



# Développement et évaluation d'approches de modélisation numérique couplées 1D et 3D du contact rotor-stator

Mikhael Tannous

► **To cite this version:**

Mikhael Tannous. Développement et évaluation d'approches de modélisation numérique couplées 1D et 3D du contact rotor-stator. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN) (ECN) (ECN) (ECN), 2013. Français. <tel-00943210>

**HAL Id: tel-00943210**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00943210>**

Submitted on 7 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Mikhael TANNOUS**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Ecole Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale** : Sciences pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

**Discipline** : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

**Unité de recherche** : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

**Soutenue le 21 Novembre 2013**

## Développement et évaluation d'approches de modélisation numérique couplées 1D et 3D du contact rotor-stator

### JURY

Président :	<b>Fabrice THOUVEREZ</b> , Professeur des universités, Ecole Centrale de Lyon
Rapporteurs :	<b>Pierre-Alain BOUCARD</b> , Professeur des universités, ENS Cachan <b>Gérard RIO</b> , Professeur des universités, Université de Bretagne Sud - Lorient
Examineurs :	<b>Thouraya BARABGER</b> , Docteur, Université Lyon 1 <b>Mohamed TORKHANI</b> , Ingénieur de recherche, EDF R&D Clamart
Directeur de Thèse :	<b>Patrice CARTRAUD</b> , Professeur des universités, Ecole Centrale de Nantes
Co-directeur de Thèse :	<b>David DUREISSEIX</b> , Professeur des universités, INSA de Lyon

# Thèse de Doctorat

Mikhael TANNOUS

**Titre de thèse : Développement et évaluation d'approches de modélisation numérique couplées 1D et 3D du contact rotor-stator**

**Title of thesis : Development and evaluation of coupled 1D and 3D numerical approaches for rotor-stator contact modeling**

## Résumé

Les problèmes de machines tournantes présentant un contact rotor-stator sont généralement traités dans la littérature à partir de modèles localement 1D. Ceci conduit à un temps de simulation acceptable, mais les approximations correspondantes sont difficiles à évaluer. Or le contact est limité en espace et en temps, il peut donc en être de même pour l'utilisation d'une modélisation 3D. Une stratégie, nommée bascule, permettant d'utiliser un modèle poutre et un autre 3D (ou un modèle mixte poutre-3D), pendant deux phases différentes de la même simulation, est donc développée. Elle est mise en oeuvre de façon non-intrusive, en dynamique transitoire, pour des systèmes présentant ou non une rotation d'ensemble, avec une résolution par intégration temporelle implicite. La bascule est validée par comparaison avec une solution 3D de référence obtenue en effectuant la simulation entière sur le modèle 3D. On analyse ensuite, sur des problèmes de contact rotor-stator, les résultats des modèles 1D et 3D, dans différentes situations de contact plus ou moins sévères. Les vibrations du rotor sont dues à un balourd et sa vitesse de rotation est imposée constante. Il apparaît que les écarts entre les résultats des modèles 1D et 3D sont peu visibles sur les orbites du rotor. En revanche les limitations du modèle 1D sont mises en évidence. En effet, l'hypothèse de section rigide du rotor entraîne des approximations dans la distribution spatiale et l'intensité des efforts de contact. La modélisation 3D en revanche permet de représenter certains effets locaux au voisinage de la zone de contact.

## Mots clés

**Bascule, dynamique transitoire, dynamique des rotors, contact rotor-stator, éléments finis.**

## Abstract

Rotor dynamic problems with rotor to stator contact interactions are dealt with in the literature by 1D local models. This leads to an affordable simulation time, but the corresponding approximations are difficult to assess. Since the contact is limited in space and time, the same strategy can therefore be used with 3D models. A strategy, called switch, allowing the use of a beam model and a 3D model (or beam-3D mixed model), at two different stages of the same simulation, is developed. It is implemented in a non-intrusive way for the simulation of transient dynamic problems, with or without an overall rotation, solved by an implicit time integration scheme. The switch is validated by comparison with a 3D reference solution obtained by performing the full simulation on the 3D model. We, then, compare and analyze the results of 1D and 3D rotor-stator contact problems, for different contact conditions more and less severe. The rotor vibrations are due to rotating imbalance at a given constant rotating speed. It appears that the differences between the 1D and the 3D results are not obvious on the rotor orbits. However, the limitations of the 1D simulation are highlighted. Indeed, the rigid body section assumption in a beam model of the rotor leads to approximations in the spatial distribution of the contact forces and their intensity. The 3D model, however, can present some local effects in the vicinity of the contact zone.

## Key Words

**Switch, transient dynamics, rotor dynamics, rotor-stator contact, finite elements.**



# Remerciements

Le travail scientifique que je présente dans ce manuscrit n'aurait pas vu le jour si je n'étais pas tout d'abord humainement entouré, et bien sûr soutenu scientifiquement.

J'ai eu la chance d'avoir eu Patrice Cartraud comme directeur de thèse. Je le remercie d'avoir cru à mes compétences et m'avoir accordé la chance d'effectuer cette thèse, alors que je suis entré dans le monde de la recherche de la porte de la robotique, et mon profil ne correspondait pas au sujet de la thèse. Le travail avec Patrice était un plaisir, tout d'abord vu son attitude très humaine, accueillante et modeste, mais également ses compétences scientifiques.

Je tiens à remercier mon co-directeur de thèse, David Dureisseix, pour ses qualités humaines et ses compétences scientifiques qui ont donné du plaisir à un travail scientifiquement assez complexe, notamment le §2.11. Je te remercie David ainsi que Thouraya Baranger pour votre accueil au sein de l'INSA de Lyon.

Mes remerciements à Mohamed Torkhani pour son accueil au sein d'EDF R&D, pour son soutien technique et sa réactivité rapide au niveau de toutes les questions liées au Code\_Aster. Merci pour tes encouragements qui m'ont motivé à contourner les nombreuses difficultés et m'ont aidé à repousser les limites du Code\_Aster pour atteindre les objectifs de la thèse.

Je remercie l'Agence Nationale de la Recherche qui a financé cette thèse dans le cadre du projet IRINA (sImulation et maîtrise des rIsques en coNception des mA-chines tournantes) piloté par Fabrice Thouverez, que j'ai eu l'honneur qu'il soit le président de mon jury. Le projet IRINA était un cadre de travail et d'échange qui a contribué à l'avancée de mes travaux de thèse.

Finalement, j'accorde le plus grand merci à mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours scientifique et professionnel. Leurs encouragements, supports et sacrifices m'ont permis d'aller au bout de rêves. Merci pour vous et pour toi aussi mon frère.



# Table des matières

<b>Liste des Figures</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2. Bascule entre différents modèles</b>	<b>7</b>
2.1. Introduction . . . . .	8
2.2. Principe de la bascule . . . . .	13
2.2.1. Construction de $\mathbf{PU}_p$ . . . . .	14
2.2.2. Calcul de $\mathbf{U}_{3Dc}$ . . . . .	15
2.3. Schémas en temps . . . . .	16
2.3.1. Les méthodes implicites . . . . .	16
2.3.2. Utilisation dans le cadre non linéaire . . . . .	22
2.3.3. Conclusion . . . . .	25
2.4. Les méthodes explicites . . . . .	25
2.4.1. Méthode des différences finies centrées . . . . .	26
2.4.2. Algorithme $\alpha$ -généralisé Explicite . . . . .	27
2.5. Problématique de l'initialisation de la solution 3D et régime transitoire	28
2.5.1. Stabilisation par amortissement numérique . . . . .	30
2.5.2. Bascule à trois pas de temps . . . . .	30
2.5.3. La bascule appliquée sur des problèmes statiques . . . . .	31
2.5.4. Principe de la bascule à trois pas de temps . . . . .	32
2.6. Orthogonalité des vecteurs $\mathbf{PU}_p$ et $\mathbf{U}_{3Dc}$ . . . . .	33
2.6.1. Conditions et significations théoriques . . . . .	33
2.6.2. Non vérification de la condition d'orthogonalité . . . . .	35
2.7. Consistance énergétique de la bascule . . . . .	36
2.8. Exemple d'application . . . . .	38
2.9. Raccord poutre-3D . . . . .	42
2.9.1. Équilibre Cinématique . . . . .	48
2.9.2. Équilibre statique . . . . .	49
2.10. Bascule d'un modèle poutre à un modèle poutre-3D mixte . . . . .	50
2.11. Généralisation de la bascule en dynamique des rotors . . . . .	61
2.11.1. Principe de la décomposition . . . . .	62
2.11.2. Unicité de la décomposition selon le schéma en temps . . . . .	66
2.11.3. Prise en compte d'approximations pour les matrices de masse	73
2.12. Application en dynamique des machines tournantes . . . . .	77
2.12.1. Quelques difficultés . . . . .	77
2.12.2. Dynamique des rotors en présence d'un balourd . . . . .	79

2.12.3. Principe de la bascule . . . . .	82
2.12.4. Exemple d'application . . . . .	83
2.12.5. Conclusion . . . . .	108
2.13. Conclusions . . . . .	108
<b>3. Modélisation du contact rotor-stator</b>	<b>113</b>
3.1. État de l'art sur le contact rotor-stator . . . . .	115
3.1.1. Le contact aube-carter . . . . .	116
3.1.2. Effets physiques du contact rotor-stator . . . . .	117
3.1.3. Besoins de modélisation, approches existantes et conclusion . . . . .	120
3.2. Algorithmes de traitement du contact . . . . .	121
3.2.1. Le contact frottant : problème fortement non linéaire . . . . .	121
3.2.2. Appariement géométrique . . . . .	122
3.2.3. Le contact : un problème d'optimisation . . . . .	124
3.2.4. Résolution . . . . .	127
3.2.5. La loi de choc . . . . .	130
3.3. Le contact rotor-stator sur le Code_Aster . . . . .	132
3.3.1. En modélisation poutre . . . . .	133
3.3.2. En modélisation 3D . . . . .	133
3.4. Contrôle de la cohérence des modèles poutre et 3D . . . . .	138
3.4.1. Au niveau de la modélisation du rotor . . . . .	140
3.4.2. Au niveau de la modélisation du stator . . . . .	147
3.4.3. Au niveau du traitement du contact . . . . .	155
3.4.4. Critères de comparaison . . . . .	155
3.5. Exemples d'applications . . . . .	156
3.5.1. Contact d'un rotor contre un stator encasté . . . . .	157
3.5.2. Contact d'un rotor contre un stator suspendu . . . . .	164
3.5.3. Contact d'un rotor contre un stator suspendu à vitesse critique . . . . .	180
3.6. Conclusions . . . . .	188
3.6.1. Sur les performances des calculs . . . . .	188
3.6.2. Apport d'une modélisation 3D sur le contact rotor-stator . . . . .	189
3.6.3. Cas industriels : choix entre les modélisations 1D et 3D . . . . .	190
<b>4. Conclusions générales</b>	<b>193</b>
<b>Annexes</b>	<b>197</b>
<b>A. Choix du schéma en temps pour un problème de contact rotor-stator</b>	<b>199</b>
<b>B. Approche ingénieur pour le contact rotor-stator</b>	<b>201</b>
B.1. Approche ingénieur . . . . .	201
B.2. Travail réalisé . . . . .	201
B.3. Conclusion . . . . .	203
<b>C. Contrôle de la cohérence des modèles poutre et 3D du stator</b>	<b>205</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>



# Table des figures

1.1. Schématisation d'un parc nucléaire et d'un GTA . . . . .	1
1.2. Un GTA dans la salle des machines du parc nucléaire . . . . .	2
1.3. Turbine EDF d'un parc nucléaire Roques et al. [1] . . . . .	2
1.4. Banc d'essai EuRope . . . . .	3
1.5. Décomposition de domaines en espace et en temps . . . . .	4
2.1. Bascule poutre-3D . . . . .	13
2.2. Concept théorique de l'orthogonalité . . . . .	34
2.3. Orthogonalité non vérifiée . . . . .	35
2.4. Système masse-ressort . . . . .	37
2.5. Allure du chargement dynamique $\mathbf{f}(t) = 100 \times t^3 \times e^{-1.1t}$ . . . . .	39
2.6. Le modèle 3D étudié . . . . .	40
2.7. Bascule poutre-3D : résultats en déplacements . . . . .	41
2.8. Bascule poutre-3D : résultats en vitesses . . . . .	43
2.9. Bascule poutre-3D : résultats en accélérations . . . . .	44
2.10. Énergie de déformation . . . . .	45
2.11. Énergie cinétique . . . . .	46
2.12. Somme des énergies de déformation et cinétique . . . . .	47
2.13. Zoom sur l'instant de bascule (courbe de l'énergie cinétique) . . . . .	47
2.14. Modèle mixte poutre-3D . . . . .	48
2.15. Concept de connexion poutre-3D . . . . .	48
2.16. Le modèle poutre, celui mixte poutre-3D et le modèle 3D de référence . . . . .	51
2.17. Résultats en déplacements . . . . .	52
2.18. Résultats en vitesses . . . . .	53
2.19. Résultats en accélérations . . . . .	54
2.20. Comparaison des flèches du modèle poutre et celui poutre-3D mixte . . . . .	55
2.21. Somme des énergies cinétique et de déformation . . . . .	56
2.22. Analyse de l'énergie cinétique . . . . .	57
2.23. Zoom sur l'énergie cinétique à $t_b$ . . . . .	57
2.24. Résultats en déplacements pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	58
2.25. Résultats en vitesses pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	59
2.26. Résultats en accélérations pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	60
2.27. L'énergie cinétique pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	61
2.28. L'énergie de déformation pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	62
2.29. La somme des énergies de déformation et cinétiques pour $t_b = 1.75$ (s) . . . . .	63
2.30. Changement de repères . . . . .	63
2.31. Construction de la solution 3D à $t = 0.322$ (s) . . . . .	71
2.32. Évolution de la vitesse de rotation au cours du temps . . . . .	72
2.33. Modèle simplifié d'un rotor avec disque . . . . .	80

2.34. Modélisation poutre du rotor . . . . .	80
2.35. Le rotor sous étude . . . . .	84
2.36. Influence du pas de temps en cas de balourd brusque . . . . .	85
2.37. Lois d'imposition du balourd . . . . .	86
2.38. Résultats en déplacements selon $x$ de $P_N$ (repère tournant) . . . . .	88
2.39. Résultats en déplacements selon $x$ de $P_N$ . . . . .	89
2.40. Résultats en vitesses et accélérations selon $x$ de $P_M$ (repère tournant) . . . . .	90
2.41. Résultats en vitesses selon $x$ en $P_N$ (repère fixe) . . . . .	91
2.42. Résultats en accélérations selon $x$ de $P_N$ (repère fixe) . . . . .	91
2.43. Énergie cinétique pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	93
2.44. Énergie de déformation pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	93
2.45. L'énergie totale pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	94
2.46. Résultats en déplacements pour $\omega = 1500 \text{ tr/min}$ (repère tournant) . . . . .	96
2.47. Résultats en déplacements dans le repère galiléen . . . . .	97
2.48. Résultats en vitesses et accélérations (repère tournant) . . . . .	98
2.49. Énergie cinétique pour $\omega = 1500 \text{ tr/min}$ . . . . .	99
2.50. Énergie de déformation pour $\omega = 1500 \text{ tr/min}$ . . . . .	99
2.51. Énergie totale pour $\omega = 1500 \text{ tr/min}$ . . . . .	100
2.52. Résultats en déplacements (repère tournant) . . . . .	100
2.53. Résultats en déplacements (repère galiléen) . . . . .	101
2.54. Résultats en vitesses . . . . .	102
2.55. Résultats en accélérations (repère tournant) . . . . .	103
2.56. Énergie cinétique pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	104
2.57. Énergie de déformation pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	105
2.58. Énergie totale pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	105
2.59. Comparaison des comportements poutre et $3D$ . . . . .	106
2.60. Résultats en déplacements . . . . .	107
2.61. Résultats en vitesses et accélérations . . . . .	109
2.62. Énergie cinétique pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	110
2.63. Énergie de déformation pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	110
2.64. Énergie totale pour $\omega = 300 \text{ tr/min}$ . . . . .	111
3.1. Diaphragme d'un stator du parc nucléaire . . . . .	114
3.2. Modélisation poutre du diaphragme selon Roques [2] . . . . .	115
3.3. Turbine d'un moteur d'avion . . . . .	116
3.4. Représentation de la géométrie pour le contact . . . . .	123
3.5. Conditions maître-esclave pour le contact . . . . .	123
3.6. Illustration d'un contact entre deux corps . . . . .	124
3.7. Utilité des éléments quadratiques pour le contact . . . . .	125
3.8. Comportement normal au contact . . . . .	126
3.9. Comportement tangentiel au contact frottement . . . . .	127
3.10. Comportement normal régularisé par pénalisation au contact . . . . .	128
3.11. Comportement tangentiel régularisé par pénalisation au contact . . . . .	129
3.12. Approche utilisée par le Code_Aster pour le contact $1D$ . . . . .	130
3.13. Prise en compte de $\mathbf{V}_2$ dans la force de frottement . . . . .	131
3.14. Cas test pour la modélisation du contact en $3D$ sous Aster . . . . .	135
3.15. Mise en rotation du rotor $3D$ . . . . .	136

3.16. Dimensions des rotors et des stators sous étude . . . . .	139
3.17. Comparaison du comportement des stators $1D$ et $3D$ . . . . .	141
3.18. Orbites décrites par le noeud $N_c$ du rotor . . . . .	142
3.19. Premier mode propre du rotor . . . . .	143
3.20. Deuxième mode propre du rotor . . . . .	143
3.21. Troisième mode propre du rotor . . . . .	144
3.22. Quatrième mode propre du rotor . . . . .	144
3.23. Cinquième mode propre du rotor . . . . .	144
3.24. Sixième mode propre du rotor . . . . .	145
3.25. Septième mode propre du rotor . . . . .	145
3.26. Huitième mode propre du rotor . . . . .	145
3.27. Neuvième mode propre du rotor . . . . .	146
3.28. Dixième mode propre du rotor . . . . .	146
3.29. Onzième mode propre du rotor . . . . .	146
3.30. Premier modèle possible de stator $1D$ . . . . .	148
3.31. Modèles poutre (à gauche) et $3D$ (à droite) du stator de la Fig. 3.30	148
3.32. Premier mode propre du stator . . . . .	149
3.33. Deuxième mode propre du stator . . . . .	150
3.34. Troisième mode propre du stator . . . . .	150
3.35. Quatrième mode propre du stator . . . . .	150
3.36. Cinquième mode propre du stator . . . . .	151
3.37. Sixième mode propre du stator . . . . .	151
3.38. Comparaison du comportement des stators $1D$ et $3D$ le la Fig. 3.30	153
3.39. Déformées amplifiées de 10 des stators $3D$ et poutre à $t = 0.6 s$ . .	154
3.40. Traitement du contact en modélisation poutre avec un stator $3D$ .	155
3.41. Modèle du système rotor-stator $3D$ sous étude . . . . .	157
3.42. Influence de la raideur de pénalité en modélisation $1D$ . . . . .	158
3.43. Influence du schéma en temps sur la résolution du contact . . . . .	159
3.44. Influence de la raideur de pénalité en modélisation $3D$ . . . . .	160
3.45. Comparaison des orbites pour un contact en modélisations $3D$ et $1D$	161
3.46. Comparaison des orbites pour un contact en modélisations $3D$ et $1D$	162
3.47. Comparaison des orbites pour un contact en modélisations $3D$ et $1D$	162
3.48. Comparaison des orbites pour un contact en modélisations $3D$ et $1D$	163
3.49. Déformée du stator en modélisation $3D$ à $t = 0.875 (s)$ . . . . .	163
3.50. Déformée du stator en modélisation $1D$ à $t = 0.875 (s)$ . . . . .	164
3.51. Comparaison de la surface de contact en hypothèses poutre et $3D$ .	165
3.52. Déformée du rotor $3D$ dans la zone de contact à $t = 0.875 s$ . . . . .	165
3.53. Modèle de Stator avec des ailettes . . . . .	166
3.54. Le système rotor-stator en modélisation $3D$ . . . . .	166
3.55. Modèle $1D$ et $3D$ du système rotor-stator . . . . .	167
3.56. Orbites des rotors $3D$ et poutre . . . . .	168
3.57. Orbites des rotors $3D$ et poutre . . . . .	169
3.58. Orbites des rotors $3D$ et poutre . . . . .	170
3.59. Orbites des rotors $3D$ et poutre . . . . .	171
3.60. Déplacements selon $y$ de $C_1$ . . . . .	171
3.61. Déplacements selon $x$ de $C_2$ . . . . .	172
3.62. Déplacements selon $x$ de $C_1$ . . . . .	172

3.63.	Comparaison des déformées des stators des modélisations $1D$ et $3D$	174
3.64.	Déformée amplifiée du stator en modélisation $3D$ à $t = 0.876$ s . . .	174
3.65.	Mise en évidence de l'importance de la force de frottement . . . . .	175
3.66.	Déplacements selon $y$ de $C_1$ pour $\mu = 2 \times 10^{-5}$ . . . . .	175
3.67.	Comparaison des orbites du point $N_c$ du rotor . . . . .	176
3.68.	Comparaison des orbites du point $N_c$ du rotor ( $t \in [0, 0.33]$ s) . . .	177
3.69.	Comparaison des orbites du point $N_c$ du rotor ( $t \in [0.33, 0.66]$ s) .	178
3.70.	Comparaison des orbites du point $N_c$ du rotor ( $t \in [0.66, 1]$ s) . . .	179
3.71.	Disque en rotation . . . . .	179
3.72.	Comparaison des orbites du stator . . . . .	180
3.73.	Zoom sur les orbites du stator . . . . .	181
3.74.	Déplacements selon $x$ de $N_c$ pour $\omega = 636$ tr/min . . . . .	182
3.75.	Vitesses selon $x$ de $N_c$ pour $\omega = 636$ tr/min . . . . .	182
3.76.	Accélération selon $x$ de $N_c$ pour $\omega = 636$ tr/min . . . . .	182
3.77.	Orbites de $N_c$ pour $\omega = 636$ tr/min . . . . .	183
3.78.	Comparaison des orbites de $N_c$ pour $\omega = 636$ tr/min . . . . .	184
3.79.	Orbites décrites par $N_c$ en modélisation poutre . . . . .	184
3.80.	Orbites décrites par $N_c$ en modélisations poutre et $3D$ . . . . .	185
3.81.	Orbites du stator en modélisation poutre et $3D$ . . . . .	186
3.82.	État du stator à $t = 0.1576$ s . . . . .	186
3.83.	Déplacements de $C_1$ . . . . .	187
3.84.	Déplacements de $C_2$ . . . . .	187
A.1.	Déplacements du point $C_1$ pour un schéma de Newmark non amorti	200
B.1.	Modèle Abaqus . . . . .	201
B.2.	Zoom montrant la liaison poutre- $3D$ . . . . .	202
B.3.	Modèle Éléments Finis Abaqus-Maillage Grossier . . . . .	203
B.4.	Modèle Éléments Finis Abaqus-Maillage Grossier . . . . .	203
B.5.	Résultats obtenus . . . . .	204
C.1.	Deuxième modèle du stator $1D$ . . . . .	205
C.2.	Cohérence des modélisations poutre et $3D$ du stator . . . . .	206
C.3.	Troisième modèle du stator $1D$ . . . . .	208
C.4.	Comparaison du comportement des stators $1D$ et $3D$ de la Fig. C.3	210
C.5.	Déformées amplifiées de 10 des stators $3D$ et poutre à $t = 0.6$ s . .	211

# Liste des tableaux

2.1. Dimensions du modèle étudié dans le §2.8 . . . . .	38
2.2. Caractéristiques matériau du modèle étudié dans le §2.8 . . . . .	39
2.3. Dimensions du modèle étudié dans le §2.10 . . . . .	50
2.4. Dimensions (m) du rotor de la Fig. 2.35b . . . . .	84
3.1. Comparaison des fréquences propres des rotors en poutre et $3D$ . . .	143
3.2. Cas1 : Comparaison des fréquences propres des stators poutre et $3D$	149
C.1. Cas2 : Comparaison des fréquences propres des stators poutre et $3D$	208



# 1. Introduction

La thèse que nous présentons s'inscrit dans le cadre du projet IRINA (sImulation et maîRise des rIsques dans la coNception des mAchines tournantes) financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), et est effectuée majoritairement au sein de l'équipe Simulation et Structures du laboratoire de génie mécanique et civil (GÉM) de l'Ecole Centrale de Nantes, en collaboration avec le LaMCoS de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA) et le département d'Analyse Mécanique et Acoustique (AMA) de la division recherche et développement d'EDF.

La Fig. 1.1 schématise un parc nucléaire et un des Groupes Turbo-Alternateur (GTA) qui lui appartient. Le GTA composé d'une turbine et d'un alternateur, se trouve dans la salle des machines. La Fig. 1.2 présente un GTA appartenant au parc nucléaire de Flamanville.

Sur la même ligne d'arbre, et comme l'illustrent les Fig. 1.1 et Fig. 1.2, se trouvent les différents corps de la turbine : un corps haute pression, trois corps basse pression et l'alternateur, le tout mesurant 74 mètres de longueur. La turbine est ainsi constituée d'une série d'aubes montées sur un axe dont la rotation est provoquée par la force de pression de la vapeur sur les aubes et tourne à une vitesse nominale de  $1500 \text{ tr/min}$ .

La Fig. 1.3 montre une turbine du GTA du parc nucléaire. Elle entraîne un alternateur triphasé qui permet de générer un courant alternatif dont la tension est ensuite portée à presque  $4 \times 10^5$  Volts.

La sécurité dans le domaine du nucléaire est une question toujours d'actualité. La perte d'une ailette terminale sur une turbine représente une situation accidentelle

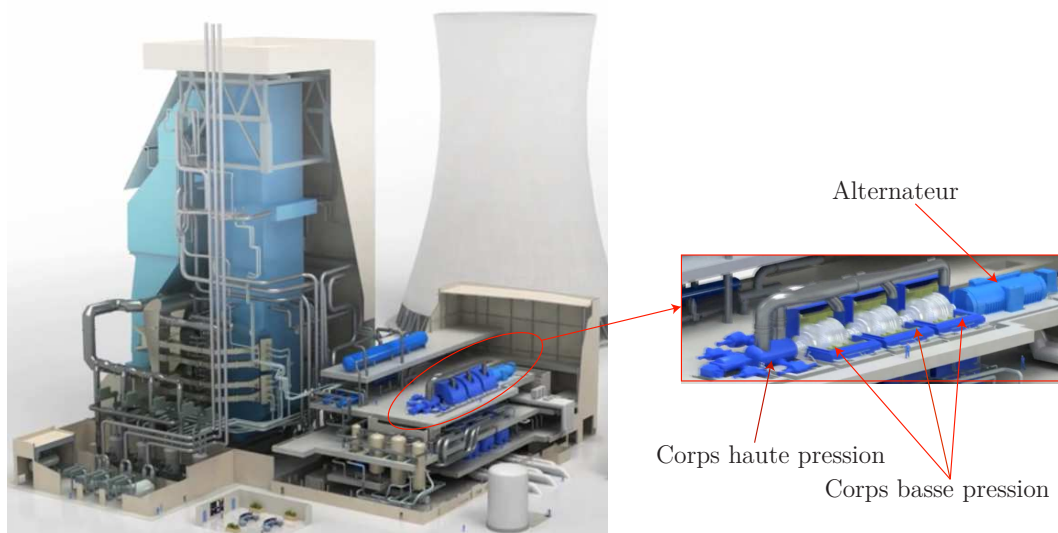
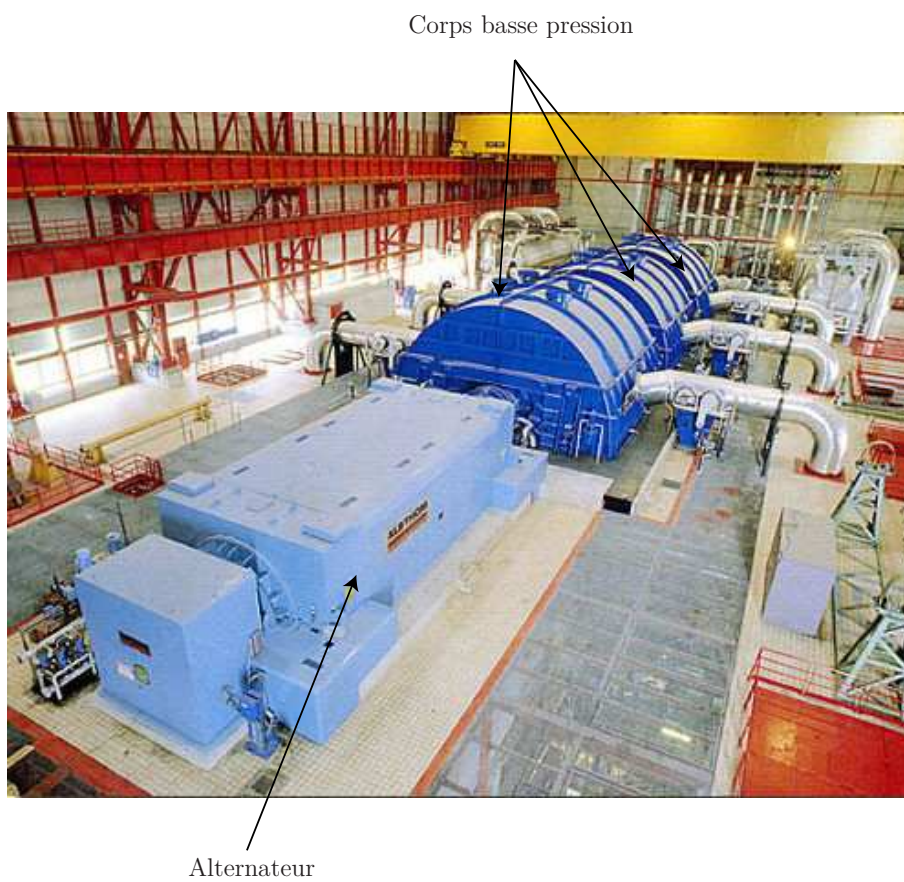


Figure 1.1.: Schématisation d'un parc nucléaire et d'un groupe turbo-alternateur.



**Figure 1.2.:** Un groupe turbo-alternateur dans la salle des machines du parc nucléaire.



**Figure 1.3.:** Turbine EDF d'un parc nucléaire Roques et al. [1]



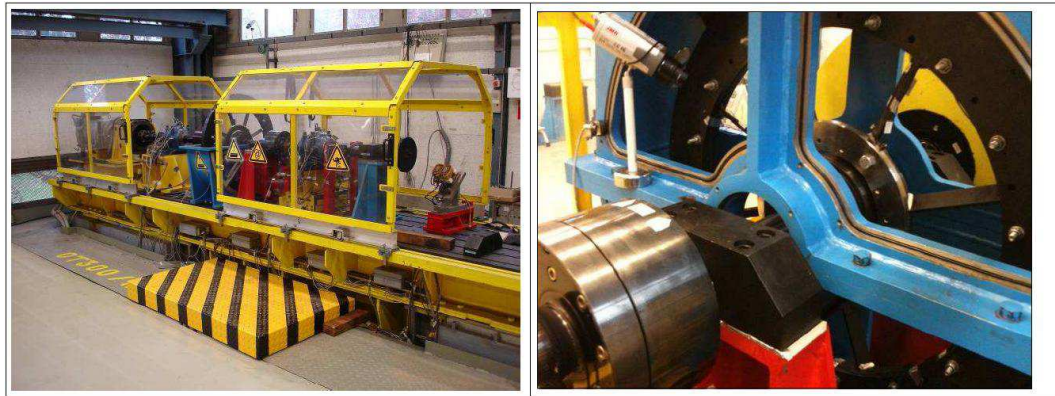


Figure 1.4.: Banc d'essai EuRope

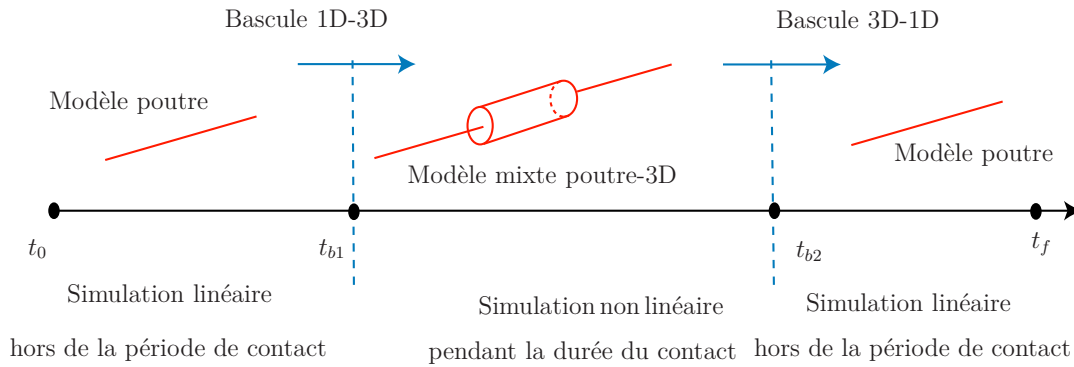
peu fréquente mais de conséquences non négligeables. Cette perte d'ailette sur une turbine de si grande taille, telle que la turbine présentée dans la Fig. 1.3, génère un balourd équivalent à 45 kg à une distance de 1 m de l'axe de rotation. Une fois la perte de l'aube est détectée, la turbine est découplée de l'alternateur et ralentit sous l'effet des forces de frottement aérodynamiques jusqu'à son arrêt. En cours de ralentissement, la turbine passe par sa vitesse critique, et les vibrations s'intensifient à ce moment, et par la suite un contact rotor-stator a lieu. Le contact provoque une augmentation du ralentissement de la turbine. D'autres effets pourraient avoir lieu, tels qu'un endommagement des paliers, un arrachement de matière, une plastification localisée, des rebondissements, un dégagement de chaleur, etc.

Les études expérimentales visant à comprendre les enjeux du contact rotor-stator sont délicates, longues et onéreuses.

La Fig. 1.4 montre un banc d'essai pour le contact rotor-stator : le banc EuRope, qui appartient au département AMA d'EDF R&D. Un moteur entraîne la rotation du rotor jusqu'à sa vitesse nominale de  $1500 \text{ tr/min}$ . La montée en vitesse se fait avec un rotor non soumis à un balourd. Ce dernier est engendré lors du ralentissement du rotor par la fonte d'un glaçon qui dans son état solide assurait l'équilibre du rotor. Lors du passage par la vitesse critique, un contact rotor-stator a lieu et ce dernier est analysé grâce aux capteurs et à des caméras rapides et thermiques (la Fig. 1.4 montre la partie du stator (diaphragme) avec laquelle le rotor va entrer en contact).

De tels bancs d'essai permettent de mieux comprendre les phénomènes et servent de référence pour la validation des modèles numériques existants. Par contre, le dimensionnement de la turbine et du diaphragme ne pourraient pas se faire uniquement sur une base expérimentale. La simulation numérique, si elle est fiable, met entre les mains des ingénieurs un outil plus rapide, moins onéreux et avec lequel des études paramétriques peuvent être menées.

Le traitement numérique d'un tel problème est cependant complexe car il comprend de nombreux effets physiques (contacts, effets vibratoires, gyroscopiques, etc.) qui apparaissent localement mais dont les conséquences doivent être analysées sur une structure de grande taille, dans le cadre d'un problème de dynamique transitoire. Il faut en effet décrire la phase de ralentissement de la turbine et son passage par



**Figure 1.5.:** Décomposition de domaines en espace et en temps

la vitesse critique. Un modèle simplifié a été développé dans Roques [2], Roques et al. [1]. Ce modèle approché car le rotor est représenté par une poutre et le stator par un ensemble de poutres courbes. Le contact rotor-stator est alors modélisé par un contact poutre-poutre. L'objectif de la présente thèse est alors d'améliorer la qualité de la représentation physique du contact grâce à une modélisation locale  $3D$ . Cela ne doit pas mener à une représentation du modèle entièrement en trois dimensions car le coût de calcul serait prohibitif. Ainsi, une représentation de la zone de contact en trois dimensions, lorsqu'un contact est détecté, et une représentation unidimensionnelle ailleurs est envisagée. Cela va se traduire par un modèle multi-échelles en espace tel que schématisé par la Fig. 1.5.

En effet, le modèle comporte des non linéarités localisées en espace, mais également en temps. Plus précisément, pendant la période où il n'y a pas de contact, le modèle peut être décrit par un modèle linéaire unidimensionnel (poutre) tel que celui utilisé dans Roques et al. [1]. Lorsque le premier contact rotor-stator a lieu, on passe d'un modèle linéaire, à un modèle qui présente une non linéarité localisée. La zone de contact est non linéaire alors que le reste de la structure présente un comportement linéaire. C'est pourquoi une représentation  $3D$  de la zone de contact est envisagée alors que le reste de la structure pourrait être décrit par des éléments poutres connectés à la zone  $3D$  par un raccord adapté. Cela permet de bien prendre en compte les phénomènes de contact localisés tout en gardant un temps de calcul raisonnable. Cela ouvre la question du changement de modèle entre le modèle entièrement poutre et le modèle mixte poutre- $3D$  et inversement. On appelle ce changement de modèle **Bascule** dans la suite de la thèse. La bibliographie ne présente pas, à notre connaissance, des travaux traitant de ce problème en dynamique transitoire.

Par ailleurs, et comme en dynamique linéaire en absence de contact des pas de temps larges peuvent être envisagés, une simulation implicite pourrait être utilisée. En présence d'un contact, le pas de temps devant être petit, une résolution explicite est mieux adaptée. Cela implique une bascule de modèles implicite vers explicite. Une fois que la phase de contact est terminée, un retour en modélisation poutre avec une résolution implicite est prévu. Cependant, et comme en dynamique linéaire en absence de tout contact les modèles de poutre sont assez légers, la bascule implicite vers explicite et inversement ne contribue pas significativement à la réduction du temps de calcul. Elle est en plus

coûteuse à mettre en œuvre et donc n'a pas été retenue par la suite. Quand au choix du schéma en temps, on y reviendra en détails au cours de la thèse.

La bascule entre les modèles permet alors d'utiliser deux modélisations différentes au cours d'une même simulation avec un premier objectif qui est la réduction du temps de calcul tout en gardant une précision élevée au niveau de la présentation du contact rotor-stator. Elle peut de plus se faire de manière non intrusive, donc avec un logiciel de calcul par éléments finis du marché.

Un deuxième objectif de la thèse, est d'analyser l'apport d'une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator, pratiquement non présente dans la bibliographie, par rapport à une modélisation poutre de ce contact, très largement utilisée dans la littérature.

Le Code\_Aster EDF [3], qui est un code de calcul par éléments finis gratuit développé par la division de recherche et développement d'EDF est choisi dans le cadre de la thèse. En effet, le projet IRINA avait comme objectif l'utilisation d'une même plateforme numérique pour les différents travaux de recherche. Cela a permis un échange de données, d'expertise et de développement entre les différents membres. Par exemple, la matrice de gyroscopie développée dans le cadre de la thèse de Ghannem [4], et qui n'est pas disponible dans la majorité des codes de calcul par éléments finis, a servi dans le cadre de notre travail de thèse. D'autres développements liés au contact rotor-stator réalisés dans le cadre de la thèse de Peletan [5], ont également été utilisés. L'expertise et les travaux de cette thèse seront diffusés dans le cadre du projet IRINA grâce à l'utilisation du Code\_Aster. De plus, le contact rotor-stator en modélisation  $1D$  est riche et bien développé dans le Code\_Aster. Le choix du Code\_Aster a également créé un cadre dans lequel il était possible de travailler chez EDF et d'effectuer des simulations pour des applications inspirées de vrais cas industriels. Par rapport à un logiciel commercial classique, le Code\_Aster présente aussi l'avantage d'être plus ouvert et plus adapté à la recherche scientifique. Sa syntaxe permet l'utilisation intégrée du langage Python et l'accès facile, souvent par l'intermédiaire de python, aux données (matrices masses, raideurs, etc.), aux résultats (déplacements, vitesses et accélérations poutres et  $3D$ , etc.), ainsi qu'aux paramètres d'initialisation des schémas en temps et bien d'autres aspects nécessaires au développement de la bascule. La bascule pourrait être également implémentée avec d'autres codes, comme Abaqus qui dispose également d'une interface python, mais moins simple d'utilisation. Bien qu'une partie du travail a été faite sur Abaqus, la totalité des travaux présentés dans cette thèse se sont déroulés en utilisant le Code\_Aster. Ce choix était bénéfique, mais a également imposé plusieurs contraintes. On revient au fur et à mesure dans la thèse sur les différentes contraintes imposées par le Code\_Aster et les méthodes utilisées pour les contourner. Ces contraintes n'ont pas été un handicap à l'atteinte des objectifs principaux de la thèse.

La thèse se divise en deux grands chapitres. Le Chapitre 2 traite la problématique de la bascule poutre vers  $3D$  ainsi que la modélisation simultanée par des éléments poutres et  $3D$  d'un même modèle physique, dans l'objectif de réduire la zone  $3D$  à celle susceptible de contact rotor-stator. Les principes de la bascule sont présentés. L'initialisation du modèle  $3D$  à partir des résultats issus du modèle poutre au moment de la bascule (ou bien de celui mixte poutre- $3D$ ) est expliquée. Comme celle-ci est intimement liée au choix du schéma en temps, on présente une synthèse

bibliographique sur le sujet et on tire les conclusions permettant de garantir la stabilité de la solution  $3D$  après bascule. La bascule est validée sur des cas statiques et dynamiques linéaires, ainsi que sur des cas de la dynamique des machines tournantes. La bascule inverse  $3D$  vers poutre n'a pas été traitée dans le cadre de la thèse suite à des contraintes de temps. Son intérêt étant limité dans notre cas.

Le Chapitre 3 permet d'illustrer à travers des exemples inspirés de cas industriels l'intérêt qu'apporte une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator. Une synthèse bibliographique introduit le chapitre, puis on expose les différentes possibilités de modélisation et les algorithmes de traitement du contact qui sont disponibles dans le Code\_Aster, en modélisation poutre et en celle  $3D$ . On expose par la suite trois cas de contact rotor-stator pour mettre en évidence l'apport d'une telle modélisation sur la simulation d'un ralentissement accidentel d'une turbine, et d'une façon plus large, sur la simulation de problèmes de contact rotor-stator qui seront discutés.

## 2. Bascule entre différents modèles

---

### 2.1. Introduction

### 2.2. Principe de la bascule

2.2.1. Construction de  $\mathbf{PU}_p$

2.2.2. Calcul de  $\mathbf{U}_{3Dc}$

### 2.3. Schémas en temps

2.3.1. Les méthodes implicites

2.3.2. Utilisation dans le cadre non linéaire

2.3.3. Conclusion

### 2.4. Les méthodes explicites

2.4.1. Méthode des différences finies centrées

2.4.2. Algorithme  $\alpha$ -généralisé Explicite

### 2.5. Problématique de l'initialisation de la solution 3D et régime transitoire

2.5.1. Stabilisation par amortissement numérique

2.5.2. Bascule à trois pas de temps

2.5.3. La bascule appliquée sur des problèmes statiques

2.5.4. Principe de la bascule à trois pas de temps

### 2.6. Orthogonalité des vecteurs $\mathbf{PU}_p$ et $\mathbf{U}_{3Dc}$

2.6.1. Conditions et significations théoriques

2.6.2. Non vérification de la condition d'orthogonalité

### 2.7. Consistance énergétique de la bascule

### 2.8. Exemple d'application

### 2.9. Raccord poutre-3D

2.9.1. Équilibre Cinématique

2.9.2. Équilibre statique

### 2.10. Bascule d'un modèle poutre à un modèle poutre-3D mixte

### 2.11. Généralisation de la bascule en dynamique des rotors

2.11.1. Principe de la décomposition

2.11.2. Unicité de la décomposition selon le schéma en temps

2.11.3. Prise en compte d'approximations pour les matrices de masse

### 2.12. Application en dynamique des machines tournantes

2.12.1. Quelques difficultés

2.12.2. Dynamique des rotors en présence d'un balourd

2.12.3. Principe de la bascule

2.12.4. Exemple d'application

2.12.5. Conclusion

### 2.13. Conclusions

---

## 2.1. Introduction

Les avancées technologiques dans la conception et la fabrication des ordinateurs, ont permis à ces derniers de gagner du terrain dans le monde de la conception et de la simulation. Et depuis, les méthodes d'éléments finis ont connu beaucoup de succès suite aux progrès technologiques dans le domaine de l'informatique et des capacités croissantes des processeurs à traiter de gros calculs. Ces méthodes numériques ont permis aux ingénieurs le calcul et la simulation de produits assez complexes, et deviennent de plus en plus incontournables dans le monde de l'ingénierie et de la conception surtout pour des produits tels les navires à passagers, où généralement le seul prototype fabriqué est le produit final, et où les essais expérimentaux à échelle réelle sont très coûteux, comme indiqué par Mobasher Amini [6]. On trouve aussi un besoin d'outils de simulation numérique et de conception fiables pour la conception des turbines d'avions, où un essai d'impact d'oiseau dans le réacteur est très onéreux. Les ingénieurs comptent de plus en plus sur des logiciels de calcul par éléments finis pour la simulation du comportement de telles structures.

Selon la nature des problèmes à modéliser et la précision recherchée sur les quantités d'intérêt, le modèle numérique utilisé est plus ou moins fin. Ainsi, plusieurs problématiques industrielles nécessitent un modèle 3D fin pour une représentation fine et précise de phénomènes locaux, comme le contact/frottement, la fissuration, l'usure locale, etc., alors que le reste de la structure présente un comportement linéaire qui peut s'accommoder d'un modèle plus grossier. Par exemple, les navires à passagers peuvent contenir des détails assez fins de quelques centimètres de longueur, comme des hublots, et des composants assez grossiers de l'ordre de plusieurs mètres dans la structure. Mailler finement toute la structure du navire pour l'analyser avec une méthode d'éléments finis classique conduira à des temps de calculs non acceptables, même avec l'utilisation des meilleurs processeurs et ordinateurs. Certaines autres applications présentent des effets non linéaires localisés alors que le reste de la structure présente un comportement linéaire. Cela a motivé le développement de méthodes qui permettent de traiter avec deux finesses différentes deux zones d'un même modèle. Certaines méthodes présentent un caractère intrusif et ne peuvent être développées pour des applications sur des logiciels de simulation du marché. Elles sont, et comme mentionné par Gendre [7], moins attractives dans un monde industriel où les ingénieurs préfèrent travailler avec des logiciels commerciaux du marché qui sont pas modifiables, d'où le besoin de non intrusivité des approches en question.

Pour la simulation du ralentissement d'une turbine ayant perdu une ailette terminale, et dans le souci d'une prise en compte précise de l'effet du contact rotor/stator lors du passage en régime transitoire de la turbine par sa vitesse critique, une représentation 3D de la zone du contact est nécessaire. Par contre, un maillage 3D tout au long de la simulation et pour toute la turbine conduira à un temps de calcul inacceptable. En effet, pour ce type de problèmes industriels, les non linéarités sont limitées en espace et en temps. Nous faisons, par la suite un rappel de l'état de l'art des méthodes permettant de traiter les non linéarités localisées en espace et/ou en temps et dans l'objectif d'étudier leur utilisation potentielle pour la simulation du ralentissement avec contact rotor/stator d'une turbine.

Pour résoudre des problèmes présentant des non linéarités localisées en temps, une bascule de schéma en temps pourrait être envisagée. En effet, certains phénomènes non linéaires tel le contact nécessitent des pas de temps assez faibles pour une modélisation efficace du phénomène physique en question. Dans ce cas, un schéma d'intégration en temps explicite est très adapté. Le temps CPU nécessaire par pas de temps est alors considérablement inférieur à celui nécessaire pour un schéma d'intégration implicite. Pour le reste du problème qui est linéaire, un schéma d'intégration en temps implicite présente l'avantage d'une stabilité inconditionnelle permettant l'utilisation d'un pas de temps plus grand. Un algorithme qui permet de basculer automatiquement entre un schéma en temps implicite et un autre explicite permet, alors, de réduire considérablement le temps de calcul. Narasimhan et Lovell [8] et Jung et Yang [9] ont proposé respectivement une bascule explicite vers implicite et implicite vers explicite pour des problèmes de formage des métaux. Des bascules explicite vers implicite et implicite vers explicite ont été utilisé par Lo et al. [10] pour réduire le coût de calcul de la simulation de problème d'impacts dynamique. Dans Noels et al. [11, 12], les auteurs ont développé des critères de bascule automatique entre schémas d'intégration en temps et l'ont appliqué pour des problèmes de dynamique de structure non linéaires. Cette même technique a aussi été utilisée dans Noels et al. [13, 14] pour la simulation de la mise en forme des matériaux et dans Noels et al. [15] pour la simulation des interactions aube/carter. Ces bascules explicite/implicite et implicite/explicite ont récemment été implémentées dans le logiciel de calcul par éléments finis Code\_Aster suite à la thèse de Mahjoubi [16]. Ces travaux de recherche de Mahjoubi et al. [17] permettent de coupler les domaines implicite et explicite qui ne sont pas localisés dans la même zone, avec une méthode inspirée de la décomposition de domaine. Il faut noter qu'au contraire du schéma implicite, la solution d'un schéma explicite n'est pas équilibrée à chaque pas de temps, c'est pourquoi la bascule explicite/implicite peut induire de l'énergie numérique menant à des oscillations numériques et souvent à la divergence. Pour remédier à cela, Noels et al. [13, 14] ont équilibré la bascule par dissipation numérique des hautes fréquences numériques du schéma explicite grâce à un amortissement numérique (utilisation de l'algorithme  $\alpha$ -généralisé), ainsi que par l'utilisation d'une phase d'équilibre, dans laquelle le pas de temps explicite est gardé et l'équilibre se fait grâce à l'utilisation des itérations de l'algorithme implicite, avant d'élargir le pas de temps et d'être en mode d'intégration purement implicite.

Pour des problèmes présentant des phénomènes localisés en espace, la littérature propose un grand nombre de méthodes. Parmi les méthodes les plus simples à mettre en œuvre on trouve les approches descendantes. L'idée consiste à créer un maillage pour la zone globale et un autre assez fin pour la zone présentant des effets localisés. Ce maillage raffiné peut prendre en compte certains détails géométriques, défauts, trous, etc. Les deux maillages doivent être compatibles sur les bords (même nombre de degré de liberté, arêtes, etc.). Une fois le calcul global effectué, on résout un problème local avec des conditions aux limites provenant de la résolution du problème global.

Cette approche existe en deux versions, approche descendante en déplacements et approche descendante en efforts. L'approche descendante en déplacements a été conçue initialement par Kelley [18] et connue sous le nom de "Specified Boundary

Conditions”. Elle était dédiée aux effets linéaires localisés et a été étendue ultérieurement par Ransom et al. [19] pour des non linéarités matériaux localisées. Le passage au niveau des nœuds se fait par l’imposition des valeurs de déplacements des nœuds globaux de l’interface à ceux des nœuds locaux de l’interface. Cela se fait dans une direction unique (d’où le nom approche descendante) et ne permet pas de prendre en compte l’influence de la zone localisée sur le comportement général de la structure. Cela induit des erreurs de précision très élevées dans les cas où des phénomènes locaux ont une influence globale non négligeable, comme le flambage Cresta [20]. La méthode descendante en efforts est plus précise que celle en déplacements et permet de traiter des cas plus avancés dans lesquels la zone locale a des effets sur la structure globale. Une variété intéressante de cette méthode est connue sous le nom SBSF “Specified Boundary Stiffness and Force”, Jara-Almonte et Knight [21]. Elle reste, cependant, peu précise dans les cas où des phénomènes locaux ont une influence assez considérable sur la structure globale. Cette méthode peut être interprétée comme une méthode descendante en déplacement où le raccord se fait avec les nœuds locaux de l’interface et les nœuds globaux adjacents aux nœuds de l’interface, au lieu de ceux de l’interface exacte (raccord à distance), rendant la précision plus élevée, mais ne conduisant pas à une méthode robuste.

Ces approches ne permettent pas de bien coupler la zone locale et la zone globale de façon à voir l’influence mutuelle de l’une sur l’autre, ce qui a motivé le développement d’autres approches pour les phénomènes localisés en espace et qui peuvent être divisées en approches exactes (ou directes) et approches itératives. Parmi les approches exactes les plus connues on trouve la condensation statique et la réanalyse structurale et des exemples d’application peuvent être trouvés dans Hirai [22], Hirai et al. [23]. L’analyse structurale permet d’utiliser des analyses précédentes sur une structure pour faire une simulation après avoir réalisé certaines modifications, et de ne pas avoir à refaire toute l’analyse. Cette méthode n’est pas adaptée aux structures  $3D$  de grandes tailles. La condensation consiste à mailler finement toute la structure et à “condenser” les degrés de libertés non intéressants par leur matrice de rigidité équivalente (complément de Schur).

Les techniques de maillages adaptatifs peuvent être utilisés pour un raffinement local d’un modèle comme l’exemple trouvé dans Plaza et al. [24]. Les méthodes de patches volumiques comme Arlequin permettent de superposer deux domaines différents comme un modèle poutre et un modèle  $3D$ . Des exemples d’utilisation peuvent être trouvés dans Ben Dhia et Rateau [25], Ben Dhia [26], Ben Dhia et Rateau [27], Cottureau et al. [28], Rateau [29], Ghanem et al. [30]. Les raccords poutre- $3D$  et coque- $3D$  permettent de décrire avec précision les effets localisés grâce aux éléments  $3D$ , tout en réduisant considérablement le coût de calcul suite à l’utilisation des éléments poutres ou coques pour le reste du modèle. Des exemples d’application peuvent être trouvés dans la littérature tel le raccord poutre- $3D$  utilisé par Kettil et Wiberg [31] pour la simulation de la déformation d’un pont. Certains raccords poutre- $3D$  ne conservent pas l’énergie du système et présentent des problèmes sur l’interface de raccord poutre- $3D$ , tel des réflexions numériques des ondes. Pour pallier à ces problèmes, et avec la méthode Arlequin, Ghanem et al. [32] ont développé un raccord poutre- $3D$  pour des application de dynamique transitoire, qui a été étendu pour des applications de machines tournantes dans le cadre de la thèse de



Ghanem [4].

Les méthodes de décomposition de domaine itératives peuvent être classées en méthodes avec et sans recouvrement. Parmi les méthodes avec recouvrement on trouve les méthodes de Schwarz, semi-Schwarz et semi-Schwarz-Lagrange. Pour plus de détails, on peut se référer au travail de Lozinski [33] et Hager et al. [34]. Les méthodes multi-échelles avec patch permettent d'avoir un zoom local sur le domaine comme les méthodes de superposition qui permettent d'apporter une correction locale sur un domaine global, comme la méthode des patchs éléments finis Lions et Pironneau [35], Glowinski et al. [36], et des patch harmoniques He et al. [37]. Les méthodes multi-échelles avec patchs ont été étendues pour la résolution de problèmes stochastiques et, par la suite, permettent la prise en compte des effets locaux comme proposé par Safatly [38], Chevreuil et al. [39].

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être classées en trois catégories principales Gosselet et Rey [40] : les approches primales Le Tallec [41], Mandel [42], les approches duales (la méthode FETI = Finite Element Tearing and Interconnecting) apparues dans les années 1990 Farhat et Roux [43], Farhat [44], Farhat et al. [45], et les méthodes hybrides ou mixtes comme la méthode FETI-DP, une version améliorée de la méthode FETI, qui combine les principes et avantages des approches duales et primales Farhat et al. [46]. Gosselet [47] présente une synthèse sur l'utilisation des méthodes hybrides. Par la méthode primale, appelée aussi BDD (Balanced Domain Decomposition), et pour deux sous-domaines adjacents  $S_1$  et  $S_2$ , on impose la continuité des déplacements sur l'interface liant les deux sous-domaines. On mesure, par la suite, le résidu en effort dû à cette hypothèse et on l'injecte d'une façon convenable sur l'interface de  $S_2$  comme une charge supplémentaire, et on calcule le déplacement de l'interface appartenant à  $S_2$  et on l'impose sur l'interface de  $S_1$ . Ce processus est répété dans une boucle itérative tant que le résidu en effort n'est pas inférieur à une tolérance fixée. En d'autres mots, à chaque itération les déplacements sont les mêmes sur les deux interfaces, alors que l'équilibre des efforts n'est atteint qu'à la fin des itérations. La méthode duale (FETI) et à l'inverse de la méthode primale, a pour objectif d'établir la continuité des déplacements sur l'interface des sous domaines voisins  $S_1$  et  $S_2$  à la fin des itérations en imposant l'équilibre des efforts à chaque itération. Cette méthode utilise les opérateurs de Lagrange pour imposer la continuité des déplacements (à la fin des itérations) en se servant des efforts sur l'interface qu'on équilibre à chaque itération. Chaque sous-domaine étant chargé seulement en efforts, sa solution en déplacement est définie à un déplacement de solide rigide près.

Le système est résolu par une méthode itérative (gradient conjugué). A chaque itération on évalue le déplacement du solide rigide puis on impose un effort sur l'interface du sous domaine pour évaluer le déplacement. On calcule par la suite le saut de déplacement entre les interfaces. Si cette quantité est suffisamment faible les itérations sont arrêtées, si non le processus est répété. Le conditionnement du problème d'interface pour les plaques augmente avec le nombre de sous-domaines tel indiqué par Farhat et al. [45] et pour cela la version FETI-2 a été proposée par Farhat et al. [48] et Farhat et Mandel [49], et a été étendue vers une version hybride, la méthode FETI-DP par Farhat et al. [46]. D'autres méthodes hybrides ou mixtes existent dans la littérature. La différence entre ces méthodes et les mé-

thodes primales ou duales est dans le fait d'imposer une continuité du déplacement et un équilibre des efforts de l'interface (combinaison linéaire entre les deux), qui ne sont satisfaits qu'à la fin des itérations. On cite parmi les méthodes mixtes la méthode LATIN (LArge Time INcrement) comme présenté dans Dureisseix [50] et qui existe en plusieurs versions dont la méthode micro-macro utilisée par Ladevèze et Dureisseix [51], Ladevèze et al. [52].

Une version multi-échelle de FETI-DP existe, comme celle utilisée par Mobasher Amini et al. [53], Mobasher Amini et al. [54] et Mobasher Amini [6] pour le calcul des structures de navires présentant des petits détails, comme les hublots, alors que le reste de la structure est de taille caractéristique bien plus grande.

La littérature propose aussi une série d'approches pour traiter des problèmes avec des effets non linéaires localisés. FETI a été modifiée et améliorée pour traiter des cas comportant un grand nombre de sous-domaines et pour prendre en compte des non linéarités géométriques Farhat et al. [55], et a également été adaptée pour des problèmes de contact par Avery et al. [56], Avery et Farhat [57], Dureisseix et Farhat [58]. Alart et al. [59] propose une méthode de Schwarz adaptée pour des problèmes avec contact et frottement. A noter que Gendre [7], Gendre et al. [60, 61] ont proposé un algorithme dédié aux problèmes industriels avec effets non linéaires localisés et qui consiste à remplacer le maillage global par un maillage local fin. Le raccord entre le domaine global et celui le domaine local fin se fait par des contraintes en déplacements, en efforts ou bien mixtes. Un algorithme itératif se charge de réduire le résidu du calcul au niveau voulu pour tout problème de ce genre. Les auteurs ont également proposé des méthodes d'accélération de la convergence. La méthode s'avère précise, efficace et permet une réduction considérable du temps de calcul. Par ailleurs, les raccords poutre-3D ou bien coque-3D s'avèrent également utiles pour des applications avec des effets non linéaires localisés. Andrieux et Varé [62] ont utilisé un raccord poutre-3D pour l'étude d'une fissuration dans un rotor.

Les accidents de turbines présentent des effets non linéaires qui sont à la fois limités en espace et en temps. Pour la période de temps dans laquelle il y a absence de frottement et contact, un modèle poutre est suffisant pour décrire le ralentissement de la turbine comme effectué par Roques [2] et Roques et al. [1]. Par contre, ces derniers ont étendu l'utilisation des éléments poutre pour la modélisation du contact rotor/stator. Pour être en mesure de bien prendre en compte les effets locaux de contact rotor/stator, un maillage local 3D est obligatoire. En dehors de cette zone de contact, les autres parties de la turbine ne présentent aucun phénomène localisé ou non linéaire et, par la suite, une représentation par des éléments poutre est suffisante. Par conséquent, un modèle qui combine l'utilisation des éléments poutre et des éléments 3D connectés entre eux par des contraintes appropriées, pourrait être très utile pour modéliser les non linéarités localisés en espace. Cependant, comme les non linéarités sont limitées en espace et en temps, une approche qui permet d'utiliser des éléments poutre durant une phase du calcul dynamique transitoire (absence de contact) et un modèle mixte poutre-3D durant l'autre phase (présence de contact/frottement) permet de réduire de façon considérable le temps de calcul en préservant une bonne précision comme l'illustre la Fig. 2.1. En effet la simulation démarre à  $t = t_0$  par un modèle poutre pour une simulation linéaire, et bascule à  $t = t_{b1}$  à un modèle mixte poutre-3D quelques pas de temps précédant les effets

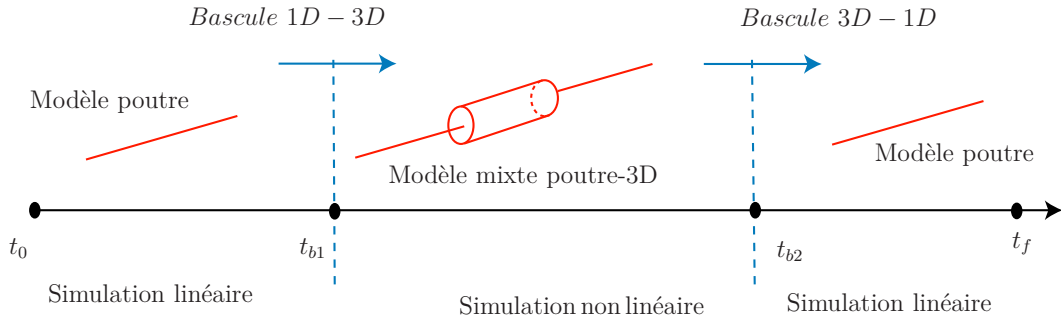


Figure 2.1.: Bascule poutre-3D

non linéaires de contact. Lorsqu'aucun contact n'est plus détecté, cette simulation bascule de nouveau à  $t = t_{b2}$  vers la modélisation poutre et cela jusqu'à la fin de la simulation à  $t_f$ .

Cela implique le développement d'une stratégie de bascule poutre-3D et inversement, et tel que cette bascule n'ait pas de conséquence sur la précision du calcul. La suite de ce chapitre présente le principe et les validations de la bascule sur des problèmes de dynamique transitoire, avec et sans rotation globale du rotor. Les exemples traiteront de la dynamique linéaire car l'objectif de ce chapitre c'est l'établissement et la validation d'une technique de bascule satisfaisante, cette bascule étant effectuée à un instant où les effets non linéaires sont absents.

## 2.2. Principe de la bascule

L'idée de la bascule consiste à fournir la solution 3D à l'instant de la bascule  $t = t_b$  à partir de la solution poutre calculée à partir de  $t = 0$  et jusqu'à l'instant de la bascule même. Lancer la simulation sur le modèle 3D à  $t = t_b$  nécessite de récupérer la solution poutre à  $t_b$  et la transformer en une solution 3D qui permet d'avoir une initialisation convenable de la solution 3D à l'instant de la bascule.

L'équation fondamentale de la dynamique poutre à  $t = t_b$  s'écrit :

$$\mathbf{M}_P \ddot{\mathbf{U}}_P + \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{U}}_P + \mathbf{K}_P \mathbf{U}_P = \mathbf{f}_P \quad (2.1)$$

avec,  $\mathbf{M}_p$ ,  $\mathbf{C}_p$ , et  $\mathbf{K}_p$  représentent respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur poutre.  $\mathbf{f}_p$  est la charge extérieure appliquée à  $t = t_b$  au modèle poutre,  $\mathbf{U}_p$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_p$ , et  $\ddot{\mathbf{U}}_p$  représentant, respectivement les déplacements (incluant les rotations), vitesses et accélérations poutre à ce même instant. Notons ici que le modèle poutre utilisé repose sur la théorie de Timoshenko.

Le modèle 3D à  $t = t_b$  est régi par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}_{3D} \ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{C}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3D} = \mathbf{f}_{3D} \quad (2.2)$$

avec,  $\mathbf{M}_{3D}$ ,  $\mathbf{C}_{3D}$ , et  $\mathbf{K}_{3D}$  représentant, respectivement, les matrices de masse, amortissement et raideur du modèle 3D.  $\mathbf{f}_{3D}$  est la charge extérieure à laquelle est soumis

le modèle 3D à  $t = t_b$ ,  $\mathbf{U}_{3D}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{3D}$ , et  $\ddot{\mathbf{U}}_{3D}$  sont, respectivement, les déplacements, vitesses et accélérations 3D à cet instant.

Supposons qu'on ait démarré avec le modèle poutre à  $t = 0$  et qu'on veut basculer au modèle 3D à l'instant de bascule ( $t = t_b$ ). On doit, alors, construire la solution 3D  $\mathbf{U}_{3D}$  à partir de la solution poutre. Cela est fait en décomposant dans un premier temps la solution poutre en une solution qui correspond à un mouvement solide rigide pars section (hypothèse cinématique classique de Timoshenko)  $\mathbf{PU}_p$  et une solution 3D de correction  $\mathbf{U}_{3Dc}$  qui prend en compte la déformation de la section :

$$\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{U}_{3Dc} + \mathbf{PU}_p \quad (2.3)$$

On a, par la suite besoin, de construire  $\mathbf{PU}_p$  et de calculer  $\mathbf{U}_{3Dc}$  pour obtenir les déplacements du modèle 3D à  $t_b$ .

### 2.2.1. Construction de $\mathbf{PU}_p$

$\mathbf{PU}_p$  est obtenue à travers une matrice de projection  $\mathbf{P}$  qui permet de passer d'une solution poutre à une solution 3D qui correspond à l'hypothèse de section non déformable (hypothèse de Timoshenko pour les poutres). A noter que les maillages poutre et 3D peuvent avantageusement ne pas être totalement indépendants pour être en mesure de construire facilement  $\mathbf{PU}_p$  à partir de  $\mathbf{U}_p$ . Le projecteur  $\mathbf{P}$  est une matrice qui pour chaque nœud poutre, calcul les déplacements de corps rigide des nœuds 3D appartenant à la même section qui correspond au nœud poutre. Si un nœud du maillage 3D est tel que sa position le long de l'axe de la poutre ne correspond à la position d'aucun nœud du maillage poutre, le calcul de son déplacement selon l'hypothèse de mouvement solide rigide de la section nécessite des interpolations des champs poutre nodaux avant la projection dans un espace de discrétisation 3D. En d'autres mots, le maillage poutre doit correspondre à une projection du maillage 3D sur sa fibre neutre, pour simplifier l'opération.

On désigne par  $N_{ij}$  un nœud qui appartient à la  $i^{\text{ème}}$  section du maillage 3D,  $\mathbf{PU}_p^{ij}$  représente le déplacement selon l'hypothèse de solide rigide par section. La section 3D à laquelle appartient  $N_{ij}$  a pour centre de gravité  $G_i$ .  $\mathbf{U}_p^i$  et  $\theta_p^i$  désignent respectivement les déplacements et rotations du  $i^{\text{ème}}$  nœud de la poutre, qui possède la même troisième coordonnée que  $G_i$ . Dans le code éléments finis, tel Code\_Aster, Abaqus ou autre, on écrit une boucle python qui permet de calculer  $\mathbf{PU}_p^{ij} = [\mathbf{PU}_{px}^{ij}, \mathbf{PU}_{py}^{ij}, \mathbf{PU}_{pz}^{ij}]$  pour chaque nœud  $N_{ij}$  comme suit :

$$\mathbf{PU}_p^{ij} = \mathbf{U}_p^i + \mathbf{N}_{ij} \mathbf{G}_i \wedge \theta_p^i \quad (2.4)$$

$\mathbf{N}_{ij} \mathbf{G}_i$  est un vecteur orienté de  $M_i$  à  $G_i$ . Le nœud  $N_{ij}$  est de coordonnées  $(X_{N_{ij}}, Y_{N_{ij}}, Z_{N_{ij}})$ . Supposons  $X_{G_i} = Y_{G_i} = 0$ , par la suite. L'Eq. (2.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{PU}_{px}^{ij} &= \mathbf{U}_{px}^i - \theta_{pz}^i Y_{N_{ij}} \\ \mathbf{PU}_{py}^{ij} &= \mathbf{U}_{py}^i + \theta_{pz}^i X_{N_{ij}} \\ \mathbf{PU}_{pz}^{ij} &= \mathbf{U}_{pz}^i - \theta_{px}^i X_{N_{ij}} + \theta_{py}^i Y_{N_{ij}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour construire les vitesses et accélérations du modèle 3D selon l'hypothèse de section non déformable (et pour des petites perturbations), et notées respectivement  $\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p$  et  $\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p$ , il suffit de dériver Eq. (2.5) par rapport au temps et on aura pour les vitesses :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_{px}^{ij} &= \dot{\mathbf{U}}_{px}^i - \dot{\theta}_{pz}^i Y_{N_{ij}} \\ \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_{py}^{ij} &= \dot{\mathbf{U}}_{py}^i + \dot{\theta}_{pz}^i X_{N_{ij}} \\ \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_{pz}^{ij} &= \dot{\mathbf{U}}_{pz}^i - \dot{\theta}_{py}^i X_{N_{ij}} + \dot{\theta}_{px}^i Y_{N_{ij}}\end{aligned}\quad (2.6)$$

et les accélérations :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_{px}^{ij} &= \ddot{\mathbf{U}}_{px}^i - \ddot{\theta}_{pz}^i Y_{N_{ij}} \\ \mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_{py}^{ij} &= \ddot{\mathbf{U}}_{py}^i + \ddot{\theta}_{pz}^i X_{N_{ij}} \\ \mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_{pz}^{ij} &= \ddot{\mathbf{U}}_{pz}^i - \ddot{\theta}_{py}^i X_{N_{ij}} + \ddot{\theta}_{px}^i Y_{N_{ij}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Le calcul de  $\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p$  et  $\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p$  est nécessaire au calcul de  $\mathbf{U}_{3Dc}$  qui fait le sujet du paragraphe suivant.

### 2.2.2. Calcul de $\mathbf{U}_{3Dc}$

Suite à la décomposition du déplacement 3D selon Eq. (2.3), l'initialisation de la solution 3D au moment de la bascule nécessite, en plus de la génération du vecteur déplacement selon l'hypothèse de solide rigide  $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$ , le calcul de la correction  $\mathbf{U}_{3Dc}$  qui tient compte de la déformation dans la section. En injectant Eq. (2.3) dans Eq. (2.2) à  $t = t_b$  donne :

$$\mathbf{M}_{3D}(\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p) + \mathbf{C}_{3D}(\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p) + \mathbf{K}_{3D}(\mathbf{U}_{3Dc} + \mathbf{P}\mathbf{U}_p) = \mathbf{f}_{3D}\quad (2.8)$$

Comme cela résulte en une équation avec trois inconnues, on privilégie une correction des déplacements  $\mathbf{U}_{3Dc}$  par rapport à une correction des vitesses ou accélérations de la déformation de la section et par la suite on suppose :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} &= \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Cela résulte en une correction en déplacements  $\mathbf{U}_{3Dc}$  qui est le résultat d'un calcul statique pour le modèle 3D à  $t = t_b$ , et est exprimée par l'équation suivante :

$$\mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3Dc} = \mathbf{f}_{3D} - \mathbf{M}_{3D}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_b - \mathbf{C}_{3D}\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_b - \mathbf{K}_{3D}\mathbf{P}\mathbf{U}_b\quad (2.10)$$

On dispose maintenant des déplacements  $3D$  à l'instant de bascule et qui correspondent à Eq. (2.3); on initialise, alors, le modèle  $3D$  à  $t = t_b$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{3D} &= \mathbf{U}_{3Dc} + \mathbf{P}\mathbf{U}_p \\ \dot{\mathbf{U}}_{3D} &= \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p \\ \ddot{\mathbf{U}}_{3D} &= \mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p \end{aligned} \quad (2.11)$$

Eq. (2.9) et Eq. (2.11) sont compatibles avec Eq. (2.8), et permettent par la suite d'initialiser la solution  $3D$  au moment de la bascule sans violer l'équation fondamentale de la dynamique  $3D$  au moment de la bascule. Cependant, l'équation fondamentale de la dynamique est résolue par l'intermédiaire d'un schéma d'intégration en temps, et par la suite la stabilité de la solution  $3D$  au moment de la bascule repose sur la compatibilité de l'initialisation de la solution  $3D$  au moment de la bascule comme proposée dans Eq. (2.11) avec le schéma en temps en question. L'initialisation proposée dans Eq. (2.11) se base sur les hypothèses de Eq. (2.9) qui sont un peu fortes et peuvent provoquer des oscillations numériques hautes fréquences notamment sur les accélérations dans la solution  $3D$  après bascule. On revient plus tard dans ce chapitre sur les améliorations proposées pour garantir une stabilité numérique de la solution  $3D$  de bascule. Mais comme cela est intimement lié au schéma d'intégration en temps utilisé, on fait un point dans la suite sur les principaux schémas d'intégration en temps, implicites et explicites, utilisés dans les codes commerciaux et qui servent pour la résolution de problèmes de dynamique.

## 2.3. Schémas en temps

La littérature propose plusieurs catégories de schémas en temps, et chaque catégorie est riche par les différents schémas (et les différentes familles qui découlent de chaque schéma) proposés. La difficulté repose dans le choix du schéma adapté au problème en question, le temps de calcul étant un critère intimement lié à ce choix, mais également, la précision, la stabilité, l'amortissement numérique, etc.

On divise les schémas d'intégration en temps en deux catégories principales. L'intégration en temps implicite et celle explicite. La méthode implicite nécessite une résolution itérative à chaque pas de temps (ou à une résolution couplée en linéaire) mais permet de travailler avec un pas de temps assez grand. Celle explicite nécessite un pas de temps très petit pour être stable. Elle est adaptée à des problèmes de dynamique rapide, là où un petit pas de temps est nécessaire pour prendre en compte les phénomènes physiques de hautes fréquences tel le contact. Une méthode implicite dans ce cas conduit à un temps de calcul énorme.

### 2.3.1. Les méthodes implicites

#### 2.3.1.1. Le schéma de Newmark

Un problème de dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f}(t) \quad (2.12)$$

avec,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , et  $\mathbf{K}$  représentant respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur et  $\mathbf{f}(t)$  la charge extérieure.  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  représentent respectivement les vecteurs de déplacements, vitesses et accélérations à l'instant  $t$ . Pour résoudre numériquement cette équation, la méthode des éléments finis, Hughes [63], permet de discrétiser le modèle physique et de le transformer en un problème numérique qui sera résolu par l'utilisation d'un schéma d'intégration en temps. La méthode de Newmark [64] parue en 1959 et également appelée la méthode de Stormer et Cowell dans Curnier [65], reste parmi les méthodes d'intégration en temps les plus utilisées de nos jours, et a subi plusieurs améliorations et modifications au cours du temps. On résume ci-dessous le schéma de Newmark. On peut se référer à Géraudin et Rixen [66] pour plus de détails. Le temps est discrétisé en pas de tailles  $\Delta T$ .  $t_n$  représente la valeur du temps au pas  $n$ , et ainsi  $t_{n+1} = t_n + \Delta T$  sera le temps au pas  $n + 1$ . L'expression des déplacements, basée sur un développement en série de Taylor, s'écrit comme suit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.13)$$

Celle des vitesses :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.14)$$

La formule de Taylor permet d'approcher d'une façon assez précise les déplacements et les vitesses. L'algorithme de Newmark s'arrête à un développement en série de Taylor à l'ordre 2 et avec l'utilisation de deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  l'expression des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta T^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_n + \Delta T^2 \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.15)$$

et celle des vitesses :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.16)$$

En injectant les expressions des déplacements et vitesses des équations respectives, Eq. (2.15) et Eq. (2.16), dans Eq. (2.12), on aura une seule équation à une seule inconnue (qui est l'accélération au pas  $n + 1$ ) comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \gamma \Delta T \mathbf{C} + \beta \Delta T^2 \mathbf{K}] \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{C}[\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_n] \\ &\quad - \mathbf{K}[\mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{U}}_n] \end{aligned} \quad (2.17)$$

La formulation peut être faite en déplacements, vitesses ou accélérations. Certains logiciels de calculs par éléments finis ne présentent pas les trois choix. On fera, dans la suite, le choix de présenter l'approche en accélération. L'algorithme de Newmark nécessite la construction d'une matrice de masse modifiée  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma\Delta T\mathbf{C} + \beta\Delta T^2\mathbf{K}$  qui peut aussi être transformée en une matrice triangulaire par factorisation une fois pour toute. À noter que cette matrice tend vers la matrice masse pour des pas de temps assez petits.

Une fois les accélérations calculées par résolution de Eq. (2.17), elles peuvent être utilisées pour le calcul des valeurs de vitesses et accélérations selon Eq. (2.15) et Eq. (2.16). Le schéma de Newmark dépend des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Il est démontrable que le schéma est inconditionnellement stable si :

$$\begin{aligned}\gamma &\geq \frac{1}{2} \\ \beta &\geq \frac{(\gamma + \frac{1}{2})^2}{4}\end{aligned}\quad (2.18)$$

On entend par stabilité, l'existence d'un pas de temps  $\Delta T_{cr}$ , tel qu'une perturbation finie du vecteur d'état (vitesses et déplacements) à l'instant  $t_n$  ne produit qu'une perturbation finie du vecteur d'état calculé à un instant ultérieur  $t_{n+1}$ . Pour les conditions de l'Eq. (2.18), le schéma de Newmark est stable, dans le cadre linéaire, pour n'importe quelle valeur du pas de temps. Cela permet de travailler avec des pas de temps larges et de réduire le coût du calcul. Par contre, le schéma est d'autant plus précis que le pas de temps est faible. Le schéma est dit consistant, si l'erreur qu'il produit tend vers zéro lorsque le pas de temps est suffisamment faible.

Il est simple de montrer la consistance du schéma de Newmark. En effet on a :

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}] = \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.19)$$

et cela car si  $\Delta T \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \rightarrow \ddot{\mathbf{U}}_n$

de même,

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} [\dot{\mathbf{U}}_n + (\frac{1}{2} + \beta)\Delta T\ddot{\mathbf{U}}_n + \beta\Delta T\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}] = \dot{\mathbf{U}}_n \quad (2.20)$$

Une des combinaisons les plus utilisées des paramètres de ce schéma est :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{1}{4}\end{aligned}\quad (2.21)$$

En effet,  $\gamma = 0.5$  permet d'avoir une précision au second ordre, et la combinaison de Eq. (2.21) permet d'avoir un schéma inconditionnellement stable et conservatif



de l'énergie dans le cadre linéaire. Les hautes fréquences qui peuvent apparaître et qui sont purement numériques ne sont pas amplifiées causant la divergence de l'algorithme, mais ne sont pas amorties non plus. Il est possible, d'introduire de l'amortissement numérique dans le schéma de Newmark pour éliminer les oscillations numériques hautes fréquences, mais cela réduira la précision du schéma à l'ordre 1. Plusieurs familles de schémas dérivent du schéma de Newmark. Le schéma implicite de Newmark peut être transformé en schéma explicite des différences centrées par un simple choix de  $\gamma = 0.5$  et  $\beta = 0$ .

L'algorithme de Newmark se base sur le schéma de Newmark avec une phase d'initialisation et une boucle sur les pas de temps. Les logiciels de calcul par éléments finis, tel Abaqus ou Code\_Aster, sont programmés pour initialiser les accélérations du schéma de Newmark à zéro si les vitesses initiales sont nulles, en présence ou en absence de conditions initiales sur les déplacements. Si les vitesses initiales ne sont pas nulles, une initialisation des accélérations est prévue par :

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}(t_0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0) \quad (2.22)$$

Ayant en main les valeurs des vitesses, déplacements et accélérations à l'instant initial  $t_0$ , les déplacements, vitesses et accélérations au pas de temps suivant sont calculés selon les équations respectives Eq. (2.15), Eq. (2.16) et Eq. (2.17). Cette initialisation respecte l'équation fondamentale de la dynamique à l'instant initiale et permet de ne pas provoquer des oscillations numériques. On s'en servira plus tard dans la méthode de la bascule tel expliqué dans le §2.3.1.

Le schéma de Newmark a été étendu au domaine non linéaire. Cependant, son efficacité se trouve réduite et sa stabilité devient conditionnelle. Le schéma de Newmark pourrait ne plus conserver l'énergie dans le cadre non linéaire. Le schéma de Newmark pour les applications non linéaires peut-être trouvé dans Géradin et Rixen [66] et consiste à évaluer un résidu du calcul des efforts au pas de temps  $t_{n+1}$  par :

$$r_{n+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{F}_{int}^{n+1} - \mathbf{F}_{ext}^{n+1} \quad (2.23)$$

et de vérifier s'il est inférieur à une tolérance donnée. Si ce n'est pas le cas, une étape de correction est effectuée à travers le calcul de déplacements corrigés  $\Delta\mathbf{U}$  et de leur ajout aux valeurs nodales en déplacements, vitesses et accélérations à  $t_{n+1}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1} &= \mathbf{U}_{n+1} + \Delta\mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta T}\Delta\mathbf{U} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta T^2}\Delta\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cela est répété afin de baisser le résidu en effort à la tolérance souhaitée.

Dans l'objectif d'étudier la stabilité de l'algorithme de Newmark dans le cadre non linéaire, Belytschko et Schoeberle [67] ainsi que Hughes [68, 69] ont démontré que

l'énergie reste bornée si elle reste positive. Cependant, comme signalé dans Noels [70], cette démonstration est basée sur une énergie interne égale au travail des forces internes, ce qui peut être remis en cause. Dans Noels [70] on trouve plus de détails sur les causes théoriques de la non stabilité de la méthode de Newmark dans le domaine non linéaire, ainsi qu'un exemple qui montre que pour des pas de temps assez élevés, il y a des oscillations dans les déplacements purement numériques qui se traduisent aussi par une non conservation du moment angulaire qui lui aussi oscille autour de sa valeur qui doit théoriquement être constante. Il y a des transferts d'énergie entre l'énergie interne et l'énergie cinétique ce qui conduit après quelques pas de temps à la divergence. Si le pas de temps reste faible, l'algorithme de Newmark conserve certaines structures symplectiques comme le moment angulaire et est stable comme le montrent Kane et al. [71, 72]. Cela a également été signalé par Hughes [68]. D'autres exemples dans la littérature illustrent la non stabilité du schéma de Newmark dans le domaine non linéaire Hughes et al. [73], Simo et al. [74], Kane et al. [71] si le pas de temps n'est pas suffisamment faible. L'algorithme présente également des oscillations numériques qui peuvent mener à la divergence en cas de contact (cas complexes). Pour le stabiliser il faut un amortissement numérique dissipant de l'énergie mais rendant l'algorithme précis au premier ordre au lieu du deuxième. Dans le Chapitre 3 on illustrera ce type d'instabilité et on montrera l'importance de la faible taille du pas de temps ainsi que le rôle de l'amortissement numérique pour la stabilité du schéma de Newmark pour la résolution des problèmes de contact.

Pour pallier au problème d'instabilité du schéma en temps pour des applications non linéaires tout en conservant une précision du deuxième ordre, Hilber et al. [75] ont pondéré les forces internes (méthode HHT) alors que Wood et al. [76] ont pondéré les forces d'inertie. Par la méthode HHT, l'amortissement numérique est introduit à travers un paramètre  $\alpha \in ]0; \frac{1}{3}[$  qui vient modifier les paramètres du schéma de Newmark comme suit :  $\beta = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$  et  $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$ .

Chung et Hulbert [77] ont combiné les deux méthodes en pondérant les forces d'inertie ainsi que les forces internes et externes, ce qui a conduit à la méthode  $\alpha$ -généralisé. Ces méthodes permettent d'introduire de l'amortissement numérique dans l'algorithme de Newmark tout en gardant une précision à l'ordre 2. L'application de l'algorithme de Newmark se trouve alors étendue au domaine non linéaire. La stabilité n'est pas inconditionnelle, le pas de temps doit être faible.

### 2.3.1.2. Algorithme $\alpha$ -généralisé

L'objectif principal de la méthode  $\alpha$ -généralisé est d'introduire de l'amortissement numérique au schéma de Newmark tout en gardant sa précision à l'ordre 2. Cela permet d'étendre l'utilisation aux applications non linéaires, au dépend de la stabilité qui devient conditionnée par la taille du pas de temps qui doit rester petit, ce qui réduit les avantages de l'utilisation d'un schéma en temps implicite, et augmente le coût du calcul.

L'idée proposée par Chung et Hulbert [77] et qui a conduit à l'apparition de l'algorithme  $\alpha$ -généralisé est de pondérer simultanément les forces d'inertie (par un

facteur  $\alpha_M$ ) et les forces internes et externes (par un facteur  $\alpha_F$ ) entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  au nœud  $N_0$  pour une discrétisation élément fini liant le nœud  $N_0$  au nœud  $N_1$  par une matrice de masse élémentaire  $\mathbf{M}$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans le cas d'une modélisation "classique" par éléments finis à l'instant  $t$  par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{N_0} = (\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int})_{N_1} \quad (2.25)$$

$\mathbf{f}_{ext}$  désigne les forces extérieures, alors que  $\mathbf{f}_{int}$  représente les forces internes.

Chung et Hulbert [77] ont modifié cette écriture pour qu'elle devienne :

$$[1 - \alpha_M]\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}_{N_0})_{n+1} + \alpha_M\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}_{N_0})_n = [1 - \alpha_F](\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int})_{N_1}^{n+1} + \alpha_F(\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int})_{N_1}^n \quad (2.26)$$

avec  $\ddot{\mathbf{U}}_{N_0}$  l'accélération au nœud  $N_0$ ,  $n$  représente le pas de temps d'ordre  $n$  et  $n+1$  le suivant.

Le schéma de Newmark est un cas particulier du schéma  $\alpha$ -généralisé et qui peut être trouvé en posant  $\alpha_M = \alpha_F = 0$ . Par ailleurs, pour  $\alpha_M = 0$  on retrouve le schéma HHT de Hilber et al. [75] et pour  $\alpha_F = 0$  on retrouve sur le schéma de Wood et al. [76].

### 2.3.1.3. Autres approches

La méthode de Houbolt [78] est un schéma implicite conçu initialement pour l'analyse des structures aéronautiques. Il est précis au second ordre, est à trois pas et inconditionnellement stable. Les valeurs des vitesses et accélérations à  $t = t_{n+1}$  dépendent des valeurs nodales à  $t_n$ ,  $t_{n-1}$  et  $t_{n-2}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \frac{11\mathbf{U}_{n+1} - 18\mathbf{U}_n + 9\mathbf{U}_{n-1} - 2\mathbf{U}_{n-2}}{6\Delta T} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \frac{2\mathbf{U}_{n+1} - 5\mathbf{U}_n + 4\mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-2}}{\Delta T^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

et seront insérées dans l'équation fondamentale de la dynamique écrite à  $t = t_{n+1}$  par Eq. (2.28), ce qui permet après résolution de trouver les déplacements à  $t_{n+1}$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (2.28)$$

L'inconvénient d'un tel schéma est la complexité de l'initialisation à  $n = 0$  vu le besoin de  $t_{n-1}$  et  $t_{n-2}$ , ce qui conduit à l'utilisation de méthodes spécifiques.

Un schéma en temps implicite à deux pas a récemment été développé par Zhai [79]. D'autres méthodes d'intégrations en temps implicites existent telle la méthode de  $\theta$ -Wilson Wilson [80], la méthode de Park [81], la méthode de collocation, Hilber et Hughes [82], la méthode de Krenk Krenk [83], etc.

### 2.3.2. Utilisation dans le cadre non linéaire

Les schémas d'intégration qui ont été conçus pour le calcul linéaire tel le schéma de Newmark, voient leur efficacité réduite et leur stabilité conditionnée par la taille du pas de temps dans le domaine non linéaire suite à l'injection d'énergie numérique due à la non linéarité. L'amortissement numérique, qui peut être introduit à ces schémas (Newmark, HHT,  $\alpha$ -généralisé, etc.) permet d'étendre leur utilisation au domaine non linéaire si le pas de temps reste faible. Par contre, certaines structures symplectiques ne pourraient pas être conservées comme le moment angulaire, etc.

C'est pourquoi récemment il y a eu un effort pour la création de nouveaux outils numériques robustes pour l'intégration dans le cadre non linéaire, et qui vise de trouver des algorithmes inconditionnellement stables dans le cadre non linéaire, qui peuvent dissiper l'énergie numérique générée par la non linéarité et sont capables de conserver certaines structures symplectiques tel le moment angulaire. Ces outils restent cependant peu connus dans le monde des logiciels, qui utilisent des schémas en temps plus "traditionnels" tel le schéma de Newmark. On expose par la suite un aperçu général de ces méthodes. On rappelle l'objectif de non intrusivité de la méthode proposée dans cette thèse, et par la suite le choix du schéma d'intégration en temps qui dépend du choix du logiciel commercial, et des possibilités qu'il offre dans ce domaine. Les algorithmes exposés par la suite pourraient ne pas être utilisés dans le cadre de la thèse pour des raisons pratiques liés au choix du logiciel de calcul par éléments finis.

Hughes et al. [73] ont proposé une méthode qui consiste à ajouter des contraintes sur la conservation du moment et de l'énergie sur le schéma  $\alpha$ -généralisé, ce qui a conduit au développement de la méthode Constraint Energy Momentum Algorithm (CEMA). Une idée semblable proposée par Kuhl et Ramm [84], Kuhl et Crisfield [85], Kuhl et Ramm [86] a conduit au développement de la méthode Modified Energy-Momentum Method (MEMM). D'autres approches pour application sur les poutres non linéaires existent, et se sont basées sur une modification de la méthode temporelle de Galerkin, et qui a conduit au développement d'une approche conservative par Bauchau et Theron [87] et une autre dissipative par Bottasso et Borri [88]. D'autres approches très intéressantes ont été développées tel la méthode EMCA (energy momentum conserving algorithm) proposée par Simo et Tarnow [89] qui conserve les moments linéaires et angulaires et l'énergie du système. Par contre, lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, des modes numériques de hautes fréquences apparaissent, et peuvent conduire à des oscillations non-physiques et à la divergence. Pour cela Armero et Romero [90, 91], Romero et Armero [92, 93] ont proposé la méthode EMDC (energy dissipation momentum conserving) qui est une version modifiée de la méthode EMCA avec l'introduction d'une dissipation numérique de l'énergie, ce qui la rend stable tout en conservant le moment linéaire et angulaire. Ces deux dernières méthodes seront brièvement exposées dans la suite.

#### 2.3.2.1. Le schéma EMCA

Le principe de l'algorithme proposé par Simo et Tarnow [89] et dont le but est le développement d'un schéma d'intégration en temps inconditionnellement stable

dans le cadre non linéaire, se base sur la modification de l'équation d'équilibre qui décrit la relation entre un nœud  $N_0$  et un nœud  $N_1$  et qui normalement s'écrit pour une discrétisation par éléments finis à un instant  $t$  par Eq. (2.25). Par le schéma de Newmark, Eq. (2.25) s'écrit :

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_{N_0})_{n+1} = (\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int})_{N_1}^{n+1} \quad (2.29)$$

$\mathbf{M}$  est la matrice de masse élémentaire,  $\mathbf{F}_{ext}$  et  $\mathbf{F}_{int}$  représentent respectivement les forces extérieures et intérieures.  $n+1$  désigne le pas de temps  $t_{n+1}$ . Simo et Tarnow [89] ont proposé de modifier cette écriture par l'introduction des forces aux points milieux  $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n+1})$  et qui est différente de  $\mathbf{F}(\frac{\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n+1}}{2})$  dans le domaine non linéaire. Cela conduit à l'écriture de l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_{N_0})_{n+1} = (\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int})_{N_1}^{n+\frac{1}{2}}$$

L'expression des déplacements et vitesses entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  restent identiques à un schéma de Newmark pour  $\beta = \frac{1}{4}$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$  et s'écrivent identiquement aux équations Eq. (2.15) et Eq. (2.16).

