$ , la flèche de flambement mesurée par rapport à la déformée initiale ;
- $a_1$ , la flèche initiale au centre de la poutre, en considérant les autres coefficients  $a_n$  nuls.

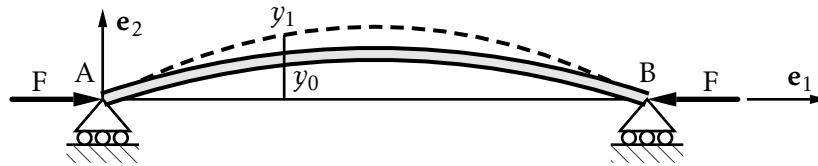


FIGURE 14.6 – Influence de la courbure initiale

L'équation régissant  $y_1(x)$  s'écrit :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{F}{EI} y_1 = -\frac{F}{EI} a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.16)$$

On constate que la déformée initiale induit un moment de flexion :

$$\mu(x) = -F a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.17)$$

résultat que l'on trouve d'ailleurs facilement en calculant le moment fléchissant induit par F et en utilisant l'équation de la déformée de flexion. L'équation (14.13) conduit à :

$$y_1(x) = A \cos kx + B \sin kx + k \int_0^x a_1 \sin \frac{\pi t}{\ell} \sin k(t-x) dt \quad (14.18)$$

soit après intégration :

$$y_1(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{k^2 a_1}{\frac{\pi^2}{\ell^2} - k^2} \sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{k a_1 \frac{\pi}{\ell}}{\frac{\pi^2}{\ell^2} - k^2} \sin kx \quad (14.19)$$

avec  $y_1(0) = 0$  et  $y_1(\ell) = 0$  soit  $A = 0$  et :

$$\left( B - \frac{ka_1 \frac{\pi}{\ell}}{\frac{\pi^2}{\ell^2} - k^2} \right) \sin k\ell = 0 \quad (14.20)$$

La première solution  $k\ell = \pi$  correspond à la charge d'EULER  $F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  et la deuxième solution conduit à la déformée :

$$y_1(x) = \frac{k^2}{\frac{\pi^2}{\ell^2} - k^2} a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.21)$$

Posons  $\alpha = \frac{F}{F_c}$  avec  $F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  alors :

$$v(x) = y_0(x) + y_1(x) = \left( 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} = \frac{a_1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.22)$$

La flèche de la poutre qui était initialement égale à  $a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell}$ , est amplifiée par un facteur  $\frac{1}{1 - \alpha}$  quand on applique  $F$ . Il ne faut pas penser que l'instabilité surviendra toujours pour la même charge  $F_c$  qui ne concerne que la poutre parfaite et qui est seulement la charge pour laquelle il y a passage du mode de compression au mode de compression/flexion. La charge critique d'EULER est seulement un paramètre de l'équation sans second membre. La loi d'évolution des flèches est modifiée par le défaut de forme relative au défaut de forme sinusoidale correspondant au calcul précédent, comme le montre la figure 14.7, dont le défaut de forme est :

$$y_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.23)$$

La flèche maximum, au milieu de la poutre, est :

$$\delta = \frac{a}{1 - \alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{F}{F_c} \quad (14.24)$$

Les courbes représentatives  $\delta = f(a)$  sont des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont l'axe et la parallèle à l'axe  $\delta$  définie par  $\alpha = 1$ .

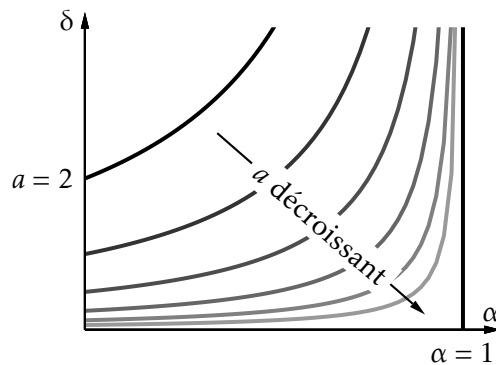


FIGURE 14.7 – Influence du défaut de forme

À la limite si  $a \rightarrow 0$ , le graphique se réduit aux asymptotes et montre la brutalité du phénomène d'instabilité. Si du côté des petites valeurs de  $\alpha$ , le diagramme représente bien la réalité, près de  $\alpha = 1$ , il n'a plus de sens et le modèle mathématique utilisé n'est qu'une forme asymptotique grossière de la réalité.



En conclusion, la charge critique d'EULER, qui ne dépend que des liaisons, pourra nous servir en vue de représenter par un modèle linéaire les flèches sous charges prises par des poutres réelles.

## 14.4 Influence de l'effort tranchant

### 14.4.1 Charge critique d'EULER d'une poutre de section droite pleine

Calcul à partir de la déformée

L'équation de la déformée d'une poutre droite soumise à un effort tranchant est :

$$\frac{dv_t}{dx} = \frac{\lambda V}{G S} \quad (14.25)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de forme de la section, listé pour certaines sections dans le tableau 14.1.





section				
coefficient $\lambda$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{31}{30}$	$\frac{10}{9}$

TABLEAU 14.1 – principales valeurs de  $\lambda$  pour les profilés usuels

Considérons la poutre de la figure 14.6. La flèche totale d'une section courante d'abscisse  $x$  s'écrit :

$$v(x) = v_f(x) + v_t(x) \quad (14.26)$$

Le terme  $v_f$  est du au moment de flexion  $M_3 = -Fv$  et le terme  $v_t$  est due à l'effort tranchant  $V_2$  porté par  $e_2$ . On a  $V_2 = F \frac{dv}{dx}$  et la pente de la déformée réelle est  $\frac{dv}{dx}$ . Les flèches  $v_f$  et  $v_t$  sont liées au moment de flexion et à l'effort tranchant par :

$$\frac{d^2 v_f}{dx^2} = \frac{M_3}{EI} \quad \text{et} \quad \frac{dv_t}{dx} = \frac{\lambda V_2}{G S} \quad (14.27)$$

En dérivant par rapport à  $x$  les deux termes de l'équation différentielle de l'effort tranchant et en l'additionnant membre à membre avec celle de flexion, il vient :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v_f}{dx^2} + \frac{d^2 v_t}{dx^2} = -\frac{Fv}{EI} + \frac{\lambda}{GS} F \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (14.28)$$

soit :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} \left( 1 - \frac{\lambda F}{GS} \right) + \frac{Fv}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{F/EI}{1 - \frac{\lambda F}{GS}} \quad (14.29)$$

Sa solution est analogue à celle de la section 14.2.2. Il suffit de changer :

$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad \text{en} \quad k^2 = \frac{F/EI}{1 - \frac{\lambda F}{GS}} \quad (14.30)$$

Les conditions de flambement sont réunies comme précédemment quand  $k_c \ell = n\pi$ , soit :

$$\sqrt{\frac{F/EI}{1 - \frac{\lambda F}{GS}}} = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, \dots \Rightarrow F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left(1 - \lambda \frac{F_c}{GS}\right) \quad (14.31)$$

$F_c$  est inférieure à la valeur calculée sans tenir compte de l'effort tranchant, puisque la solution de l'équation (14.31) est :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{EI}{GS} \frac{\lambda \pi^2}{\ell^2}} \quad (14.32)$$

• **Exemple** Pour une barre ronde en acier de diamètre  $\varnothing = 27$  mm et de longueur  $\ell = 1$  m, on trouve que  $F_c = 0,994$  fois la charge critique d'EULER. En fait, la diminution de la charge critique par l'effort tranchant est négligeable sauf comme nous le verrons ci-dessous dans le cas des treillis. •

#### Calcul à partir de l'énergie

Supposons, avec le modèle d'EULER, avoir une déformée sinusoïdale :

$$M_3 = Fv = F\delta \sin \frac{\pi x}{\ell}; \quad V_2 = -\frac{dM_3}{dx} = -F\delta \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.33)$$

L'énergie de déformation due à l'effort tranchant est :

$$W_t = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\lambda V_2^2}{GS} dx = \frac{1}{2GS} \lambda \int_0^\ell \frac{F^2 \delta^2 \pi^2}{\ell^2} \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{\pi^2 \lambda F^2 \delta^2}{4GS} \quad (14.34)$$

$$W_f = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell F^2 \delta^2 \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{F^2 \delta^2 \ell}{4EI}$$

Le travail des forces appliquées passe intégralement en augmentation du potentiel élastique en flexion et effort tranchant :

$$W_f + W_t = Fu; \quad \frac{F_c^2 \delta^2 \ell}{4EI} + \frac{\pi^2 \lambda F_c^2 \delta^2}{4GS} = F_c \frac{\pi^2 \delta^2}{4\ell}; \quad F_c \left( \frac{\ell}{4EI} + \frac{\pi^2 \lambda}{4GS} \right) = \frac{\pi^2}{4\ell} \quad (14.35)$$

où  $\frac{\pi^2 \delta^2}{4\ell}$  représente le raccourcissement de la corde de la poutre, soit :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \lambda}{4GS} \frac{4EI}{\ell}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{W_t}{W_f}} \quad \text{puisque} \quad \frac{W_t}{W_f} = \frac{\pi^2 \lambda}{\ell^2} \frac{EI}{GS} \quad (14.36)$$

• **Exemple Barre rectangulaire en acier** — On considère une section telle que  $\lambda = 6/5$ ,  $E/G = 5/2$  et  $\sqrt{I/S} = \rho$  comme rayon de giration :

$$\frac{W_t}{W_f} = 10 \frac{6}{5} \frac{5}{2} \frac{I}{\ell^2 S} = 30 \left( \frac{\rho}{\ell} \right)^2 \quad (14.37)$$

On considère en général que pour  $\ell/\rho < 25$ , il n'y a plus de problème de flambement. •

### 14.4.2 Généralisation à une poutre quelconque

$$F_c = \frac{W}{u} = \frac{W_f}{u} + \frac{W_t}{u} = \frac{W_f}{u} \left( 1 + \frac{W_t}{W_f} \right) \quad (14.38)$$

$1 + \frac{W_t}{W_f}$  est indépendant de  $F_c$  car  $\frac{W_t}{W_f} = \frac{W_t/F^2}{W_f/F^2}$ . La relation (14.38) s'écrit donc en termes indépendants de  $F_c$  et dans le cas critique :

$$F_c = \frac{W_f/F^2}{u} F_c^2 \left( 1 + \frac{W_t}{W_f} \right) \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{W_t}{W_f}} = \left( \frac{W_f/F^2}{u} \right) F_c \quad (14.39)$$

alors qu'en flexion simple on avait  $1 = \left( \frac{W/F^2}{u} \right) F_c$ .

### 14.4.3 Charge critique pour les poutres treillis

On considère une poutre treillis dont les entretoises, toutes identiques, de longueur  $\overline{mm'} = a$  et de section  $s$ , sont soumises à l'effort tranchant  $V_2$ , comme décrit par la figure 14.8.

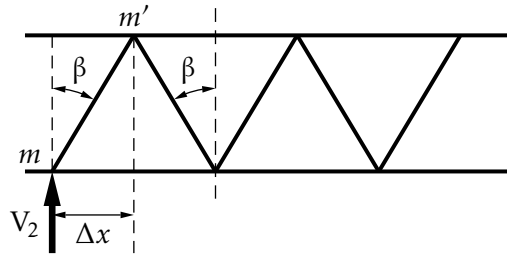


FIGURE 14.8 – Structure poutre treillis

Avec la théorie des poutres longues réduites à leur ligne moyenne, les entretoises sont soumises à  $N = \frac{V_2}{\cos \beta}$  alternativement en traction et en compression donnant la même énergie. L'énergie par entretoise est :

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{N^2}{2Es} d\ell = \frac{N^2 a}{2Es} = \frac{V_2^2 a}{2Es \cos^2 \beta} \quad (14.40)$$

Pour toute la poutre entière :

$$W_t = \frac{\sum_i V_{2i}^2 a}{2Es \cos^2 \beta} \quad \frac{\Delta x}{\sin \beta} = a \quad (14.41)$$

$$\sum_i V_{2i}^2 a = \frac{1}{\sin \beta} \sum_i V_{2i}^2 \Delta x_i \approx \frac{1}{\sin \beta} \int_0^\ell V_2^2 dx$$

Pour exprimer l'énergie, choisissons une déformée sinusoïdale  $v = \delta \sin \frac{\pi x}{\ell}$  :

$$M_3 = -Fv = -F\delta \sin \frac{\pi x}{\ell}; \quad V_2 = -\frac{dM_3}{dx} = -F\delta \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell} \quad (14.42)$$

$$\sum_i V_{2i}^2 a = \frac{\pi^2 F^2 \delta^2}{\ell^2 \sin \beta} \int_0^\ell \cos^2 \left( \frac{\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{\pi^2 F^2 \delta^2}{2\ell \sin \beta}$$

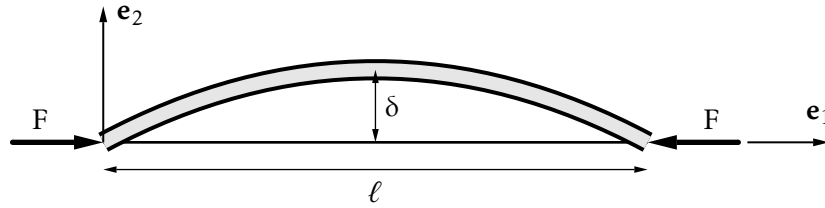


FIGURE 14.9 – Flambement des poutres droites comprimées

et :

$$W_t = \frac{\pi^2 F^2 \delta^2}{4Es \ell \sin \beta \cos^2 \beta} \quad (14.43)$$

l'énergie de flexion est donnée par l'équation (14.34) :

$$\frac{W_t}{W_f} = \frac{\pi^2 I}{s \ell^2 \sin \beta \cos^2 \beta} \quad (14.44)$$

• **Exemple** Soit une poutre treillis telle que  $\beta = \pi/6$ , autrement dit :

$$\frac{\pi^2}{\sin \beta \cos^2 \beta} \approx \frac{10}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{1}{2}} = 30 \quad (14.45)$$

et  $W_t/W_f = 30I/(s\ell^2)$  au lieu de  $30I/(\lambda S\ell^2)$ . Le rapport  $W_t/W_f$  évolue donc comme  $30I/S\ell^2$  pour une section pleine (S) et  $30I/s\ell^2$  pour une poutre treillis avec entretoises. On voit donc que  $s \ll S$  entraîne que  $W_t/W_f$  n'est pas toujours négligeable. •

Les poutres treillis comprimées peuvent être vulnérables au flambement au travers des entretoises soumises alternativement à la compression et à la traction sous l'effet de l'effort tranchant.

## 14.5 Calcul de la charge critique d'EULER

### 14.5.1 Tronçon de poutre hyperstatique

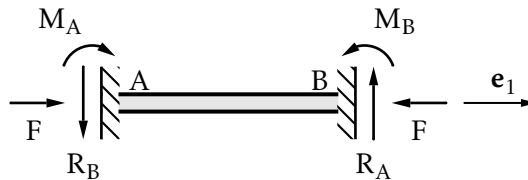


FIGURE 14.10 – Tronçon de poutre hyperstatique

En s'aidant de la figure 14.10, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$R_A - R_B = 0 \quad M_B - M_A + R_A \ell = 0 \quad R_A = \frac{M_B - M_A}{\ell} \quad R_B = R_A \quad (14.46)$$

Sur un tronçon de poutre hyperstatique, le moment de flexion :

$$\mu(x) = M_A - R_A x = M_A - \frac{M_B - M_A}{\ell} x \quad (14.47)$$

a la forme générale  $\mu(x) = cx + d$ ,  $c$  et  $d$  étant deux constantes arbitraires. Il vient pour l'équation de flambement :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = cx + d \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{F}{EI} \quad (14.48)$$

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D \quad \text{avec} \quad \frac{F}{EI}(Cx + D) = cx + d \quad (14.49)$$

La solution générale comporte donc quatre coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  qui sont définis par les conditions aux limites aux extrémités. Ces conditions peuvent porter sur les déplacements aux extrémités  $v(0)$ ,  $\frac{dv}{dx}(0)$  et  $v(\ell)$ ,  $\frac{dv}{dx}(\ell)$ , ou sur les forces et moments d'extrémité (cf. Chapitres 7 et 10).

### 14.5.2 Force critique des poutres droites et influence des conditions d'appui

#### Poutre sur deux appuis

On a vu que :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (14.50)$$

#### Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre

Le flambement de cette poutre est analogue à celui d'une poutre appuyée aux deux extrémités et de longueur  $2\ell$

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (14.51)$$

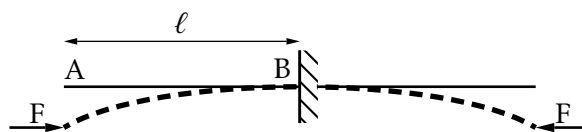


FIGURE 14.11 – Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre

#### Longueur de flambement

L'écriture ci-dessus de la charge critique d'EULER d'une poutre sous la forme

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{(\lambda\ell)^2} \quad (14.52)$$

et par analogie avec la solution (14.9), permet de faire apparaître suivant les liaisons une longueur fictive ( $\lambda\ell$ ) dite *longueur de flambement* ramenant chaque problème pratique à un problème d'EULER équivalent pour une poutre fictive de longueur  $\lambda\ell$  appuyée à chaque extrémité.