Les forces internes seront formulées de façon à respecter la conservation du moment linéaire, angulaire et de l'énergie. La conservation du moment linéaire conduit à :

$$\Sigma(\mathbf{F}_{int})^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.30)$$

qui doit être vérifiée sur chaque nœud. La conservation du moment angulaire s'écrit :

$$\left[ \frac{\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{U}_n}{2} \right] \wedge \left[ \mathbf{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (2.31)$$

et celle de la conservation de l'énergie :

$$\left[ \mathbf{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right] \cdot [\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n] = w_{int}^{n+1} - w_{int}^n + \Delta_{int} \quad (2.32)$$

Où  $w_{int}^n$  et  $w_{int}^{n+1}$  est l'énergie interne au pas de temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  respectivement.  $\Delta_{int}$  est la dissipation physique de l'énergie par frottement entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

L'algorithme est bien inconditionnellement stable, et conserve l'énergie. Il est aussi précis au second ordre.

La méthode ne diverge pas lorsque la taille du pas de temps augmente. Cependant lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, il apparaît des modes de hautes fréquences qui peuvent générer des oscillations qui nuisent à la précision. Pour cela les algorithmes EDMC ont été formulés.

### 2.3.2.2. Le schéma EDMC

Lorsque la taille du problème est suffisamment large pour créer des hautes fréquences numériques, Armero et Romero [90, 91], Romero et Armero [92, 93] ont introduit l'algorithme EDMC comme une solution à ce problème.

Cet algorithme ressemble à l'algorithme EMCA avec l'introduction de la dissipation numérique en deux lieux, une vitesse de dissipation numérique  $\mathbf{V}_{diss}$  dépendant des vitesses nodales et une forces de dissipation numérique  $\mathbf{F}_{diss}$ . Cela revient à modifier l'écriture des déplacements proposés par Newmark (pour  $\beta = \frac{1}{4}$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ ) et formulés dans Eq. (2.15) par l'ajout d'un terme lié à la vitesse de dissipation numérique, et par la suite l'expression des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta T^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta T^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \Delta t \mathbf{V}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

Celle des vitesses reste identique à la formulation de Newmark exprimée par Eq. (2.16) si on prend  $\beta = \frac{1}{4}$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$

L'autre modification se voit au niveau des équations d'équilibre avec l'introduction d'une force dissipative et par la suite Eq. (2.29) s'écrit :

$$\frac{1}{2} \mathbf{M} (\ddot{\mathbf{U}}_{N_0})_{n+1} = (\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{diss})_{N_1}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

La précision des forces dissipatives et de la vitesse de dissipation numérique est au second ordre, cependant, l'algorithme en général est au premier ordre au contraire de tous les autres précédents algorithmes.

Pour que l'algorithme conserve le moment linéaire la force dissipative doit vérifier la même condition nécessaire dans la méthode EMCA et exprimée par Eq. (2.30).

et pour avoir la conservation du moment angulaire, il faut :

$$\left[ \frac{\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{U}_n}{2} \right] \wedge \left[ \mathbf{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (2.35)$$

L'équation d'équilibre se trouve modifier par l'introduction d'une force dissipative et devient

$$\mathbf{M} \left[ \mathbf{V}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right] \wedge \left[ \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \dot{\mathbf{U}}_n}{2} \right] = 0 \quad (2.36)$$

et la dissipation numérique  $\Delta_{num}$  élémentaire pour une discrétisation par éléments finis entre les nœuds  $N_0$  et  $N_1$  est évaluée par l'expression suivante :

$$\Delta_{num} = \mathbf{M} \left[ \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \dot{\mathbf{U}}_n \right]_{N_0} \cdot \left[ \mathbf{V}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{N_1} + \left[ \mathbf{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]_{N_1} \cdot \left[ \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n \right]_{N_1} \quad (2.37)$$

Dans ces conditions l'algorithme est inconditionnellement stable, dissipe de l'énergie et conserve les moments linéaires et angulaires dans le cadre non linéaire. A noter que cet algorithme est précis au premier ordre et que cette précision est d'autant

meilleure que les hautes fréquences sont purement numériques. Si parmi les hautes fréquences il y a des fréquences physiques, l'imprécision pourrait avoir lieu si la dissipation numérique dépasse la dissipation physique. Cela pourrait se traduire, pour les cas de calculs sur la dynamique des machines tournantes avec contact rotor/stator, par une imprécision dans le cas où le contact dissipe moins d'énergie que la dissipation numérique elle-même.

### 2.3.3. Conclusion

Les schémas d'intégration en temps dédiés aux applications non linéaires tel le schéma EDMC, EMCA, etc. permettent de traiter d'une façon plus fiable des problèmes non linéaires. Ils peuvent assurer une stabilité indépendante du pas de temps, et certains permettent de dissiper l'énergie numérique, conserver des structures symplectiques tel le moment angulaire, etc. Ils semblent très adaptés aux problèmes de dynamique incluant des non linéarités de contact/frottement. Par contre, ils sont moins reconnus dans le monde des logiciels commerciaux. Ils sont plus compliqués à manipuler, comme leur formulation dépend du cas par cas et ne peut être généralisée comme le cas des algorithmes plus "traditionnels" tel le schéma de Newmark.

Dans le cadre de la thèse, il n'est pas possible d'utiliser l'algorithme EDMC, malgré que ce choix aurait été le plus convenable à des problèmes de contact rotor-stator, car cet algorithme n'est pas encore réputé dans le monde des logiciels de calcul par éléments finis, que ce soit le Code\_Aster ou autres <sup>1</sup>.

## 2.4. Les méthodes explicites

Les méthodes explicites présentent l'avantage de ne pas résoudre à chaque pas de temps l'équation fondamentale de la dynamique. Les résultats à l'étape  $n + 1$  ne dépendent que des résultats à l'étape  $n$ . En plus, la matrice masse est diagonalisée (lumpée) de façon à éliminer les inversions complexes et coûteuses en temps de calcul des matrices, et les remplacer par de simples opérations vectorielles. Cela rend le calcul à un pas de temps donné assez rapide. Par contre, ce ne sont pas des méthodes inconditionnellement stables. Le pas de temps doit être toujours inférieur à un pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$  comme indiqué par Géradin et Rixen [94], au dessus duquel, un cumul important de l'erreur numérique a lieu et conduit inévitablement à la divergence, surtout pour les applications en dynamique linéaire. Dans certains problèmes non linéaires et comme mentionné par Bathe [95], un pas de temps supérieur à celui critique conduit à un cumul important de l'erreur plutôt qu'à la divergence de la solution, qui sera en partie stable et en partie instable. La condition de stabilité des algorithmes explicites est connue par la condition de Courant et dépend du système en question et de ses fréquences propres. La discrétisation

---

1. Abaqus propose une version adaptée du schéma des différences centrées qui permet de résoudre des problèmes de contact rotor-stator avec un temps CPU très compétitif, mais qui ne présente pas la même stabilité et ne conserve pas les moments linéaires et angulaires comme est le cas du schéma EDMC.

éléments finis du modèle a également de l'influence sur  $\Delta t_{cr}$ . En effet,  $\Delta t_{cr}$  dépend du plus petit élément dans le maillage. Cela pourrait conduire à des pas de temps critiques trop faibles si les objectifs de la modélisation nécessitent un raffinement particulier de certains éléments.

Ce sont des méthodes adaptées aux problèmes dynamiques incluant des phénomènes physiques à hautes fréquences comme la propagation d'une onde de choc suite à un accident de voiture, comme mentionné par Wriggers [96], et aux problèmes de la dynamique rapide Belytschko et Hughes [97], Belytschko et al. [98].

Le plus utilisée parmi les méthodes explicites est la méthode des différences centrées. Certaines valeurs symplectiques tel le moment angulaire peuvent être conservées par les schémas d'intégration explicite. Leur inconvénient principal reste la stabilité conditionnelle.

### 2.4.1. Méthode des différences finies centrées

L'utilisation du schéma des différences centrées ne s'arrête pas au monde de la dynamique rapide, l'analyse des structures, etc. mais a également eu beaucoup de succès dans le monde de la CFD (Computational Fluid Dynamics). Par la suite, ce schéma est exposé tel qu'il est codé dans Code\_Aster par Alarcon [99] et dans la thèse de Maheo [100].

L'idée consiste à approcher les valeurs des vitesses aux pas de temps  $t_{n+\frac{1}{2}}$  et  $t_{n-\frac{1}{2}}$  par :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}}{\Delta T} \quad (2.38)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta T} \quad (2.39)$$

L'Eq. (2.38) est également équivalente à l'écriture :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{n-\frac{1}{2}} + \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.40)$$

et c'est cette dernière qui est utilisée en général par les codes de calculs commerciaux.

Les déplacements au pas de temps  $n + 1$  s'écrivent :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

et les accélérations peuvent être déduites de l'équation fondamentale de la dynamique par :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n-\frac{1}{2}}] \quad (2.42)$$



Ces accélérations seront équivalentes à une expression déduite des équations Eq. (2.39) et Eq. (2.38) :

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{U}}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta T} = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - 2\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n-1}}{\Delta T^2} \quad (2.43)$$

Cela est d'autant plus précis que  $\Delta T$  est faible.

On rappelle que dans les méthodes explicites et pour accélérer le calcul, la matrice de masse est lumpée de façon à éviter les inversions lourdes de matrices.

L'initialisation de l'algorithme de la méthode des différences finies centrées consiste à avoir en main les valeurs de déplacements, vitesses et accélérations initiaux. La majorité des logiciels de calcul par éléments finis, se contentent d'initialiser à zéro les valeurs des accélérations initiales si ces dernières ne sont pas explicitement renseignées. D'autres, empêchent toute tentative d'initialisation des accélérations. Pour nos besoins de calcul et pour développer la méthode de la bascule ce point est gênant et on y revient plus tard dans ce chapitre.

L'initialisation consiste à calculer  $\dot{\mathbf{U}}_{-\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_0 - \frac{\Delta T}{2}\ddot{\mathbf{U}}_0$ . Le calcul pour  $n \geq 1$  s'enchaîne à partir des valeurs à  $t = t_0$  et  $\dot{\mathbf{U}}_{-\frac{1}{2}}$ .

La stabilité de la méthode des différences finies centrées repose sur l'utilisation d'un pas de temps  $\Delta T \leq \Delta t_{cr}$ , où  $\Delta t_{cr}$  est calculée par :

$$\Delta t_{cr} = \frac{2\gamma_s}{\omega_{max}} \quad (2.44)$$

où  $\gamma_s$  est un facteur de sécurité pour la stabilité du calcul et  $\omega_{max}$  est la pulsation maximale du système. Cela revient à dire que le pas de temps critique dépend de la plus grande fréquence propre du système, et donc de la taille du plus petit élément dans la structure. Cet algorithme est stable, conserve le moment angulaire, et son énergie totale oscille. Il est équivalent à celui de Newmark pour  $\beta = 0$  et  $\gamma = 0.5$ .

L'algorithme des différences finies centrées ne dissipe pas de l'énergie, d'où sa stabilité dans le domaine non linéaire qui se voit menacée par le cumul d'erreur et d'énergie purement numérique. Certains code commerciaux comme Abaqus, ont développé et adapté des méthodes explicites comme la méthode des différences finies centrées pour les applications de contact/frottement en dynamique rapide.

Cependant, les algorithmes explicites qui dissipent l'énergie ont toujours existé comme la méthode  $\alpha$ -généralisé explicite, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 2.4.2. Algorithme $\alpha$ -généralisé Explicite

L'algorithme implicite  $\alpha$ -généralisé a été étendu dans Hulbert et Chung [101] à l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé, en posant  $\alpha_F = 1$  dans l'équation Eq. (2.26), ce qui permet de déduire les accélérations pour une matrice de masse qui sera lumpée par :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{1 - \alpha_M} \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{ext}^n - \mathbf{F}_{int}^n] - \frac{\alpha_M}{1 - \alpha_M} \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.45)$$

Les vitesses seront évaluées par :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t [1 - \gamma] \ddot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.46)$$

et les déplacements par :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta T \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta T^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \ddot{\mathbf{U}}_n + \Delta T^2 \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.47)$$

L'analyse de stabilité montre que l'algorithme est conditionnellement stable et précis au second ordre. Cela est vrai pour le domaine linéaire et non linéaire d'où son intérêt pour des applications en dynamique rapide non linéaire tel le contact. Cependant, cet algorithme reste moins populaire dans le monde des logiciels de calcul par éléments finis que la méthode des différences finies centrées.

## 2.5. Problématique de l'initialisation de la solution 3D et régime transitoire

L'Eq. (2.11) résume l'initialisation du modèle 3D au moment de la bascule. Elle repose sur une hypothèse statique qui ne viole pas l'équation fondamentale de la dynamique du modèle 3D au moment de la bascule. Par contre, il faut noter qu'avec cette hypothèse, seuls les déplacements sont différents de l'hypothèse de solide rigide. Les vitesses et les accélérations restent celles construites à partir de la solution poutre et présentent, pour les cas étudiés dans le cadre de la thèse, un écart de 5 % en moyenne par rapport aux valeurs de référence d'une solution 3D pour une simulation sans bascule (qui démarre à  $t = 0$  s). Les valeurs des déplacements sont pratiquement identiques à ceux de référence (on y revient plus tard dans les applications). Cet écart, malgré sa faiblesse pourrait conduire au moment de la bascule à un régime transitoire qui se manifeste par des oscillations hautes fréquences constatées sur les vitesses mais surtout sur les accélérations. Pour mieux comprendre la problématique du régime transitoire due à une initialisation insuffisamment précise de la solution, prenons un cas physique simple et traitons le numériquement.

Sur une poutre simplement appuyée des deux côtés et qui ne présente pas d'amortissement, une force sinusoïdale est appliquée en plein milieu de la poutre :

$$\mathbf{F}_p(t) = \mathbf{f}_m \sin(\omega t) \quad (2.48)$$

On peut démontrer que la réponse analytique de la poutre en régime permanent à une telle excitation est de la forme :

$$\mathbf{U}_p(t) = -\mathbf{U}_m \sin(\omega t) \quad (2.49)$$

Avec  $\mathbf{U}_m$  une valeur constante qui représente l'amplitude maximale des oscillations. Il s'en suit une réponse en vitesses et en accélérations qui sont respectivement la dérivée, et la dérivée seconde de la réponse en déplacement :

$$\dot{\mathbf{U}}_p(t) = -\omega \mathbf{U}_m \cos(\omega t) \quad (2.50)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_p(t) = \omega^2 \mathbf{U}_m \sin(\omega t) \quad (2.51)$$

A  $t = 0$ , la vitesse n'est pas nulle (alors que les déplacements et les accélérations le sont) et est à son maximum en valeur absolue. On note par la suite  $\mathbf{V}_0 = -\omega \mathbf{U}_m$  la vitesse initiale de la poutre à  $t = 0$ . Si on essaye de résoudre ce problème numériquement via une résolution par un schéma en temps, et qu'on initialise les vitesses et les accélérations à zéro, on obtient des hautes fréquences sur les vitesses et les accélérations qui sont d'autant plus importantes en amplitude que le pas de temps est faible. Cela vient du fait qu'un régime transitoire est créé et que la solution cherche l'équilibre durant le premier pas de temps, et donc cherche à trouver la valeur de  $\mathbf{V}_0$  en partant d'une valeur nulle. Ceci génère des accélérations qui tendent vers l'infini si le pas de temps tend vers zéro. Si le schéma en temps conserve l'énergie et est stable dans le cadre linéaire comme le schéma de Newmark, les hautes fréquences ne seront pas amplifiées mais non amorties non plus. Ce qui rend la solution incorrecte en vitesses et en accélérations. Pour pallier à ce problème, on peut utiliser un schéma en temps qui dissipe les hautes fréquences purement numériques tel le schéma HHT, ou bien initialiser correctement les vitesses et les accélérations à  $t = 0$ .

La première possibilité nécessite d'attendre quelques pas de temps pour que la dissipation des hautes fréquences soit effectuée, mais la deuxième reste plus propre et ne nécessite pas un schéma en temps dissipatif. L'équation d'équilibre de la poutre en absence d'amortissement s'écrit :

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{K}_p \mathbf{U}_p = \mathbf{F}_p \quad (2.52)$$

et si dans l'Eq. (2.52) on insère les Eq. (2.48), Eq. (2.49), Eq. (2.50) et Eq. (2.51) et on cherche la valeur de  $\mathbf{V}_0$ , on trouve qu'elle est solution de :

$$(\mathbf{M}_p \omega^2 + \mathbf{K}_p) \mathbf{V}_0 = \omega \mathbf{f}_m \quad (2.53)$$

Ce qui correspond à  $\mathbf{V}_0 = -\omega \mathbf{U}_m$ . Si on initialise les vitesses avec cette valeur, le régime transitoire n'a pas lieu et aucune haute fréquence n'est présente.

Le régime transitoire de la solution 3D au moment de la bascule a les mêmes causes numériques que celles trouvées dans cet exemple simple. L'initialisation par le système d'Eq. (2.11) malgré le respect l'équation d'équilibre du modèle 3D au moment de la bascule, reste un peu forte et un régime transitoire apparaît au moment de la bascule. Le choix d'un schéma d'intégration en temps qui dissipe les hautes fréquences purement numériques pourrait contribuer à la stabilité de la solution 3D après la bascule. La deuxième possibilité consiste à faire une correction des valeurs des vitesses et des accélérations qui tient compte de la déformation dans la section et qui élimine le passage par un régime transitoire. On détaille dans la suite ces deux possibilités.

### 2.5.1. Stabilisation par amortissement numérique

La question de l'amortissement numérique ouvre une question plus large, celle du choix du schéma d'intégration en temps. Certains présentent l'avantage de dissiper les hautes fréquences et peuvent servir pour stabiliser la solution  $3D$  après bascule. Cela dépend également du choix du logiciel commercial de calcul par éléments finis, et qui de fait ne pourrait pas présenter toutes les possibilités. Certains logiciels sont plus adaptés au calcul implicite (Code\_Aster), d'autres montrent des performances importantes en calcul explicite non linéaire (Abaqus). On essaiera dans la suite d'exposer une méthode générale qui ne dépend pas du logiciel, mais les exemples d'applications seront effectués avec le Code\_Aster.

La bascule se fait avant la détection du contact, et donc s'effectue dans le cadre linéaire et par la suite on a intérêt à utiliser un schéma en temps implicite qui permet de prendre des pas de temps relativement larges. Le schéma de Newmark reste parmi les plus utilisés dans ce domaine. Si au moment de la bascule on choisit de stabiliser la solution par un amortissement numérique, on pourrait introduire un amortissement via le schéma de Newmark mais qui le rend précis au premier ordre. C'est pourquoi on préfère s'orienter vers le schéma HHT. Le même principe pourrait être appliqué si on effectue une simulation explicite. Dans ce cas, le schéma  $\alpha$ -généralisé pourrait amortir les hautes fréquences.

Stabiliser la bascule par un amortissement numérique dans le schéma HHT ne change pas la solution post régime-transitoire. Quelques pas de temps après la bascule, les vibrations hautes fréquences disparaissent comme c'est visible dans les résultats présentés un peu plus loin dans ce chapitre.

### 2.5.2. Bascule à trois pas de temps

Pour résoudre un problème de dynamique, on doit disposer des conditions initiales en vitesses et en déplacements. Les accélérations initiales sont par la suite la solution de l'équation fondamentale de la dynamique à l'instant initial. Cependant, si cette équation est le fruit d'une résolution numérique via un schéma d'intégration en temps, les valeurs des accélérations initiales dans ce cas dépendront du schéma d'intégration en temps utilisé.

Dans le cas d'un schéma explicite, la non initialisation des accélérations conduit le logiciel (c'est le cas de tous les logiciels de calcul par éléments finis) à prendre par défaut des accélérations initiales nulles, alors que pour un schéma implicite tel le schéma de Newmark et comme expliqué plus tôt dans ce chapitre, les accélérations sont correctement initialisées au moment de la bascule si les valeurs initiales en vitesses et en déplacements sont fournies au logiciel. Par la suite, pour un schéma explicite il est obligatoire de renseigner les valeurs des accélérations au moment de la bascule (ainsi que ceux des déplacements et des vitesses). Par contre, avec l'utilisation d'un schéma implicite de Newmark (ou HHT), il suffit de renseigner les valeurs des déplacements initiaux et ceux des vitesses, et les accélérations seront automatiquement calculées par le logiciel à partir de l'équation du mouvement. Cela permet d'avoir une initialisation adaptée et qui n'excite pas les hautes fréquences purement numérique.

Comme mentionné plus tôt, l'initialisation de la solution 3D exposée dans Eq. (2.11) se base sur les hypothèses Eq. (2.9) qui sont un peu fortes, et génèrent des vitesses et des accélérations qui ne sont pas parfaitement adaptées à la cinématique 3D, vu qu'elles sont uniquement basées sur une hypothèse poutre. Cela provoque l'apparition d'un régime transitoire au moment de la bascule. Par contre, les valeurs des déplacements sont adaptées au modèle 3D. Pour cela, à partir des déplacements corrigés on peut proposer une technique qui permet de calculer une meilleure approximation des vitesses (et des accélérations pour un schéma en temps explicite), et permet d'éliminer le régime transitoire et les hautes fréquences qui s'en suivent.

On présente par la suite la bascule sur des cas statiques permettant de mettre en valeur l'exactitude de la solution 3D en déplacements construite par la méthode de la bascule, puis selon le schéma en temps choisi on construit une correction des vitesses et des accélérations.

### 2.5.3. La bascule appliquée sur des problèmes statiques

La bascule pour un problème statique est un cas particulier de la bascule présentée pour le cas dynamique. On la présente par la suite pour vérifier que les déplacements après bascule seront suffisamment proches d'une solution statique 3D de référence.

L'équation d'équilibre de la solution poutre pour un problème statique s'écrit :

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_p = \mathbf{f}_p \quad (2.54)$$

Celle du modèle 3D est :

$$\mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{f}_{3D} \quad (2.55)$$

Les déplacements 3D peuvent être construits comme expliqué précédemment dans Eq. (2.3), et cela conduit au calcul de  $\mathbf{U}_{3Dc}$  comme solution de :

$$\mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3Dc} = \mathbf{f}_{3D} - \mathbf{K}_{3D}\mathbf{P}\mathbf{U}_p \quad (2.56)$$

Cette correction statique  $\mathbf{U}_{3Dc}$  ajoutée à  $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$  est comparée à une solution de référence pour le même modèle 3D, calculée par résolution de Eq. (2.55). Cela a été effectué sur plusieurs modélisations et maillages, avec plusieurs formes de section et conditions aux limites et on a remarqué que la différence entre les déplacements calculés par la bascule et les déplacements d'une solution de référence sont pratiquement négligeables (inférieur à  $10^{-5}$  %). D'autres applications ont également été effectuées sur une poutre bi-appuyée des deux cotes et soumise à un moment de flexion de chaque côté. Les résultats trouvés par la méthode de la bascule ont été comparés avec la solution analytique proposée par Salençon [102] et sont pratiquement identiques (avec la même précision qu'auparavant). Cela met en valeur la bonne correction des déplacements par la méthode de la bascule.

### 2.5.4. Principe de la bascule à trois pas de temps

Comme une bascule statique permet de bien calculer les valeurs des déplacements  $3D$  au moment de la bascule, alors une correction des vitesses et accélérations peut être faite en s'appuyant sur les valeurs des déplacements obtenues par la méthode de la bascule sur trois pas de temps consécutifs : celui de la bascule, le pas de temps suivant et celui précédent. En effet la correction des déplacements par le §2.2.2 prend en compte la déformation dans la section. Avec l'utilisation d'un schéma d'intégration en temps implicite, on corrige les vitesses et les accélérations sont automatiquement calculées par le schéma en temps. On effectue trois corrections statiques à l'instant de la bascule  $t_b$ , à l'instant précédent  $t_{b-1}$  et à l'instant suivant  $t_{b+1}$ . Et puis sur la base de ces trois corrections statiques on peut effectuer, selon la méthode des différences finies, une meilleure initialisation des vitesses comme suit :

$$\dot{\mathbf{U}}_{3D} = \frac{[\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}](t = t_{b+1}) - [\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}](t = t_{b-1})}{2\Delta T} \quad (2.57)$$

Cette initialisation des vitesses ajoutée à l'initialisation des déplacements conduit avec le schéma de Newmark, et tel expliqué dans le §2.3.1, à calculer les accélérations initiales comme solution de :

$$\mathbf{M}_{3D}\ddot{\mathbf{U}}_{3D} = (\mathbf{f}_{3D} - \mathbf{C}_{3D}\dot{\mathbf{U}}_{3D} - \mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3D}) \quad (2.58)$$

Cette méthode d'initialisation est simple et efficace dans les cas d'études montrées dans ce chapitre et plusieurs autres. C'est une initialisation parfaitement consistante avec le schéma de Newmark et le schéma HHT, et sera par la suite proposée comme une méthode précise pour effectuer la bascule poutre vers  $3D$  dans la suite de la thèse.

Comme Code\_Aster est un logiciel implicite, et que dans dans le cadre de la thèse la majorité des applications de bascule se font avec un schéma de Newmark ou un schéma HHT, on n'aura donc pas à initialiser les accélérations. Cependant, et dans le soucis de présenter une méthode de bascule indépendante du choix de logiciel et du schéma en temps, et si on souhaite utiliser un schéma en temps explicite, alors dans ce cas et comme discuté précédemment, l'initialisation des accélérations est obligatoire. Pour un schéma de différences centrées, la méthode des différences finies conduit à l'initialisation suivante des accélérations (l'initialisation des vitesses est toujours exprimée par l'Eq. (2.57)) :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{3D} = \frac{[\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}](t = t_{b+1}) - 2[\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}](t = t_b) + [\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}](t = t_{b-1})}{\Delta T^2} \quad (2.59)$$

Cette méthode d'initialisation des accélérations s'est montrée efficace sur plusieurs cas d'étude qui ne seront pas présentés dans le cadre de cette thèse.

## 2.6. Consistance théorique de la bascule : orthogonalité des vecteurs $\mathbf{PU}_p$ et $\mathbf{U}_{3Dc}$

### 2.6.1. Conditions et significations théoriques de l'orthogonalité des vecteurs $\mathbf{PU}_p$ et $\mathbf{U}_{3Dc}$

Si  $\mathbf{PU}_p$  est le fruit d'un calcul poutre basé sur l'hypothèse de section non déformable, et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  est un calcul 3D qui prend en compte la déformation de la section, alors théoriquement, ces deux vecteurs doivent être orthogonaux. En d'autres termes, comme  $\mathbf{U}_{3Dc}$  est une solution purement 3D, alors sa construction ne doit pas dépendre de  $\mathbf{PU}_p$ , comme cette dernière est générée à partir d'une solution poutre. Cela signifie également que  $\mathbf{U}_{3Dc}$  représente seulement la déformation de la section et n'est pas liée à la flexion de la poutre, comme cette dernière est prise en compte dans  $\mathbf{PU}_p$ . Nous allons donner par la suite un sens précis à cette notion d'orthogonalité.

L'équation fondamentale de la dynamique du modèle 3D en absence de la rotation d'ensemble au moment de la bascule  $t = t_b$  est donnée par :

$$\mathbf{M}_{3D}\ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{C}_{3D}\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{f}_{3D} \quad (2.60)$$

De  $\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{PU}_p + \mathbf{U}_{3Dc}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T\mathbf{M}_{3D}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{P}^T\mathbf{M}_{3D}\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} &+ \\ \mathbf{P}^T\mathbf{C}_{3D}\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{P}^T\mathbf{C}_{3D}\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} &+ \\ \mathbf{P}^T\mathbf{K}_{3D}\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{P}^T\mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3Dc} &= \mathbf{P}^T\mathbf{f}_{3D} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Théoriquement, si les matrices de masse, raideur et amortissement du modèle 3D (respectivement  $\mathbf{M}_{3D}$ ,  $\mathbf{K}_{3D}$  et  $\mathbf{C}_{3D}$ ) ne sont pas lumpées et si les fonctions de formes des modèles poutre et 3D sont compatibles, alors on peut démontrer qu'on a (voir §2.11) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T\mathbf{M}_{3D}\mathbf{P} &= \mathbf{M}_p \\ \mathbf{P}^T\mathbf{K}_{3D}\mathbf{P} &= \mathbf{K}_p \\ \mathbf{P}^T\mathbf{C}_{3D}\mathbf{P} &= \mathbf{C}_p \end{aligned} \quad (2.62)$$

ainsi que  $\mathbf{P}^T\mathbf{f}_{3D} = \mathbf{f}_p$ . Cependant, les Eq. (2.62) ne sont pratiquement jamais vérifiées. La difficulté principale ne réside pas dans la condition d'avoir des matrices non lumpées (c'est possible dans la majorité des codes de calcul par éléments finis commerciaux), mais dans la compatibilité des fonctions de formes des modèles 3D et poutre. Les Eq. (2.62) représentent une approximation d'autant plus correcte que le maillage du modèle 3D est fin.

Comme  $\mathbf{U}_p$  est la solution poutre qui correspond à  $\mathbf{M}_p\ddot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{C}_p\dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{K}_p\mathbf{U}_p = \mathbf{f}_p$ , alors l'Eq. (2.61) conduit à :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}^T \mathbf{C}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc} = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

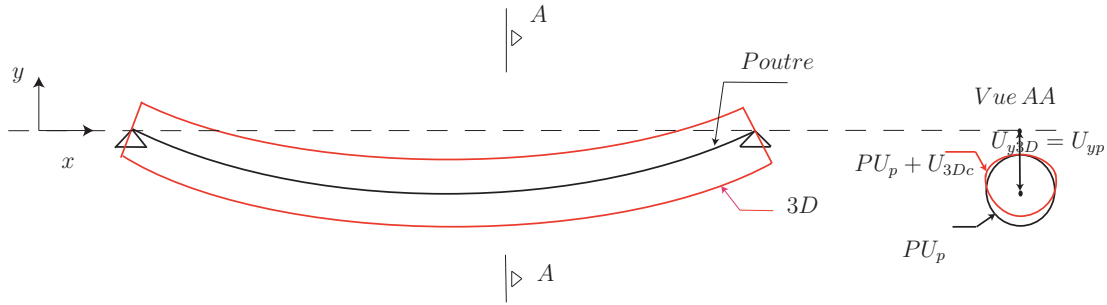
Ainsi, sous les hypothèses suivantes  $\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$  (voir Eq. (2.9)), on obtient alors la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc} = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

Le calcul de l'opérateur matriciel  $\mathbf{P}^T$  s'avère compliqué, en revanche on remarque que la condition d'orthogonalité implique :

$$\forall \mathbf{U}_p, (\mathbf{P}\mathbf{U}_p)^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc} = 0 \quad (2.65)$$

La vérification de la condition d'orthogonalité des champs  $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  implique que la construction du champs de correction 3D ( $\mathbf{U}_{3Dc}$ ) ne dépend pas de la solution poutre. En d'autres termes,  $\mathbf{U}_{3Dc}$  est un champs 3D qui tient compte de la déformation de la section, mais ne contribue pas à la flèche du modèle 3D, comme cette dernière est prise en compte dans la solution poutre. Cela est illustré dans la Fig. 2.2 .



**Figure 2.2.:** Concept théorique de l'orthogonalité

La vérification de la condition d'orthogonalité signifie pratiquement que la solution 3D au moment de la bascule possède exactement la même flèche que la solution poutre. La correction  $\mathbf{U}_{3Dc}$  apporte l'information complémentaire à la solution 3D et qui ne peut pas être présente dans la solution poutre, i.e., la déformation de la section.

La condition d'orthogonalité peut être vue également sous un angle différent, celui de la contribution distribution de chaque composant de la solution ( $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ ), à l'énergie de déformation de la solution 3D au moment de la bascule.

L'énergie de déformation de la poutre s'écrit :

$$W_{d_p} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_p)^T \mathbf{K}_p \mathbf{U}_p \quad (2.66)$$

L'énergie de déformation du modèle 3D et si on prend en compte la symétrie de la matrice de raideur est :



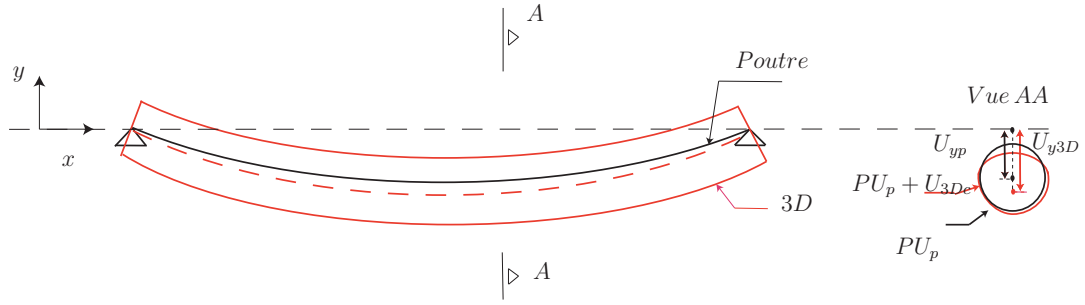


Figure 2.3.: Orthogonalité non vérifiée

$$\begin{aligned}
 W_{d_{3D}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{3D})^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3D} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_{3Dc}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc} + \frac{1}{2} (\mathbf{PU}_p)^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{PU}_p \\
 &+ (\mathbf{PU}_p)^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

La condition d'orthogonalité et l' Eq. (2.62) donnent :

$$\begin{aligned}
 W_{d_{3D}} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_{3Dc}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc} + \frac{1}{2} (\mathbf{PU}_p)^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{PU}_p \\
 &= W_{d_{3Dc}} + W_{d_p}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Par la suite, l'énergie de déformation du modèle 3D est égale à la somme de l'énergie de déformation associée à la déformation de la section  $W_{d_{3Dc}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{3Dc}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{U}_{3Dc}$  et de l'énergie de déformation de la poutre.

### 2.6.2. Conséquences de la non vérification de la condition d'orthogonalité sur la bascule

Suite à l'incompatibilité des fonctions de forme du modèle poutre et celui 3D (les espaces de discrétisation n'étant pas hiérarchiquement emboîtés), il est impossible de satisfaire exactement la condition d'orthogonalité de  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ . Cette condition pourrait être satisfaite ou "forcée" si l'approche de la bascule est intrusive. Cela est discuté en détails dans le §2.11, mais ne représente pas le cœur de la thèse car l'objectif de la thèse est le développement d'une approche non intrusive. La non vérification de la condition d'orthogonalité implique que la construction du champs 3D de correction ( $\mathbf{U}_{3Dc}$ ) dépend de la solution poutre ( $\mathbf{U}_p$ ). C'est à dire que  $\mathbf{U}_{3Dc}$  comporte une composante poutre qui ajuste la flèche du modèle 3D et une autre composante qui tient compte de la déformation de la section comme illustré dans la Fig. 2.3.

La non orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  est visible dans les applications illustrées dans ce chapitre (différence de flèches à n'importe quel instant de calcul

entre la solution poutre et 3D de référence, ainsi que des différences sur les vitesses et les accélérations). Cependant, ces mêmes exemples d'application montrent l'efficacité de la bascule. L'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  n'est donc pas une condition nécessaire à la bascule.

## 2.7. Consistance énergétique de la bascule

Pour valider l'utilisation de la bascule pour des problèmes de dynamique, on compare la solution 3D après bascule à celle de référence obtenue par le calcul sur le modèle 3D effectué depuis le début de la simulation. Un autre moyen pour valider l'utilisation de la bascule sur les problèmes de dynamique, est de vérifier que la bascule n'enlève ni n'insère de l'énergie parasite dans la solution 3D, ce qui pourrait conduire à une simulation non physique. Une comparaison de la variation des énergies cinétiques, de déformation et de l'énergie totale sera effectuée entre le modèle poutre, celui 3D de référence et celui 3D de bascule. Ce moyen d'analyser la précision des résultats est largement utilisé dans la littérature. On cite la thèse de Noels [70] et les travaux de Noels et al. [15, 12, 14], dans lesquels ce moyen d'analyse a servi pour montrer la stabilité et la consistance d'une bascule entre des schémas en temps implicites et explicites.

A noter que d'une façon plus générale, le problème de la consistance énergétique de la bascule pourrait être vu sous un angle théorique plus large, celui de l'orthogonalité des champs poutre  $\mathbf{PU}_p$  et celui 3D de correction  $\mathbf{U}_{3Dc}$  (cf. §2.6). La consistance énergétique permet cependant d'avoir une vision numérique et de valider les résultats obtenus par la bascule sachant que les champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ , et cela dans toutes les applications de la thèse, ne sont pas orthogonaux.

Si on dispose d'un système mécanique soumis à une force extérieure  $\mathbf{F}$ , ayant une matrice de masse  $\mathbf{M}$ , de raideur  $\mathbf{K}$ , et notant les déplacements  $\mathbf{U}$  et les vitesses  $\dot{\mathbf{U}}$ , l'énergie cinétique peut être calculée par :

$$W_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \quad (2.69)$$

L'énergie de déformation par :

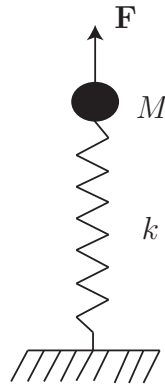
$$W_d = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.70)$$

Le travail des forces extérieures  $W_f$  est calculé par :

$$W_f = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (2.71)$$

On note  $W_{diss}$  le travail des forces de dissipation (frottement, amortissement, etc.). Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{d}{dt} W_c = \frac{d}{dt} W_f + \frac{d}{dt} (W_{diss} - W_d) \quad (2.72)$$



**Figure 2.4.:** Système masse-ressort

Dans les cas d'étude de ce chapitre, le travail des forces dissipatives est négligeable on a par la suite :

$$W_c + W_d = W_f + cte \quad (2.73)$$

où  $cte$  est une constante qui dépend du problème traité.

Pour illustrer l'Eq. (2.73), prenons l'exemple simple d'un système masse-ressort de la Fig. 2.4. Une masse  $M$  est tenue par un ressort de raideur  $k$  et est soumise à une force extérieure  $\mathbf{F}$ .

Si la direction du mouvement est l'axe des  $x$  alors la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$F - kx = M\ddot{x} \quad (2.74)$$

La solution pour cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F}{k} \quad (2.75)$$

avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ . Cela implique :

$$W_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}k(A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t) - AB \sin(2\omega t)) \quad (2.76)$$

On remarque que l'énergie cinétique a une fréquence en  $2\omega$  car  $A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)$  pourrait également être réduite à une fréquence en  $2\omega$ .

Par contre l'expression de l'énergie de déformation ne présente pas la même évolution. En effet :

$$\begin{aligned} W_d = \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}k(A^2 \cos^2(\omega t) + B^2 \sin^2(\omega t) + \frac{F^2}{k^2} \\ &+ 2AB\sin(\omega t)\cos(\omega t) + 2A\frac{F}{k}\cos(\omega t) + 2B\frac{F}{k}\sin(\omega t)) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Cette expression contient deux fréquences :  $\omega$  et  $2\omega$ . Par la suite, l'énergie de déformation et l'énergie cinétique n'ont pas la même fréquence. Cela sera également le cas dans les exemples de bascule effectués sur les machines tournantes<sup>2</sup>.

Si  $F = 0$  on aura  $W_c + W_d = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2) = cte$ .

Si  $F = cte \neq 0$  :

$$W_c + W_d = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{F^2}{k} + 2AF\cos(\omega t) + 2BF\sin(\omega t)\right) = cte + W_f \quad (2.78)$$

En d'autres mots, si la force imposée est constante, on pourrait calculer l'énergie totale par la formule suivante :

$$W_t = W_c + W_d - W_f = cte \quad (2.79)$$

La consistance énergétique de la bascule est vérifiée si la valeur de l'énergie totale est constante ce qui ne perturbe pas l'énergie totale, et de plus si celle-ci est de valeur proche de celle du modèle 3D de référence. Cela permet de vérifier que la bascule n'insère ni enlève de l'énergie dans le modèle 3D et cette énergie garde sa valeur au cours du temps. Si la force extérieure n'est pas une constante, l'énergie totale sera une fonction du temps. Une comparaison sera effectuée entre les différentes courbes d'énergie des modélisations poutre, 3D de référence et celui de bascule.

## 2.8. Exemple d'application

Dans ce paragraphe, on présente un exemple académique simple qui illustre l'efficacité de la méthode de bascule pour des applications en dynamique. En effet, la méthode sera validée sur des cas plus complexes et sur différents types de sections, chargements et conditions aux limites. Pour le cas d'étude présenté ci-après, la modélisation poutre est une modélisation avec une section carrée selon l'hypothèse de Timoshenko et ayant les dimensions explicitées dans le Tab. 2.1 et les caractéristiques matériaux explicitées dans le Tab. 2.2.

Une extrémité de la poutre est encastree et une autre est sujette à un chargement dynamique concentré de valeur  $\mathbf{f}(t) = 100 \times t^3 \times e^{-1.1t}$  sur le centre de gravité de la section, dont l'allure est schématisée par la Fig. 2.5.

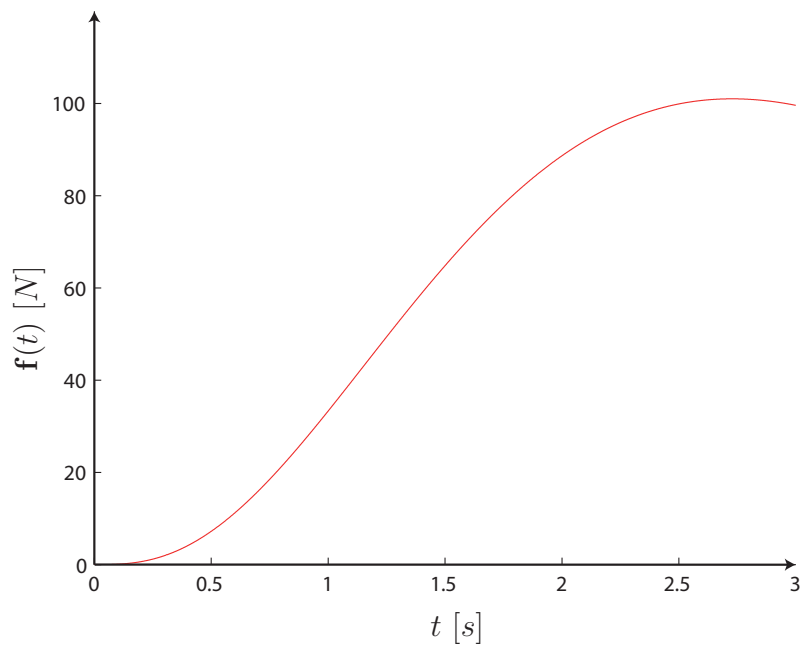
2. Pour savoir si certaines vibrations constatées dans la réponse d'un système à une excitation donnée sont physiques ou numériques, on compare les fréquences propres du système aux fréquences des oscillations en déplacements ou en vitesses et non pas celles des courbes de l'énergie car les fréquences d'oscillations des courbes de l'énergie ne sont pas forcément des fréquences propres du système.

Longueur $L$	Largeur $l$	Hauteur $h$
0.1 m	0.012 m	0.01 m

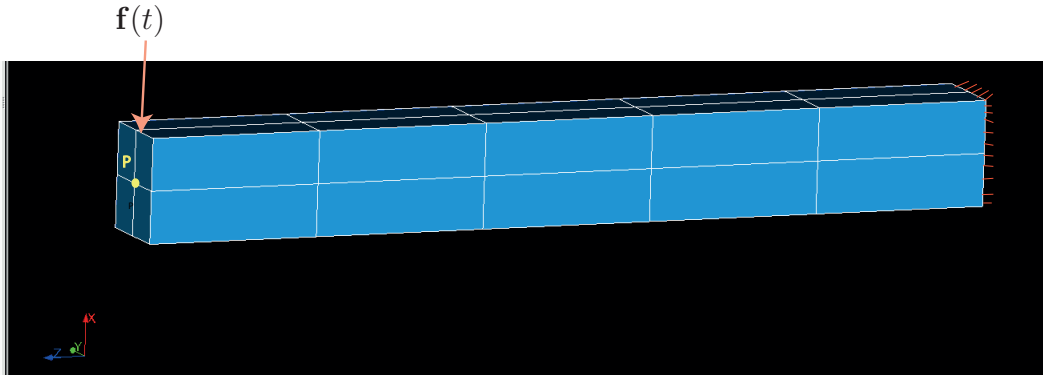
Table 2.1.: Dimensions du modèle étudié dans le §2.8

Densité $\rho$	Module d'Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$
$7800 \text{ kg/m}^3$	$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	0.3

**Table 2.2.:** Caractéristiques matériau du modèle étudié dans le §2.8



**Figure 2.5.:** Allure du chargement dynamique  $f(t) = 100 \times t^3 \times e^{-1.1t}$



**Figure 2.6.:** Le modèle 3D étudié

La Fig. 2.6 illustre le modèle 3D. Ce dernier est maillé avec des éléments quadratiques et compte autour de 200 nœuds<sup>3</sup>. La bascule a lieu à  $t_b = 1.5$  s, de la simulation poutre vers celle avec un modèle 3D équivalent. La solution 3D solution après bascule est comparée à une solution 3D de référence, qui est une solution 3D obtenue sur le même modèle pour une simulation qui démarre à  $t = 0$  et dure trois secondes.

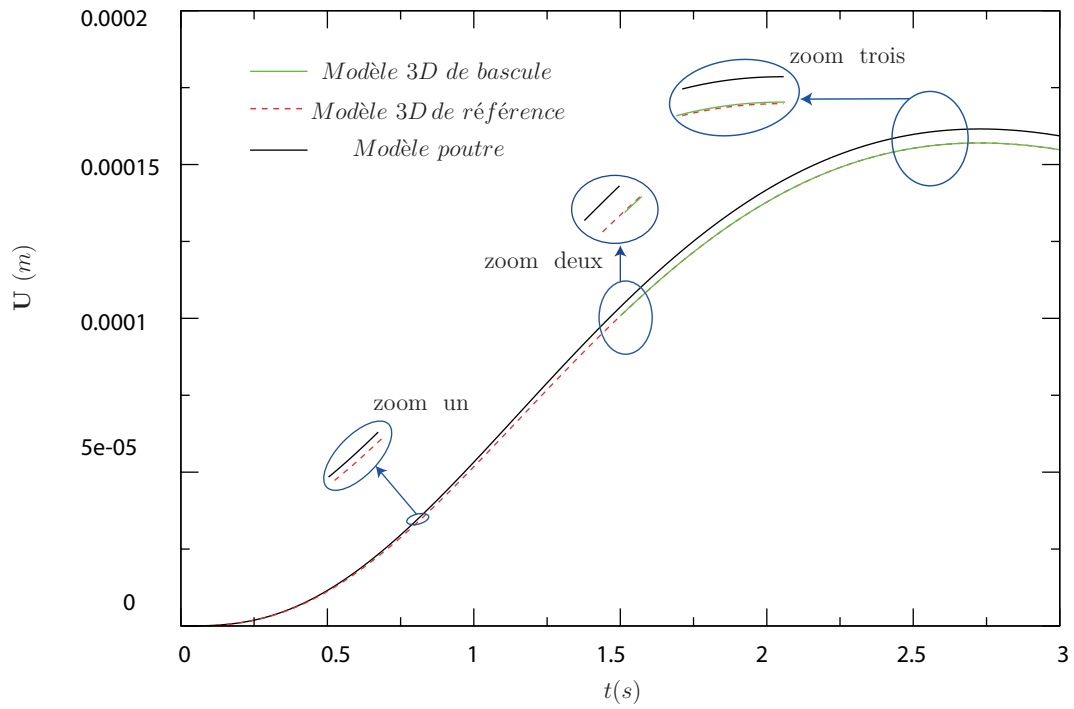
La bascule du modèle poutre à celui 3D s'effectue dans un premier temps selon l'approche décrite dans le §2.2.2 (une correction statique est effectuée et la solution dynamique est stabilisée par un amortissement numérique) et dans un deuxième temps par une initialisation propre des déplacements, vitesses et accélérations pour la méthode de Newmark telle décrite dans le §2.5.4.

On compare les déplacements, vitesses et accélérations du nœud  $P$  où le chargement dynamique est appliqué, et qui appartient au modèle 3D comme le montre la Fig. 2.6, et le point équivalent qui appartient au modèle poutre.

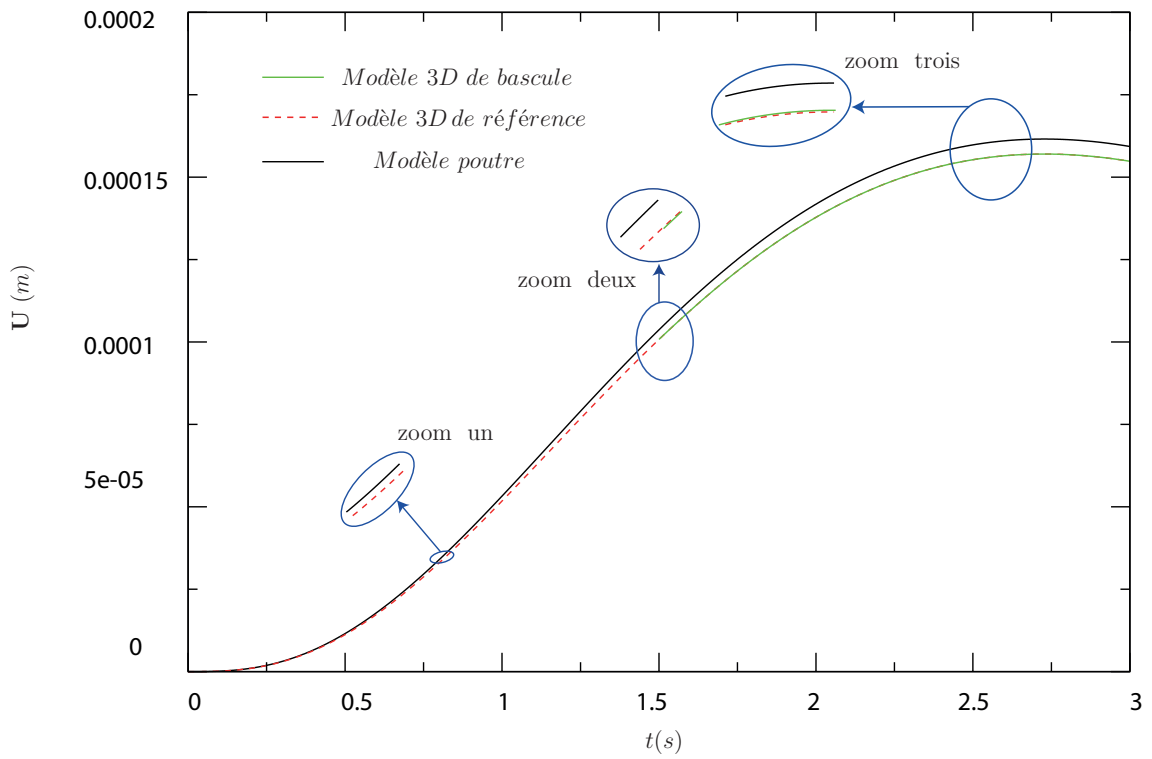
La Fig. 2.7 montre les résultats en déplacements. On peut remarquer une différence entre la solution 3D de référence et la solution poutre. Cette différence est assez faible, mais visible par un zoom. Immédiatement après bascule, la solution 3D de bascule s'avère très précise car très proche de la solution 3D de référence. A noter que les deux méthodes de bascule montrent la même précision en déplacements.

Cependant, et comme le montre la Fig. 2.8, qui représente une comparaison des résultats en vitesses, ou bien Fig. 2.9 qui établit une comparaison des résultats en accélérations, un régime transitoire et des oscillations numériques hautes fréquences à grande amplitude sont détectées directement après bascule dans le cas où les déplacements sont seulement corrigés. Ces oscillations hautes fréquences disparaissent ; quelques pas de temps après la bascule si le schéma en temps contient un amortissement numérique. Dans le cas d'étude présenté dans ce paragraphe, un schéma HHT a été utilisé avec de l'amortissement numérique ( $\alpha = 0.25$ ), et a permis d'amortir les hautes fréquences numériques en 35 pas de temps (0.05 s après bascule), et la solution 3D a convergé vers sa valeur de référence. Par contre, et si une bascule à trois pas de temps est utilisée, les vitesses ne présentent aucune

3. Le même exemple a également été réalisé sur un maillage comptant 1000 nœuds et a donné les mêmes résultats



(a) Stabilisation par amortissement numérique



(b) Bascule à trois pas de temps

Figure 2.7.: Bascule poutre-3D : résultats en déplacements

vibration haute fréquence. Seules les accélérations présentent de très faibles vibrations hautes fréquences à faible amplitude et disparaissent très peu de temps après la bascule.

Les résultats montrent que les deux méthodes d'initialisation fournissent des résultats satisfaisants, mais la bascule à trois pas de temps est plus précise et elle est également simple à implémenter. La bascule poutre-3D accélère la simulation dynamique en 3D, en préservant une très bonne précision.

Une analyse de l'énergie montre également le bon fonctionnement de la bascule. La bascule n'injecte pas de l'énergie parasite dans la simulation. Elle n'en enlève pas non plus.

En Fig. 2.10, on montre une comparaison entre les énergies de déformation de la modélisation poutre, 3D de référence et 3D après bascule. On remarque une différence entre les énergies poutre et 3D de référence. Cela est dû à la différence de modélisation (fonction de formes, etc.) poutre et 3D. Après la bascule, il subsiste un écart très faible entre le modèle 3D de référence et le modèle 3D après bascule, mais il apparaît que la bascule en tant que telle ne provoque pas une perturbation sur la valeur de l'énergie de déformation.

Cette même conclusion est tirée sur la courbe de l'énergie cinétique, i.e., Fig. 2.11 et celle de leur somme, i.e., Fig. 2.12.

A noter que les courbes des énergies, cinétiques, de déformations et totales, sont tracées pour la bascule à trois pas de temps. Si la bascule est stabilisée par amortissement numérique, on constate des oscillations sur l'énergie cinétique (l'énergie de déformation n'est pas affectée car les déplacements ne présentent aucune oscillation par ce type de bascule) avant qu'elle ne converge vers sa valeur de référence comme le montre la Fig. 2.13, qui représente un zoom sur les quelques pas de temps qui encadrent l'instant de la bascule de la courbe de l'énergie cinétique.

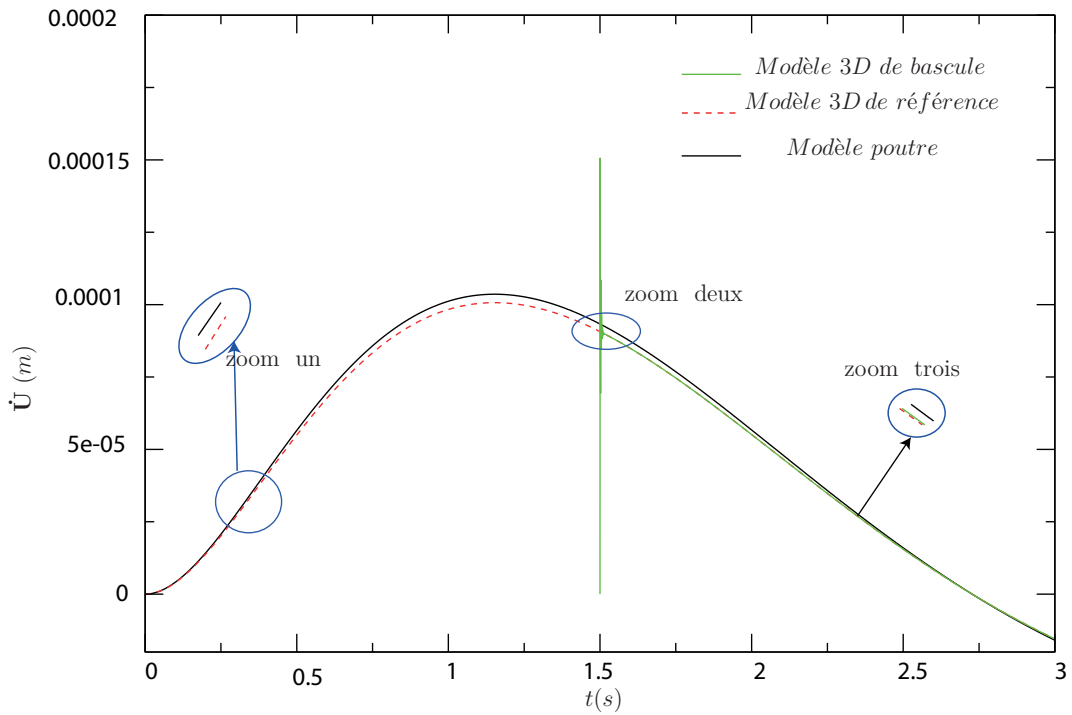
Cependant, dans la majorité des applications industrielles tel le contact rotor/stator, les phénomènes non linéaires sont limités, pas seulement en espace mais aussi en temps. L'utilisation de la zone 3D doit être limitée à la zone présentant des non linéarités pour aboutir à des performances intéressantes en temps de calcul. On pourrait avoir recours à une décomposition de domaine non linéaire dans laquelle les zones 3D et la zone 1D dialoguent tout en vérifiant la continuité en déplacement et l'équilibre des efforts.

Cela peut être effectué d'une façon plus simple par l'utilisation d'un raccord poutre-3D tel qu'illustré dans la Fig. 2.14. Ce raccord doit remplir certaines conditions pour qu'il respecte la physique du problème. Cela fait l'objet du paragraphe suivant. Une fois un raccord adapté choisi, la bascule poutre-3D sera étendue à une bascule d'un modèle poutre à un modèle mixte poutre-3D.

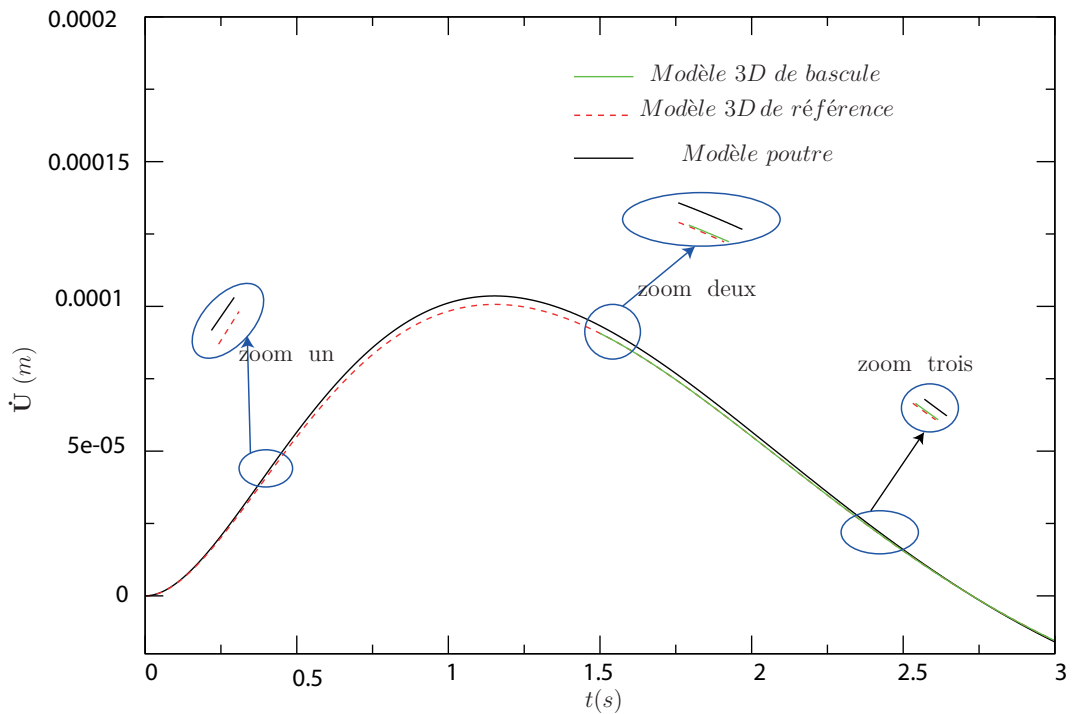
## 2.9. Raccord poutre-3D

Dans Code\_Aster, il existe un type de raccord 3D\_POU qui permet la continuité des déplacements, efforts et contraintes dans la zone de raccord. Il est plus fiable



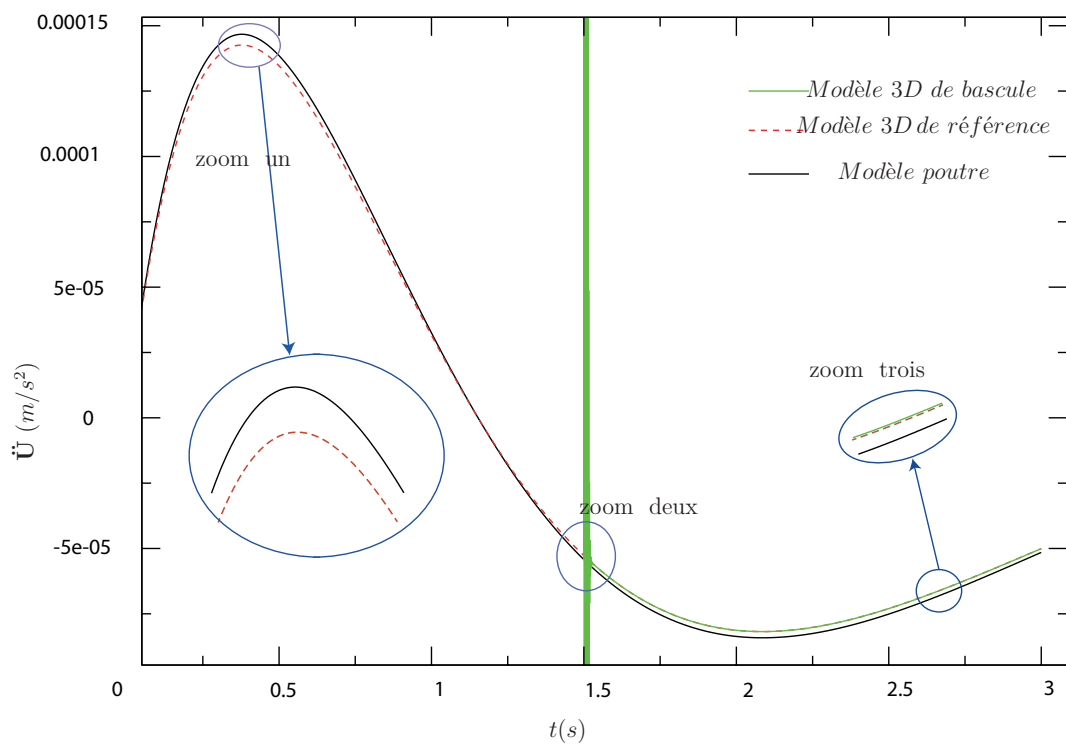


(a) Stabilisation par amortissement numérique

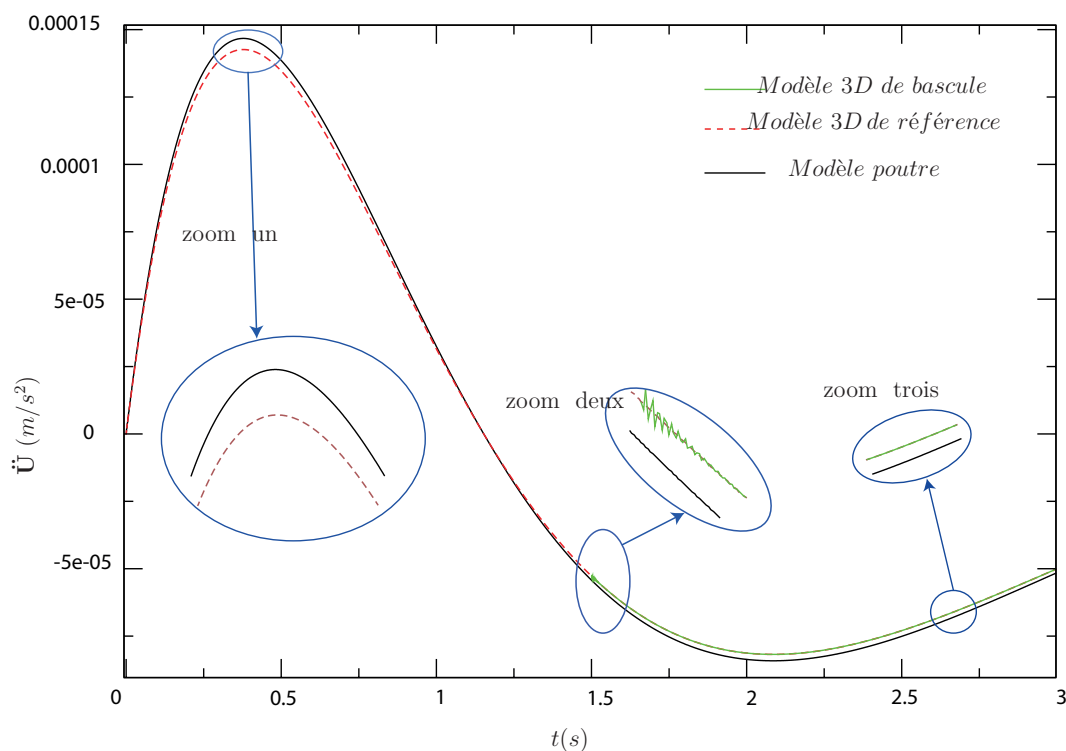


(b) Bascule à trois pas de temps

**Figure 2.8.:** Bascule poutre-3D : résultats en vitesses

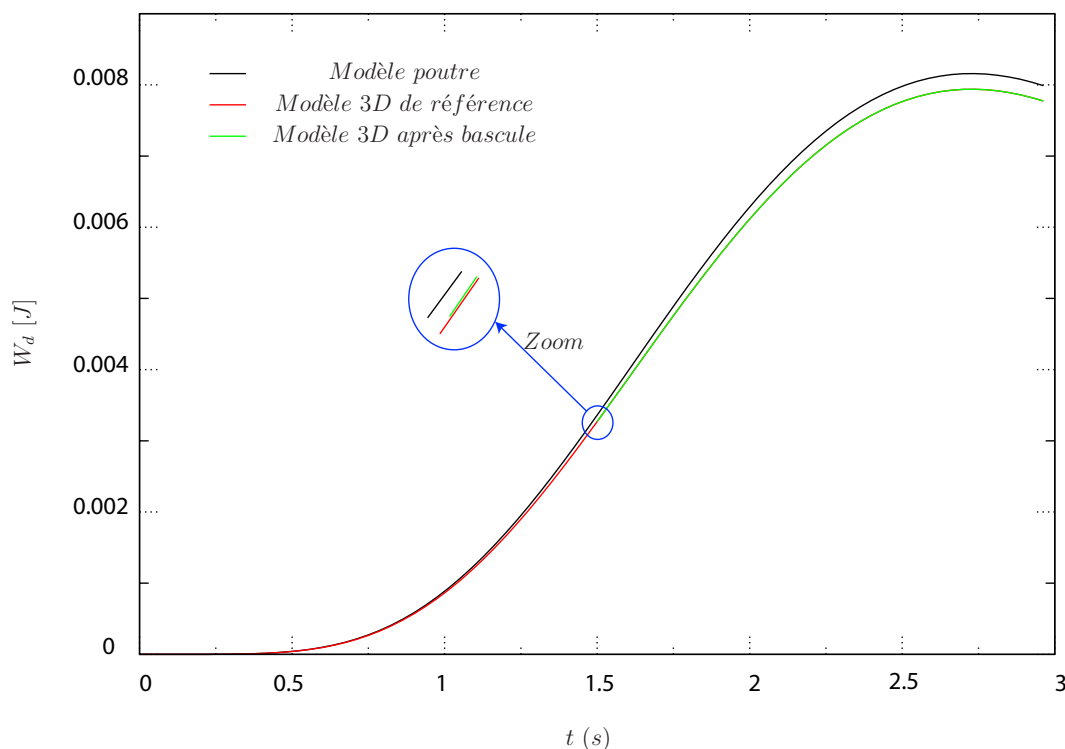


(a) Stabilisation par amortissement numérique



(b) Bascule à trois pas de temps

Figure 2.9.: Bascule poutre-3D : résultats en accélérations



**Figure 2.10.:** Énergie de déformation

qu'un raccord MPC (multi-point constraint) explicité de façon forte nœud à nœud, lequel ne permet que la continuité des déplacements (raccord standard Abaqus).

Un raccord poutre 3D permet de combiner la finesse d'un maillage 3D et la simplicité d'une modélisation poutre pour un même modèle physique. Cela permet d'avoir un maillage 3D pour les zones susceptibles d'effets locaux et/ou non linéaires, alors que le reste du modèle est représenté par des éléments de poutre ce qui permet d'accélérer le temps de calcul et de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle tout en préservant la précision d'une modélisation 3D localement.

La littérature présente plusieurs raccords poutre-3D. Cependant, il faut s'assurer que le raccord en question remplit les conditions suivantes

- Cohérence des déplacements poutre et 3D.
- Le transfert des efforts entre le modèle poutre et celui 3D se fait sans la génération de contraintes parasites dans la zone de contact. Cela permet de réduire la taille du patch 3D à la taille de la zone qui présente des effets locaux. Cela réduit le temps de calcul et le rend plus fiable.

Un raccord poutre-3D existe dans Code\_Aster et respecte les deux conditions ci-dessus. La formulation théorique de ce raccord est détaillée dans Pellet [103] et est résumée dans dans ce paragraphe.

On note  $S$  la section du 3D qui représente l'interface de raccord entre la poutre et le 3D,  $A$  étant la surface de cette section et  $I$  la matrice d'inertie géométrique de la section par rapport à ces axes principaux. Supposons que les axes  $(e_x, e_y)$  sont

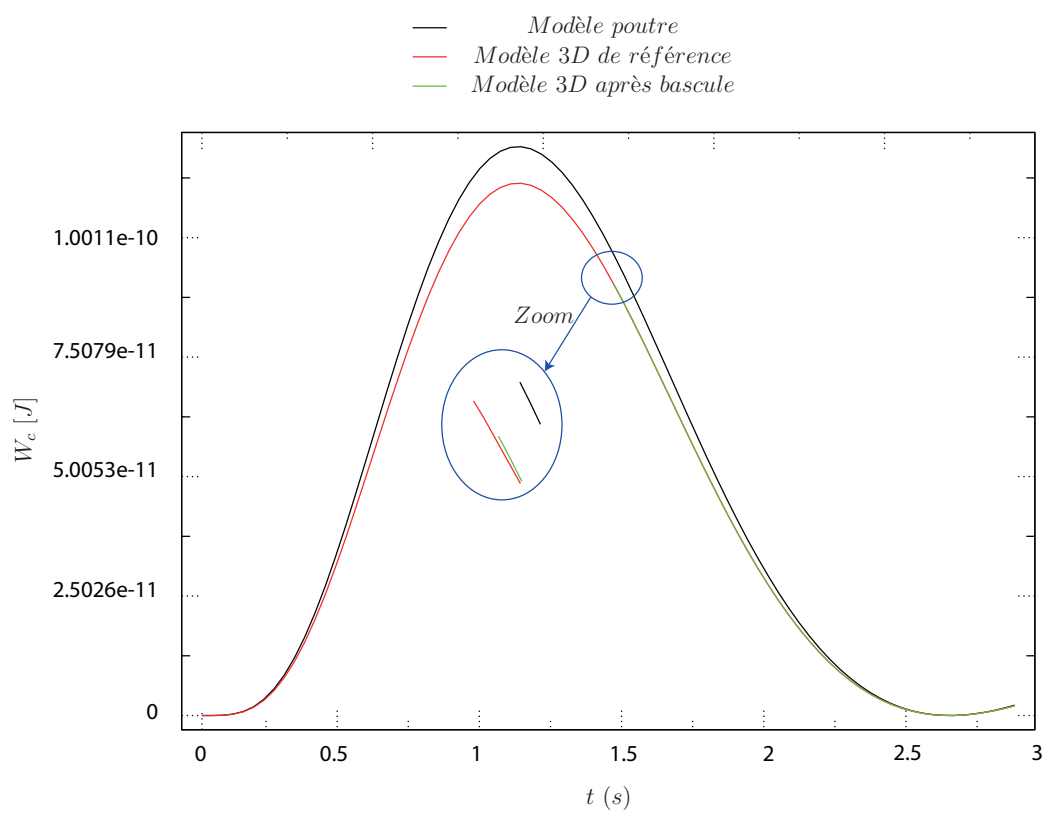


Figure 2.11.: Énergie cinétique

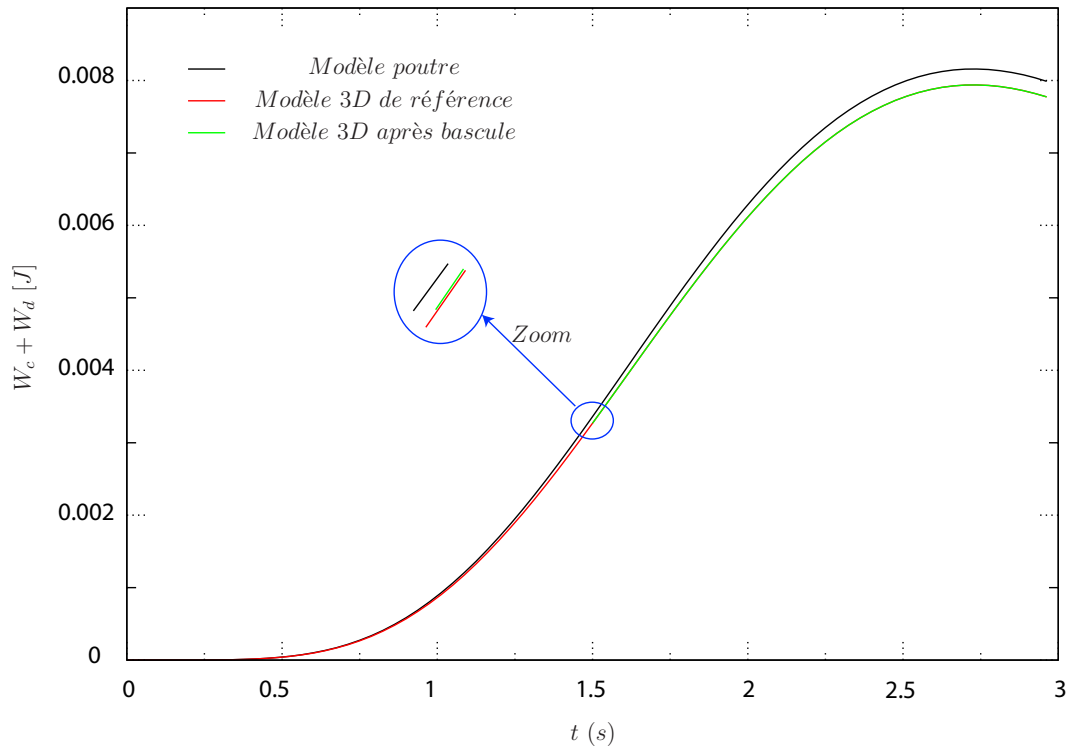


Figure 2.12.: Somme des énergies de déformation et cinétique

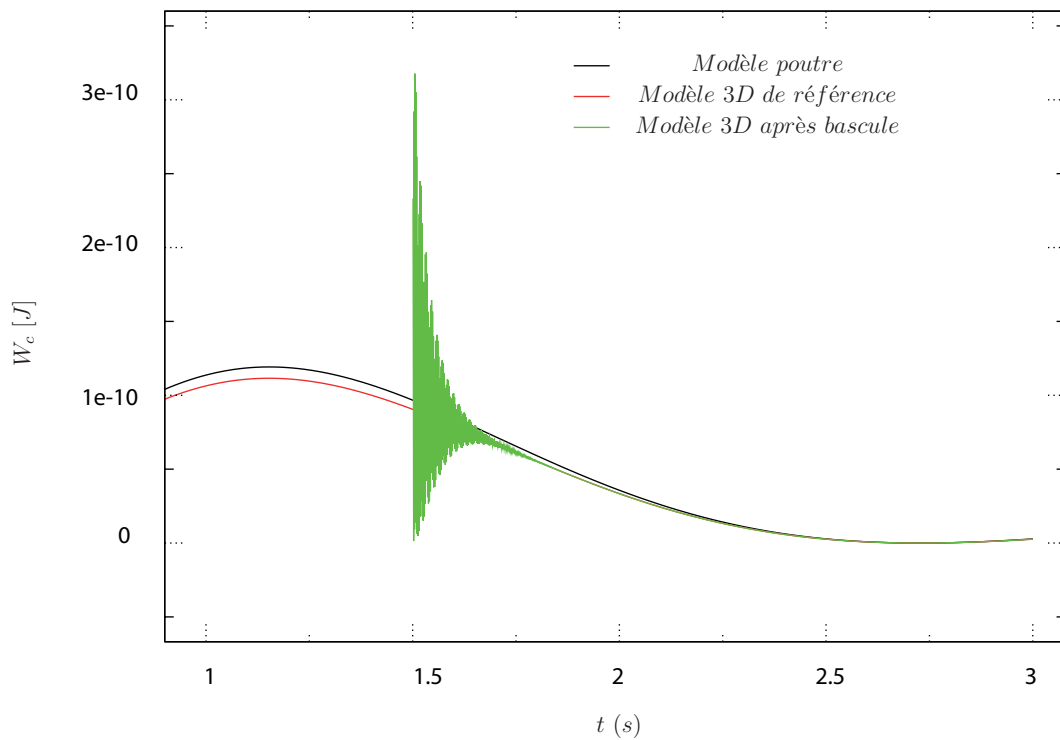


Figure 2.13.: Zoom sur l'instant de bascule (courbe de l'énergie cinétique)

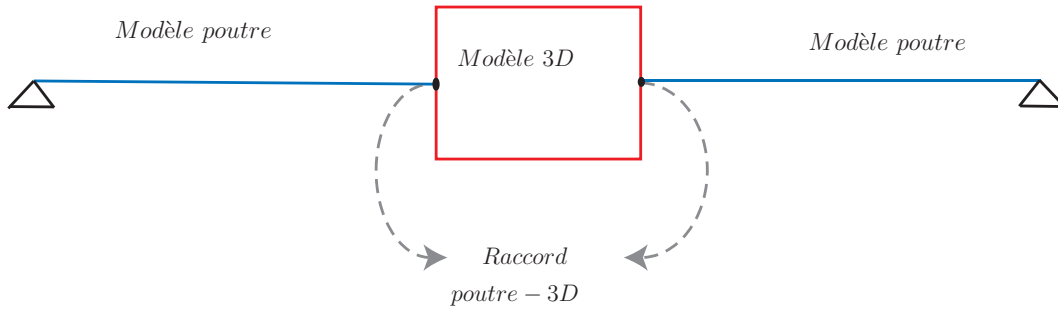


Figure 2.14.: Modèle mixte poutre-3D

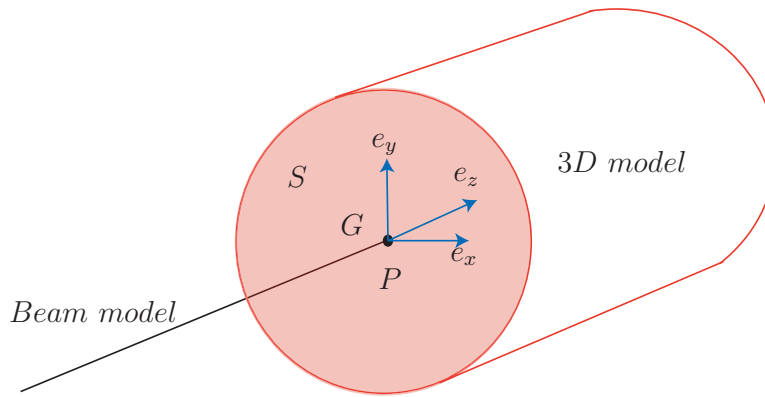


Figure 2.15.: Concept de connexion poutre-3D

deux axes orthogonaux situés dans le plan de la section  $S$ , passant par le centre de gravité  $G$  de la section, et que  $e_z$  est l'axe perpendiculaire à son plan.

La Fig. 2.15 illustre un raccord poutre-3D dans lequel  $P$  et  $G$  sont confondus. La matrice d'inertie géométrique de  $S$  s'écrit :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Les déplacements 3D seront désignés par  $\mathbf{U}_{3D}$  et sont définis sur chaque nœud de  $S$ .

### 2.9.1. Équilibre Cinématique

On décompose le champ de déplacement 3D en deux champs orthogonaux : l'un provient de la solution poutre et on le note par  $\mathbf{U}_{3Db}$  (hypothèse de section rigide) et l'autre décrit la déformation de la section et est noté  $\mathbf{U}_s$ .

$$\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{U}_{3Db} + \mathbf{U}_s \quad (2.81)$$

Au nœud de raccord situé sur la partie poutre et noté  $P$ , on note les déplacements poutre  $\mathbf{U}_p$  et les rotations  $\theta_p$ .

La condition de raccord cinématique entre  $P$  et  $S$  s'écrit :

$$\mathbf{U}_{3Db} = \mathbf{U}_b + \theta_b \wedge \mathbf{GM}$$

avec  $M$  un point de la section  $S$ . A partir de la solution  $3D$ , il est possible de créer un champ de déplacement poutre en  $P$  de façon à ce que cette projection élimine la composante  $\mathbf{U}_s$  de  $\mathbf{U}_{3D}$ . Cela se réduit à un problème de recherche de  $\mathbf{U}_p$  et  $\theta_p$  tel que  $\mathbf{U}_{3Dp}$  soit un champ  $3D$  de déplacement de corps rigide le plus proche de  $\mathbf{U}_{3D}$ . Ce problème d'optimisation a comme solution :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_b &= \frac{1}{A} \int_s \mathbf{U}_{3D} dS \\ \theta_b &= I^{-1} \left( \int_s \mathbf{GM} \wedge \mathbf{U}_{3D} dS \right) \end{aligned}$$

Cette condition fait que le champ  $3D$  de déformation de section  $\mathbf{U}_s$  est orthogonal à celui de la poutre. Une cohérence entre les déplacements poutres et ceux  $3D$  dans la section est garantie, la déformation de la section  $3D$  n'a pas d'effets sur les déplacements des nœuds de la modélisation poutre.

### 2.9.2. Équilibre statique

La transmission des efforts entre les modèles poutre et  $3D$  est très importante pour éviter toute contrainte parasite. Elle peut être imposée par le principe suivant : la projection des contraintes de la section  $S$  sur le nœud  $P$  conduit à des contraintes poutre. Les efforts purement tridimensionnels, tel les efforts de déformation de section non rigide seront éliminés. Cela vient du fait que le champ de déplacement  $3D$  est divisé en deux champs orthogonaux selon l'Eq. (2.81). On traduit la condition de l'équilibre statique par l'équation suivante :

$$\int_s \sigma.n.\mathbf{U}_{3D} dS = \mathbf{F}_p \mathbf{U}_p + \mathbf{M}_p \theta_p \quad (2.82)$$

avec  $\mathbf{F}_p$  est un vecteur force au nœud  $P$  et  $\mathbf{M}_p$  est un vecteur moment au nœud  $P$ . C'est-à-dire que sur l'interface de raccord, les efforts  $3D$  qui n'appartiennent pas à l'environnement poutre seront éliminés par la projection du modèle  $3D$  sur le modèle poutre. L' Eq. (2.82) s'explique en deux équations qui résument l'équilibre statique du raccord poutre - $3D$  :

$$\mathbf{F}_p = \int_s \sigma.n dS$$

$$\mathbf{M}_p = \int_s \mathbf{GM} \wedge \sigma.n dS$$

Cette condition statique n'est valable que si la tangente  $\tau$  à la fibre neutre de la poutre est colinéaire avec la normale  $n$  à  $S$ . Si un déphasage d'angle existe entre  $n$  et  $\tau$ , l'équilibre statique ne sera pas respecté. Il faut dans ce cas éviter de faire un raccord dans une zone où la poutre change d'orientation.

Le raccord poutre-3D type 3D\_POU de Code\_Aster respecte les deux conditions de stabilité discutées ci-dessus et est par la suite utile pour la simulation de problème avec effets localisés en espace.

Dans Andrieux et Varé [62], le raccord poutre 3D a été utilisé pour une étude localisée de fissuration dans un rotor de turbine. Une zone 3D localisée étant nécessaire dans ce cas, le reste de la structure peut être modélisé en poutre. D'autres types de raccord poutre - 3D existent, dont Arlequin qui est un raccord avec recouvrement Ghanem et al. [30].

Le paragraphe suivant présente une bascule d'un modèle poutre à un modèle mixte poutre-3D en dynamique linéaire transitoire.

## 2.10. Bascule d'un modèle poutre à un modèle poutre-3D mixte

Après avoir effectué une bascule d'un modèle poutre à un modèle entièrement 3D, et après avoir présenté un raccord poutre-3D capable de répondre à nos besoins de réduction de temps de calcul pour la modélisation des phénomènes à effets localisés en espace, on présente dans ce paragraphe un exemple de bascule poutre vers un modèle mixte poutre-3D, afin d'étendre l'utilisation de la bascule aux problèmes dynamiques à effets non linéaires localisés à la fois en espace et en temps.

Dans cet exemple, on considère une poutre à section circulaire ayant les dimensions explicitées dans le Tab. 2.3 et les mêmes caractéristiques matériau que celle explicitées dans le Tab. 2.2.

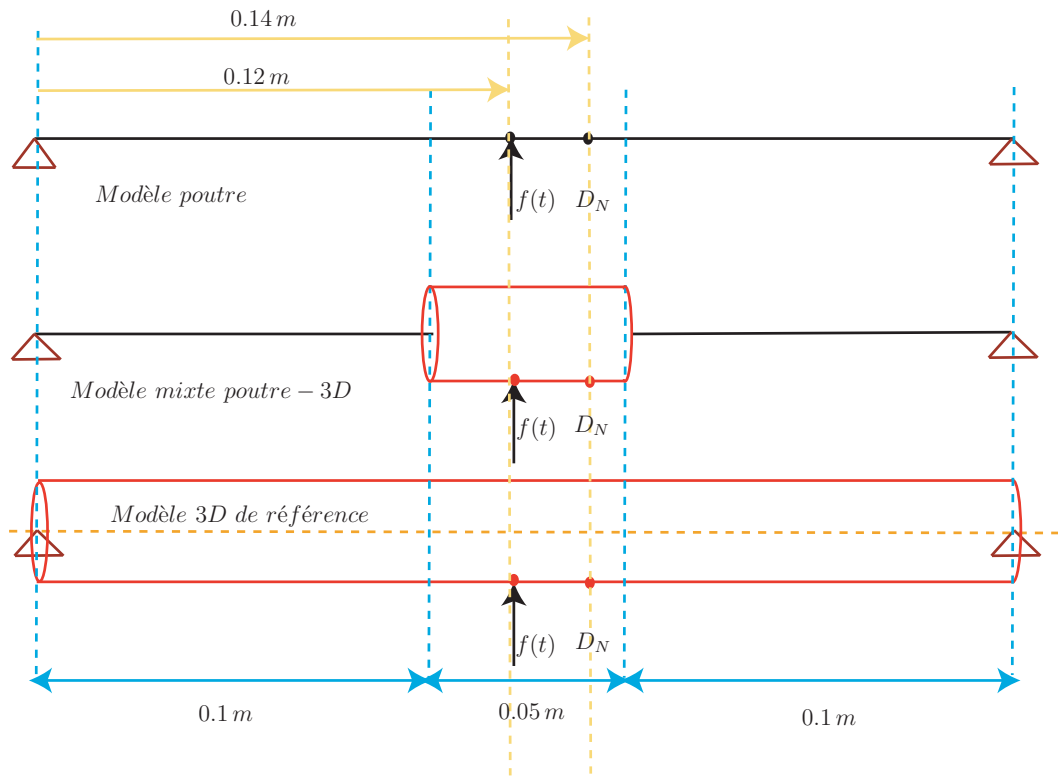
La poutre est simplement appuyée des deux côtés. A une distance de 0.12 m de l'extrémité gauche, elle est sujette à un chargement dynamique de la forme  $\mathbf{f}(t) = -100 \times \sin(\omega \times t)$ , avec  $\omega = 6.4 \text{ rad/s}$ , pour une durée totale de 3s débutant à  $t = 0s$ . Un schéma d'intégration en temps implicite est utilisé avec 2000 pas de temps. L'instant de la bascule est fixé à  $t_b = 2.4 s$ . Dans le soucis d'une meilleure présentation, les résultats en déplacements, vitesses et accélérations, des illustrations de ce paragraphe, sont présentés dans l'intervalle de temps  $t \in [1, 3] s$ .

Les déplacements, vitesses et accélérations sont enregistrés en fonction du temps au nœud  $D_N$  comme le montre la Fig. 2.16. Sur cette dernière, on trouve également les dimensions du modèle en question. Ce problème physique est modélisé par une

Rayon $R$	Longueur $l$	Hauteur $h$
0.005 m	0.25 m	0.01 m

**Table 2.3.:** Dimensions du modèle étudié dans le §2.10





**Figure 2.16.:** Le modèle poutre, celui mixte poutre-3D et le modèle 3D de référence

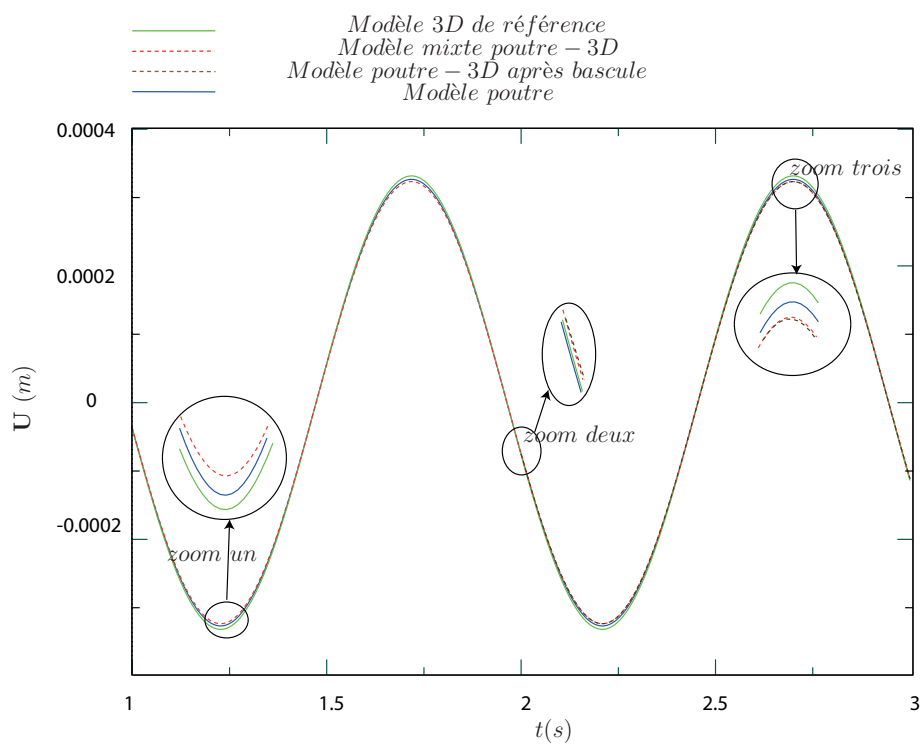
représentation poutre, une autre 3D, et une autre représentation poutre-3D mixte qui combine les éléments poutre et ceux 3D, les deux modélisations étant reliées par le raccord poutre-3D détaillé dans le §2.9. La solution de référence est celle calculée en se servant du modèle 3D de référence.