## Poutre encastrée à une extrémité et articulée à l'autre

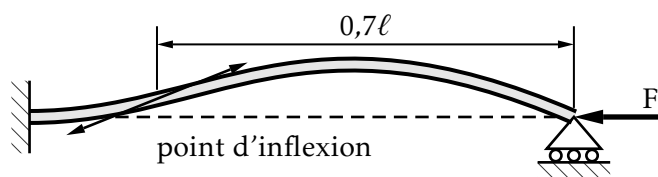


FIGURE 14.12 – point d'inflexion

La déformée a pour équation générale  $v = A \cos kx + B \sin kx + Cx$  et les conditions aux limites donnent :

$$v(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$v(\ell) = 0 \rightarrow B \sin k\ell + C\ell = 0 \quad (14.53)$$

$$\frac{dv}{dx}(\ell) = 0 \rightarrow kB \cos k\ell + C = 0$$

Les deux dernières équations linéaires et homogènes en B et C n'admettent des solutions non nulles que si le déterminant des équations est nul, soit :

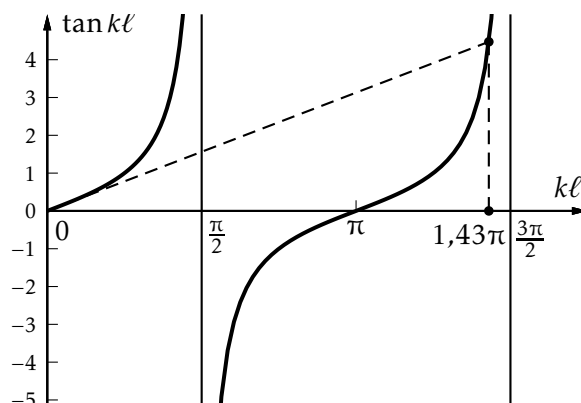
$$\sin k\ell - k\ell \cos k\ell = 0 \quad (14.54)$$

Supposant  $\cos k\ell \neq 0$ , on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\tan k\ell - k\ell = 0 \quad (14.55)$$

Comme suggéré graphiquement sur la figure 14.13, la plus petite valeur non nulle de  $k\ell$  solution de l'équation (14.55) est :

$$k\ell = 1,4303\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{F_c}{EI}} \ell = 1,43\pi \Rightarrow F_c = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{1,43}\ell\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7\ell)^2} \quad (14.56)$$

FIGURE 14.13 – Solution de  $\tan k\ell = k\ell$

### Poutre encastrée aux deux extrémités

Ici la forme générale est :

$$v = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (14.57)$$

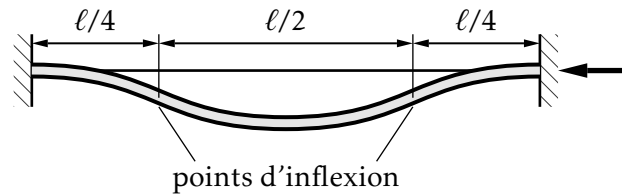


FIGURE 14.14 – Poutre encastrée aux deux extrémités

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\rightarrow A + D = 0 \\ v(l) = 0 &\rightarrow A \cos kl + B \sin kl + Cl + D = 0 \\ v_{,x}(0) = 0 &\rightarrow kB + C = 0 \\ v_{,x}(l) = 0 &\rightarrow -kA \sin kl + kB \cos kl + C = 0 \end{aligned} \quad (14.58)$$

Ces quatre équations constituent un système homogène dont le déterminant doit s'annuler :

$$(1 - \cos kl)^2 + \sin kl(\sin kl - kl) = 0 \quad (14.59)$$

En développant, il vient :

$$2(1 - \cos kl) - kl \sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \frac{kl}{2} \left( 2 \sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \right) = 0 \quad (14.60)$$

dont la plus petite racine est  $k = 2\pi$  qui conduit à une charge critique :

$$F_c = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (14.61)$$

La *longueur de flambement* d'une barre encastrée à ses deux extrémités est égale à la moitié de sa longueur réelle.

### Principales longueurs de flambement

Ces longueurs équivalentes sont détaillées sur la figure 14.15. La géométrie des déformées et la position des points d'inflexion permettent souvent de trouver les longueurs de flambement sans calcul.

#### 14.5.3 Méthode de l'énergie

La méthode consiste à considérer que lors du passage du mode déformée de compression au mode avec flexion, la charge de compression ayant alors la valeur  $F_c$ , le travail des forces extérieures sert intégralement à fléchir la poutre.

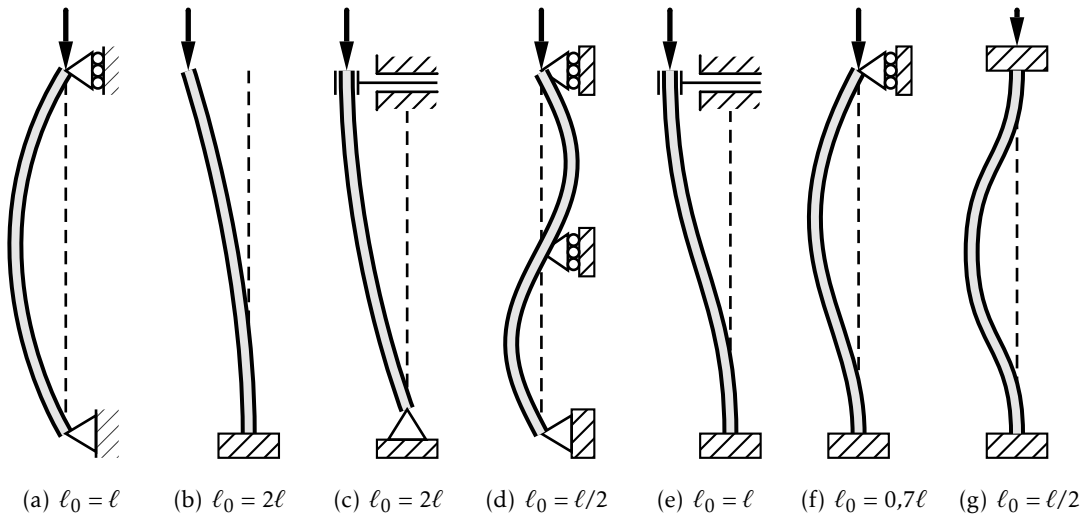


FIGURE 14.15 – Principales longueurs de flambement

Le travail des forces extérieures développé au cours du passage de l'extrémité B à B' est :

$$T = \int_B^{B'} F d\lambda = F \int_B^{B'} d\lambda \quad (14.62)$$

Ce travail passe intégralement en augmentation du potentiel élastique de flexion de la poutre si l'on néglige le travail des forces élastiques de compression (on vérifiera que le terme  $\frac{1}{2} \frac{N^2}{ES}$  est négligeable devant les deux autres). Pour l'ensemble de la transformation progressive, on a :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_3^2(x)}{EI(x)} dx \quad (14.63)$$

soit  $F_c \lambda = W$  dès que la poutre prend une déformée courbe. Il faut exprimer ces termes en vue de déterminer  $F_c$ . Pour cela, une déformée est nécessaire et évidemment le problème n'étant pas résolu, nous ne pourrions disposer que d'approximations. Nous avons vu dans les paragraphes précédents :

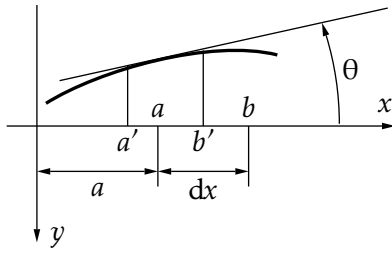
- que la charge critique d'EULER ne dépend pas des charges latérales éventuelles puisqu'elle constitue un paramètre de l'équation différentielle de flambement sans second membre ;
- l'importance des liaisons. Il faudra donc satisfaire le mieux possible aux conditions aux limites.

Compte tenu des remarques ci-dessus, en choisissant des déformées continues et à dérivées premières et secondes continues et satisfaisant aux conditions aux limites, nous remplirons les conditions utiles à l'obtention d'une bonne approximation de la charge critique.

En effet, nous n'aurons entre la déformée réelle et la déformée choisie qu'une différence due à un effet de flexion pouvant provenir de l'action de charges latérales



donc sans influence sur la charge critique cherchée puisque le moment fléchissant correspondant modifierait seulement le second membre.



$$\begin{aligned}\overline{ab} &= dx \approx \overline{a_1b_1} \\ \overline{a'b'} &= dx \cos \theta \cong dx \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \\ \theta &= \arctan v' \approx v' \\ d\lambda &= \overline{ab} - \overline{a'b'} = \frac{1}{2}v'^2\end{aligned}\tag{14.64}$$

soit :

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\ell v'^2 dx \tag{14.65}$$

Concernant l'énergie de flexion, deux voies sont possibles :

1. Soit l'égalité  $Mf(x) = -Fv(x)$ . L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W(F) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{(-Fv)^2}{EI(x)} dx \tag{14.66}$$

qui donne quand  $F = F_c$  avec  $F_c = \frac{W}{\lambda}$  et :

$$F_c = \frac{\int_0^\ell v'^2 dx}{\int_0^\ell \frac{v^2(x) dx}{EI(x)}} \tag{14.67}$$

2. Soit l'égalité  $Mf(x) = EIv''(x)$ . L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W(F) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x)v''^2(x) dx \tag{14.68}$$

qui donne quand  $F = F_c$  avec  $F_c = \frac{W}{\lambda}$  :

$$F_c = \frac{\int_0^\ell EI(x)v''^2 dx}{\int_0^\ell v'^2 dx} \tag{14.69}$$

Ces deux formulations sont équivalentes si les conditions énoncées ci-dessus sont bien vérifiées. Par contre, sur le plan pratique, l'une d'entre elles faisant appel à la déformée et à sa dérivée première est plus indiquée car plus facile à imposer sur une déformée. Toute erreur sur la dérivée seconde, par exemple au niveau des liaisons, se traduirait par l'application d'un moment qui dénaturerait les liaisons.

• **Exemple** Poteau encastré à une extrémité, libre à l'autre — Dans un premier temps, la déformée suivante est proposée :

$$y = e \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell}\right) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \tag{14.70}$$

Considérons le premier mode de calcul avec  $y'(x)$  et  $y''(x)$ . On vérifie bien ici que  $y''(\ell) = 0$  puisque l'extrémité B est libre, d'où la solution exacte suivante :

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^\ell y''^2(x) dx = \frac{e^2 \pi^4 EI}{64 \ell^3}; \quad \lambda = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2(x) dx = \frac{e^2 \pi^2}{16 \ell}; \quad P_c = \frac{\pi^2 EI}{4 \ell^2} \quad (14.71)$$

De même, considérons le deuxième mode de calcul avec  $y(x)$  et  $y'(x)$  :

$$M_3(x) = P(e - y(x)) = Pe \cos\left(\frac{\pi x}{2\ell}\right)$$

$$W = P_c \lambda \Rightarrow \frac{e^2 \pi^2}{16 \ell} = \frac{P_c}{EI} \int_0^\ell (e - y(x))^2 dx = \frac{P_c}{EI} e^2 \ell \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \quad (14.72)$$

$$P_c \approx 0,27 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

qui diffère de 8% par rapport à la solution exacte.

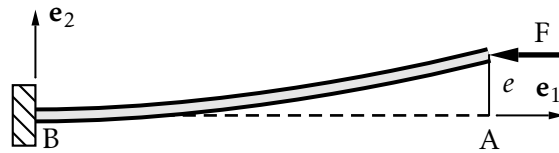


FIGURE 14.16 – Poutre libre à une extrémité et encastée à l'autre

La deuxième déformée proposée s'écrit :

$$v = A\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \quad (14.73)$$

qui ne vérifie pas toutes les conditions aux limites. Rapidement, les quantités utiles à la poursuite des calculs prennent la forme :

$$v' = 2A \left(\frac{x}{\ell}\right); \quad \frac{1}{2} \int_0^\ell v'^2 dx = \frac{2}{3} A^2 \ell; \quad W = F_c \frac{2}{3} A^2 \ell \quad (14.74)$$

Concernant le premier mode de calcul, il vient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_3^2(x)}{EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^\ell v''^2 dx = \frac{3}{\pi^2} \frac{EI \pi^2}{\ell^2} \approx 0,30 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (14.75)$$

On note l'approximation par excès. Le second mode de calcul entraîne :

$$M_3 = F_c(A\ell - v(x)) = F_c A \ell \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right)$$

$$W = \frac{F_c^2 A^2 \ell^2}{2EI} \int_0^\ell \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right)^2 dx = \frac{F_c^2 A^2 \ell^2}{2EI} \frac{8\ell}{15} \quad (14.76)$$

autrement dit, après développement de l'intégrale :

$$F_c \frac{2}{3} A^2 \ell = \frac{F_c^2 A^2 \ell^2}{2EI} \frac{8\ell}{15} \Rightarrow F_c = 2,5 \frac{EI}{\ell^2} \approx 0,25 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} \quad (14.77)$$

On retrouve pratiquement la valeur exacte. ●

#### 14.5.4 Méthode des approximations successives

Cette méthode consiste à se donner une déformée arbitraire vérifiant les conditions aux limites et définie à un paramètre près (en général un rapport d'affinité). A partir de cette déformée, on peut estimer le torseur des actions extérieures dans chaque section et, de là, obtenir par la loi de déformation en flexion une nouvelle approximation de la déformée. En répétant cette opération, les solutions obtenues convergent vers la déformée de flambement. La justification de cette méthode a fait l'objet de nombreux travaux par des mathématiciens. Elle est liée à la structure de l'équation différentielle de flambement.

Considérons la poutre libre à une extrémité, encastree à l'autre de la figure 14.16. Supposons sa déformée  $y_0(x)$  semblable à une parabole avec A, une constante sans dimension :

$$y_0 = A\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \quad (14.78)$$

La déformation de la poutre provoque un moment de flexion qui vaut en  $x$  :

$$M_3 = FA\ell \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right) \quad (14.79)$$

Par conséquent, l'équation différentielle de la déformée est :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_3}{EI} = \frac{FA\ell}{EI} \left(1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right) \quad (14.80)$$

soit, après deux intégrations et puisque  $v = v' = 0$  en  $x = 0$  :

$$v = \frac{FA\ell}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12\ell^2}\right) \quad (14.81)$$

L'égalité entre la flèche en A obtenue avec les deux déformées permet d'obtenir la charge critique de flambement.

$$A\ell = \frac{F_c A\ell}{EI} \frac{5\ell^2}{12} \quad \text{d'où} \quad F_c = \frac{12 EI}{5 \ell^2} = 2,4 \frac{EI}{\ell^2} \quad (14.82)$$

Cette valeur est déjà à 3% de la valeur exacte.

La deuxième itération mène à :

$$M_3 = F^2 \left( \frac{A\ell^3}{EI} \frac{5}{12} - \frac{A\ell}{EI} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} \frac{x^4}{\ell^2} \right) \right) = \frac{F^2 A\ell}{EI} \left( \frac{5\ell^2}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12\ell^2} \right) \quad (14.83)$$

soit avec  $v'(0) = 0$  :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{F^2 A\ell}{(EI)^2} \left( \frac{5\ell^2 x}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60\ell^2} \right) \Rightarrow v = \frac{F^2 A\ell}{(EI)^2} \left( \frac{5\ell^2}{24} x^2 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360\ell^2} \right) \quad (14.84)$$

En A avec la déformée (14.81), on avait :

$$v = \frac{FA\ell}{EI} \frac{5\ell^2}{12} \quad (14.85)$$

Avec cette deuxième itération, il vient :

$$v = \frac{F^2 A \ell}{(EI)^2} 0,169 \ell^4 \quad \text{et} \quad F_c = 2,47 \frac{EI}{\ell^2} \quad (14.86)$$

On constate que la deuxième itération se rapproche de la solution exacte puisque  $\pi^2/4 \approx 2,47$ .

### 14.5.5 Flambement de poutres longues comprimées encastées sur d'autres poutres

L'exemple typique, illustré sur la figure 14.17, est constitué par les membrures d'un cadre façade d'immeuble. Les poteaux AB et CD reprennent une partie du poids de la structure métallique et des planchers. Ces poteaux sont encastés sur les poutres de rive.

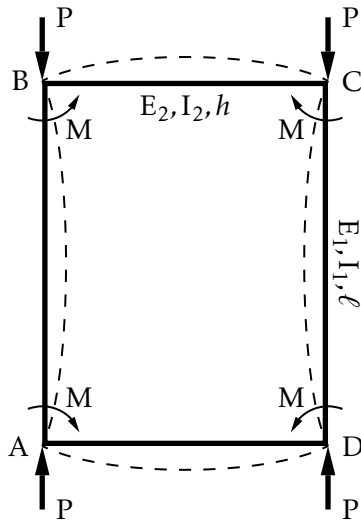


FIGURE 14.17 – Façade d'immeuble

Appelons respectivement  $E_1 I_1$  et  $E_2 I_2$  les rigidités de flexion des poteaux et des traverses fléchissant dans le plan.  $M$  est le moment d'encastement exercé dans la situation critique par les traverses respectivement BC ou AD sur les poteaux. L'équation de flambement s'écrit pour une section courante d'un poteau, AB par exemple, dans le plan du portique :

$$E_1 I_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = -P y + M \quad (14.87)$$

La solution générale correspondante est

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \frac{M}{P} \quad (14.88)$$

avec  $k^2 = \frac{P}{E_1 I_1}$ . Les constantes d'intégration et  $M$  sont définis par les conditions aux limites (poutre sur appuis soumise à un moment  $M$  à chaque extrémité) :

$$y(0) = 0 \quad \frac{dy}{dx}(\ell/2) = 0 \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{Mh}{2E_2 I_2} \quad (14.89)$$

pour raison de symétrie. Ces conditions entraînent :

$$A + \frac{M}{P} = 0 \quad -Ak \sin \frac{k\ell}{2} + Bk \cos \frac{k\ell}{2} = 0 \quad Bk - \frac{Mh}{2E_2 I_2} = 0 \quad (14.90)$$

Ces équations permettent de déterminer les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $M$  si le déterminant des équations est non nul, sinon c'est le flambement ou l'état critique, soit :

$$\tan\left(\frac{k\ell}{2}\right) + \frac{Ph}{2kE_2 I_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{k\ell}{2}\right) + \frac{h}{\ell} \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \left(\frac{k\ell}{2}\right) = 0 \quad \text{puisque} \quad k^2 = \frac{P}{E_1 I_1} \quad (14.91)$$

Deux cas asymptotiques sont à distinguer en fonction des rigidités comparées des barres. En posant  $R_1 = \frac{E_1 I_1}{\ell}$  et  $R_2 = \frac{E_2 I_2}{h}$ , l'équation (14.91) devient :

$$\tan\left(\frac{k\ell}{2}\right) + \frac{R_1}{R_2} \frac{k\ell}{2} = 0 \quad (14.92)$$

d'où la discussion suivante :

1. si  $R_1 \gg R_2$  :

$$\tan\left(\frac{k\ell}{2}\right) \rightarrow -\infty, \quad \frac{k\ell}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \frac{P_c}{E_1 I_1} \frac{\ell^2}{4} \approx \frac{\pi^2}{4}, \quad P_c \rightarrow \frac{\pi^2 E_1 I_1}{\ell^2} \quad (14.93)$$

ce qui représente le problème d'EULER classique ;

2. si  $R_1 \ll R_2$  :

$$\tan\left(\frac{k\ell}{2}\right) \rightarrow \pi, \quad \frac{P_c}{E_1 I_1} \frac{\ell^2}{4} \approx \pi^2, \quad P_c \rightarrow \frac{\pi^2 E_1 I_1}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \quad (14.94)$$

qui correspond à la poutre encastree aux deux extrémités.