On effectue une bascule du modèle poutre vers le modèle poutre-3D mixte. Les deux méthodes de stabilisation de la solution, i.e., l'amortissement numérique avec  $\alpha = 0.25$  dans le schéma HHT et la bascule à trois pas de temps sont utilisés à tour de rôle pour stabiliser la solution après bascule. Les déplacements, vitesses et accélérations du modèle poutre-3D mixte après bascule sont comparés avec les solutions du modèle poutre, poutre-3D mixte et 3D de référence et cela pour un chargement identique pour chaque cas et une simulation démarrant à  $t = 0$  s et durant 3 s. Le même pas de temps est utilisé pour les trois simulations.

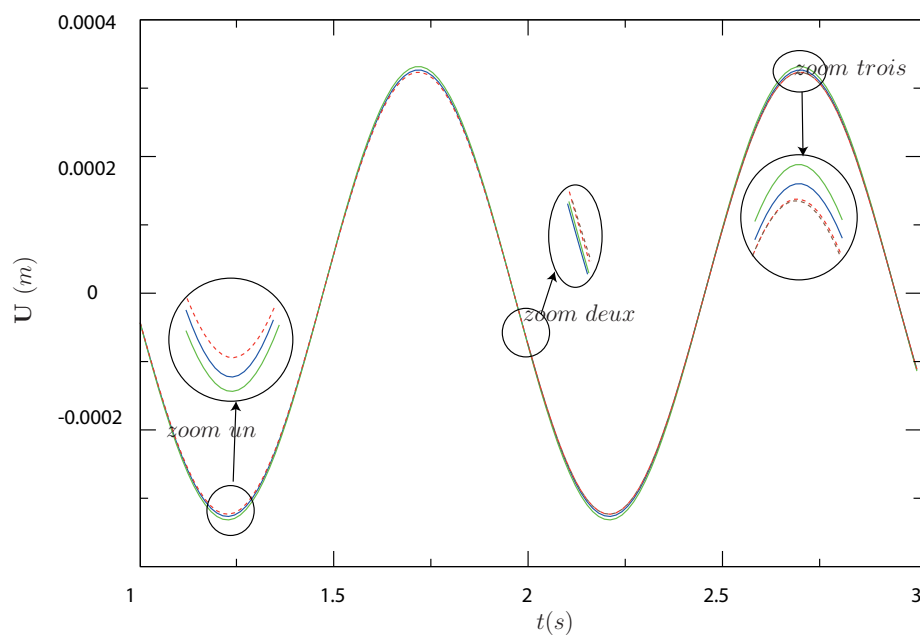
Si un amortissement numérique est utilisé pour stabiliser la solution après bascule, un régime transitoire est observé et est nettement visible sur les résultats en accélérations, comme le montre la Fig. 2.19a, alors qu'il est moins visible sur les vitesses, voir la Fig. 2.18a, et est absent sur les déplacements, voir la Fig. 2.17a.

Par contre, si une bascule à trois pas de temps est utilisée, aucun régime transitoire n'est détecté, voir Fig. 2.17b, Fig. 2.18b, et Fig. 2.19b.

Dans la Fig. 2.17, on trouve une comparaison, selon les résultats en déplacements, entre les deux méthodes d'initialisation. Il est évident que les différences observées sont négligeables. Par contre, il faut noter qu'une différence existe entre les solutions 3D de référence, poutre et poutre-3D mixte. En effet, la Fig. 2.20 montre une



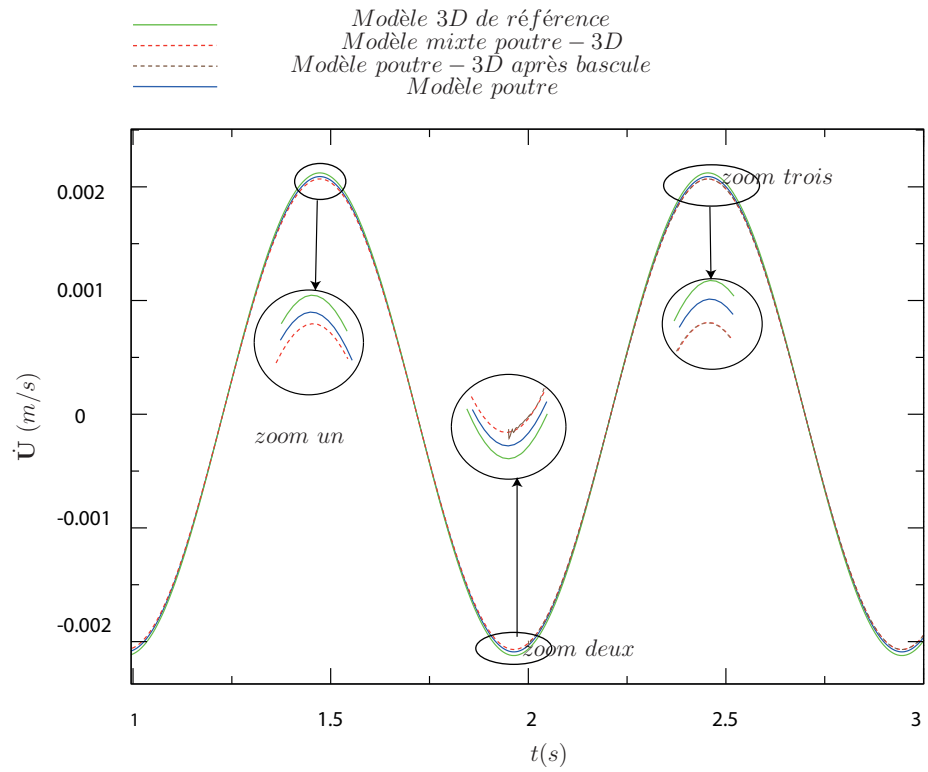
(a) Amortissement numérique



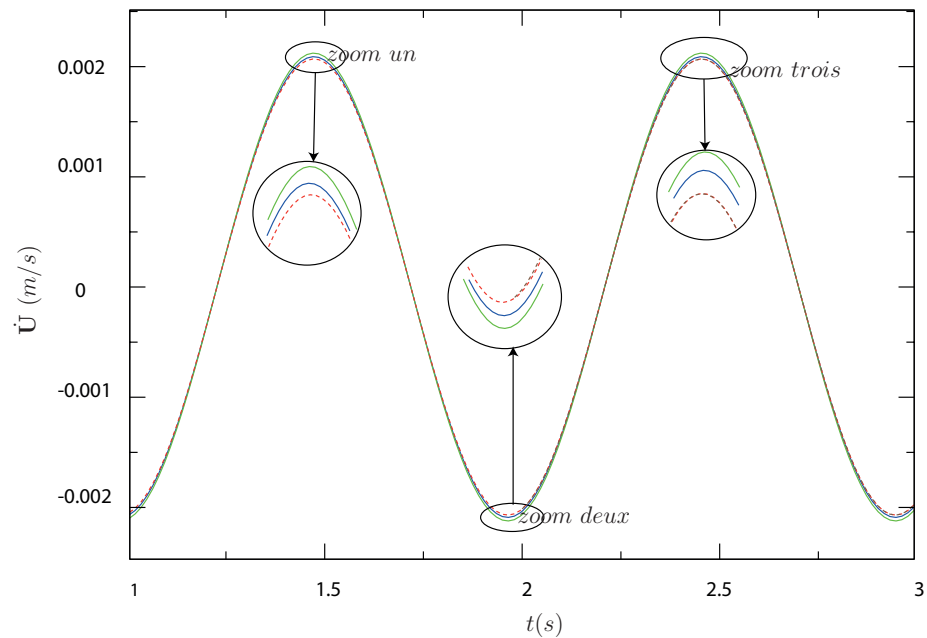
(b) Bascule à trois pas de temps

**Figure 2.17.:** Résultats en déplacements

## 2.10 Bascule d'un modèle poutre à un modèle poutre-3D mixte



(a) Amortissement numérique



(b) Bascule à trois pas de temps

Figure 2.18.: Résultats en vitesses

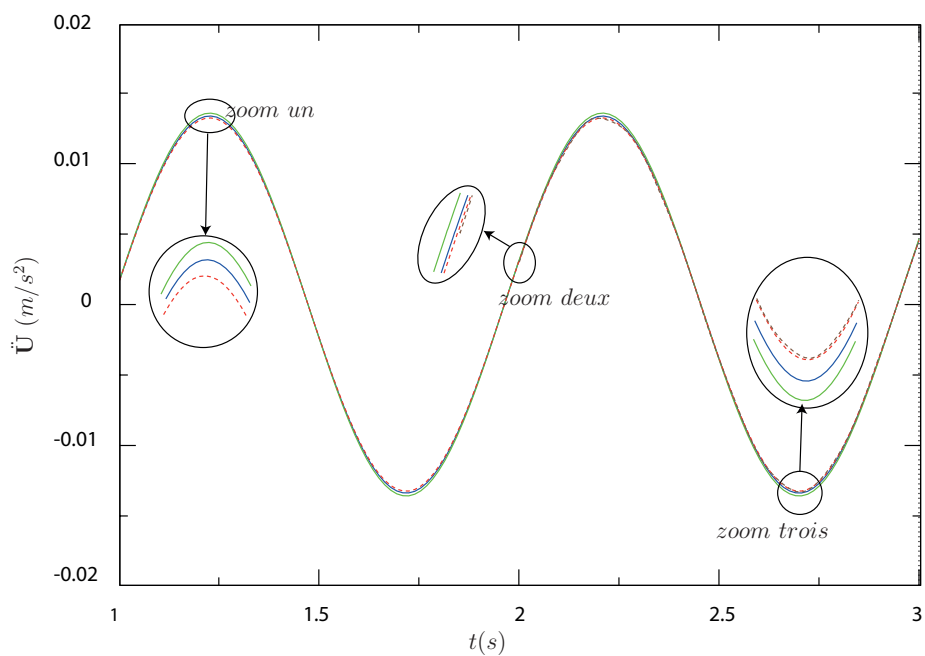
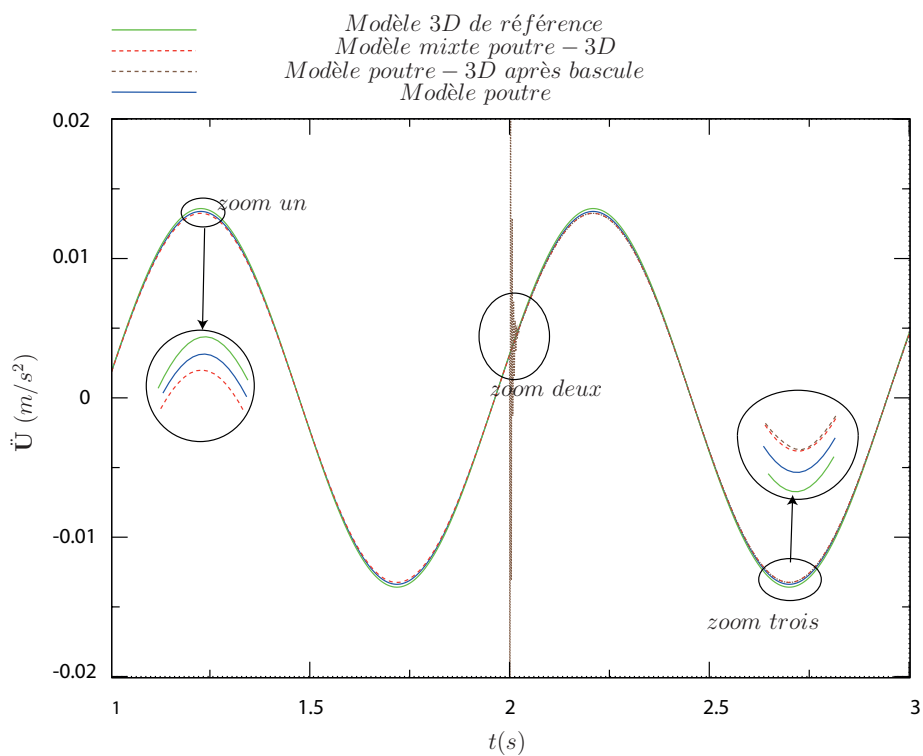
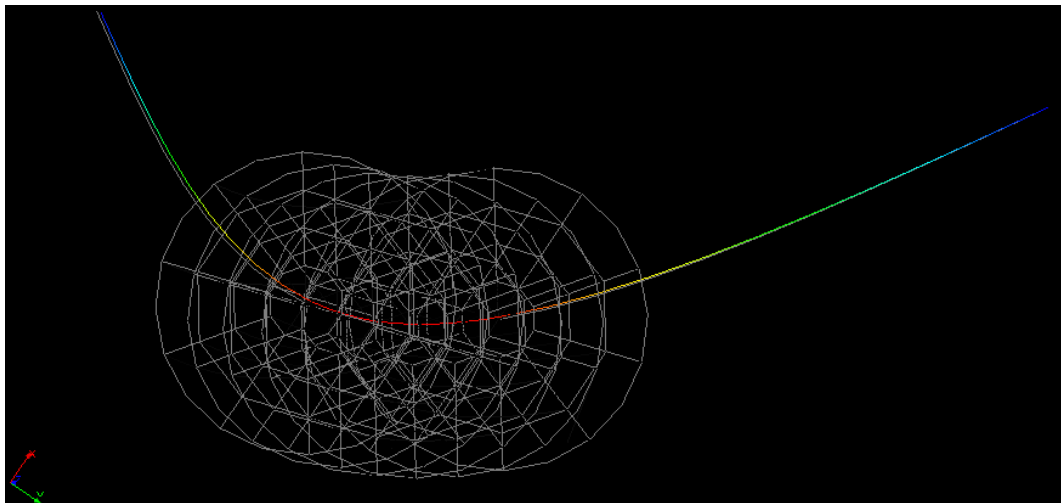


Figure 2.19.: Résultats en accélérations



**Figure 2.20.:** Comparaison des flèches du modèle poutre et celui poutre-3D mixte à  $t = 0.345$  s

comparaison entre la flèche amplifiée à  $t = 0.345$  (s) de la modélisation poutre (en couleur) et de la modélisation mixte poutre-3D (en gris). On remarque un écart de flèche léger mais inévitable entre ces deux modélisations.

Cette différence est due à la différence entre les fonctions de formes 3D et poutre. Le modèle mixte a un comportement qui ressemble plus au modèle poutre qu'au modèle 3D, car la zone 3D ne fait que le  $\frac{1}{5}$  de la taille totale du modèle. Cette conclusion est la même sur le comportement en vitesses et en accélérations, voir les Fig. 2.18 et Fig. 2.19 respectivement.

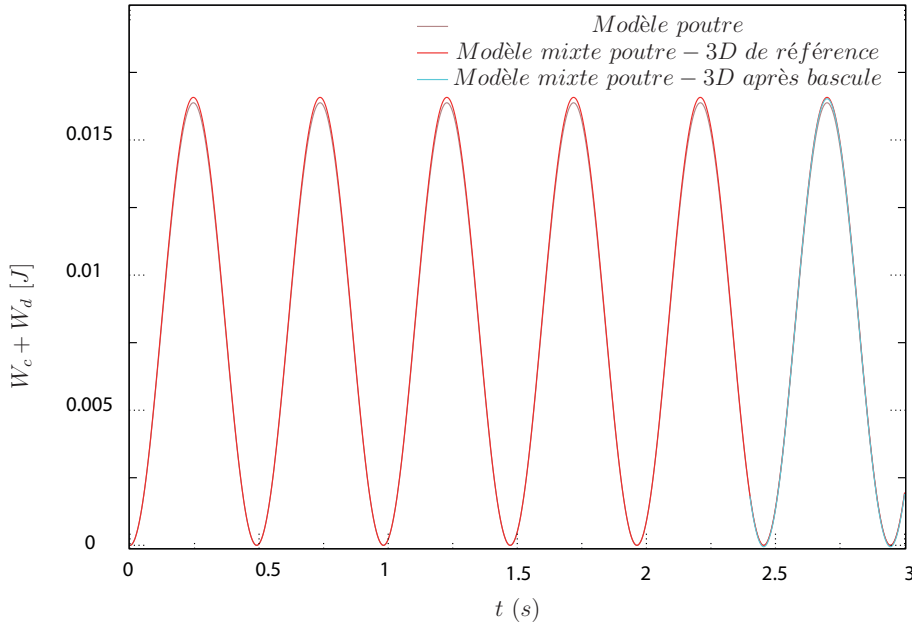
La différence de comportement entre les différents modèles représente une difficulté à la bascule. Il n'est pas possible d'effectuer une bascule si les comportements poutre et 3D sont totalement différents. Ce n'est pas le cas bien sûr, mais la différence existe et représente un certain défi à la méthode de la bascule. Cet aspect sera traité d'une façon plus étendue dans le §2.12.1.1 et le §2.11.

Par ailleurs, malgré le fait que la bascule peut être stabilisée par un amortissement numérique comme l'illustre cet exemple, la bascule à trois pas de temps reste meilleure et plus adaptée aux problèmes de dynamique. Son utilisation est simple, elle sera par la suite proposée comme la seule méthode de bascule en dynamique des machines tournantes.

Mais avant de passer à des applications en dynamique des machines tournantes, on illustre l'efficacité de la bascule par analyse de l'énergie.

La Fig. 2.21 montre les énergies cinétique, de déformation et leur somme pour les modélisations poutre, celle poutre-3D mixte calculée tout au long de la simulation et celle poutre-3D mixte obtenue par bascule. On évite de présenter les courbes des énergies de la modélisation 3D de référence qui n'apportent pas d'informations indispensables à l'analyse de la consistance énergétique de la bascule.

On remarque un léger écart entre les énergies du modèle mixte et du modèle poutre. Ce qui est lié à la différence de modélisation (fonction de formes, etc.). Après bascule, cet écart persiste et l'énergie du modèle mixte est quasiment égale à celle du modèle



**Figure 2.21.:** Somme des énergies cinétique et de déformation

poutre-3D mixte calculé à partir de l'instant  $t = 0$ . On note cependant comme on l'a déjà remarqué en l'absence du raccord que la bascule n'est pas responsable d'une variation d'énergie. Comme les courbes de l'énergie cinétique sont moins visibles sur la Fig. 2.21, on les présente à part dans les Fig. 2.22 et Fig. 2.23.

L'analyse des courbes de l'énergie cinétique confirme les conclusions de consistance énergétique de la bascule. La Fig. 2.22 montre les énergies cinétiques dans l'intervalle de temps  $t \in [1, 3]$  (s) et la Fig. 2.23 montre un zoom sur les énergies cinétiques à l'instant de la bascule.

Dans cet exemple, la bascule s'est effectuée à  $t_b = 2.4$  (s), instant auquel la vitesse est élevée (presque son maximum) comme le montre la Fig. 2.18, alors que les déplacements et les accélérations sont très faibles comme le montrent les Fig. 2.17 et Fig. 2.19, respectivement. C'est pourquoi il serait intéressant d'effectuer la bascule à un instant différent, tel  $t_b = 1.75$  (s), instant auquel la vitesse est faible alors que les accélérations et déplacements sont importants. Cela permettrait d'illustrer la robustesse de la bascule. Comme la bascule à trois pas de temps est assez simple à implémenter et plus précise que la bascule par amortissement numérique, et dans le soucis de pas alourdir le manuscrit, on ne présente par la suite que les résultats de la méthode de bascule à trois pas de temps, pour les mêmes conditions de simulation, mais pour un instant de bascule de  $t_b = 1.75$  (s).

Les Fig. 2.24, Fig. 2.25, et Fig. 2.26 représentent respectivement les résultats en déplacements, vitesses et accélérations selon l'axe des  $x$  au point  $D_N$ . La même précision que pour l'autre instant de bascule est obtenue dans cet exemple

On examine également les courbes des énergies cinétique (Fig. 2.27), de déformation

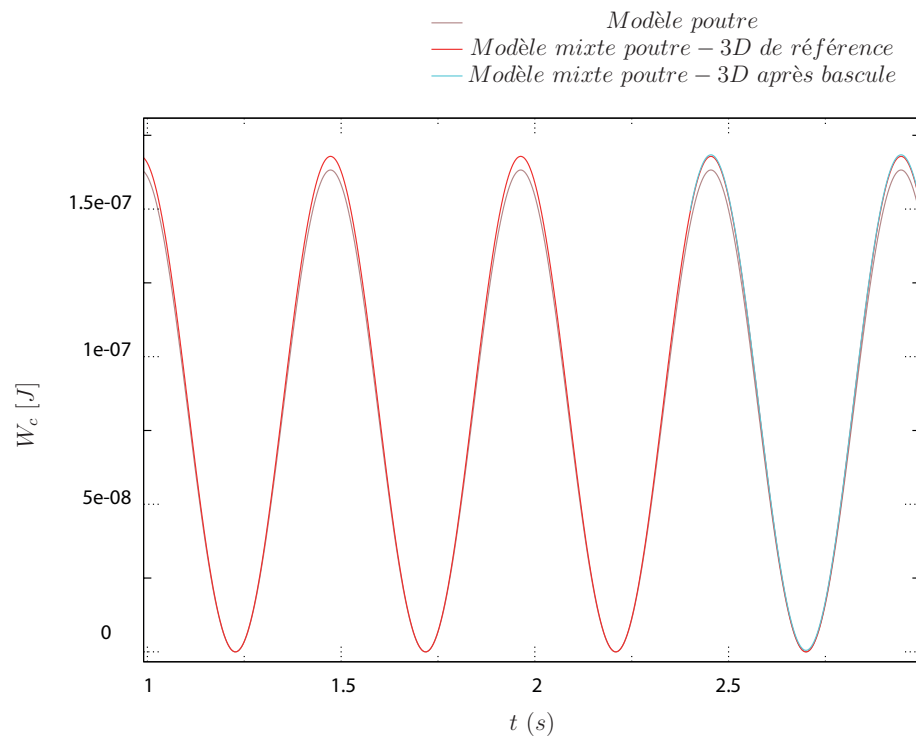


Figure 2.22.: Analyse de l'énergie cinétique

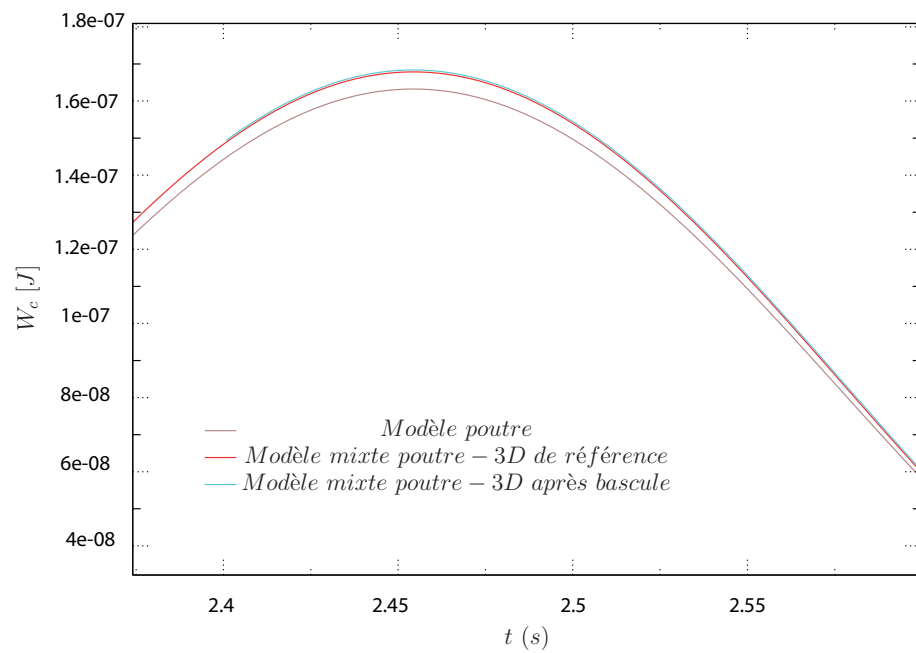


Figure 2.23.: Zoom sur l'énergie cinétique à  $t_b$

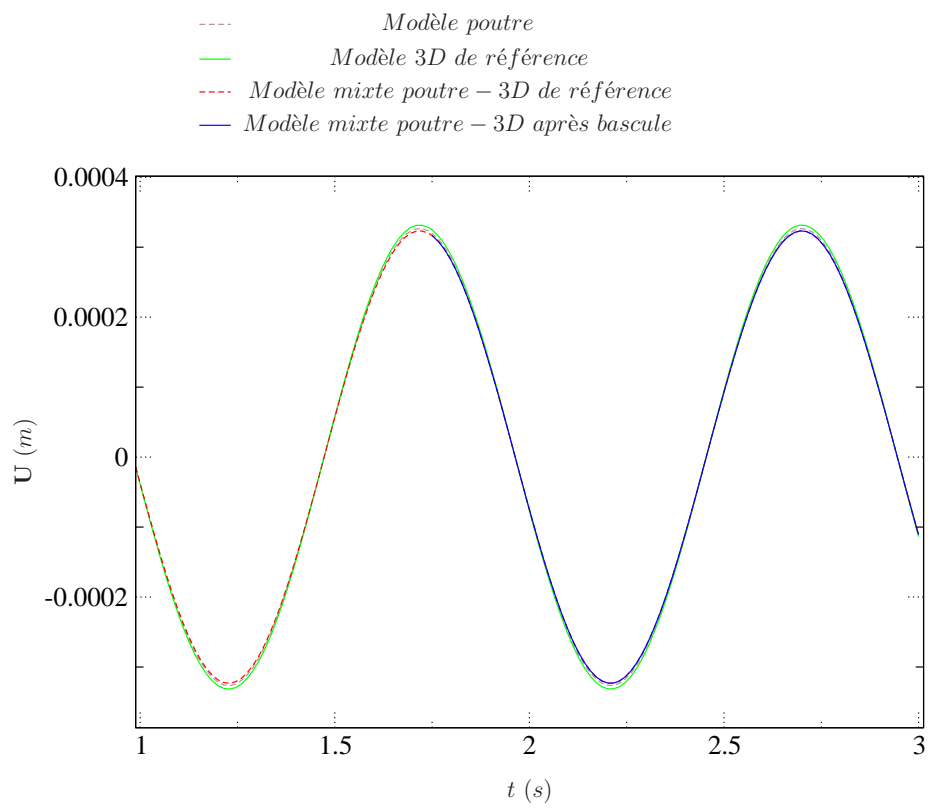


Figure 2.24.: Résultats en déplacements pour  $t_b = 1.75$  (s)



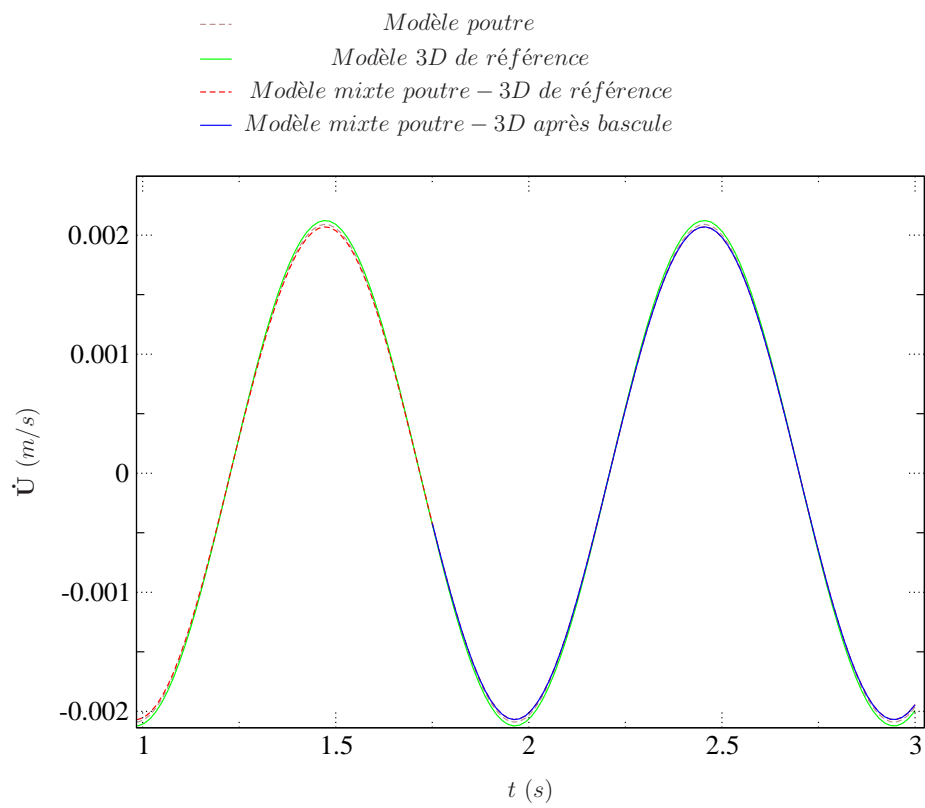


Figure 2.25.: Résultats en vitesses pour  $t_b = 1.75$  (s)

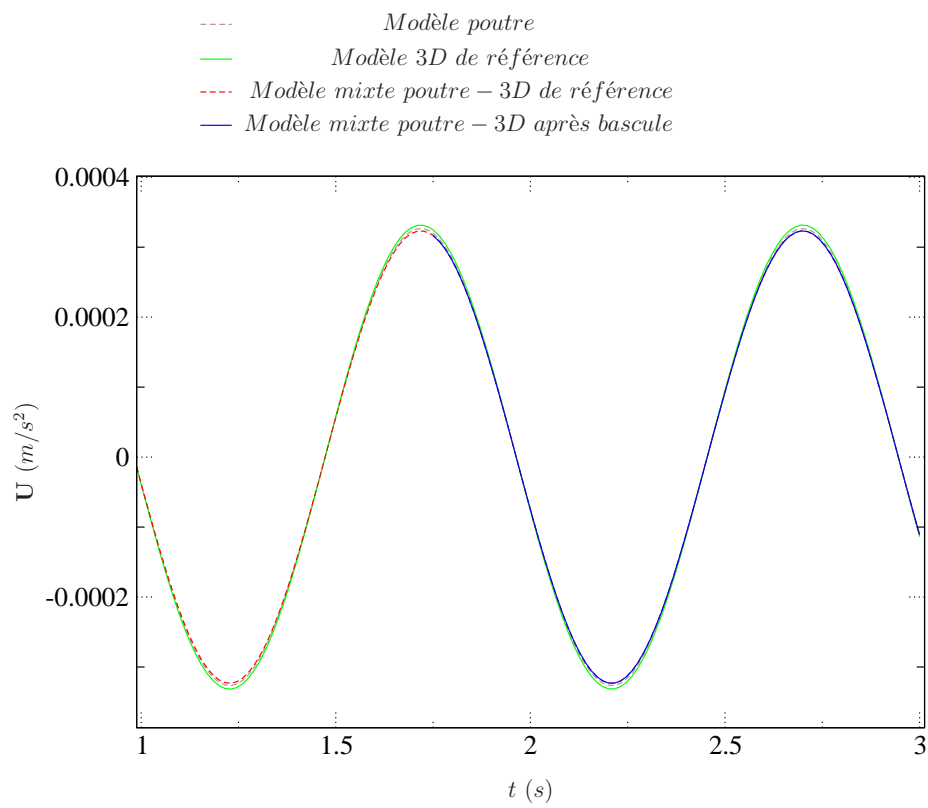
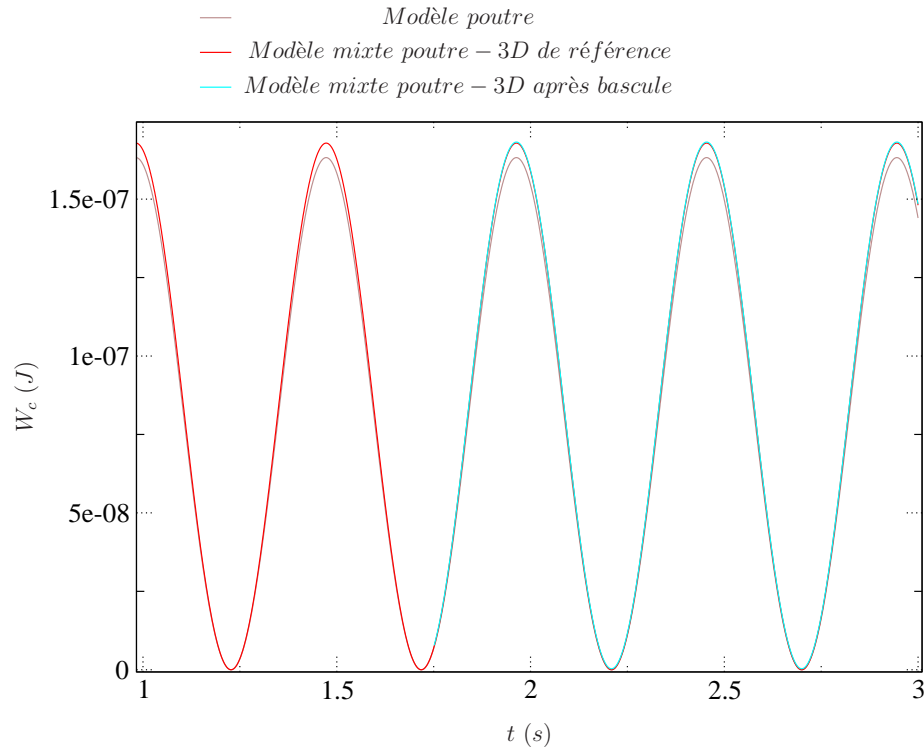


Figure 2.26.: Résultats en accélérations pour  $t_b = 1.75$  (s)



**Figure 2.27.:** L'énergie cinétique pour  $t_b = 1.75$  (s)

(Fig. 2.28) et la somme de ces deux énergies (Fig. 2.29). La bascule montre la même précision à  $t_b = 1.75$  (s) et  $t_b = 2.4$  (s) .

## 2.11. Généralisation de la bascule en dynamique des rotors

Dans la première partie de ce chapitre, on a présenté la bascule pour des cas de dynamique ne présentant pas une rotation d'ensemble. On a également discuté certaines difficultés théoriques et pratiques dans sa mise en œuvre, mais qui n'empêchent pas son utilisation. Dans ce paragraphe, on étend la formulation théorique de la bascule aux cas de machines tournantes. L'objectif c'est tout d'abord de bien formuler et généraliser la bascule pour les cas des machines tournantes et en fonction de la résolution temporelle de l'équation de la dynamique. Un exemple illustrera l'idée de la bascule, i.e., l'idée de la décomposition du champ  $3D$  en trois composantes orthogonales, celle solide rigide, celle poutre et celle  $3D$  qui tient compte de la déformation de la section. Les conditions d'unicité de cette décomposition, ou en d'autres mots, l'orthogonalité des trois champs composant la solution  $3D$ , seront établies sur une base théorique, et illustrés par un exemple numérique. Par ailleurs, une perspective intéressante mais non adaptée dans le cadre de la thèse, suite à son caractère intrusif, sera proposée pour "forcer" l'orthogonalité des champs cinéma-

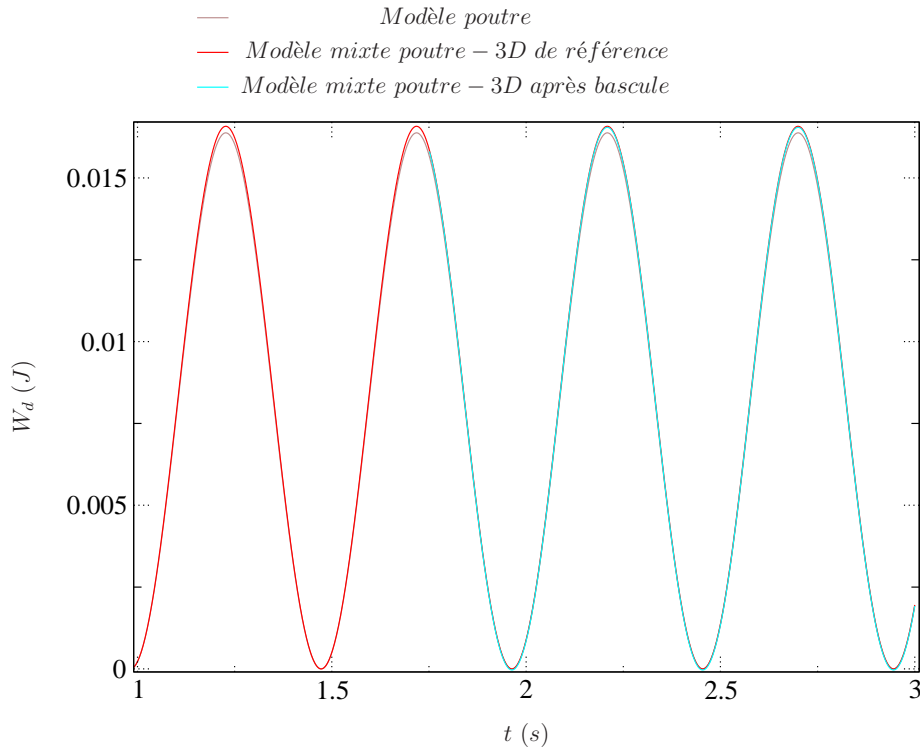


Figure 2.28.: L'énergie de déformation pour  $t_b = 1.75$  (s)

tiques composants la solution  $3D$  et proposer la bascule dans un cadre théorique plus étendu.

### 2.11.1. Principe de la décomposition

On considère un repère  $R$  tournant autour d'un repère galiléen  $R_g$  à une vitesse  $\omega = \dot{\theta}$  tel illustré dans la Fig. 2.30.  $M$  un point de l'espace. On note  $\mathbf{r}$  le vecteur de position du point  $M$  dans le repère  $R$  et  $\mathbf{u}$  représente les déplacements de ce même point dans le repère tournant. On considère que le mouvement du point  $M$  dans le repère tournant suit l'hypothèse des petites perturbations (hpp) ce qui implique  $\mathbf{u} \ll \mathbf{r}$ .

La matrice de passage du repère tournant  $R$  à celui galiléen  $R_g$  est noté  $\mathbf{Q}$ . Les matrices de passage sont des matrices orthogonales et vérifient la propriété  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ . On note  $\Omega$  la matrice antisymétrique de rotation de  $R$  par rapport  $R_g$  :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Avec  $\omega_x, \omega_y$  et  $\omega_z$  les vitesses de rotation de  $R$  par rapport à  $R_g$  selon les axes respectives  $x, y$  et  $z$ .

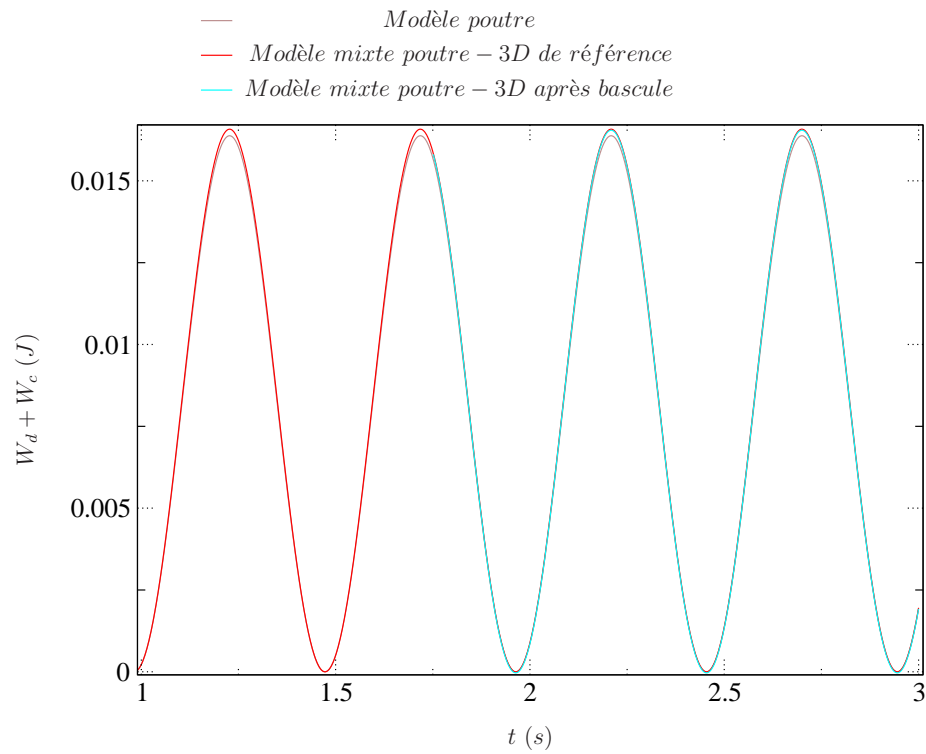


Figure 2.29.: La somme des énergies de déformation et cinétiques pour  $t_b = 1.75$  (s)

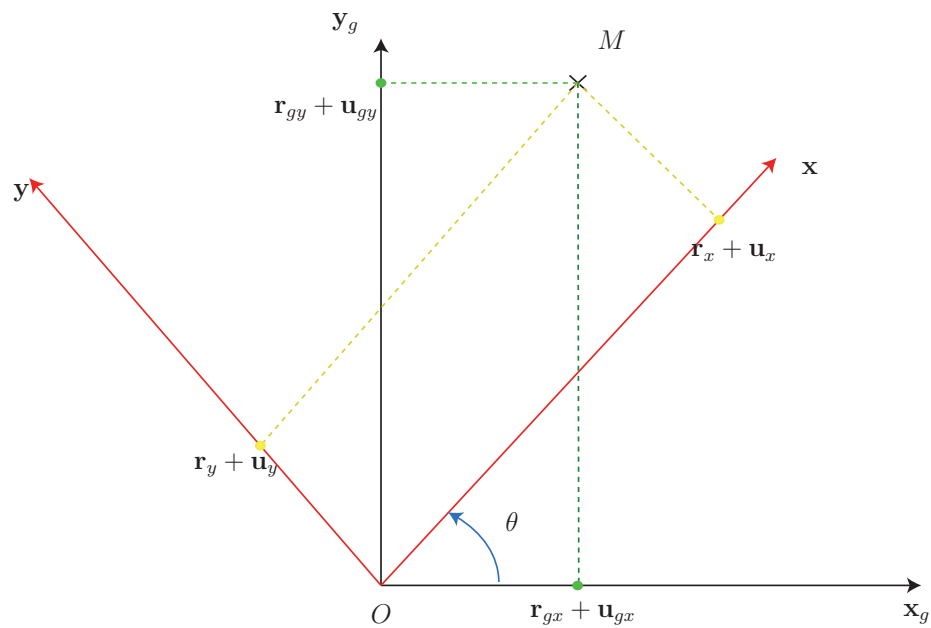


Figure 2.30.: Changement de repères

Il faut noter que la matrice  $\mathbf{Q}$  possède la propriété suivante :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega} \quad (2.84)$$

Dans le repère galiléen, le point  $M$  est à une position  $\mathbf{r}_g$  et effectue un déplacement  $\mathbf{u}_g$ . On a par la suite :

$$\mathbf{r}_g + \mathbf{u}_g = \mathbf{Q}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \quad (2.85)$$

ce qui implique :

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{Q}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathbf{r}_g \quad (2.86)$$

Dérivons la position du point  $M$  par rapport au temps pour obtenir la vitesse de ce point dans le repère galiléen. On obtient :

$$\dot{\mathbf{u}}_g = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}} \quad (2.87)$$

et qui selon l'hypothèse des petites perturbations devient :

$$\dot{\mathbf{u}}_g = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{r} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}} \quad (2.88)$$

Ou en d'autres termes :

$$\dot{\mathbf{u}}_g = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}}) \quad (2.89)$$

et par la suite :

$$\ddot{\mathbf{u}}_g = \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

Dans l'Eq. (2.90), le terme  $2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}}$  représente la force de Coriolis,  $\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{r}$  est la force centrifuge et  $\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{r}$  représente le terme d'entraînement.

On considère maintenant une poutre non amortie modélisée en  $3D$  et tournant à la vitesse  $\omega$  autour d'elle même. Ce modèle pourrait être décrit par l'équation suivante dans le repère galiléen :

$$(\mathbf{M}_{3D})_g(\ddot{\mathbf{U}}_{3D})_g + (\mathbf{K}_{3D})_g(\mathbf{U}_{3D})_g = (\mathbf{F}_{3D})_g + \mathbf{Q}^T\mathbf{F}_{3D} \quad (2.91)$$

où  $g$  représente l'indice de référence au repère galiléen.  $(\mathbf{F}_{3D})_g$  représente la force à laquelle est soumis le modèle dans le repère galiléen, et  $\mathbf{Q}\mathbf{F}_{3D}$  représente les efforts tournants avec le modèle et reportés au repère galiléen.  $(\mathbf{U}_{3D})_g$  et  $(\ddot{\mathbf{U}}_{3D})_g$  représentent, respectivement, les déplacements et les accélérations dans le repère galiléen.  $(\mathbf{M}_{3D})_g$  et  $(\mathbf{K}_{3D})_g$  représentent respectivement les matrices de masse et de raideur du modèle dans le repère  $R_g$ . Comme le repère  $R$  tourne significativement

par rapport au repère  $R_g$ , les matrices de masses et de raideur se calculent sur le maillage de la configuration qui tourne, et donc ces matrices dépendent du temps. Par contre l'hypothèse des petites perturbations implique que les matrices de masse et de raideur dans le repère tournant, notées respectivement  $\mathbf{M}_{3D}$  et  $\mathbf{K}_{3D}$ , sont constantes et se calculent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{3D} &= \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q} \\ \mathbf{K}_{3D} &= \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}\end{aligned}\quad (2.92)$$

En étendant les équations cinématiques développées pour un point et décrites par les Eq. (2.86), Eq. (2.89) et Eq. (2.90), pour la modélisation 3D d'une poutre et en les insérant dans l'Eq. (2.91), et puis en multipliant par  $\mathbf{Q}^T$  pour reporter l'équation dans le repère tournant, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}) &+ \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{U}}_{3D}) + \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}\mathbf{U}_{3D} \\ &= \mathbf{Q}^T((\mathbf{F}_{3D})_g + \mathbf{Q}\mathbf{F}_{3D}) - \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}\mathbf{\Omega}^2\mathbf{r} \\ &- \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T\mathbf{r}_g)\end{aligned}\quad (2.93)$$

On peut écrire  $\mathbf{\Omega}\mathbf{r} = \mathbf{p}_s\omega$  et par la suite  $\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r} = \mathbf{p}_s\dot{\omega}$  où  $\mathbf{p}_s$  est un vecteur de projection, et cela car  $\mathbf{r}$  est un vecteur constant dans  $R$  et alors l'Eq. (2.93) devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{p}_s\dot{\omega}) &+ \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{U}}_{3D}) + \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}\mathbf{U}_{3D} \\ &= \mathbf{Q}^T((\mathbf{F}_{3D})_g + \mathbf{Q}\mathbf{F}_{3D}) - \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}\mathbf{\Omega}^2\mathbf{r} \\ &- \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T\mathbf{r}_g)\end{aligned}\quad (2.94)$$

On souhaite effectuer une décomposition cinématique de la solution 3D en trois solutions indépendantes et de façon que cette décomposition soit unique. La vitesse du modèle 3D pourrait être décomposée en :

1. Un champ de rotation de solide rigide  $\omega$ .
2. Dans le référentiel corotationnel, un champ de vitesse poutre  $\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p$  avec  $\mathbf{P}$  un projecteur qui permet de passer de la vitesse poutre  $\dot{\mathbf{U}}_p$  à une vitesse d'une modélisation 3D pour une section non déformable.
3. Toujours dans le référentiel corotationnel, un champ de correction 3D qui tient compte de la déformation de la section  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}$ .

La vitesse 3D du modèle est la somme de trois composantes ce qui conduit à :

$$(\dot{\mathbf{U}}_{3D})_g = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{p}_s\omega)\quad (2.95)$$

On note la présence de trois projecteurs :  $\mathbf{P}_t$  sert pour un passage de solide rigide à un modèle 3D,  $\mathbf{p}_s$  de solide rigide à poutre et  $\mathbf{P}$  celui poutre à 3D. Il s'ensuit que :

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}\mathbf{p}_s\quad (2.96)$$

### 2.11.2. Unicité de la décomposition selon le schéma en temps

L'équation fondamentale de la dynamique est résolue numériquement à travers un schéma d'intégration en temps, alors la solution, et l'unicité de la décomposition, dépendent du schéma en temps en question.

On considère une résolution explicite par le schéma des différences finies centrées, i.e., Newmark avec  $\gamma = 0.5$  et  $\beta = 0$  de l'équation de la dynamique. Les expressions des déplacements, vitesses et accélérations de la modélisation  $3D$  à l'instant  $t$ , ne dépendent que des valeurs des déplacements, vitesses et accélérations à l'instant précédent et qu'on note par  $\mathbf{U}_i^{prd}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{3D} &= (\mathbf{U}_{3D})_i + \Delta T(\dot{\mathbf{U}}_{3D})_i + \frac{1}{2}\Delta T^2(\ddot{\mathbf{U}})_i \\ &= \mathbf{U}_i^{prd}\end{aligned}\quad (2.97)$$

$\Delta T$  dénote la valeur du pas de temps. L'expression des accélérations s'écrit :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{U}}_{3D} &= \frac{2}{\Delta T}\dot{\mathbf{U}}_{3D} - \frac{2}{\Delta T}(\dot{\mathbf{U}}_{3D})_{i-1} - \frac{1}{\Delta T}(\ddot{\mathbf{U}}_{3D})_i \\ &= \frac{2}{\Delta T}\dot{\mathbf{U}}_{3D} - \mathbf{a}_i\end{aligned}\quad (2.98)$$

où  $\mathbf{a}_i$  est un terme qui ne dépend que du calcul à l'instant précédent.

En insérant les Eq. (2.97) et Eq. (2.98) dans l'Eq. (2.94), on obtient l'équation de comportement de la modélisation  $3D$  discrétisé par un schéma en temps explicite :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}\left(\frac{2}{\Delta T}\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{p}_s\dot{\omega}\right) &+ \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T\mathbf{r}_g) = \mathbf{Q}^T((\mathbf{F})_{3Dg} + \mathbf{Q}\mathbf{F}_{3D}) \\ &- \mathbf{Q}^T(\mathbf{K}_{3D})_g\mathbf{Q}\dot{\mathbf{U}}_i^{prd} - \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(2\Omega\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \Omega^2\mathbf{r}) \\ &+ \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}\mathbf{a}_i\end{aligned}\quad (2.99)$$

La quantité  $\mathbf{Q}^T(\mathbf{M}_{3D})_g\mathbf{Q}(2\Omega\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \Omega^2\mathbf{r})$  est placée dans le membre de droite si le logiciel la calcule en se basant uniquement sur les valeurs à l'instant de calcul précédent.

Le membre de droite de l'Eq. (2.99) est alors connu et ne dépend que des valeurs à l'instant précédent et sera noté  $\mathbf{g}_i$ .

Compte tenu de la faible déformation du rotor, les matrices de masse et de rigidité sont indépendantes du référentiel choisi (le tournant ou bien celui Galiléen). On a donc  $(\mathbf{M}_{3D})_g = \mathbf{M}_{3D}$  et  $(\mathbf{K}_{3D})_g = \mathbf{K}_{3D}$ .

On cherche dans ce qui suit les conditions nécessaires pour effectuer une division unique du champ de vitesse  $3D$  tel que proposé dans l'Eq. (2.95). On propose une fonction test qui permet de le faire :



$$\dot{\mathbf{U}}_{3D}^* = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p^* + \mathbf{p}_s\omega^*) \quad (2.100)$$

Si  $\omega^* = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{U}}_p^* = \mathbf{0}$  on aura :

$$\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}^* = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{U}}_{3D}^* \quad (2.101)$$

En multipliant l'Eq. (2.101) par l'Eq. (2.99) on obtient l'équation suivante qui doit être vérifiée quelque soit  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}^*$  :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{Q} \left( \frac{2}{\Delta T} \dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{p}_s \dot{\omega} \right) + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{3D} \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g) = \mathbf{Q}^T \mathbf{g}_i \quad (2.102)$$

Par analogie avec l'Eq. (2.98) on a :

$$\dot{\omega} = \frac{2}{\Delta T} \omega - \frac{2}{\Delta T} \omega_i - \dot{\omega}_i \quad (2.103)$$

De plus on a :

$$\dot{\mathbf{U}}_{3D} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} \quad (2.104)$$

En insérant Eq. (2.103) dans l'Eq. (2.102) et en tenant compte de l'Eq. (2.104), l'Eq. (2.102) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{p}_s \omega) + \mathbf{K}_{3D} (\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g) \\ = \mathbf{Q}^T \mathbf{g}_i + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \omega_i + \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \dot{\omega}_i \end{aligned} \quad (2.105)$$

Le membre de droite de l'Eq. (2.105) sera noté  $\mathbf{G}_i$ . C'est un second membre qui inclus les termes de la gyroscopie.

On utilise de nouveau la fonction test de l'Eq. (2.100), et si  $\omega^* = 0$  et  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}^* = 0$ , on multiplie alors l'Eq. (2.99) par  $\dot{\mathbf{U}}_p^* = \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{U}}_{3D}^*$  et en tenant compte de l'Eq. (2.103) et l'Eq. (2.104) on obtient :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{p}_s \omega) + \mathbf{P}^T \mathbf{K}_{3D} (\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g) = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i \quad (2.106)$$

Et la troisième condition pourrait être obtenue en utilisant la fonction test pour  $\dot{\mathbf{U}}_p^* = 0$  et  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}^* = 0$ , et donc en multipliant l'Eq. (2.99) par  $\mathbf{p}_s \omega^* = \mathbf{p}_s^T \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{U}}_{3D}^*$  et en tenant compte de l'Eq. (2.103) et l'Eq. (2.104) on obtient :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{p}_s \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \dot{\mathbf{U}}_{3Dc}) + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \omega + \mathbf{p}_s \mathbf{K}_{3D} (\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g) = \mathbf{p}_s^T \mathbf{G}_i \quad (2.107)$$

Des équations Eq. (2.105), Eq. (2.106) et Eq. (2.107) on peut tirer les conditions nécessaires et suffisantes à l'unicité de la décomposition. On sait que  $\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g = \mathbf{0}$ . En plus, si les matrices de masses et raideurs poutre et  $3D$  ne sont pas lumpées et une cohérence existe entre les fonctions de formes des deux modélisations poutre et  $3D$ , on peut démontrer que la matrice d'inertie du solide rigide est tel que  $\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}_t$ . En plus, à partir de la matrice de masse  $3D$  on peut obtenir celle poutre par  $\mathbf{M}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}$ . Par la suite les équations de la dynamique peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{p}_s \omega) &= \mathbf{G}_i \\ \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}_p + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{p}_s \omega) &= \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i \\ \frac{2}{\Delta T} \mathbf{I} \omega + \frac{2}{\Delta T} \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \dot{\mathbf{U}}_{3Dc}) &= \mathbf{p}_s^T \mathbf{G}_i \end{aligned} \quad (2.108)$$

Si les matrices de masse ne sont pas lumpées, on aura la propriété suivante :

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}_t = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p \mathbf{p}_s \quad (2.109)$$

Eq. (2.109) est intéressante car elle permet le calcul de la matrice d'inertie d'un système complexe en forme à condition de faire un maillage et d'obtenir sa matrice de masse en discrétisation  $3D$ . Cette méthode a été connue pour sa simplicité à trouver la matrice d'inertie des grains (solides rigides polyédriques d'un milieu granulaire, par exemple). Elle peut servir pour trouver la matrice d'inertie à partir d'un modèle poutre non sous-intégré, (car elle inclus forcément le solide rigide), ou à partir d'un modèle  $3D$  non lumpé.

La deuxième propriété à vérifier concerne la cohérence entre les modèles poutre et  $3D$  :

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P} \quad (2.110)$$

Le système d'équations suivant exprime les trois orthogonalités entre les 3 champs de vitesse :

$$\mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}_p = 0 \quad (2.111)$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = 0 \quad (2.112)$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p) = 0 \quad (2.113)$$

Eq. (2.111) représente l'orthogonalité poutre/solide rigide. En d'autres mots, la moyenne de la vitesse poutre pondérée par la masse poutre rapporté au solide rigide est nulle ( il n'y a pas de champ solide rigide dans celui purement poutre). Eq. (2.112) représente l'orthogonalité  $3D$ /poutre et Eq. (2.113) celle  $3D$ /solide rigide ( $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p$ ) représente la vitesse  $3D$  qui n'inclus pas la rotation de solide rigide.

En conclusion, l'unicité de la décomposition, pour un schéma d'intégration en temps explicite type différence centrée, conduit aux équations de la dynamique semi-couplées uniquement :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{I} \omega = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i \quad (2.114)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_p \mathbf{p}_s \omega \quad (2.115)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{P}_t \omega) \quad (2.116)$$

Si on utilise un schéma en temps explicite, le fait que  $\omega$  soit une inconnue ne rend pas le système non linéaire à condition qu'il soit découplé. Ici on résout Eq. (2.114) en premier, ce qui donne le  $\omega(t)$ , qu'on injecte ensuite dans Eq. (2.115) (et qui permet de calculer  $\mathbf{P}^T \mathbf{G}_i$ ).

Eq. (2.114) traduit la dynamique du solide rigide, Eq. (2.115) celle du modèle poutre en corotationnel et Eq. (2.116) la dynamique de la correction 3D.

Cette condition d'orthogonalité, exprimée par les équations (2.111, 2.112, et 2.113) est un cas idéal qui se traduit par une discrétisation par éléments finis qui garantie une cohérence entre le modèle poutre et celui 3D. Les espaces de discrétisation doivent être emboîtés; en particulier, les fonctions de formes devant être du même ordre d'interpolation et les matrices de masses ne doivent pas être lumpées. Cependant ce n'est pas le cas, car dans la plupart des cas les fonctions de formes élément fini du modèle poutre sont plus riches en interpolation que ceux 3D. Cela rend l'orthogonalité difficile à moins de mailler le 3D d'une façon très fine (presque continue). A cet effet s'ajoute le fait que dans un schéma d'intégration en temps explicite, les matrices de masses sont lumpées. On a aussi parfois des sous-intégrations pour éviter des problèmes de verrouillage qui ne vérifient pas les conditions demandées, détaillées dans la suite.

Cette même étude pourrait être étendue à une résolution implicite par le schéma de Newmark. En effet, par une résolution implicite selon le schéma de Newmark, l'expression des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{U}_{3D} = (\mathbf{U}_{3D})_i + \Delta T (\dot{\mathbf{U}}_{3D})_i + \frac{1}{2} \Delta T^2 [(1 - 2\beta)(\ddot{\mathbf{U}}_{3D})_i + 2\beta \ddot{\mathbf{U}}_{3D}] \quad (2.117)$$

et celle des vitesses :

$$\dot{\mathbf{U}}_{3D} = (\dot{\mathbf{U}}_{3D})_i + \Delta T [(1 - \gamma)(\ddot{\mathbf{U}}_{3D})_i + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{3D}] \quad (2.118)$$

Eq. (2.117) et Eq. (2.118) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{U}}_{3D} &= \frac{1}{\Delta T \gamma} \dot{\mathbf{U}}_{3D} - \mathbf{d}_i \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{\Delta T \gamma} \omega - \mathbf{d}_i \\
\mathbf{U}_{3D} &= \frac{\beta \Delta T}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{3D} - \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{2.119}$$

$\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{e}_i$  sont des termes qui ne dépendent que des valeurs à l'instant de calcul précédent et sont par la suite des quantités connues. Le système des équations 2.119 permet de transformer l'Eq. (2.94) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{3D} \mathbf{Q} \left( \frac{1}{\Delta T \gamma} \ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \frac{1}{\Delta T \gamma} \mathbf{p}_s \dot{\omega} \right) + \mathbf{K}_{3D} \mathbf{Q} \frac{\beta \Delta T}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{3D} &= ((\mathbf{F}_{3D})_g + \mathbf{Q} \mathbf{F}_{3D}) \\
- \mathbf{M}_{3D} \mathbf{Q} (\Omega^2 r + 2\Omega \dot{\mathbf{U}}_{3D}) - \mathbf{K}_{3D} \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_g) + \mathbf{f}_i &
\end{aligned} \tag{2.120}$$

avec  $\mathbf{f}_i$  est un terme qui dépend des valeurs à l'instant précédente. Le terme de droite de l'Eq. (2.120) sera noté  $\mathbf{h}_i$ . Si on effectue une modification de la matrice de masse comme suit :

$$\mathbf{M}_{3D} = \frac{1}{\Delta T \gamma} \mathbf{M}_{3D} + \frac{\beta \Delta T}{\gamma} \mathbf{K}_{3D} \tag{2.121}$$

et en utilisant la fonction test de l'Eq. (2.100) on obtient les équations de la dynamique, pour une résolution par le schéma de Newmark :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \frac{1}{\Delta T \gamma} \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \omega &= \mathbf{h}_i \\
(\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}) \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \omega &= \mathbf{P}^T \mathbf{h}_i \\
(\mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}) \omega + \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p) &= \mathbf{p}_s \mathbf{h}_i
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Du système des équations 2.122 on tire les conditions d'orthogonalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p) &= 0 \\
\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} &= 0
\end{aligned} \tag{2.123}$$

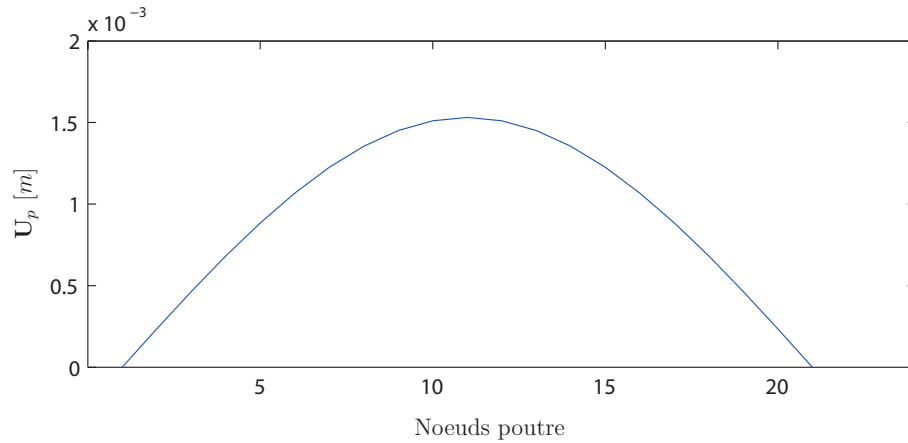
Le système des équations 2.123 et si on considère la matrice d'inertie modifiée  $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s$ , et si la matrice de masse poutre modifiée est  $\mathbf{M}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}$ , l'unicité de la décomposition selon le schéma de Newmark sera traduite par :

$$\mathbf{I} \omega = \mathbf{p}_s^T \mathbf{h}_i \tag{2.124}$$

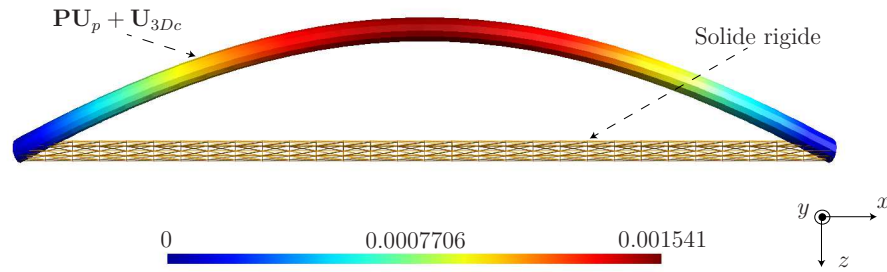
$$\mathbf{M}_p \dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{h}_i - \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{p}_s \omega \tag{2.125}$$

$$\mathbf{M}_{3D} \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{h}_i - \mathbf{M}_{3D} (\mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p + \mathbf{p}_s \omega) \tag{2.126}$$

Les équations (2.124, 2.125 et 2.126) ressemblent à celles obtenues pour une résolution explicite, mais avec des matrices de masses et d'inerties modifiées.



(a) Déplacements poutre obtenus à  $t = 0.322$  (s)



(b) Somme des champs : solide rigide, poutre et 3D de correction

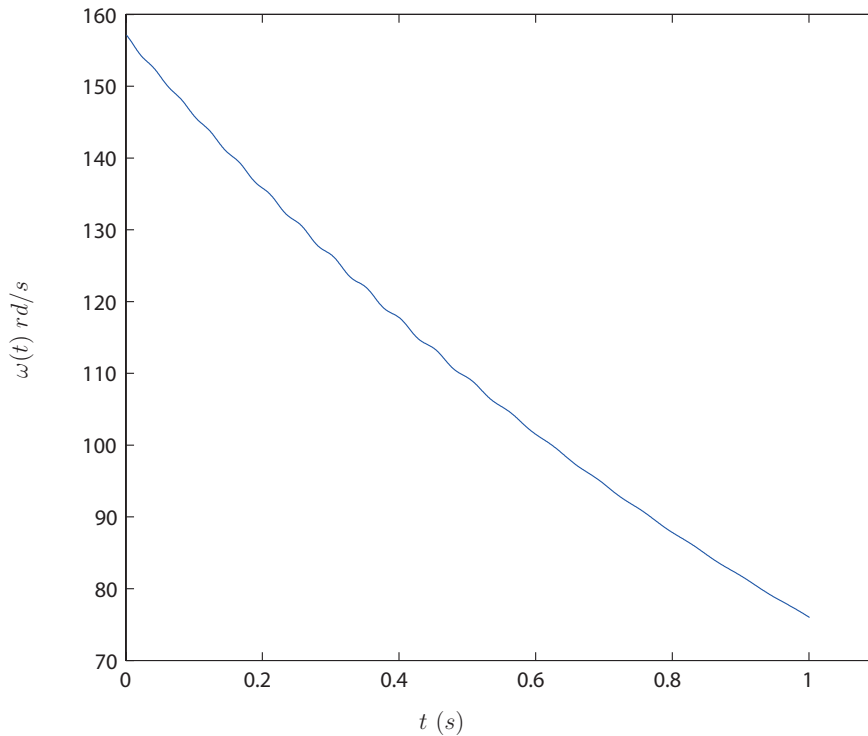
**Figure 2.31.:** Construction de la solution 3D à  $t = 0.322$  (s)

### 2.11.2.1. Illustration par un exemple numérique

On vise, dans cet exemple, l'illustration du principe de décomposition du problème de dynamique de rotor 3D en trois champs orthogonaux : solide rigide ( $\omega$ ), poutre ( $\dot{\mathbf{U}}_p$ ) et 3D de correction ( $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}$ ). Pour le faire, on considère un rotor sans disque soumis à un balourd et possédant une vitesse de rotation initiale non nulle. Dans cet exemple, et pour que la vitesse de rotation soit une variable du problème, le calcul est effectué par une modélisation par éléments finis sous Matlab.

On considère une poutre simplement appuyée sur les deux extrémités de diamètre  $0.05$  m et de longueur  $2$  m. Elle est en acier de module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Pa, de coefficient de Poisson  $\mu = 0.3$  et d'une densité  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. La poutre est libre de tourner autour de son axe principal et possède une vitesse initiale de  $\omega_0 = 1500$  tr/min et est soumise en son plein milieu à un balourd de  $0.5$  kg. Un amortissement de Rayleigh tel que  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$  est appliqué sur la poutre, avec  $\alpha = 10^{-3}$  et  $\beta = 1$ .  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  représentent respectivement les matrices de raideur, masse et amortissement du modèle. La simulation s'effectue sur une durée totale de  $1$  (s). La résolution s'effectue via le schéma de Newmark avec un pas de temps de  $10^{-3}$  (s).

La Fig. 2.31 illustre la construction de la solution 3D à  $t = 0.322$  (s), suivant les équations (2.124, 2.125 et 2.126), et comme explicité dans le §2.11.2, à partir d'une résolution de la cinématique du solide rigide qui correspond à la résolution de



**Figure 2.32.:** Évolution de la vitesse de rotation au cours du temps

l' Eq. (2.124) et qui renseigne  $\omega$  (voir la Fig. 2.31b) et puis d'une résolution de la cinématique poutre décrite par l'Eq. (2.125) (voir la Fig. 2.31a) et finalement en tenant compte de la déformation de la section par une correction 3D selon l'Eq. (2.126). Ces trois champs sont théoriquement orthogonaux. La même opération est effectuée à chaque pas de temps. La Fig. 2.31b montre la somme des 3 solutions. Elle ne compare pas à une solution de référence 3D<sup>4</sup>.

La Fig. 2.32 montre l'évolution de la vitesse de rotation globale avec le temps  $\omega(t)$  rd/s. En effet, l'amortissement basse fréquence de la méthode de Rayleigh était élevé dans la simulation ( $\beta = 1$ ) : on a un ralentissement certain du rotor et des fluctuations de rotation dues à la dynamique du balourd. La Fig. 2.32 illustre le fait qu'il est tout à fait possible de décomposer la solution 3D en trois champs orthogonaux (solide rigide, poutre, et 3D de correction) tout en considérant aussi la vitesse de rotation comme une inconnue du problème de la dynamique transitoire des rotors, mais que les contraintes de Code\_Aster font que l'implantation dans ce code se fait à une vitesse de rotation connue et constante.

Cet exemple permet d'illustrer le principe de décomposition de la solution 3D en dynamique des machines tournantes. Malgré le fait que les conditions d'orthogonalité, exprimées par le système d'équations 2.123, ne sont pas satisfaites exactement, la décomposition selon les équations (2.124, 2.125 et 2.126) est possible et conduit

4. Une solution de référence obtenue avec un maillage 3D est difficile à obtenir car les éléments 3D sont mauvais pour représenter une solution de flexion sur une structure élancée. Il faudrait avoir des éléments de degré élevé, ou mailler avec une finesse très élevée.

à des erreurs de simulation négligeables.

On essaye par la suite de présenter un moyen qui permettrait de “forcer” l’orthogonalité des champs décrite par le système d’équations 2.123, et cela en effectuant un changement sur les vecteurs de projection  $\mathbf{p}_s$  et  $\mathbf{P}$  qui tient compte de l’erreur due à la non satisfaction de la condition d’orthogonalité.

### 2.11.3. Prise en compte d’approximations pour les matrices de masse

Dans les code de calcul par éléments finis et pour une intégration en temps explicite, les conditions nécessaires à l’orthogonalité ne sont généralement pas vérifiées. Cependant, il existe des changements possibles à faire sur les projecteurs de façon à retrouver cette orthogonalité.

Si les conditions précédentes de cohérence ne sont pas vérifiées, cela conduit à :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_p^D &\neq \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} \\ \mathbf{I} &\neq \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_t\end{aligned}\quad (2.127)$$

$\mathbf{M}_p^D$ ,  $\mathbf{M}_{3D}^D$  représentent respectivement les matrices de masses poutre et 3D lumpées ou comportant une incohérence dans les fonctions de formes.

Suivant les cas même, la cohérence solide rigide/poutre peut se trouver en défaut. On considère dans un premier temps que celle-ci est vérifiée.

#### 2.11.3.1. Essai I : $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$

Dans un premier temps on considère que  $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$  et cela conduit à la vérification de  $\frac{2}{\Delta T} \mathbf{I} \omega = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i$ . On cherche alors à écrire les équations de la dynamique sous la forme :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{I} \omega = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i \quad (2.128)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_p^D \dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s \omega \quad (2.129)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p - \frac{2}{\Delta T} \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \omega \quad (2.130)$$

Eq. (2.129), Eq. (2.130), et Eq. (2.128) est un système de 3 équations à 3 inconnues pour lequel il faut trouver  $\bar{\mathbf{M}}_p$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{3D}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{3D}$  de façon à vérifier les conditions d’orthogonalité.

– ( $\mathbf{p}_s$  Eq. (2.129)-Eq. (2.128)) donne :

$$\mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \dot{\mathbf{U}}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s) \omega \quad (2.131)$$

cette équation devant être nulle conduit à une première condition exprimée par  $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s$

– ( $\mathbf{P}^T$ Eq. (2.130)-Eq. (2.129)) donne :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = (\mathbf{M}_p^D - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}) \dot{\mathbf{U}}_p + (\bar{\mathbf{M}}_p - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}) \mathbf{p}_s \omega \quad (2.132)$$

– ( $\mathbf{P}_t^T$ Eq. (2.130)-Eq. (2.128)) donne :

$$\mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P}_t^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_t^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}_t) \omega \quad (2.133)$$

– Pour annuler le membre de gauche de l'Eq. (2.132), on trouve deux conditions :  $\bar{\mathbf{M}}_p = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}$ , et pour  $\mathbf{M}_p^D = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{P}$  et d'après Eq. (2.133) il faut  $\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}_t$ . Finalement en choisissant  $\tilde{\mathbf{M}}_{3D} = \mathbf{M}_{3D}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D} \mathbf{P}$ , cela conduit aussi à la vérification de l'Eq. (2.132) car  $\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}_t = \mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s$ . Cependant, la propriété qui reste à vérifier et qui est délicate est

$$\mathbf{M}_p^D = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \quad (2.134)$$

un choix possible consiste à chercher  $\tilde{\mathbf{M}}_{3D}$  sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{3D} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{M}_p^D \mathbf{P}^T \mathbf{A} \quad (2.135)$$

mais cela nécessite que  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{1}$  (la projection  $\mathbf{P}$  est orthogonale au sens de  $\mathbf{A}$ ).

– Une autre solution est la suivante. Revenons au système d'équations Eq. (2.131), Eq. (2.132), et Eq. (2.133). On peut choisir  $\bar{\mathbf{M}}_p = \mathbf{M}_p^D$  et comme on a supposé que l'égalité  $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$  est toujours vérifiée, cela conduit à la satisfaction de l'équation Eq. (2.131) (annule le terme de droite). Et si on choisit  $\tilde{\mathbf{M}}_{3D} = \bar{\mathbf{M}}_{3D} = \mathbf{M}_{3D}^D$ , alors il reste à vérifier  $\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_t$ , cela veut dire qu'il faut chercher à vérifier l'équation  $\mathbf{M}_p^D = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}$  car :

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_t = \mathbf{p}_s^T \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} \mathbf{p}_s = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$$

Comme le logiciel fournit les matrices de masses et que l'approche est sensée être non intrusive, on cherche à éviter de changer les matrices fournies par le logiciel. Il faut changer alors les projections de façon à inclure l'erreur causant la non orthogonalité des champs dans la projection. Donc,  $\mathbf{P}$  est différent du projecteur classique noté  $\bar{\mathbf{P}}$  dans ce qui suit. Le projecteur classique est tel que  $\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_{3D}^D \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{A} \neq \mathbf{M}_p^D$  ; cherchons alors  $\mathbf{P}$  fonction de  $\bar{\mathbf{P}}$  tel que  $\mathbf{M}_p^D = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}$  soit satisfaite.

Procédons à une factorisation de Cholesky :

$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^D = (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}}$  ce qui conduit à :

$$(\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} (\mathbf{M}_p^D)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{1} \quad (2.136)$$

De même,  $\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_{3D}^D \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$  conduit à :

$$\mathbf{B}^{-T} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{M}_{3D}^D \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1} \quad (2.137)$$

Il suffit alors de choisir :



$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \quad (2.138)$$

### Conclusion

Eq. (2.138) résume le changement de projection à faire pour garantir la condition d'orthogonalité selon les hypothèses de l'essai I. Cela veut dire qu'il existe toujours une façon de contourner les difficultés liées à la non vérification de toutes les hypothèses nécessaires à l'orthogonalité, mais comme il faut inverser  $\mathbf{B}$ , cela devient lourd en temps de calcul, car il s'agit de la résolution implicite d'un système linéaire.

#### 2.11.3.2. Essai II : $\mathbf{I} \neq \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$

Ici on n'a plus forcément l'égalité  $\mathbf{I} = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \mathbf{p}_s$  on cherche toujours à écrire les équations de la dynamique découplées sous la forme :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{I} \omega = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i \quad (2.139)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_p^D \dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s \omega \quad (2.140)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p - \frac{2}{\Delta T} \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{3D} \mathbf{P} \omega \quad (2.141)$$

En multipliant Eq. (2.140) par  $\mathbf{p}_s^T$  ce qui conduit à Eq. (2.142) et Eq. (2.141) par  $\mathbf{P}^T$  ce qui conduit à Eq. (2.143) et par  $\mathbf{P}_t^T$  ce qui conduit à Eq. (2.144) :

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p^D \dot{\mathbf{U}}_p = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} (\mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s) \omega \quad (2.142)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} (\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}) \dot{\mathbf{U}}_p - \frac{2}{\Delta T} (\mathbf{P}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{3D} \mathbf{P}) \omega \quad (2.143)$$

$$\frac{2}{\Delta T} \mathbf{P}_t^T \mathbf{M}_{3D}^D \dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{G}_i - \frac{2}{\Delta T} (\mathbf{p}_s^T \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}) \dot{\mathbf{U}}_p - \frac{2}{\Delta T} (\mathbf{P}_t^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{3D} \mathbf{P}_t) \omega \quad (2.144)$$

La condition d'orthogonalité revient à chercher  $\bar{\mathbf{M}}_p$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_{3D}$  et  $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{3D}$  telle que tous les termes de droites soient nuls.

Pour satisfaire la première condition (Eq. (2.142) : orthogonalité poutre/s.r.), il suffit de choisir  $\bar{\mathbf{M}}_p = \mathbf{M}_p$ , car cela conduit à la vérification de  $\mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{p}_s = \mathbf{I}$ .

On aimerait bien dans l'Eq. (2.144) écrire le membre de gauche sous la forme  $\frac{2}{\Delta T} \mathbf{M}_{3D}^D (\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_p)$  pour que ce membre représente la vitesse 3D privée de la rotation d'ensemble. Cela conduit à choisir  $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{3D}^D$ .

Le choix de :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} &= \mathbf{M}_p^D \\ \mathbf{P}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{3D} \mathbf{P} &= \mathbf{M}_p \end{aligned} \quad (2.145)$$

conduit à la satisfaction de Eq. (2.140) et Eq. (2.141) et par la suite à l'élimination des membres de droites des équations Eq. (2.143) et Eq. (2.144), ce qui signifie respectivement l'orthogonalité 3D/poutre et celle 3D/solide rigide. Le système d'équations 2.145, conduit à  $\mathbf{P}_t^T \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P}_t = \mathbf{p}_s^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} \mathbf{p}_s = \mathbf{p}_s^T \mathbf{M}_p \mathbf{p}_s = \mathbf{I}$ . Comme  $\bar{\mathbf{M}}_{3D} = \mathbf{M}_{3D}^D$  alors il faut vérifier

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^D \quad (2.146)$$

ce qui se traduit par un changement de la projection, tel que  $\mathbf{P}$  devient un projecteur différent de celui classique et qu'on notera  $\mathbf{P}_c$  par la suite. On cherche  $\mathbf{P}$  qui vérifie  $\mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} = \mathbf{M}_p^D$ , et on a  $\mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c = \mathbf{A}$  avec  $\mathbf{A}$  est une matrice qu'on factorise selon la méthode Cholesky,  $\mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c = \mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ , qui donne  $\mathbf{B}^{-T} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1}$  et par la suite

$$(\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}_p^D \quad (2.147)$$

En faisant une comparaison entre Eq. (2.147) et Eq. (2.146), on tire la nouvelle définition du projecteur  $\mathbf{P}$  tel que :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_c \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \quad (2.148)$$

Mais à cause de la nécessité d'inverser  $\mathbf{B}$  ce calcul n'est pas explicite.

Reste à calculer  $\bar{\mathbf{M}}_{3D}$  qui sera tirée de  $\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{M}}_{3D} \mathbf{P} = \mathbf{M}_p$ . On essaye

$$\bar{\mathbf{M}}_{3D} = \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{D} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \quad (2.149)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice à chercher. On remplace  $\mathbf{P}$  par sa valeur et  $\bar{\mathbf{M}}_{3D}$  aussi et on trouve :

$$(\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{D} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}_p \quad (2.150)$$

et comme  $\mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$  on aboutit à :

$$(\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B}^T (\mathbf{M}_p^D)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}_p \quad (2.151)$$

et par la suite

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}_p^D)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}_p (\mathbf{M}_p^D)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.152)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P}_c \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}_p^D)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}_p (\mathbf{M}_p^D)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{P}_c^T \mathbf{M}_{3D}^D \\ &= \mathbf{M}_{3D}^D \mathbf{P} (\mathbf{M}_p^D)^{-1} \mathbf{M}_p (\mathbf{M}_p^D)^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_{3D}^D \end{aligned} \quad (2.153)$$

## Conclusion

Une méthode existe bien pour contourner la condition de non orthogonalité qui pourra exister et qui sera due à plusieurs raisons, telle une discrétisation incompatible des deux modèles éléments finis poutre et celui 3D ou une diagonalisation

des matrices de masses ... Cependant, cette méthode repose sur un nouveau calcul des vecteurs de projection qui nécessite l'inversion d'une matrice de grande taille non diagonale, ce qui est censé détruire l'avantage principale de la bascule qui est la réduction du temps de calcul. Une nouvelle perspective s'ouvre : trouver une approximation de la matrice  $\mathbf{B}$  qui soit diagonale.

Par contre et vu l'objectif non intrusif de la thèse, on ne passe pas à l'application des techniques nécessaires à la prise en compte des approximations sur les matrices de masse, ni à l'amélioration requise pour réduire le coût de calcul lié à l'inversion de la matrice  $\mathbf{B}$  nécessaire au changement de la projection. Ces techniques représentent une perspective des travaux de la thèse.

## 2.12. Application en dynamique des machines tournantes

Dans ce paragraphe on étend l'utilisation de la bascule qui a été illustrée sur des cas de dynamique n'incluant pas une rotation d'ensemble, pour l'utilisation sur les problèmes de machines tournantes. Les exemples d'application en dynamique illustrent l'efficacité de la bascule. Elle a été présente dans Tannous et al. [104] et est en cours de publication dans Tannous et al. [105]. L'extension des applications de la bascule aux problèmes de machines tournantes et qui a été présenté Tannous et al. [106], s'est heurtée à plusieurs difficultés qu'on résume par la suite.

### 2.12.1. Quelques difficultés

#### 2.12.1.1. Difficultés théoriques : orthogonalité des vecteurs $\mathbf{PU}_p$ et $\mathbf{U}_{3Dc}$

L'objectif de ce paragraphe est de faire le point sur la difficulté théorique principale à laquelle est sujette la méthode de la bascule et qui a été discutée théoriquement dans le §2.6. Un examen plus proche des Fig. 2.7, Fig. 2.8, et Fig. 2.9 montre une différence entre la solution poutre et celle 3D à n'importe quel instant de calcul. Cette différence est petite mais inévitable et est due à la violation de la condition d'orthogonalité. Les modélisations poutre et 3D se ressemblent d'autant plus que l'élanement de la poutre est important. En effet, dans le cas d'application du §2.8, l'élanement de la poutre est de 10 alors qu'il est de 25 dans le cas de §2.10. Cela conduit à un comportement poutre qui ressemble plus à celui 3D. Cela est évident, si on compare les résultats des Fig. 2.7, Fig. 2.8, et Fig. 2.9 à ceux de Fig. 2.17, Fig. 2.18, et Fig. 2.19. Le déplacement du point situé sur le même endroit physique des modélisations poutre et 3D est différent. Cette différence est petite et se réduit avec l'élanement de la poutre.

$\mathbf{PU}_p$  est construite à partir de la solution poutre. Cela fait que le modèle 3D aura la même flèche que celui poutre, mais différent de celui 3D de référence. Lorsqu'on bascule du modèle poutre à celui 3D, cet écart de flèche se voit corrigé et la solution 3D après bascule est presque identique à la flèche du modèle 3D de référence. Par la suite,  $\mathbf{U}_{3Dc}$  n'est pas seulement une correction de la déformation de la section, mais

également une correction de la différence de flèche entre le modèle poutre et celui  $3D$  comme schématisé dans la Fig. 2.3. Cela illustre l'efficacité de la bascule, car même si on part d'une solution poutre, et malgré la non vérification de la condition d'orthogonalité, on arrive à construire une solution  $3D$  de bascule équivalente à celle  $3D$  de référence, et cela se voit sur les vitesses, déplacements et accélérations.

L'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  n'a pas été vérifiée dans aucun des exemples traités dans ce chapitre. Néanmoins, la bascule fournit des résultats satisfaisants. L'orthogonalité représente une condition favorable mais non nécessaire. Par la suite, la non orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  n'empêche pas le développement de la bascule pour des cas d'application en dynamique des machines tournantes.

### 2.12.1.2. Difficultés liées au choix du code de calcul

Avant de présenter la bascule poutre- $3D$  pour les applications de machines tournantes, on rappelle que la modélisation dépend du choix du logiciel de calcul par éléments finis. Dans le cadre de la thèse, il s'agit de Code\_Aster. Son choix a été justifié dans le Chapitre 1. Suite à ce choix, en plus des difficultés théoriques citées dans le §2.12.1.1, on se heurte à certaines contraintes sur l'aspect rotation d'ensemble en modélisation des machines tournantes et qu'on explique brièvement par la suite.

**Raccord poutre- $3D$  en dynamique des machines tournantes :** dans la problématique de ralentissement en situation accidentelle de la turbine les interactions de contact/frottement sont des non-linéarités localisées en espace et en temps. Par la suite, l'utilisation d'un modèle mixte poutre- $3D$  réduit considérablement la taille du modèle en préservant une bonne précision. Le §2.10 montre l'exemple d'une bascule en dynamique d'un modèle poutre à un modèle mixte poutre- $3D$ . L'utilisation d'un raccord poutre- $3D$  ne constitue en aucun cas une difficulté pour l'application de la méthode de bascule. Au contraire, comme dans un modèle mixte poutre- $3D$ , la zone  $3D$  présente une portion réduite du modèle entier, ce dernier est plus proche d'une cinématique poutre, ce qui améliore les conditions d'orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ , et rend la bascule plus simple à exécuter. En d'autres mots, la bascule poutre vers poutre- $3D$  mixte présente moins de difficultés que la bascule poutre vers  $3D$ . Le type de raccord n'est pas non plus un problème. La bascule pourrait être appliquée en présence d'un raccord sans et avec recouvrement. Dans le cadre de la thèse, Code\_Aster présente le raccord détaillé dans le §2.9. Malheureusement, ce dernier est écrit dans le cadre des applications en petites perturbations et pour des problèmes statiques ou dynamiques sans prise en compte des effets gyroscopiques. La bascule poutre- $3D$  en dynamique des machines tournantes et telle que présentée dans le §2.12, repose sur l'utilisation d'une matrice de gyroscopie, récemment développée pour Code\_Aster dans le cadre de la thèse de Ghanem [4] dans le repère tournant du modèle  $3D$  alors qu'elle l'est obligatoirement dans le repère fixe pour le modèle poutre (contrainte imposée par le Code\_Aster). Cette dernière a montré une non compatibilité et des erreurs de fonctionnement en présence du raccord poutre- $3D$ . L'utilisation de ce raccord en machines tournantes, lorsque les équations sont résolues dans le repère tournant est alors non opérationnelle. Ce raccord n'est

pas dédié aux applications avec grandes rotations/déplacements, ce qui ne permet pas non plus d'adopter une stratégie de calcul dans le repère fixe. En d'autres mots, bien que rien n'empêche l'utilisation d'un modèle mixte poutre-3D pour les problèmes de machines tournantes, et d'appliquer la bascule sur ces problèmes en vue de réduire le temps de calcul, cette option n'est pas utilisée dans la suite de la thèse, suite à des limitations imposées par le logiciel et les exemples traités avec le Code\_Aster seront des modèles entièrement 3D.

**La vitesse de rotation est une donnée du problème :** traiter un problème de ralentissement en situation accidentelle nécessite que la vitesse de rotation du rotor soit une variable du problème. Le contact génère un couple de frottement qui ralentit la rotation de la turbine. La matrice de gyroscopie du modèle dépend de la vitesse de rotation. Si cette dernière est une variable du problème, cela rend le problème non linéaire. La version d'exploitation de Code\_Aster n'est pas capable de traiter la rotation comme une inconnue du problème. Il n'est pas possible par la suite de faire une simulation d'un ralentissement<sup>5</sup>. Dans les exemples qui suivent dans ce chapitre, et suite au choix de Code\_Aster, la vitesse de rotation est supposée connue et constante.

**Le choix du repère dépend de la modélisation :** la modélisation d'un rotor par des éléments poutre impose que le problème soit résolu dans le repère galiléen fixe du rotor. Par contre, pour la modélisation 3D et en vue d'utiliser la matrice de gyroscopie récemment développée dans la thèse de Ghanem [4], le problème de la dynamique du rotor en modélisation 3D doit être écrit dans le repère tournant du rotor. Par la suite la bascule du modèle poutre au modèle 3D doit être précédée d'un changement adéquat de repères.

### 2.12.2. Dynamique des rotors en présence d'un balourd

On s'intéresse à la réponse dynamique du rotor suite à la rupture d'une ailette terminale. Ceci génère un balourd de masse  $M$  situé à une distance  $d$  de l'axe de rotation, qui produit une force de balourd  $F = M \times d \times \omega^2$  au point d'arrachement de la masse, où  $\omega$  représente la vitesse de rotation angulaire du rotor.

Différentes modélisations permettent de décrire la dynamique du rotor soumis à un balourd. Une modélisation par des éléments poutre conduit à un modèle léger en nombre de degrés de liberté et par la suite permet de gagner en temps de calcul. Cette modélisation s'avère satisfaisante si aucun phénomène local ne se produit et est décrite dans le §2.12.2.1. Si des phénomènes locaux ont lieu et nécessitent des éléments 3D pour une meilleure représentation d'un contact/frottement localisé par exemple, une modélisation 3D est requise et conduit à des temps de calcul plus importants. Elle sera détaillée dans le §2.12.2.2.

---

5. Il est possible de contourner cette contrainte, pour la simulation d'un transitoire de vitesse, en effectuant un balayage par palier stabilisé. En d'autres termes, on considère un pas de vitesse donné, et on alimente la recherche de la vitesse stabilisée à l'étape  $i$  par la vitesse stabilisée trouvée à l'étape  $i - 1$ . Cette méthode n'a pas été adoptée dans le cadre de la thèse.