## 14.6 Déversement des poutres en flexion simple

### 14.6.1 Mise en équations

Considérons une poutre droite dont la section constante travaille en flexion simple autour de son axe principal d'inertie maximum  $Ge_3$ . On supposera que la section a un moment d'inertie par rapport à  $Ge_3$  beaucoup plus grand que celui calculé par rapport à  $Ge_2$ .

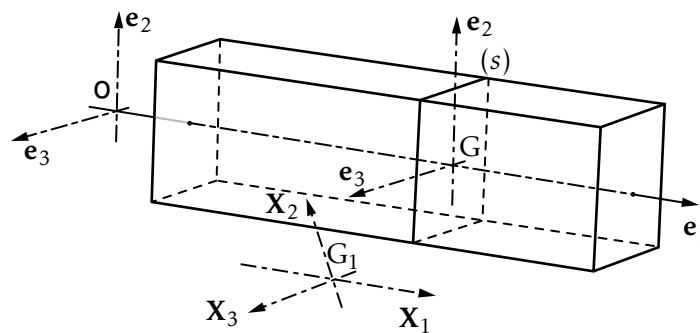


FIGURE 14.18 – Déversement

Quand on augmente les charges appliquées donc les sollicitations  $V_2$  et  $M_3$ , la fibre moyenne de la poutre se déforme dans le plan  $(e_1 O e_2)$  puis brusquement, lorsque le chargement atteint un état critique, des déplacements parallèles à  $e_3$  et une rotation autour de  $Ge_1$  apparaissent. On dit que la poutre *déverse*. Ce phénomène est illustré sur la figure 14.18.

On explique ce phénomène en montrant que le torseur des forces extérieures initialement en flexion simple, dégénère dans un repère lié à la déformée de la fibre moyenne en un torseur correspondant à de la flexion déviée et à de la torsion.

Le centre de gravité de la section courante a pour coordonnées  $G(x_1, 0, 0)$  et après le déplacement  $G_1(x_1, u_2, u_3)$  où  $u_2$  et  $u_3$  sont les composantes du déplacement  $\mathbf{GG}_1$  qui est supposé rester dans le plan de la section droite. Pour des petites déformations, on peut interpréter le passage de  $(G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$  à  $(G_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3)$  de la manière suivante :  $G_1\mathbf{X}_i$  est le transformé d'un segment de longueur  $dx_i$  porté par  $G\mathbf{e}_i$ .

Cela permet d'écrire la matrice de passage de la base  $(G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$  à la base  $(G_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3)$  en utilisant la forme matricielle générale de la représentation des petites déformations (établie au chapitre 2) et petits déplacements :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{vecteur} & & \text{vecteur} & & \text{matrice} & & \text{matrice symétrique} \\ \text{transformé} & & \text{original} & & \text{anti-symétrique} & & \text{déformation pure} \\ \mathbf{dX} & = & \mathbf{dx} & + & \boldsymbol{\Omega} \mathbf{dx} & + & \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{dx} \end{array} \quad (14.95)$$

Intéressons-nous au déplacement d'ensemble :

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2)/2 & (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3)/2 \\ & 0 & (\partial_3 u_2 - \partial_2 u_3) \\ \text{anti.} & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (14.96)$$

S'agissant d'un déplacement d'ensemble, translation + rotation faisant passer de  $(G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$  à  $(G_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3)$  il n'y a pas de distorsion, les angles entre les axes sont donc des angles droits dans chacune des bases et les coefficients  $g_1, g_2, g_3$  sont nuls.

Nous allons mettre à profit cette propriété pour ramener chacun des coefficients de la matrice de (14.96) à une expression en fonction de  $x_1$  intéressante en vue de traiter un problème de poutre réduite à sa ligne moyenne. Les glissements sont nuls, la perpendicularité des vecteurs de base étant conservée par la rotation et  $g_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0$  entraîne :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (14.97)$$

En supposant, en plus, que les déplacements ont lieu dans le plan de la section droite on obtient :

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}; \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (14.98)$$

et :

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{du_2}{dx_1} & -\frac{du_3}{dx_1} \\ \frac{du_2}{dx_1} & 1 & -\omega_1 \\ \frac{du_3}{dx_1} & \omega_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{dX\} = ([A] + [I]) \{dx\} \quad (14.99)$$

Cette relation permet de calculer les composantes des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne. Nous allons calculer comment se décomposent  $V_2$  et  $M_3$  dans la nouvelle base :

$$G_1 \mathbf{x}_1 = [A + I] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{du_2}{dx_1} \\ -\frac{du_3}{dx_1} \end{pmatrix} \quad G_1 \mathbf{x}_2 = [A + I] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_2}{dx_1} \\ 1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad G_1 \mathbf{x}_3 = [A + I] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_3}{dx_1} \\ \omega_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.100)$$

Cette formulation nous permet de décomposer  $V_2$  et  $M_3$  dans le nouveau référentiel ( $G_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3$ ) lié à la poutre :

$$V_2 \cdot G\mathbf{X}_i \quad \text{et} \quad M_3 \cdot G\mathbf{X}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (14.101)$$

autrement dit :

$$\begin{pmatrix} N'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +V_2 \frac{du_2}{dx_1} \\ +V_2 \\ -V_2 \omega_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (14.102)$$

Les deux composantes suivant les axes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  restent faibles devant  $V_2$ . De plus, nous avons vu que l'effort tranchant à une faible influence sur la détermination du chargement critique d'une poutre sauf dans certains cas de structures treillis en flexion.

L'effort initial  $M_3$  conduit à une flexion déviée et à une torsion dont les composantes sont :

$$[A + I] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_3 \frac{du_3}{dx_1} \\ M_3 \omega_1 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad \text{où } M_3 \omega_1 \text{ est un moment de torsion} \quad (14.103)$$

Les lois de comportement généralisées (10.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} &= \frac{M_3}{EI_3} && \text{flexion dans le plan } \mathbf{e}_1 \mathbf{G} \mathbf{e}_2 \\ \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} &= -\frac{M_3 \omega_1}{EI_2} && \text{flexion dans le plan } \mathbf{e}_1 \mathbf{G} \mathbf{e}_3 \\ \frac{d\omega_1}{dx_1} &= \frac{M_3 \frac{du_3}{dx_1}}{GJ} && \text{torsion autour de } \mathbf{G} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (14.104)$$

Le terme  $GJ$  est le module de rigidité de torsion de la poutre :

$$\frac{du_3}{dx_1} = \frac{d\omega_1}{dx_1} \frac{GJ}{M_3} \rightarrow \frac{d}{dx_1} \frac{du_3}{dx_1} = \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} = \frac{M_3 \omega_1}{EI_2} = -\frac{d}{dx_1} \left( \frac{d\omega_1}{dx_1} \frac{GJ}{M_3} \right) \quad (14.105)$$

Les deux dernières équations permettent d'écrire :

$$\frac{d}{dx_1} \left( \frac{GJ}{M_3} \frac{d\omega_1}{dx_1} \right) + \frac{M_3}{EI_2} \omega_1 = 0, \quad M_3 > 0, \quad \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} > 0 \quad (14.106)$$

Il existe un chargement correspondant à un moment fléchissant qui provoque l'instabilité. On peut le calculer en fonction des conditions aux limites.

• **Exemple** Considérons la poutre de la figure 14.19 de longueur  $\ell$  uniformément chargée avec la densité  $p$ , encastrée dans une section A et libre à l'autre extrémité.