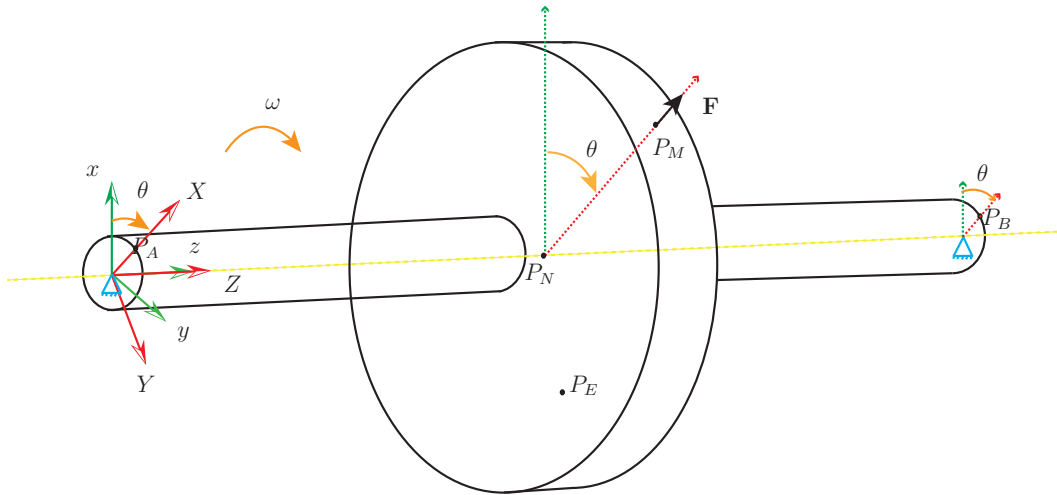


Figure 2.33.: Modèle simplifié d'un rotor avec disque

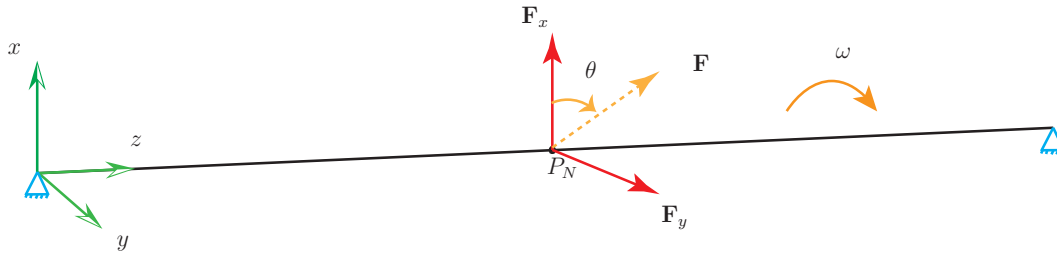


Figure 2.34.: Modélisation poutre du rotor

### 2.12.2.1. Modélisation poutre du rotor

On considère le rotor schématisé par la Fig. 2.33. Un balourd est déclenché par la perte d'une masse  $M$  au point  $P_M$  situé à une distance  $d$  de l'axe de rotation du balourd tournant à la vitesse  $\omega$ . Ce balourd vaut en module  $F = M \times d \times \omega^2$ .

Le modèle poutre qui lui est équivalent est schématisé par la Fig. 2.34. Par une modélisation poutre, le disque est considéré comme rigide et sera modélisé par un élément discret. Cela veut dire que les propriétés du disque (inertie et masse) seront affectées au nœud de la poutre qui correspond à la position du disque, et qui est représenté par le point  $P_N$  de la Fig. 2.34. L'effet de la déformation du disque ne pourra pas être pris en compte.

L'équation de la dynamique de rotor en modélisation poutre, soumise à un balourd  $\mathbf{F}_p$ , s'écrit dans son repère galiléen  $R_g$  avec  $\mathbf{U}_{pg}$  le déplacement de poutre :

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{U}}_{pg} + (\mathbf{G}_p(\omega) + \mathbf{A}_p) \dot{\mathbf{U}}_{pg} + \mathbf{K}_p \mathbf{U}_{pg} = \mathbf{F}_p \quad (2.154)$$

où  $\mathbf{M}_p$ ,  $\mathbf{A}_p$  et  $\mathbf{K}_p$  représentent respectivement les matrices de masse, amortissement, et raideur.  $\mathbf{G}_p(\omega)$  désigne la matrice de gyroscopie, qui dépend de la vitesse de rotation  $\omega$ .

Dans ces conditions et dans le repère  $R_g$ , la force de balourd  $\mathbf{F}_p$  a une composante selon l'axe des  $x$  égale à  $F_x = M \times d \times \omega^2 \times \cos(\omega \times t)$  et une autre selon l'axe des  $y$  de valeur  $F_y = M \times d \times \omega^2 \times \sin(\omega \times t)$ .

### 2.12.2.2. Modélisation 3D du rotor

Par ailleurs, l'équation fondamentale du modèle 3D, schématisé par la Fig. 2.33, écrite dans son repère  $R$  tournant à une vitesse de rotation axiale  $\omega$ , avec  $\mathbf{U}_{3D}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{3D}$ , et  $\ddot{\mathbf{U}}_{3D}$  qui sont, respectivement, les déplacements, vitesses et accélérations dans  $R$  est :

$$\mathbf{M}_{3D}\ddot{\mathbf{U}}_{3D} + (\mathbf{G}_{3D}(\omega) + \mathbf{A}_{3D})\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{F}_{3D} \quad (2.155)$$

où  $\mathbf{M}_{3D}$ ,  $\mathbf{G}_{3D}(\omega)$ ,  $\mathbf{A}_{3D}$  et  $\mathbf{K}_{3D}$  représentent respectivement les matrices de masse, gyroscopie, amortissement, et raideur du modèle 3D.  $\mathbf{F}_{3D}$  désigne la force de balourd dans  $R$ .  $\mathbf{F}_{3D}$  possède une direction fixe dans  $R$  et a pour module  $F_{3D} = M \times d \times \omega^2$  comme précisé ci-dessus.

A noter qu'en repère tournant, on sous-entend par la matrice de gyroscopie, une matrice qui tient en compte des effets gyroscopiques des éléments volumiques, ainsi que de la force entraînement et de Coriolis.

### 2.12.2.3. Matrice de passage

Pour effectuer la bascule poutre-3D, la solution poutre doit tout d'abord être transformée du repère galiléen au repère tournant. Ci-dessous on présente cette matrice de passage qui sera notée  $\mathbf{Q}$  pour un passage du repère tournant au repère galiléen, les déplacements dans ces repères étant notés respectivement  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_g$ .

$\theta$  représente l'angle de rotation du rotor à partir de sa position initiale. Si la vitesse de rotation  $\omega$  est constante, alors

$$\theta = \omega \times t \quad (2.156)$$

On considère que la rotation du rotor s'effectue autour de l'axe  $z$  comme schématisé dans les Fig. 2.33 et Fig. 2.34.

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{Q}\mathbf{U} \quad (2.157)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

On déduit :

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{U} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.159)$$

avec

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

et

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{U} + 2\dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{U}} \quad (2.161)$$

avec

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

La matrice de changement de repère  $\mathbf{Q}$  étant une matrice orthogonale, cela conduit à  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ . C'est cette dernière qui servira dans le cadre de la bascule présentée dans ce chapitre pour passer du repère galiléen au repère tournant. La même démarche de calcul est utilisée pour obtenir  $\dot{\mathbf{U}}$  connaissant  $\dot{\mathbf{U}}_g$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  connaissant  $\ddot{\mathbf{U}}_g$ .

A noter que pour un modèle poutre, les nœuds comportent 6 degrés de libertés, et alors la matrice de passage poutre s'écrit :

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

En conclusion et pour passer du repère galiléen de la poutre et se mettre dans le repère tournant du  $3D$ , les déplacements  $(\mathbf{U}_p)_g$ , vitesses  $(\dot{\mathbf{U}}_p)_g$  et accélérations  $(\ddot{\mathbf{U}}_p)_g$  dans le repère galiléen se transforment respectivement en  $\mathbf{U}_p$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_p$  et  $\ddot{\mathbf{U}}_p$  dans le repère tournant comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_p &= \mathbf{Q}_p^T (\mathbf{U}_p)_g \\ \dot{\mathbf{U}}_p &= \dot{\mathbf{Q}}_p^T (\mathbf{U}_p)_g + \mathbf{Q}_p^T (\dot{\mathbf{U}}_p)_g \\ \ddot{\mathbf{U}}_p &= \ddot{\mathbf{Q}}_p^T (\mathbf{U}_p)_g + 2\dot{\mathbf{Q}}_p^T (\dot{\mathbf{U}}_p)_g + \mathbf{Q}_p^T (\ddot{\mathbf{U}}_p)_g \end{aligned} \quad (2.164)$$

### 2.12.3. Principe de la bascule

Pour basculer du modèle poutre au modèle  $3D$ , nous allons procéder comme pour les applications précédents, après avoir tenu compte du changement de repère entre les deux modèles. A partir de la solution poutre dans le repère tournant, on construit une solution  $3D$  en superposant à la cinématique de corps rigide  $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$  correspondant au modèle de Timoshenko un champ  $\mathbf{U}_{3Dc}$  tenant compte de la déformation dans la section. La solution  $3D$ , à l'instant de la bascule, est ainsi la somme de ces deux vecteurs :

$$\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc} \quad (2.165)$$



En insérant l'Eq. (2.165) dans l'Eq. (2.155), on obtient :

$$\mathbf{M}_{3D}(\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p + \ddot{\mathbf{U}}_{3Dc}) + (\mathbf{G}_{3D}(\omega) + \mathbf{A}_{3D})(\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p + \dot{\mathbf{U}}_{3Dc}) + \mathbf{K}_{3D}(\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}) = \mathbf{F}_{3D} \quad (2.166)$$

$\mathbf{U}_{3Dc}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc}$  sont trois inconnues de l'Eq. (2.166). Si on néglige les corrections en vitesses et accélérations ( $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$ ), cela nous conduit à calculer les déplacements de correction selon une étape statique comme suit :

$$\mathbf{K}_{3D}(\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}) = \mathbf{F}_{3D} + \mathbf{M}_{3D}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{U}}_p + (\mathbf{G}_{3D}(\omega) + \mathbf{A}_{3D})\mathbf{P}\dot{\mathbf{U}}_p \quad (2.167)$$

Si on initialise le modèle 3D à l'instant de la bascule avec le déplacement donné par l'Eq. (2.165) et les vitesses et accélérations correspondant à  $\dot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}_{3Dc} = \mathbf{0}$ , il apparaît à l'instant de la bascule un régime transitoire artificiel, dû au changement de modèle. Pour pallier ce problème, la bascule statique est effectuée sur trois pas de temps consécutifs, l'instant de bascule  $t_b$ , celui qui précède  $t_{b-1}$  et celui qui suit  $t_{b+1}$ . Les vitesses à l'instant de la bascule seront alors initialisées par :

$$\dot{\mathbf{U}}_{3D} = \frac{[\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}]_{t_{b+1}} - [\mathbf{P}\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{3Dc}]_{t_{b-1}}}{2 \times \Delta T} \quad (2.168)$$

Si un schéma d'intégration en temps implicite est utilisé, les accélérations n'ont pas besoin d'être initialisées et seront automatiquement calculées par le schéma d'intégration en temps, comme précisé dans Géraudin et Rixen [66], en étant solution de l'équation :

$$\mathbf{M}_{3D}\ddot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{C}_{3D}\dot{\mathbf{U}}_{3D} + \mathbf{K}_{3D}\mathbf{U}_{3D} = \mathbf{F}_{3D} \quad (2.169)$$

avec  $\mathbf{U}_{3D}$  donnée dans l'Eq. (2.165), qui représente l'initialisation des déplacements à l'instant de bascule et  $\dot{\mathbf{U}}_{3D}$  calculée d'après l'Eq. (2.168).

#### 2.12.4. Exemple d'application

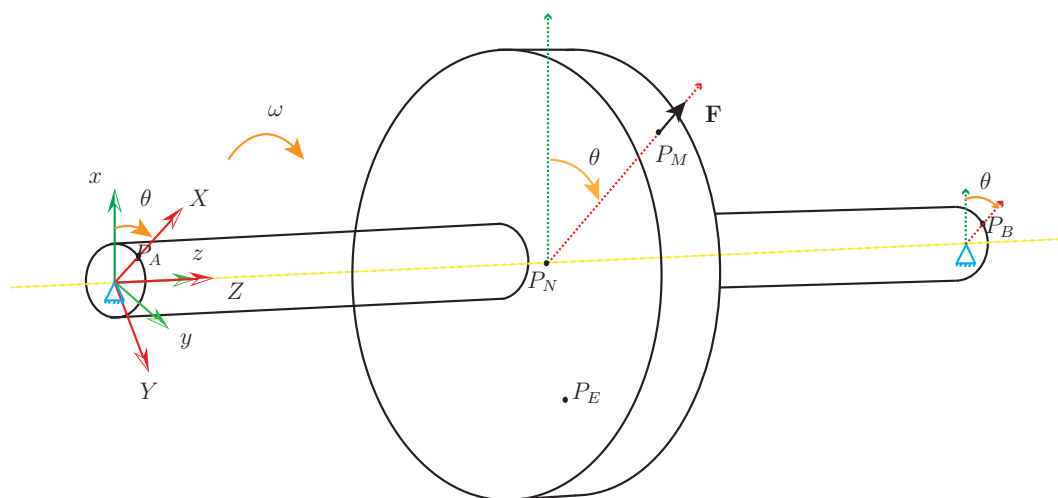
On présente dans ce qui suit une application de la bascule en dynamique des machines tournantes.

Le calcul est effectué sur Code\_Aster, dans lequel la prise en compte des effets gyroscopiques sur les éléments volumiques a récemment été introduite, à condition de résoudre le problème 3D dans son repère tournant, tandis que le problème poutre est résolu dans un repère fixe. La bascule étant non intrusive, elle pourrait également être codée sur d'autres logiciels commerciaux de calcul par éléments finis.

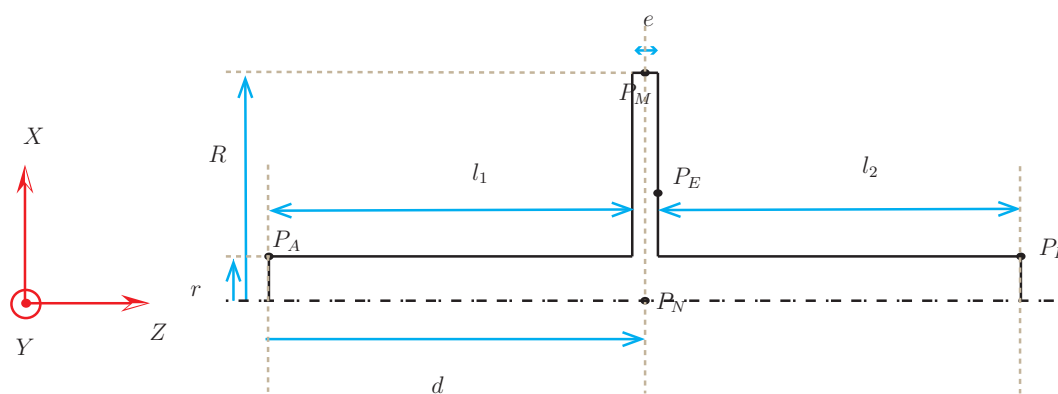
Pour illustrer et valider la bascule poutre-3D en dynamique des machines tournantes, prenons le cas d'un rotor simple tel que celui de la Fig. 2.35a.

Si on fait une coupe longitudinale du rotor qui passe par l'axe de rotation et si on ne présente que la partie supérieure, on obtient la Fig. 2.35b. Les dimensions du rotor sont détaillées dans le Tab. 2.4. Les caractéristiques matériau sont les mêmes que ceux du Tab. 2.2.

Sachant qu'en modélisation poutre le disque est supposé rigide et est représenté par un élément discret, et pour que la modélisation 3D soit comparable à la modélisation



(a) Illustration de la dynamique du rotor

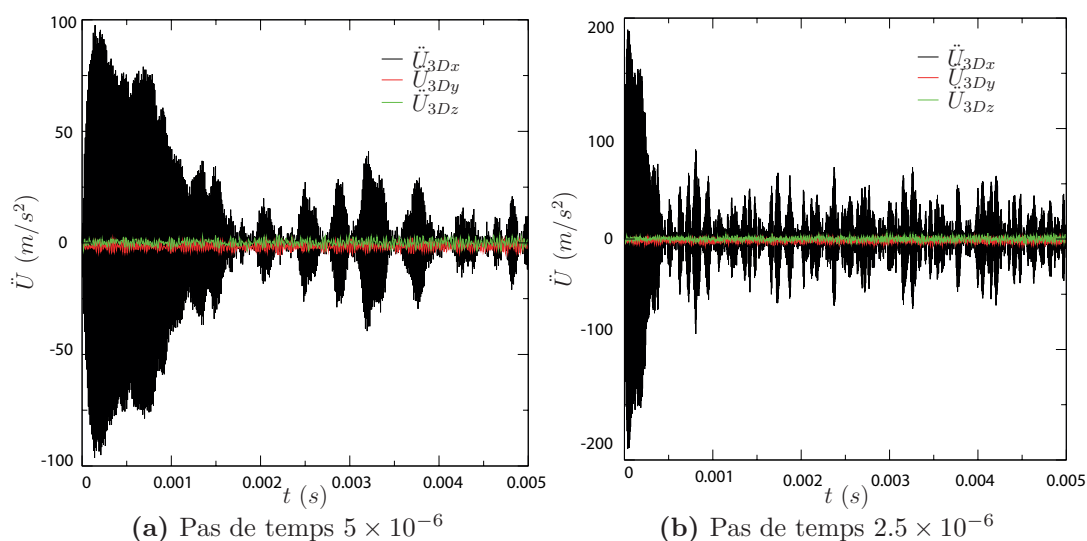


(b) Dimensions du rotor

Figure 2.35.: Le rotor sous étude

$l_1$	$l_2$	$e$	$r$	$R$	$d$
0.25	0.25	0.0125	0.025	0.125	0.25625

Table 2.4.: Dimensions (m) du rotor de la Fig. 2.35b



**Figure 2.36.:** Influence du pas de temps en cas de balourd brusque

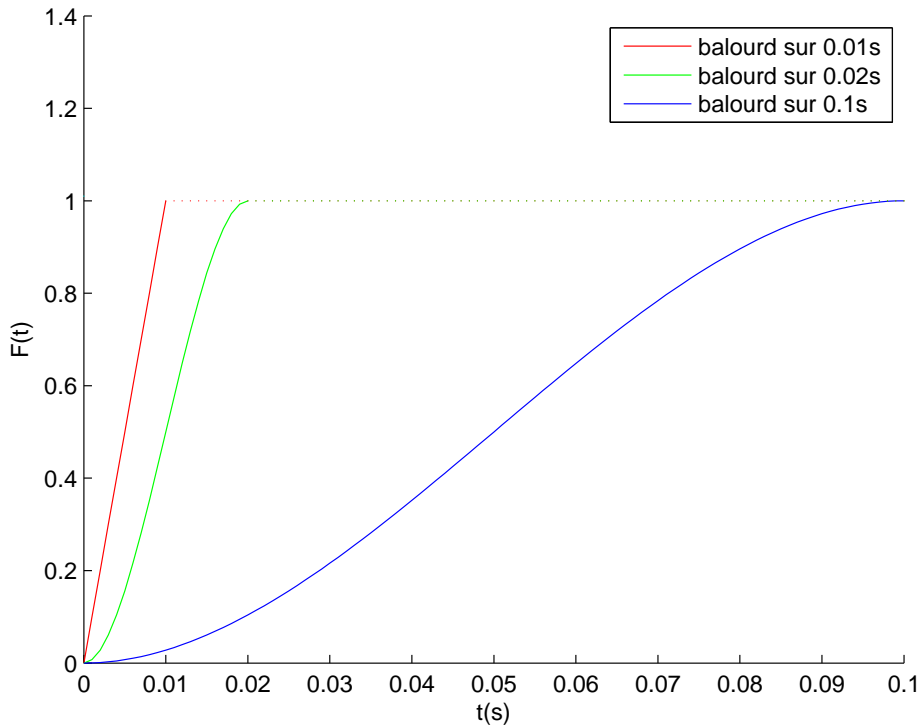
poutre, on rigidifie le disque en lui imposant un module d'Young 100 fois plus grand que celui de l'arbre. Le rotor  $3D$  est maillé avec des éléments quadratiques en 1883 nœuds et le modèle poutre qui lui correspond possède 43 nœuds.

Dans l'exemple ci-après, le rotor est simplement appuyé à ses deux extrémités et tourne à une vitesse constante  $\omega$  (précisée dans chaque exemple d'application). Code\_Aster, comme expliqué précédemment ne permet pas de travailler avec une vitesse inconnue et variable.

Le rotor tourne à une vitesse connue et constante et est soumis à un balourd équivalent à la perte d'une masse de 1 kg au point  $P_M$  tel que schématisé par la Fig. 2.35a. La simulation est effectuée sur une durée totale de 0.5 (s), par un schéma implicite de Newmark avec 8000 pas de temps. Par contre, si cette force de balourd est imposée soudainement sur le rotor, ce dernier tend à atteindre sa flexion d'équilibre durant le premier pas de temps. Cela génère des accélérations d'autant plus élevées que le pas de temps est petit. La solution connaîtra des vibrations hautes fréquences en accélérations avec une amplitude inversement proportionnelle au pas de temps.

La Fig. 2.36 montre les accélérations obtenues suite à un balourd de 1 Kg imposé brutalement sur le rotor en début de simulation (la même conclusion est tirée sur les modélisation poutres et  $3D$ ). Des oscillations numériques hautes fréquences sont visibles sur les accélérations. En plus, si on divise le pas de temps par deux, l'amplitude de ces oscillations est multipliée par deux.

Pour pallier ce problème, le balourd est imposée plus progressivement selon une certaine loi (pour ne plus avoir de non régularité du chargement). La réponse du rotor dépendra de cette loi. On traite dans la suite trois exemples d'étude avec trois lois de balourd différentes. Dans les trois cas, on commence avec un balourd nul et qui atteint sa valeur maximale après une durée donnée et restera par la suite constante. La simulation démarre avec le modèle poutre. La bascule a lieu à  $t_b = 0.25$  (s) et on passe alors vers le modèle  $3D$ . D'autre part, un calcul de



**Figure 2.37.:** Lois d'imposition du balourd

référence sur toute la durée de la simulation est réalisé avec le modèle  $3D$ .

La Fig. 2.37 montre les trois lois selon lesquelles le balourd est imposé. Pour la première, i.e., celle pour laquelle le balourd est imposé linéairement sur une durée de 0.01 (s), une discontinuité de la dérivée de l'effort a lieu à  $t = 0.01$  (s). Cela n'est pas sans conséquence sur la réponse et sera détaillé dans le §2.12.4.1. Par ailleurs, et pour éviter cela, un balourd peut être imposé de façon à respecter la continuité de la dérivée de l'effort au moment où il atteint son maximum et aussi, de façon à avoir une dérivée nulle de l'effort à  $t = 0$ .

On cherche alors un effort  $\mathbf{F}(t)$  tel que  $\dot{\mathbf{F}}(t) = 0$  pour  $t = 0$  et pour  $t = t_m$  où  $t_m$  représente l'instant de calcul pour lequel  $\mathbf{F}(t)$  atteigne sa valeur maximale et stable. On a aussi  $\mathbf{F}(t = 0) = 0$  et  $\mathbf{F}(t = t_m) = 1$ .

Ce qui donne finalement l'Eq. (2.170) :

$$\mathbf{F}(t) = \left(3 - 2\frac{t}{t_m}\right)\frac{t^2}{t_m^2} \quad (2.170)$$

Par la suite on traite trois cas différents :

1. Le premier : un balourd est imposé graduellement à partir d'une valeur nulle et croît linéairement pour atteindre une valeur constante et maximale à  $t = 0.01$  (s). Cela génère un effet de lâcher du balourd car la dérivée de l'effort est discontinue à l'instant à laquelle il atteint sa valeur maximale tel que le montre la Fig. 2.37. Cet exemple sera traité pour deux valeurs de vitesses différentes :  $\omega = 300 \text{ tr/min}$  et  $\omega = 1500 \text{ tr/min}$ .

2. Le deuxième cas sera étudié pour un balourd imposé progressivement selon la loi de l'Eq. (2.170) et pour  $t_m = 0.02$  (s) et  $\omega = 300$  tr/min.
3. Le troisième cas sera pareille au deuxième mais pour  $t_m = 0.1$  (s).

A noter que l'imposition graduelle du balourd selon une des trois lois présentées ci-dessus permet d'éviter des hautes fréquences tel qu'expliqué au début de ce paragraphe et illustré par la Fig. 2.36. Par contre, les trois lois proposées ne permettent pas d'éviter l'excitation de certaines hautes fréquences propres du rotor. En fait, avec la première loi, l'amplitude de ces hautes fréquences propres sera plus prononcée. Elle le sera moins avec la deuxième loi, et encore moins avec la troisième. Mais toutes les trois lois sont capables d'exciter les hautes fréquences propres du rotor, car ce type de fonction comporte une série large de hautes fréquences.

#### 2.12.4.1. Premier cas

On s'intéresse dans ce premier cas au cas où le balourd est imposé linéairement en fonction du temps.

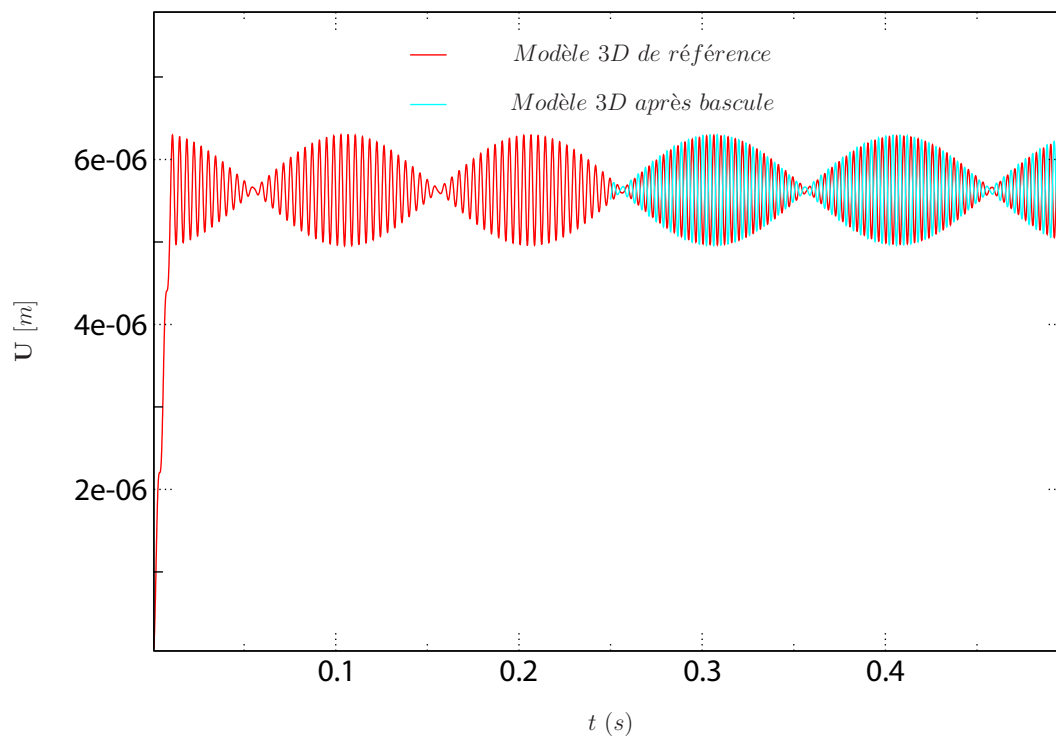
On effectue un calcul par une modélisation poutre et un calcul de référence 3D. Tous les deux pour une durée de 0.5 (s). Une bascule est effectuée à  $t_b = 0.25$  (s) de la modélisation poutre à la modélisation 3D après avoir effectué le changement de repère nécessaire. On montre dans la suite les résultats pour ce premier cas de chargement et pour une vitesse de rotation de 300 tr/min. Le problème est résolu numériquement via un schéma de Newmark avec un pas de temps de  $6.25 \times 10^{-5}$  (s).

La Fig. 2.38 montre les résultats dans le repère tournant pour le point  $P_N$  et selon l'axe  $x$  (voir Fig. 2.35a). Une comparaison est effectuée entre les solutions 3D de référence et 3D obtenue par la méthode de la bascule.

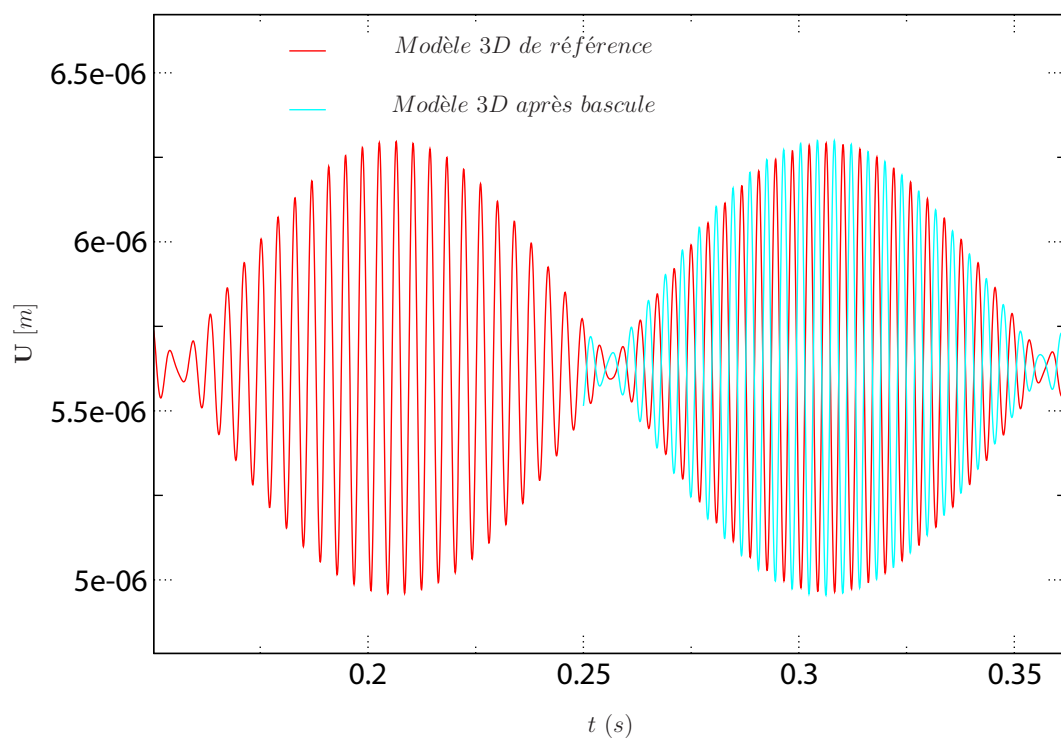
Ces mêmes résultats de la Fig. 2.38 sont transformés dans le repère fixe et les résultats en déplacements pour le modèle poutre sont ajoutés et on obtient la Fig. 2.39.

On remarque la présence de deux fréquences de vibrations, la principale étant celle de la rotation du rotor autour de lui même. La deuxième est une modulation, et représente des oscillations du rotor autour de sa flèche moyenne (tout en tournant). Cette deuxième fréquence, est due à la loi d'imposition du balourd. Elle est purement physique. En effet, une analyse par une transformation de Fourier de la fréquence de modulation obtenue sur la Fig. 2.39 montre une fréquence de  $\approx 256$  Hz, qui est une fréquence propre du rotor. L'amplitude de ces modulations pourrait être réduite considérablement, comme on le verra plus tard, par un changement de la loi d'imposition du balourd, mais l'excitation de cette fréquence est inévitable par les lois de balourd proposées dans ce chapitre.

Les modélisations poutre et 3D présentent un léger déphasage. Ce dernier est dû principalement à une différence de 1% entre les fréquences propres des deux modélisations. Cet écart est dû à la différence entre les fonctions de formes des deux modélisations. Nous avons constaté que l'augmentation de la finesse du maillage 3D réduit cet écart, mais sans le faire disparaître. Malgré un élancement important de la structure et une bonne finesse du maillage 3D, cet écart est inévitable.

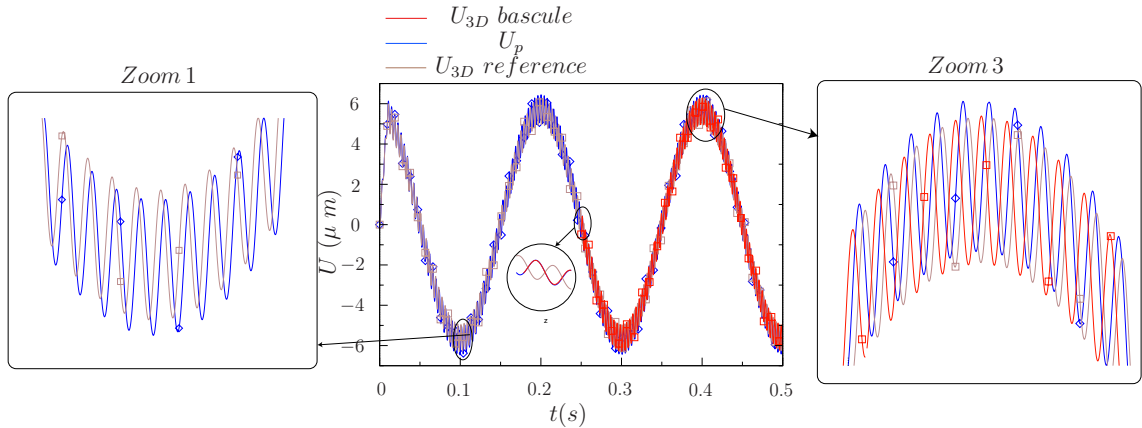


(a) Résultats durant la simulation entière



(b) Zoom sur l'instant de bascule

**Figure 2.38.:** Résultats en déplacements selon  $x$  de  $P_N$  (repère tournant)



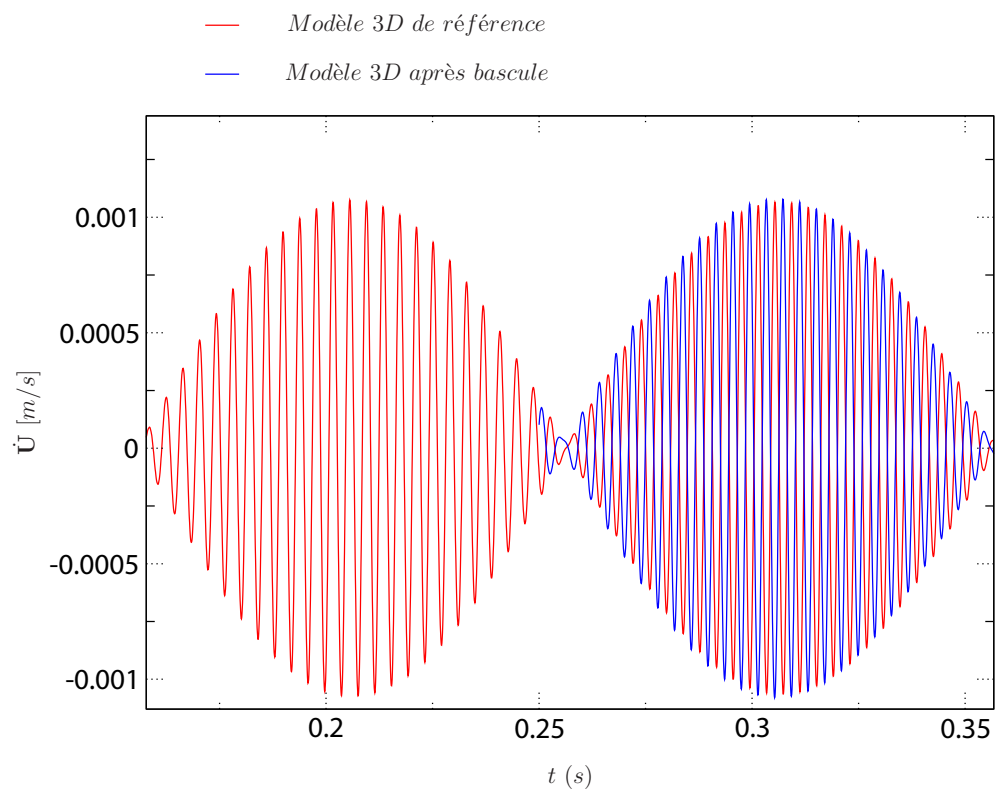
**Figure 2.39.:** Résultats en déplacements selon  $x$  de  $P_N$  (repère fixe).

On remarque sur le Zoom1 (avant bascule) que le modèle poutre est décalé légèrement par rapport au  $3D$ . Ce déphasage (également observé sur les Fig. 2.38 et Fig. 2.40) étant dû à un écart constant entre les pulsations propres des modèles poutre et  $3D$ , se traduit par un décalage entre les solutions poutre et  $3D$  qui augmente avec le temps. Sur les déplacements ce décalage est visible sur les modulations (la deuxième fréquence de vibration et non pas la principale). Ce déphasage conduit en déplacements à des différences de flèches qui peuvent atteindre 30 % entre les modèles poutre et  $3D$  de référence à l'instant de bascule. L'évolution du déphasage est visible sur les zoom2 et zoom3.

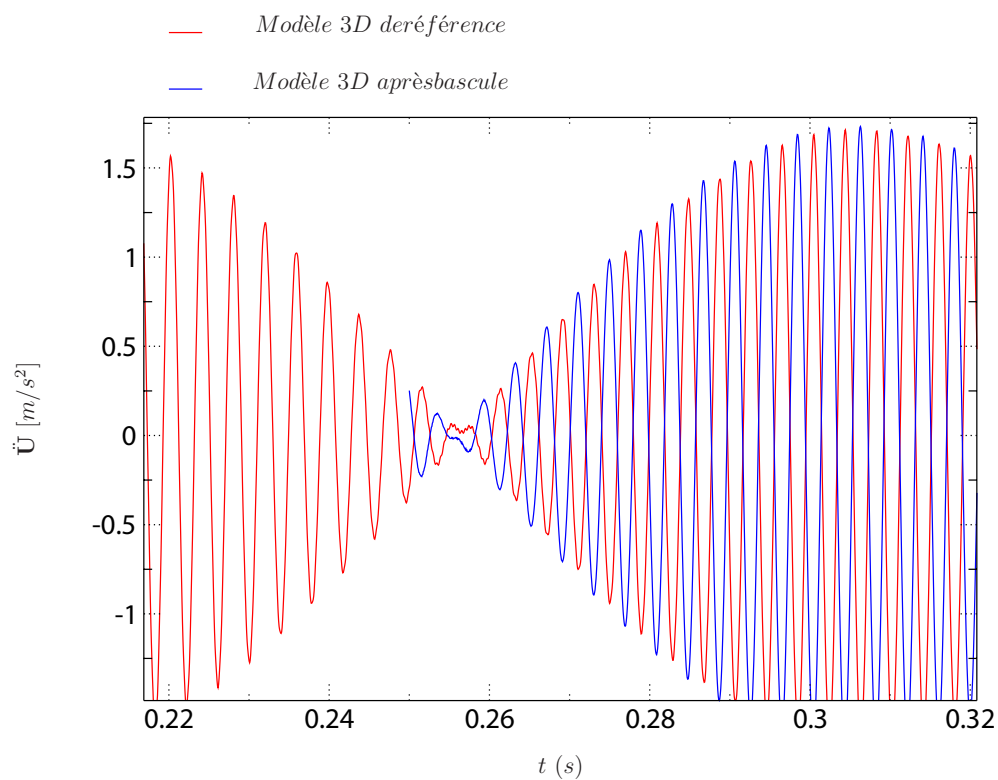
Sur les vitesses et les accélérations, ce déphasage est visible sur la fréquence principale. Au moment de la bascule, les solution poutre et  $3D$  de référence peuvent avoir des vitesses et/ou des accélérations en opposition de phase, ce qui, par la suite pourrait conduire à un écart très important entre les vitesses poutre et celles  $3D$  de référence à l'instant de la bascule. Cela est illustré par les Fig. 2.41 et Fig. 2.42 qui représentent, respectivement, les résultats en vitesses et les accélérations de la bascule du modèle poutre vers celui  $3D$  ainsi que les solutions poutre et  $3D$  de référence au point  $P_N$  et selon la direction  $x$ . A noter que pour les vitesses et accélérations on tire les mêmes conclusions qu'en déplacement. Par la suite, pour la simplicité des figures, on montre les résultats sur l'intervalle  $[0.24, 0.26]$  (s). Les mêmes conclusions sont obtenues sur un point éloigné de la fibre neutre tel que le point  $P_M$  sur lequel est exercé la force de balourd et pour lequel les résultats en vitesses et en accélérations sont présentés dans la Fig. 2.40.

On pourra s'interroger sur l'effet du déphasage sur la bascule. En effet, la solution  $3D$  au moment de bascule est construite à partir de la solution poutre ( $\mathbf{P}\mathbf{U}_p$ ) à laquelle on apporte une correction pour la déformation dans la section ( $\mathbf{U}_{3Dc}$ ). Le déphasage entre les solutions poutre et  $3D$  de référence implique que la solution  $3D$  à construire à l'instant de la bascule a la flèche de la solution poutre. Elle est par la suite déphasée par rapport à la solution  $3D$  de référence. A noter que la correction  $\mathbf{U}_{3Dc}$  est uniquement une correction de la déformation dans la section et n'est pas capable de corriger le déphasage des deux solutions.

Pour résumer, vu que la solution  $3D$  de bascule est construite à partir d'une solution poutre à laquelle on apporte une correction de la déformation dans la section, la so-



(a) Résultats en vitesses (repère tournant)



(b) Résultats en accélérations (repère tournant)

**Figure 2.40.:** Résultats en vitesses et accélérations selon  $x$  de  $P_M$  (repère tournant)



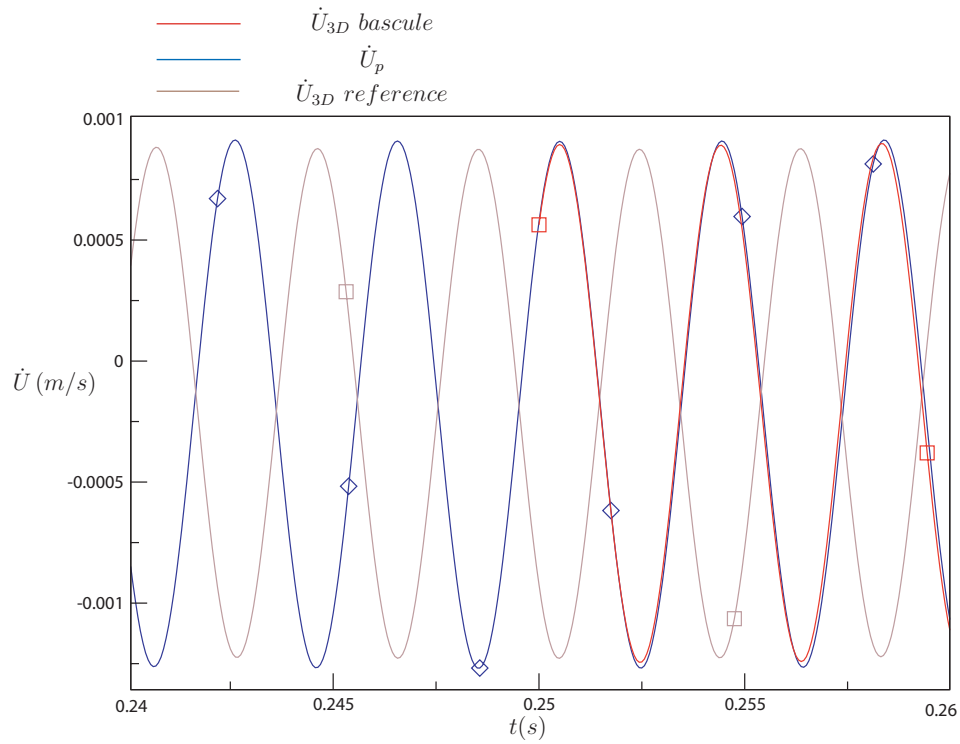


Figure 2.41.: Résultats en vitesses selon  $x$  en  $P_N$  (repère fixe)

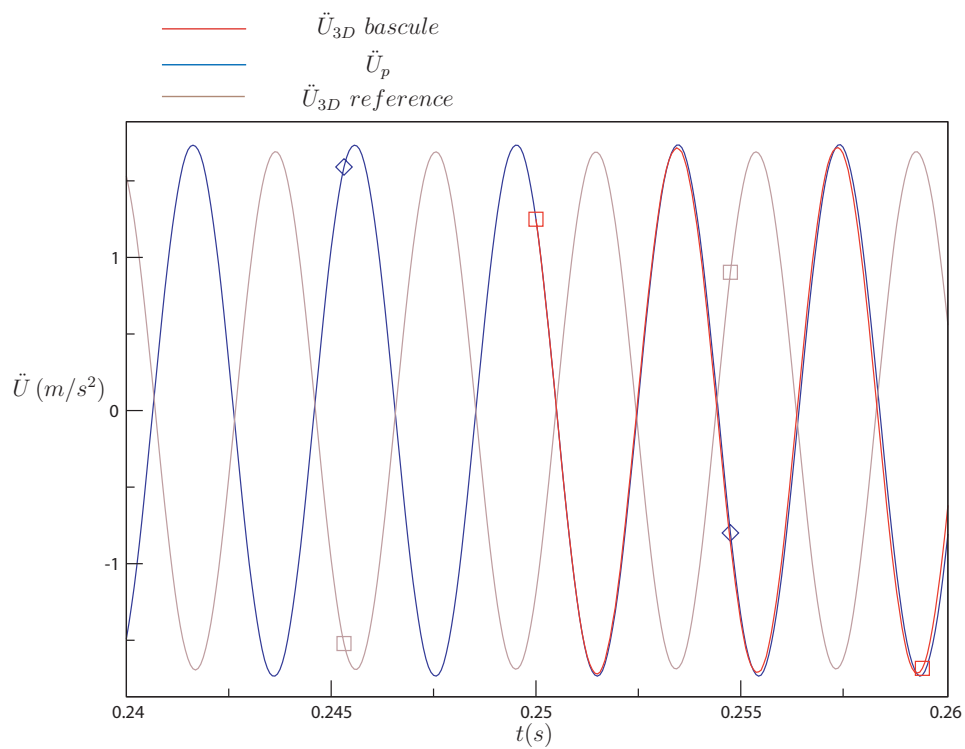


Figure 2.42.: Résultats en accélérations selon  $x$  de  $P_N$  (repère fixe)

lution 3D de bascule "s'accroche" à la solution poutre comme illustré dans Fig. 2.39 en déplacement et même en vitesses (Fig. 2.41) et accélérations (Fig. 2.42).

Le comportement de la solution 3D de bascule se trouve très semblable à celle 3D de référence et garde les mêmes fréquences propres que le modèle 3D, mais elle démarre à partir de la solution poutre au moment de la bascule. Par conséquent elle présente un déphasage au moment de la bascule par rapport à la solution 3D de référence, qui n'évolue pas dans le temps par la suite. Cela est inévitable, car il n'est pas possible d'avoir une modélisation poutre et une autre 3D qui soient identiques. Le déphasage entre les solutions poutre et 3D n'est donc pas un handicap à la méthode de bascule. Cette dernière fonctionne correctement et ne provoque pas de perturbations (hautes fréquences numériques, divergences, etc.) dans la solution 3D après bascule. Cependant, ce déphasage ne pourra pas être compensé. Le comportement global des deux modélisations 3D de référence et 3D après bascule est quasiment identique si le déphasage est mis de côté. Il faut donc comparer les amplitudes des signaux et non pas la phase.

Pour les applications industrielles en vue d'effectuer une comparaison entre une modélisation du contact par des éléments poutre et une modélisation tridimensionnelle, on veille à ce que les seules différences proviennent de la modélisation du contact et que les effets tels que le décalage de fréquence dû à la bascule soient supprimés. Cela sera mieux expliqué dans le chapitre suivant.

Par contre, il est évident que la bascule apporte un gain très appréciable en temps de calcul tout en gardant une bonne précision. La qualité des résultats montrée dans la Fig. 2.39 est la même selon les direction  $x$  et  $y$  et sur tous les points appartenant au rotor.

L'analyse des courbes des énergies confirment la bonne qualité des résultats obtenus sur la modélisation 3D par la méthode de la bascule. Cette dernière n'insère pas d'énergie parasite dans la solution. Elle n'en enlève pas non plus.

Les Fig. 2.43 et Fig. 2.44 présentent respectivement les énergies cinétiques et de déformation des modélisations poutre, 3D de référence ainsi que 3D après bascule. Il faut tout d'abord noter que les valeurs des énergies cinétique, de déformation et totale ne sont pas calculées à chaque pas de temps car cette opération nécessite beaucoup d'espace mémoire. En effet, ces valeurs en énergie sont calculées par des boucles python<sup>6</sup> qui récupèrent les données de sortie (valeurs des déplacements, vitesses, etc.) aux nœuds aux instants de calculs choisis et calculent les valeurs des énergies<sup>7</sup>.

---

6. La version stabilisée de Code\_Aster effectue le calcul du bilan énergétique d'une façon simple et très efficace. Par contre, cette version n'est pas compatible avec le calcul de la matrice de gyroscopie des éléments volumiques, et qui est développée au sein d'une version plus ancienne et n'a pas encore été restituée officiellement dans le code. C'est pourquoi le calcul des énergies pour les applications de bascule en dynamique des machines tournantes se fait à travers des boucles python.

7. Cette procédure occupe complètement la mémoire vive de l'ordinateur et on était obligé de calculer les valeurs des énergies tous les 50 pas de temps, alors que celles dernières, et comme déjà mentionné dans le §2.7, possèdent des fréquences propres qui sont le double de ceux des déplacements. C'est pourquoi les courbes des énergies ne sont pas "lisses" et donnent l'impression d'être un bruit numérique.

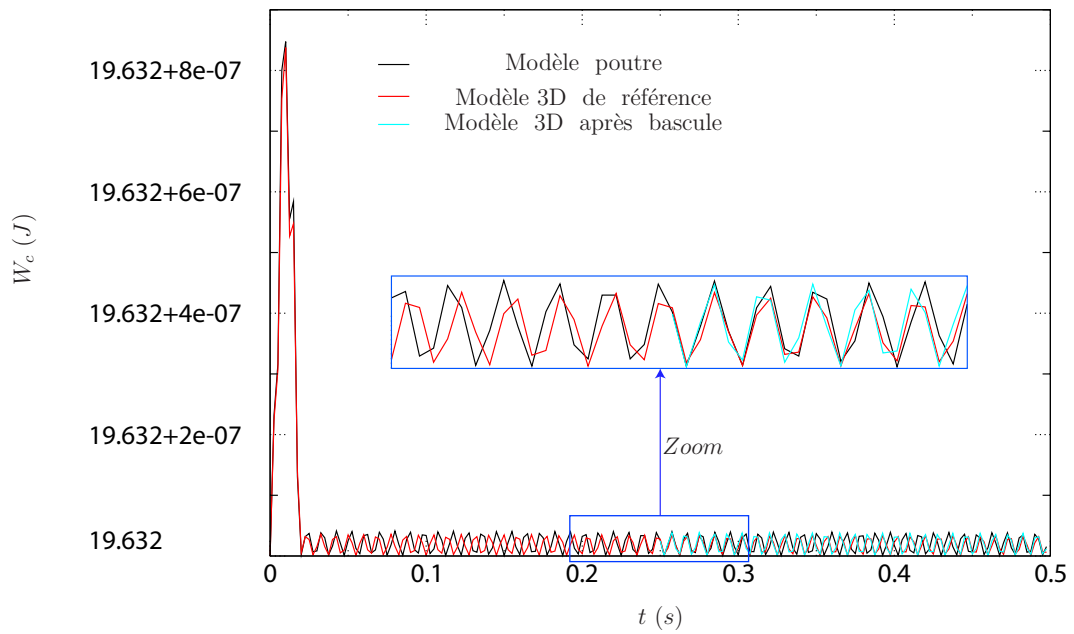


Figure 2.43.: Énergie cinétique pour  $\omega = 300$  tr/min

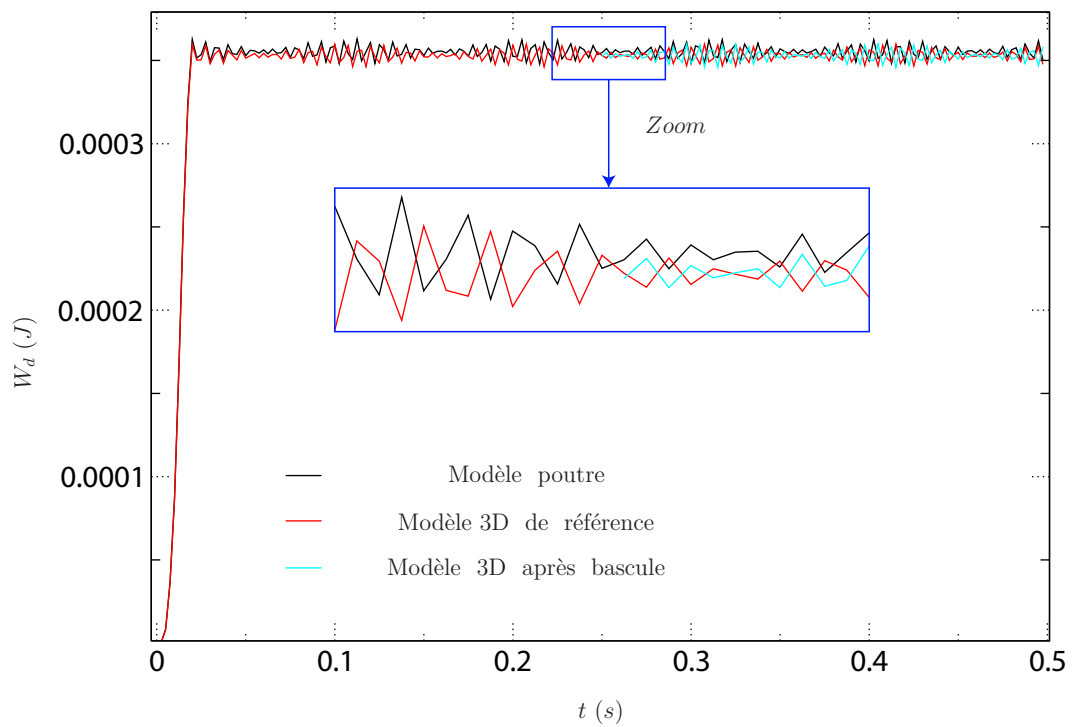


Figure 2.44.: Énergie de déformation pour  $\omega = 300$  tr/min

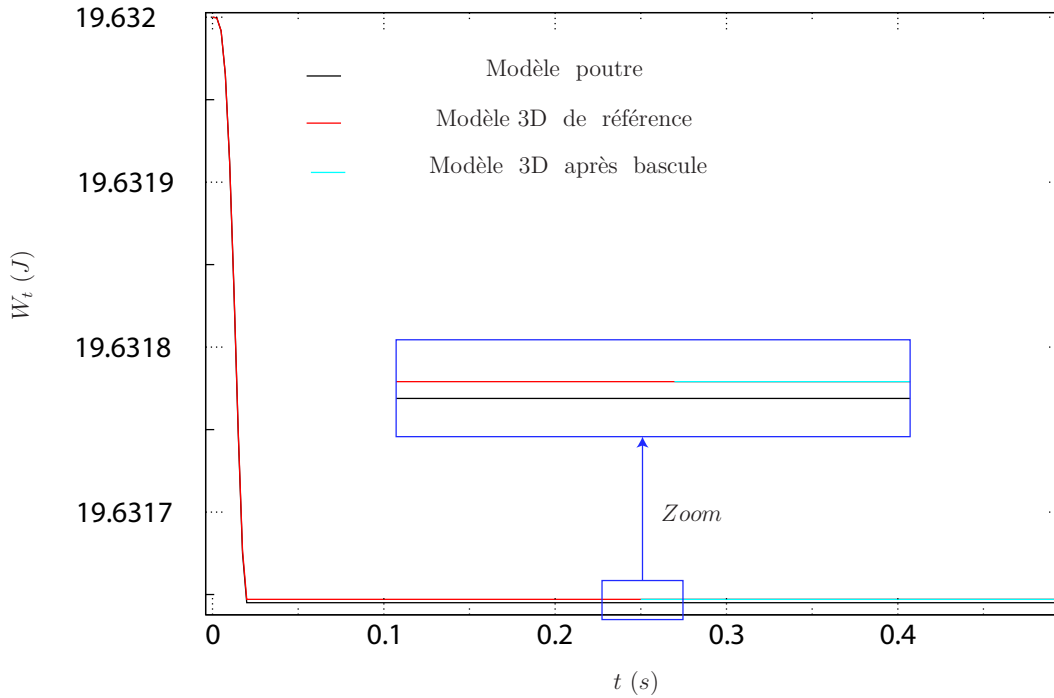


Figure 2.45.: L'énergie totale pour  $\omega = 300 \text{ tr/min}$

L'analyse des énergies cinétiques et de déformation montre une cohérence de l'énergie du modèle 3D après bascule avec les valeurs des énergies du modèle 3D de référence. Aucune perturbation énergétique n'a lieu au moment de la bascule. Comme le problème en modélisation 3D est résolu dans le repère tournant et comme en modélisation poutre la vitesse de rotation est une donnée du problème et est indépendante des valeurs de torsion dans l'arbre, l'énergie cinétique  $W_c$ , et comme le montre la Fig. 2.43, possède deux composantes. La première provient de la rotation du rotor autour de lui-même et est de valeur  $W_{cr} = \frac{1}{2}I\omega^2$ , où  $I$  représente le moment d'inertie du rotor autour de son axe principal de rotation, et la deuxième provient de la vibration du rotor et est de valeur  $W_{cd} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}$ . Cette dernière est quasiment négligeable par rapport à la composante liée à la rotation d'ensemble ( $W_{cr}$ ) et qui dans notre cas possède une valeur de 19.632 (J). Sur la Fig. 2.43, on trouve les deux composantes de l'énergie cinétique du rotor.  $W_{cr}$  est constante car la vitesse de rotation est constante, alors que  $W_{cd}$  oscille. Après bascule, les deux composantes de l'énergie cinétique du modèle 3D ne présentent pas de perturbation.

La Fig. 2.44 montre l'énergie de déformation des modèles poutre, 3D de référence et 3D après bascule. On remarque que la flèche nominale du rotor s'établit durant la phase d'imposition du balourd ( $t \in [0, t_m]$ ). Après cette phase, le rotor vibre autour de sa position d'équilibre stable. C'est pourquoi l'énergie de déformation présente des oscillations autour d'une valeur constante. Après bascule, la valeur de l'énergie de déformation du modèle 3D est cohérente avec les énergies de déformation des modèles poutre et 3D de référence et ne présente pas de perturbations.

La Fig. 2.45 montre l'énergie totale des modèles poutre, 3D de référence et 3D après bascule. On rappelle que le calcul de l'énergie totale se fait selon l'Eq. (2.79). Lorsque le balourd est établi, l'énergie totale est une constante, et cela est visible sur la Fig. 2.45. Elle est quasiment identique sur le modèle 3D de référence et celui après bascule. Aucune énergie parasite n'est visible au moment de la bascule.

On examine par la suite un autre exemple avec une autre vitesse de rotation et qui est une vitesse plus élevée et égale à 1500 *tr/min* et cela pour les mêmes conditions de simulation que l'exemple précédent. Les résultats seront présentés sur le point  $P_N$  et selon l'axe des  $x$ . Les mêmes conclusions sont obtenues dans la direction  $y$  et sur d'autres points du rotor. La Fig. 2.46 montre les résultats en déplacements dans le repère tournant.

Dans le repère galiléen ces derniers sont présentés dans la Fig. 2.47.

Les vitesses et les accélérations sont représentées par la Fig. 2.48.

Si on compare les Fig. 2.38 et Fig. 2.46, on constate que le phénomène mis en œuvre est le même et que la fréquence des modulations est la même. Par contre, c'est visible surtout sur les Fig. 2.38b et Fig. 2.46b, que les amplitudes des modulations sont très accentuées suite à l'augmentation de la vitesse de rotation de 300 *tr/min* à 1500 *tr/min*. La loi d'imposition du balourd n'est pas le seul facteur responsable de l'accentuation des amplitudes des modulations ; la vitesse de rotation est un élément clé.

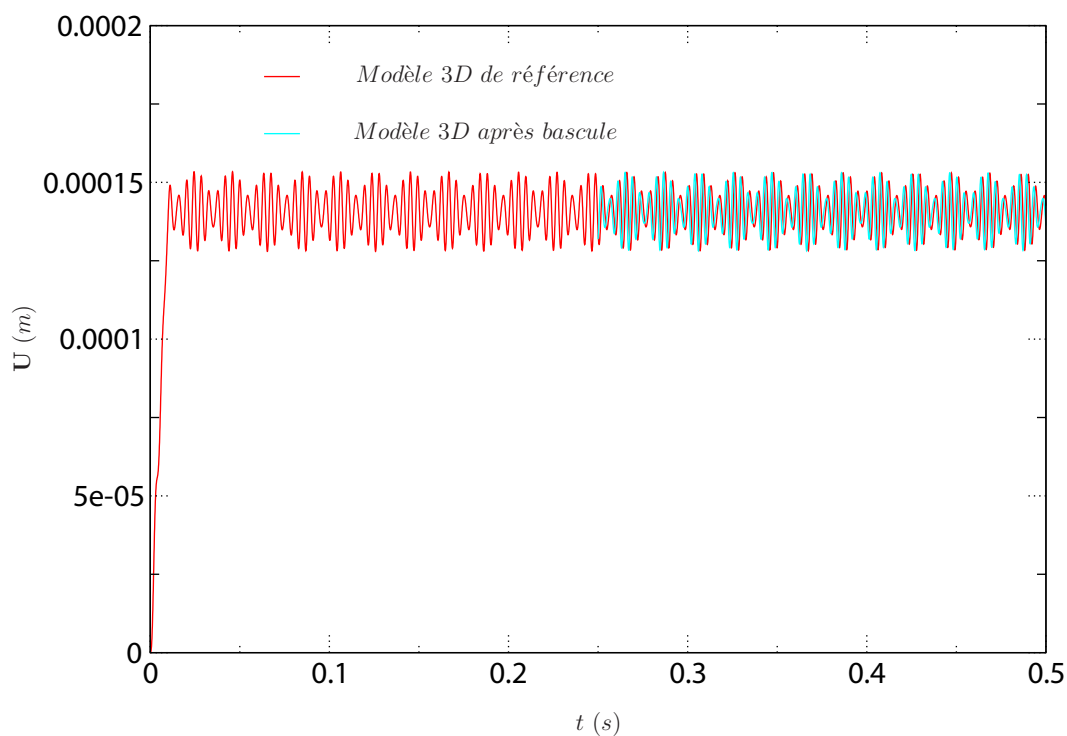
L'analyse des courbes des énergies permettent d'illustrer l'efficacité de la bascule sur des vitesses de rotation plus importantes. Par un souci de clarté, l'énergie cinétique sera présentée sur l'intervalle de temps  $t \in [0.2, 0.3]$  (s) dans la Fig. 2.49. On remarque que l'énergie cinétique du modèle 3D après bascule est plus proche de celle du modèle poutre que de celle du modèle 3D de référence. Les deux solutions poutre et 3D de référence présentent des écarts suite aux différences de modélisations déjà mentionnées précédemment. La cinématique de la solution 3D après bascule s'accroche à celle poutre, d'où le comportement semblable en énergies cinétiques (sur les deux composantes : celle provenant de la rotation d'ensemble, et celle liée à la vibration autour de la position d'équilibre stable).

Cela est moins visible sur l'énergie de déformation de la Fig. 2.50. L'énergie de déformation du modèle 3D après bascule est très proche de celle de référence. Quand à l'énergie totale, elle est constante avec l'absence de toute énergie parasite. Le modèle 3D de référence et celui après bascule possèdent quasiment la même énergie totale comme le montre la Fig. 2.51.

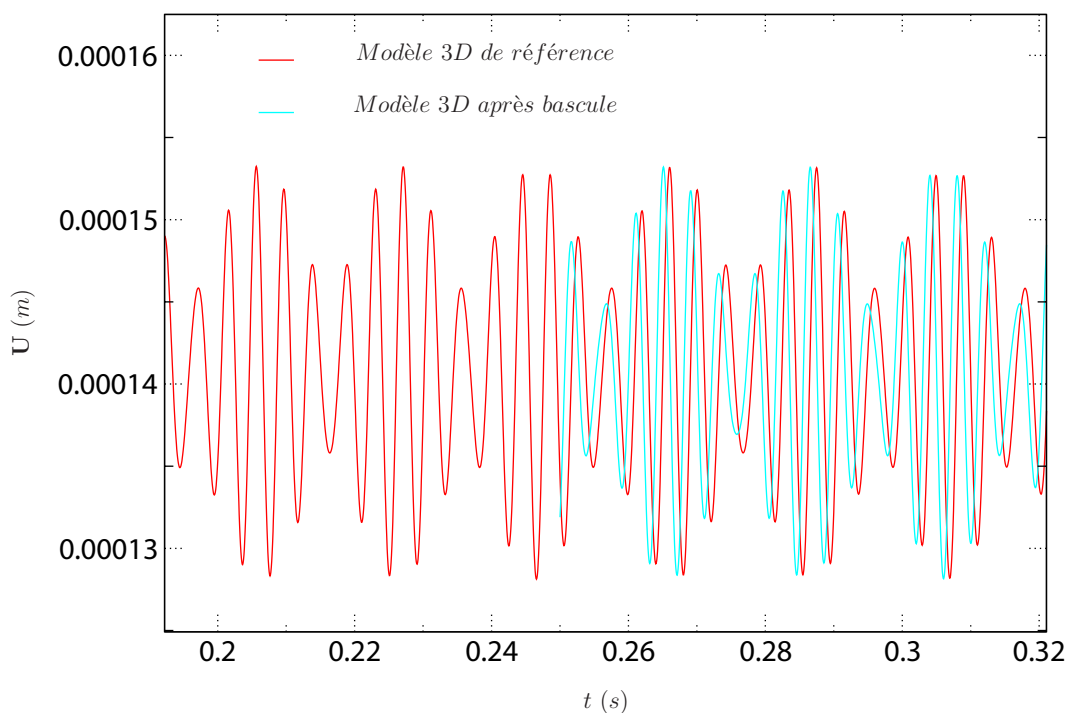
En ce qui concerne l'efficacité de la bascule, ce cas d'étude permet de montrer la robustesse de la bascule sur un autre cas de machine tournante où l'augmentation de la vitesse de rotation entraîne des vibrations importantes. On peut se demander si la bascule montrera la même efficacité proche d'une valeur de rotation critique. Cette question sera détaillée dans le cas d'étude qui suit.

### 2.12.4.2. Deuxième cas

On montre par la suite un cas d'étude avec un balourd imposé sur 0.02 (s) et de façon que la dérivée de la fonction d'évolution du balourd est nulle à l'instant  $t = 0$

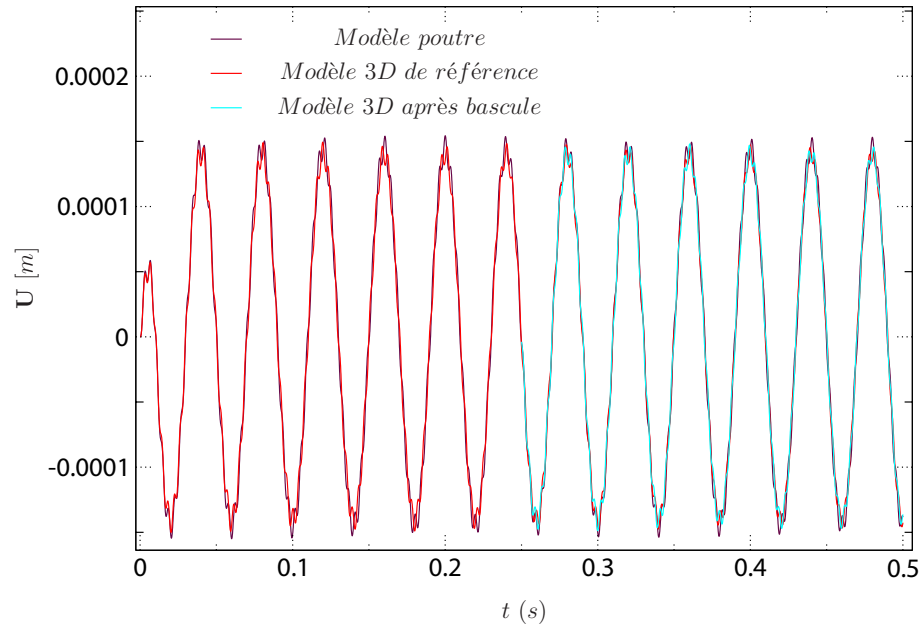


(a) Résultats durant la simulation entière



(b) Zoom sur l'instant de bascule

**Figure 2.46.:** Résultats en déplacements pour  $\omega = 1500$  *tr/min* (repère tournant)



**Figure 2.47.:** Résultats en déplacements dans le repère galiléen

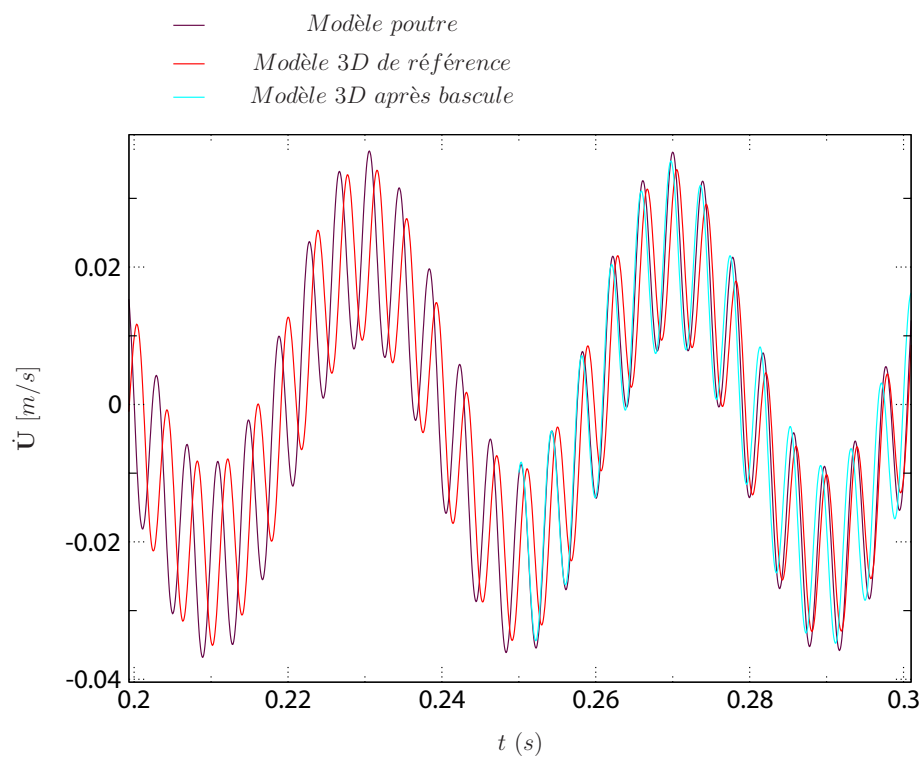
et à l'instant  $t = 0.02$  (s). Les conditions physiques et numériques de la simulation sont les mêmes que ceux du premier cas avec une vitesse de rotation constante de  $300 \text{ tr/min}$ .

La Fig. 2.52 montre les résultats en déplacements dans le repère tournant du point  $P_N$  en fonction du temps pour ce cas de chargement. La fréquence des modulations observée est la même que celle du premier cas de chargement (voir la Fig. 2.38) mais les amplitudes de ses modulations sont réduites considérablement.

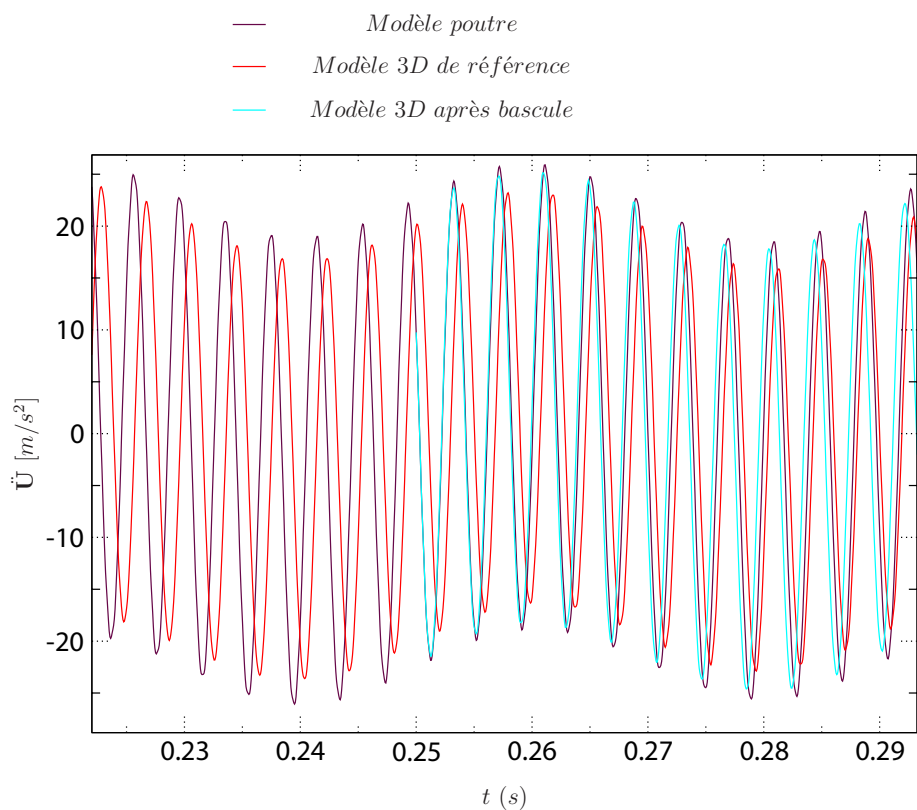
On passe au repère galiléen et on obtient pour les déplacements du point  $P_N$  la Fig. 2.53. Les zooms à l'instant de la bascule et à un instant plus tard confirment les résultats obtenus au premier cas : la solution 3D après bascule s'accroche à celle poutre. Le décalage entre les fréquences propres des deux modélisations poutre et 3D est le même que le premier cas d'étude. La bascule permet de démarrer d'une solution poutre et d'avoir une solution 3D après bascule qui est assez proche de celle 3D mais qui garde un décalage par rapport à la solution 3D de référence vu que son point de départ était la solution poutre. L'amplitude des modulations est réduite pour ce cas d'étude par rapport au premier cas et cela est visible sur les déplacements en repère galiléen si on compare les Fig. 2.52 et Fig. 2.39, i.e., deuxième et premier cas respectivement.

Ces conclusions sont également valables si on examine l'évolution de la vitesse en fonction du temps du point  $P_N$  dans les repères tournant et galiléen, comme le montre la Fig. 2.54, ou l'évolution de l'accélération au point  $P_N$  dans le repère tournant comme le montre la Fig. 2.55. Par souci de clarté les résultats des Fig. 2.54a et Fig. 2.55 sont montrés sur les quelques pas de temps encadrant l'instant de la bascule.

Les énergies cinétiques des modèles poutre, 3D de référence et 3D après bascule



(a) Résultats en vitesses



(b) Résultats en accélérations

Figure 2.48.: Résultats en vitesses et accélérations (repère tournant)



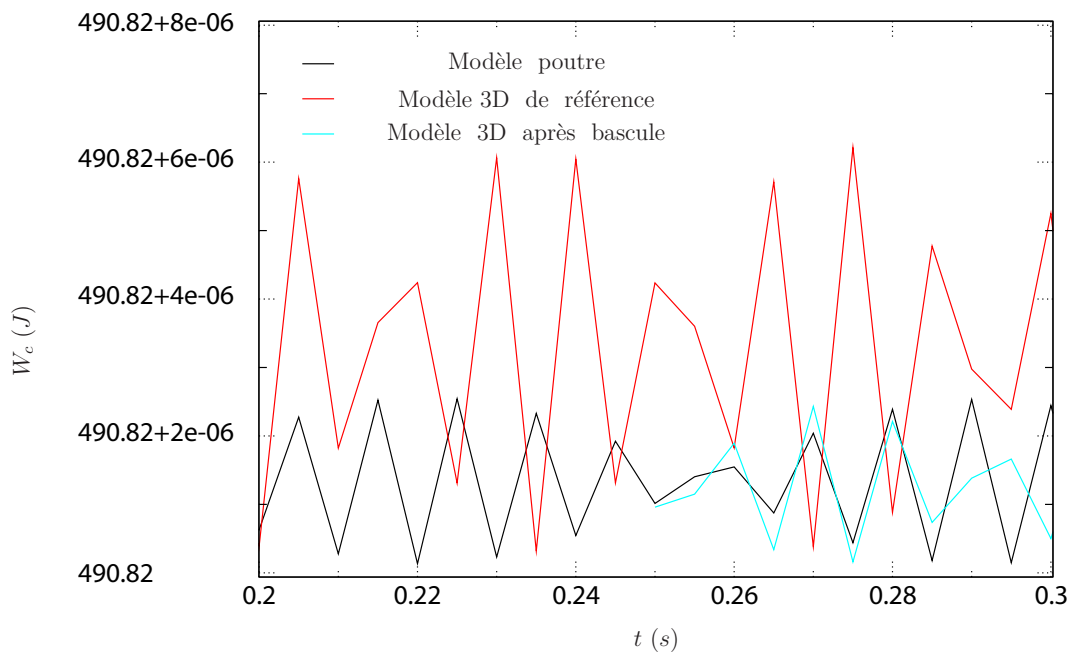


Figure 2.49.: Énergie cinétique pour  $\omega = 1500$  tr/min

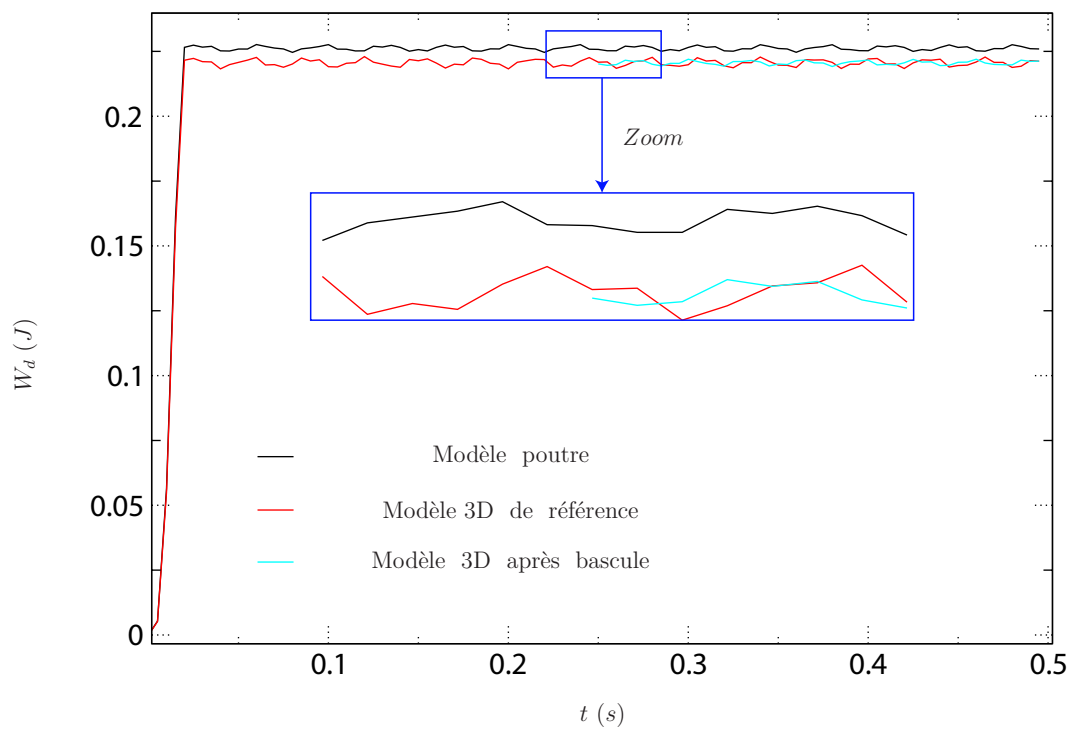


Figure 2.50.: Énergie de déformation pour  $\omega = 1500$  tr/min

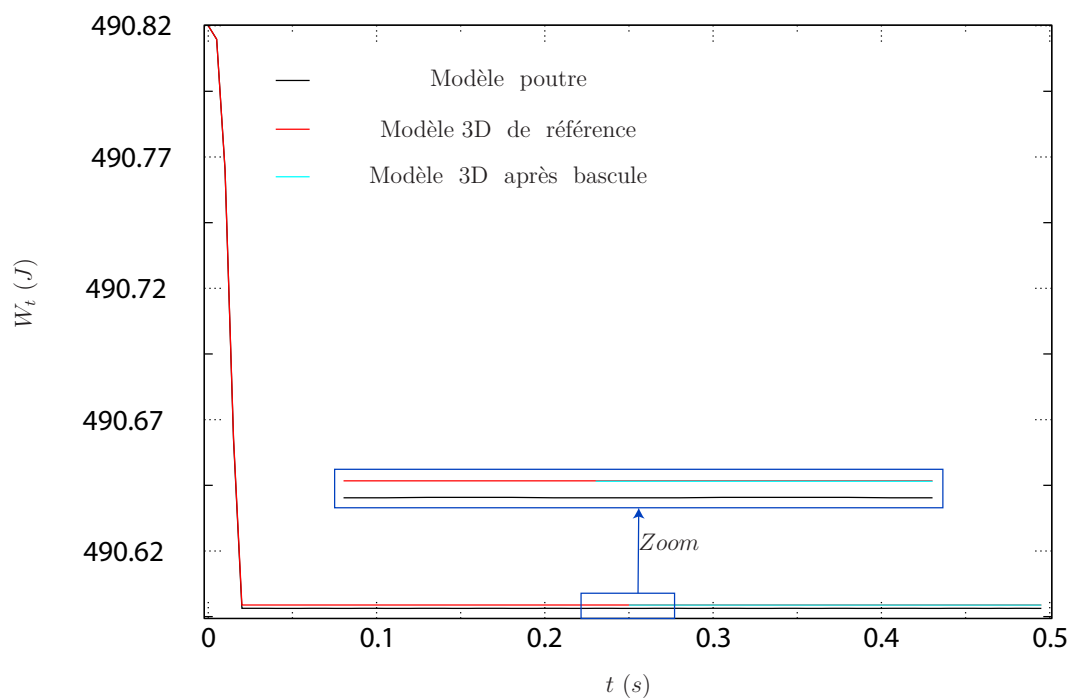


Figure 2.51.: Énergie totale pour  $\omega = 1500 \text{ tr/min}$

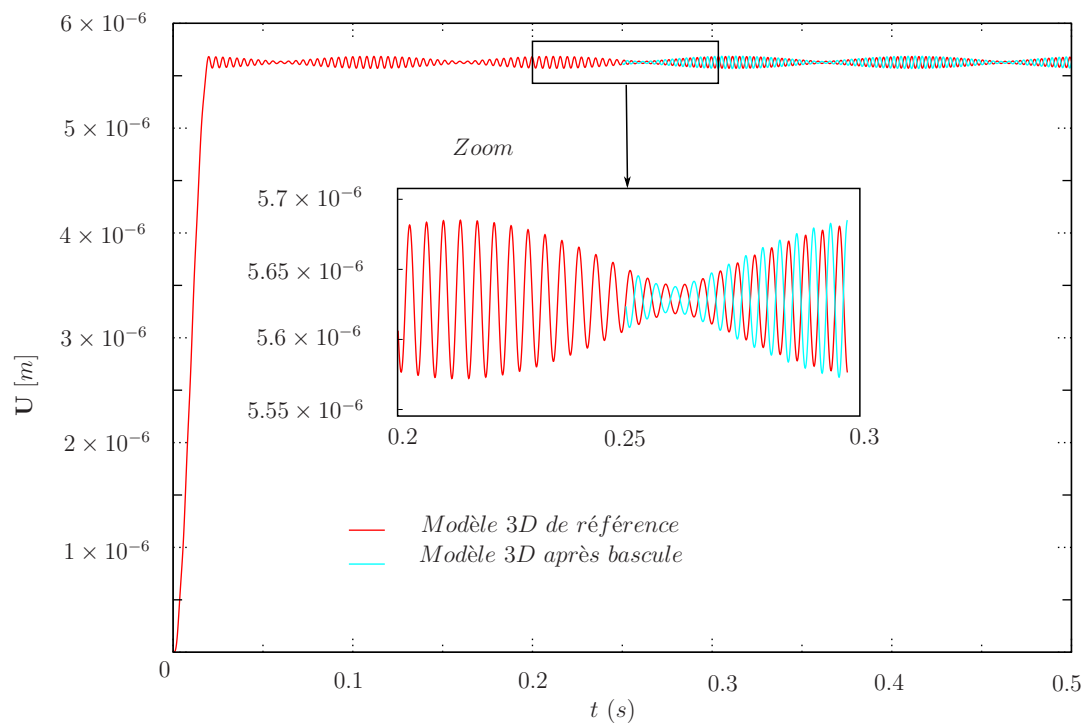


Figure 2.52.: Résultats en déplacements (repère tournant)

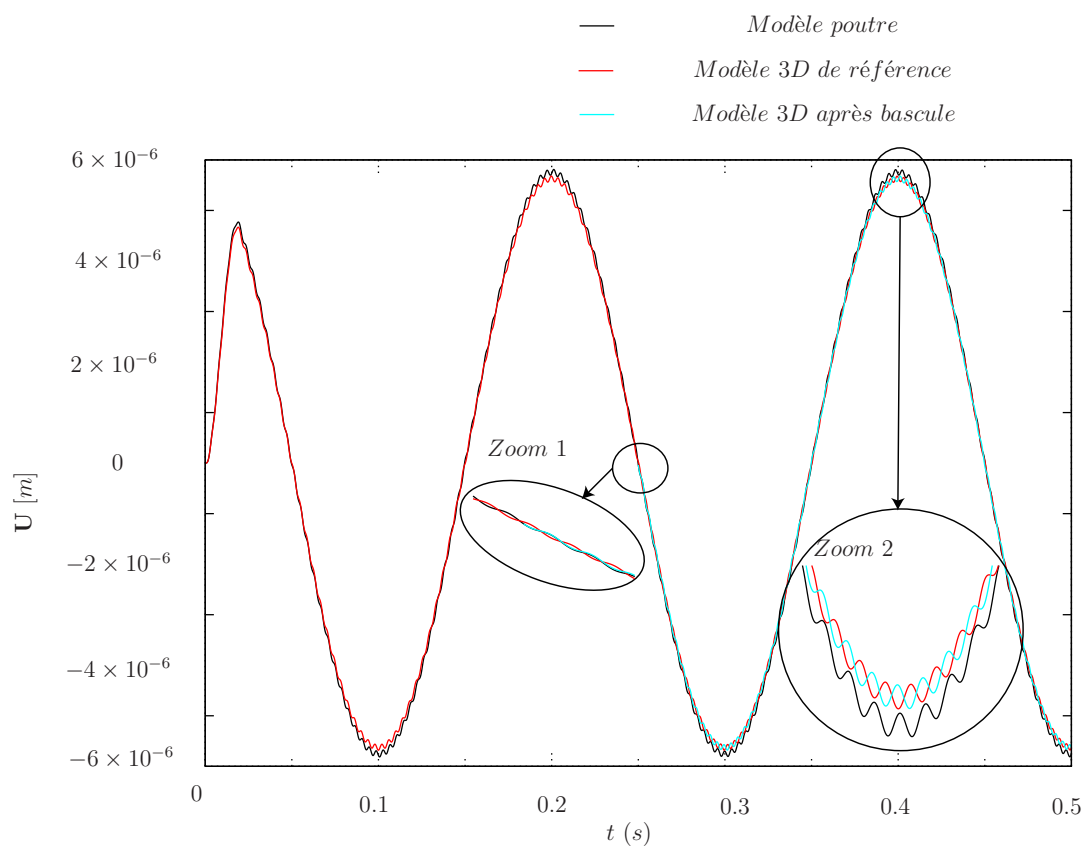
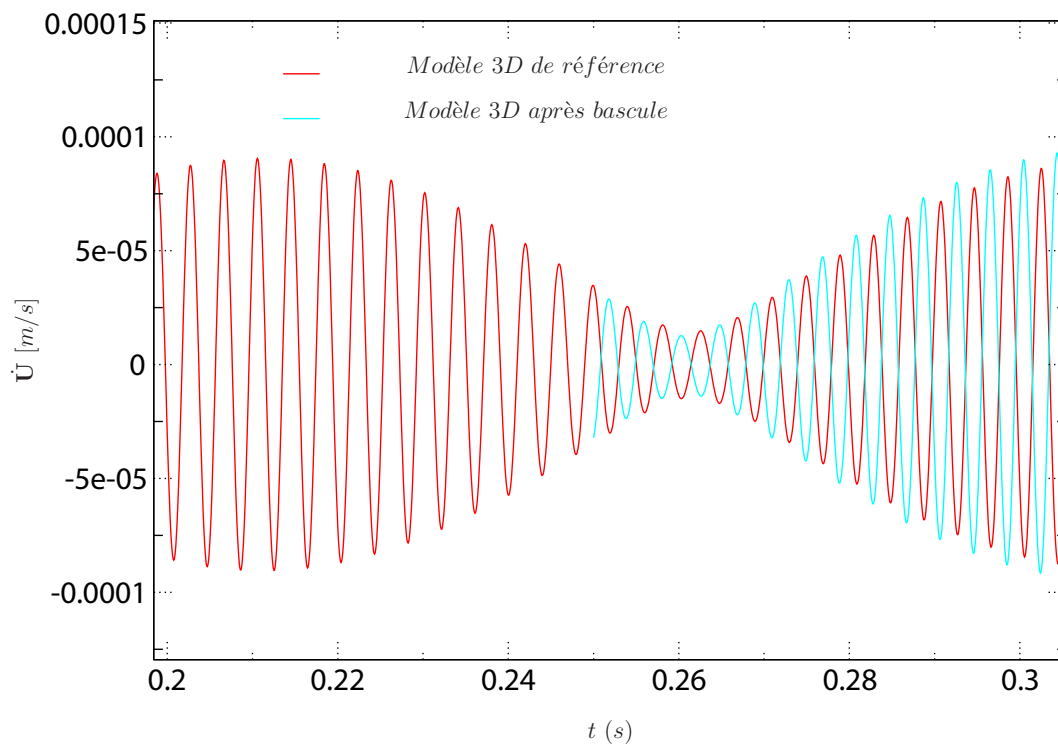
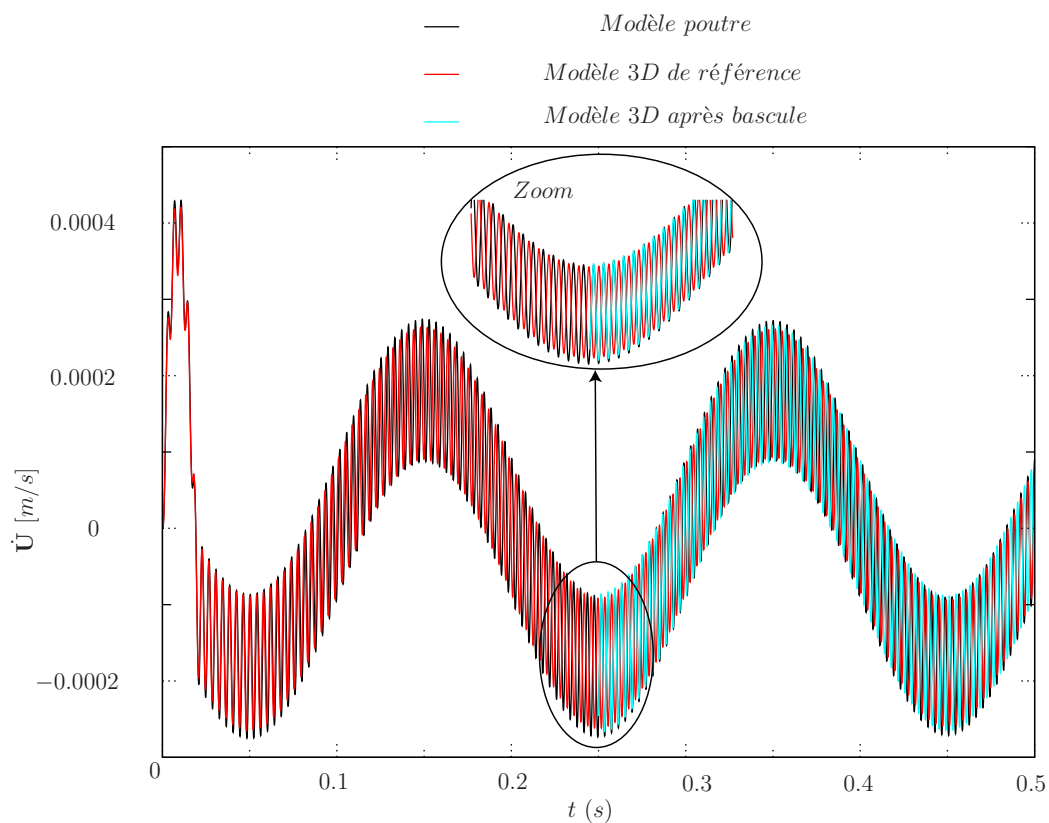


Figure 2.53.: Résultats en déplacements (repère galiléen)

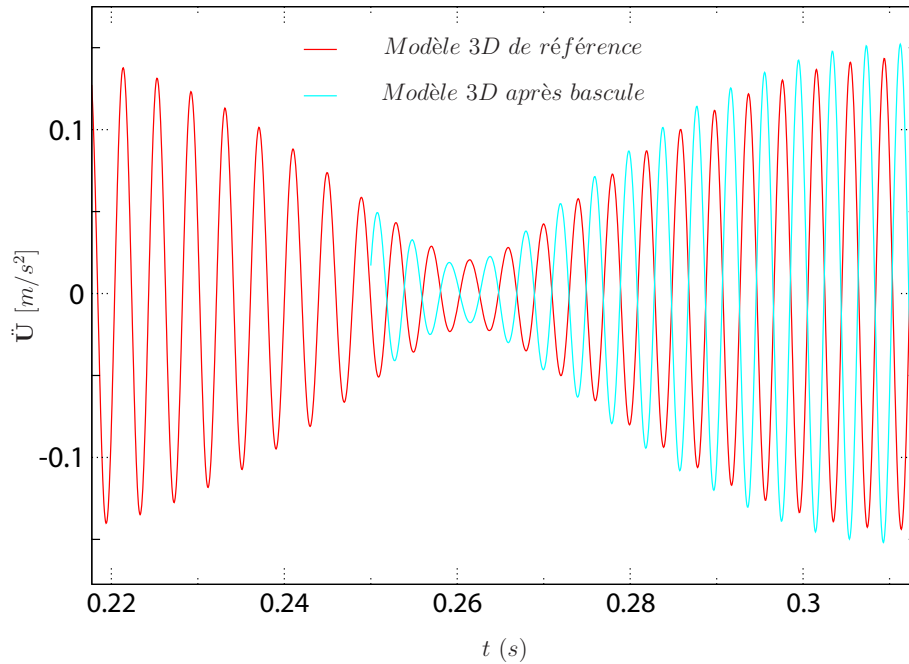


(a) Évolution de la vitesse en repère tournant



(b) Évolution de la vitesse en repère galiléen

**Figure 2.54.:** Résultats en vitesses



**Figure 2.55.:** Résultats en accélérations (repère tournant)

sont présentées sur la Fig. 2.56. Cette dernière et par souci de clarté est restreinte à  $t \in [0.2, 0.3]$  (s). L'analyse des courbes des énergies cinétique (Fig. 2.56), de déformation (Fig. 2.57) et totale (Fig. 2.58) conduisent aux mêmes conclusions que pour le cas précédent et met en valeur la consistance énergétique de la bascule.