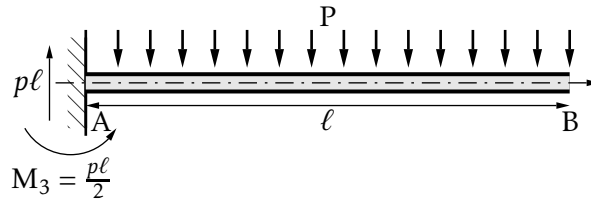


FIGURE 14.19 – Poutre encastrée soumise à son propre poids

Le moment de flexion vaut à l'abscisse  $x$  :

$$M_3 = \frac{1}{2}p(\ell - x)^2 \quad (14.107)$$

L'équation différentielle de déversement devient :

$$\frac{d^2\omega_1}{dx^2} + \frac{2x}{\ell - x} \frac{d\omega_1}{dx} + \frac{p^2(\ell - x)^4}{4GJ EI_2} \omega_1 = 0 \quad (14.108)$$

qui conduit à la densité de charge critique :

$$p_c = \frac{12,8\sqrt{EI_2 GJ}}{\ell^3} \quad (14.109)$$

Cette densité critique  $p_c$  est analogue à la charge critique d'EULER pour le flambement. Elle a la même signification dans la mesure où il s'agit du même paramètre pour l'équation de flambement et celle de déversement sans second membre. De la même façon, elle est caractéristique d'un problème théorique idéalisé. La poutre devenue effectivement instable provoquera la ruine de la structure à laquelle elle appartient quand il y aura formation d'une rotule plastique dans sa section la plus sollicitée. •

## 14.7 Torsion et traction/compression

On considère une poutre droite AB articulée à ses extrémités soumise à l'effort axial  $P$  et au couple axial  $C$ . ( $N = -P$  et  $T = C$  avec les notations habituelles). Sous l'action de ces sollicitations, la déformée de la poutre est une courbe gauche définie par  $x_2(x_1)$  et  $x_3(x_1)$ . Après déformation, dans les axes liés à la déformée, au moment de torsion s'ajoutent une composante de flexion due à  $P$  (ayant une expression analogue à celle du moment de flexion dans le flambement d'EULER) et une composante de flexion due à la décomposition du couple  $C$  :

- autour de  $\mathbf{e}_3$ , le moment de flexion est  $-Px_2 + C \frac{dx_3}{dx_1}$
- autour de  $\mathbf{e}_2$ , le moment de flexion est  $Px_3 + C \frac{dx_2}{dx_1}$

Il en résulte les équations différentielles de la déformée dans le cas où l'on a une section circulaire :

$$EI \frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -Px_2 + C \frac{dx_3}{dx_1} \quad EI \frac{d^2x_3}{dx_1^2} = -Px_3 - C \frac{dx_2}{dx_1} \quad (14.110)$$



dont on recherche la solution générale sous la forme :

$$\begin{aligned}x_2 &= A \cos(\alpha_1 x_1 + \beta_1) + B \cos(\alpha_2 x_1 + \beta_2) \\x_3 &= A \sin(\alpha_1 x_1 + \beta_1) + B \sin(\alpha_2 x_1 + \beta_2)\end{aligned}\tag{14.111}$$

Après identification, on constate que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont racines de :

$$EI\alpha^2 + C\alpha - P = 0\tag{14.112}$$

Les conditions aux limites sont  $x_2(0) = x_3(0) = 0$  et  $x_2(\ell) = x_3(\ell) = 0$ . Ce qui entraîne  $A = -B$  et  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $\sin(\alpha_1 \ell + \beta) - \sin(\alpha_2 \ell + \beta) = 0$ ,  $\cos(\alpha_1 \ell + \beta) - \cos(\alpha_2 \ell + \beta) = 0$  et  $\alpha_1 \ell - \alpha_2 \ell = \pm 2k\pi$  avec  $k > 0$  entier. La plus petite valeur de  $k$  satisfaisant cette équation est  $k = 1$  qui entraîne :

$$\frac{C^2}{4(EI)^2} + \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\tag{14.113}$$

Tout couple  $(C, P)$  vérifiant cette équation correspond à une instabilité de torsion compression ou torsion traction. On peut noter que si la compression diminue, le moment de torsion correspondant à l'instabilité augmente. On retrouve la forme d'EULER quand le moment de torsion est nul :

$$\frac{P_c}{EI} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \text{ ou } P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\tag{14.114}$$

Il existe un moment de torsion qui correspond à  $P = 0$  :

$$\frac{T_c^2}{4(EI)^2} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \rightarrow T_c = \frac{2\pi EI}{\ell}\tag{14.115}$$

On constate bien, expérimentalement, que la ligne moyenne d'une poutre droite en torsion prend, à partir d'une certaine valeur du moment de torsion, une déformée hélicoïdale.

## 14.8 Stabilité des arcs et anneaux

Soit l'anneau circulaire de la figure 14.20 soumis à une pression extérieure uniforme  $p$ . Examinons son équilibre pour diverses valeurs de  $p$ .

La mise en charge fait apparaître dans toutes les sections un torseur qui se réduit à un effort normal  $N_0$  tel que :

$$N_0 = -pR\tag{14.116}$$

Lorsque  $p$  atteint une certaine valeur dite valeur critique, la forme circulaire devient instable, l'anneau se déforme pour prendre une nouvelle figure d'équilibre approximativement elliptique. À cette nouvelle forme correspond un état de contraintes de flexion, d'effort normal et d'effort tranchant.

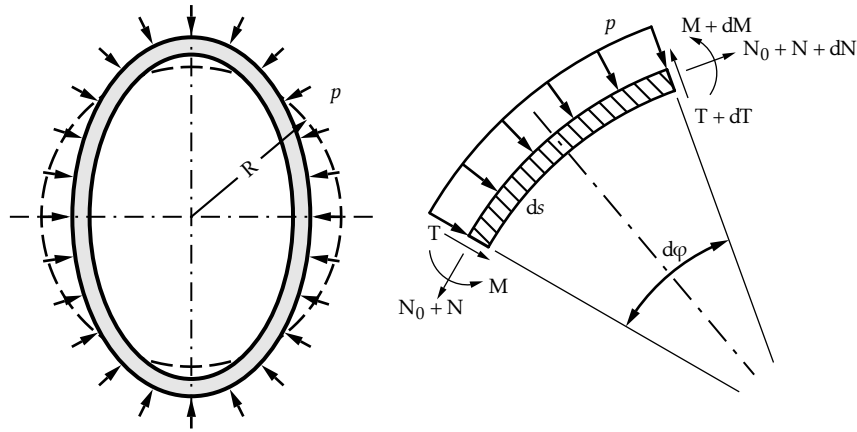


FIGURE 14.20 – anneau circulaire chargé uniformément

Afin d'écrire l'équilibre d'un élément courant, choisissons une convention de signe différente de la convention habituelle, qui aura pour avantage qu'à une contrainte de compression correspondra un effort normal et un rayon de courbure de la poutre positifs.

– sur la normale à l'élément :

$$-p ds + dV - (N_0 + N) \frac{ds}{R_e} = 0 \quad (14.117)$$

– sur la tangente à l'élément, on obtient :

$$\frac{V}{R_e} + \frac{dN}{ds} = 0 \quad (14.118)$$

L'équation de moment donne :

$$\frac{dM}{ds} + V = 0 \quad (14.119)$$

$R_e$  est le rayon de courbure local de l'élément soumis à la flexion  $M$ , à l'effort normal  $N$  et à l'effort tranchant  $V$ . En remplaçant  $N_0$  par sa valeur et en divisant l'équation (14.117) par  $R ds$ , il vient :

$$-p \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_e} \right) + \frac{1}{R} \frac{dV}{ds} - \frac{N}{R_e R} = 0 \quad (14.120)$$

La variation de courbure locale s'écrit

$$\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R} = C \quad (14.121)$$

$R_e$  et  $R$  sont voisins donc  $R_e R \approx R^2$  et l'équation différentielle (14.120) devient :

$$pC + \frac{1}{R} \frac{dV}{ds} - \frac{N}{R^2} = 0 \quad (14.122)$$

Entre les trois équations d'équilibre, on élimine facilement  $N$  et  $V$  :

$$-p \frac{dC}{ds} + \frac{1}{R} \frac{d^3 M}{ds^3} + \frac{1}{R^3} \frac{dM}{ds} = 0 \quad (14.123)$$

Cette équation s'intègre :

$$-pC + \frac{1}{R} \frac{d^2M}{ds^2} + \frac{1}{R^3}M = -C \quad (14.124)$$

On sait que pour des petites déformations, la théorie des poutres longues se généralise aux poutres peu courbes sous la forme :

$$M_3 = EI_3 v'' \quad (14.125)$$

pour une poutre sans courbure initiale. En faisant apparaître la variation de courbure, cette formule devient :

$$M_3 = EI_3 \left[ -\left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) \right] = -EI_3 C \quad (14.126)$$

Soit pour l'équation différentielle de la déformée :

$$\frac{d^2C}{ds^2} + k^2 C = C \frac{R}{EI_3} \quad (14.127)$$

Nous retrouvons l'équation classique de flambement avec :

$$k^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{pR}{EI_3} \quad (14.128)$$

Il vient par intégration :

$$C = \frac{R}{k^2 EI_3} + D \sin ks + E \cos ks \quad (14.129)$$

L'anneau étant fermé, quand  $s$  varie de  $2\pi R$  on doit retrouver la même flèche :

$$k(s + 2\pi R) - ks = 2\pi n \quad (14.130)$$

entraîne  $kR = n$ . Puisque nous avons posé :

$$k^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{pR}{EI_3} \rightarrow \frac{n^2}{R^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{pR}{EI_3} \rightarrow p = \frac{(n^2 - 1)EI_3}{R^3} \quad (14.131)$$

la plus petite solution physiquement admissible correspond à  $n = 2$  :

$$p_c = \frac{3EI_3}{R^3} \quad (14.132)$$

On vérifie facilement que la déformée obtenue correspond bien à la figure 14.20.

Il est possible d'obtenir la charge critique correspondant à d'autres constructions, par exemple à un arc soumis à diverses liaisons. Il suffit de changer les conditions aux limites.



# Problème de Saint-Venant

Le problème de Saint-Venant a été présenté dans le chapitre « Introduction à la théorie des poutres ». Nous envisageons une poutre droite, de section cylindrique pleine (simplement connexe), d'axe  $(O, \mathbf{e}_1)$ , occupant un volume  $D$ , soumise uniquement à deux couples égaux et opposés sur ses sections droites d'extrémité  $S_0$  et  $S_1$ .