On peut se demander si la bascule montre la même efficacité une fois effectuée sur un rotor soumis à un balourd et tournant à une vitesse proche de sa vitesse critique. C'est pourquoi prend les mêmes conditions de simulations de ce cas d'étude et on impose une vitesse de rotation de  $\omega = 15000 \text{ tr/min}$  (équivalent à 250 Hz). Cette vitesse est très proche de la vitesse propre du rotor. En effet, le modèle poutre du rotor possède une vitesse propre de 253.76 Hz et celui 3D de 255.59 Hz. Cet écart est tout à fait normal et dû aux différences de modélisations déjà mentionnés plusieurs fois dans ce chapitre. Par contre, cet écart joue un rôle déterminant lorsqu'on impose une vitesse de rotation proche de la vitesse critique. En effet, les modèles poutre et 3D ne se comportent plus de la même manière comme le montre la Fig. 2.59. L'écart entre les deux modèles devient très important au point que la bascule n'aura pas de sens.

### 2.12.4.3. Troisième cas

Toujours pour les mêmes conditions de simulation et pour une vitesse de rotation  $\omega = 300 \text{ tr/min}$ , mais avec un chargement progressif sur 0.1 (s) (selon la troisième loi), on obtient sur le point  $P_N$  les résultats suivants dans le repère tournant.

La Fig. 2.60 montre les résultats en déplacements. Si on compare ces derniers avec les résultats en déplacements sur le même point et pour la même vitesse de rotation,

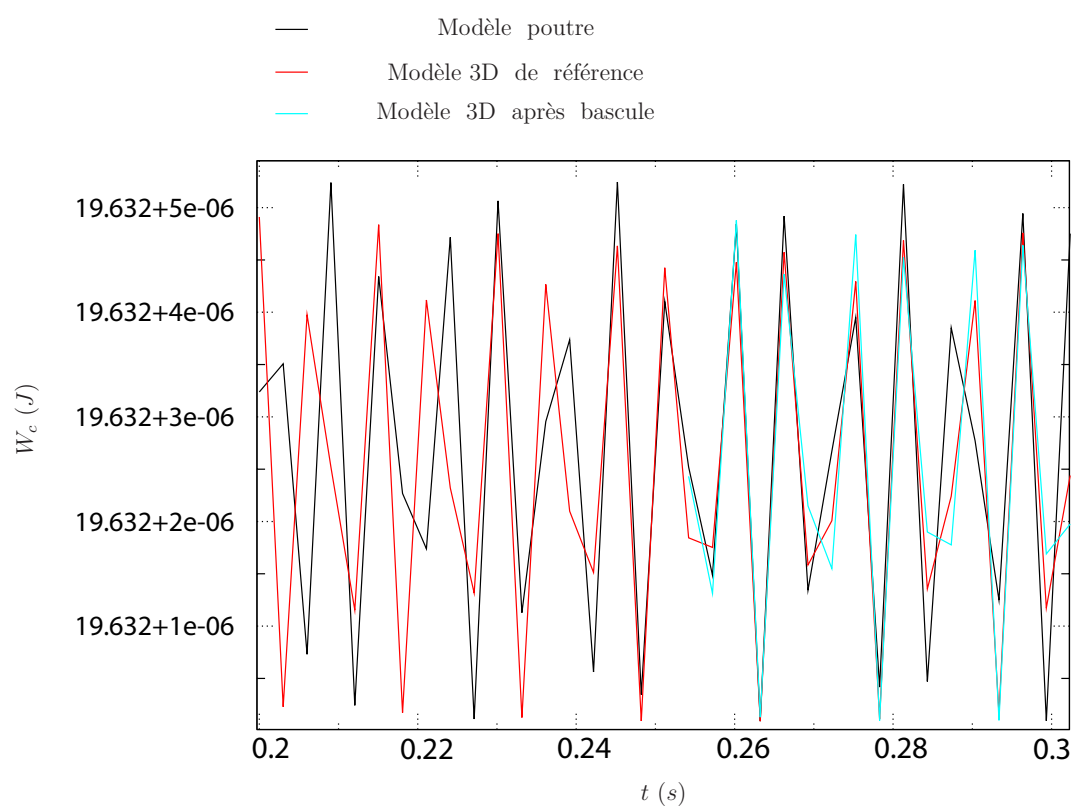


Figure 2.56.: Énergie cinétique pour  $\omega = 300 \text{ tr/min}$

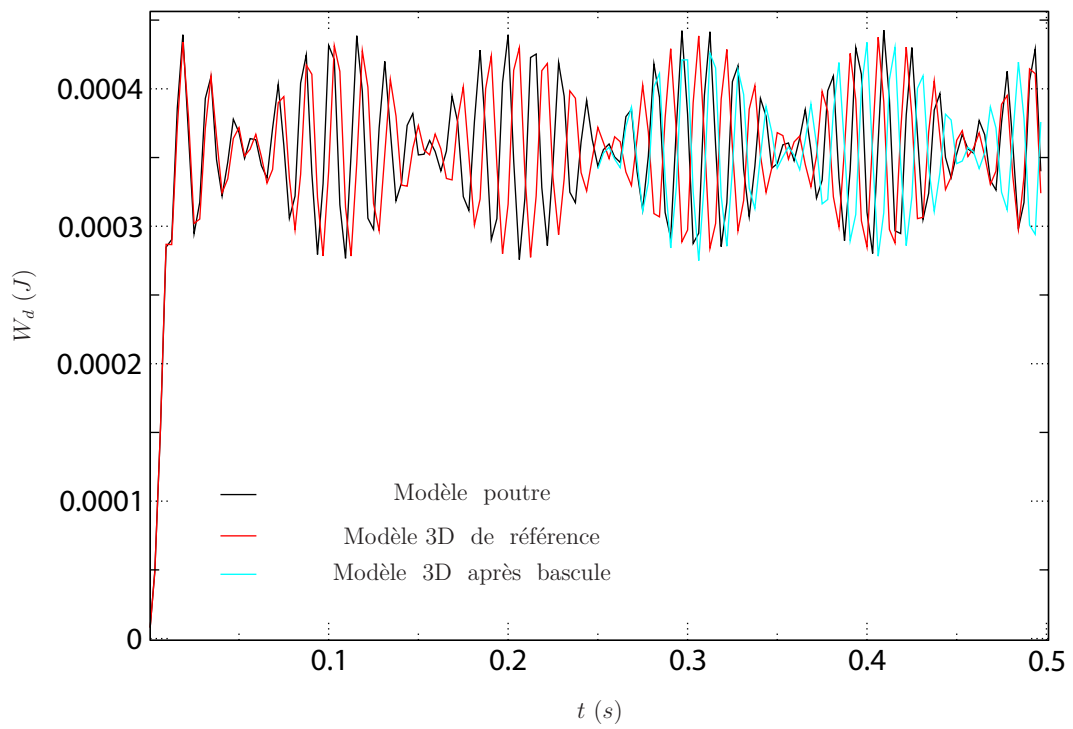


Figure 2.57.: Énergie de déformation pour  $\omega = 300$  tr/min

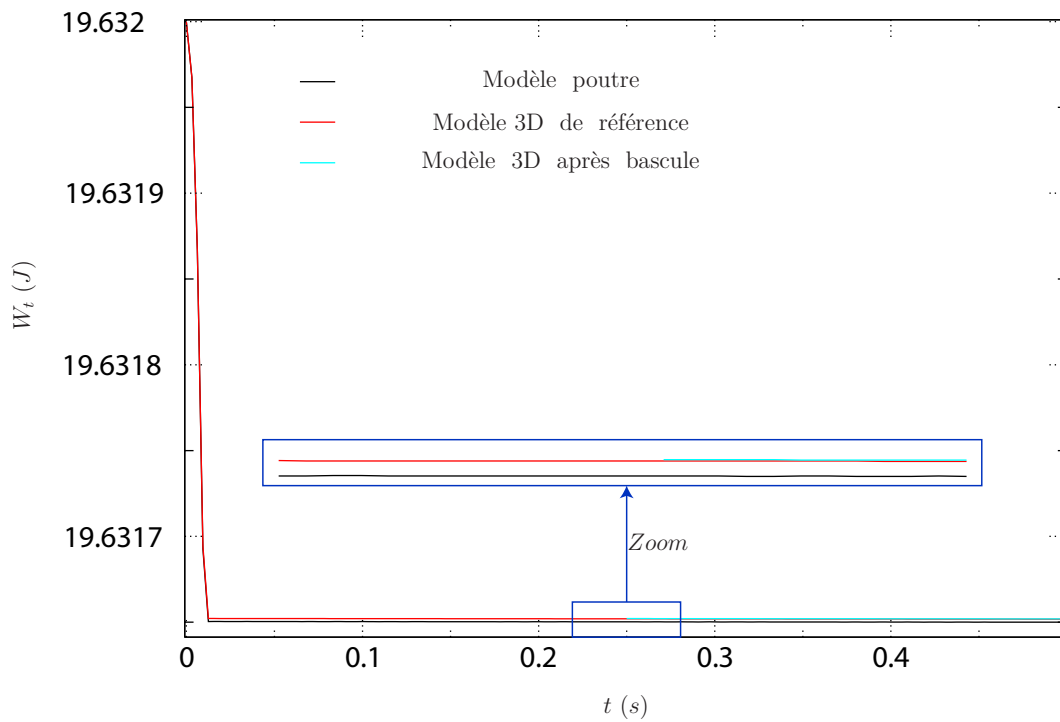
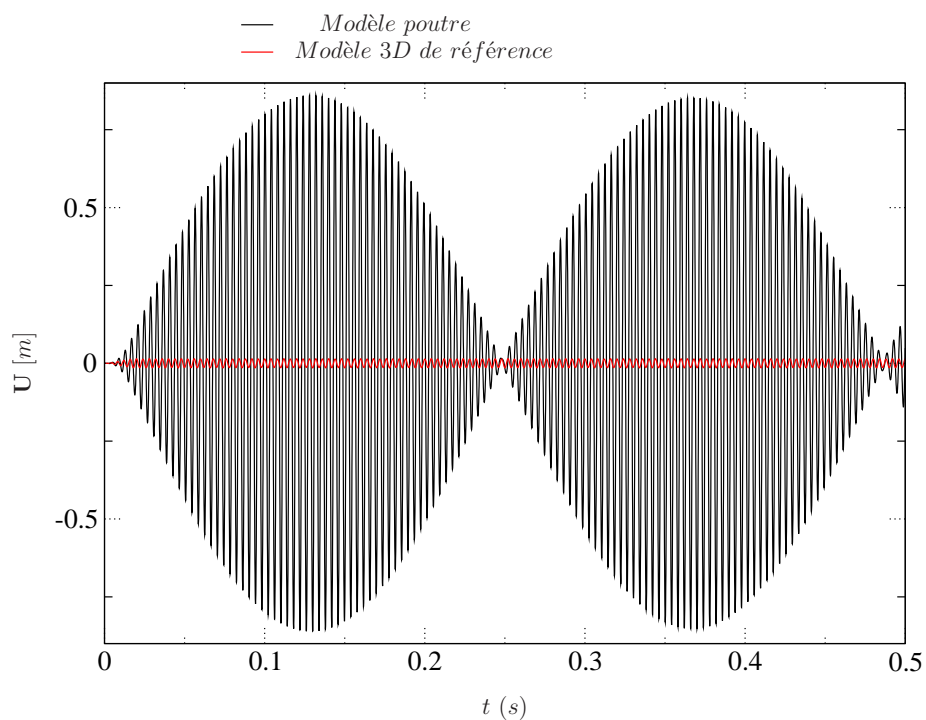
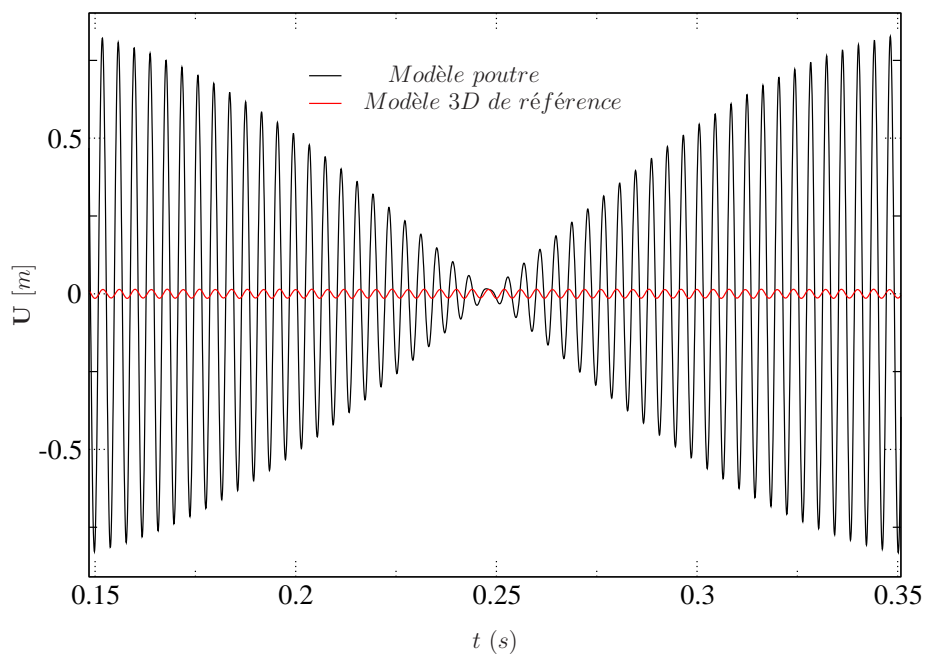


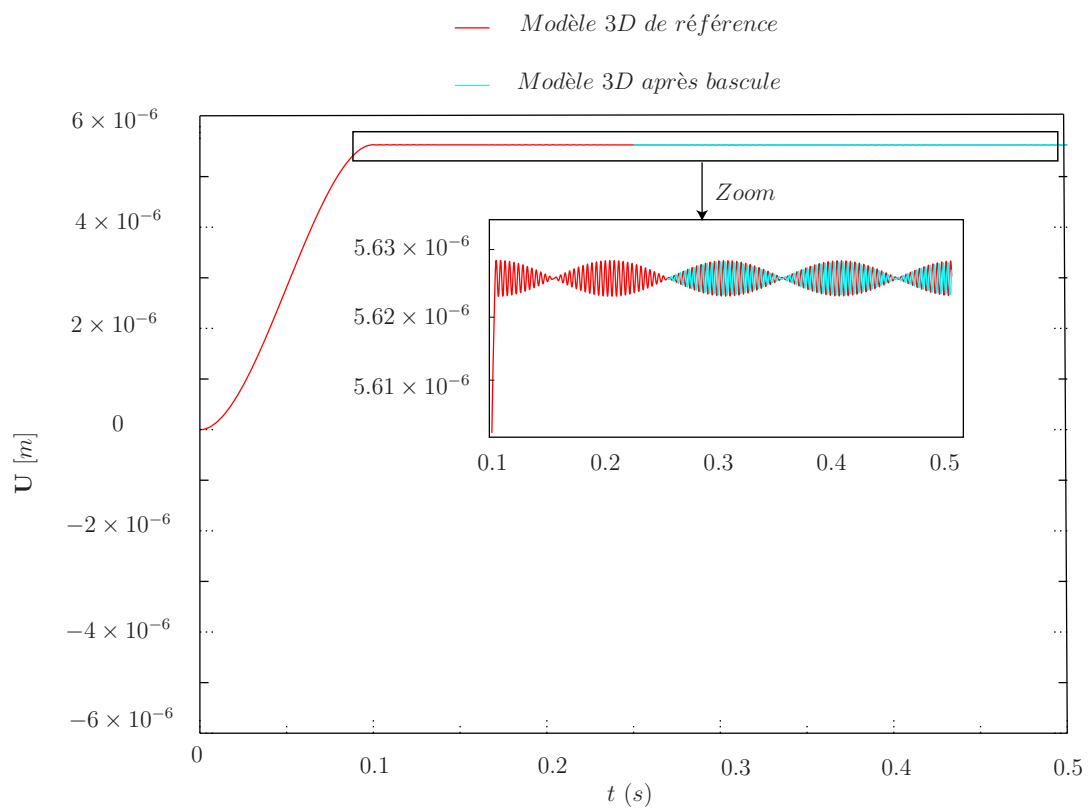
Figure 2.58.: Énergie totale pour  $\omega = 300$  tr/min



(a) Différence de comportement poutre et 3D

(b) Zoom sur  $t \in [0.15, 0.35]$  (s)**Figure 2.59.:** Comparaison des comportements poutre et 3D proche d'une vitesse propre





**Figure 2.60.:** Résultats en déplacements

i.e., en comparant la Fig. 2.60 avec les Fig. 2.52 et Fig. 2.38b, on remarque les amplitudes des modulations est réduite en imposant le balourd d'une façon moins violente. Cependant, la fréquence de ces modulations est toujours la même.

La Fig. 2.61 présente les vitesses et les accélérations du point  $P_N$  autour de l'instant de la bascule dans le repère tournant. Si on compare l'évolution des amplitudes des vitesses en fonction de la loi d'imposition des balourds, i.e., en comparant la Fig. 2.40a (premier cas), la Fig. 2.54a (deuxième cas) et la Fig. 2.61a, on remarque que l'amplitude des vitesses diminue lorsque le balourd est imposé d'une façon moins violente, soit la même conclusion qu'en déplacements. Cela est également vrai pour les accélérations.

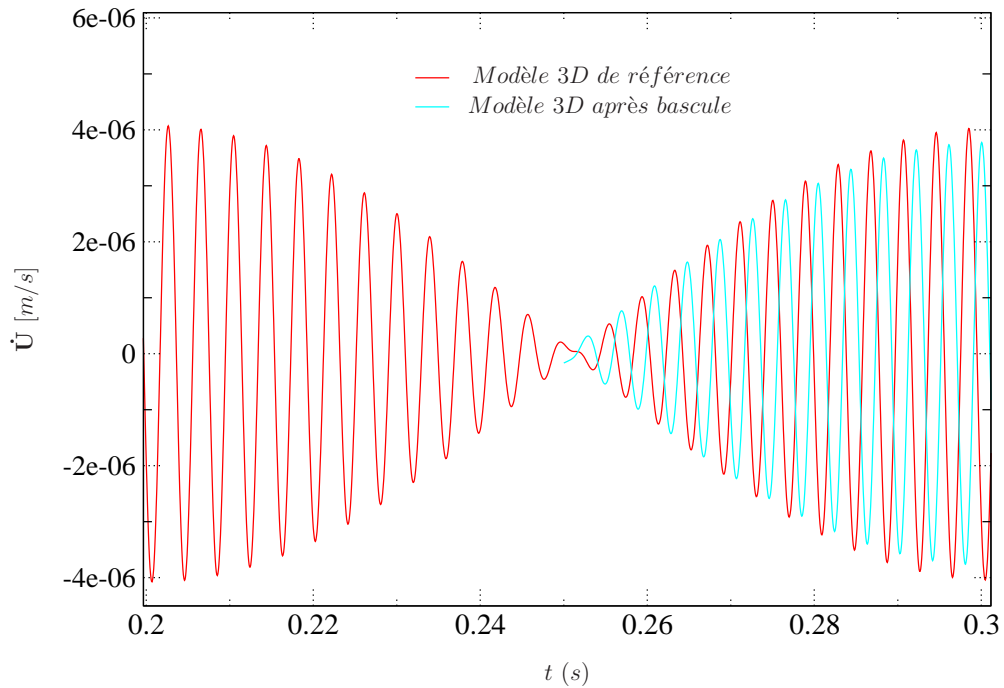
Dans ce cas d'étude et comme le balourd est imposé progressivement et d'une manière plus progressive que le cas précédent, on remarque que le rotor présente des oscillations moins prononcées autour de sa position d'équilibre stable. Les énergies cinétiques et de déformation (Fig. 2.63) présentent des oscillations très faibles. La bascule ne perturbe pas l'énergie (pas d'introduction d'énergie parasite, pas d'oscillations constatées sur les courbes des énergies cinétique, de déformation et totale, etc.). On remarque sur la Fig. 2.62, qui représente l'énergie cinétique, que malgré la faiblesse de la composante liée à la vibration du rotor par rapport à celle liée à la rotation d'ensemble, i.e.,  $W_{cd} \ll W_{cr}$ , la bascule n'introduit pas de l'énergie parasite dans aucune des deux composantes et n'en enlève pas non plus. L'énergie totale (Fig. 2.64) est constante après que le balourd est établi.

### 2.12.5. Conclusion

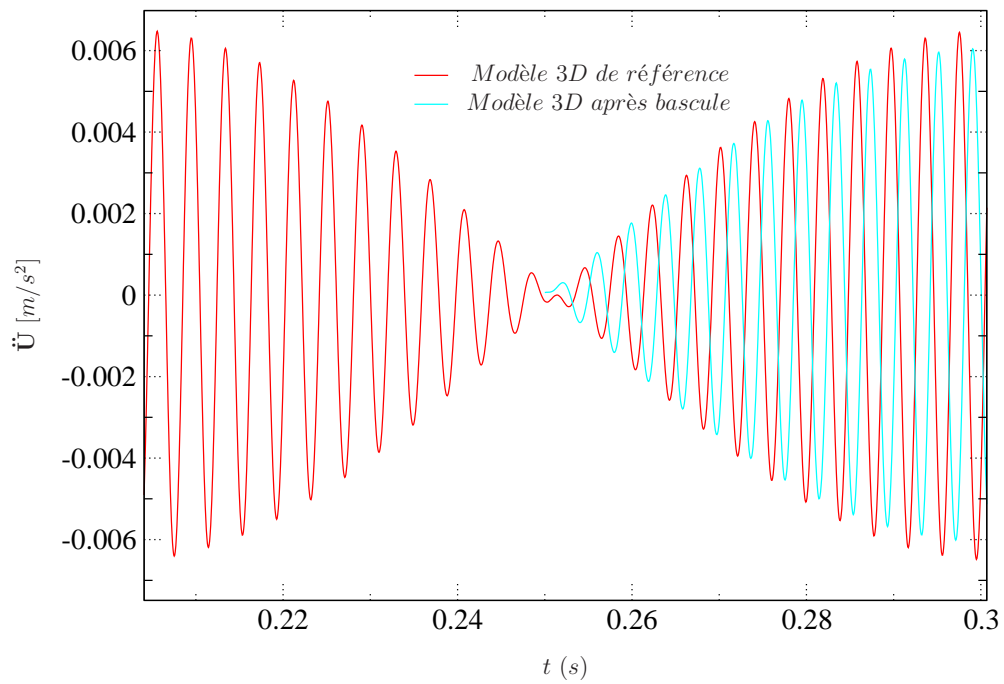
Malgré un déphasage inévitable des solutions poutre et 3D de référence dû à un écart de modèles, l'approche proposée permet, au moment de la bascule de construire une solution 3D de bascule qui constitue une bonne approximation de la solution 3D de référence. Cette solution 3D de bascule s'initialise à partir de la solution poutre au moment de la bascule et possède ensuite les mêmes fréquences propres que la solution 3D de référence. La bascule permet un gain appréciable en temps de calcul.

## 2.13. Conclusions

Le temps de calcul des problèmes de ralentissement accidentel de turbines incluant un contact rotor-stator modélisé en 3D est prohibitif. On a présenté dans ce chapitre une approche qui permet de réduire le temps de simulation tout en préservant une bonne précision, pour un tel problème limité en espace et en temps. On a tout d'abord résumé l'état de l'art dans le domaine de réduction de modèles qui permet de réduire le temps de calcul sur des structures de grandes tailles soumises à des effets non linéaires localisés en espace ou en temps. Vu que le contact rotor-stator est un phénomène non linéaire localisée à la fois en espace et en temps, on a proposé la méthode de la bascule qui permet de réduire le coût de calcul pour de tels problèmes tout en préservant une bonne précision. Cette bascule permet le passage d'une simulation linéaire sur un modèle poutre à une simulation non linéaire sur



(a) Résultats en vitesses



(b) Résultats en accélérations

**Figure 2.61.:** Résultats en vitesses et accélérations

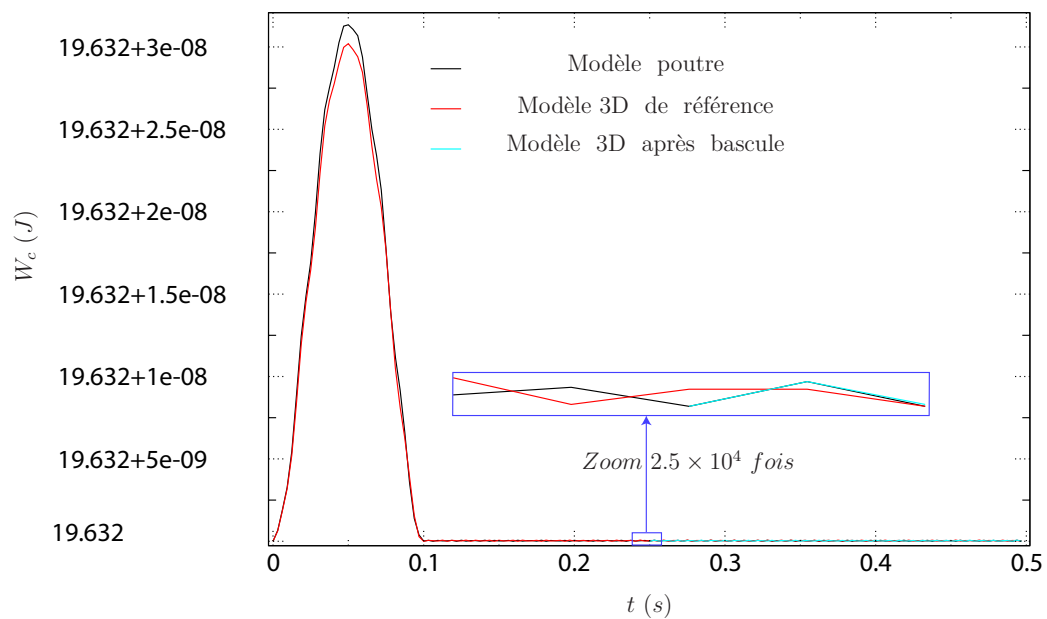


Figure 2.62.: Énergie cinétique pour  $\omega = 300 \text{ tr/min}$

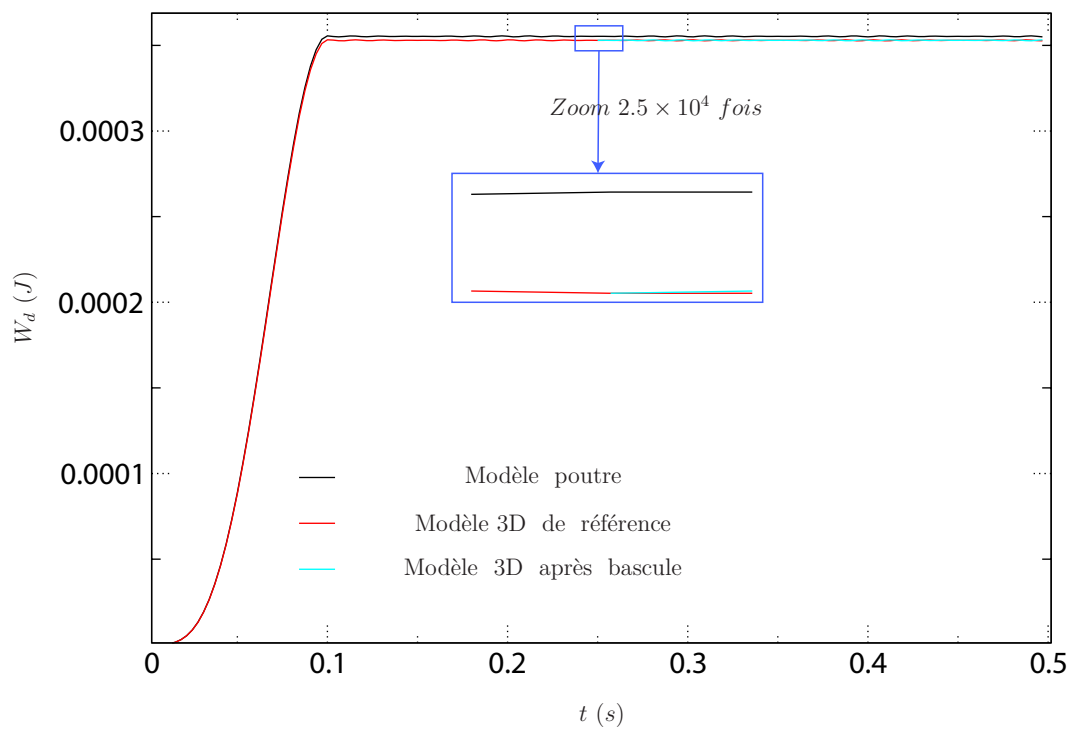
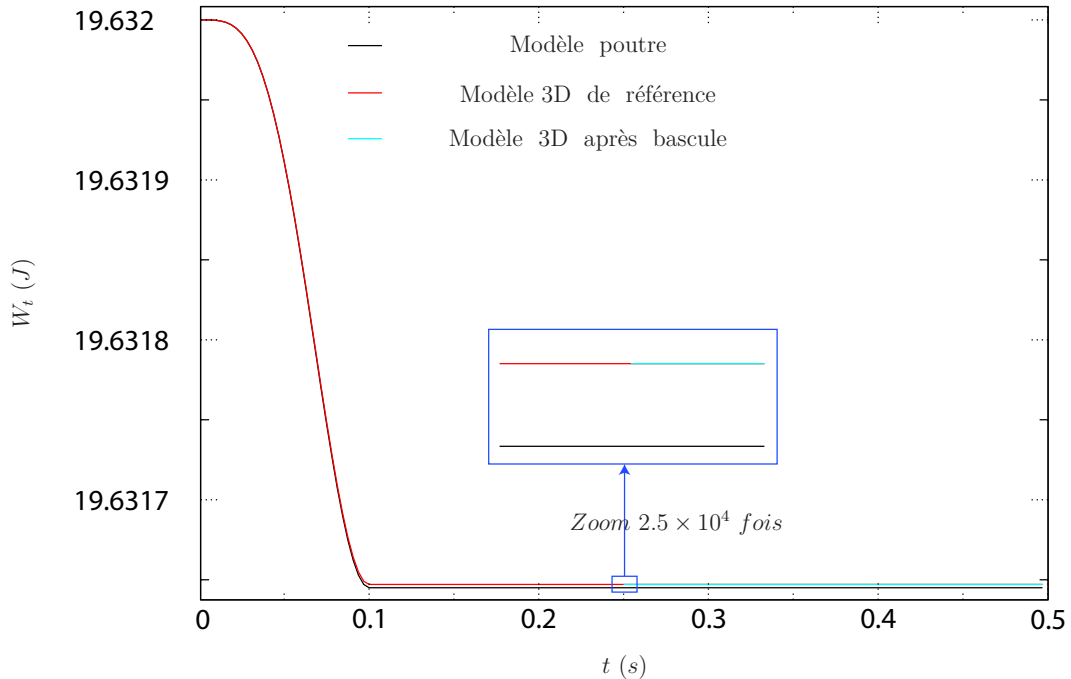


Figure 2.63.: Énergie de déformation pour  $\omega = 300 \text{ tr/min}$



**Figure 2.64.:** Énergie totale pour  $\omega = 300 \text{ tr/min}$

un modèle 3D ou un modèle mixte poutre-3D (ce qui permet de réduire la taille de la zone 3D à l'endroit du contact). Le retour vers la modélisation poutre une fois le contact terminé, nommé la bascule inverse, n'a pas fait l'objet de cette thèse. Cependant, la bascule inverse ne présente pas de difficultés particulières et a été abandonné car elle ne présente pas un intérêt particulier et n'est pas une priorité dans le cadre de la thèse. Comme le développement de la bascule est lié au choix du schéma en temps, ce chapitre présente également une analyse bibliographique des différents schémas en temps nécessaire à la résolution de problèmes de dynamique linéaire et non linéaire. Une résolution implicite via le schéma de Newmark et le schéma HHT domine les exemples proposés dans la thèse.

La bascule a été proposée en deux versions. Une première qui se sert d'un amortissement numérique pour filtrer les hautes fréquences générées à l'instant de la bascule, et une deuxième plus élégante, basée sur une correction statique des déplacements sur trois pas de temps consécutifs, permet un passage du modèle poutre vers celui 3D (ou mixte poutre-3D) sans l'excitation de hautes fréquences. Cette dernière a été étendue sur les problèmes de dynamique des machines tournantes et a montré d'être efficace et simple d'utilisation.

La bascule a été validée sur des problèmes statiques et dynamiques (sans et avec rotation d'ensemble). La validation s'effectue en comparant les résultats en déplacements, vitesses et accélérations de la solution 3D après bascule avec une solution 3D de référence calculée à partir de  $t = 0$  et jusqu'à la fin de la simulation. Une analyse des énergies cinétiques, de déformations et totales confirme la consistance énergétique de la bascule. La bascule n'enlève pas de l'énergie et n'en insère pas non plus.

Ce chapitre discute également une des difficultés théoriques principales de la méthode de la bascule qui est la non satisfaction de la condition d'orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ . La non orthogonalité des champs est due principalement à la différence entre les fonctions de forme des modélisations poutre et  $3D$ . Un élanement important de la structure réduit la différence de comportement entre les modélisations poutre et  $3D$  sans l'éliminer. En dynamique transitoire sans rotation d'ensemble, la non orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  se traduit principalement par une différence de flèche, vitesses et accélérations à tout instant de calcul entre les modèles poutre et  $3D$ . Cet écart est compensé au moment de la bascule et la solution  $3D$  après bascule rejoint la solution  $3D$  de référence. Par contre, en dynamique des machines tournantes, la non orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$  se traduit, en plus des différences cités en haut, par des différences de fréquences propres conduisant à un déphasage entre les réponses des solutions poutre et  $3D$  de référence (sur les déplacements, vitesses et accélérations). Ce déphasage n'est pas compensé par la solution  $3D$  après bascule. Cette dernière s'accroche à la solution poutre et possède les fréquences propres de la solution  $3D$  de référence. Malgré la non orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ , la bascule donne des résultats satisfaisants. L'orthogonalité est une condition favorable mais non nécessaire. L'orthogonalité peut être forcée par une méthode intrusive qui a été proposée dans ce chapitre, mais ne constitue pas un objectif de la thèse.

La bascule a été développée et codée d'une façon non intrusive sur le Code\_Aster principalement<sup>8</sup>. Vu son caractère non intrusif, elle peut être codée sur la majorité des codes de calcul par éléments finis.

Sur un problème de ralentissement accidentel d'une turbine, et pour lequel le contact dure moins que 10 % du temps total de la simulation (cf.l'Annexe B et la thèse de Roques [2]), la bascule permet un gain très appréciable en temps de calcul.

---

8. Dans la thèse on ne présente pas des exemples de bascule effectués sur Abaqus. Cependant, plusieurs exemples tests sur Abaqus ont permis de valider la bascule et ont montré qu'il est parfaitement possible de la coder sur Abaqus, en se servant de l'interface python.

# 3. Modélisation du contact rotor-stator

---

## 3.1. État de l'art sur le contact rotor-stator

- 3.1.1. Le contact aube-carter
- 3.1.2. Effets physiques du contact rotor-stator
- 3.1.3. Besoins de modélisation, approches existantes et conclusion

## 3.2. Algorithmes de traitement du contact

- 3.2.1. Le contact frottant : problème fortement non linéaire
- 3.2.2. Appariement géométrique
- 3.2.3. Le contact : un problème d'optimisation
- 3.2.4. Résolution
- 3.2.5. La loi de choc

## 3.3. Le contact rotor-stator sur le Code\_Aster

- 3.3.1. En modélisation poutre
- 3.3.2. En modélisation 3D

## 3.4. Contrôle de la cohérence des modèles poutre et 3D

- 3.4.1. Au niveau de la modélisation du rotor
- 3.4.2. Au niveau de la modélisation du stator
- 3.4.3. Au niveau du traitement du contact
- 3.4.4. Critères de comparaison

## 3.5. Exemples d'applications

- 3.5.1. Contact d'un rotor contre un stator encasté
- 3.5.2. Contact d'un rotor contre un stator suspendu
- 3.5.3. Contact d'un rotor contre un stator suspendu à vitesse critique

## 3.6. Conclusions

- 3.6.1. Sur les performances des calculs
  - 3.6.2. Apport d'une modélisation 3D sur le contact rotor-stator
  - 3.6.3. Cas industriels : choix entre les modélisations 1D et 3D
- 

La problématique industrielle exposée dans l'introduction de cette thèse nécessite une modélisation du ralentissement d'une turbine ayant perdu une ailette terminale, et une prise en compte des interactions rotor/stator qui ont lieu durant la phase de ralentissement lorsque la vitesse de rotation approche la vitesse critique. Ce ralentissement a été simulé dans le cadre de la thèse de Roques [2]. L'objectif de notre travail est une modélisation fine du contact rotor/stator pour analyser son influence sur le ralentissement de la turbine. Roques [2] et Roques et al. [1] ont proposé une modélisation du contact avec des éléments poutre à la fois pour le rotor



**Figure 3.1.:** Vue d'une partie du stator d'une turbine du parc Nucléaire

et le stator, ce qui représente la quasi-totalité des approches visant à modéliser le contact rotor/stator présents dans la littérature.

Le Groupe Turbo-Alternateur (GTA) a été présenté brièvement dans le Chapitre 1. Dans ce chapitre, les exemples de calcul seront inspirés d'un vrai cas de GTA opérationnel chez EDF et dont la Fig. 1.3 présente une turbine et la Fig. 3.1 montre un diaphragme. Certaines données ne seront pas explicitées pour des raisons de confidentialité. Ce dernier est composé d'une couronne intérieure reliée par l'intermédiaire d'un certain nombre d'ailettes à une couronne extérieure qui est fixée. Pour optimiser le temps de calcul, les modèles de rotor et de stator présentés dans ce chapitre seront simplifiés<sup>1</sup> tout en étant inspirés des dimensions industrielles.

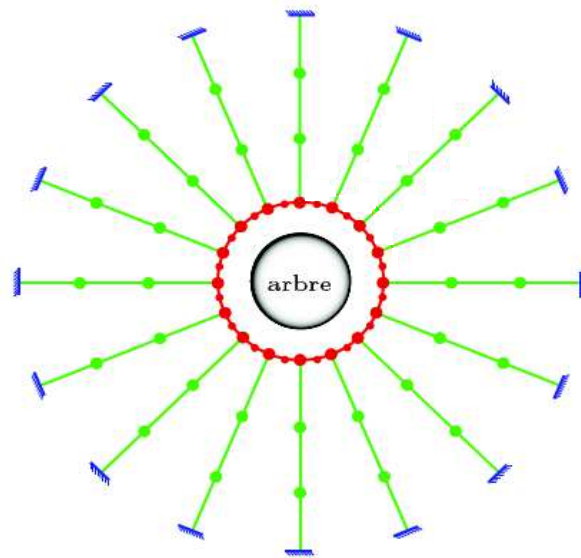
En modélisation poutre du contact rotor-stator tel dans la thèse de Roques [2], le diaphragme est simplifié telle que présenté dans la Fig. 3.2. Le nombre des ailettes est réduit pour alléger le modèle. Ces dernières sont encastrées pour éviter la modélisation de la couronne extérieure. La couronne intérieure est modélisée par des poutres courbes.

Cette représentation reste cependant simpliste, car le stator étant lui aussi modélisé par une poutre, il n'est pas possible de prendre en compte les effets localisés de frottement surface sur surface, les effets de déformation dans la section du rotor et du stator, etc. L'objectif de ce chapitre est d'établir une comparaison entre une modélisation simplifiée du contact, telle que la représentation poutre/poutre, et une représentation plus précise telle que la représentation 3D et qui, en l'état de nos

---

1. Le vrai nombre d'ailettes du GTA en question est supérieur à celui utilisé dans le cadre de la thèse. Cependant, traiter un exemple de contact rotor-stator avec un modèle de stator à ailettes plus nombreuses alourdit le calcul et ne présente pas un intérêt majeur dans le cadre de notre travail de thèse. Pareillement, modéliser la turbine entière revient à alourdir le calcul et ne permet pas d'atteindre l'objectif principal qui est l'apport d'une modélisation 3D sur la modélisation du contact rotor-stator.





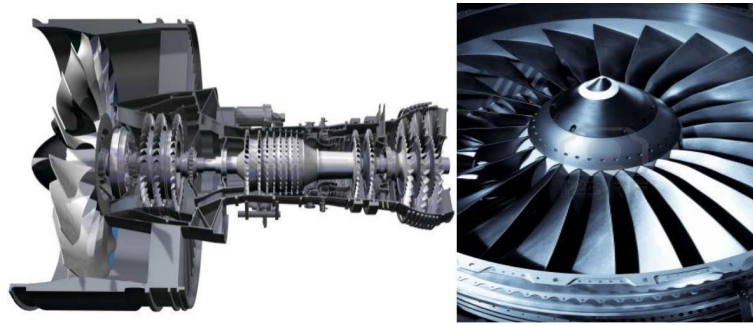
**Figure 3.2.:** Modélisation poutre du diaphragme selon la thèse de Roques [2]

connaissances, n'est pas traitée dans la bibliographie. Ceci permettra de mesurer l'apport d'une modélisation  $3D$  à de tels problèmes.

En effet, les premiers modèles de rotors dans la bibliographie, sont des modèles rigides de Jeffcott, cf. Childs [107]. On trouve également ce type de modélisation ainsi que des solutions analytiques correspondants à certains problèmes de dynamiques des rotors transitoires dans Lalanne et Ferraris [108]. Ces modèles simplifiés de rotors restent cependant approximatifs par rapport à un vrai cas industriel d'une turbine. Ils sont pourtant largement utilisés dans la modélisation dynamique des rotors comme dans Sun et al. [109], Al Bedoor [110], ainsi que pour le contact rotor-stator. Les premiers modèles de contact rotor/stator, et suite à une modélisation de Jeffcott des rotors, sont des cas de contact entre deux corps rigides, le rotor tournant à vitesse imposée et par la suite, lors du contact/frottement, un couple moteur est généré pour maintenir la vitesse de rotation du rotor constante. Par la suite, on fait un point rapide sur les différents comportements vibratoires et les conséquences du contact rotor-stator, ainsi que les différentes modélisations proposées dans la littérature pour les prendre en compte, avant de proposer la méthode de modélisation qui répondra au mieux aux besoins industriels exposés dans l'introduction de cette thèse. Par contre, des contraintes imposées par le Code\_Aster, ainsi que certaines limitations théoriques, résumées dans ce chapitre ont engendré certaines difficultés sur lesquelles nous reviendrons.

## 3.1. État de l'art sur le contact rotor-stator

Le problème de contact entre les parties mobiles d'une machine tournante et ses parties fixes peut être divisé en deux catégories principales : le contact aube-carter et le contact rotor-stator étant entendu que dans ce dernier cas il est implicite que la zone du rotor concernée par le contact se situe sur son arbre. On s'intéresse dans le cadre



**Figure 3.3.:** Turbine d'un moteur d'avion

de la thèse à la modélisation du contact rotor-stator. Cependant, les problématiques industrielles du contact aube-carter mettent en jeu des comportements physiques et nécessitent des méthodes de modélisation qui présentent des ressemblances avec les problèmes de contact rotor-stator. C'est pourquoi on fait un point rapide sur les travaux liés au contact aube-carter. A noter que dans Jacquet-Richardet et al. [111] on trouve une synthèse bibliographique sur le contact rotor-stator et aube-carter. Il existe également une synthèse dans Muszynska [112].

### 3.1.1. Le contact aube-carter

Ces contacts sont rencontrés sur des machines tournantes comportant des aubes comme les compresseurs et les turbines d'avion. La Fig. 3.3 représente la turbine d'un avion. En vue d'augmenter l'efficacité de fonctionnement et le rendement thermique de cette dernière, les fuites du fluide entre les aubes et le carter sont minimisés, grâce à un jeu assez faible entre le sommet des aubes et le carter. Cependant en fonctionnement, le carter et la roue aubagée se déforment, ce qui peut conduire à un contact entre les aubes et le carter, même dans une situation non accidentelle.

Les travaux de recherche sur le contact aube-carter sont récents dans la littérature. Schmiechen [113] étant parmi les premiers à traiter d'une façon simplifiée cette problématique. La modélisation de ce phénomène est réalisée d'une façon analytique chez certains auteurs tel Sinha [114] et Sinha [115]. D'autres ont développé des approches par éléments finis, comme dans la thèse de Legrand [116] dans le but de simuler les comportements vibratoires déclenchés par un contact aube-carter. Ces comportements, classifiés dans Legrand et al. [117], présentent une certaine ressemblance avec les problématiques de contact rotor-stator. Ainsi, le contact peut être intermittent présentant des rebonds ou bien permanent. Pour réduire les effets destructifs sur l'aube en cas de contact aube-carter, le carter est revêtu d'un matériau abrasable. Le comportement dans un tel cas a fait l'objet de plusieurs études récentes dont Legrand et Pierre [118] et Batailly et al. [119].

Le contact, aube-carter, ou bien rotor-stator, est un problème complexe et fortement non linéaire avec la présence de contact, frottement, et des plastifications possibles. Il présente à la fois des aspects multi-physiques (vibrations, contact, effet thermo-mécanique, etc.) et multi-échelles (effets localisés sur une petite partie de la structure). Il est difficile à modéliser. Les modélisations par éléments finis ont

permis la prise en compte de plus de détails physiques et comportementaux. Par contre, la majorité des approches par éléments finis traitent le contact aube-carter par un contact poutre-poutre (aube et carter modélisés par des éléments poutre) et reposent sur une technique de projection sur base modale pour réduire la taille du problème cf. Legrand et al. [117], Batailly et al. [120]. D'autres techniques de réduction de modèles telles que la méthode Craig-Martinez ou Craig-Bampton peuvent aussi être utilisées (Batailly et al. [120, 121]). Pour une meilleure prise en compte du contact, une modélisation et un algorithme de contact 3D ont été mis en place dans Legrand et al. [122]. La surfaces de contact du carter est modélisée avec des B-splines quadratiques. Les résultats sont validés à travers une comparaison avec une modélisation 3D standard sur le code commercial ANSYS.

Les modélisations 3D du contact aube-carter apportent une vision plus rigoureuse des phénomènes physiques en place. Certains aspects, comme les plastifications localisées, les effets thermoplastiques localisés, l'arrachement du matériau abradable du carter, etc. ne sont perçus qu'à travers une modélisation 3D des surfaces de contact. Cette nécessité d'une modélisation 3D pour le contact aube-carter, soulève la question de la validité des modélisations simplifiées de type poutre pour le contact rotor-stator. En effet, le contact rotor-stator met en jeu des phénomènes physiques et vibratoires assez complexes, voire plus complexes, que le contact aube-carter. Il est par la suite intéressant d'examiner l'apport d'une telle modélisation par rapport à une modélisation simplifiée avec des éléments poutre. Tout d'abord faisons un point sur les différents aspects et modélisations du contact rotor-stator existant dans la bibliographie.

#### 3.1.2. Effets physiques du contact rotor-stator

Dans un cas industriel comme celui de la perte d'une ailette terminale, un fort balourd est déclenché causant la vibration de la turbine. Le rotor, suite à ces vibrations importantes intensifiées par le passage par une vitesse critique, peut entrer en contact avec le stator. Le contact rotor/stator peut se traduire par plusieurs conséquences, dont le ralentissement en cas de rotation libre, l'échauffement, l'usure, etc. Le comportement vibratoire du rotor et même du stator peut être très varié suite à un contact rotor/stator. Certains ouvrages bibliographiques représentent une source riche d'informations sur la caractérisation du contact, tels les travaux de Muszynska [123, 112], Ahmad [124], Ehrich [125] et d'autres.

##### 3.1.2.1. Comportement vibratoire du rotor

On résume par la suite les différents comportements vibratoires du rotor dus à un contact rotor-stator, mentionnés dans la bibliographie suite aux études analytiques, numériques et expérimentales.

Le contact rotor-stator peut prendre un caractère permanent. Dans ce cas on distingue deux possibilités :

**Contact annulaire complet en précession directe :** soit un contact annulaire complet (full annular rub) avec une précession directe (Forward Synchronous Whirl), c'est-à-dire, que le rotor est maintenu en contact frottant face au stator et le sens de sa précession est le même que le sens de rotation autour de lui même.

**Précession inverse :** les forces de frottement sur la surface de contact rotor-stator entraînent alors le rotor dans une précession inverse Bartha [126], et dans ce cas le rotor est maintenu en contact frottant contre le stator mais, le sens de la précession est l'opposé de celui de la rotation. Cela peut se traduire par un roulement sans glissement (Dry Whirl ou aussi dry friction backward whirl) ou bien par un mouvement de contact frottant avec glissement dans le sens de la précession (Dry Whip). Plusieurs facteurs favorisent la précession inverse. Cependant, ce sont majoritairement les forces de frottement à la surface de contact rotor-stator qui selon leur intensité induisent la précession inverse. Le coefficient de frottement entre les surfaces est par la suite un facteur déterminant Choi [127]. La rigidité du rotor et du stator joue un rôle également. Une rigidité élevée intensifie les forces de frottement à la surface et favorise la précession inverse (Choy et Padovan [128]). Childs et Bhattacharya [129] ont utilisé un modèle de rotor rigide simplifié de Jeffcott pour l'analyse de certains effets liés aux vibrations d'un balourd avec contact rotor/stator. La modélisation du contact est réalisée à travers un modèle analytique de la dynamique du rotor. Les auteurs insistent, ainsi que Jiang et Ulbrich [130], sur la nocivité du Dry Whip sur les machines tournantes. Le rotor maintient un frottement permanent contre le stator, et un sens de précession inverse à celui de la rotation du rotor et tourne à une fréquence propre proche de celle du modèle couplé rotor-stator. Ce phénomène peut conduire à des usures de surface, dont un modèle simplifié n'est pas capable de rendre compte. Une modélisation similaire a été utilisée par Khanlo et al. [131] pour mettre en évidence l'importance de prendre en compte les forces de Coriolis et les forces centrifuges pour la modélisation du rotor et surtout pour des applications avec contact rotor-stator car le contact pourrait avoir lieu à des vitesses inférieures. La prédiction de certains comportements tels que le contact annulaire complet, la précession directe et inverse et la bascule entre ces comportements a fait l'objet du travail de Shang et al. [132].

**Rebonds :** le contact rotor-stator peut aussi être intermittent, c'est ce qu'on appelle les rebonds. Les rebonds peuvent être transitoires ou se produire de façon permanente. Ils peuvent avoir un caractère périodique ou quasi-périodique, mais également chaotique. C'est-à-dire qu'ils ne présentent aucune répétabilité avec le temps même si ce dernier tend vers l'infini comme indiqué par Muszynska et Goldman [133]. Le comportement périodique devient moins probable et les phénomènes chaotiques dominant lorsque le contact devient de plus en plus raide comme mentionné par Popprath et Ecker [134].

**Ralentissement :** si le rotor n'est pas entraîné par un couple moteur, le contact fait ralentir le rotor. Le ralentissement est moins traité dans la littérature du fait que son traitement nécessite de prendre en compte la dynamique transitoire d'une part, et la variation de la vitesse de rotation d'autre part. On cite principalement

les travaux de Roques [2] et Roques et al. [1] ainsi que Braut et al. [135] qui par une modélisation analytique d'un rotor de JEFFCOTT et un stator rigide suspendu, a étudié le ralentissement dû au contact rotor-stator.

Roques [2] et Roques et al. [1] ont effectué une analyse étendue sur les différents paramètres ayant de l'influence sur le ralentissement de la turbine. On cite principalement l'influence du coefficient de frottement, et la rigidité du stator. Les auteurs ont conclu qu'une représentation rigide du stator sous estime le déplacement du rotor et l'effet au niveau des paliers. Le comportement du rotor peut changer significativement selon la raideur du stator. Cette conclusion est également donnée par Popprath et Ecker [134], qui ont modélisé un contact rotor-stator intermittent et de courte durée. La modélisation du contact se fait grâce à une modélisation mathématique qui adapte l'équation du mouvement du rotor, pour prendre en compte le contact, ainsi que la plasticité, éventuelle, due au contact.

#### 3.1.2.2. Effets sur les modes propres

Muszynska [112] met en évidence la nocivité du contact rotor stator sur une machine tournante et cite certains effets tel que le couplage rotor-stator qui augmente la raideur du rotor et change les fréquences propres du modèle. Cette même conclusion a été apportée par Chu et Lu [136] pour développer une technique novatrice pour la modélisation du contact rotor-stator suite à un balourd. Comme le contact revient à ajouter un support supplémentaire pour le rotor, la raideur du rotor change durant le contact, et par la suite les auteurs ont proposé de calculer une raideur transitoire du système durant le contact, et dont l'évolution au cours du temps permet de constater à l'effet du contact. Cette méthode est adaptée au cas de contact de courte durée et pour des surfaces de contact non déformables, ce qui reste loin des problématiques industrielles de contact rotor-stator, mais met en évidence l'effet du contact sur la modification des modes propres du modèle rotor/stator.

#### 3.1.2.3. Effets thermo-mécaniques

La majorité de l'énergie dissipée par le contact est transformée en chaleur. Cela conduit à des dilatations locales conduisant à la création d'un balourd supplémentaire dû aux effets thermiques et à une consommation supplémentaire du jeu existant entre les parties mobiles et les parties fixes. Dans le cas du contact aube-carter, la majorité de la chaleur est reçue par le stator causant sa dilatation. L'influence des effets thermo-mécaniques sur le comportement vibratoire lors d'un contact aube-carter a fait l'objet du travail de Millecamps [137], Millecamps et al. [138]. Les auteurs ont considéré l'effet de la dilatation thermique du carter sur le jeu aube-carter. Dans le cas d'un contact rotor-stator, la majorité du flux de chaleur affecte le rotor qui se dilate localement et fléchit. La flexion sous une charge thermique est connue sous le nom de l'effet de Newkirk et a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. Goldman et al. [139] ont étudié l'effet de flexion dans le rotor suite à l'échauffement causé par un frottement rotor-stator. Les effets thermo-mécaniques peuvent induire des vibrations dites spirales (spiral vibrations). Une étude analytique, numérique et expérimentale menée par Sawicki et al. [140] sur un modèle de

Jeffcott permet d'illustrer cet effet. Plus récemment, Bachschmid et al. [141] ont proposé une modélisation plus réaliste d'un rotor industriel avec les paliers et la fondation, pour l'étude des vibrations spirales dues aux effets thermo-mécaniques. Les auteurs, et pour avoir une modélisation plus réaliste d'un cas industriel que le modèle de Jeffcott, ont proposé une modélisation basée sur des éléments de poutre. Des éléments  $3D$  sont utilisés pour la compréhension de la distribution locale de la chaleur due au frottement. Cependant, cette modélisation reste simplifiée car le contact rotor-stator reste géré par des équations analytiques. Une modélisation des zones de contact, sur le rotor et sur le stator par des éléments  $3D$ , et l'utilisation d'algorithmes adaptés pour une meilleure représentation du contact, reste à notre connaissance non abordée dans la littérature.

Les effets thermo-mécaniques sont des effets non linéaires car la dilatation dépend des efforts de frottement et de contact qui à leur tour dépendront du jeu entre les parties fixes et mobiles et qui est intimement lié à la dilatation thermique et la flexion thermique du rotor (effet Newkirk). C'est une problématique complexe, traitée largement dans la littérature comme par Goldman et Muszynska [142]. Elle ne fait pas partie des objectifs de la thèse, mais représente une perspective intéressante. L'utilisation de la bascule développée dans le chapitre précédent est également utile dans le cadre d'une analyse thermo-mécanique.

En addition à tous les effets cités ci-dessus, on ajoute des effets localisés comme la plastification/rigidification de certaines zones locales conduisant à un changement des fréquences propres du système, l'arrachement de matière, l'usure, la fissuration, etc.

### 3.1.3. Besoins de modélisation, approches existantes et conclusion

Dans le §3.1.2 on a essayé d'exposer brièvement les différents effets et comportements dus à un contact rotor-stator. Ces effets sont variés, et présentent un caractère complexe et fortement non linéaire. La modélisation correcte de ces phénomènes nécessite la modélisation d'effets locaux, tels que la déformation dans la section, l'échauffement local, le frottement surface contre surface, etc. Dans le cadre de la thèse, on s'intéresse à comprendre le phénomène de ralentissement de la turbine suite à un contact rotor-stator. Une modélisation simplifiée par des éléments poutre répond à cette question, mais avec des limitations sur la précision d'une telle modélisation, pour la compréhension de cet effet qui met en jeu des phénomènes locaux difficiles à capter par une modélisation poutre.

Ces limitations sont encore plus importantes lorsque l'étude du contact rotor-stator est basée sur un rotor simplifié de Jeffcott et un stator décrit par un corps rigide. Il existe cependant une abondante littérature sur ce sujet. La majorité des études se concentrent sur une résolution analytique des équations différentielles décrivant cette modélisation simplifiée, et négligent dans la majorité de ces études les effets gyroscopiques, Karpenko et al. [143], Chu et Zhang [144, 145]. D'autres modèles simplifiés mais pas nécessairement de Jeffcott font l'objet d'analyse dans la littérature. Dai et al. [146] propose une modélisation analytique et une vérification

expérimentale du comportement d'un rotor avec contact annulaire complet avec un obstacle rigide.

Toutes ces approches restent cependant éloignées des cas industriels. Certaines modélisations par éléments finis traitent des cas industriels plus complexes. On pense au travail de Peletan et al. [147, 148] et à la thèse Peletan [5] qui repose sur une modélisation par des éléments poutre d'une turbine industrielle de EDF (rotor et stator) et utilise la méthode de la balance harmonique pour la simulation du comportement de cette turbine lors du contact rotor-stator. Pour le ralentissement, le modèle de Roques [2] et Roques et al. [1] reste le travail le plus avancé en modélisation poutre. Le modèle prend également en compte les effets gyroscopiques.

Par conséquent pour le contact rotor-stator, il apparaît que les effets physiques en jeu ne sont pas pris en compte correctement par les modélisations actuelles qui restent simplifiées. Un des objectifs de la thèse est d'étudier l'apport d'une modélisation tridimensionnelle du contact, dans un modèle éléments finis. Cette problématique est très actuelle si on examine l'état de l'art du contact aube-carter, dans laquelle l'utilisation des éléments 3D a récemment fait l'objet de publications comme Legrand et al. [122] (voir le §3.1.1). L'approche proposée dans cette thèse vise à réduire le temps de calcul d'une modélisation entièrement tridimensionnelle. On analyse dans la suite de ce chapitre, les différents algorithmes disponibles dans les codes commerciaux pour le traitement du contact, et on fera une comparaison entre une modélisation d'un contact simplifié poutre-poutre et un autre avec des éléments 3D quadratiques, pour mesurer l'apport d'une telle modélisation sur les problèmes de contact en machines tournantes.

## 3.2. Algorithmes de traitement du contact

Dans le cadre de la thèse, il a été choisi d'utiliser un logiciel de calcul par élément fini commercial et être capable de traiter le contact rotor/stator à travers les algorithmes de contact standard existant dans de tels codes. Dans la littérature, certains auteurs proposent des méthodes analytiques ou numériques sophistiquées dédiées aux problèmes de contact rotor/stator. Afin de respecter l'objectif de non intrusivité de la thèse, on s'oriente donc vers sur l'utilisation des algorithmes de contact présents dans les codes de calcul par éléments finis. On les exposera brièvement dans la suite, en mettant plus d'accent sur les algorithmes présents dans le code de calcul par éléments finis utilisé : Code\_Aster, et on présentera une synthèse des différentes possibilités de traiter le problème de contact rotor/stator pour une modélisation poutre et une modélisation 3D, ainsi que les différents avantages et inconvénients liés à chaque approche.

### 3.2.1. Le contact frottant : problème fortement non linéaire

Le contact reste parmi les problèmes les plus compliqués à traiter et présente un caractère fortement non linéaire. La pression de contact dépend de la surface de contact entre les deux corps et la force de frottement peut dépendre aussi de

la vitesse de glissement des deux corps. La résolution des problèmes de contact, analytiquement mais surtout numériquement, a fait l'objet de nombreuses études et est en développement permanent. On peut se référer à Wriggers [149, 96] et Laursen [150] pour une synthèse des approches existantes pour le traitement du contact/frottement.

La résolution d'un problème de contact entre deux corps nécessite la résolution d'un problème géométrique lié à la position relative des deux corps et une résolution du problème de contact entre les deux corps, qui permet d'obtenir la pression de contact de laquelle dépend la force de frottement entre les deux corps. Le premier problème est le problème de l'appariement géométrique et le second celui de la résolution. La littérature et les logiciels de calcul par éléments finis proposent pour chaque problème différentes méthodes de résolution, dont certaines sont plus précises que d'autres, mais aux dépens du temps de calcul qui est généralement grand pour les problèmes de contact, surtout en dynamique et en présence de frottement.

### 3.2.2. Appariement géométrique

Les algorithmes de contact dans les logiciels commerciaux transforment le problème de contact en une résolution d'un problème d'appariement et puis une résolution d'un problème de contact. Plusieurs méthodes de résolution de l'appariement géométrique entre les deux corps maillés par éléments finis existent. La méthode d'appariement nodal (node-to-node contact) n'est pas très répandue vu sa précision et sa modularité limitée. Elle consiste à calculer le jeu entre les nœuds des deux surfaces qui sont susceptibles d'être en contact et d'imposer les forces de contact sur les nœuds présentant un jeu nul. Aucune force de contact ne peut-être imposée sur une zone de l'élément fini en dehors des nœuds. Cette méthode peut conduire à des interpénétrations locales, car deux éléments finis appartenant chacun à un des deux solides en contact, peuvent être en contact, alors que leurs nœuds présentent un jeu. Cela est plus clair en cas de contact entre deux surfaces concaves ou convexes, où la forme de l'élément fini joue un rôle et doit être représentée par des éléments quadratiques comme illustré dans la Fig. 3.4.

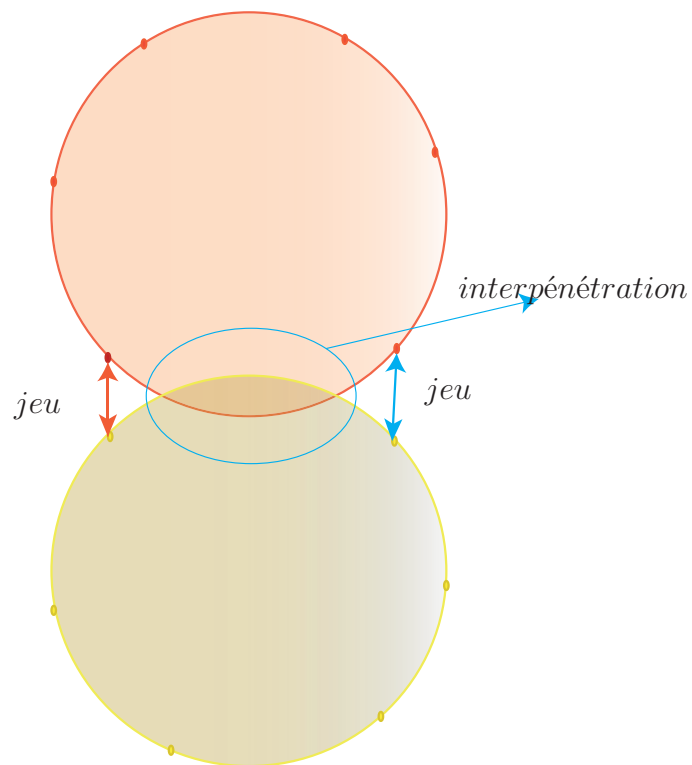
La méthode d'appariement la plus utilisée est la méthode d'appariement maître-esclave Belytschko et al. [98] (voir Fig. 3.5). La surface la plus rigide et la moins fine sera la surface maître et les nœuds de la surface esclave seront projetés sur la surface maître pour en déduire le jeu entre les structures.

L'objectif de l'appariement géométrique est le calcul du jeu entre les deux surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Les deux solides  $S_1$  et  $S_2$  de la Fig. 3.6 sont susceptibles d'entrer en contact. Si une méthode d'appariement maître-esclave est appliquée sur la Fig. 3.6, avec  $\Gamma_1$  est la surface maître et  $\Gamma_2$  la surface esclave. La distance  $g_n$  entre les surfaces maître et esclave est calculée par<sup>2</sup> :

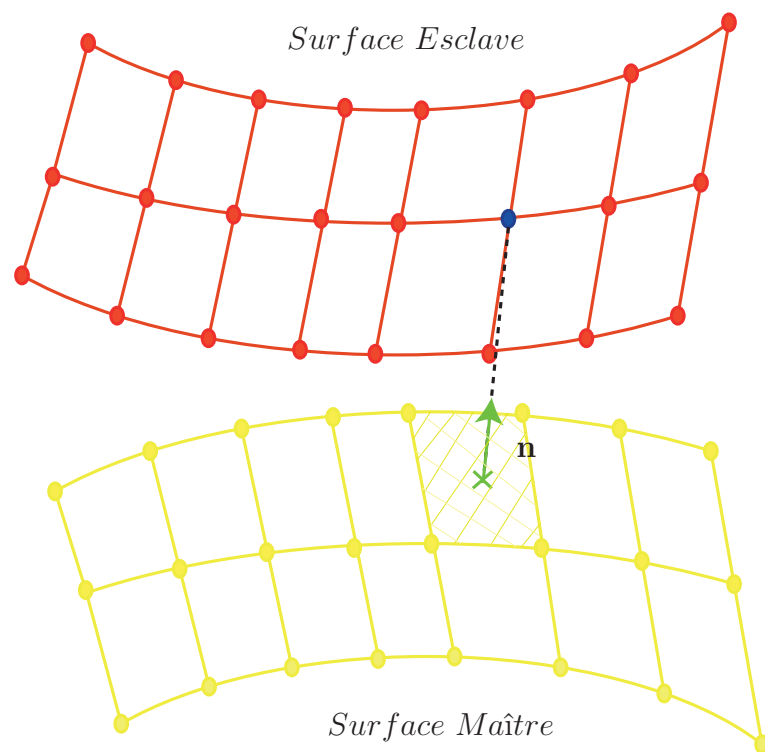
$$g_n = \min_{x_1 \in \Gamma_1} \|x_1 - \bar{x}_2\| \quad (3.1)$$

2. La méthode d'appariement maître-esclave voit son temps de calcul augmenter d'une façon non linéaire avec l'augmentation de la finesse des surfaces maître et esclave, à cause des itérations requises par les Eq. (3.1) et Eq. (3.2).

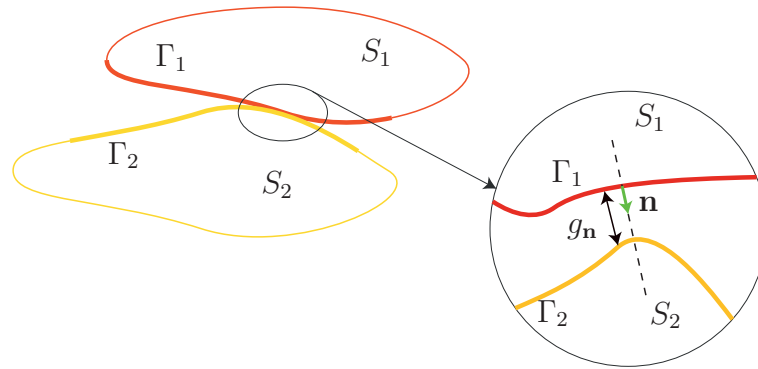




**Figure 3.4.:** Représentation de la géométrie pour le contact. On a interpénétration des deux corps alors que le jeu entre les nœuds est positif.



**Figure 3.5.:** Conditions maître-esclave pour le contact



**Figure 3.6.:** Illustration d'un contact entre deux corps

$x_1$  est point appartenant à la surface esclave  $\Gamma_1$  et  $\bar{x}_2 \in \Gamma_2$  est cherché tel que la distance entre  $x_1$  et  $\bar{x}_2$  soit minimale :

$$\|x_1 - \bar{x}_2\| = \min_{x_2 \in \Gamma_2} \|x_1 - x_2\| \quad (3.2)$$

où  $x_2$  est un point de la surface maître  $\Gamma_2$ . Cela revient à projeter  $x_1$  sur  $\Gamma_2$  selon la normale sortante  $\mathbf{n}$  de  $\Gamma_2$ . On distingue trois cas différents selon la valeur de  $g_n$  :

1.  $g_n > 0$  : pas de contact.
2.  $g_n = 0$  : contact parfait.
3.  $g_n < 0$  : interpénétration.

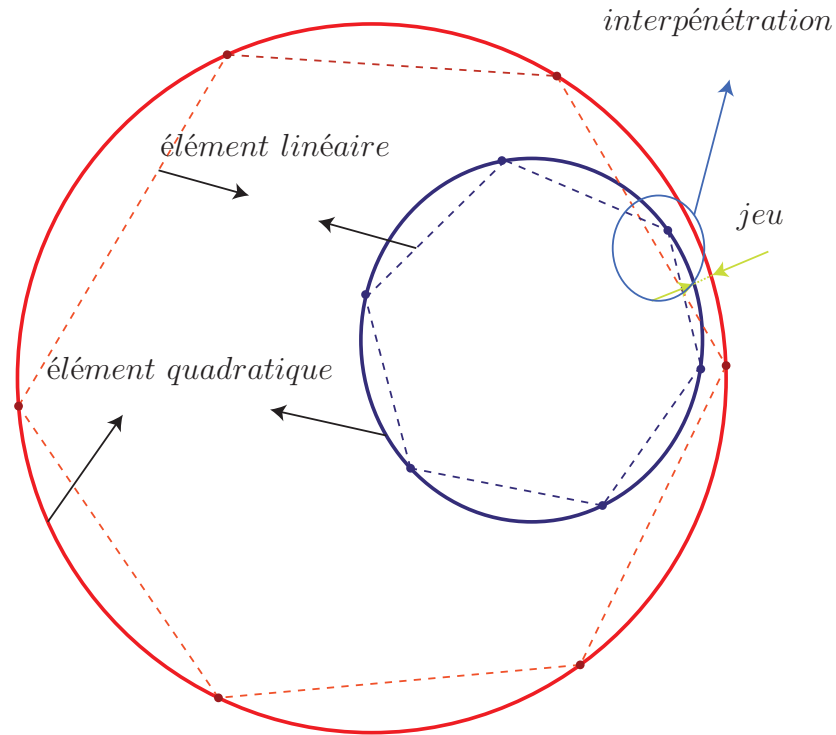
La troisième ne représente pas le phénomène physique de contact. Par contre, cette dernière est nécessaire à certains algorithmes de résolution du contact, comme la méthode de pénalité (cf. §3.2.4.2).

Pour deux surfaces de rigidités équivalentes, Noels [70] propose un algorithme à double face qui alterne durant le calcul les surfaces maître et esclave. Par cette approche, une force peut être imposée sur un endroit quelconque de l'élément fini et les forces seront calculées sur les nœuds selon la fonction de forme de l'élément. Cela empêchera les interpénétrations locales inévitables avec une méthode d'appariement nodal. Cette méthode permet de traiter correctement un problème de contact rotor-stator si les surfaces sont maillées avec des éléments quadratiques. Des éléments linéaires induiront des contact locaux purement numériques comme schématisé par la Fig. 3.7. Ils causent également des problèmes de discontinuité de la normale sur les surfaces de contact.

### 3.2.3. Le contact : un problème d'optimisation

D'après Wriggers [96], les conditions cinématiques sont les conditions géométriques du contact. Il faut donc connaître la distance ou bien l'interpénétration  $g_n$  pour le calcul du contact normal.

Lorsque  $g_n$  est strictement négative une interpénétration a lieu. La condition de contact est la condition de non pénétration entre les deux solides. Elle est connue



**Figure 3.7.:** Utilité des éléments quadratiques pour le contact

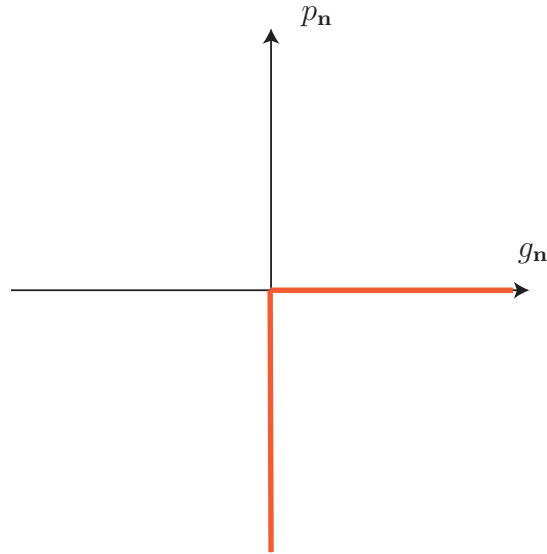
souvent sous le nom de la condition de Kuhn-Tucker-Karush<sup>3</sup> (Minoux [152]) donnée par :

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{n}} &\geq 0 \\ p_{\mathbf{n}} &\leq 0 \\ p_{\mathbf{n}}g_{\mathbf{n}} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Avec  $p_{\mathbf{n}}$  qui représente la pression de contact. Par cette formulation du contact, la pression de contact est considérée comme une force de réaction. Les Eq. (3.3) peuvent être présentés par la Fig. 3.8. La courbe obtenue n'est pas une fonction, est non différentiable en  $g_{\mathbf{n}} = 0$  et est compliquée à respecter numériquement.

Au comportement normal du contact, s'ajoute le comportement tangentiel de frottement. On distingue deux comportements tangentiels : un contact collant (adhérent) et un contact glissant. On définit  $g_t$  comme étant la distance de glissement entre  $x_1$  de la surface esclave  $\Gamma_1$  et son projeté  $\bar{x}_2$  de la surface maître  $\Gamma_2$ .  $\dot{\mathbf{g}}_t$  représente le vecteur vitesse de glissement dans la direction tangentielle. On peut formuler d'une façon générale le comportement tangentiel du contact qui génère une force tangentielle  $\mathbf{F}_t$  par :

3. Une autre approche pour la formulation du contact existe, et permet de prendre en considération le comportement micro-mécanique au niveau du contact ainsi que la porosité des surfaces en contact (se référer à Kragelsky et al. [151]). Cette approche n'est pas intéressante pour les applications dans le cadre de la thèse.



**Figure 3.8.:** Comportement normal au contact

$$\mathbf{F}_t = -\hat{f}(p_n, \dot{g}_t, g_t, \theta, \dots) \frac{\dot{\mathbf{g}}_t}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} \quad (3.4)$$

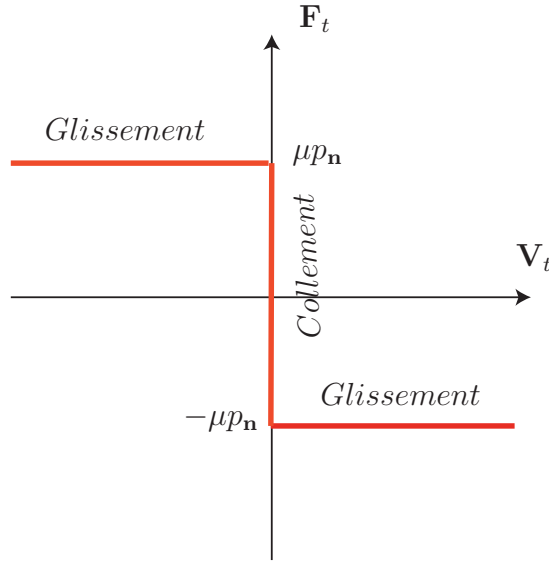
$\hat{f}$  est une fonction qui dépend de la pression de contact  $p_n$ , de la vitesse et distance de glissement respectivement  $\dot{\mathbf{g}}_t$  et  $g_t$ , de la température des surfaces de contact  $\theta$ , ainsi que d'autres paramètres comme l'état des surfaces, leur humidité, etc. L'Eq. (3.4) est une formulation générale du comportement tangentiel du contact. En général, des hypothèses simplificatrices sont faites et conduisent à l'adoption d'un coefficient de frottement qui ne dépend que des propriétés matériaux. La loi de frottement la plus utilisée pour décrire le frottement entre deux solides est la loi de Coulomb :

$$\|\mathbf{F}_t\| \leq \mu p_n \quad (3.5)$$

où  $\mu$  désigne le coefficient de frottement de Coulomb. Si  $\|\mathbf{F}_t\| < \mu p_n$ , cela implique que le contact est collant ( $\dot{\mathbf{g}}_t = \mathbf{0}$ ). Si le contact est glissant  $\dot{\mathbf{g}}_t \neq \mathbf{0}$  on a :

$$\mathbf{F}_t = -\mu p_n \frac{\dot{\mathbf{g}}_t}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} \quad (3.6)$$

Le comportement en frottement selon la loi de Coulomb peut-être résumé par la Fig. 3.9.



**Figure 3.9.:** Comportement tangential au contact frottement

L'équation fondamentale de la dynamique d'un corps soumis à des efforts de contact s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}_{cont} = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masses, amortissement et raideur.  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{u}$  sont les vecteurs d'accélération, vitesses et déplacements.  $\mathbf{F}_{cont}$  représente les efforts de contact aux nœuds et  $\mathbf{F}_{ext}$  les forces extérieures. Par la suite on examine les méthodes de résolution d'un problème de contact en dynamique décrit par l'Eq. (3.7).

### 3.2.4. Résolution

#### 3.2.4.1. Multiplicateur de Lagrange

L'objectif de la méthode des multiplicateurs de Lagrange Belytschko et Neal [153] est d'interdire la pénétrabilité des corps, i.e.,  $g_n \geq 0$  de la condition de Kuhn-Tucker-Karush dans la formulation du contact (voir l'Eq. (3.3)) .

L'Eq. (3.7) s'écrit selon la formulation par la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Gamma_1} (\lambda_n \delta g_n + \lambda_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) dS = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.8)$$

$\lambda_n$  est le multiplicateur de Lagrange lié à la force normale de contact et peut être interprétée comme une force de contact.  $\delta g_n$  est la variation de la distance entre les surfaces de contact selon la direction normale.  $\lambda_t \cdot \delta \mathbf{g}_t$  représente la contrainte dans

la direction tangentielle. Dans le cas d'un contact adhérent,  $\lambda_t$  peut être interprétée comme une force de frottement.

L'Eq. (3.8) peut s'écrire sous la forme du système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}^T\lambda &= \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{G}^T[\mathbf{X} + \mathbf{u}] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{G}$  est une matrice exprimant les contraintes liées au contact,  $\mathbf{X}$  est le vecteur des coordonnées des nœuds et  $\lambda$  est le vecteur comportant les multiplicateurs de Lagrange.

Le respect de la non pénétrabilité des corps, garanti par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, se fait aux dépens de la taille du système qui augmente considérablement si le nombre de contacts détectés est important. De plus, la matrice tangente est mal conditionnée et cette méthode peut perturber certains schémas d'intégration en temps car elle induit des fréquences propres infinies dans le système comme mentionné par Géradin et Cardona [154]. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est largement répandue dans la littérature comme dans les travaux de Legrand et al. [122], Legrand et Pierre [118], Batailly et al. [119], Roques et al. [1] et bien d'autres pour sa précision.

### 3.2.4.2. La méthode de pénalité

La méthode de pénalité permet de transformer le problème de contact en un problème d'optimisation sans contraintes. Son principal avantage est qu'elle n'augmente pas la taille du problème à résoudre, et permet d'obtenir des temps de calcul raisonnables. Par contre, le principal désavantage de cette méthode est qu'elle ne respecte pas parfaitement la condition de non pénétration des corps en contact. En effet, la méthode de pénalité impose une force proportionnelle à l'interpénétration et de direction opposée au sens du mouvement  $F_{P_{ext}} = K_n |g_n|$ . Où  $K_n \geq 0$  est un coefficient de pénalité du contact homogène à une raideur.

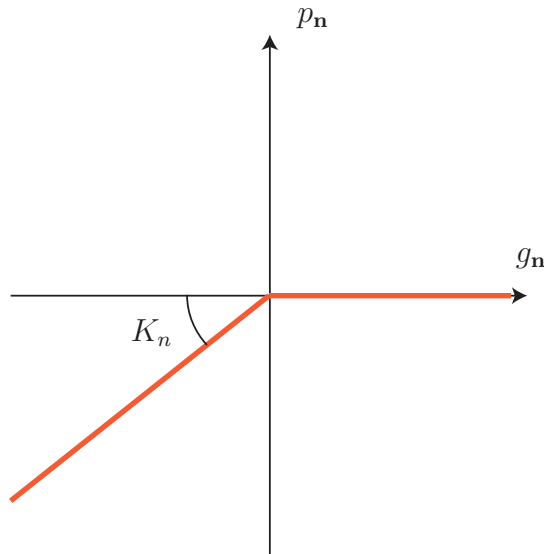
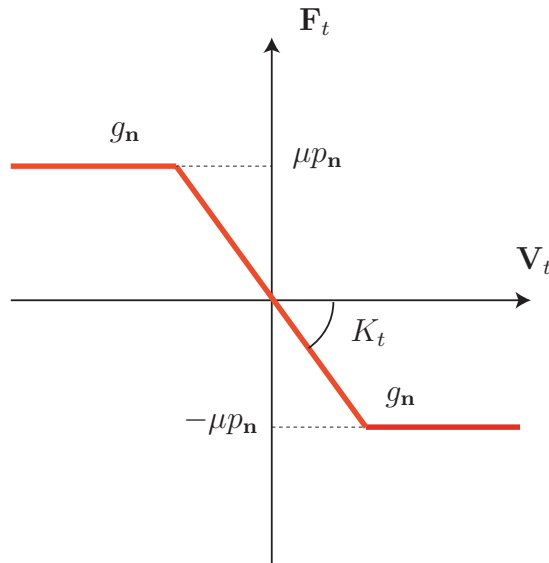


Figure 3.10.: Comportement normal régularisé par pénalisation au contact



**Figure 3.11.:** Comportement tangentiel régularisé par pénalisation au contact

La Fig. 3.10 schématise la méthode de pénalité en contact. Cette loi est d'autant plus correcte que le coefficient de pénalité est grand, et si  $K_n \rightarrow \infty$ , la méthode de pénalité sera équivalente à la loi physique décrite par Eq. (3.3) et par la Fig. 3.8. Par contre, cela conduit à des problèmes de conditionnement de la matrice de raideur tangente et à la divergence. D'où l'impossibilité d'interdire les interpénétrations. Le frottement peut être aussi pénalisé par un facteur  $K_t \geq 0$  et dans ce cas la condition de collage ne sera pas réalisée et la Fig. 3.9 se transforme en Fig. 3.11.

Pour le cas d'un contact adhérent, l'Eq. (3.7) s'écrit selon la formulation par la méthode de pénalité :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Gamma_1} (K_n g_n \delta g_n + K_t \mathbf{g}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma_1 = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.10)$$

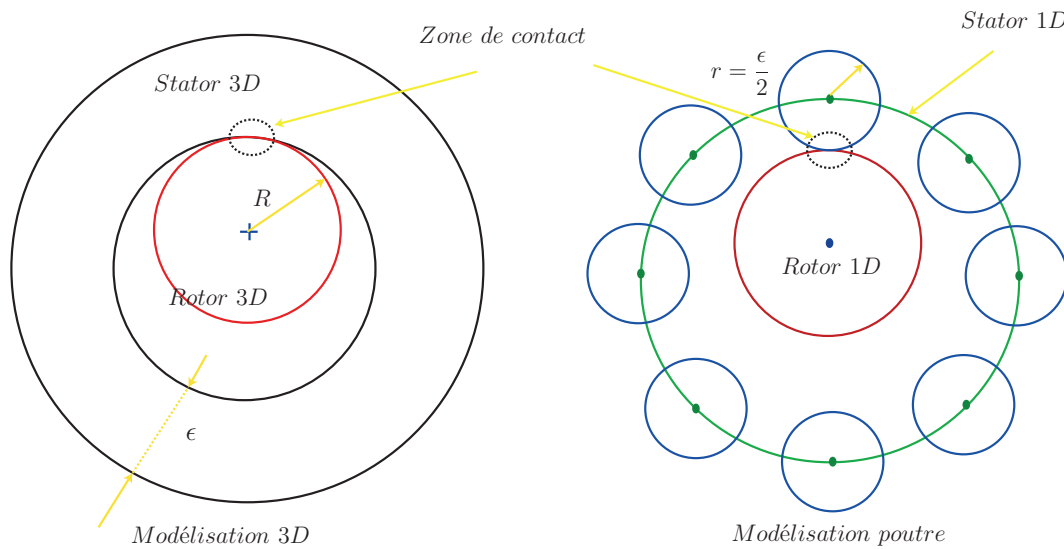
Pour un cas d'un contact collant, l'Eq. (3.10) change en :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Gamma_1} (K_n g_n \delta g_n + \mathbf{F}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) d\Gamma_1 = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.11)$$

Bien que cette approche ne respecte pas l'interdiction de pénétration des corps, elle est répandue pour sa facilité d'utilisation et car elle intéressante pour traiter des cas de grandes dimensions. Il faut alors procéder à une analyse paramétrique pour s'assurer de la non dépendance des résultats aux paramètres  $K_n$  et  $K_t$  tout en s'assurant que la pénétration reste négligeable.

### 3.2.4.3. Méthodes hybrides ou mixtes

Pour pallier les problèmes de conditionnement de la matrice tangente et pour avoir une méthode adaptée aux systèmes de grande taille, la méthode du Lagrangien augmentée Glowinski et Tallec [155] combine le principe de la méthode de pénalité et du



**Figure 3.12.:** Approche utilisée par le Code\_Aster pour le contact 1D

multiplicateur de Lagrange. Un coefficient de pénalité est utilisé et le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  est un paramètre calculé par une méthode itérative. Il est initialisé à zéro, et les itérations ont lieu jusqu'à la réduction de l'interpénétration à la valeur souhaitée. Le multiplicateur représentera à ce niveau la force de contact. Un problème de contact-frottement pourrait également être traité de cette manière. Des exemples d'application peuvent être trouvés dans Kikuchi et Oden [156], Laursen et Simo [157], Wriggers et Simo [158], Alart et Curnier [159].

A noter que d'autres méthodes hybrides existent dans la littérature telle la méthode du Lagrangien perturbé. Plus de détails peuvent être trouvés dans Oden [160] et Simo et al. [161].

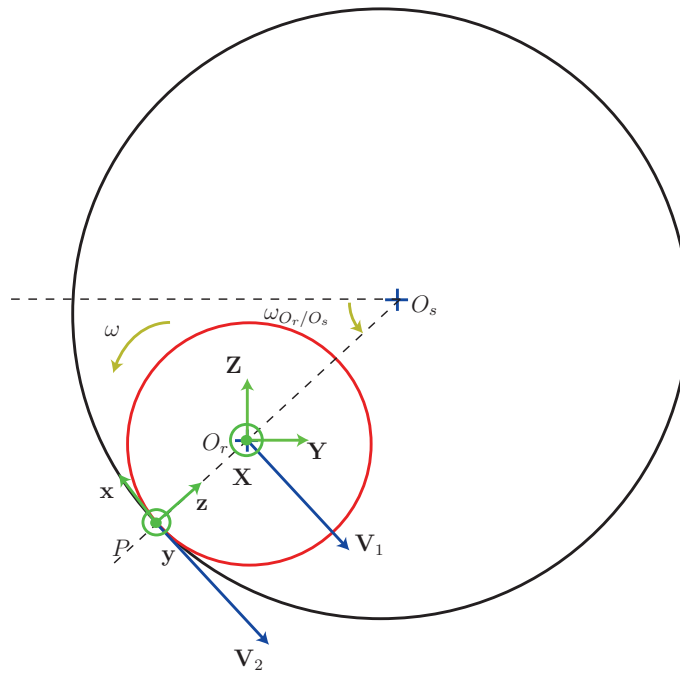
### 3.2.5. Traitement du contact rotor-stator en modélisation poutre : la loi de choc

Le §3.2 présente les traits principaux d'un algorithme de traitement d'un problème de contact entre deux corps. Pour le traitement du contact rotor-stator en modélisation poutre, il faut écrire les équations qui décrivent la physique du contact et puis transformer le problème physique en un problème d'optimisation qui sera résolu par une des méthodes exposées dans le §3.2.4 après avoir choisi une méthode d'appariement. Cependant, il existe, dans les codes commerciaux de calcul par éléments finis, des algorithmes simples d'utilisation et pratiques et qui sont adaptés à ce type de problème. Le Code\_Aster présente un algorithme dit la loi de choc qu'on exposera par la suite et qui sera utilisé dans le cadre de la thèse.

La Fig. 3.12 schématise le principe de la loi de contact, dite loi de choc, disponible dans le Code\_Aster pour le traitement du contact rotor-stator en modélisation poutre. La méthode d'appariement utilisée par la loi de choc est une méthode d'appariement nodale et la méthode de résolution du problème de contact/frottement est une méthode de pénalité.



Prenons le cas simple d'un stator sans ailettes (une simple couronne de rayon intérieur  $R$  et d'épaisseur  $\epsilon$  dans le plan). Une modélisation poutre de ce dernier sera un ensemble de poutres courbes formant un cercle de rayon  $R + \frac{\epsilon}{2}$ . Les différents nœuds du stator sont représentés par des points verts sur la Fig. 3.12. La section du rotor en modélisation poutre est représentée par un nœud. Ce dernier est susceptible de rentrer en contact avec les différents nœuds du stator. La représentation est donc d'autant plus précise que le nombre de nœuds du stator est important. Le temps de calcul croît d'une façon non linéaire (exponentiellement) avec le nombre de nœuds de contact. A chaque nœud de contact est affecté un disque rigide qui permet de bien prendre en compte les distances relatives des différents nœuds. Cependant, cette hypothèse dite de bi-cercle ne permet pas de prendre en compte les déformations des sections du rotor et du stator. Le nœud du rotor sera doté d'un disque rigide lui permettant d'avoir la bonne distance face aux différents disques rigides affectés au différents nœuds du stator et qui, ensemble, forment le stator. Les éléments de poutre qui décrivent le rotor ou le stator sont déformables au niveau de leur ligne moyenne, ce qui permet de changer les positions relatives des différents disques.



**Figure 3.13.:** Prise en compte de  $\mathbf{V}_2$  dans la force de frottement

La Fig. 3.13 schématise un système rotor-stator. Le rotor (en rouge) est soumis à un balourd qui déplace le centre du rotor de sa position initiale  $O_s$  confondue avec le centre du stator, jusqu'à ce que le jeu rotor-stator soit consommé et que le contact ait lieu. Le rotor continue à tourner autour de lui même (autour de  $O_r$ ) à une vitesse  $\omega$  et son centre de rotation  $O_r$  tourne autour de  $O_s$  à une vitesse  $\omega_{O_r/O_s}$  (qui peut être différente de  $\omega$ ).  $O_r$  possède une vitesse linéaire dont la composante tangentielle qui appartient au plan de contact est notée  $\mathbf{V}_1$  sur la Fig. 3.13. La rotation du rotor, qui est de rayon  $R$ , autour de lui même génère une vitesse linéaire dont la composante

tangentielle dans le plan de contact est notée  $\mathbf{V}_2$ .

La version stabilisée de Code\_Aster n'est pas capable de traiter correctement le frottement du rotor sur le stator, car elle ne prend pas en compte la rotation du rotor autour de lui-même (elle néglige  $\mathbf{V}_2$ ). Cela se traduit par des imprécisions très élevées car généralement, c'est la rotation du rotor autour de lui-même qui contribue le plus à la force de frottement. Cette dernière pourrait également avoir un sens opposé à la rotation de  $O_r$  autour de  $O_s$  (précession inverse). Pour palier à ce problème, un développement a été proposé et utilisé dans le cadre de la thèse de Peletan [5]. On résume le principe par la suite.

Sur la Fig. 3.13,  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  est un repère orthonormé attaché à  $O_r$  et tourne autour de  $O_s$  sans tourner autour de lui-même (il n'est pas associé à la rotation du rotor autour de lui-même). Sur le point de contact rotor-stator on attache un repère orthonormé  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  qui suit la rotation du rotor autour de lui-même et tel que  $\mathbf{y}$  est de même sens et direction que  $\mathbf{X}$ . Par ailleurs,  $\mathbf{z}$  est de même sens et direction que  $\mathbf{Y}$  à l'instant  $t = 0$  (l'instant auquel commence la rotation du rotor). Le problème de contact dans le Code\_Aster est écrit dans le repère fixe, mais résolu à chaque nœud de contact dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . C'est pourquoi en vue d'effectuer les modifications nécessaires à la prise en compte de  $\mathbf{V}_2$  dans le calcul de la force de frottement entre le rotor et le stator,  $\mathbf{V}_1$  est transformée au repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et sera notée  $\mathbf{V}_{1r}$ . Dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , la vitesse du point  $P$  s'écrit alors :

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_{1r} - R \times \omega \mathbf{x} \quad (3.12)$$

L'Eq. (3.12) permet de prendre en compte la rotation du rotor autour de lui-même dans le calcul de la force de frottement. Cette approche a été programmée sous forme d'une surcharge, qui a été ajoutée à la version stabilisée de Code\_Aster et a été utilisée dans le cadre de la thèse.

### 3.3. Le contact rotor-stator sur le Code\_Aster

L'utilisation des algorithmes de traitement du contact présentés dans le §3.2 n'est pas indépendante du logiciel commercial de calcul par éléments finis. Ce dernier pourrait restreindre le choix en imposant des contraintes pratiques. Le traitement d'un problème de contact rotor-stator en modélisations poutre et 3D dépend principalement des cinq choix suivants :

- Le repère dans lequel est écrit et résolu le problème de dynamique transitoire des machines tournantes (repère fixe ou repère tournant). Cela détermine également la façon d'imposer le chargement et la rotation sur le rotor.
- La méthode d'appariement.
- La méthode de résolution.
- Le schéma en temps.
- Résolution sur base physique ou base modale.

On présente par la suite les différentes possibilités offertes par le Code\_Aster pour le traitement du contact rotor-stator en modélisation poutre et 3D. Les cas d'études traités sont inspirés de cas industriels et sont adaptés aux possibilités de simulation offertes par le code dont le choix a été justifié dans le Chapitre 1.

#### 3.3.1. En modélisation poutre

Dans le Code\_Aster, le calcul du contact rotor-stator en modélisation poutre est assez simple d'utilisation et très peu coûteux en temps CPU. Il est uniquement possible par une loi dite de choc (se référer à Alarcon [162] et au §3.2.5).

**Choix du repère :** la résolution s'effectue dans le repère fixe du rotor. Par contre, la vitesse de rotation du rotor autour de lui-même est une connue du problème et sa loi d'évolution doit-être imposée. La rotation d'ensemble du rotor autour de lui-même est découplée de la torsion dans l'arbre. Le contact rotor-stator ne se manifeste pas dans ce cas par un ralentissement du rotor, mais par des effets de torsion, des effets localisés, par la réponse du stator et d'autres effets.

Le balourd est imposé comme expliqué dans le §2.12.2.1 du Chapitre 2.

**Méthode d'appariement géométrique :** la loi de choc limite le choix de la méthode d'appariement géométrique à une loi d'appariement nodal.

**Méthode de résolution :** la loi de choc limite le choix de la méthode de résolution à une méthode de pénalité pour le contact et le frottement.

**Choix du schéma en temps :** l'utilisation de la loi de choc impose l'utilisation de schémas d'intégration en temps explicites tel le schéma d'Euler et de Runge-Kutta, Van der Houwen et al. [163]. Le schéma de Runge-Kutta présente dans ce cadre une meilleure stabilité par rapport aux autres schémas, comme on verra plus tard dans ce chapitre.

**Résolution sur base modale :** l'équation de la dynamique ne peut être résolue que par projection sur base modale. En effet, pour une simulation du contact rotor-stator selon la loi de Choc (voir le §3.2.5), le Code\_Aster propose une résolution de l'équation de la dynamique uniquement par projection sur base modale. On choisit le nombre de fréquences propres qui forment la base de la projection ; plus ce nombre est élevé, plus le temps de calcul est important, et plus précis est notre calcul. A la fin du calcul, les résultats sont écrits sur une base physique.

A noter que pour le traitement du contact entre des poutres situées dans le même plan, une méthode plus avancée que la loi de choc existe. La résolution du contact dans ce cas pourrait se faire par des multiplicateurs de Lagrange et selon des schémas en temps implicites (notamment celui de Newmark) dans l'opérateur de calcul de la dynamique non-linéaire (se référer à Greffet [164]). L'équation de la dynamique est résolue par la suite sur base physique. Cette méthode n'est pas disponible pour le calcul du contact rotor-stator, car dans le cas du contact rotor-stator les éléments de poutres du rotor et du stator ne sont pas coplanaires.

#### 3.3.2. En modélisation 3D

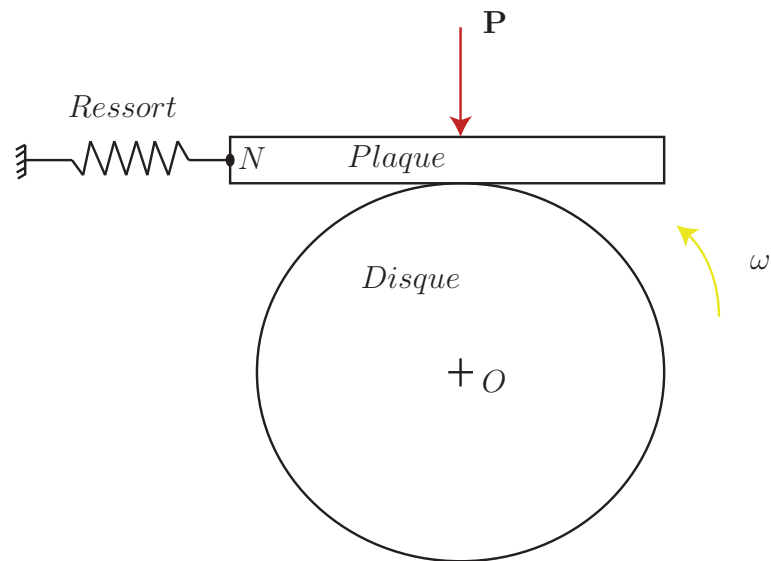
En modélisation 3D la littérature propose des méthodes et des algorithmes de résolution plus riches que ceux disponibles pour le traitement du contact en modélisation poutre du rotor et du stator. Cette richesse de modélisation dépend du choix du code de calcul. On a exposé un peu plus tôt dans ce chapitre les différentes méthodes

de résolution du contact/frottement (méthode de pénalité, méthode des multiplicateurs de Lagrange, etc.) ainsi que les méthodes d'appariement géométrique, etc. Code\_Aster, dispose de ces méthodes pour le traitement du contact en modélisation 3D. Cependant, il n'existe pas dans le Code\_Aster une recette simple pour la modélisation du contact rotor-stator en modélisation 3D. En effet, le traitement du contact rotor-stator en modélisation 3D est, à notre connaissance, absent de la littérature. La thèse présente alors des besoins de modélisation et de résolution qui n'ont pas été testés dans le Code\_Aster, et il est nécessaire de collecter les différentes méthodes de résolution et de simulation qui répondent le mieux à nos besoins, tout en contournant les différentes contraintes qui seront imposées par le code. Les calculs sont généralement onéreux en temps CPU.

Il faut noter que la majorité des cas de contact en 3D effectués sur le Code\_Aster sont des applications quasi-statiques. Dans le cadre de la thèse, le besoin s'étend à la dynamique transitoire incluant une rotation d'ensemble. Par conséquent, réaliser un calcul de dynamique transitoire 3D avec contact constitue une originalité de notre travail. Pour répondre à ce besoin sur le Code\_Aster, il a fallu tout d'abord effectuer une série de tests permettant de définir les possibilités offertes par le code, ainsi que les différentes contraintes imposées, avant de trouver la solution de modélisation qui répond le mieux à notre besoin et qui sera résumée dans ce paragraphe. Cette phase de notre travail a contribué à la collecte des ingrédients de modélisation et de résolution présents dans le Code\_Aster et qui permettent de simuler d'une façon physique et opérationnelle des cas industriels de contact rotor-stator en 3D. Bien que cette phase ne soit exposée que d'une façon brève dans la suite, il faut noter l'énergie investie dans cette direction, et qui a permis de déterminer, et de repousser, les limites de modélisations du Code\_Aster pour le contact rotor-stator en modélisation 3D. Des fiches de développement pour le Code\_Aster ont été émises grâce au travail de la thèse, et cela a permis de construire les premières briques qui permettront, dans les prochaines versions, une utilisation facile et efficace du code pour des applications industriels de contact rotor-stator en 3D.

**Choix du repère :** dans le §2.12.2.2 du Chapitre 2, on a présenté la résolution de l'équation de la dynamique du rotor en modélisation 3D dans le repère tournant. Cette dernière permet de prendre en compte les effets de la gyroscopie des éléments volumiques. Par contre et pour traiter un contact rotor-stator la résolution de la dynamique du rotor ne peut pas s'effectuer dans le repère tournant. En effet, le développement de la matrice de gyroscopie permet de prendre en compte les forces gyroscopiques dues à la rotation du rotor mais ne permet pas à un corps présent dans la simulation, tel le stator, de "voir" la rotation du rotor comme cette dernière s'effectue dans le repère tournant du rotor. Le stator perçoit en effet les valeurs des déplacements, vitesses et accélérations du rotor et qui sont dans le repère tournant du rotor, comme s'il étaient les valeurs dans le repère fixe. La rotation du rotor autour de lui même et qui est critique dans le cadre du contact rotor-stator n'est donc pas prise en compte par cette modélisation.

La Fig. 3.14 représente un cas test qui a permis de montrer la non validité de la modélisation en repère tournant de la dynamique rotor-stator en cas de contact. Une plaque est maintenue par une pression  $\mathbf{P}$  face à un disque tournant à une vitesse  $\omega$  autour de son centre de rotation  $O$ . Si par une modélisation en repère



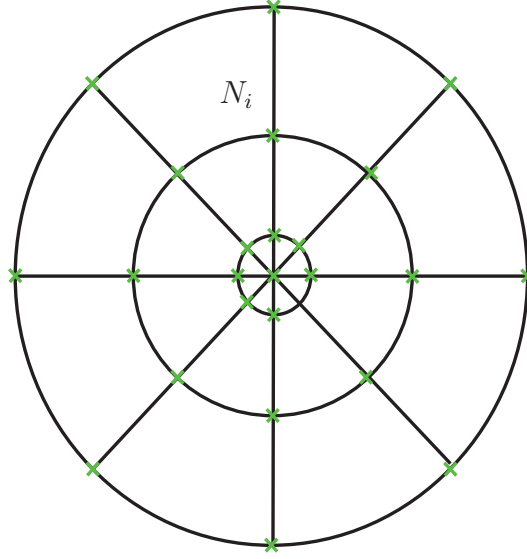
**Figure 3.14.:** Cas test pour la modélisation du contact en 3D sous Aster

tournant, le contact/frottement plaque-disque est bien pris en compte, on constatera un déplacement de la plaque que l'on peut mesurer par exemple sur le point  $N$ . Or ce déplacement est nul, ce qui confirme que cette modélisation en repère tournant n'est pas adaptée au contact rotor-stator.

La solution est donc de se placer dans le repère fixe et de mettre le rotor en rotation dans ce repère. Il n'existe pas dans le Code\_Aster une commande qui le fait d'une façon automatique, on est par la suite amené à développer un moyen de le faire. On se met dans le repère fixe et on impose la rotation du rotor selon une loi de vitesse donnée. Pour ce faire, on impose les déplacements des nœuds appartenant aux sections de bord du rotor. La zone de contact étant suffisamment éloignée du bord, ces conditions aux limites n'auront pas d'incidence sur les effets localisés dus au contact/frottement. Par cette méthode, les déplacements dans les sections extrêmes étant imposés, cela revient à imposer sur ces sections la vitesse de rotation. Il n'est donc pas possible ainsi d'étudier le ralentissement de la turbine pour lequel on a un chargement en efforts et une vitesse de rotation variable, qui est une inconnue du problème. Cela n'étant pas faisable non plus en modélisation poutre, on garde alors une cohérence entre les deux modélisations 3D et poutre et cela permet d'effectuer correctement la comparaison entre le contact en modélisation poutre et celui en modélisation 3D.

On présente par la suite une loi de montée en vitesse qui permet de démarrer la rotation du rotor à partir d'une vitesse nulle et d'atteindre une vitesse  $\omega$  donnée en un délai de temps assez réduit. L'objectif est que l'accélération soit nulle au démarrage de la rotation du rotor, ainsi qu'à l'instant  $t_m$  à laquelle le rotor atteint sa vitesse maximale pour éviter de générer des régimes transitoires artificiels. Par cette loi d'évolution de la vitesse, à partir de l'instant  $t_m$ , l'accélération du rotor sera nulle. On peut ainsi obtenir un comportement du rotor à partir de  $t_m$  qui est équivalent à un comportement du rotor en modélisation poutre avec une vitesse de rotation imposée et constante. Le contact rotor-stator, pareillement au modèle poutre, ne se manifeste pas dans ce cas par un ralentissement du rotor, mais par

des effets de torsion, des effets localisés, par la réponse du stator et d'autres effets.



**Figure 3.15.:** Mise en rotation du rotor 3D

Cette loi d'évolution de la vitesse qui garantit une accélération nulle à l'instant  $t = 0$  et à l'instant  $t = t_m$  où la vitesse atteint sa valeur maximale et constante  $\omega$  pourrait être inspirée de la loi d'évolution du balourd décrite par l'Eq. (2.170). La loi d'évolution de la vitesse s'écrit alors :

$$\omega(t) = \omega \times \left(3 - 2 \times \frac{t}{t_m}\right) \frac{t^2}{t_m^2} \quad (3.13)$$

Par intégration de l'Eq. (3.13) en fonction du temps, on obtient l'expression de l'angle de rotation  $\phi(t)$  de chaque bord du rotor en fonction du temps pour  $t \in [0, t_m]$  :

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega \times \left(1 - \frac{t}{2 \times t_m}\right) \frac{t^3}{t_m^2} \quad (3.14)$$

Cette dernière s'écrit pour  $t \geq t_m$  :

$$\phi(t) = \int_0^{t_m} \omega(t) dt + \int_{t_m}^t \omega(t) dt = \omega \times \left(t - \frac{t_m}{2}\right) \quad (3.15)$$

La Fig. 3.15 montre un des deux bords du rotor avec un maillage dont les nœuds sont représentés par des croix vertes. Si  $N_i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  noeud de la facette représentant un des deux bords et qui est dans le plan  $(x, y)$ , alors pour imposer la loi d'évolution en vitesse décrite ci-dessus, il suffit d'imposer sur chaque noeud  $N_i$ , distant de  $r$  du centre de rotation, un déplacement tel que :

$$\begin{aligned}x_{N_i}(t) &= r \times \cos(\phi(t)) \\y_{N_i}(t) &= r \times \sin(\phi(t))\end{aligned}\tag{3.16}$$

La modélisation de la dynamique des rotors dans le repère fixe et telle que décrite ci-dessus, comporte des non linéarités de type grands déplacements et grandes rotations. Même en absence de tout contact, la simulation de la rotation du rotor autour de lui-même en présence d'un balourd est d'une durée largement supérieure à celle dans le repère tournant décrite dans le §2.12.2.2 du Chapitre 2. Le temps de la simulation croît considérablement avec la finesse de maillage du rotor 3D. On a par la suite intérêt à réduire la taille de la zone 3D à l'endroit de contact rotor-stator et remplacer le reste par des éléments poutre en se servant d'un raccord poutre-3D tel que celui 3D\_POU présent dans le Code\_Aster et décrit dans le §2.9 du Chapitre 2. Cependant, il s'est avéré après une analyse du comportement de 3D\_POU en dynamique avec grandes rotations, que ce raccord est conçu pour les applications de dynamique respectant l'hypothèse des petites perturbations. Le développement de ce raccord en grands déplacements et grandes rotations serait donc intéressant mais reste une perspective à ces travaux de thèse.

On effectue donc par la suite des simulations de contact rotor-stator avec des rotors entièrement 3D. Pour éviter des calculs très lourds en temps CPU, on évite de modéliser le disque en 3D. On modélise alors le rotor par un axe en rotation. On s'inspire des calculs effectués à EDF sur un vrai cas industriel.

Le balourd est une force appliquée localement sur ce rotor et dont la loi d'évolution suit les conditions décrites dans l'Eq. (2.170) du Chapitre 2 afin de ne pas déclencher une excitation très importante des hautes fréquences. Comme la résolution de l'équation de la dynamique du rotor 3D s'effectue dans le repère fixe, le balourd ne sera pas imposé de la manière présentée dans le §2.12.2.2 du Chapitre 2 (modélisation en repère tournant d'un rotor 3D), mais identiquement à sa façon de l'imposer en modélisation poutre, i.e., comme expliqué dans le §2.12.2.1 du Chapitre 2.

**Méthode d'appariement géométrique :** une méthode d'appariement maître-esclave est choisie pour les problèmes de contact rotor-stator en modélisation 3D.

**Méthode de résolution :** pour résoudre le contact rotor-stator en 3D, on a le choix entre la méthode de pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Malgré les avancées récentes dans le Code\_Aster, et notamment l'introduction d'une résolution par la méthode de Newton-Krylov, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, et pour des comparaisons effectuées sur plusieurs cas de calcul, reste en moyenne 50 % moins rapide qu'une méthode de pénalité avec un appariement maître-esclave. Elle conduit par la suite à un temps de calcul rédhibitoire. Les performances en convergence et temps de calcul d'une résolution par les multiplicateurs de Lagrange baissent significativement si on traite un cas de contact entre un rotor et un stator encastré. L'avantage d'une méthode de pénalité est de tolérer une faible interpénétration pour accélérer la résolution et empêcher la divergence. A cela s'ajoute le fait que le contact en modélisation poutre dans le Code\_Aster est strictement traité par pénalité. Pour rester cohérent et pouvoir comparer correctement

le contact en modélisation poutre et celui en modélisation  $3D$ , il faut utiliser la même méthode de résolution du contact. Dans le reste de ce chapitre, la résolution du contact en  $3D$  se fera donc par pénalité.

**Choix du schéma en temps :** au contraire de certains codes de calcul par éléments finis comme Abaqus, qui disposent de schémas en temps explicites adaptés à la dynamique transitoire, Code\_Aster est un code implicite et le schéma offert par le code pour le calcul du contact/frottement en modélisation  $3D$  est le schéma de Newmark. Cela engendre un temps CPU important et limite les exemples d'applications industrielles envisagés. Par contre, et pour garantir une bonne stabilité du schéma de Newmark dans le cadre non linéaire, et notamment celui du contact, il faut veiller à ce que le pas de temps reste petit. En plus, il est impératif d'introduire de l'amortissement numérique pour stabiliser le schéma et empêcher la création d'énergie suite au contact. On présente dans l'Annexe A un exemple d'un cas de contact rotor-stator identique à celui du §3.5.2 en modélisation  $3D$  résolu par un schéma de Newmark non amorti. La solution contient un bruit numérique important et diverge après un certain temps. Dans les exemples d'applications industrielles sur le contact rotor-stator présentés dans la suite de ce chapitre, on utilise un schéma de Newmark amorti ( $\alpha = 0.25$ ) pour le traitement du contact rotor-stator en modélisation  $3D$ .

L'utilisation du schéma de Newmark amorti pour la résolution de problèmes de contact/frottement ne garantit pas la conservation de l'énergie. La conservation de l'énergie dans un impact sans frottement ne peut être assurée qu'avec une condition de non pénétration cinématique exprimée en vitesse Moreau [165], appelée aussi la condition de persistance Chawlar et Laursen [166].

A noter, que si de l'amortissement mécanique est introduit dans le système rotor-stator, ce dernier ne pourra pas remplacer l'amortissement numérique nécessaire à la stabilité du schéma de Newmark. Par ailleurs, l'introduction d'amortissement mécanique dans le système rotor-stator en modélisation poutre et  $3D$ , était sujet à certains soucis techniques et numériques. Comme son utilité est limitée dans le contexte de notre travail, les cas de contact rotor-stator présentés dans ce chapitre ne présentent pas d'amortissement physique.

L'Annexe A détaille de plus le choix présenté dans ce paragraphe.

**Résolution sur base physique :** pour traiter le contact rotor-stator en modélisation  $3D$  sur le Code\_Aster et pour respecter les choix ci-dessus, la résolution des équations de la dynamique transitoire s'effectue sur un base physique.

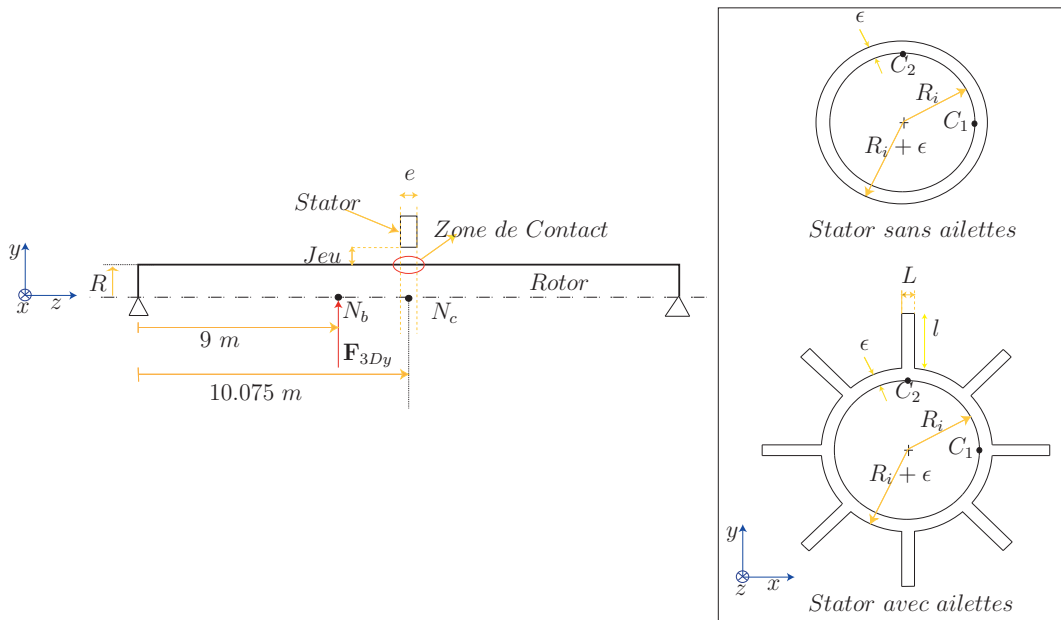
### 3.4. Contrôle de la cohérence des modèles poutre et $3D$

L'objectif de l'application industrielle est de comparer le contact rotor-stator en approche unidimensionnelle (poutre) et celui en approche tridimensionnelle. Pour que cette comparaison ait du sens et que les sources des différences entre les deux modélisations proviennent uniquement de l'approche utilisée pour décrire le contact,



il faut veiller à ce que les autres sources potentielles de différences entre les deux modèles aient une influence négligeable. Les différences de comportement peuvent provenir de la différence de modélisation du rotor, celle du stator, des schémas en temps, etc. On montre par la suite en analysant les réponses des deux modèles dans des situations sans contact que les modélisations 1D et 3D du rotor et du stator sont cohérentes et ne présentent pas des écarts de comportement significatifs.

On traite par la suite plusieurs cas de contact entre un rotor et un stator. Les dimensions du rotor et du stator sont inspirées des dimensions d'un Groupe Turbo-Alternateur (GTA) du parc nucléaire d'EDF et qui a été présente dans le Chapitre 1. Le balourd est dû à un arrachement d'une ailette terminale qui génère une force localisée causant la vibration du rotor. Le balourd est pris en considération à travers une force localisée en un nœud du rotor et de valeur adéquate. La non modélisation du disque permet d'alléger significativement la taille du rotor, surtout en modélisation 3D, qui est onéreuse en temps CPU comme on le verra par la suite.



**Figure 3.16.:** Dimensions des rotors et des stators sous étude

La Fig. 3.16 montre les dimensions du rotor et des stators utilisés dans les exemples de contact rotor-stator. A gauche on présente la partie supérieure de la coupe du rotor (coupe qui passe par l'axe de révolution). Ce dernier est d'une longueur totale de  $20.15\text{ m}$  et de rayon  $R = 1.075\text{ m}$ . On rappelle que certaines données confidentielles ne sont pas explicitées.

Le diaphragme d'une GTA est présenté par la Fig. 3.1. Il comporte un certain nombre ailettes entre une couronne intérieure avec laquelle le rotor est susceptible d'entrer en contact et une couronne extérieure fixée au bâti et qui est considérée comme encastree. C'est pourquoi dans le reste de la thèse, en vue de simplifier le modèle, et comme d'ailleurs fait dans la thèse de Roques [2], on ne modélise pas la couronne extérieure et on se contente d'encastree les bouts des ailettes.

Par la suite, on considère deux modèles du stator et qui sont présentés sur la Fig. 3.16 à droite. En effet, il s'avère compliqué d'analyser les résultats d'un contact

rotor-stator, si le stator est un modélisé avec ses ailettes. Il est plus simple dans un premier temps de considérer un contact entre un rotor et un stator composé d'une simple couronne et qui est encastrée<sup>4</sup>. Cela permet de contrôler, entre autres, les interpénétrations tolérées par l'algorithme de contact. Cependant, pour une modélisation plus réaliste du contact rotor-stator, on propose également un modèle de stator suspendus par des ailettes. Mais en vue de réduire la taille du modèle et de se concentrer sur l'objectif principal qui est l'apport d'une modélisation 3D du contact rotor-stator, on choisi de simplifier la modélisation du diaphragme du GTA en question et de la présenter avec 8 ailettes. Cela correspond à notre deuxième modèle de stator.

La couronne est de rayon interne  $R_i = 1.083 \text{ m}$ . L'épaisseur du stator est  $\epsilon = 0.207 \text{ m}$ . La couronne est de longueur (selon l'axe  $z$  de la Fig. 3.16)  $e = 0.15 \text{ m}$ . Les ailettes possèdent la même longueur dans la direction de l'axe  $z$  que la couronne. Elles sont longues de  $l = 0.755 \text{ m}$  et de largeur  $L = 0.038 \text{ m}$ . Le centre de gravité du stator est situé sur l'axe de rotation du rotor (face au point  $N_c$ ). Le rotor est bi-appuyé des deux côtés et est soumis au point  $N_b$  à un balourd équivalent à une perte d'une masse de  $100 \text{ kg}$  à une distance de  $2.75 \text{ m}$  de l'axe de rotation tournant à  $1500 \text{ tr/min}$  (ce qui génère une force de  $6.8 \times 10^6 \text{ N}$  qui tourne avec le rotor, et dont on présente la composante selon  $y$  sur la Fig. 3.16).

On montre par la suite les tests et les conclusions permettant d'avoir une cohérence entre les modèles poutre et 3D du rotor et du stator.

### 3.4.1. Au niveau de la modélisation du rotor

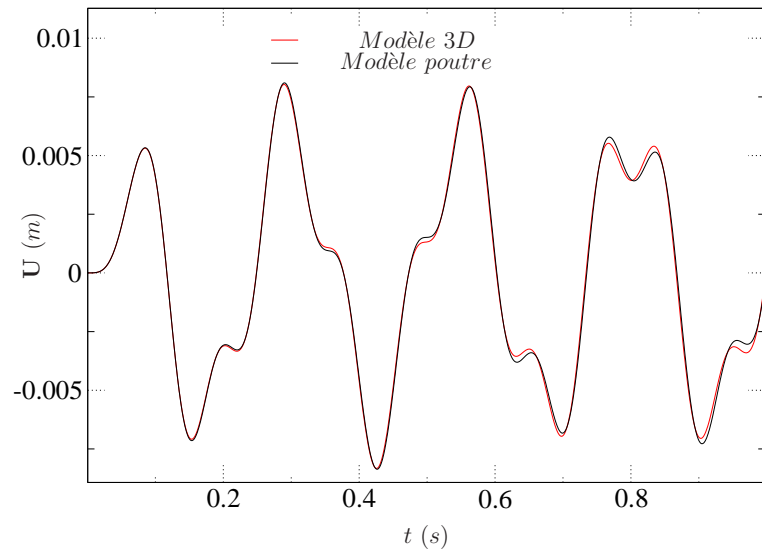
La modélisation poutre du rotor est d'autant plus proche de la modélisation 3D que l'élanement du rotor est important. On modélise par la suite le rotor 3D par des éléments quadratiques et on veille à ce que les modélisations poutre et 3D se ressemblent en terme de comportement. Comme la détection du contact dépend du jeu rotor-stator, il est par la suite très important que les déplacements des rotors poutre et 3D soient proches pour que l'instant et l'intensité du choc soient semblables pour les deux types de modélisation. Le frottement dépend de la vitesse de contact et de rotation du rotor, il est alors nécessaire d'avoir une cohérence des vitesses de la modélisation poutre et 3D du rotor.

On contrôle donc les déplacements d'un noeud situé sur la fibre neutre du rotor à l'endroit du contact et qui est noté  $N_c$  dans la Fig. 3.16.

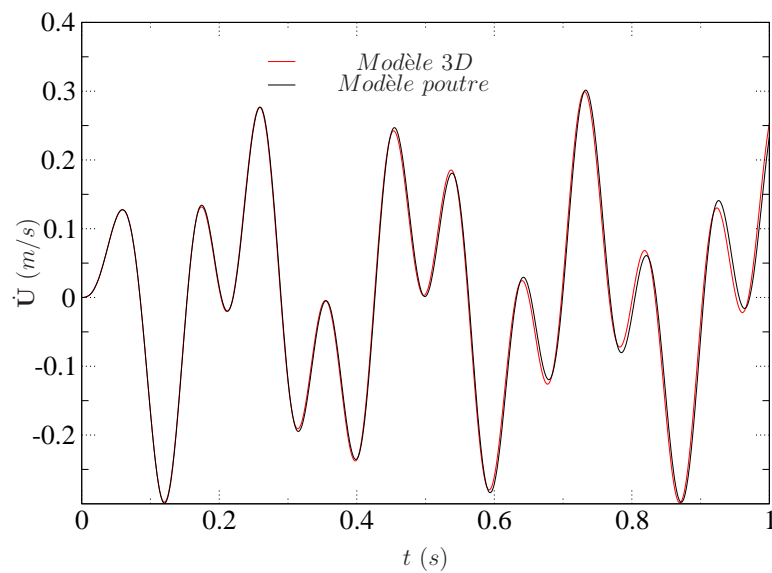
La Fig. 3.17 montre une comparaison en vitesses et déplacements du noeud  $N_c$  appartenant à la fibre neutre du rotor et qui, pour l'application industrielle avec contact rotor-stator, est situé dans la zone de contact. Cette comparaison est effectuée selon l'axe des  $x$ , mais une comparaison analogue est tirée dans la direction  $y$  et également sur d'autres points appartenant au rotor. Il est évident que très peu de différence existe entre les deux comportements des rotors poutre et 3D. Cet écart négligeable est obtenu grâce à un élanement assez important du rotor. Il n'est

---

4. Dans la thèse de Roques [2], on trouve cette même démarche qui consiste à modéliser le stator tout d'abord par un corps rigide encastré, puis par un corps rigide suspendu avant de passer à un modèle plus élaboré d'une couronne munie d'ailettes comme présenté dans la Fig. 3.2.



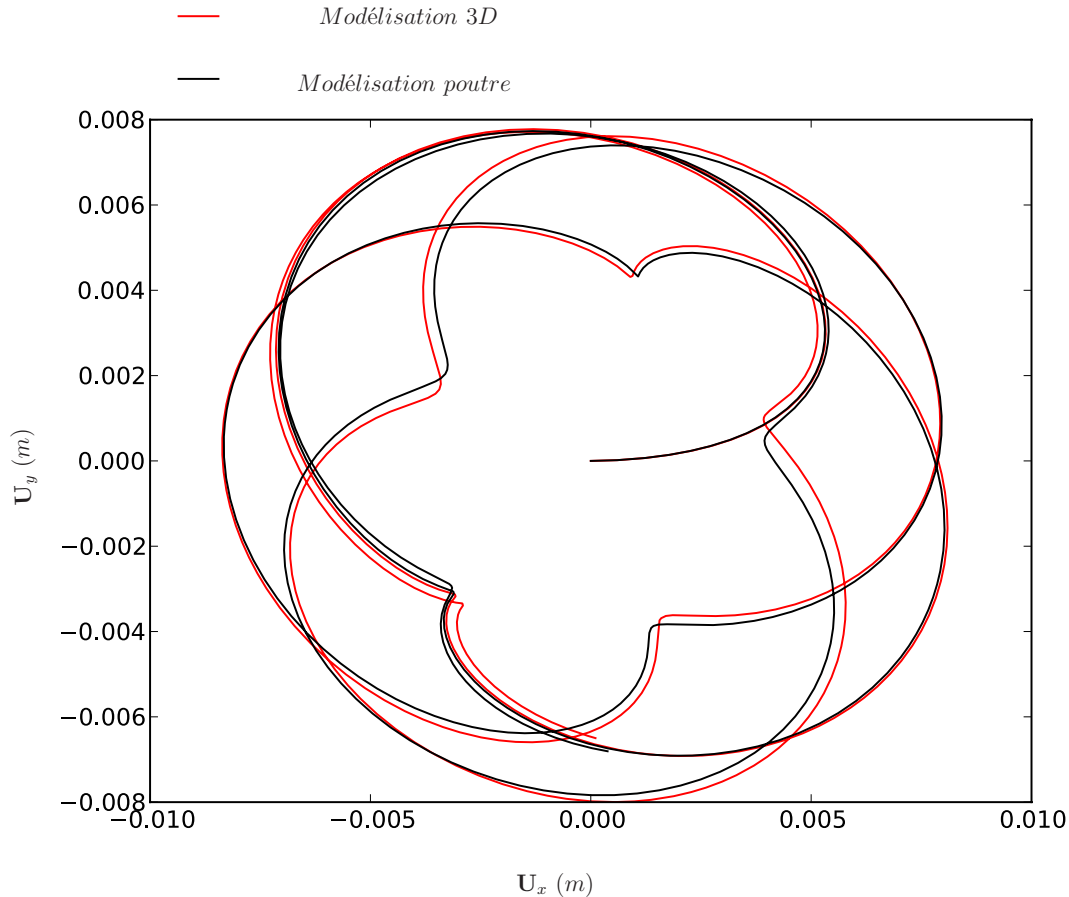
(a) Déplacements selon  $x$  du noeud  $N_f$  du rotor



(b) Vitesses selon  $x$  du noeud  $N_f$  du rotor

Figure 3.17.: Comparaison du comportement des stators 1D et 3D

pas négligeable si l'élanement du rotor passe de 20 à 10. Pour notre cas, avec un élanement de 20, l'écart est négligeable et est également visible sur la Fig. 3.17 qui représente les orbites décrites par le point  $N_c$  dans le plan  $(x, y)$ . Il est implicitement sous-entendu que les résultats présentés dans ce paragraphe, et notamment ceux des Fig. 3.17 et Fig. 3.18, correspondent à des réponses du rotor à un chargement donné sans contact rotor-stator.



**Figure 3.18.:** Orbites décrites par le noeud  $N_c$  du rotor

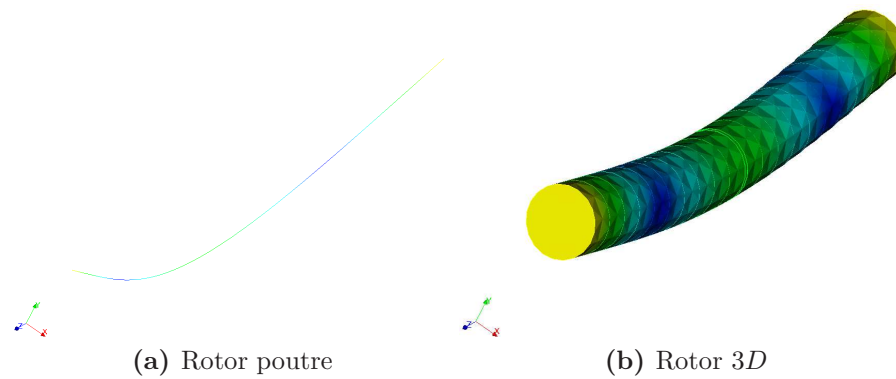
Le Tab. 3.1 montre une comparaison des onze premières fréquences propres du rotor en modélisation poutre et 3D ainsi que les références aux figures présentant les différents modes. Ces dernières mettent en évidence la similitude entre le comportement poutre et 3D. La différence entre les fréquences propres est quasi-négligeable mais inévitable. Elle croît légèrement sur les hauts modes.

Les dimensions et les maillages des rotors poutre et 3D garantissent comme présenté dans ce paragraphe une cohérence de comportement entre les deux modélisations poutre et 3D du rotor et éliminent la différence de modélisation comme source de différence de comportements en cas de contact traité en modélisation poutre ou bien 3D.

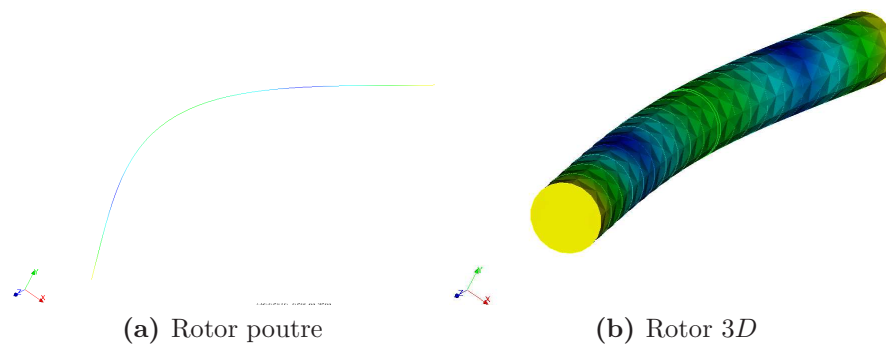
Il faut également noter que la finesse des maillages poutre et 3D, mais surtout celle du modèle 3D est suffisante de façon à réduire l'écart avec le modèle poutre, tout

N°	Fréquence (Hz)		Illustration	
	Rotor poutre	Rotor 3D	Nature du Mode	Figure Associée
1	23.77	23.75	Flexion	Fig. 3.19
2	23.77	23.75	Flexion	Fig. 3.20
3	62.48	62.29	Flexion	Fig. 3.21
4	62.48	62.29	Flexion	Fig. 3.22
5	79.85	79.87	Torsion	Fig. 3.23
6	115.33	114.69	Flexion	Fig. 3.24
7	115.34	114.69	Flexion	Fig. 3.25
8	128.68	128.79	Compression	Fig. 3.26
9	159.71	159.86	Torsion	Fig. 3.27
10	178.01	176.66	Flexion	Fig. 3.28
11	178.1	176.66	Flexion	Fig. 3.29

**Table 3.1.:** Comparaison des fréquences propres des rotors en poutre et 3D



**Figure 3.19.:** Premier mode propre du rotor



**Figure 3.20.:** Deuxième mode propre du rotor

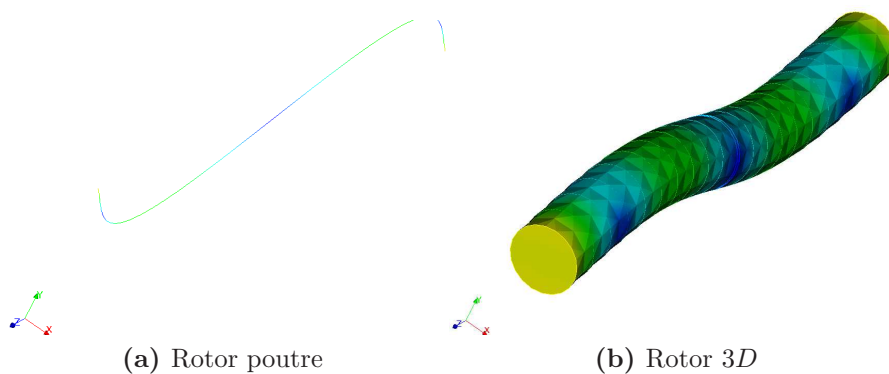


Figure 3.21.: Troisième mode propre du rotor

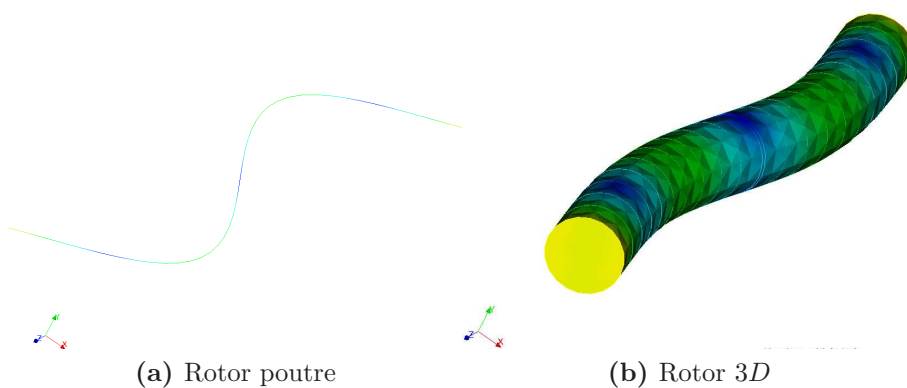


Figure 3.22.: Quatrième mode propre du rotor

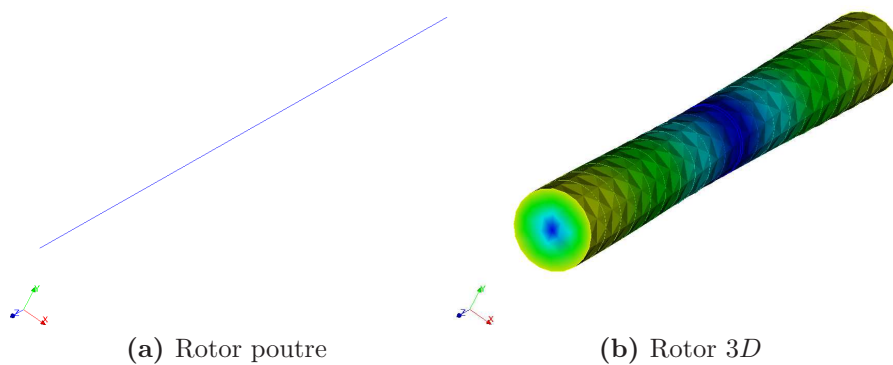
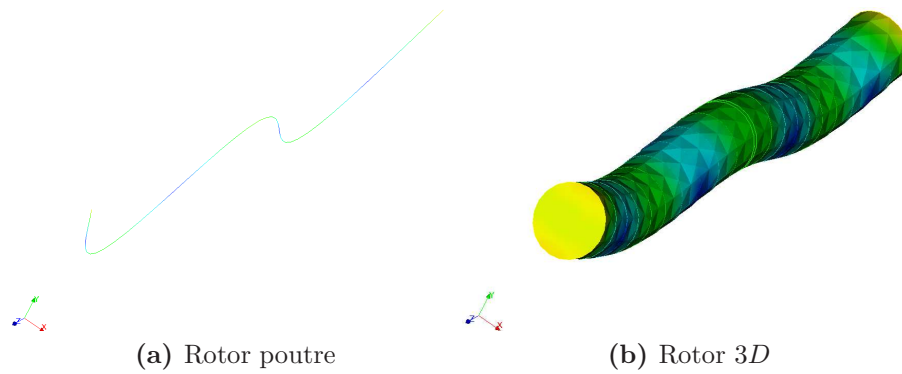
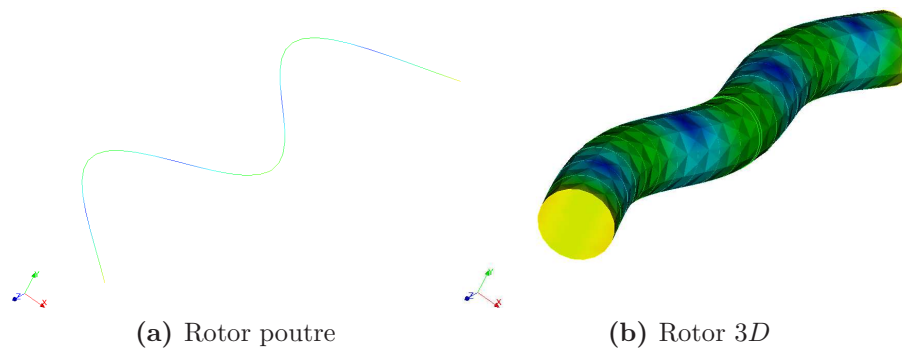


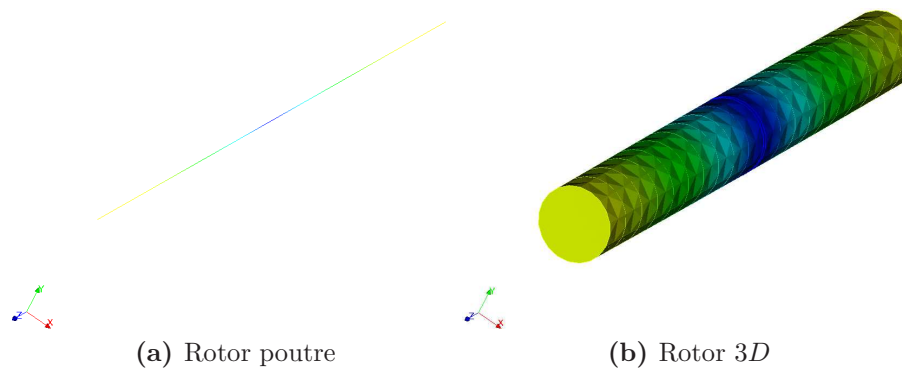
Figure 3.23.: Cinquième mode propre du rotor



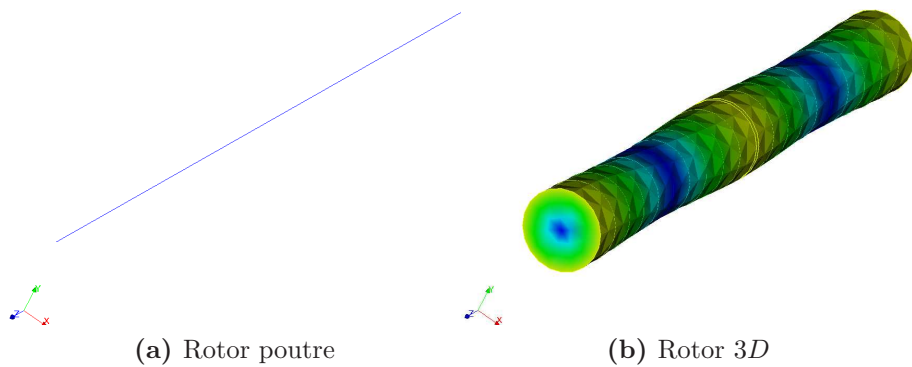
**Figure 3.24.:** Sixième mode propre du rotor



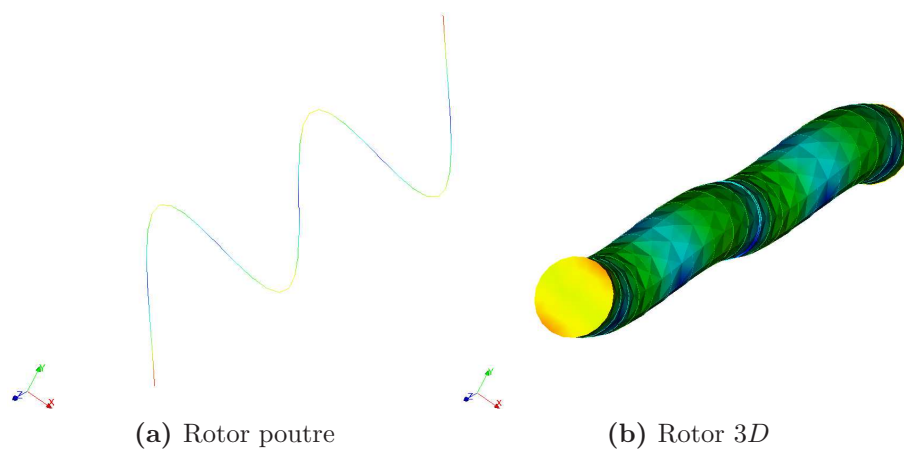
**Figure 3.25.:** Septième mode propre du rotor



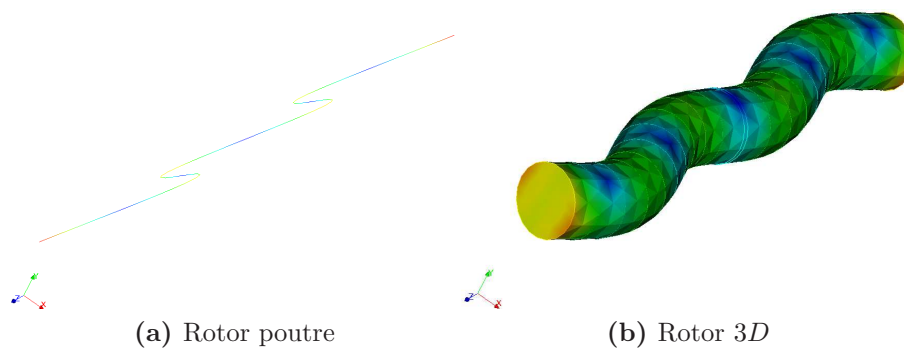
**Figure 3.26.:** Huitième mode propre du rotor



**Figure 3.27.:** Neuvième mode propre du rotor



**Figure 3.28.:** Dixième mode propre du rotor



**Figure 3.29.:** Onzième mode propre du rotor



en veillant à ne pas trop augmenter la taille du modèle. Le rotor 3D adopté est maillé avec des éléments quadratiques et compte 1400 nœuds (voir la Fig. 3.41). Ce même modèle sera utilisé dans les applications de contact présentés plus tard dans ce chapitre. Un maillage plus raffiné (des tests ont été effectués sur des maillages quadratiques de 2000, 3000 et 4000 nœuds) ne contribue pas à une meilleure similitude avec la modélisation poutre.

#### 3.4.2. Au niveau de la modélisation du stator

Si un élanement important de la structure du rotor et un maillage quadratique de finesse suffisante permettent d'obtenir un comportement des rotors poutre et 3D proches, l'obtention d'une cohérence des comportements des stators poutre et 3D n'est pas aussi évidente.

Tout d'abord, il faut noter que même en absence d'ailettes, la cohérence de la modélisation 3D et poutre de la couronne n'est pas évidente. En effet, une modélisation par des éléments poutres courbes et une modélisation 3D avec des éléments quadratiques et pour différentes finesses de maillages de la couronne présentée dans la Fig. 3.16 a montré une différence de fréquences propres pouvant aller jusqu'à 10% même sur les fréquences les plus basses. Une même excitation des couronnes poutre et 3D se traduit alors par des différences de déplacements, vitesses et accélérations non négligeables. La finesse du maillage 3D joue un rôle, mais ne permettra jamais d'atteindre un comportement cohérent des deux modélisations. Cela est dû majoritairement aux différences dans les fonctions de formes. Un élanement important de la couronne réduit cet écart, mais alors on s'éloigne des caractéristiques des couronnes rencontrées dans les applications industrielles.

Même si on suppose qu'il est possible de modéliser une couronne avec des éléments poutre avec un comportement très proche de celle modélisée avec des éléments 3D quadratiques, plusieurs difficultés de modélisation d'un stator suspendu avec ailettes subsistent et sont liés à la façon de modéliser le stator poutre.

La première possibilité de modélisation des stators poutre et 3D est décrite par la Fig. 3.30. Les ailettes poutre et 3D possèdent le même point d'encastrement en périphérie. La couronne poutre a ses nœuds sur la fibre neutre, ce qui conduit à des ailettes poutre plus longues que celles du modèle 3D. En effet, si  $l$  est la longueur d'une ailette 3D et  $\epsilon$  est l'épaisseur moyenne de la couronne, l'ailette poutre sera de longueur  $l + \frac{\epsilon}{2}$ . Au niveau des connexions entre les éléments poutres constituant la couronne et celles constituant les ailettes, un recouvrement de matière a lieu et est inévitable<sup>5</sup>. Cette modélisation ne peut pas garantir une cohérence de comportements entre le stator 3D et poutre.

La Fig. 3.31 présente un maillage poutre et un autre 3D selon les hypothèses de la Fig. 3.30 et pour les dimensions de la Fig. 3.16. Ces maillages seront utilisés dans ce paragraphe pour effectuer des comparaisons des comportements des stators. On note cependant, que changer la finesse du maillage ne conduit pas à des conclusions différentes sur les différences de comportements des stators poutre et 3D.

---

5. Pour éviter le recouvrement de matière, une approche détaillée dans l'Annexe C a été consi-

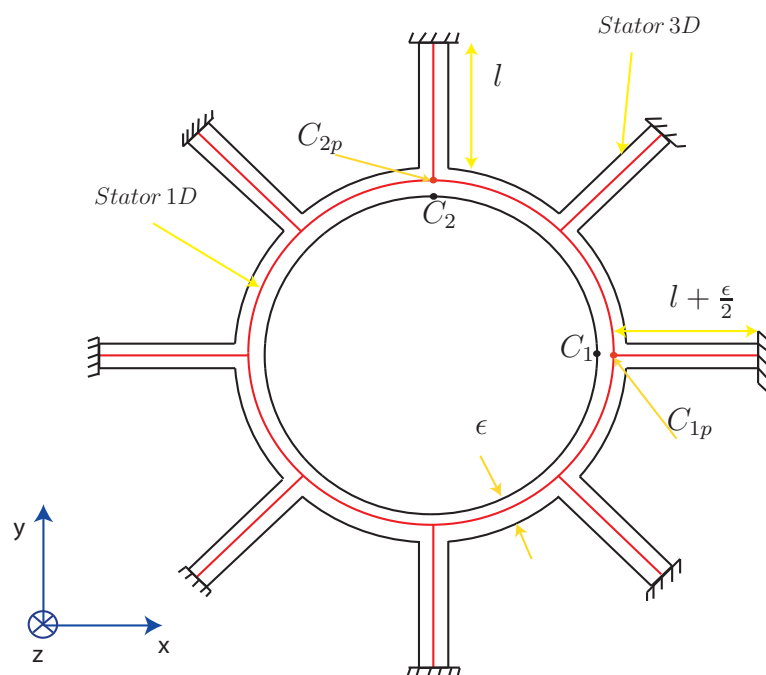


Figure 3.30.: Premier modèle possible de stator 1D

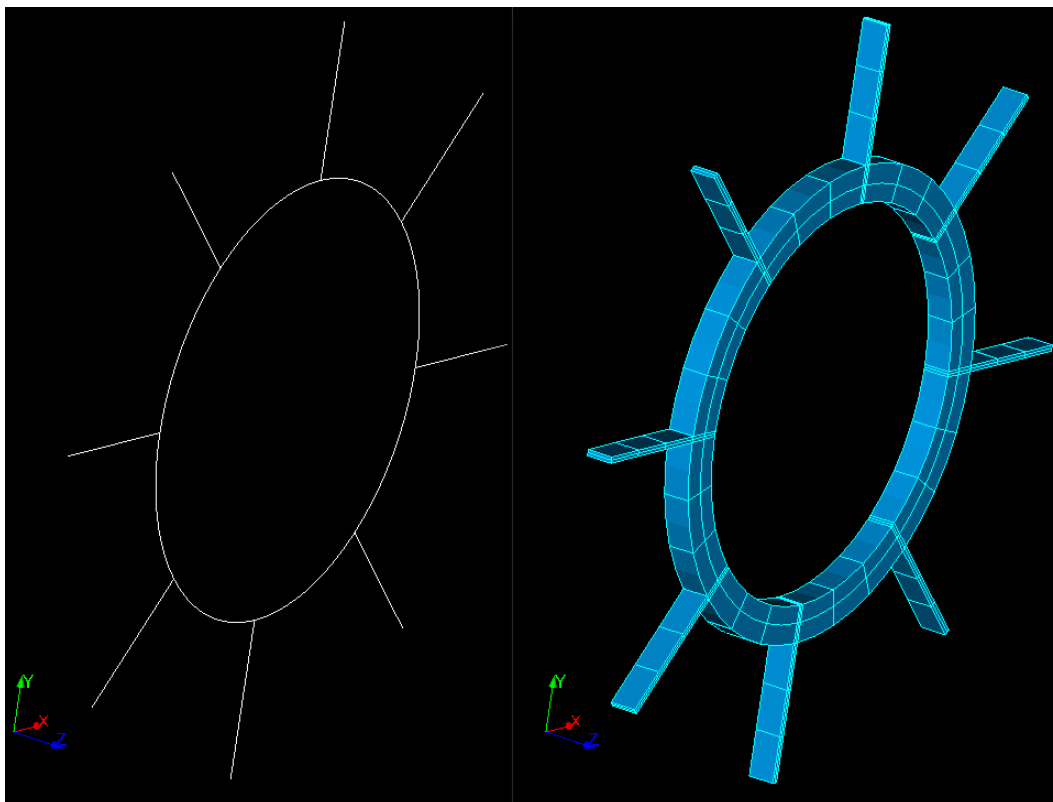
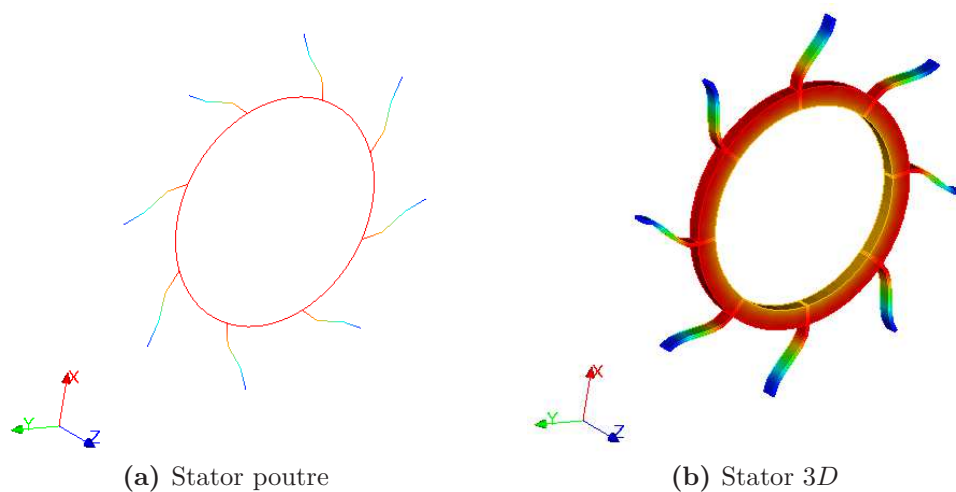


Figure 3.31.: Modèles poutre (à gauche) et 3D (à droite) du stator de la Fig. 3.30

N°	Fréquences (Hz)		Figures Associées respectivement	Erreur en %
	Stator poutre	Stator 3D		
1	1.91	2.61	Fig. 3.32	36.65
2	4.67	5.13	Fig. 3.33	9.85
3-4	6.69	7.7	Fig. 3.34 et Fig. 3.35	15
5-6	10.71	12.13	Fig. 3.36 et Fig. 3.37	13.25
7-8	20.22	21.4	x	5.83
9-10	22.35	25.12	x	12.4
11-12	31.21	33.33	x	6.8

**Table 3.2.:** Comparaison des fréquences propres des stators poutre et 3D de la modélisation illustrée par la Fig. 3.30.



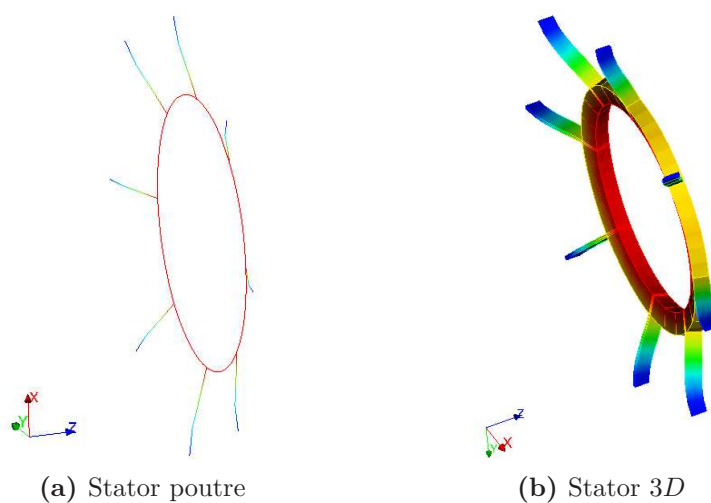
**Figure 3.32.:** Premier mode propre du stator

Les modélisations poutres et 3D du stator de la Fig. 3.30, et pour les dimensions présentées dans la Fig. 3.16, présentent un écart en fréquences propres.

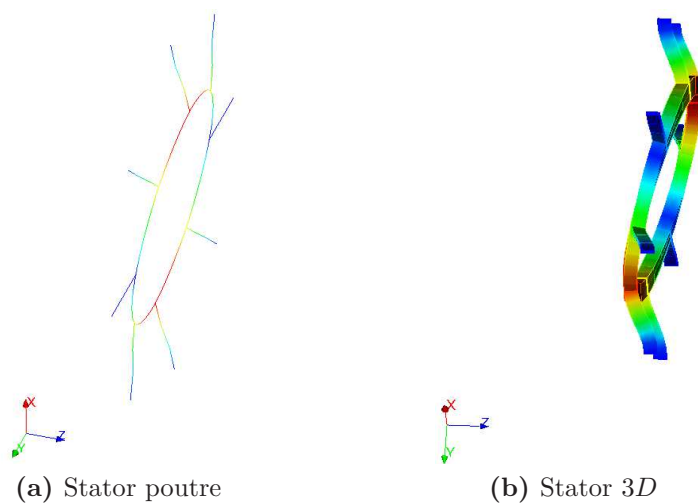
Les douze premières fréquences propres sont présentées dans le Tab. 3.2 et les six premiers modes propres sont illustrés dans les Fig. 3.32 à 3.37.

L'examen des premiers modes propres montre un écart important entre les modélisations poutre et 3D du stator surtout au niveau de la première fréquence propre. Cet écart est moins prononcé sur les autres modes. Les hauts modes présentent des écarts supérieurs à 5%. Le premier mode, présenté par la Fig. 3.32 est un mode de rotation du stator autour de lui-même. Il est extrêmement important car ce mode est excité par le frottement rotor-stator en cas de traitement d'un problème de contact rotor-stator. L'écart de 36.65 % entre les fréquences propres des stators poutre et 3D liées à ce mode n'est donc pas acceptable. Des différences de comportement en cas de contact rotor-stator en modélisations poutre et 3D seront dues à cet écart, i.e., l'excitation du point  $C_1$  du stator ne donne pas le même comportement que le point  $C_{1p}$  du stator poutre selon la direction tangente au stator. De ce fait, et comme le contact rotor-stator produit une force normale et une autre

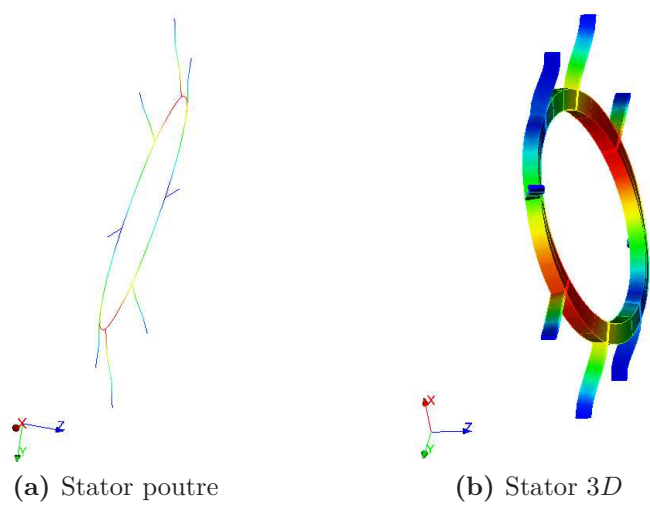
dérivée. Elle s'est avérée non intéressante et a été abandonnée.



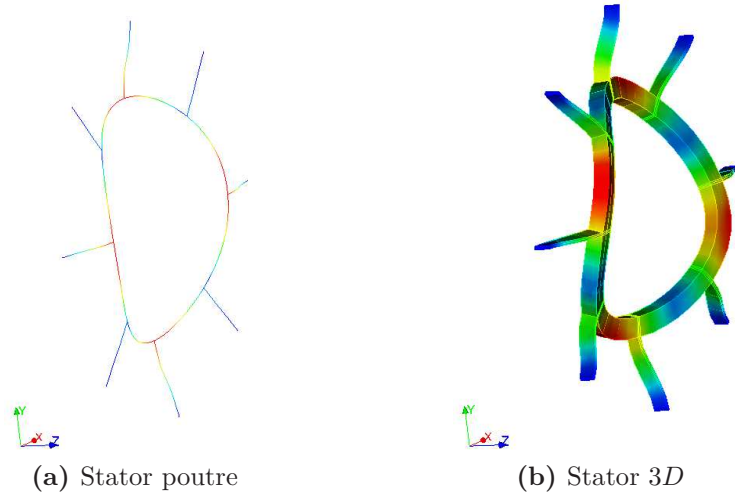
**Figure 3.33.:** Deuxième mode propre du stator



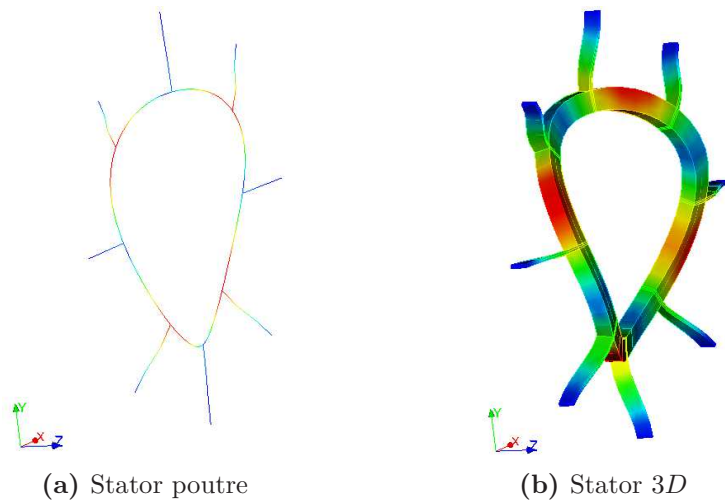
**Figure 3.34.:** Troisième mode propre du stator



**Figure 3.35.:** Quatrième mode propre du stator



**Figure 3.36.:** Cinquième mode propre du stator



**Figure 3.37.:** Sixième mode propre du stator

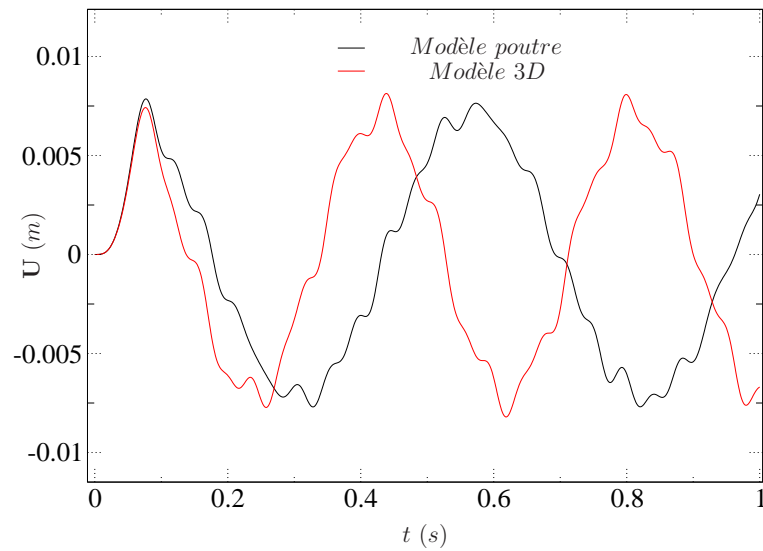
tangente qui excitent le stator, alors même si ces forces calculées par la modélisation poutre du contact et par celle  $3D$  sont identiques elles provoquent au niveau du stator un comportement différent. Cette différence de comportement va à son tour créer d'autres différences au niveau du contact rotor-stator. Les instants de contact, l'intensité du contact, etc. changeront et les deux modélisations auront des différences très prononcées. Cela ne sera pas dû à une différence de traitement du contact mais plutôt aux différences de comportement des stators.

En effet, si on applique en  $C_2$  une force sinusoïdale ayant une composante selon  $x$  et une autre selon  $y$ , les comportements des stators poutre et  $3D$  sont quasi-identiques dans la direction  $y$  et présentent des écarts assez prononcés dans la direction  $x$  comme le montre la Fig. 3.38.

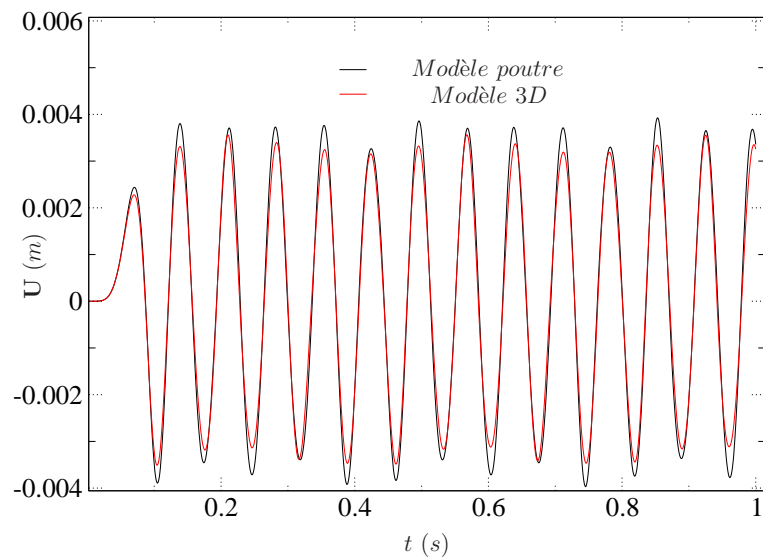
On remarque qu'à  $t = 0.6$  s, la différence de comportement des deux stators (constatée à partir de l'analyse de la Fig. 3.38) est prononcée à  $t = 0.6$  (s). Pour étendre les conclusions tirées sur la Fig. 3.38 sur d'autres points appartenant au stator, la Fig. 3.39 montre les déformées amplifiées des stators poutre et  $3D$  à  $t = 0.6$  (s). On remarque une différence de comportement importante, surtout au niveau de la rotation du stator autour de son axe principal. Les deux stators ne sont pas donc cohérents.

C'est pourquoi cette modélisation du stator poutre n'est pas convenable pour une bonne comparaison d'un contact rotor-stator en modélisation poutre et en modélisation  $3D$ . On essaye dans l'Annexe B d'apporter des modifications à la modélisation du stator poutre pour qu'il soit le plus cohérent possible avec la modélisation  $3D$ . Deux autres possibilités ont été étudiées, mais comme cela est montré dans l'Annexe C, il n'a pas été possible de réduire suffisamment l'écart entre les modèles  $1D$  et  $3D$  du stator. Cela est dû à un élanement insuffisant de la couronne, mais aussi aux approximations induites par le raccord au niveau des ailettes dans le modèle poutre.

Par conséquent, par la suite, on va distinguer deux modèles de rotor-stator, mais avec dans les deux cas le même modèle  $3D$  de stator. La distinction se fera sur la modélisation du rotor, qui sera  $1D$  ou  $3D$ . En d'autres termes, on propose par la suite de comparer deux modèles pour le contact rotor-stator : un premier modèle où le rotor et le stator sont modélisés en  $3D$  et on le nomme modèle  $3D$ , et un deuxième modèle avec un rotor  $1D$  et le même stator  $3D$  que le premier modèle, puisque l'étude menée ici a montré qu'il n'était pas possible d'avoir un modèle  $1D$  du stator proche du modèle  $3D$  et ce modèle sera appelé modèle  $1D$ . Pour mettre en œuvre pratiquement le deuxième modèle, pour chaque série de nœuds ayant la même abscisse selon  $z$  et appartenant à la surface du stator qui est susceptible de contact avec le rotor, est choisi un nœud du rotor ayant la même abscisse  $z$  et susceptible d'entrer en contact avec ces nœuds. La Fig. 3.40 montre trois nœuds du rotor face à trois séries de nœuds du stator qui est maillé en  $3D$ . Le contact est géré à travers la loi de choc présentée dans le §3.2.5 (les nœuds du stator sont dotés de disques de rayon zéro). En modélisation  $3D$ , la surface de contact appartenant au rotor s'étend sur trois sections de ce dernier. Elle est face à une surface de contact appartenant au stator et qui s'étend sur trois sections également. Pour garder une cohérence entre les modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact rotor-stator, on prend pour la modélisation  $1D$ , trois nœuds appartenant au rotor poutre, situés aux mêmes

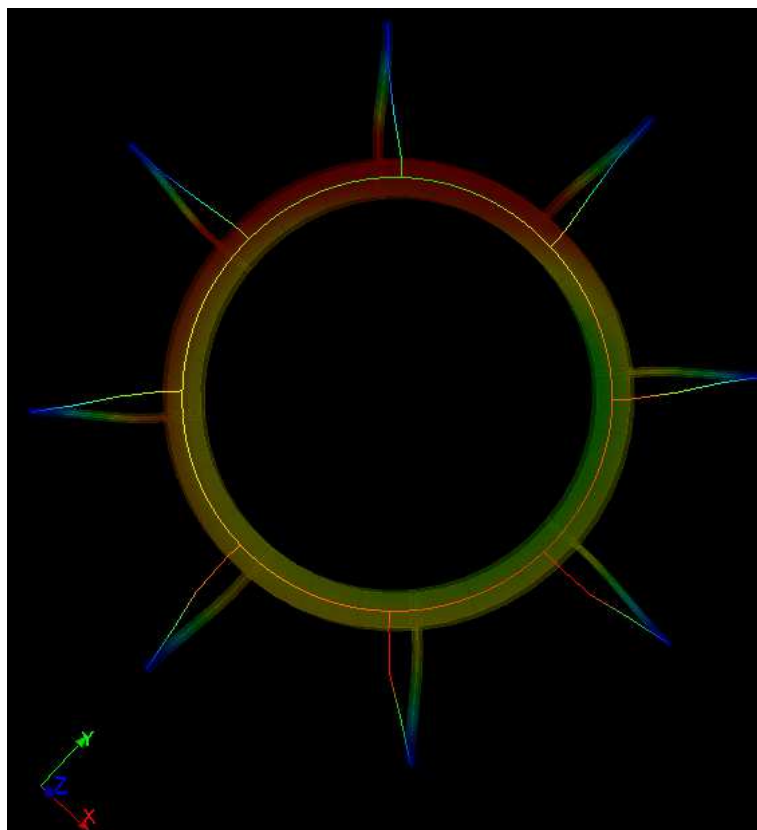


(a) Déplacements selon  $x$  de  $C_2$



(b) Déplacements selon  $y$  de  $C_2$

Figure 3.38.: Comparaison du comportement des stators 1D et 3D le la Fig. 3.30



**Figure 3.39.:** Déformées amplifiées de 10 des stators  $3D$  et poutre à  $t = 0.6 s$

endroits que les sections du rotor  $3D$  de la zone de contact. Pour chaque nœud du rotor, on définit une série de nœuds appartenant au stator et qui sont face à ce nœud.

D'autres possibilités de modélisation ont également été étudiées. Comme l'objectif est de bien prendre en compte le contact rotor-stator par des éléments quadratiques, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage  $3D$  des ailettes qui alourdit la taille du modèle. Une simple modélisation poutre pourrait suffire. Les ailettes en modélisations poutres seront liées au stator  $3D$  par le raccord poutre- $3D$  décrit dans le §2.9. Cependant, l'utilisation d'un tel raccord pour la modélisation d'une couronne  $3D$  connectée à des ailettes poutre alourdi le maillage de la couronne significativement, et par la suite le gain en degrés de liberté dû à une présentation poutre des ailettes sera perdu. Cette possibilité a, par la suite, été abandonnée.

Une autre possibilité est celle d'une couronne  $3D$  suspendue par des éléments discrets de ressort. Cela permet d'alléger le maillage et accélérer le calcul, mais ne permet pas une prise en compte assez rigoureuse du comportement du stator, surtout si les ailettes se déforment considérablement. On a choisi alors de mailler le stator entièrement avec des éléments  $3D$  quadratiques.



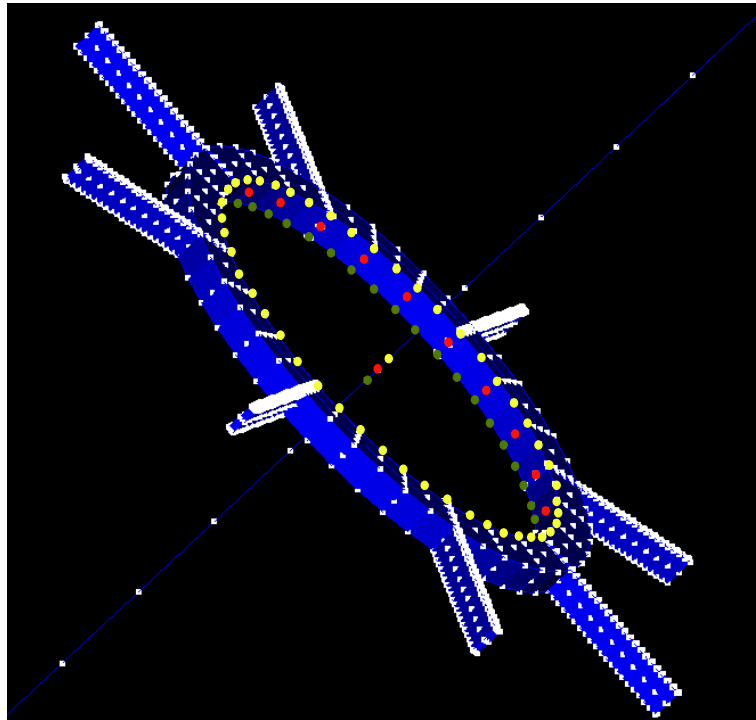


Figure 3.40.: Traitement du contact en modélisation poutre avec un stator 3D

#### 3.4.3. Au niveau du traitement du contact

Il est nécessaire que la comparaison fasse seulement ressortir les différences entre les modèles, qui se manifestent sur les cinématiques prises en compte lors du contact (section du rotor rigide en 1D et déformable en 3D). Ainsi les résultats des modèles ne doivent pas être affectés par les paramètres numériques liés à l'étude tels les coefficients de raideur utilisés dans le cadre de la méthode de pénalité.

Comme le contact en modélisation poutre et en modélisation 3D est traité par une méthode de pénalité, et comme la force de contact est une fonction de la raideur de pénalité normale et celle de frottement fonction de la raideur de pénalité tangente, et dans l'objectif d'avoir une évaluation équivalente de la sévérité du contact en modélisation poutre et 3D, les mêmes coefficients de raideurs de pénalité seront utilisés dans les modélisations poutre et 3D.

#### 3.4.4. Critères de comparaison

Si les modélisations des rotors et des stators en 3D et en poutre sont cohérentes et garantissent que les différences de comportement en contact ne proviennent pas de la modélisation du rotor ou du stator mais plutôt du traitement du contact, alors la question qui se pose c'est : quels sont les critères de comparaison ? On rappelle que les calculs sont réalisés à vitesse de rotation constante, ce qui ne permet pas d'étudier le ralentissement en termes d'évolution de cette vitesse. En revanche on pourrait indirectement analyser le ralentissement en s'intéressant à la valeur du couple qui permet de respecter cette condition de vitesse constante.

En modélisation  $3D$  du contact par la méthode de pénalité on a accès aux valeurs des forces de frottement sur les nœuds de la surface esclave. Cependant, ces valeurs sont moyennées aux éléments. Il est possible d'effectuer un calcul permettant d'obtenir les forces aux nœuds en modélisation  $3D$  à partir des valeurs moyennées, mais ce calcul est complexe. Par ailleurs, en modélisation poutre, pour obtenir les forces de frottement sur les nœuds du stator, on est obligé d'effectuer des modifications dans le code pour être capable d'imprimer à chaque instant les valeurs des forces de frottement aux nœuds. Ces dernières ne sont pas moyennées autour des éléments. Par la suite, comparer le couple de frottement obtenu à travers l'analyse des forces de contact/frottement sur les modélisation  $1D$  et  $3D$  est délicat. A cela s'ajoute, le fait que ce calcul du couple s'avère très gourmand en mémoire vu qu'il s'effectue à partir d'extraction et calcul par Python de valeurs dans le Code\_Aster, que ce soit en modélisation poutre ou bien  $3D$ . L'espace mémoire de l'ordinateur est rapidement épuisé et le calcul s'arrête.

Pour ces deux raisons la comparaison du couple de frottement entre les modélisations  $1D$  et  $3D$  a été abandonnée. On peut comparer les orbites décrites par un point du rotor  $3D$  et son équivalent en modélisation poutre. On peut également examiner le comportement du stator. Cela nous permettra de conclure quand à l'apport d'une modélisation  $3D$  sur le traitement du contact rotor-stator et éventuellement sur l'apport que cela aurait pu avoir en modélisation du ralentissement.

### 3.5. Exemples d'applications

Dans un premier temps, on traite un contact entre un rotor en acier tournant à une vitesse faible ( $240 \text{ tr/min}$ ) et un stator composé d'une couronne encastrée (c'est-à-dire sans ailettes, voir la Fig. 3.16). Cela permet d'analyser d'une façon plus simple les résultats du calcul et de détecter, plus simplement, les interpénétrations étant donné que le jeu rotor-stator est de  $8 \text{ mm}$  et que l'encastrement du stator va empêcher des déplacements du rotor supérieur au jeu rotor-stator ajouté à l'écrasement du stator (qui sera négligeable pour ce cas d'étude).

On passe par la suite à un cas plus avancé où le stator est composé d'une couronne suspendue par des ailettes dont le bord est encastré. La vitesse de rotation étant toujours de  $240 \text{ tr/min}$ . Le contact rotor-stator cause une déformation des ailettes et entraîne un mouvement du stator. Et on termine par une analyse du contact rotor-stator sur ce même cas d'étude mais proche d'une vitesse critique du rotor.

Dans les trois cas d'étude, le rotor et le stator sont en acier de module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , de masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Le frottement rotor-stator suit la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.2.

On rappelle que dans les trois cas d'étude, la vitesse de rotation est imposée selon la loi décrite par l'Eq. (3.13) du §3.3.2. En d'autres termes, le rotor démarre avec une vitesse et accélérations nulles et atteint sa vitesse maximale et constante au bout d'un certain délai  $t_m$  et qui vaut  $0.01 \text{ (s)}$ . La vitesse de rotation n'est pas une variable du problème dynamique : elle reste constante pour  $t > 0.01 \text{ (s)}$ . Un

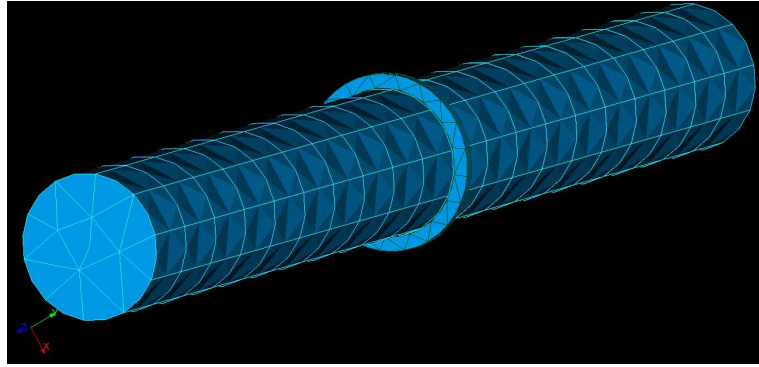


Figure 3.41.: Modèle du système rotor-stator 3D sous étude

chargement équivalent à un balourd est imposé progressivement selon la loi décrite par l'Eq. (2.170) et durant une période de 0.01 (s). Ce chargement est équivalent à un balourd constant pour  $t > 0.01$  (s).

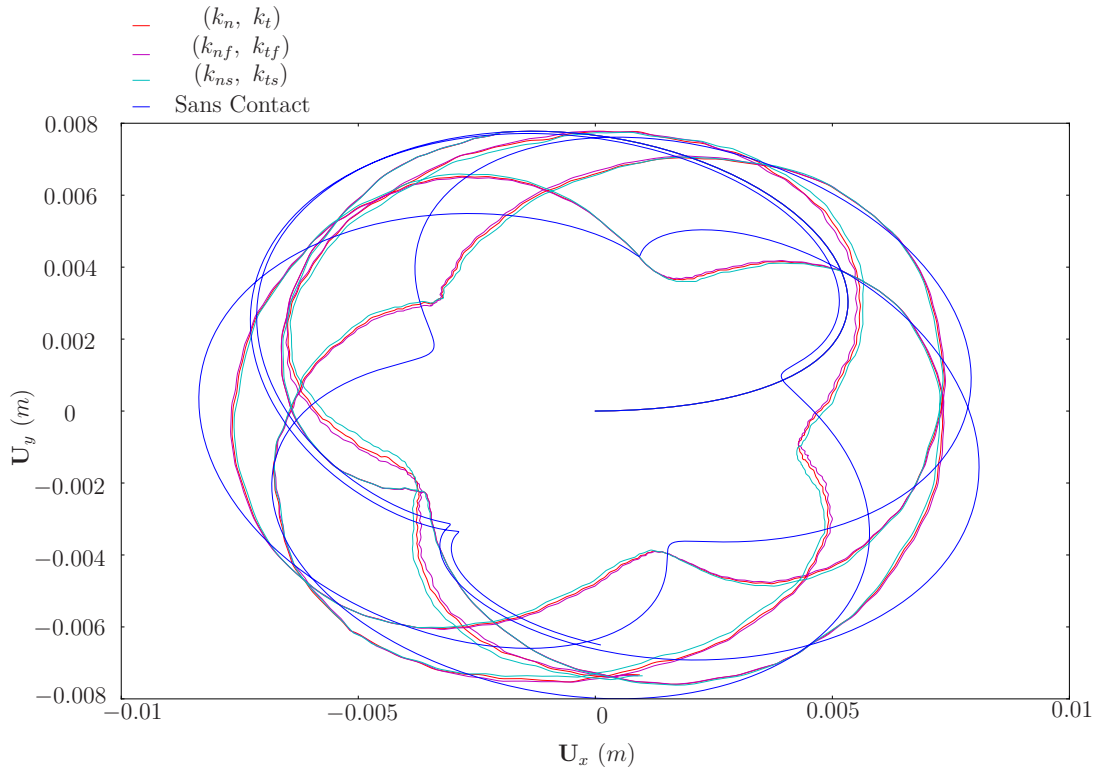
### 3.5.1. Contact d'un rotor contre un stator encastré

On considère le modèle 3D rotor-stator de la Fig. 3.41 et les dimensions de la Fig. 3.16. Dans un premier temps un contact entre un rotor et un stator sans ailettes et encastré est étudié. Le rotor 3D est maillé avec des éléments quadratiques et comporte 1400 nœuds. Le stator (qui est une simple couronne sans ailettes dans ce cas) comporte 259 nœuds et est maillé avec des éléments quadratiques également. La surface esclave appartient au stator car il est maillé plus finement et compte 136 nœuds de contact. La surface maître appartient au rotor et comporte 80 nœuds de contact. Le rotor poutre comporte 41 nœuds. A noter qu'un raffinement des maillages et notamment des surfaces de contact a alourdi significativement le calcul, alors qu'il a modifié d'une façon négligeable les résultats.