## A.1 Méthode des déplacements

### A.1.1 champ des déplacements - Champ des déformations

Soit  $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3)$  le vecteur déplacement au point  $P(x_2, x_3)$  de la section d'abscisse  $x_1$ . L'origine des coordonnées dans la section est choisie au point  $G$  centre de surface de la section, tous les centres de surface étant sur  $(O, \mathbf{e}_1)$ . Désignons par  $\varphi(x_2, x_3)$  la fonction permettant de prendre en compte le gauchissement de la section sous l'effet des glissements. Ce dernier correspond à un déplacement suivant l'axe  $(O, \mathbf{e}_1)$  proportionnel à la rotation par unité de longueur :

$$\mathbf{U}(P) = \alpha \varphi(x_2, x_3) \mathbf{e}_1 + \alpha x_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{CP} \quad (\text{A.1})$$

Remarquons que le second terme a la forme d'un déplacement de *solide rigide* dû à la rotation de la section autour d'un point  $C$  appelé centre de torsion. Nous en déduisons les coordonnées du vecteur déplacement et la matrice du gradient des déplacements :

$$\mathbf{U}(P) = \begin{pmatrix} \alpha \varphi(x_2, x_3) \\ -\alpha x_1 x_3 \\ \alpha x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{grad} \mathbf{U} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 \varphi & \partial_3 \varphi \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La décomposition en partie symétrique et antisymétrique nous donne :

$$\mathbf{grad} \mathbf{U} = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 \varphi - x_3 & \partial_3 \varphi + x_2 \\ \partial_2 \varphi - x_3 & 0 & 0 \\ \partial_3 \varphi + x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 & \partial_2 \varphi + x_3 & \partial_3 \varphi - x_2 \\ -\partial_2 \varphi - x_3 & 0 & -x_1 \\ -\partial_3 \varphi + x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur rotation d'ensemble au point P est donc :

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \partial_3 \varphi - x_2 \\ -\partial_2 \varphi - x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{d\Omega_1}{dx_1} \quad (\text{A.4})$$

Nous remarquons que  $\mathbf{div} \mathbf{U} = 0$ . L'équation de Lamé-Navier se réduit à  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{U}) = \mathbf{0}$ , soit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (\text{A.5})$$

La fonction de gauchissement  $\varphi(x_2, x_3)$  est une fonction harmonique. Les déformations sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 = 0 & \quad \varepsilon_{23} = (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2)/2 = 0 \\ \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = 0 & \quad \varepsilon_{12} = (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)/2 = \alpha/2(\partial_2 \varphi - x_3) \\ \varepsilon_{33} = \partial_3 u_3 = 0 & \quad \varepsilon_{13} = (\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) = \alpha/2(\partial_3 \varphi + x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La matrice des petites déformations dans la base  $\mathbf{e}$  est une matrice de glissement pur.

### A.1.2 Contraintes

La loi de comportement élastique linéaire fournissant les relations entre contraintes et déformations entraîne :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{12} = G\alpha(\partial_2 \varphi - x_3) \\ \sigma_{13} = G\alpha(\partial_3 \varphi + x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Les équations de Lamé-Navier traduisent les conditions d'équilibre local en déplacements. Remarquons qu'en contraintes, elles se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{or} \quad \forall P \in D, \quad \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = (0 \ \sigma_{12} \ \sigma_{13})^t \quad (\text{A.8})$$

et par conséquent, l'équation d'équilibre est équivalente à  $\mathbf{div} \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = 0$ .

### A.1.3 Torseur des contraintes intégrées

Le torseur résultant des contraintes, réduit en G, sur la section de normale extérieure  $\mathbf{e}_1$  a pour composantes sur la base  $\mathbf{e}$  :

$$N = 0; \quad M_2 = 0; \quad M_3 = 0 \quad (\text{A.9})$$

et, compte tenu de l'origine en G :

$$V_2 = \int_S \sigma_{12} dS = G\alpha \int_S (\partial_2 \varphi - x_3) dS = G\alpha \int_S \partial_2 \varphi dS \quad (\text{A.10})$$

De plus :

$$V_3 = \int_S \sigma_{13} dS = G\alpha \int_S (\partial_3 \varphi + x_2) dS = G\alpha \int_S \partial_3 \varphi dS \quad (\text{A.11})$$

et ce, pour la même raison. Effectuons le calcul du moment de torsion T. Par définition sur la section courante S, il est donné par :

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{e}_1 \cdot \int_S \mathbf{GP} \wedge \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) dS = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS \\ &= G\alpha \left( \int_S (x_2^2 + x_3^2) dS - \int_S (x_3 \partial_2 \varphi - x_2 \partial_3 \varphi) dS \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Le moment quadratique polaire de la section à l'origine des coordonnées G s'écrit :

$$\int_S (x_2^2 + x_3^2) dS = I_O \quad (\text{A.13})$$

Posons :

$$J = I_O - \int_S (x_3 \partial_2 \varphi - x_2 \partial_3 \varphi) dS \quad (\text{A.14})$$

L'expression du moment de torsion dans une section devient :

$$T = GJ\alpha \quad (\text{A.15})$$

Le coefficient J est par définition le moment d'inertie de torsion de la section droite en G; c'est une quantité homogène à une longueur à la puissance quatre. GJ est la rigidité de torsion :

$$J = I_O - \mathbf{e}_1 \cdot \int_S \mathbf{grad} \varphi \wedge \mathbf{CP} dS \quad (\text{A.16})$$

#### A.1.4 Conditions aux limites

##### Sur la surface latérale

Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}, \mathbf{t})$ , la base orthonormée directe, définie en un point Q de la surface latérale, le vecteur étant dirigé vers l'extérieure du contour. La condition aux limites de bord libre s'écrit  $\mathbf{T}(Q, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$  qui se traduit par :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

il reste  $\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0$  ou encore, compte tenu de l'expression des contraintes :

$$(\partial_2 \varphi - x_3)n_2 + (\partial_3 \varphi + x_2)n_3 = 0 \quad (\text{A.18})$$

qui se traduit vectoriellement par :

$$\mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{GQ} \wedge \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{GQ} \cdot \mathbf{t} \quad (\text{A.19})$$

La résolution du problème de torsion se réduit donc à la connaissance de la fonction  $\varphi(x_2, x_3)$ , solution du problème de NEUMAN :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{sur } S \\ \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{GQ} \cdot \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial S \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dn} = \mathbf{GQ} \cdot \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial S \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Le problème est cohérent puisque :

$$\int_{\partial S} \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \Delta\varphi dS = 0 \quad (\text{A.21})$$

### Sur les sections d'extrémité

Raisonnons sur la section  $S_1$  de normale extérieure  $\mathbf{e}_1$ . D'après la remarque en A.1.2 :

$$\mathbf{div}(x_2 \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1)) = x_2 \mathbf{div} \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) + \mathbf{grad} x_2 \cdot \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = \sigma_{12} \quad (\text{A.22})$$

La condition limite de bord libre sur le contour de la section  $S_1$  est en tout point  $Q$  de ce contour  $\mathbf{T}(Q, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ . La réciprocité des cisaillement donne  $\mathbf{T}(Q, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Nous pouvons écrire, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_S \sigma_{12} dS = \int_S \mathbf{div}(x_2 \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1)) dS = \oint_{\partial S} x_2 \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{A.23})$$

La condition de bord libre entraîne, respectivement dans les directions  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  :

$$V_2 = \int_S \sigma_{12} dS = 0 \quad \text{et} \quad V_3 = \int_S \sigma_{13} dS = 0 \quad (\text{A.24})$$

Le couple extérieur agissant sur la section  $S_1$  étant  $(\mathbf{0}, C\mathbf{e}_1)$ , nous déduisons de (A.15) :

$$T = GJ\alpha = C \quad (\text{A.25})$$

### A.1.5 Autre expression de J

Quelques manipulations vectorielles, en notant par commodité le gradient à l'aide du vecteur Nabla  $\nabla$ , conduisent à :

$$\nabla \wedge (\varphi \mathbf{GP}) = \varphi \nabla \wedge \mathbf{GP} + \nabla\varphi \wedge \mathbf{GP} \quad (\text{A.26})$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \int_S \nabla\varphi \wedge \mathbf{GP} dS &= \mathbf{e}_1 \cdot \int_S \nabla \wedge (\varphi \mathbf{GP}) dS = \int_S (\mathbf{e}_1, \nabla, \varphi \mathbf{GP}) dS \\ &= \int_S \nabla \cdot (\varphi \mathbf{GP} \wedge \mathbf{e}_1) dS \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Le théorème de la divergence permet alors d'écrire :

$$\int_S \nabla \cdot (\varphi \mathbf{GP} \wedge \mathbf{e}_1) dS = \int_{\partial S} (\varphi \mathbf{GP} \wedge \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial S} \varphi \mathbf{GP} \cdot \mathbf{t} ds \quad (\text{A.28})$$

d'après les conditions aux limites sur la fonction :

$$\int_{\partial S} \varphi \mathbf{GP} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\partial S} \varphi \frac{d\varphi}{dn} \, ds = \int_{\partial S} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_S \mathbf{div}(\varphi \nabla \varphi) \, dS \quad (\text{A.29})$$

or :

$$\mathbf{div}(\varphi \nabla \varphi) = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \varphi \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0 \quad (\text{A.30})$$

d'où :

$$\int_S \mathbf{div}(\varphi \nabla \varphi) \, dS = \int_S (\nabla \varphi)^2 \, dS \quad \text{et} \quad J = I_O - \int_S (\mathbf{grad} \varphi)^2 \, dS \quad (\text{A.31})$$

L'intégrale étant toujours positive ou nulle, il en résulte :

$$J \leq I_O \quad (\text{A.32})$$

### A.1.6 Énergie de déformation en torsion

D'après son expression générale pour un élément de volume  $dV$ , dans le cas de la torsion, elle s'écrit :

$$W = \int_D (\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13}) \, dV = \frac{G}{2} \int_D ((\partial_2 \varphi - x_3)^2 + (\partial_3 \varphi + x_2)^2) \alpha^2 \, dV \quad (\text{A.33})$$

Les intégrales sont étendues à tout le volume de la poutre. D'après l'expression du moment en fonction de  $J$  :

$$W = \frac{G}{2} \int_D ((\partial_2 \varphi - x_3)^2 + (\partial_3 \varphi + x_2)^2) \frac{T^2}{(GJ)^2} \, dS \, dx_1 \quad (\text{A.34})$$

L'intégrale de surface sur  $S$  peut s'écrire :

$$\int_S ((\partial_2 \varphi - x_3)^2 + (\partial_3 \varphi + x_2)^2) \, dS = I_O + \int_S (\mathbf{grad}^2 \varphi - 2(x_3 \partial_2 \varphi - x_2 \partial_3 \varphi)) \, dS \quad (\text{A.35})$$

soit, compte tenu des expressions de  $J$  :

$$\int_S ((\partial_2 \varphi - x_3)^2 + (\partial_3 \varphi + x_2)^2) \, dS = I_O + I_O - J + 2J - 2I_O = J \quad (\text{A.36})$$

et :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{GJ} \, dx_1 \quad (\text{A.37})$$

## A.2 Méthode des contraintes

### A.2.1 Équations d'équilibre local

Nous partons de l'hypothèse d'un état de contrainte anti-plan dans la base ( $\mathbf{e}$ ), exempt de contrainte normale. Il est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$



avec  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3)$  et  $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3)$ . Écrivons les équations d'équilibre local :

$$\partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} = 0; \quad \partial_1 \sigma_{12} = 0; \quad \partial_1 \sigma_{13} = 0 \quad (\text{A.39})$$

Les contraintes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  sont donc des fonctions de  $x_2$  et  $x_3$  seulement. Il existe donc une fonction  $\psi(x_2, x_3)$  telle que  $\sigma_{12} = \partial_3 \psi$  et  $\sigma_{13} = -\partial_2 \psi$ . Remarquons que  $\forall P \in D$ ,  $\mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1)_e = (0 \ \sigma_{12} \ \sigma_{13})^T$ . L'équation d'équilibre est donc équivalente à :

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(P, \mathbf{e}_1) = 0 \quad (\text{A.40})$$

### A.2.2 Équations de Beltrami

Les équations de compatibilité écrites en terme de contraintes détaillées au chapitre 6 se réduisent à  $\Delta \sigma_{12} = 0$ ,  $\Delta \sigma_{13} = 0$  et  $\partial_3 \Delta \psi = 0$  et  $\partial_2 \Delta \psi = 0 \Leftrightarrow \Delta \psi = K$ .

### A.2.3 Conditions aux limites

#### Sur la surface latérale

La condition aux limites de bord libre s'écrit  $\mathbf{T}(\mathbf{Q}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ . Elle se traduit par  $\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$  ou encore, compte tenu des contraintes  $\frac{\partial \psi}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_3 = 0$  ou vectoriellement  $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{grad} \psi \wedge \mathbf{n}) = 0$  soit  $\mathbf{grad} \psi \cdot \mathbf{t} = 0$  donc, en désignant par  $s$  l'abscisse curviligne sur le contour  $\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$  sur le contour. La fonction est constante le long du contour de la section. Le problème se réduit donc à un problème de Dirichlet de fonction inconnue  $\psi$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= K & \text{sur } S \\ \psi &= \psi_0 & \text{sur } \partial S \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

#### Sur les sections d'extrémité

Sur chaque section d'extrémité, le torseur des contraintes doit se réduire à un couple et donc sa résultante doit être nulle. Raisonnons sur la section  $S_1$  de normale extérieure  $\mathbf{e}_1$  :

$$\mathbf{R} = N \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.42})$$

L'effort normal  $N$  est identiquement nul. Les deux efforts tranchants sont :

$$V_2 = \int_S \sigma_{12} dS = \int_S \partial_2 \psi dS = \oint_{\partial S} \psi(x_2(x_3), x_3) dx_3 \quad (\text{A.43})$$

$$V_3 = \int_S \sigma_{13} dS = - \int_S \partial_3 \psi dS = - \oint_{\partial S} \psi(x_2, x_3(x_2)) dx_2 \quad (\text{A.44})$$

La fonction est constante sur le contour, donc les deux intégrales sont nulles dans toute section et en particulier sur les sections d'extrémité, ce qui est en accord avec

les conditions aux limites. Le moment de torsion est donné par :

$$T = \int_S (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS = - \int_S (x_3 \partial_3 \psi + x_2 \partial_2 \psi) dS \quad (\text{A.45})$$

$$T = - \int_S \mathbf{GP} \cdot \mathbf{grad} \psi dS \quad (\text{A.46})$$

or :

$$\nabla \cdot \psi \mathbf{GP} = \psi \vec{\nabla} \cdot \mathbf{GP} + \nabla \psi \cdot \mathbf{GP} = 2\psi + \nabla \psi \cdot \mathbf{GP} \quad (\text{A.47})$$

donc :

$$T = 2 \int_S \psi dS - \int_S \nabla \cdot \psi \mathbf{GP} dS \quad (\text{A.48})$$

En utilisant alors le théorème de la divergence, la fonction étant constante sur le contour :

$$T = 2 \int_S \psi dS - \psi \int_{\partial S} \mathbf{GP} \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{A.49})$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{GP} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial S} (x_2 n_2 + x_3 n_3) ds = \int_{\partial S} x_2 dx_3 - x_3 dx_2 = 2A \quad (\text{A.50})$$

où A est l'aire enfermée par le contour, c'est-à-dire, pour une section pleine, l'aire de la section. Par conséquent :

$$T = 2 \int_S \psi dS - 2\psi_0 A \quad (\text{A.51})$$

Pour une section multiplement connexe, la formule devient :

$$T = 2 \int_S \psi dS - 2\psi_0 A + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i A_i \quad (\text{A.52})$$

$i$  et  $A_i$  sont respectivement la valeur constante de sur le contour n° $i$  et l'aire enfermée par le contour  $i$ . Au contour extérieur correspond l'indice 0. D'après la formule intégrale de Riemann :

$$\int_S \Delta \psi dS = \oint_{\partial S} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} ds = KA \quad (\text{A.53})$$

D'autre part :

$$\nabla \cdot \psi \nabla \psi = \nabla \psi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \nabla \psi \quad (\text{A.54})$$

et alors, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_S (\nabla \psi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \nabla \psi) dS = \int_S \nabla \cdot \psi \nabla \psi dS = \int_{\partial S} \psi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{A.55})$$

La fonction prenant la valeur constante  $\psi_0$  sur le contour :

$$\int_S (\nabla \psi)^2 dS + \int_S \psi \Delta \psi dS = KA \psi_0 \Rightarrow \int_S (\nabla \psi)^2 dS = KA \psi_0 - K \int_S \psi dS \quad (\text{A.56})$$

D'après l'expression du moment, nous en déduisons :

$$\int_S (\nabla \psi)^2 dS = KA \psi_0 - K \left( \frac{T}{2} + A \psi_0 \right) \Leftrightarrow T = -\frac{2}{K} \int_S (\nabla \psi)^2 dS \quad (\text{A.57})$$

Notons que, la fonction étant définie à une constante près, il est toujours possible de s'arranger pour choisir  $\psi_0 = 0$ .

### A.3 Comparaison des deux méthodes

La comparaison des expressions des contraintes montre que :

$$\partial_3 \psi = G\alpha(\partial_2 \varphi - x_3) - \partial_2 \psi = G\alpha(\partial_3 \varphi + x_2) \quad (\text{A.58})$$

l'expression du moment de torsion (A.15) devient, compte tenu des relations entre les fonctions :

$$TG\alpha = \int ((\partial_2 \psi)^2 + (\partial_3 \psi)^2) dS = \int_{(S)} (\mathbf{grad} \psi)^2 dS \quad (\text{A.59})$$

$$(G\alpha)^2 J = \int_{(S)} (\mathbf{grad} \psi)^2 dS \quad (\text{A.60})$$

$$J = I_O - \int_S (\mathbf{grad} \varphi)^2 dS \quad (\text{A.61})$$

$$K = -2G\alpha \quad (\text{A.62})$$

$$\int_S (\mathbf{grad} \varphi)^2 dS + \frac{4}{K^2} \int_{(S)} (\mathbf{grad} \psi)^2 dS = I_O \quad (\text{A.63})$$