Comme une méthode de pénalité est utilisée pour résoudre le problème de contact, une étude paramétrique est menée sur les coefficients de raideur utilisés.

Par la suite on fixe des coefficients de raideur les plus élevés possibles pour limiter les interpénétrations et tels que la convergence des algorithmes de contact reste possible. Ces coefficients seront notés  $k_n$  pour la raideur normale et  $k_t$  pour celle tangentielle. Dans le cas d'étude présenté dans ce paragraphe les valeurs des paramètres de raideur retenus sont  $k_n = 10^{14}$  N/m et  $k_t = 10^9$  N/m. On traite trois cas de contact, le premier avec des coefficients de raideur qui sont  $k_{ns} = k_n/10$  et  $k_{ts} = k_t/10$ . Le deuxième sera celui effectué pour les valeurs nominales ( $k_n = 10^{14}$  N/m et  $k_t = 10^9$  N/m) et le troisième celui avec  $k_{nf} = k_n \times 10$  et  $k_{tf} = k_t \times 10$ . Si les trois calculs donnent des résultats très proches, cela permet de négliger l'influence des coefficients de raideur de pénalité sur les résultats. On effectue cela sur les modèles 1D et 3D.

La Fig. 3.42 effectue une comparaison sur le modèle 1D des orbites d'un point appartenant à la fibre neutre du rotor (le point  $N_c$ ) dans la section où se produit le contact. On remarque une sensibilité très légère des orbites aux raideurs de contact. Le problème est résolu par un schéma d'intégration en temps de Runge-Kutta.

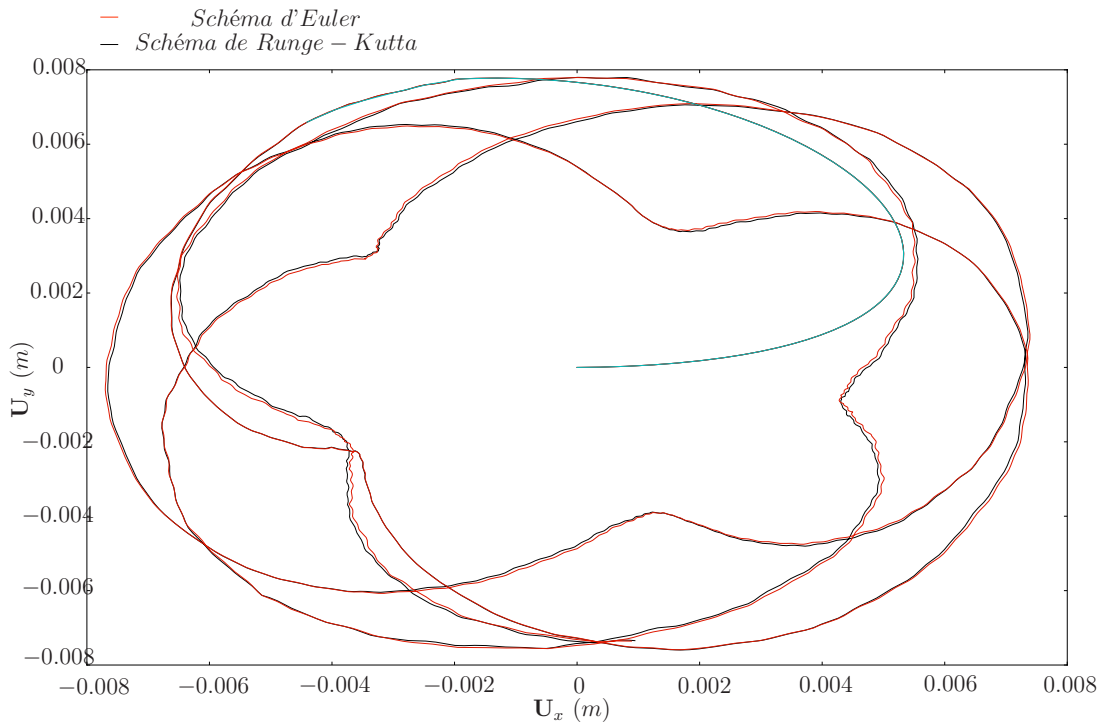


**Figure 3.42.:** Influence de la raideur de pénalité en modélisation 1D (Schéma de Runge-Kutta)

Cette faible sensibilité aux coefficients des raideurs de contact est très acceptable, ce qui permet de dire que les valeurs des raideurs de pénalités en frottement et en contact sont bons et permettent de représenter correctement la physique du contact mise en jeu. Les interpénétrations sont négligeables et ne dépassent pas dans le pire des cas les  $0.01 \text{ mm}$ . On rappelle que le jeu rotor stator est de  $8 \text{ mm}$ .

On peut également s'interroger sur l'influence du choix du schéma d'intégration en temps. C'est pourquoi on répète le même calcul et on fixe les coefficients de pénalité à  $k_n = 10^{14} \text{ N/m}$  et  $k_t = 10^{10} \text{ N/m}$ . On résout le problème 1D avec le schéma d'Euler, et le schéma de Runge-Kutta (voir la documentation du Code\_Aster).

La Fig. 3.43 montre la comparaison entre la résolution par trois schémas en temps différents du problème de contact rotor-stator en modélisation poutre. Une faible sensibilité au schéma en temps est constatée. Par contre, le schéma de Runge-Kutta permet d'avoir un pas de temps adaptatif (ce qui n'est pas le cas du schéma d'Euler implanté dans le Code\_Aster) ainsi qu'une meilleure stabilité dans le cadre du traitement du contact. Le pas de temps adaptatif du schéma de Runge-Kutta permet de gagner significativement en temps CPU. En fait, ce temps est de l'ordre de la minute dans notre cas. Il est multiplié par dix par un calcul par le schéma d'Euler. En effet, la sévérité du contact n'est pas la même tout au long de la simulation. Pour que le calcul converge à un instant donné auquel la sévérité du contact est importante, le pas de temps doit être assez faible. Si un schéma en temps à pas de temps unique est utilisé (comme le schéma d'Euler implanté dans le Code\_Aster), alors un pas de temps assez faible doit être maintenu tout au long de la simulation, bien que ce ne soit nécessaire que pendant une durée limitée du calcul. Le schéma de



**Figure 3.43.:** Influence du schéma en temps sur la résolution du contact

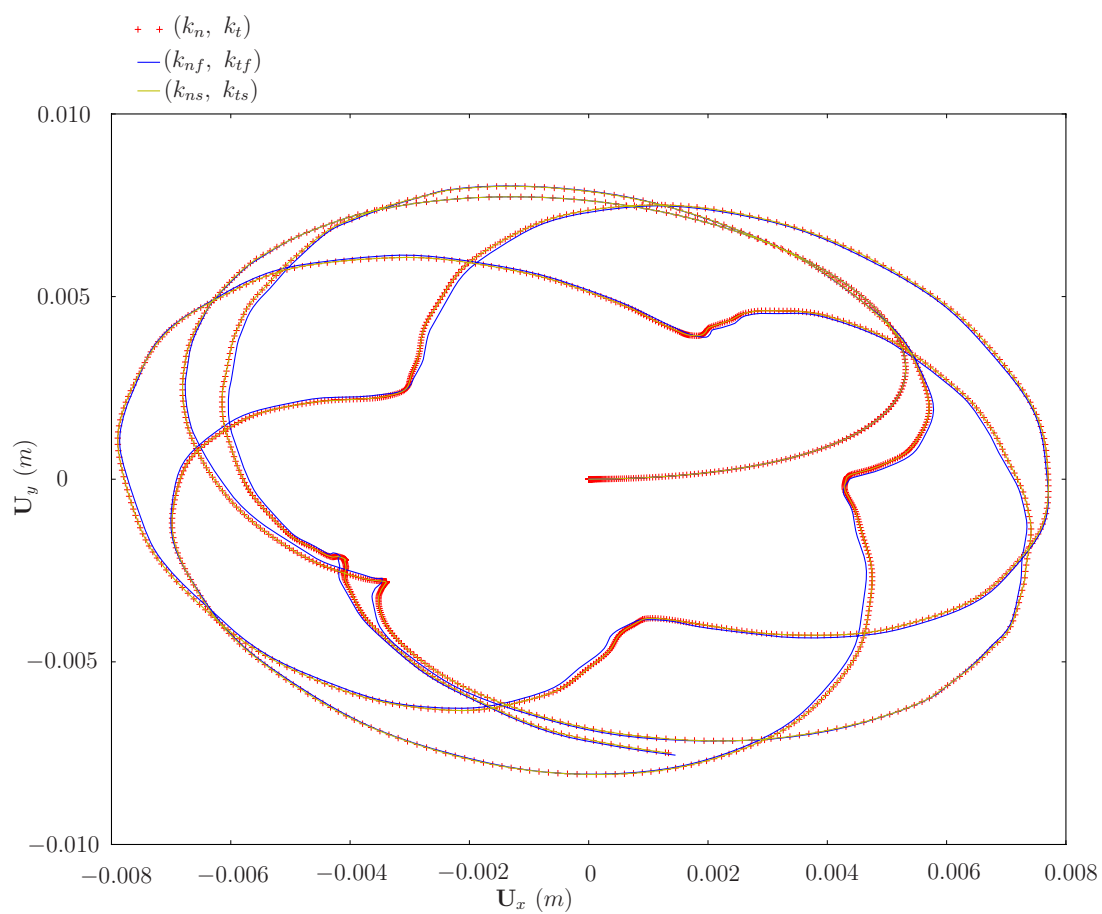
Runge-Kutta permet d'utiliser un pas de temps plus large ( $5 \times 10^{-5}$  (s) dans notre cas) et de l'adapter automatiquement selon le besoin ( $5 \times 10^{-7}$  (s) étant le pas de temps nécessaire à la convergence du schéma d'Euler.) Par contre, le désavantage de la méthode de Runge-Kutta est l'espace mémoire nécessaire. Pour le cas traité dans cet exemple, 1.5 Gb de mémoire sont suffisants pour traiter le calcul avec la méthode d'Euler (pour  $k_n = 10^{14}$  N/m et  $k_t = 10^{10}$  N/m). La capacité en mémoire doit être haussée à 8 Gb pour le calcul avec un schéma de Runge-Kutta. Pour le modèle 1D de tous les exemples suivants, le schéma de Runge-Kutta est utilisé avec un espace mémoire de 10 Gb réservé.

On effectue la simulation du même problème physique mais cette fois en modélisation 3D.

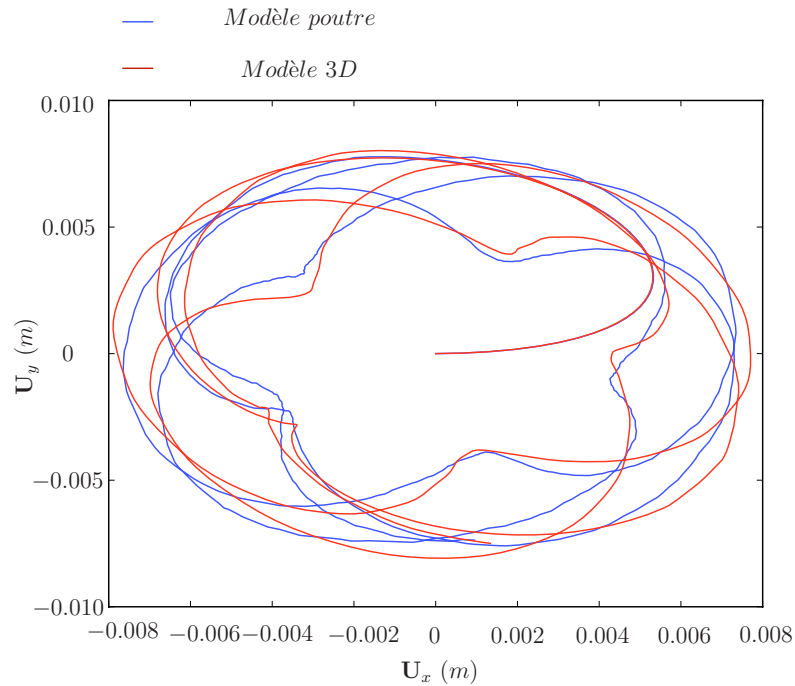
On effectue pour la modélisation 3D une analyse sur les coefficients des raideurs de pénalité comme pour la modélisation 1D précédente et pour les mêmes valeurs de raideurs de pénalité ( $k_n = 10^{14}$  N/m et  $k_t = 10^{10}$  N/m), ( $k_{nf} = 10^{15}$  N/m et  $k_{tf} = 10^{11}$  N/m) et ( $k_{ns} = 10^{13}$  N/m et  $k_{ts} = 10^9$  N/m)

Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.44, et montrent une très faible sensibilité aux raideurs de contact plus faibles encore que celles observées sur le modèle 1D. Chaque cas de contact traité nécessite plus de 30 heures de simulation sur une machine QuadCore avec 2.5 GHz de Ram et 10 GHz de mémoire et pour un pas de temps de  $5 \times 10^{-5}$  s. Une telle modélisation est donc extrêmement coûteuse en temps de calcul. On rappelle que pour les modèles 3D, l'intégration temporelle s'effectue à travers le schéma de Newmark amorti. Un pas de temps de  $5 \times 10^{-5}$  (s) est utilisé.

On effectue par la suite une comparaison entre les orbites du point  $N_c$  du modèle



**Figure 3.44.:** Influence de la raideur de pénalité en modélisation 3D



**Figure 3.45.:** Comparaison des orbites pour un contact en modélisations  $3D$  et  $1D$

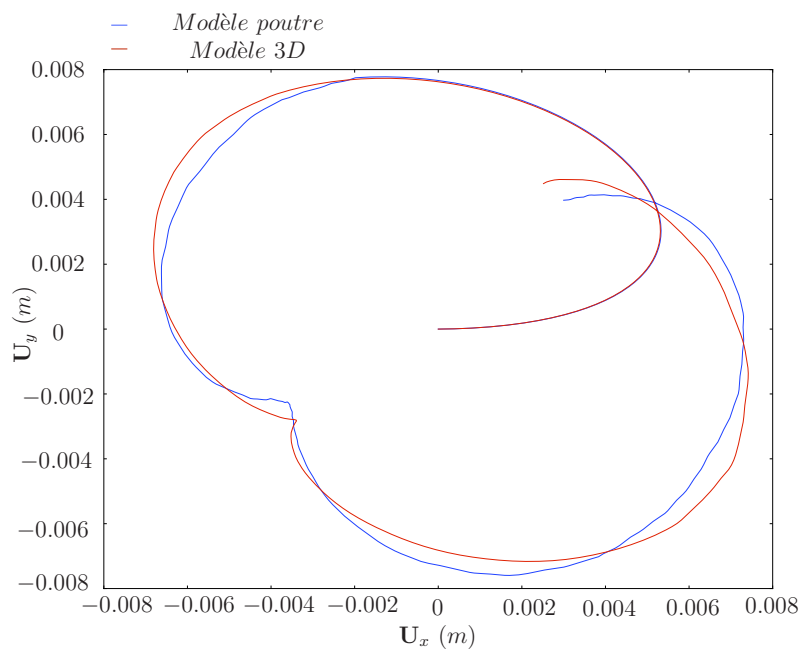
$3D$ , et celui qui lui correspond en modélisation  $1D$ .

Dans le souci d'une meilleur clarté, la Fig. 3.45 qui présente les orbites du point  $N_c$  du rotor sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 1]$  (s) sera divisée en trois figures, chacune correspondant à un tiers de l'intervalle de simulation, c'est-à-dire, la Fig. 3.46 correspond aux orbites du point  $N_c$  du rotor pour le premier intervalle de simulation ( $t \in [0, 0.33]$  (s)), la Fig. 3.47 correspond au deuxième intervalle ( $t \in [0.33, 0.66]$  s) et la Fig. 3.48 au troisième ( $t \in [0.66, 1]$  s).

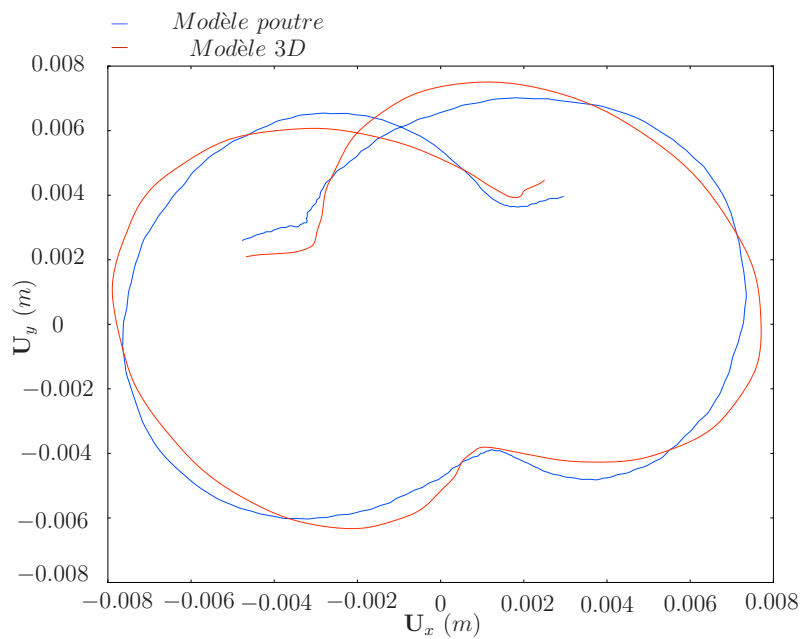
La Fig. 3.45 montre une différence nette entre le contact traité en modélisation unidimensionnelle et une autre tridimensionnelle. En effet, si on compare les orbites décrites par les rotors poutre et  $3D$  de la Fig. 3.45 (cas de contact rotor-stator décrit dans ce paragraphe) avec les orbites décrites par les rotors poutre et  $3D$  pour la même excitation de balourd<sup>6</sup> mais pour un cas sans contact rotor stator (voir la Fig. 3.18), on constate que le traitement du contact rotor-stator diffère s'il est traité par une approche  $1D$  ou bien par une autre  $3D$ . La différence de comportement entre les rotors poutre et  $3D$  est négligeable dans le cas où le contact rotor-stator est absent (Fig. 3.18) et est prononcée en cas de contact (Fig. 3.45). Cela met en évidence que cette différence provient de la différence de traitement du contact dans les deux modèles. On rappelle, par contre, que la vitesse de rotation du rotor est imposée et cela réduit les écarts constatés sur les comportement des rotors poutre et  $3D$ . Pour mieux comprendre les sources des écarts entre les modélisations  $1D$  et  $3D$ , on examine le comportement des stators.

On peut examiner la déformée amplifiée du stator pour mettre en évidence la trace

6. Les conditions de simulations des Fig. 3.45 et Fig. 3.18 sont identiques : maillage, pas de temps, schéma en temps, pas de temps, etc.

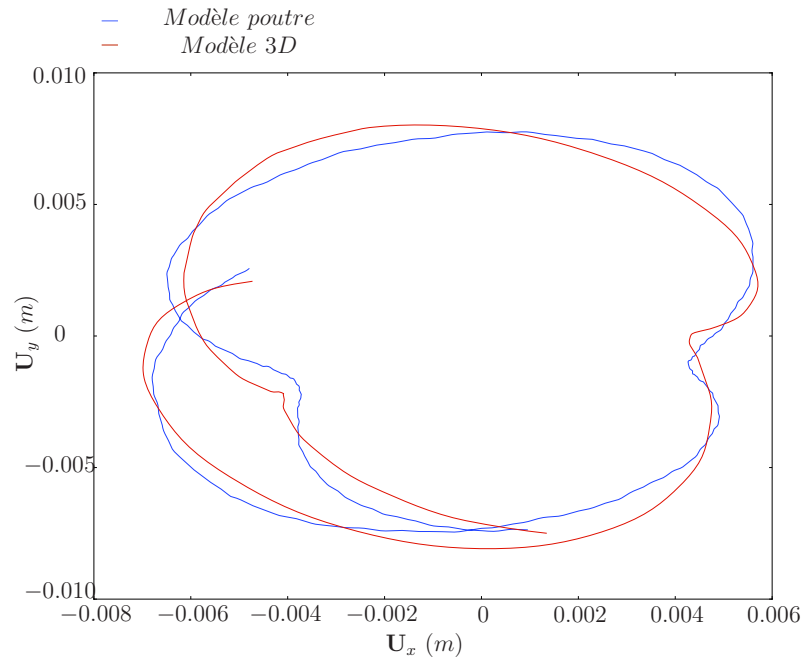


**Figure 3.46.:** Comparaison des orbites pour un contact en modélisations 3D et 1D



**Figure 3.47.:** Comparaison des orbites pour un contact en modélisations 3D et 1D



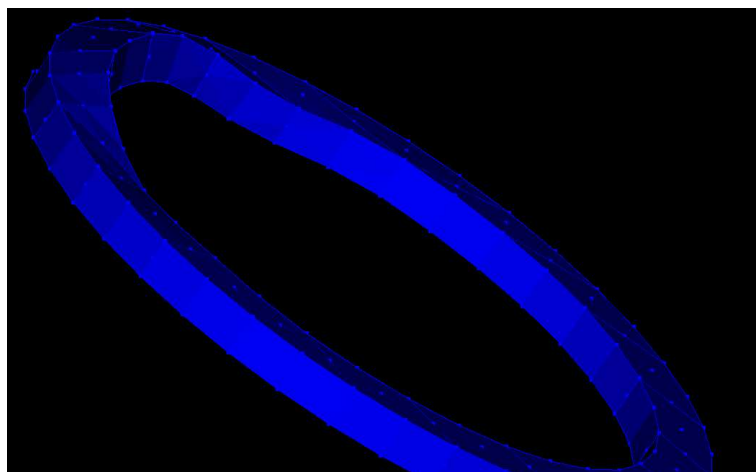


**Figure 3.48.:** Comparaison des orbites pour un contact en modélisations  $3D$  et  $1D$

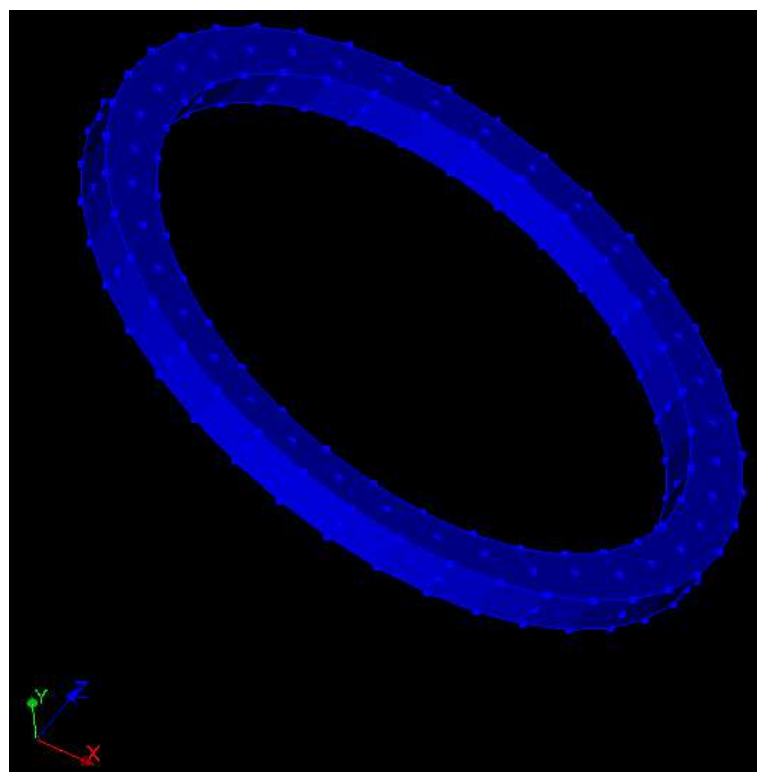
du contact rotor. On prend l'instant de calcul  $t = 0.875$  (s) et on examine la déformée du stator. Cette dernière est amplifiée par un facteur  $1.5 \times 10^5$  et est illustrée par la Fig. 3.49.

Par contre, si on regarde la déformée amplifiée par le même facteur du stator et au même instant lorsque le contact est traité par une modélisation  $1D$  (Fig. 3.50), on n'arrive pas à retrouver la trace du rotor.

En effet, le contact rotor-stator en modélisation poutre, et vu la rigidité de la section du rotor concerne plus de points de contact ( $\alpha \geq \beta$  dans la Fig. 3.51) et par la suite on n'observe pas une déformée aussi localisée en modélisation poutre, alors qu'elle



**Figure 3.49.:** Déformée (à l'échelle  $1.5 \times 10^5$ ) du stator en modélisation  $3D$  à  $t = 0.875$  (s).



**Figure 3.50.:** Déformée (à l'échelle  $1.5 \times 10^5$ ) du stator en modélisation  $1D$  du contact à  $t = 0.875$  (s).

est visible en  $3D$ <sup>7</sup>. Cela est, en partie, responsable des écarts entre les modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact rotor-stator.

Pour démontrer numériquement cette hypothèse, on trace la déformée de la section du rotor  $3D$  dans la zone de contact à  $t = 0.875$  s, comme le montre la Fig. 3.52, et qui est amplifiée à un facteur de  $1.5 \times 10^4$ . Les triangles rouges représentent les différents nœuds de la section. Un cercle de centre  $O$  et passant par le nœud le plus décalé du centre, met en évidence la déformation de la section. Cette dernière n'est plus un disque. Cela réduit le nombre de points de contact de la section avec le stator par rapport à une modélisation poutre et pour laquelle la section est un disque non déformable. Cela met en évidence l'importance d'une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator.

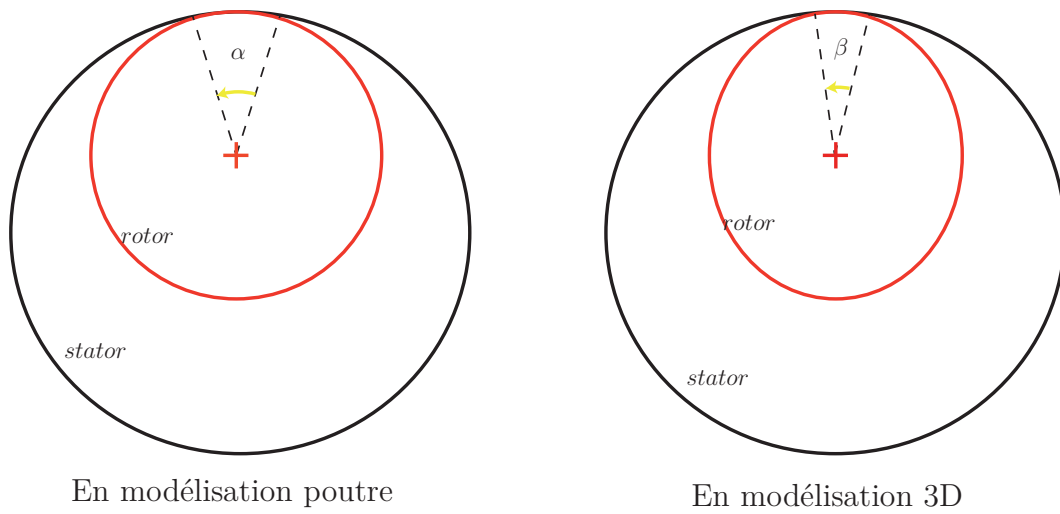
Cette conclusion sera à nouveau obtenue dans les exemples qui suivent.

### 3.5.2. Contact d'un rotor contre un stator suspendu

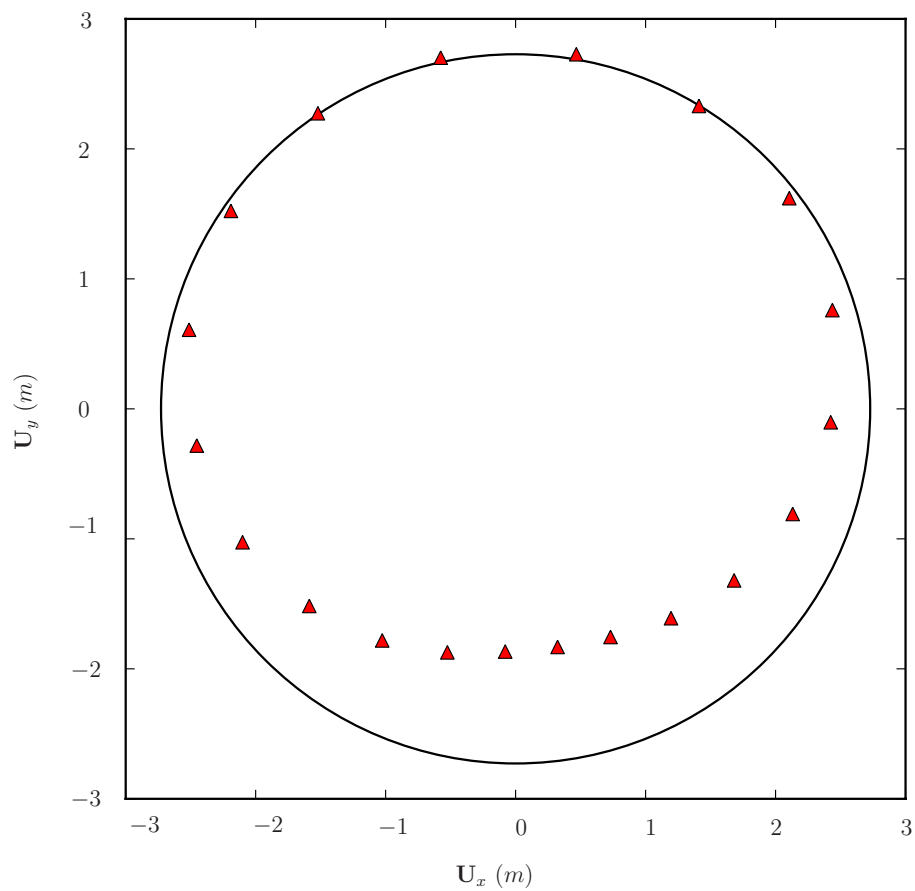
La deuxième simulation consiste à effectuer des calculs avec un stator muni d'ailettes et qui est représenté par la Fig. 3.53 et dont les dimensions sont celles de la Fig. 3.16.

---

7. Il est bien entendu nécessaire en modélisation  $3D$  d'avoir une finesse de maillage suffisante et des éléments quadratiques pour une bonne présentation de la section et la surface de contact. Au cas échéant, des erreurs de modélisations non négligeables seront commises et conduisent à des conclusions erronées.



**Figure 3.51.:** Comparaison de la surface de contact en hypothèses poutre et 3D



**Figure 3.52.:** Déformée amplifiée de la section du rotor 3D dans la zone de contact à  $t = 0.875 \text{ s}$

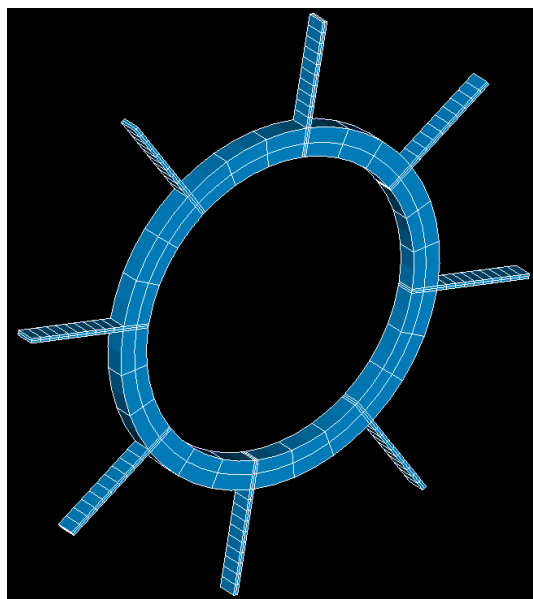


Figure 3.53.: Modèle de Stator avec des ailettes

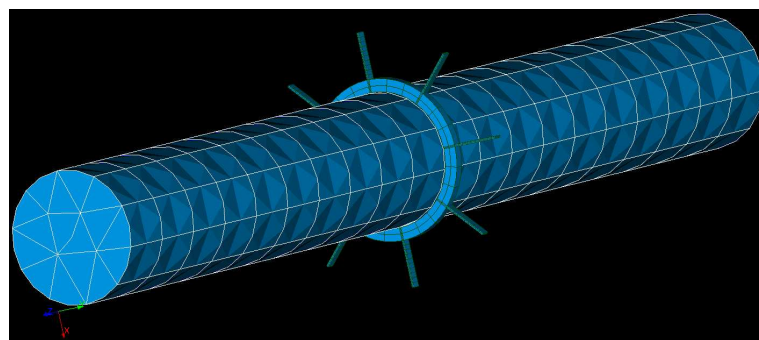


Figure 3.54.: Le système rotor-stator en modélisation 3D

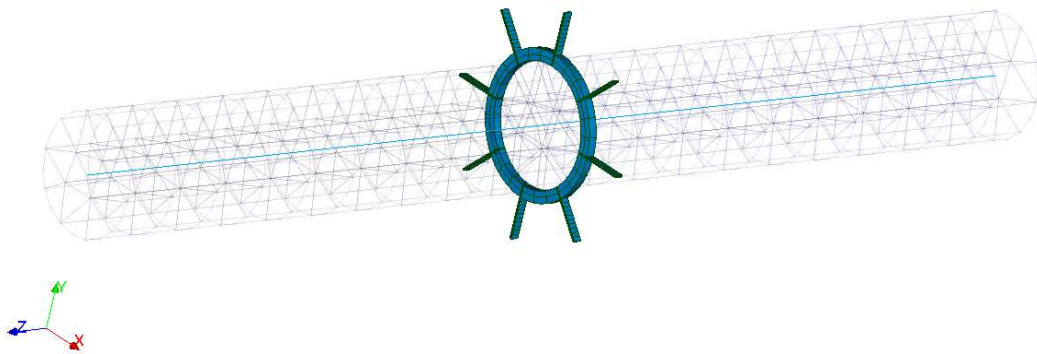
Le rotor étant le même que celui du cas précédent. Le système rotor-stator de cet exemple est montré sur la Fig. 3.54.

On présente dans la Fig. 3.55 le rotor 3D et le rotor poutre ainsi que le stator utilisé pour la modélisation 3D et qui est exactement le même dans la modélisation poutre.

Le stator de ce cas d'étude est muni d'ailettes et comporte 2280 nœuds avec maillage qui est formé d'éléments quadratiques. Il comporte sur la surface de contact 128 nœuds. L'extrémité de chaque ailette non reliée à la couronne est encastree et la couronne ne peut se déplacer selon l'axe des  $z$  (dans la direction parallèle à l'axe du rotor). On note que le raffinement du maillage modifie d'une façon très négligeable les résultats alors que les conséquences sur le temps de calcul sont très importants.

Le rotor tourne à la même vitesse et sous les mêmes conditions que l'exemple présenté dans le paragraphe précédent. La vitesse du rotor démarre de zéro et atteint au bout de 0.01 s sa valeur constante de 240  $tr/min$ . On considère un pas de temps de  $5 \times 10^{-5}$  s.

Vu l'augmentation du nombre de nœuds dans la modélisation du stator, néces-



**Figure 3.55.:** Modèle 1D et 3D du système rotor-stator

saire à la bonne prise de effets de déformation des ailettes, le temps de calcul augmente considérablement. Le rotor entraîne le stator et la convergence des boucles de contact à chaque pas de temps nécessite un temps CPU plus important que le cas de calcul précédent. Pour une durée totale de simulation d'une seconde, le temps CPU monte à plus de 60 heures sur la même machine de calcul.

L'analyse de sensibilité sur les coefficients des raideurs de contact en modélisation poutre et pour un schéma de Runge-Kutta montre une sensibilité négligeable des résultats aux paramètres de contact si les valeurs nominales sont celles du cas précédent ( $k_n = 10^{14} \text{ N/m}$  et  $k_t = 10^{10} \text{ N/m}$ ). C'est pourquoi on maintient ces mêmes valeurs de coefficients de pénalité en modélisation poutre et 3D. La même analyse effectuée sur le modèle 3D est très coûteuse en temps CPU et ne présente pas un intérêt évident.

La Fig. 3.56 montre une comparaison entre les orbites de  $N_c$  obtenues par les modélisations poutre et 3D. Le comportement montre des différences et met en évidence que le traitement du contact en 3D est plus riche qu'en modélisation 1D. On essaye par la suite de mieux illustrer cette conclusion et souligner les aspects physiques et de modélisation qui apportent cette richesse à la modélisation 3D.

A noter que les résultats obtenus dans ce paragraphe (stator muni d'ailettes) ne sont pas comparables avec les résultats obtenus sur la simulation du contact rotor-stator dans lequel le stator était une simple couronne privée d'ailettes, car les deux modèles ne traitent pas d'une même réalité physique. De plus comme la vitesse du rotor est imposée et qu'aucun ralentissement ne pourrait être simulé, il est alors difficile à travers l'analyse des écarts entre les modélisations 1D et 3D des Fig. 3.56 et Fig. 3.45 de conclure lequel des deux cas de contact est le plus intéressant à traiter en modélisation 3D. Par contre, on peut remarquer à travers la comparaison des orbites des rotors (Fig. 3.45 et Fig. 3.56) que l'écart entre les résultats 3D et 1D est plus faible que dans le cas du rotor sans ailette. Cela est peut-être dû au fait que lorsqu'on a des ailettes, on atténue le phénomène d'impact et donc les déformations localisées du stator. L'analyse du comportement du stator permet d'enrichir les conclusions et de souligner l'apport d'une modélisation 3D du contact rotor-stator.

Pour une meilleure clarté, la Fig. 3.56 qui présente les orbites du point  $N_c$  du rotor sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 1]$  (s) sera divisée en trois figures, chacune correspondant à un tiers de l'intervalle de simulation. On obtient respectivement la Fig. 3.57, la

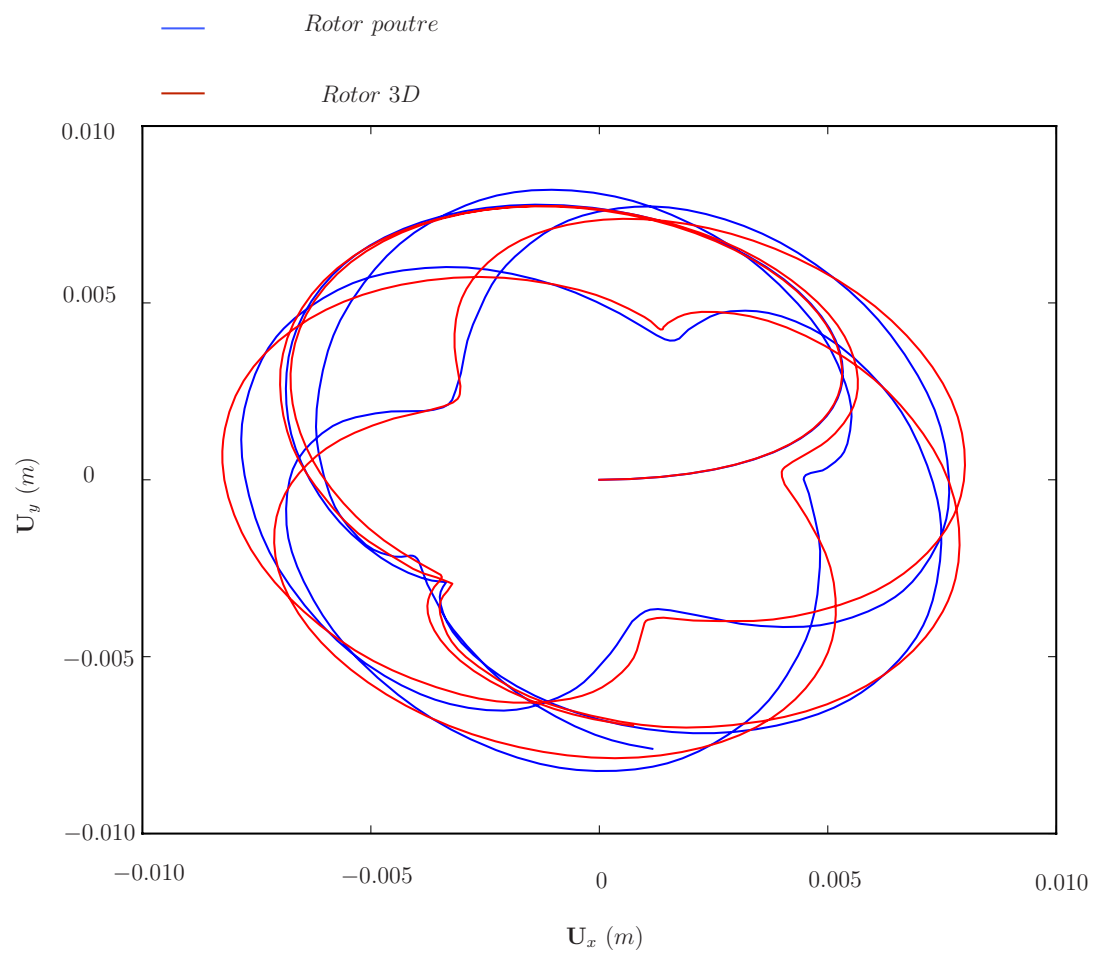
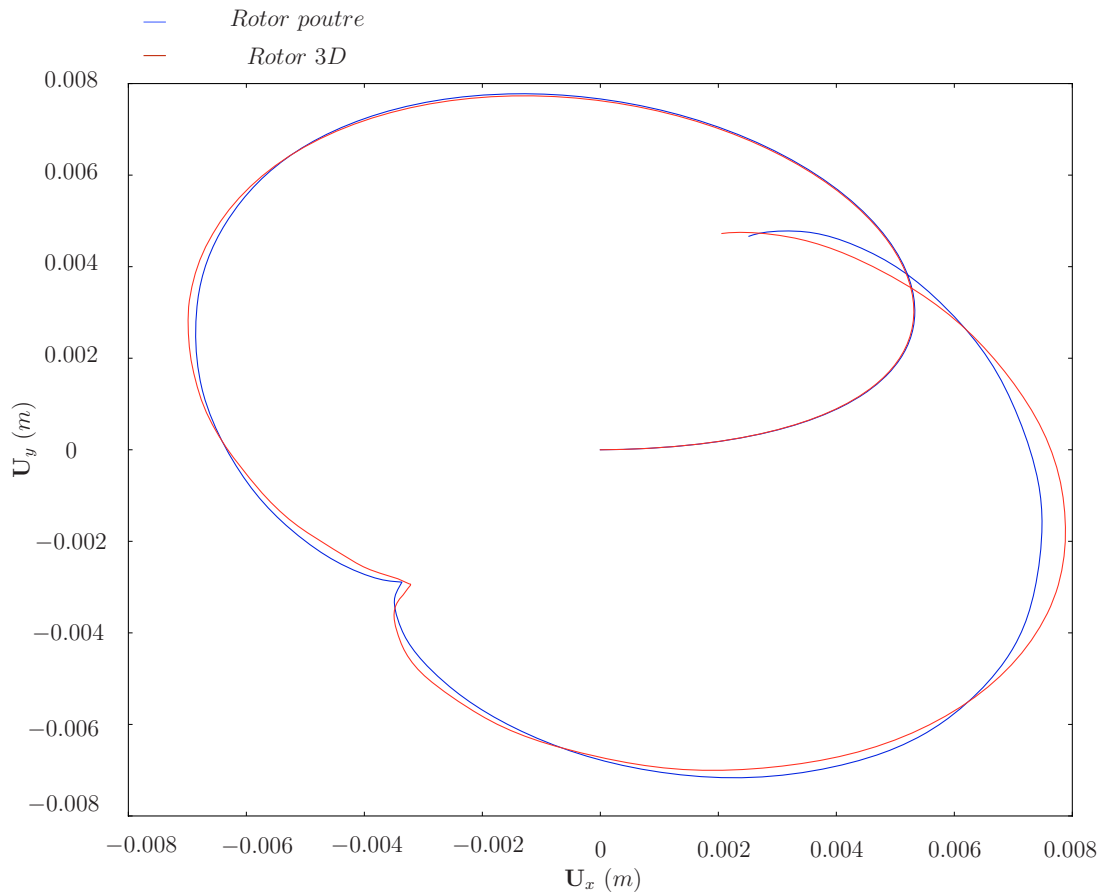


Figure 3.56.: Orbites des rotors 3D et poutre



**Figure 3.57.:** Orbites des rotors 3D et poutre

Fig. 3.58 et la Fig. 3.59.

On examine maintenant d'une façon plus détaillée le comportement du stator. La Fig. 3.60 effectue une comparaison entre les déplacements du point  $C_1$  (voir la Fig. 3.16) pour un traitement du contact en modélisations poutre et 3D.

Il apparaît d'une façon claire que le stator en modélisation poutre a des déplacements beaucoup plus importants que celui en modélisation 3D selon la direction  $y$ , i.e., dans la direction provoquée par la force de frottement (des différences allant jusqu'à trois fois de plus). Cela est également vrai sur le point  $C_2$  dans l'autre direction du plan, la direction  $x$  comme le montre la Fig. 3.61. Seule l'amplitude de ces oscillations est différente d'une modélisation à l'autre. Par contre, la différence est moins importante dans la direction normale au contact comme est visible sur la Fig. 3.62 qui représente le comportement de  $C_1$  selon  $x$  (direction normale au contact). Les fréquences des oscillations des stators dans les deux modélisations sont en revanche assez proches.

Il faut noter que certaines différences entre le comportement des stators en modélisations 1D et 3D sont dues à l'utilisation de deux schémas de résolution différents pour chacune des modélisations 1D et 3D. En effet, pour la modélisation 3D du contact rotor-stator, le schéma offert est un schéma de Newmark amorti. Il n'est pas disponible en modélisation 1D du contact : le choix le plus convenable étant le schéma de Runge-Kutta qui ne dispose pas d'amortissement numérique. L'uti-

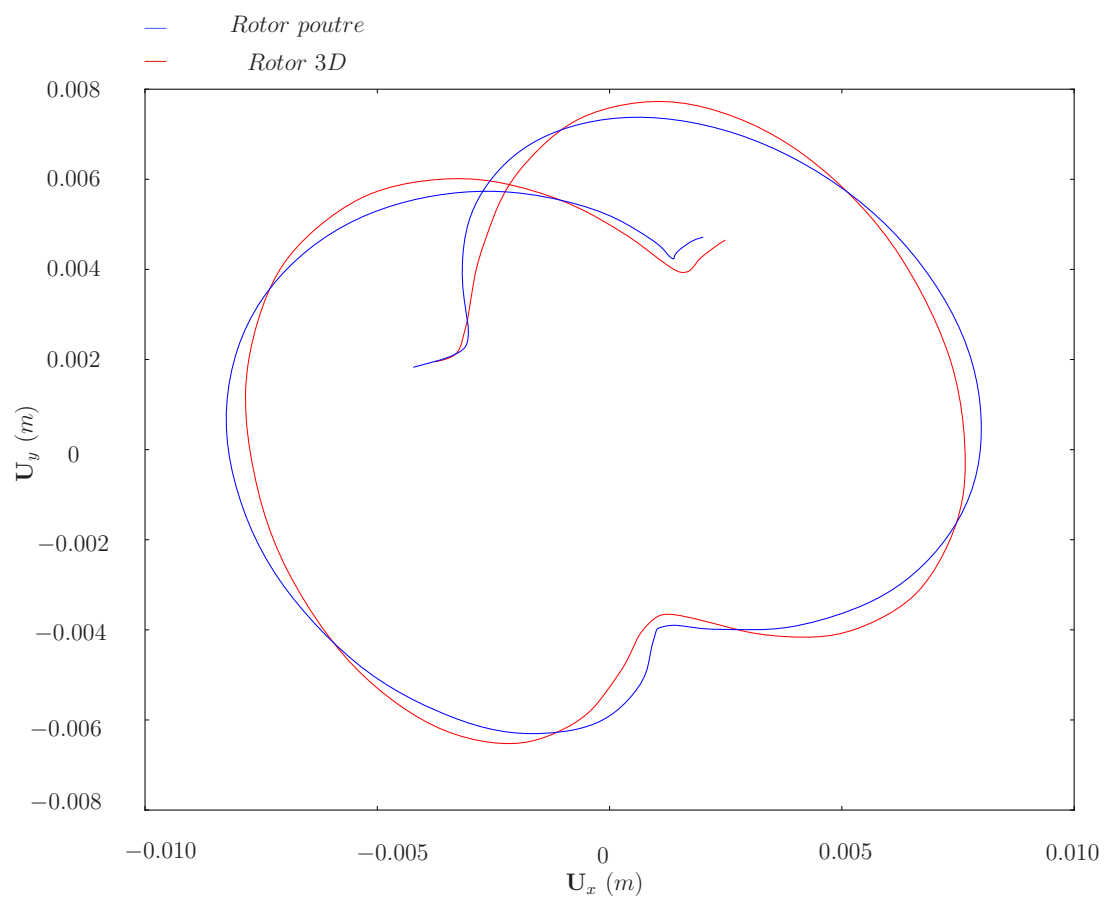


Figure 3.58.: Orbites des rotors 3D et poutre



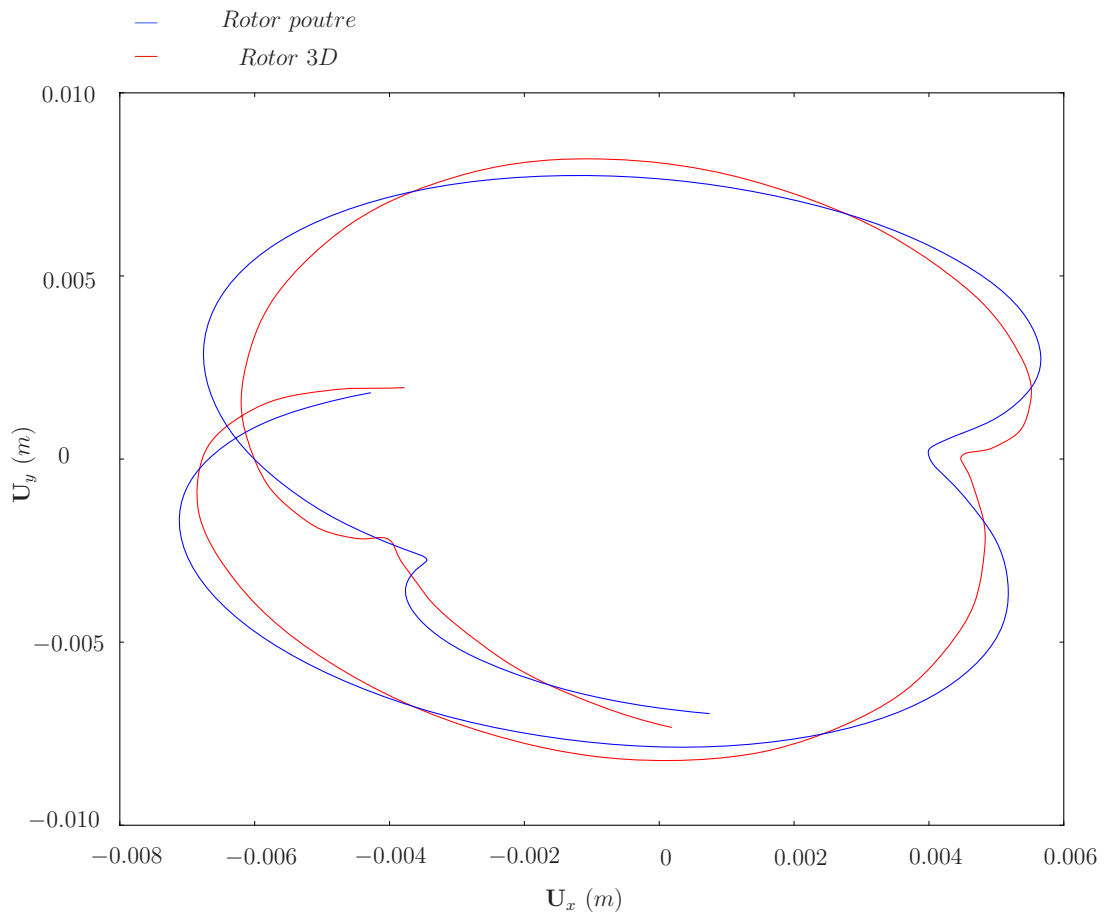


Figure 3.59.: Orbites des rotors 3D et poutre

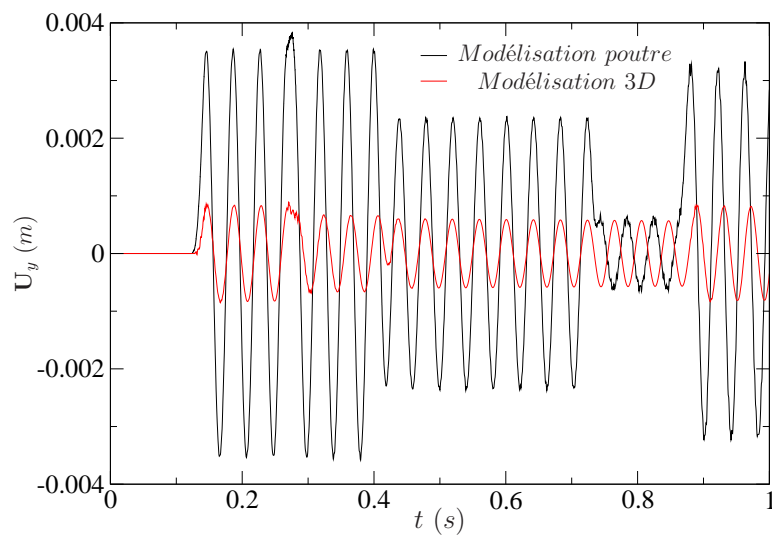


Figure 3.60.: Déplacements selon  $y$  de  $C_1$

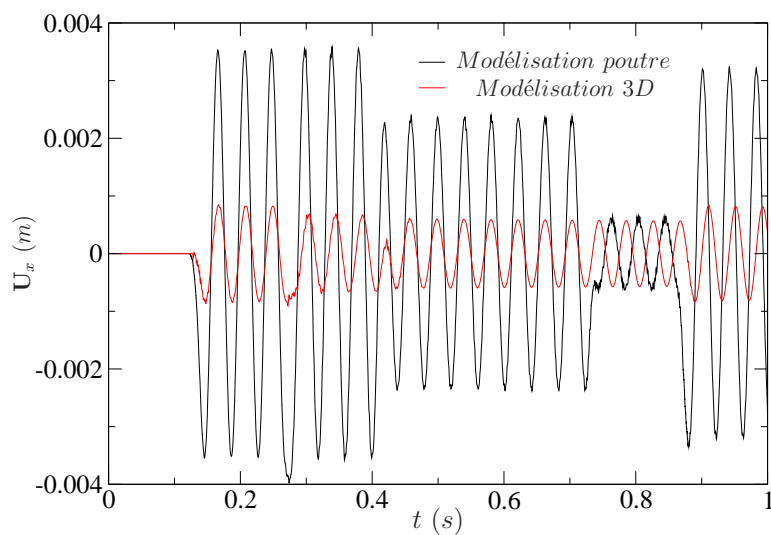


Figure 3.61.: Déplacements selon  $x$  de  $C_2$

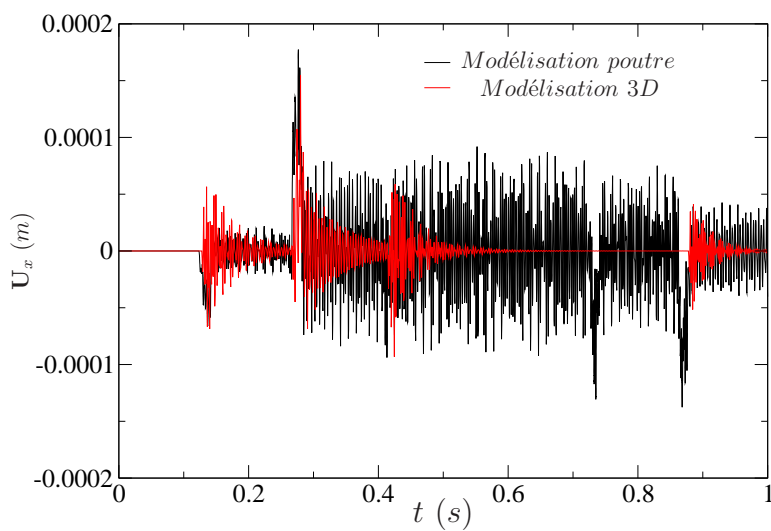


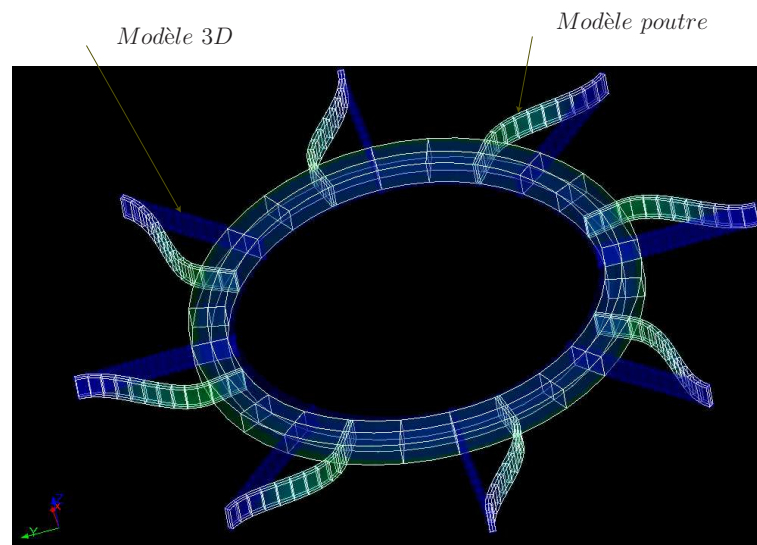
Figure 3.62.: Déplacements selon  $x$  de  $C_1$

lisation de deux schémas d'intégration en temps différents pour chacune des deux modélisations, et la présence d'un amortissement numérique uniquement dans l'un des deux schémas, sont la source de certaines différences, mais qui ne constituent pas la source principale de différence entre les deux modèles. En effet, l'examen des Fig. 3.61 et Fig. 3.60 montre la présence de certaines oscillations hautes fréquences (de faible amplitude) sur la solution poutre, notamment pour  $t \in [0.7, 0.8]$  (s). Cela n'est pas visible sur la solution 3D qui est amortie. Par contre, ces oscillations et la différence de choix des schémas d'intégration en temps n'est pas la source d'une instabilité dans la solution, qu'elle soit celle 1D ou bien celle 3D. L'écart entre les deux solutions est évident et ne peut pas être dû à la méthode d'intégration en temps. Cependant, l'écart constaté sur la Fig. 3.62 (direction normale au contact) est en partie dû à la présence ou pas d'amortissement numérique dans le schéma en temps. La solution 3D s'amortit surtout pour  $t \in [0.6, 0.9]$  (s), alors que la solution 1D ne s'amortit pas. Les différences de comportement, dans la direction normal au contact, constatées sur la Fig. 3.62 sont en partie dues à la différence de choix des schémas en temps. Ce choix élargit l'écart entre les deux solutions sans toutefois qu'il ne soit la raison principale de l'écart.

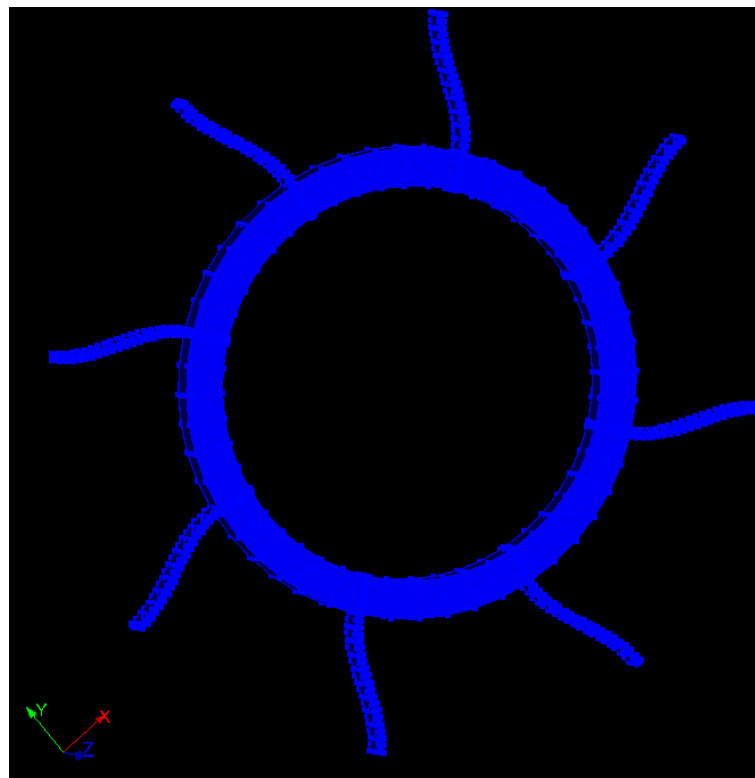
C'est donc la force de contact, à la fois ses composantes normale et tangentielle, mais surtout la composante tangentielle, et donc aussi le couple de contact rotor-stator qui vont être assez différents entre les modélisations poutre et 3D. Cela est dû à la rigidité de la section du rotor en modélisation poutre. En d'autres termes, comme la section du rotor en modélisation poutre ne se déforme pas, cela engendre un nombre de points de contact plus important en modélisation poutre qu'en 3D, comme évoqué dans le §3.5.1 et illustré en Fig. 3.51. Cela est clair sur la Fig. 3.63 qui présente la déformée amplifiée d'un facteur de 100 des stators à l'instant  $t = 0.876$  s. On remarque que le stator effectue une rotation autour de lui-même beaucoup plus importante lorsque le contact est traité en modélisation poutre qu'en modélisation 3D. En effet, sur la Fig. 3.63, la flexion des ailettes suite à la rotation du stator autour de lui-même dans la modélisation poutre est nettement visible, alors qu'elle est presque imperceptible sur la modélisation 3D et il faut passer d'une amplification de 100 à une amplification de 1000 pour mettre en valeur l'effet généré par le couple de frottement sur le stator en modélisation 3D et cela sera illustré dans la Fig. 3.64.

Cette rotation du stator autour de son axe, est due au couple généré par le frottement rotor-stator. Ce dernier n'a pas d'effets visibles sur le rotor car sa vitesse est imposée, mais il provoque une rotation du stator sur lui-même et par la suite une flexion des ailettes. Si la vitesse du rotor n'était pas imposée, la différence entre le couple de frottement généré par le contact en modélisation poutre et 3D, aurait généré un ralentissement différent du rotor en modélisations poutre et 3D. Cela met en valeur l'importance d'une modélisation 3D du contact pour le traitement d'un ralentissement en situation accidentelle d'une turbine.

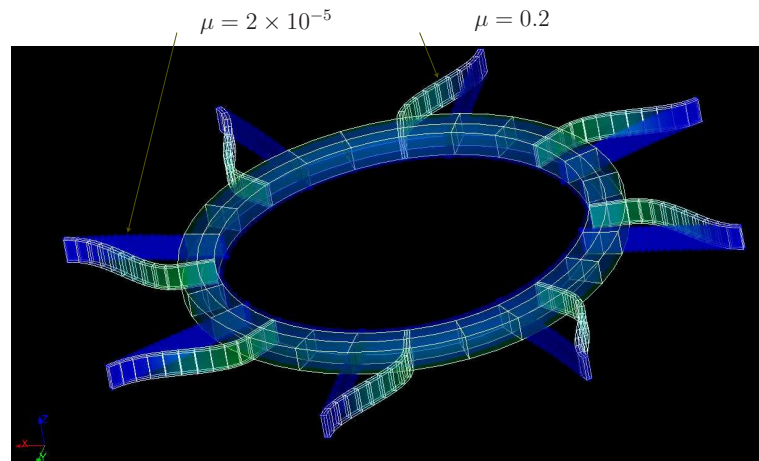
On démontre par la suite, que suite à l'imposition de la vitesse de rotation du rotor, l'effet du couple de frottement est très peu perceptible sur les orbites du rotor alors qu'il est nettement visible sur le comportement du stator. On effectue tout d'abord une comparaison entre la déformée du stator pour une modélisation poutre et pour  $t = 0.876$  s entre le cas présenté dans ce paragraphe et un autre pour lequel le coefficient de frottement de Coulomb  $\mu$  est baissé à  $2 \times 10^{-5}$ . Les déformées sont



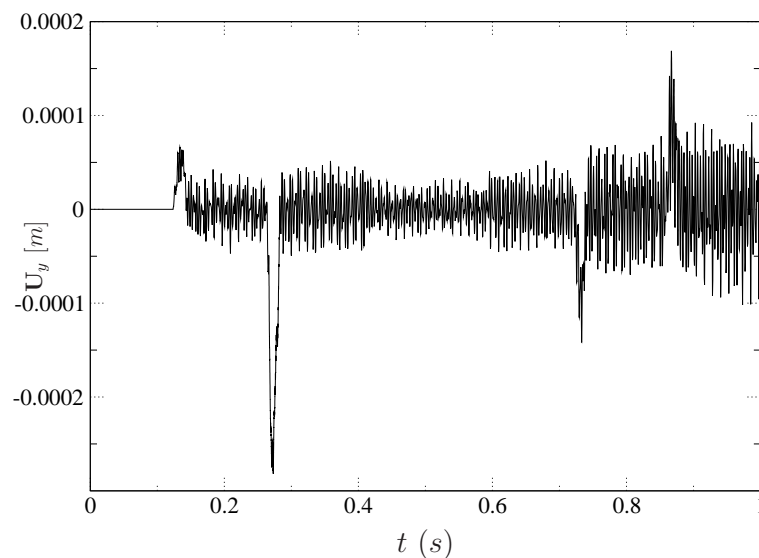
**Figure 3.63.:** Comparaison des déformées amplifiées d'un facteur de 100 des stators des modélisations poutre et  $3D$



**Figure 3.64.:** Déformée amplifiée du stator en modélisation  $3D$  à  $t = 0.876$  s



**Figure 3.65.:** Mise en évidence de l'importance de la force de frottement

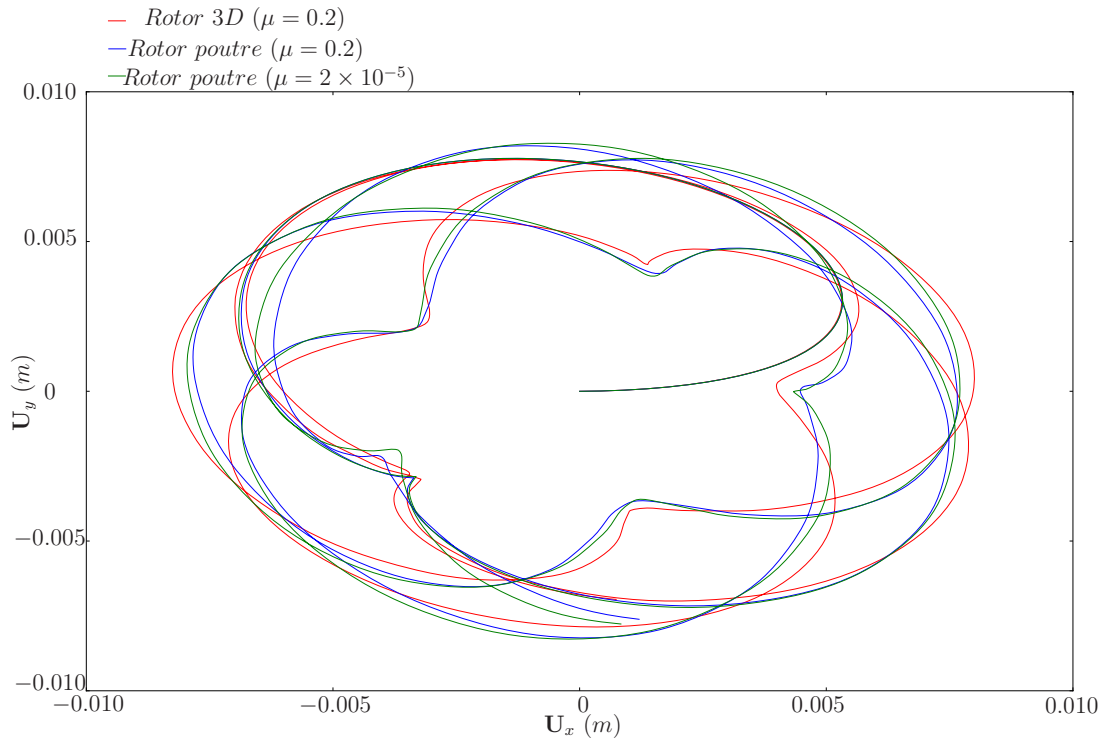


**Figure 3.66.:** Déplacements selon  $y$  de  $C_1$  pour  $\mu = 2 \times 10^{-5}$ .

amplifiées de 100 et seront présentées sur la Fig. 3.65.

La Fig. 3.65 montre que le couple de frottement se traduit par une rotation du stator autour de lui-même et qui est d'autant plus importante que le coefficient de frottement de Coulomb l'est. Si on regarde également les déplacements selon  $y$  du point  $C_1$  pour une modélisation poutre avec un coefficient de frottement de Coulomb  $\mu = 2 \times 10^{-5}$ , on obtient la Fig. 3.66. Si on compare cette dernière avec la Fig. 3.60, il paraît évident que la réduction considérable du coefficient de frottement a permis de réduire les rotations du stator autour de son axe d'une façon claire.

D'autre part, la Fig. 3.67 établit une comparaison des orbites décrites par le point  $N_c$  du rotor pour trois cas de calcul différents. Le calcul avec contact rotor-stator en modélisation 3D, celui en modélisation poutre et un calcul poutre avec  $\mu = 2 \times 10^{-5}$  (frottement presque négligeable). Il est clair que le comportement du rotor poutre illustré par les orbites de la Fig. 3.67 est très peu sensible à  $\mu$ , alors que le



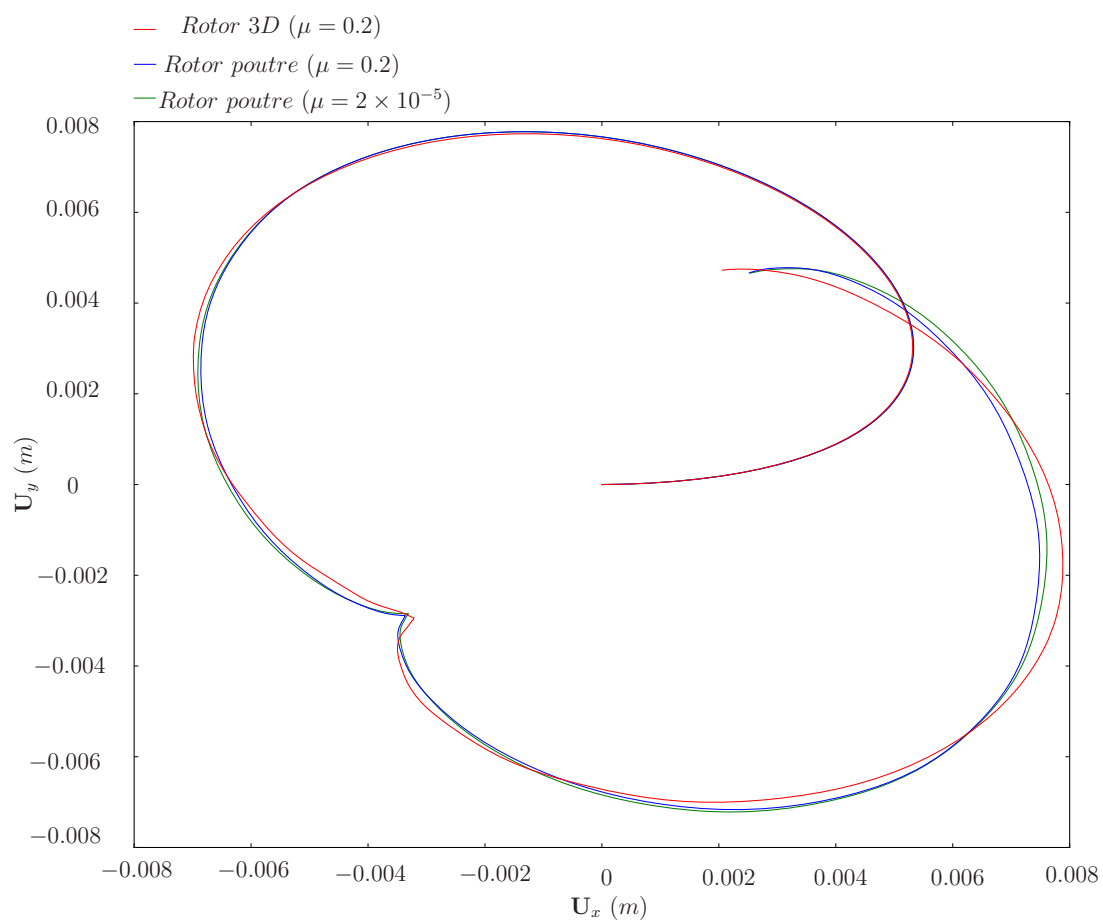
**Figure 3.67.:** Comparaison des orbites du point  $N_c$  du rotor

comportement du stator l'est.

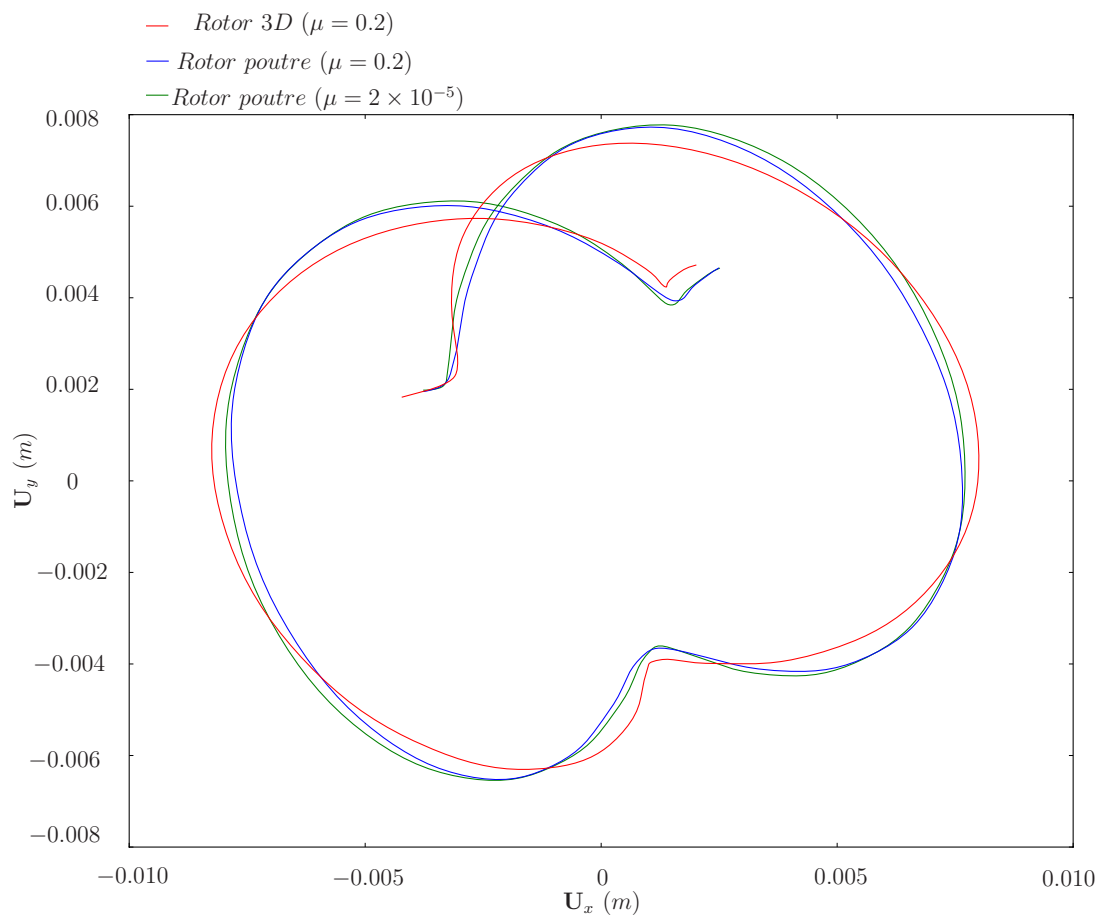
Dans le souci d'une meilleure clarté, la Fig. 3.67 qui présente les orbites du point  $N_c$  du rotor sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 1]$  (s) sera divisée en trois figures, chacune correspondant à un tiers de l'intervalle de simulation. On obtient respectivement la Fig. 3.68, la Fig. 3.69 et la Fig. 3.70.

Pour mieux établir une comparaison du comportement des stators selon les différentes façon de traiter le contact, on choisit huit points appartenant à la surface de contact du stator et qui sont face à  $N_c$  et répartis tous les  $45^\circ$  (répartis symétriquement par rapport au centre du stator).

La Fig. 3.71 montre un disque en rotation autour de son axe de rotation à une vitesse  $\omega$ . Si on effectue la somme des vecteurs  $\mathbf{u}_i$  pour  $i = 1 \rightarrow 8$ , on aura un vecteur nul, et cela car les points choisis sont symétriques par rapport à l'axe de rotation. Sur le stator, on prend une répartition des nœuds de la même manière que dans la Fig. 3.71 et par la suite la moyenne des déplacements en ces points élimine la rotation du stator autour de son axe. On l'appelle par la suite l'orbite du centre du stator. Le résultat permet de juger des déplacements du centre de rotation du stator. En effet, cette moyenne permet d'éliminer la rotation du stator autour de son axe principal et de ne garder que son comportement normal. Cela permet de comparer le comportement normal au contact des deux modélisations 1D et 3D. Cette comparaison est intéressante car la comparaison du comportement global du stator en modélisations 1D et 3D met l'accent sur la différence de comportement dans la direction tangente au contact (aspect frottement), et il est intéressant d'évaluer l'apport d'une modélisation 3D du contact rotor-stator dans la direction normale au contact par rapport à une modélisation 1D, et de savoir si les différences sont



**Figure 3.68.:** Comparaison des orbites du point  $N_c$  du rotor ( $t \in [0, 0.33]$  s)



**Figure 3.69.:** Comparaison des orbites du point  $N_c$  du rotor ( $t \in [0.33, 0.66]$  s)



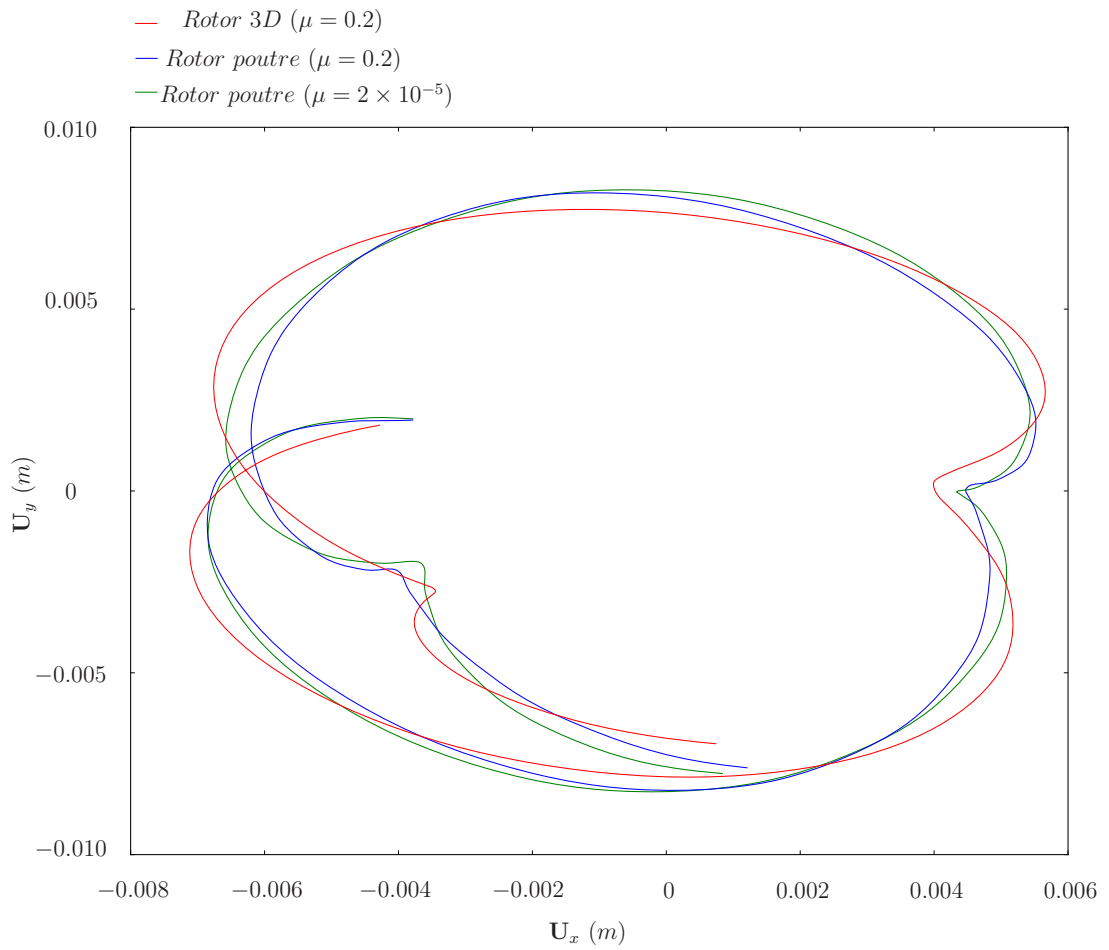


Figure 3.70.: Comparaison des orbites du point  $N_c$  du rotor ( $t \in [0.66, 1]$  s)

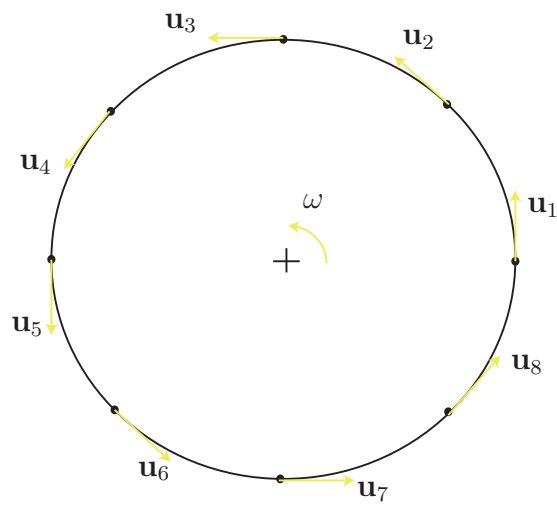


Figure 3.71.: Disque en rotation

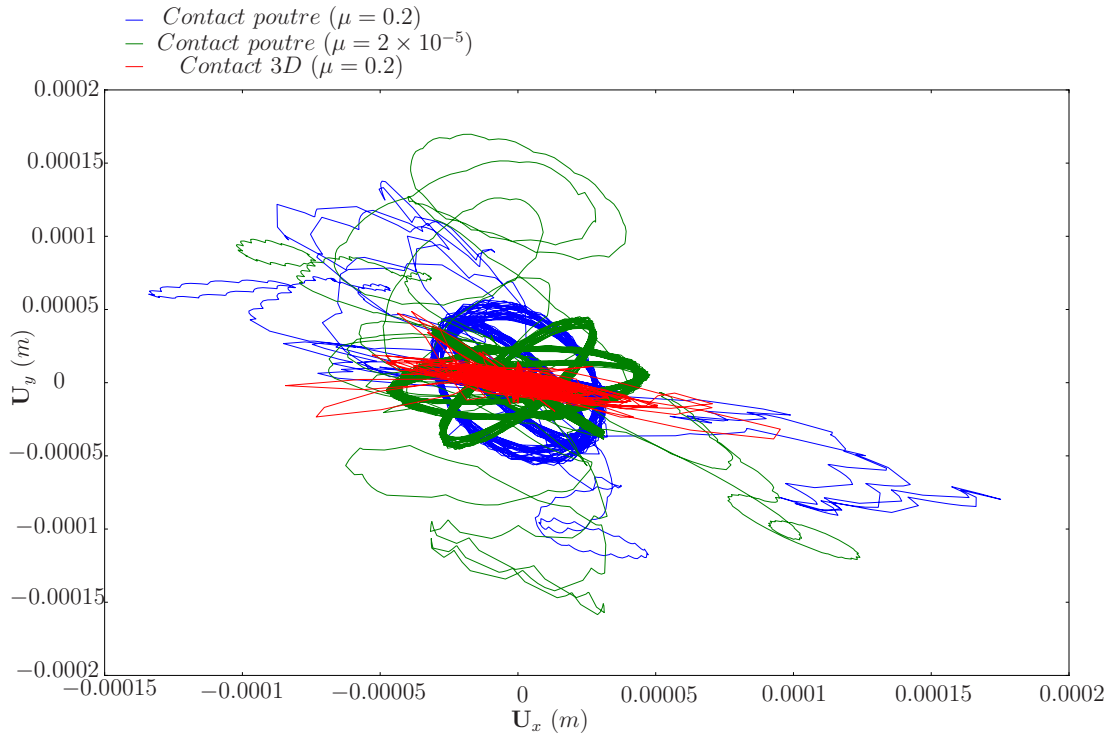


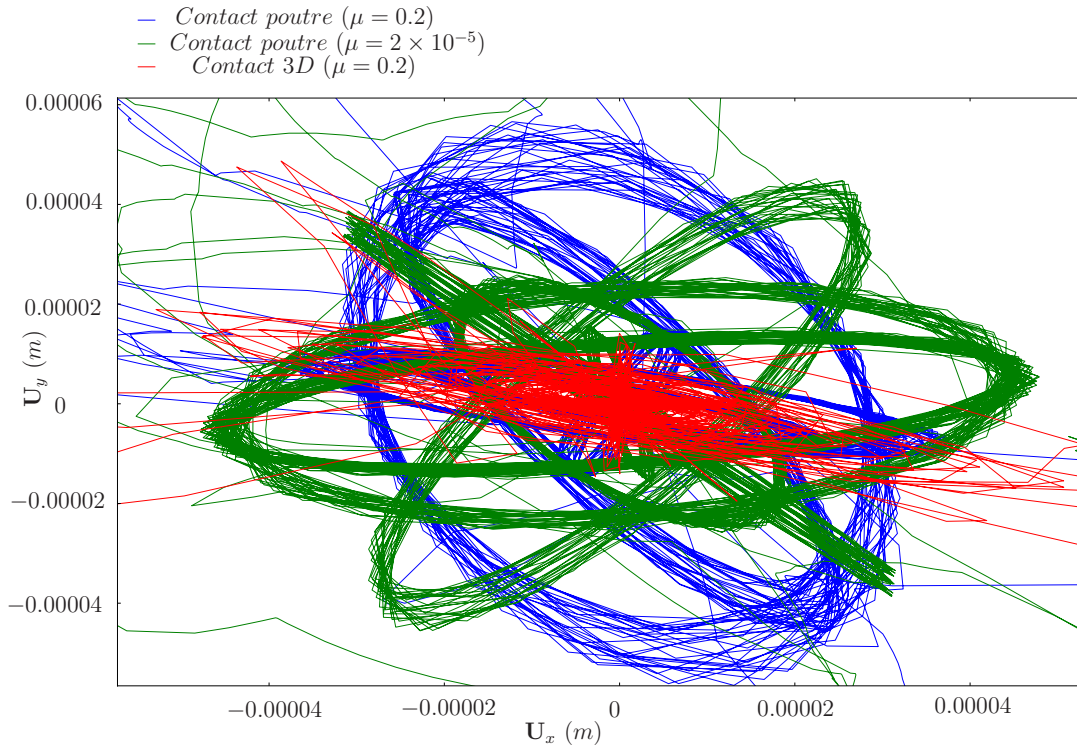
Figure 3.72.: Comparaison des orbites du stator

aussi prononcées que celles trouvées dans la direction tangente au contact.

La Fig. 3.72 montre les orbites du stator pour des modélisation 1D (pour deux coefficients de frottement de Coulomb différents) et 3D. La Fig. 3.73 représente un zoom sur la Fig. 3.72 pour une meilleure visibilité. L'orbite du centre du stator présente une différence claire entre les modélisations 1D et 3D. Le traitement du contact est donc différent d'une modélisation à une autre. Pour une modélisation 1D du contact rotor-stator, on constate d'après les Fig. 3.72 et Fig. 3.73 que changer le coefficient de frottement de Coulomb sur la modélisation 1D se traduit par des différences sur l'orbite du centre du stator, mais cette dernière présente des similitudes fortes avec le cas de modélisation 1D du contact avec un frottement de Coulomb plus important. Par contre, le comportement 3D constaté sur l'orbite du centre du stator est totalement différent. Cela laisse constater que ce n'est pas que le comportement tangentiel, et par la suite le couple de frottement, qui est différent entre les modélisations 1D et 3D, mais également le comportement normal. Le traitement d'un problème de contact rotor-stator par une modélisation 3D est plus riche qu'une simple modélisation 1D, et cela est visible sur le comportement normal et tangentiel, on souligne, alors, la nécessité d'une modélisation 3D pour la simulation d'un contact rotor-stator.

### 3.5.3. Contact d'un rotor contre un stator suspendu à vitesse critique

Dans cet exemple de calcul on reprend le même modèle, chargement et conditions aux limites que l'exemple précédent et on modifie la vitesse de rotation pour se



**Figure 3.73.:** Zoom sur les orbites du stator

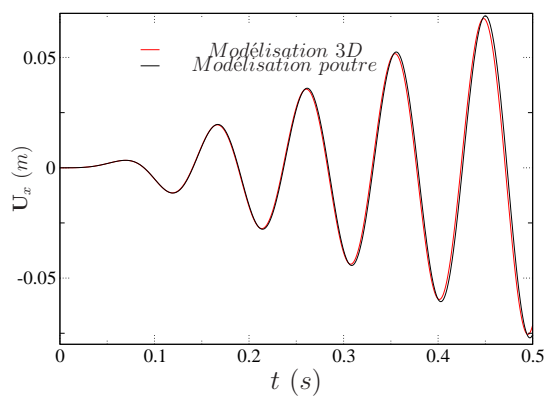
situer au voisinage d'une vitesse critique du modèle.

La Tab. 3.1 montre les premières fréquences propres du rotor. On choisit par la suite une vitesse de rotation proche de la première fréquence propre du rotor, i.e.,  $10.6 \text{ Hz}$  donc  $\omega = 636 \text{ tr/min}$ . On vérifie tout d'abord que cette vitesse excite les modèles poutre et 3D du rotor d'une façon assez proche pour que les différences de comportement en contact rotor-stator ne soient pas dus à une excitation plus prononcée d'un modèle que l'autre.

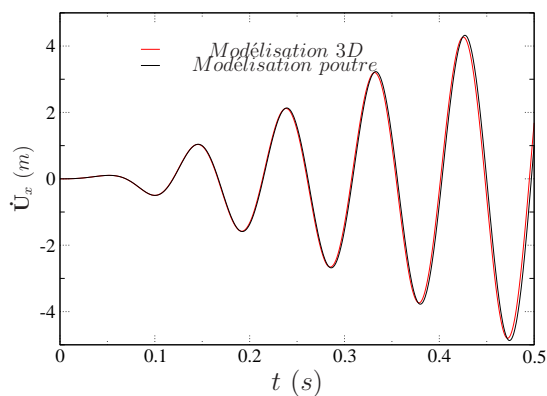
On présente par la suite les résultats de l'excitation du rotor pendant un temps de simulation de  $0.5 \text{ s}$  au point  $N_c$ . La cohérence du comportement est également constatée sur tous les autres points appartenant au rotor.

Les Fig. 3.74, Fig. 3.75 et Fig. 3.76 montrent respectivement les déplacements, vitesses et accélérations selon la direction  $x$  du points  $N_c$  appartenant au rotor 3D et son équivalent du rotor poutre. Il est clair que les deux modélisations poutre et 3D se comportent d'une façon très proche et qu'on peut par la suite comparer le comportement du contact rotor-stator des modèles poutre et 3D pour cette vitesse. Cette cohérence est également observée sur le point  $N_c$  dans la direction  $y$  et cela se traduit par une cohérence des orbites de ce point tracés dans la Fig. 3.77 pour une durée de simulation de  $0.5 \text{ s}$ , et sur d'autres points du rotor.

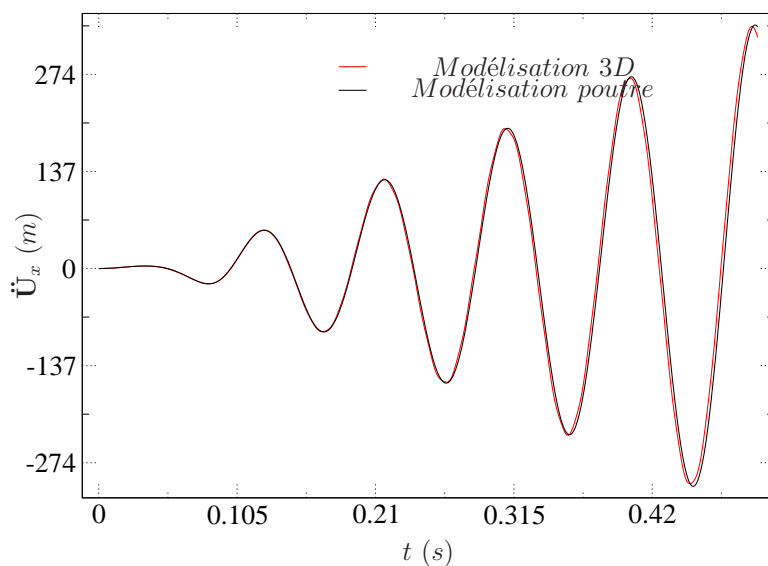
On s'aperçoit sur la Fig. 3.77 de l'amplification des amplitudes suite à l'excitation du rotor à sa vitesse critique. Le contact va donc être plus sévère que pour la vitesse de rotation envisagée précédemment. Comme la résolution du contact se fait par pénalité, on peut craindre que la sensibilité de la solution aux coefficients des raideurs de pénalité se voit accentuée. Une étude paramétrique est donc à nouveau menée sur le modèle poutre sur les coefficients de raideur de pénalité comme présenté



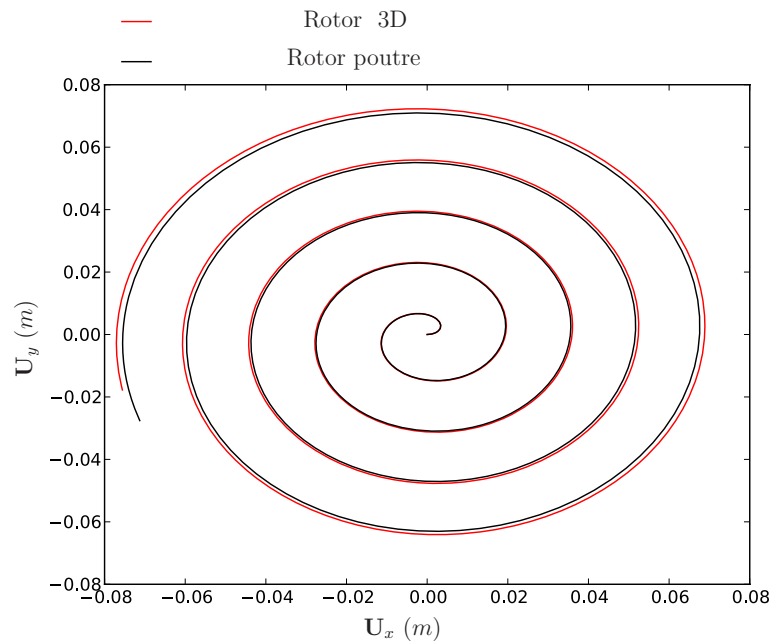
**Figure 3.74.:** Déplacements selon  $x$  de  $N_c$  pour  $\omega = 636$  tr/min



**Figure 3.75.:** Vitesses selon  $x$  de  $N_c$  pour  $\omega = 636$  tr/min



**Figure 3.76.:** Accélérations selon  $x$  de  $N_c$  pour  $\omega = 636$  tr/min

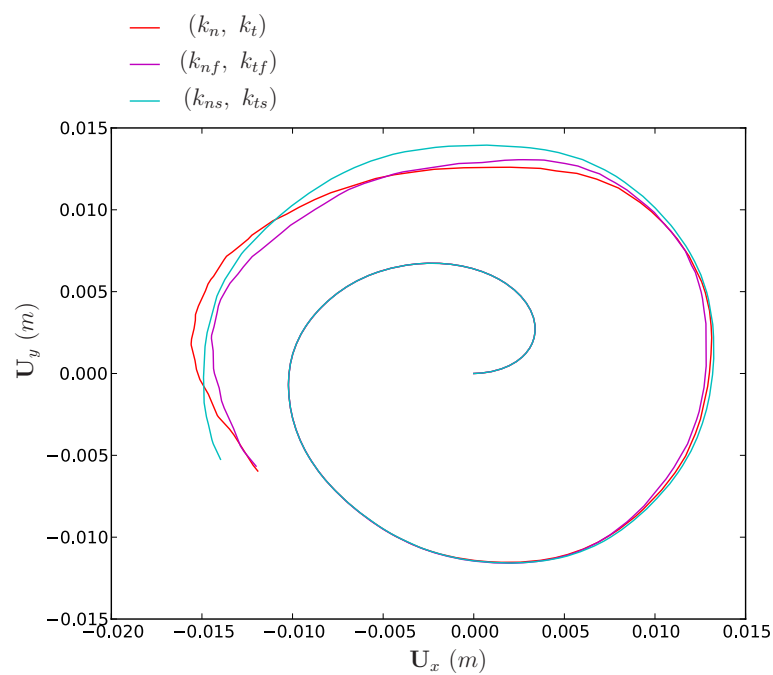


**Figure 3.77.:** Orbites de  $N_c$  pour  $\omega = 636 \text{ tr/min}$

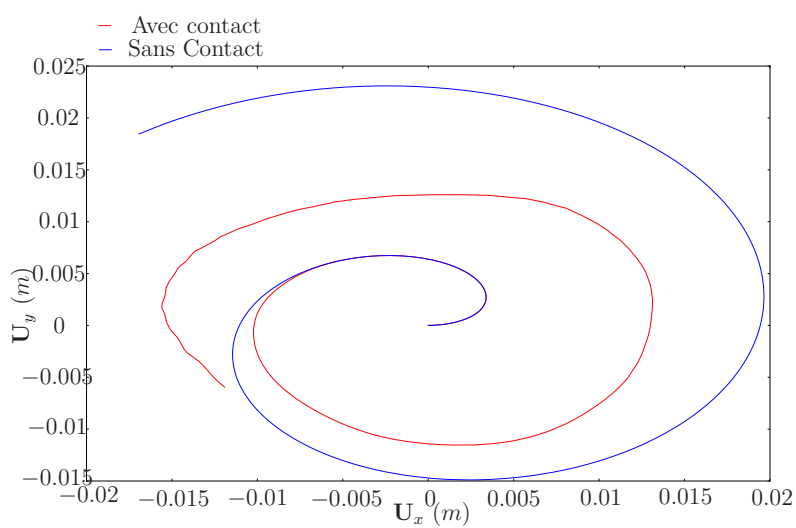
dans le premier cas. La Fig. 3.78 montre les orbites de  $N_c$  pour trois valeurs de raideurs de pénalité différentes : valeurs nominales  $k_n = 10^{14} \text{ N/m}$  et  $k_t = 10^{10} \text{ N/m}$ , ainsi que des valeurs de coefficients de pénalité de dix fois et un dixième de fois ces valeurs.

Les résultats présentés sur la Fig. 3.78 montrent qu'avec l'amplification des amplitudes de déplacements du point  $N_c$ , la sensibilité des résultats reste cependant acceptable. On se limite à une simulation de 0.2 s. Cette analyse effectuée sur la modélisation poutre nécessite 3 minutes. La sévérité du contact due à la vitesse critique n'est pas un vrai défi pour la résolution poutre du contact. Le temps de calcul n'augmente que légèrement par rapport à une simulation loin d'une vitesse critique. Par contre, en modélisation 3D le temps CPU augmente très considérablement. Le pas de temps qui était suffisant pour la convergence dans les deux premiers exemples de contact et ( $5 \times 10^{-5} \text{ s}$ ) n'est plus du tout suffisant. Pour converger en simulation 3D du contact le pas de temps doit passer à  $5 \times 10^{-7} \text{ s}$ . En effet, la vitesse critique augmente la fréquence des oscillations du rotor et par la suite un nombre de contact plus important doit être géré par l'algorithme pendant un temps donné. La diminution du pas de temps contribue à la convergence de l'algorithme, car elle permet de gérer d'une façon plus convenable les effets physiques en place. Cela conduit à un temps de calcul énorme, d'autant plus qu'on rappelle que la résolution se fait en schéma implicite de Newmark. De ce fait, l'analyse de la sensibilité sur les coefficients de raideurs de pénalité ne sera pas faite sur le modèle 3D. On se contente par l'analyse faite sur la modélisation poutre pour justifier le choix des raideurs de pénalité de contact et on se limite à une simulation de 0.2 s. Le temps CPU consommé sur une machine Quad-Core 2.5 GHz et 12 Gb de mémoire est de plus de 7 jours de calcul (autour de 170 heures de calcul).

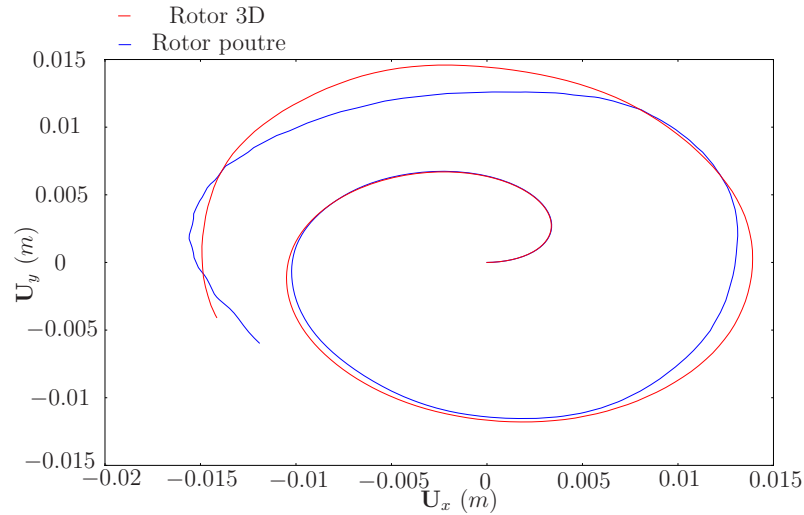
La Fig. 3.79 établit une comparaison entre les orbites décrites par le point  $N_c$  en absence d'un contact rotor-stator et en sa présence. Il est évident que le stator



**Figure 3.78.:** Comparaison des orbites de  $N_c$  pour  $\omega = 636 \text{ tr/min}$  et pour 3 raideurs de pénalité différentes



**Figure 3.79.:** Orbites décrites par  $N_c$  en modélisation poutre



**Figure 3.80.:** Orbites décrites par  $N_c$  en modélisations poutre et  $3D$

empêche un déplacement très prononcé du rotor et par la suite subit un choc très violent.

On compare dans la Fig. 3.80 les orbites décrites par  $N_c$  en modélisations poutre et  $3D$ . On s'aperçoit d'une différence bien plus nette que pour les deux cas traités plus tôt dans ce chapitre. Cette différence, qui est normalement moins visible sur les orbites du rotor, car la vitesse de rotation est imposée (voir l'explication dans le §3.5.2), se voit accentuée. Le comportement du stator, comme on le verra par la suite, présente selon les modèles des écarts énormes et qui permettent de justifier l'investissement en temps CPU nécessaire pour effectuer une analyse en modélisation  $3D$  du contact.

La Fig. 3.81 effectue la comparaison entre les orbites du stator (même principe de calcul que dans le deuxième cas). La comparaison met en évidence l'écart énorme entre le comportement des deux stators suite au contact. Le couple de frottement généré par le contact est nettement différent et cela se traduit par un comportement différent du stator qui effectue une rotation autour de son axe plus prononcée en modélisation poutre qu'en modélisation  $3D$ .

La Fig. 3.82 montre l'état du stator en modélisations poutre et  $3D$ , et cela à  $t = 0.1567$  s. Aucune amplification n'est nécessaire dans ce cas vu l'intensité de la déformation du stator. La modélisation poutre génère un couple de frottement plus important qui se traduit par des déplacements très supérieurs à ceux constatés sur le stator si le contact est géré par un algorithme  $3D$ .

Pour mieux mettre en valeur cet écart constaté sur les déplacements, on examine l'évolution des déplacements des points  $C_1$  et  $C_2$  du stator.

La Fig. 3.83 montre une comparaison entre les déplacements du point  $C_1$  (voir la Fig. 3.16) suite au contact rotor-stator traité en modélisation poutre et en modélisation  $3D$ . On remarque, dans la direction  $y$  qui est celle de la force de frottement tangente au stator, des déplacements plus prononcés (jusqu'à cinq fois plus importants) suite à la modélisation  $1D$  que pour la modélisation  $3D$ . On tire la même conclusion dans la direction  $x$  pour le point  $C_2$  et dont les résultats sont présentés

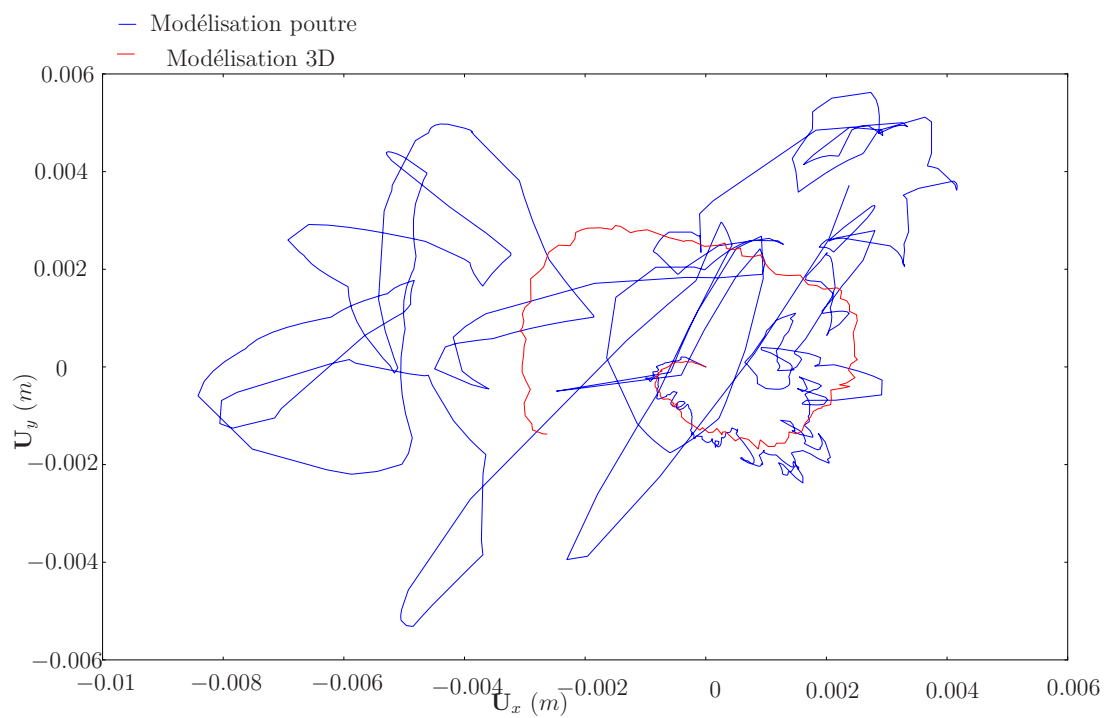


Figure 3.81.: Orbites du stator en modélisation poutre et 3D

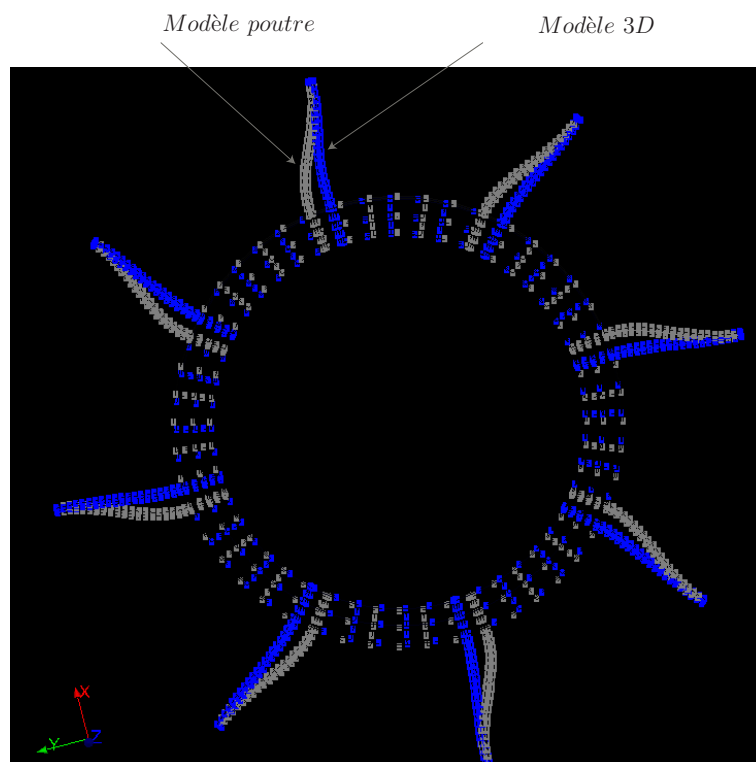


Figure 3.82.: État du stator à  $t = 0.1576$  s



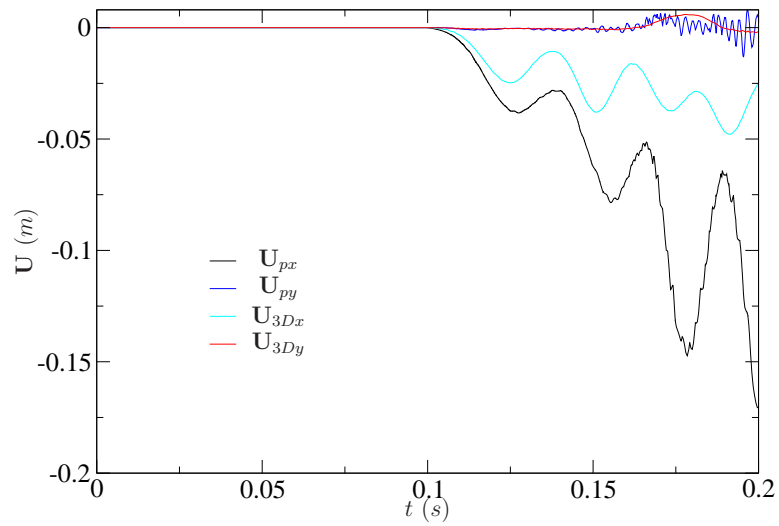


Figure 3.83.: Déplacements de  $C_1$

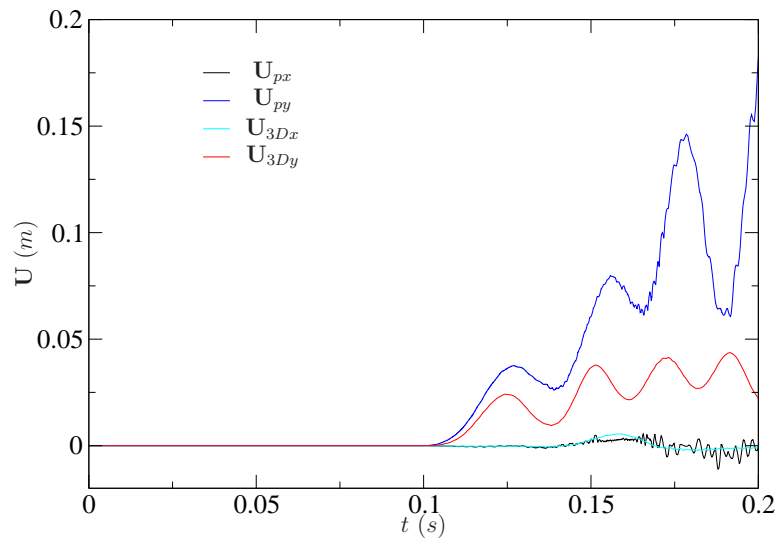


Figure 3.84.: Déplacements de  $C_2$

dans la Fig. 3.84.

Que ce soit au niveau du comportement normal constaté sur les orbites du centre du stator (Fig. 3.81) ou bien au niveau du comportement tangentiel, qui se manifeste par la rotation du stator autour de lui-même (Fig. 3.82, Fig. 3.83 et Fig. 3.84), on trouve des écarts assez prononcés entre les modélisations 1D et 3D du contact rotor-stator. Cela permet de confirmer les conclusions obtenues précédemment et de mettre en valeur l'importance d'une modélisation 3D pour le traitement des ralentissements accidentels de turbines avec contact rotor-stator.

## 3.6. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons résumé l'état de l'art sur le contact rotor-stator et explicité les objectifs de modélisation en contact rotor-stator retenus dans la thèse. Ceci a permis de se situer par rapport à la bibliographie et aux travaux récents dans le domaine. On a ensuite détaillé les outils théoriques et techniques qui permettent d'aborder le problème. Ces outils sont intimement liés au choix du logiciel de calcul par éléments finis, qui dans notre cas est le Code\_Aster. C'est pourquoi on a présenté les possibilités offertes par le code en modélisation poutre et 3D, ainsi que les différentes contraintes avant d'aborder trois cas de contact rotor-stator pour des dimensions inspirées d'un GTA chez EDF.

La méthode de résolution du contact est une méthode de pénalité, c'est pourquoi une analyse sur l'influence des raideurs de pénalité a été effectuée, ainsi qu'une analyse du choix du schéma en temps. Ce choix en modélisation poutre s'est orienté vers un schéma explicite des plus stables qui est le schéma de Runge-Kutta. Par contre, le choix était restreint en modélisation 3D : le schéma de Newmark amorti étant le meilleur choix dans le Code\_Aster. On a souligné l'importance de l'amortissement numérique dans le schéma de Newmark, ainsi que la faible taille du pas de temps, pour être capable de gérer le contact rotor-stator en gardant une stabilité du schéma et en évitant l'introduction d'une énergie parasite dans le système.

### 3.6.1. Sur les performances des calculs

Les exemples traités mettent en valeur le coût élevé en temps CPU nécessaire en traitement 3D du contact rotor-stator. Ce coût est d'une part lié au nombre de degrés de liberté du modèle et surtout au nombre de nœuds des surfaces de contact. Les raideurs de pénalité jouent un rôle également. Si ces raideurs sont augmentées, on représente mieux la physique du contact, mais on perd rapidement en performance CPU. La convergence des algorithmes de contact devient plus difficile, on remarque une augmentation prononcée du nombre des itérations et une baisse du pas de temps nécessaire à la convergence. Cela est également vrai en modélisation poutre. Une augmentation des raideurs de pénalité en modélisation poutre augmente également la consommation en mémoire vive et pourrait conduire à un dépassement des capacités de la machine. Dans les exemples traités et pour un schéma en temps de Runge-Kutta, un minimum de 10 Gb de mémoire est exigé pour converger. Si les

valeurs des coefficients de pénalité sont divisées par 100, 6 *Gb* seront suffisants. Le temps de calcul lui aussi diminue.

Pour traiter un contact rotor-stator autour d'une vitesse critique en modélisation 3D il faut s'attendre à un coût en temps de calcul prohibitif. En effet, dès que la sévérité du contact augmente, le pas de temps nécessaire à la convergence chute dramatiquement. Des schémas d'intégration en temps explicites sont plus adaptés au traitement de tels cas de contact.

### 3.6.2. Apport d'une modélisation 3D sur le contact rotor-stator

Les exemples mettent en avant l'apport d'une modélisation 3D pour le traitement du contact rotor-stator :

**Sur le comportement du stator :** le stator présente des différences de comportements assez prononcées entre les deux modélisations. La modélisation des stators pour le contact traité par des algorithmes 3D et 1D, garantit que les différences de comportement des stators ne proviennent pas de la modélisation des stators. Les seules sources de différences proviennent du traitement du contact. En effet, des effets de déformations localisés du stator sont observés dans une modélisation 3D du contact alors que cela n'est pas visible en modélisation poutre. La cause principale repose dans la prise en compte de la déformation de la section du rotor et qui conduit en modélisation 3D à avoir une surface de contact rotor-stator plus réduite qu'en modélisation poutre. L'intensité des forces de contact, et leur distribution spatiale, ainsi que le nombre de nœuds engagé par le contact diffère entre les deux modélisations. La déformation de la section du rotor a également un effet très important sur le couple de frottement qui, en modélisation poutre, est intensifié par rapport à une modélisation 3D du contact, conduisant à des écarts très remarquables entre les comportements des stators en modélisations 1D et 3D.

**Sur le comportement du rotor :** on n'est pas capable sur le Code\_Aster de traiter le ralentissement d'une turbine suite à un contact rotor-stator, mais suite aux exemples traités dans ce chapitre, on peut conclure que le couple de frottement dû au contact rotor-stator est surestimé en modélisation 1D par rapport à une modélisation 3D. Cela engendrerait un effet évident sur le ralentissement si la vitesse de rotation n'était pas imposée. Le comportement du rotor dont la vitesse de rotation est imposée, présente des différences, sans que ces différences ne soient trop importantes, entre les modélisations poutre et 3D.

Dans ce chapitre, et comme la vitesse de rotation du rotor est une donnée du problème, on n'était pas capable d'observer certains effets du contact rotor-stator tel la précession inverse. On sait par contre que ce phénomène est lié à l'effort de frottement rotor stator. Par la suite, et comme un traitement par des algorithmes simplifiés et en modélisation poutre conduit à une imprécision assez importante sur le couple de frottement, cela induira forcément des imprécisions sur le comportement du rotor. On pourrait observer une précession inverse en modélisation poutre, alors que ce n'est pas le cas en 3D ou inversement. Mais malheureusement, et comme la vitesse du rotor est imposée, on n'est pas capable de le montrer concrètement

par un exemple numérique. Il fait cependant l'objet d'une perspective dans le cadre d'autres travaux.

### 3.6.3. Cas industriels : choix entre les modélisations 1D et 3D

Bien qu'une modélisation 3D du contact rotor-stator est plus précise qu'une modélisation 1D, son coût de calcul est une limitation importante. Les imprécisions dues à une modélisation 1D du contact rotor-stator sont selon les cas tolérables ou non. Les exemples traités dans ce chapitre montrent que les différences les plus prononcées entre les modélisations 1D et 3D sont liées au couple de frottement. Le comportement normal au contact présente moins de différences entre les modélisations 1D et 3D. On distingue alors trois facteurs qui permettent d'établir un choix entre une modélisation 1D ou 3D du contact rotor-stator : la sévérité du contact normal, le coefficient de frottement entre les surfaces de contact, la rigidité du rotor et/ou du stator.

**Si le frottement est négligeable :** l'apport d'une modélisation 3D dépend du cas traité.

- **Si le stator est rigide :** l'intérêt d'une modélisation 3D n'est pas justifiable. En effet, la déformation de la section du rotor ne laissera pas d'empreinte sur le stator, vu sa rigidité. D'autre part, comme le frottement est négligeable, malgré la déformation de la section 3D et la surestimation du couple de frottement due à la rigidité de la section dans l'hypothèse poutre en modélisation 1D du contact, cette surestimation reste négligeable et une modélisation 3D n'est donc pas nécessaire.
- **Si le stator est déformable :** dans un tel cas et pour bien juger la nécessité d'une modélisation 3D du contact, il faut estimer, si c'est possible, l'intensité du contact. Ce qu'une modélisation 3D apporte dans ce cas, et comme le montre la première application sur le contact rotor-stator dans cette thèse, ce sont les effets locaux (déformation localisée du stator due à l'empreinte du rotor). Si l'intensité du contact est faible, et si la déformation de la section du rotor est faible (très faible flèche due à un petit balourd et un faible jeu rotor-stator par exemple) alors une modélisation 1D suffira. Cependant si l'intensité du contact est importante, une modélisation 3D contribue à une meilleure description des effets localisés.
- **Au voisinage d'une vitesse critique :** si on s'approche d'une vitesse critique, l'intensité du contact s'élève considérablement et les vibrations du rotor s'intensifient donnant lieu à une fréquence de contacts importante. Dans ce cas et vu l'intensité du contact, si le rotor et le stator sont déformables, le contact rotor-stator doit nécessairement être modélisé en 3D. Si par contre, on considère des rotors et des stators rigides, l'intérêt de la modélisation 1D ne sera plus justifiable.

**Si le frottement n'est pas négligeable :** dans un tel cas, l'apport d'une modélisation 3D est net. On distingue quand même plusieurs cas :

- **Si l'intensité du contact est faible :** même si le coefficient de frottement entre les surfaces est non négligeable, l'intérêt d'une modélisation 3D est limité. En ef-

fet, dans un tel cas, les déformations des sections dues au choc seront négligeables et la surestimation du couple de frottement par une modélisation  $1D$  du contact est acceptable, car le couple de frottement dépend de la pression de contact, qui dans ce cas, sera faible et génère moins d'imprécisions sur le couple de frottement. Selon la taille du modèle et les performances en temps de calcul, l'ingénieur pourrait se satisfaire d'une modélisation  $1D$  légèrement moins précise. Si la taille du modèle est moyenne, voir faible, une modélisation  $3D$  est appréciable. Elle n'est pas justifiable si le temps de calcul est rédhibitoire, vu que son apport est limité. Les cas de calcul traités dans ce chapitre correspondent à des cas où l'intensité de contact est significative et le coefficient de frottement est non négligeable. L'apport d'une modélisation  $3D$  est évident. Il faut garder à l'esprit également, que si l'intensité du contact est faible, le temps de calcul d'une modélisation  $3D$  chute car moins d'itérations sont nécessaires pour résoudre le problème de dynamique transitoire à un pas de temps donné, ce qui peut justifier l'intérêt d'une modélisation  $3D$  même si la précision apportée n'est pas immense.

- **Si l'intensité du contact est importante** : dans ce cas et vu l'intensité du contact et les déformations des sections, le contact rotor-stator doit nécessairement être modélisé en  $3D$ . Une modélisation  $1D$  n'est pas physique. Elle conduit à une surestimation importante du couple de frottement, et néglige les effets localisés, tel l'empreinte du rotor sur le stator (voir le premier cas d'étude). Par la suite, au voisinage d'une vitesse critique, l'apport d'une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator est évident.

**Pour traiter des problèmes de ralentissement** : deux facteurs dominent l'intensité d'un ralentissement suite à un contact rotor-stator :

- Le coefficient de frottement
  - L'intensité du contact. Cette dernière croît considérablement au voisinage d'une vitesse critique même si le balourd est faible.
- Ces deux facteurs combinés conduisent à la création d'un couple de frottement qui permet de ralentir le rotor. Les applications de la thèse ont permis de révéler la surestimation du couple de frottement par une modélisation  $1D$ . Par la suite, si le frottement et le balourd ne sont pas négligeables une modélisation  $3D$  est nécessaire pour traiter des problèmes de ralentissements accidentels de turbines.

**D'autres conclusions** :

- Les exemples traités dans la thèse permettent de conclure que les modèles de contact rotor-stator qui dominent la bibliographie et dans lesquels le rotor est un rotor de Jeffcott, et le stator est rigide, correspondent à une situation très particulière. Si la déformation des rotor et stator est prise en compte, les résultats changent radicalement, surtout si le frottement rotor-stator n'est pas négligeable.
- Pour s'assurer de la cohérence des modélisations poutre et  $3D$  du stator, on a retenu le choix de modéliser le stator par des éléments volumiques  $3D$ , que le contact soit géré en modélisation  $1D$  ou bien  $3D$ . Cela a permis d'avoir une cohérence des comportements des stators entre les modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact : les seules différences proviennent du traitement du contact. Cependant,

il faut souligner que les modélisations  $1D$  du contact rotor-stator pour lesquelles le stator est modélisé par des éléments poutre, et qui dominent la littérature, s'éloignent d'autant plus de la présentation physique du contact rotor-stator que les modélisations  $1D$  du contact présentées dans ce chapitre, car, et comme évoqué dans le §3.4.2 et l'Annexe B, il est difficile de présenter des cas industriels de stators par une modélisation poutre (élancement non suffisant, force de contact reportée à la fibre neutre du stator sans adaptation de sa valeur, recouvrement de matière au point d'attache de l'ailette avec la couronne, etc.).

- La thèse apporte également des renseignements sur le temps de calcul nécessaire en résolution implicite, et surligne la hausse dramatique du temps CPU au voisinage de la vitesse critique, avec la sévérité du contact et la finesse du maillage.

Ce chapitre a permis d'illustrer l'apport d'une modélisation  $3D$  sur les problèmes de contact rotor-stator. Cependant, l'utilisation de Code\_Aster a imposé certaines contraintes qui n'ont pas permis de traiter des cas de ralentissement, de précession inverse, etc. et a limité également l'accès à certaines grandeurs physiques comme le couple de frottement et la distribution des efforts. Par contre, ces contraintes ont été contournées proprement et n'ont pas été un handicap au travail de la thèse. On a donc traité dans un code de calcul industriel, des cas de contact rotor-stator inspirés de vrais cas industriels et cela a permis de repousser les limites de simulation existant dans ce code, en vue d'un développement qui permettra à l'ingénieur une facilité d'utilisation d'un code de calcul par éléments finis pour le contact rotor-stator en modélisation  $3D$ . L'analyse des résultats obtenus tel l'examen du comportement du stator et les orbites décrites par le rotor a permis de tirer les conclusions pertinentes permettant de mettre en avant l'importance d'une modélisation  $3D$  dans le traitement de problèmes de contact rotor-stator.

## 4. Conclusions générales

### Bilan des travaux

Dans l'objectif de simuler, avec un coût de calcul tolérable, le ralentissement accidentel d'une turbine avec une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator, la thèse a eu deux objectifs principaux. Le premier consiste à développer une méthode non intrusive de bascule permettant d'utiliser une modélisation poutre et une autre  $3D$  dans deux phases différentes de la même simulation. Le deuxième vise à mettre en valeur l'importance d'une modélisation avec des éléments volumiques du contact rotor-stator et de permettre d'identifier les cas industriels présentant une nécessité d'une telle modélisation onéreuse en temps de calcul et les cas pour lesquels une modélisation  $1D$  permet d'avoir une précision acceptable.

L'utilisation du Code\_Aster a généré certaines contraintes<sup>1</sup> car ce code de calcul, qui présente un outil ouvert et bien adapté à la recherche scientifique, n'est pas dédié à la dynamique transitoire des rotors (surtout en modélisation  $3D$ ). C'est un logiciel majoritairement implicite, et par la suite conduit à des temps de calcul dépassant largement les logiciels offrant la possibilité d'une modélisation avec des schémas en temps explicites adaptés au phénomène du contact, tel Abaqus. Le travail de la thèse a également permis de mettre en évidence des perspectives intéressantes en termes d'évolution du Code\_Aster pour la modélisation  $3D$  des machines tournantes.

La thèse s'est divisée en deux grands chapitres chacun dédié à un des deux objectifs principaux de la bascule. On a présenté dans le premier la méthode de la bascule après avoir synthétisé l'état de l'art sur la réduction de modèles qui permet de réduire le coût de calcul sur des problèmes incluant des non-linéarités limitées en espace et/ou en temps. On a également présenté les outils numériques et théoriques permettant le développement de la bascule dans le cadre d'une résolution temporelle de la dynamique transitoire. Vu que les non linéarités de contact sont localisées en espace et en temps, un raccord poutre- $3D$  a été présenté et la bascule a été proposée d'une modélisation poutre vers une modélisation  $3D$  ou mixte poutre- $3D$ . La bascule a été présentée sous deux versions, l'une se servant d'un amortissement numérique pour filtrer les hautes fréquences générées à l'instant de bascule et une autre méthode plus élégante se servant de trois corrections statiques à trois pas de temps consécutifs pour effectuer une correction en vitesses permettant d'avoir une initialisation de la solution  $3D$  qui ne génère pas de hautes fréquences. Cette dernière méthode a été étendue à la dynamiques des rotors, dans une modélisation qui permet de prendre en compte la gyroscopie des éléments volumiques, et a été validée par comparaison avec des modélisations  $3D$  de référence effectués depuis

---

1. Le choix d'un autre code de calcul aurait bien entendu engendré d'autres contraintes, surtout que le Code\_Aster est un logiciel ouvert, ce qui est très adapté à un travail de recherche.

$t = 0$  et jusqu'à la fin de la simulation, ainsi que par une analyse de la consistance énergétique de la bascule.

Le Chapitre 2 présente également la difficulté principale de la méthode de la bascule qui est la non orthogonalité des champs  $\mathbf{PU}_p$  et  $\mathbf{U}_{3Dc}$ , et présente une perspective intrusive pour les surmonter. Cette non vérification de la condition d'orthogonalité n'est cependant pas une barrière à la méthode de la bascule.

Le deuxième objectif fait l'objet du Chapitre 3, dans lequel on présente tout d'abord les outils théoriques et numériques du simulation d'un phénomène de contact et notamment celui du contact rotor-stator, et un résumé de l'état de l'art sur ce dernier. On met l'accent sur la rareté des modélisation  $3D$  du contact rotor-stator dans la littérature. Dans l'objectif d'effectuer une comparaison des modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact rotor-stator qui permet d'identifier la contribution d'une modélisation  $3D$  du contact, par rapport à une modélisation  $1D$ , on a présenté deux modélisations cohérentes, l'une  $1D$  et l'autre  $3D$  d'un même système rotor-stator inspiré des dimensions du GTA 1300 MW. Les deux modélisations étant cohérentes, les seules différences entre les modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact, constatées dans les exemples numériques, proviennent uniquement des différences de traitement du contact. L'utilisation de Code\_Aster a imposé une résolution implicite du problème de contact/frottement en modélisation  $3D$ , via le schéma de Newmark amorti, ce qui a conduit à des temps de calcul importants. Une méthode de pénalité a été utilisée en modélisations  $1D$  et  $3D$  (même coefficients de pénalité pour garantir la cohérence des modélisations). Bien que la la vitesse de rotation est une donnée du problème, et que cela empêche d'effectuer une comparaison entre le comportement en ralentissement d'une modélisation  $1D$  et d'une modélisation  $3D$ , il était possible de conclure sur les différences entre les couples de contact/frottement générés par chaque type de modélisation grâce aux comportements des stators.

Les exemples mettent en valeur l'importance des éléments volumiques dans le traitement d'un contact rotor-stator, notamment pour une meilleure prise en compte du couple de frottement. Ce dernier est surestimé dans une modélisation  $1D$  car dans un tel cas la section du rotor est rigide et engage un angle de contact plus large avec le stator que dans le cas d'une modélisation  $3D$  dans laquelle la déformation de la section est bien prise en compte. Si l'intensité du contact est faible et le frottement est négligeable, la modélisation  $1D$  présente l'avantage d'un temps de calcul compétitif et d'une précision acceptable.

La thèse a donc présenté un outil numérique, qui est la bascule, et qui permet de réduire le temps de calcul sur les problèmes de contact rotor-stator pour lesquels le contact est limité en espace et en temps. Elle a permis également de mettre en valeur l'importance d'une modélisation  $3D$  du contact rotor-stator.

## Perspectives

La thèse apporte une contribution pour la modélisation et la résolution numérique d'une telle problématique assez complexe dans un code industriel.

Concernant le travail de la bascule, le Code\_Aster n'a pas permis le développement de la bascule d'un modèle poutre vers un modèle mixte poutre- $3D$  (utilisant



un raccord poutre- $3D$ ) en dynamique des machines tournantes. Il n’y a pas de difficultés particulières sur ce point, qui déjà été effectué en dynamique transitoire sans rotation d’ensemble. La bascule inverse  $3D$  vers poutre est également intéressante, et simple à effectuer. Elle pose moins de difficultés que la bascule poutre vers  $3D$ , car elle consiste à “dégrader” la précision et non pas à l’enrichir par la construction d’un champs adéquat. La bascule inverse n’était pas une priorité dans le cadre de la thèse mais reste une perspective intéressante. La bascule, étant une approche non intrusive, sera intégrée prochainement dans le Code\_Aster. Par ailleurs, la non vérification de la condition d’orthogonalité a permis d’ouvrir une perspective sur les approches intrusives qui permettent de forcer l’orthogonalité et par la suite de pallier à certaines difficultés dans la méthode de la bascule, tel le déphasage entre les solutions poutre et  $3D$  de référence en dynamique des rotors. L’investissement dans cette direction sera rentable, si on arrive à contourner la nécessité de factoriser des matrices de grandes tailles, car cela nécessite un temps CPU non négligeable ainsi qu’un espace mémoire important.

Pour la partie contact rotor-stator et dans l’objectif d’effectuer des calculs de contact rotor-stator en modélisation  $3D$  moins onéreuse en temps de calcul, il est nécessaire que la résolution s’effectue à travers un schéma en temps explicite adapté aux problèmes de contact. L’utilisation d’un raccord poutre- $3D$  permet de réduire la taille du modèle considérablement et de gagner en temps de calcul (un pourcentage de plus de 20 % dans les cas présentés dans le Chapitre 3).

L’aspect ralentissement est également une perspective intéressante. La thèse a permis de conclure que le couple de contact/frottement est différent entre les modélisations  $1D$  et  $3D$ . Il est dommage cependant que nous n’ayons pas réussi à post-traiter les efforts de contact. Il serait en effet très intéressant de connaître leur intensité et distribution spatiale, et ce travail mérite d’être mené. D’autre part, comme dans le Code\_Aster la vitesse de rotation est une donnée du problème, il n’était pas possible de connaître l’effet concret qu’a le couple de contact/frottement sur le ralentissement, ainsi que sur certains effets comme la précession inverse. C’est une perspective importante car les différences constatées sur le comportement du stator en modélisations  $1D$  et  $3D$  du contact sont assez prononcées, ce qui permet de conclure que les effets observés dans le cas d’un ralentissement à vitesse non imposée seront importants (précession directe sur un modèle et inverse sur l’autre, ralentissement plus rapide sur le modèle  $1D$ , etc.). D’autres phénomènes peuvent s’observer et n’ont pas fait l’objet du Chapitre 3. On cite les effets de plastification localisés, l’arrachement de matière, l’effet thermo-mécanique, etc. et qui ne sont observables que sur une modélisation  $3D$ .

Il est également intéressant sur un problème de ralentissement d’une turbine avec un contact rotor-stator, de comparer une modélisation entièrement poutre, une autre entièrement  $3D$  et une troisième utilisant la méthode de la bascule (et la bascule inverse) et un raccord poutre- $3D$  pour illustrer le gain en temps de calcul et vérifier la précision du calcul.



# Annexes



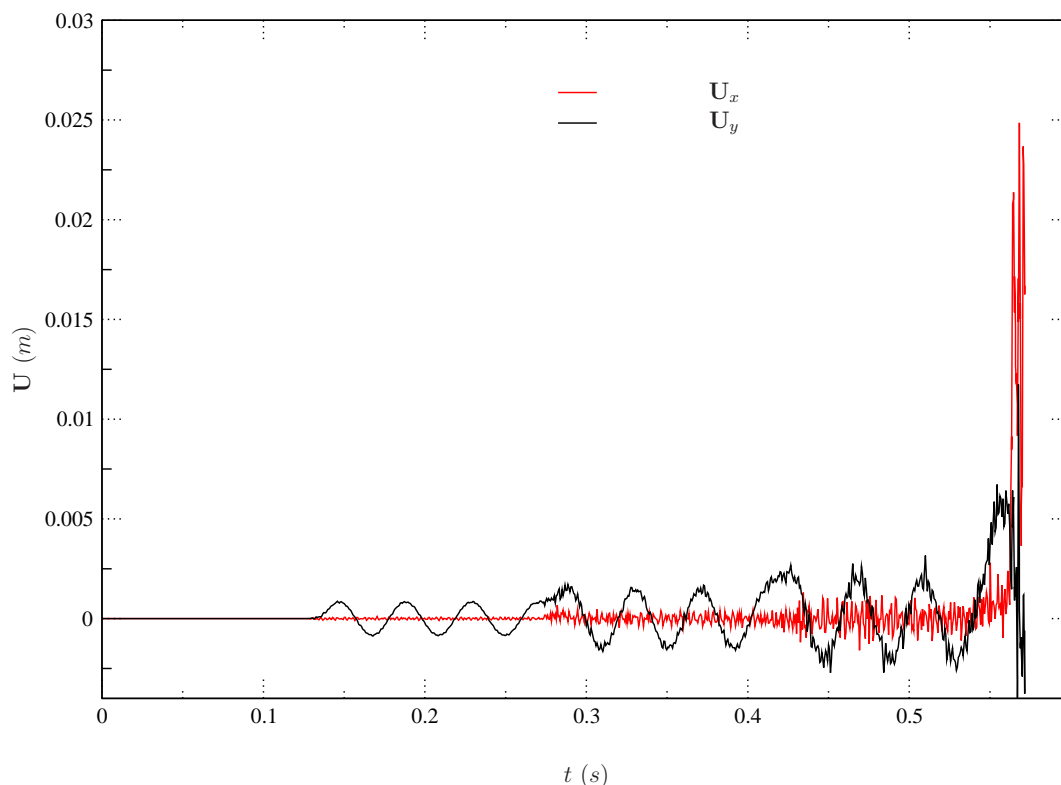
# A. Choix du schéma en temps pour un problème de contact rotor-stator

On rappelle qu'une synthèse bibliographique sur les schémas en temps, qu'on mentionne dans ce paragraphe, est présentée dans le §2.3.

Le schéma de Newmark conserve l'énergie totale du système (si elle reste positive). Cependant il doit garder un pas de temps faible pour converger dans le cas non-linéaire. L'algorithme présente également des oscillations numériques qui peuvent mener à la divergence en cas de contact (cas complexes). Pour le stabiliser il faut introduire un amortissement numérique dissipant de l'énergie mais rendant l'algorithme précis au premier ordre. On peut également avoir recourt au schéma  $\alpha$ -généralisé qui dissipe de l'énergie dans le cadre linéaire et qui, comme le schéma de Newmark, peut traiter des cas non-linéaires pour des pas de temps assez petits.

Ces derniers algorithmes ne conservent pas les moments angulaires et linéaires et ne conservent pas l'énergie et peuvent même introduire une énergie au système et le rendre instable. Cela a mené au développement des algorithmes EMCA et EMDC. Le schéma EMCA conserve les moments linéaires et angulaires ainsi que l'énergie du système. Lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, des modes numériques de hautes fréquences apparaissent dans le schéma EMCA, et peuvent conduire à des oscillations non-physiques et à la divergence. Ce qui a donné lieu au développement de EMDC qui est une version de l'algorithme EMCA qui introduit la dissipation numérique d'énergie, ce qui le rend stable tout en conservant le moment linéaire et angulaire.

En introduisant le contact dans un algorithme de calcul, les résultats montrent que la méthodes de Newmark et la méthode EMCA donnent des résultat semblables pour des pas de temps très faibles. Une fois que le pas de temps augmente, la méthode de Newmark diverge alors que la méthode EMCA peut toujours converger. En effet, le schéma de Newmark crée de l'énergie dans le système. Si le pas de temps est faible cette création d'énergie reste négligeable. Mais, si le pas de temps est important, la création d'énergie s'accumule et crée des oscillations importantes dans le système conduisant à la divergence. La création d'énergie dans le schéma de Newmark est plus évidente suite à un contact. L'algorithme  $\alpha$ -généralisé est aussi instable, et de l'énergie pourrait être introduite au lieu d'être dissipée, lors du contact. Les schémas EMCA et EDMC n'introduisent pas de l'énergie dans le système même en présence d'interactions de contact. Par contre, ces schémas ne sont pas encore implantés dans des logiciels commerciaux de calcul par éléments finis. Leur utilisation est donc éliminée dans le cadre de la thèse malgré l'intérêt qu'apporte leur stabilité en



**Figure A.1.:** Déplacements du point  $C_1$  pour un schéma de Newmark non amorti

comparaison avec le schéma de Newmark.

Si le schéma de Newmark n'est pas amorti et on tente de résoudre le problème de contact rotor-stator, le contact insère de l'énergie dans le système et cela se traduit par des vibrations qui s'amplifient avec le temps sur le rotor ou le stator. On résout le même problème de contact rotor-stator du §3.5.2 par un schéma de Newmark non amorti. La Fig. A.1 montre les déplacements du point  $C_1$  appartenant au stator.

Il est évident que des oscillations numériques hautes fréquences se perçoivent sur le stator et rendent la convergence de l'algorithme de contact très lente. Ce dernier arrête de converger un peu avant  $t = 0.6$  s. Les résultats obtenus ne sont pas physiques. Même en la présence d'amortissement physique on ne peut pas éliminer l'amortissement numérique du schéma de Newmark pour les cas de contact, sous peine de divergence et de simulation non physique.

# B. Approche ingénieur pour le contact rotor-stator

## B.1. Approche ingénieur

L'objectif de ce premier travail est de faire une simulation d'un modèle éléments finis inspiré de la thèse de Roques [2], mais avec une zone de contact du rotor en trois dimensions, et celle du diaphragme modélisé en coque. Le but est, d'une part de prendre en main le problème et d'acquérir une connaissance d'un logiciel éléments finis commercial tel Abaqus, et d'autre part, d'avoir une estimation du temps de calcul sur un logiciel du commerce.

## B.2. Travail réalisé

Le problème industriel peut être résumé comme suit : suite à un accident, l'ailette terminale d'une turbine se détache générant ainsi un balourd important (45 kg) modélisé par une masse ponctuelle fixée sur un disque à 1 m du centre de rotation (Fig. B.2). A ce moment la turbine est découplée du générateur électrique et ralentit sous l'effet des efforts aérodynamiques dus aux fluides environnants. Ces derniers créent un couple sur le rotor qui dépend de la vitesse de rotation instantanée. La vitesse de rotation de la turbine décroît alors lentement et passe par une vitesse critique. Il en résulte une amplitude vibratoire importante, ce qui provoque le contact entre la périphérie de l'arbre et une partie du stator (le diaphragme).

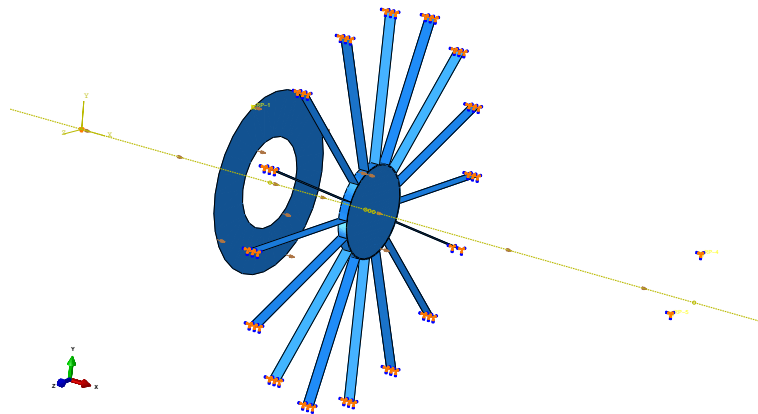
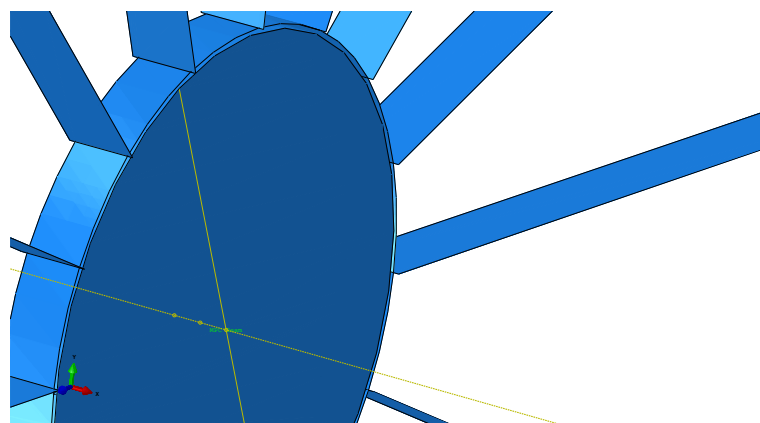


Figure B.1.: Modèle Abaqus



**Figure B.2.:** Zoom montrant la liaison poutre-3D et le jeu entre le rotor et le diaphragme.

L'idée est de créer un modèle assez simple qui représentera les différents phénomènes mis en jeu. Le rotor est modélisé par une poutre connectée à une zone tridimensionnelle (la zone susceptible d'entrer en contact), par une liaison standard d'Abaqus (Fig. B.2).

Le couple résultant des efforts aérodynamiques dépend de la vitesse de rotation de la turbine qui est une inconnue du problème. Il est donc imposé par l'intermédiaire d'une routine Fortran, qui utilise comme valeur d'entrée la valeur de la vitesse de rotation à la fin du pas de temps précédent.

Le contact est traité par la méthode de Lagrange. Par contre, la méthode de pénalité est utilisée pour la résolution du problème de frottement avec un coefficient de frottement de Coulomb de  $\mu = 0.1$ . Cette modélisation a permis de reproduire le modèle physique avec une bonne précision au niveau de la zone de contact. Deux maillages ont été faits dont l'un est plus grossier que l'autre. Pour le maillage grossier (Fig. B.3), le pas de temps automatiquement calculé dans Abaqus, et qui est légèrement inférieur au pas de temps critique nécessaire à la convergence de l'algorithme explicite d'intégration en temps, n'est pas suffisant pour avoir une convergence. Il ne permet pas, non plus, d'éviter les instabilités numériques dans la solution. Ces instabilités conduisent à une mauvaise interprétation du comportement de la turbine, car les vibrations des points appartenant à sa surface auront des amplitudes supérieures aux amplitudes réelles, causant par la suite des contacts artificiels et des ralentissements artificiels. Ces phénomènes numériques se manifestent par des instabilités dans la courbe décrivant la vitesse de rotation de la turbine en fonction du temps. Pour palier à ces difficultés, le pas de temps généré par le solveur d'Abaqus a été multiplié par une valeur de 0.9. Cela a permis de stabiliser la solution, sans toutefois conduire à une augmentation immense du temps de calcul. Le pas de temps utilisé est alors de  $10^{-6}$  s, permettant ainsi de prendre tous les phénomènes de contact mis en jeu, et conduisant ainsi à un temps de simulation de 10h30min pour une simulation de 8 s ralenti. A noter que le pas de temps critique dépend du plus petit élément dans le maillage, et que le raffinement du modèle aura un impact sur le temps de calcul qui est déjà énorme pour un tel modèle.

Cependant, il était nécessaire de faire ce raffinement de modèle pour avoir une



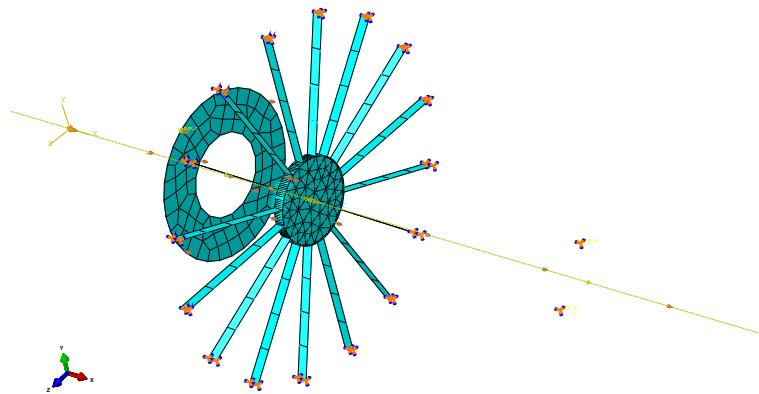


Figure B.3.: Modèle Éléments Finis Abaqus-Maillage Grossier

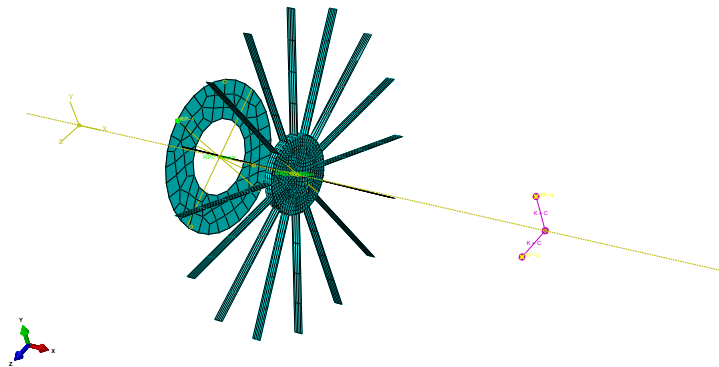
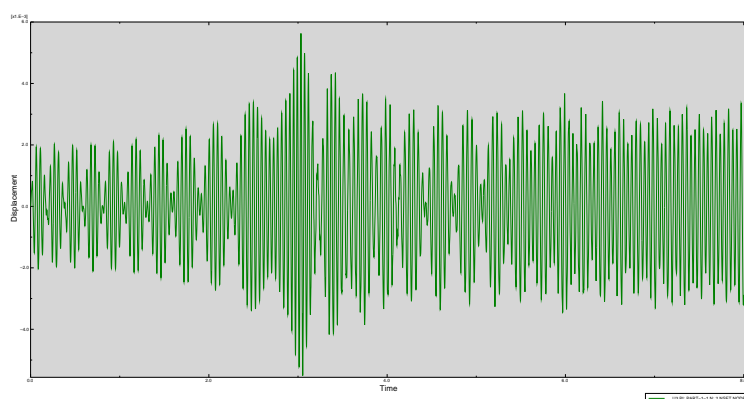


Figure B.4.: Modèle Éléments Finis Abaqus-Maillage Grossier

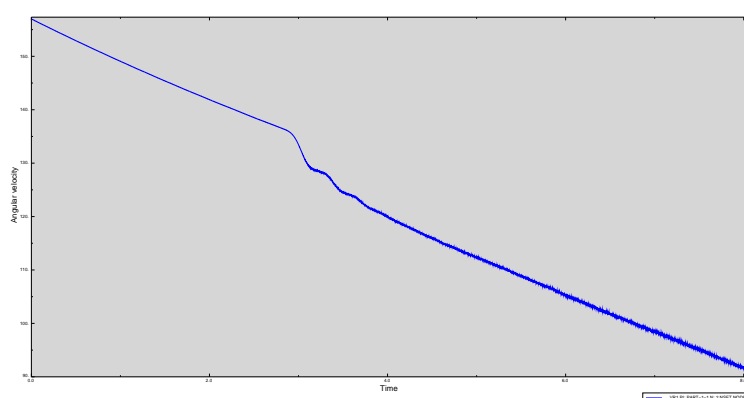
meilleur représentation du contact entre le rotor et le diaphragme. Le maillage grossier reste loin des objectifs de modélisation précise de la zone de contact. Cela a conduit à un développement d'un maillage plus fin de la zone de contact (Fig. B.4 ). Le pas de temps critique calculé par Abaqus est maintenant de  $10^{-7}$  et on était obligé de le multiplier par 0.7 pour stabiliser la solution numérique. Le résultat de ce raffinement du maillage n'est pas très rentable en terme de précision dans la simulation du ralentissement : les résultats du calcul ont conduit à des courbes de ralentissement semblables à celles obtenues lors d'une simulation avec le maillage grossier (Fig. B.5). Cependant, le temps de calcul a vite explosé pour atteindre 24 h de simulation.

## B.3. Conclusion

Les résultats montrés dans la Fig. B.5 correspondent aux résultats de calcul obtenu avec le modèle grossier. La différence entre ces derniers et ceux obtenus avec le modèle fin est légère, et nécessite un examen de plus près, et qui ne représente pas un grand intérêt dans le contexte de ce rapport. Cependant, il faut noter que ces résultats sont parfaitement cohérents avec ceux de Roques [2].



(a) Vibrations mécaniques verticales d'un point de l'arbre



(b) Évolution de la vitesse du rotor en fonction du temps

**Figure B.5.:** Résultats obtenus

Les calculs sont effectués sur un ordinateur Core(TM)2Quad processeur 2.66 GhZ et 2.67 GhZ, et muni de 4 GBytes RAM. Malgré la puissance de la machine, et la modélisation simplifiée des aspects physiques, le temps de calcul est énorme.

A noter aussi que les effets gyroscopiques ne peuvent pas être pris en compte et que le logiciel impose plusieurs limitations telles l'impossibilité de créer des éléments de maillage quadratiques pour la zone tri-dimensionnelle (ce qui est nécessaire pour une modélisation rigoureuse du contact (cf. §3.2.2)) et la liaison poutre-3D standard, que nous avons validé en statique, mais dont la fiabilité pour un problème de contact en dynamique est plus incertaine.

Compte tenu du temps de calcul assez élevé et des limitations imposées par le logiciel de modélisation Abaqus, la méthode de la Bascule a été retenue et le Code\_Aster a été choisi comme code de calcul dans le cadre de la thèse. La méthode de la bascule permet d'aborder la même problématique dans le même, voir meilleur, ordre de précision, et dans un temps de calcul acceptable.

## C. Contrôle de la cohérence des modèles poutre et 3D du stator : autres possibilités étudiées

Dans le §3.4.2, on a présenté une première modélisation du stator poutre dans l'objectif d'avoir une cohérence entre la modélisation poutre et 3D du même stator. Cette modélisation n'a pas permis d'avoir un comportement des stators poutre et 3D qui soit semblable : un écart important a été constaté. On essaye par la suite de réduire cet écart.

Pour éviter le recouvrement de matière et avoir des fréquences propres plus proches et une modélisation poutre qui ressemble plus à la modélisation 3D, on peut imaginer une autre façon de faire la liaison entre les nœuds de la couronne et ceux des ailettes, de façon à ce qu'il n'y ait pas un recouvrement en matière et que les ailettes poutre aient la même longueur que celles 3D. Cela permet d'avoir un comportement des ailettes qui est cohérent entre les deux modèles. Pour qu'il en soit ainsi, on imagine la solution illustrée par la Fig. C.1.

En fait, un élément de solide rigide effectue le lien au niveau de la liaison entre la couronne et l'ailette. Cependant, cette solution qui, théoriquement semble plus raisonnable que la modélisation proposée dans Fig. 3.30, conduit en fait à un écart

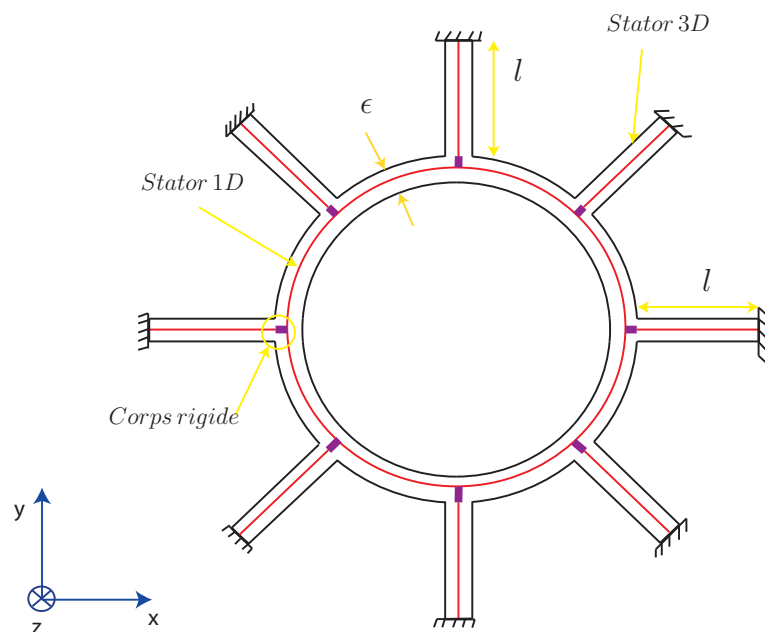
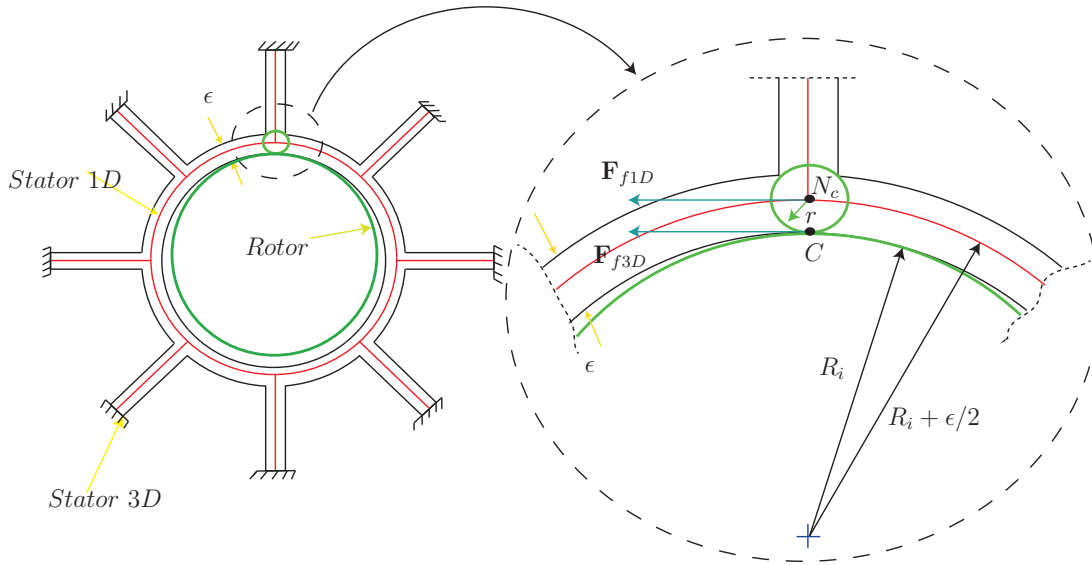


Figure C.1.: Deuxième modèle du stator 1D



**Figure C.2.:** Cohérence des modélisations poutre et 3D du stator

plus important avec le modèle 3D. L'introduction des corps rigides n'améliore pas le comportement sous l'effet d'une excitation du stator. On note que l'introduction des corps rigides fait apparaître de nouvelles fréquences propres dans le système dues aux modes propres des corps rigides et pour les modes communs avec ceux du modèle poutre, l'écart entre les premières fréquences propres s'accroît. Le Tab. 3.2 présente la comparaison entre les fréquences propres du cas de modélisation décrit par la Fig. 3.30 (avec recouvrement en matière). On rappelle que la différence de comportement la plus prononcée est celle constatée sur le premier mode propre illustré par la Fig. 3.32 (mode de rotation du stator autour de son axe principal), et qui en particulier est intéressant car il est excité par la force de frottement en cas de modélisation d'un problème de contact rotor-stator. Réduire l'écart sur ce mode est appréciée. Par contre, l'écart sur ce mode s'accroît pour la modélisation utilisant des corps rigides et monte à 88 %. En effet, pour la modélisation poutre, la première fréquence propre est de 4.9 Hz alors qu'elle est de 2.6 Hz pour la modélisation 3D. C'est pourquoi cette approche a été abandonnée.

On présente par la suite une troisième et dernière possibilité de modélisation, qui a permis de réduire au maximum l'écart entre les modèles poutre et 3D du stator, sans que toute fois cet écart ne soit négligeable.

La Fig. C.2 présente les sources principales de différences de comportement suite à une force de frottement provoquée par un contact rotor-stator entre une modélisation poutre et une autre 3D du stator.

L'objectif principal est d'avoir des comportements des stators poutre et 3D qui soient proches pour une excitation de contact qui est la même. On rappelle que les fréquences propres des modélisations poutre et 3D du stator présentent des écarts surtout sur le premier mode propre (Fig. 3.32) qui est excité par la force de frottement.

En rouge un stator poutre et en noir un autre 3D qui représentent le même stator physique. La couronne nodale du stator poutre est alors de rayon  $R_i + \frac{\epsilon}{2}$ . Si  $C$

représente un point de contact entre le rotor et le stator, alors en modélisation 3D ce point de contact appartient au stator et au rotor. Par contre, en modélisation poutre, et pour une modélisation du contact selon une loi de choc (voir le §3.2.5), ce point n'appartient ni au maillage poutre du stator, ni à celui du rotor. Ce point est le point de contact d'un disque de centre le nœud du rotor représentant la section de ce dernier qui est en contact avec le stator, et le disque de centre le nœud  $N_c$  du stator (voir la Fig. C.2) et de rayon  $\frac{\epsilon}{2}$ . La force de frottement en modélisation poutre  $\mathbf{F}_{f1D}$  est appliquée dans le Code\_Aster<sup>1</sup> au nœud  $N_c$  du stator, alors que  $\mathbf{F}_{f3D}$  est appliquée en  $C$ . En fait,  $\mathbf{F}_{f1D}$  et  $\mathbf{F}_{f3D}$  doivent être égaux au point de contact, et quand on reporte l'effort du modèle 1D ( $\mathbf{F}_{f1D}$ ) sur le nœud, ce report change sa valeur. Cependant, ce n'est pas le cas de Code\_Aster, et  $\mathbf{F}_{f1D}$  est reportée au nœud  $N_c$  sans adaptation de sa valeur. Par la suite, comme les ailettes poutre et 3D ont le même point d'encastrement, alors  $\mathbf{F}_{f1D}$  ne provoque pas la même flexion sur l'ailette poutre que  $\mathbf{F}_{f3D}$  sur l'ailette 3D. Cela se traduit au niveau du stator par une différence de rotation de la couronne autour de son axe dans les deux modélisations. Cela a été constaté sur les modèles de la Fig. 3.30.

La possibilité étudiée par la suite vise à obtenir deux comportements 3D et poutre plus cohérents au niveau des stators. On rappelle que la difficulté principale réside dans la composante tangentielle de l'effort de contact, qui suite à la différence de longueur des ailettes poutres et celle 3D provoque une flexion différente sur les deux modélisations. Par la suite les stators poutre et 3D ont tendance à tourner autour de leur axe d'un angle différent. On présente le modèle de la Fig. C.3 pour lequel les points d'encastresments des ailettes poutres ne sont pas les mêmes que ceux des ailettes 3D, pour que les ailettes poutres aient une longueur identique à celles du modèle 3D et ainsi le même comportement en flexion. Cependant, un recouvrement en matière existe et n'est pas évitable.

Le Tab. C.1 présente les douze premières fréquences propres des stators poutre et 3D modélisés selon l'hypothèse de la Fig. C.3. On note que la nature des modes est la même que ceux du Tab. 3.2 et par la suite on fait référence dans le Tab. C.1 aux mêmes illustrations, pour présenter les modes des stators, que dans le Tab. 3.2.

L'intérêt de la modélisation selon l'hypothèse de la Fig. C.3 est clair. En effet, elle conduit à réduire les différences de comportements des modèles poutre et 3D des stators tel que constaté par une simple comparaison du Tab. 3.2 et du Tab. C.1. Cependant, l'écart entre les modélisations poutre et 3D des stator reste assez prononcé surtout sur le premier mode (écart de 14 %), qui est celui de la rotation du

---

1. A noter que certains codes de calcul par éléments finis, permettent d'associer à un élément poutre des caractéristiques de la section tel que le nœud poutre ne soit pas le centre de gravité de la section, mais son haut ou son bas. Cela permet de modéliser une couronne poutre de rayon égal au rayon extérieur de la couronne 3D ; la matière sera affectée à des nœuds fictifs de rayon  $R_i + \frac{\epsilon}{2}$ . Cela nous évite le recouvrement en matière, et permet d'avoir la même longueur des ailettes poutre et 3D en gardant le même point d'encastrement. La force de frottement causera par la suite une flexion équivalente sur les ailettes poutres et celles 3D.

Code\_Aster ne propose pas ce type de modèle, cette possibilité n'a donc pas été testée. De toute façon elle ne permettrait pas d'éliminer toutes les sources de différences entre les modélisations poutre et 3D du stator, ne serait-ce qu'obtenir des réponses identiques pour les couronnes, ce qui n'est pas évident.

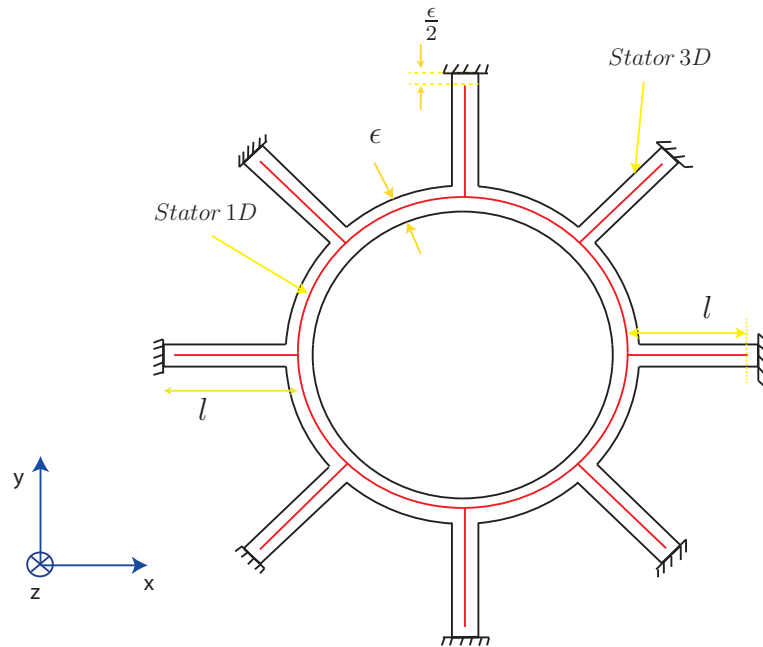


Figure C.3.: Troisième modèle du stator 1D

N°	Fréquences (Hz)		Figures Associées respectivement	Erreur en %
	Stator poutre	Stator 3D		
1	2.24	2.61	Fig. 3.32	14.17
2	5.52	5.13	Fig. 3.33	7.06
3-4	7.66	7.7	Fig. 3.34 et Fig. 3.35	0.5
5-6	11.66	12.13	Fig. 3.36 et Fig. 3.37	3.87
7-8	20.88	21.4	x	2.43
9-10	24.49	25.12	x	2.5
11-12	30.76	33.33	x	7.7

Table C.1.: Comparaison des fréquences propres des stators poutre et 3D de la modélisation illustrée par la Fig. C.3.

stator autour de son axe. Cet écart n'est pas acceptable.

On impose sur  $C_2$  une excitation identique à celle du cas du stator de la Fig. 3.30 et cela conduit aux résultats présentés dans la Fig. C.4. On remarque une amélioration de la différence entre les deux comportements. Elle est également visible si on compare les déformées amplifiées au facteur de 10 à  $t = 0.6$  (s) des stators de poutre et 3D des Fig. C.5 et Fig. 3.39.

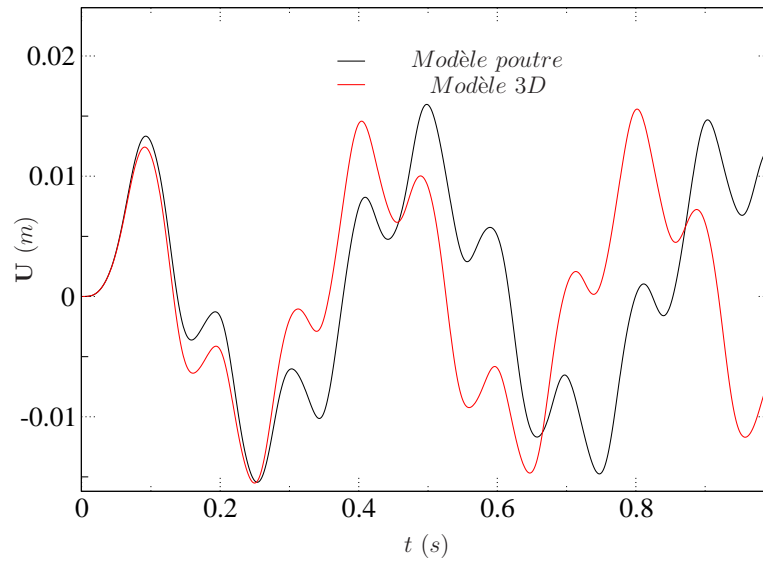
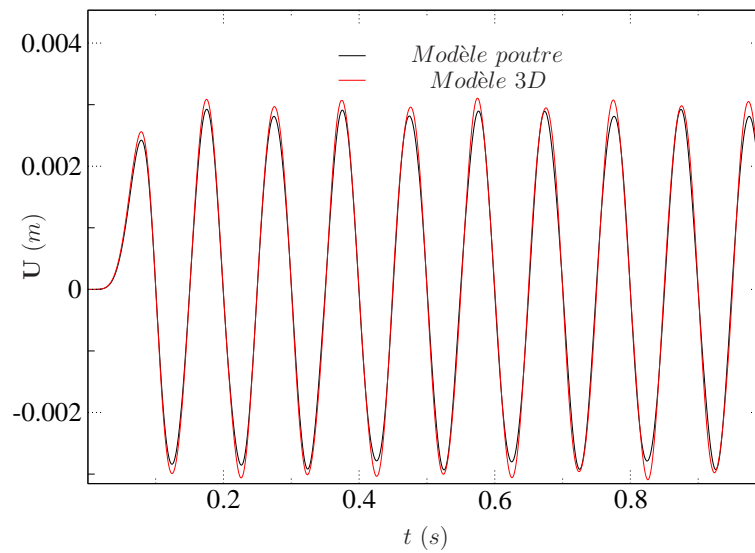
Bien que la modélisation schématisée par la Fig. C.3 est meilleure que celle schématisée par la Fig. C.3, l'écart entre les modélisations poutre et 3D des stator reste très prononcé et par la suite comparer le contact rotor-stator en modélisation poutre et en modélisation 3D ne permettra pas de tirer les bonnes conclusions : il n'est pas évident à comprendre si les différences de comportement proviennent de la modélisation du stator ou bien des algorithmes de contact.

A tout cela s'ajoute pour les cas industriels d'autres contraintes. Les dimensions des ailettes et de la couronne doivent vérifier les hypothèses de modélisation poutre, c'est-à-dire un élanement suffisant. Ce n'est pas le cas des exemples proposés dans ce chapitre. En effet, les dimensions des ailettes de ce chapitre permettent à ce dernières d'être modélisées par des éléments poutre, et une vérification de leur comportement et de leurs fréquences propres a permis de le montrer. Cependant, ce n'est pas le cas des dimensions de la couronne. En effet, si on divise le rayon moyen de la couronne utilisée dans nos cas d'étude par son épaisseur on trouve un rapport de 5.7 (voir la Fig. 3.16 pour les dimensions de la couronne). Cet élanement n'est pas suffisant pour que la couronne soit modélisée par des éléments poutre. A noter que ces dimensions sont inspirées des dimensions d'une turbine réelle, et par la suite, modéliser des cas industriels de turbine par des éléments de poutre conduit à des erreurs non négligeables. Des écarts de plus de 10 % existent entre les fréquences propres de la couronne poutre et celle 3D. Un modèle d'un stator avec un élanement plus important des ailettes et de la couronne, ainsi qu'une finesse de maillage plus importante n'a pas permis d'avoir une cohérence suffisante de comportements des modélisations poutre et 3D du stator<sup>2</sup>. De plus, il est également possible dans l'industrie d'être face à des dimensions qui ne respectent pas les hypothèses poutre et pour lesquelles il est nécessaire de modéliser le stator en 3D.

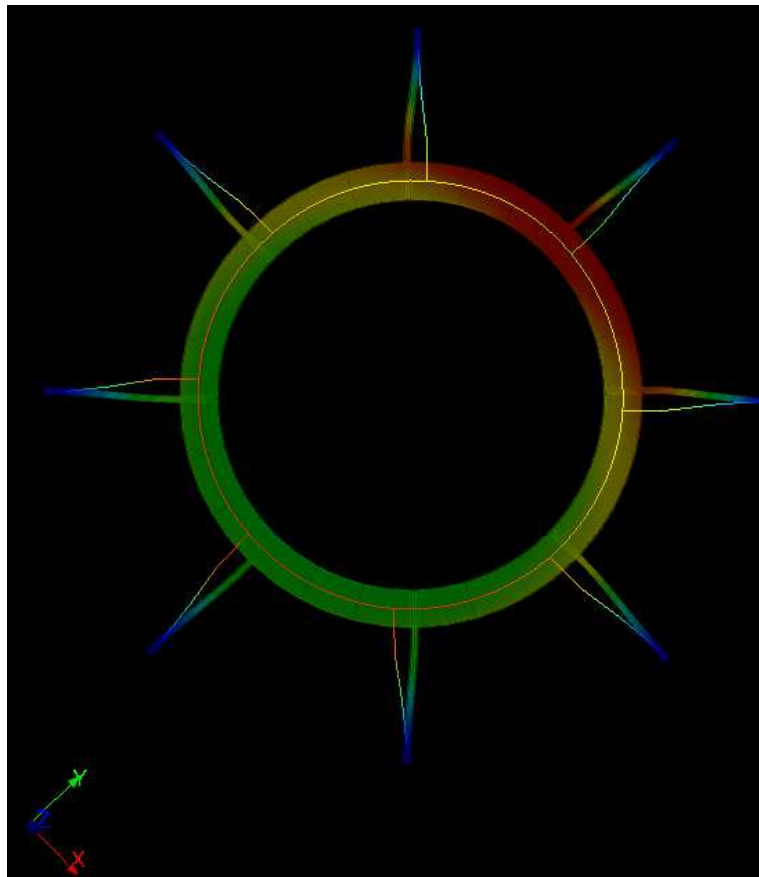
L'écart entre le comportement des stators poutre et 3D est important dans les deux modélisations présentées dans cet annexe : ils seront par la suite abandonnées.

---

2. La façon d'attacher les ailettes à la couronne en est donc probablement la cause. En effet, bien que les deux types de modélisations proposées dans ce paragraphe étaient considérées sur le modèle de stator à ailettes et couronne bien élanées, il n'a pas été possible d'obtenir un comportement proche d'un modèle poutre de stator et de son équivalent 3D.

(a) Déplacements selon  $x$  de  $C_2$ (b) Déplacements selon  $y$  de  $C_2$ **Figure C.4.:** Comparaison du comportement des stators 1D et 3D de la Fig. C.3





**Figure C.5.:** Déformées amplifiées de 10 des stators 3D et poutre à  $t = 0.6 s$



# Bibliographie

- [1] S. Roques, M. Legrand, P. Cartraud, C. Stoisser, C. Pierre, Modeling of a rotor speed transient response with a radial rubbing, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2009) 527–546. (Cité en pages [v](#), [2](#), [4](#), [12](#), [113](#), [119](#), [121](#) et [128](#).)
- [2] S. Roques, Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d’une turbine en situation accidentelle, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2007. (Cité en pages [vi](#), [4](#), [12](#), [112](#), [113](#), [114](#), [115](#), [119](#), [121](#), [139](#), [140](#), [201](#) et [203](#).)
- [3] EDF R&D : Code\_Aster : A general code for structural dynamics simulation under gnu gpl licence <http://www.code-aster.org>, 2001. (Cité en page [5](#).)
- [4] A. Ghanem, Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin, Ph.D. thesis, l’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2013. (Cité en pages [5](#), [11](#), [78](#) et [79](#).)
- [5] L. Peletan, Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact, Ph.D. thesis, l’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012. (Cité en pages [5](#), [121](#) et [132](#).)
- [6] A. Mobasher Amini, Analyse multi-échelle de structures hétérogènes par décomposition de domaine : application aux navires à passagers, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2008. (Cité en pages [8](#) et [12](#).)
- [7] L. Gendre, Approche globale/locale non intrusive : application aux structures avec plasticité locale, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009. (Cité en pages [8](#) et [12](#).)
- [8] N. Narasimhan, M. Lovell, Predicting springback in sheet metal forming : an explicit to implicit sequential procedure, *Finite Elements in Analysis and Design* 33 (1999) 29–42. (Cité en page [9](#).)
- [9] D. Jung, D. Yang, Step-wise combined implicit-explicit finite element simulation of autobody stamping processes, *Journal of Materials Processing Technology* 83 (1998) 245–260. (Cité en page [9](#).)
- [10] C. Lo, T. Hinnerichs, J. Hales, Assessment of efficiency for a hybrid explicit/implicit code simulation of a multiple impact crash scenario, in : *Proceedings of 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 381–386, 2005, 2005. (Cité en page [9](#).)
- [11] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J. Boinini, Combined implicit-explicit algorithms for non-linear structural dynamics, *Revue Européenne des Éléments Finis* 11 (2002) 565–591. (Cité en page [9](#).)

- [12] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J. Bonini, Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics, *Advances in Engineering Software* 33 (2002) 589–603. (Cité en pages 9 et 36.)
- [13] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, Combined implicit/explicit algorithms for crashworthiness analysis, *International Journal of Impact Engineering* 30 (2004) 1161–1177. (Cité en page 9.)
- [14] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, Combined implicit/explicit time-integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168 (2004) 331–339. (Cité en pages 9 et 36.)
- [15] L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J. Bonini, Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of blade/casing interactions, *International Journal of Crashworthiness* 6 (2001) 351–362. (Cité en pages 9 et 36.)
- [16] N. Mahjoubi, Méthode générale de couplage de schémas d’intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures, Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010. (Cité en page 9.)
- [17] N. Mahjoubi, A. Gravouil, A. Combescure, Coupling subdomains with heterogeneous and incompatible time steps, *Computational Mechanics* 44 (2009) 825–843. (Cité en page 9.)
- [18] S. Kelley, Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method, in : In ASME, Proceedings of the Second Computers in Engineering International Conference, 1982. (Cité en page 9.)
- [19] J. Ransom, S. McCleary, M. Aminpour, N. Jr, Computational methods for global/local analysis, Technical Memorandum 107591, NASA . (Cité en page 10.)
- [20] P. Cresta, Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local, Ph.D. thesis, ENS de Cachan, 2008. (Cité en page 10.)
- [21] C. Jara-Almonte, C. Knight, The specified boundary stiffness and force (SBSF) method for finite element subregion analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988) 1567–1578. (Cité en page 10.)
- [22] I. Hirai, An exact zooming method for finite element analyses, in : NASA Conference Publication 2245, 1982. (Cité en page 10.)
- [23] I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta, W. Pilkey, An exact zooming method, *Finite Elements in Analysis and Design* 1 (1985) 61–69. (Cité en page 10.)
- [24] A. Plaza, M. A. Padron, G. F. Carey, A 3D refinement/derefinement algorithm for solving evolution problems, *Applied Numerical Mathematics* 32 (2000) 401–418. (Cité en page 10.)
- [25] H. Ben Dhia, G. Rateau, Mathematical Analysis of the mixed Arlequin method, *Numerical Analysis* 332 (2001) 649–654. (Cité en page 10.)

- [26] H. Ben Dhia, Multiscale mechanical problems : the Arlequin method, *Mechanics of Solids and Structures* 326 (1998) 899–904. (Cité en page 10.)
- [27] H. Ben Dhia, G. Rateau, The Arlequin method as a flexible engineering design tool, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62 (2005) 1442–1462. (Cité en page 10.)
- [28] R. Cottureau, D. Clouteau, H. B. Dhia, C. Zaccardi, A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011) 3280–3288. (Cité en page 10.)
- [29] G. Rateau, Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Paris, 2003. (Cité en page 10.)
- [30] A. Ghanem, T. Baranger, N. Mahjoubi, M. Torkhani, Aspects dynamiques du couplage 3D-1D dans la méthode Arlequin, in : 10e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2011, 2011. (Cité en pages 10 et 50.)
- [31] P. Kettil, N.-E. Wiberg, Application of 3D Solid Modeling and Simulation Programs to a Bridge Structure, *Engineering with Computers* 18 (2002) 160–169. (Cité en page 10.)
- [32] A. Ghanem, M. T. N. Mahjoubi, T. Baranger, A. Combescure, Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 254 (2013) 292–308. (Cité en page 10.)
- [33] A. Lozinski, Méthodes numériques et modélisation pour certains problèmes multi-échelles, Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010. (Cité en page 11.)
- [34] C. Hager, P. Hauret, P. L. Tallec, B. I. Wohlmuth, Solving dynamic contact problems with local refinement in space and time, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 204 (2012) 25–41. (Cité en page 11.)
- [35] J.-L. Lions, O. Pironneau, Domain decomposition methods for CAD, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I - Math.* 328 (1999) 73–80. (Cité en page 11.)
- [36] R. Glowinski, J. He, A. Lozinski, J. Rappaz, J. Wagner, Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements, *Journal of Numerical Mathematics* 101 (2005) 663–687. (Cité en page 11.)
- [37] J. He, A. Lozinski, J. Rappaz, Accelerating the method of finite element patches using approximately harmonic functions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 345 (2007) 107–112. (Cité en page 11.)
- [38] E. E. Safatly, Méthode multi-échelle et réduction de modèle pour la propagation d’incertitudes localisées dans les modèles stochastiques, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2012. (Cité en page 11.)
- [39] M. Chevreuil, A. Nouy, E. Safatly, A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering* 255 (2013) 255–274. (Cité en page 11.)

- [40] P. Gosselet, C. Rey, Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics, *Archives of Computational Methods in Engineering* 11 (2005) 1–50. (Cité en page 11.)
- [41] P. Le Tallec, Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances* 1 (1994) 121–220. (Cité en page 11.)
- [42] J. Mandel, Balancing domain decomposition, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 9 (1993) 233–241. (Cité en page 11.)
- [43] C. Farhat, F. X. Roux, A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (1991) 1205–1227. (Cité en page 11.)
- [44] C. Farhat, A Lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm, *Computing Systems in Engineering* 2 (1991) 149–156. (Cité en page 11.)
- [45] C. Farhat, J. Mandel, F. X. Roux, Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method, *Computer method in Applied Mechanics and Engineering* 115 (1994) 365–385, ISSN 0045-7825. (Cité en page 11.)
- [46] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson, D. Rixen, FETI-DP : A dual-primal unified FETI method – Part I : A faster alternative to the two-level FETI method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (7) (2001) 1523–1544. (Cité en page 11.)
- [47] P. Gosselet, Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d’accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire, Ph.D. thesis, Université Paris VI, 2003. (Cité en page 11.)
- [48] C. Farhat, K. Pierson, M. Lesoinne, A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methode with Lagrange multipliers : application to the design of new FETI coarse problems, Tech. Rep., CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, 1996. (Cité en page 11.)
- [49] C. Farhat, J. Mandel, The two level FETI method for static and dynamic plate problems part i : An optimal iterative solver for biharmonic system, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* 155 (1998) 129–151. (Cité en page 11.)
- [50] D. Dureisseix, Vers des stratégies de calcul performantes pour les problèmes multiphysiques et le passage par le multi-échelle, *Memoire HDR de l’Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI)* . (Cité en page 12.)
- [51] P. Ladevèze, D. Dureisseix, Une nouvelle stratégie de calcul micro-macro en mécanique des structures, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 327 (1999) 1237–1244. (Cité en page 12.)
- [52] P. Ladevèze, O. Loiseau, D. Dureisseix, A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001) 121–138. (Cité en page 12.)

- [53] A. Mobasher Amini, D. Dureisseix, P. Cartraud, N. Buannic, A micro-macro strategy for ship structural analysis with FETI-DP method, in : 3rd European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisbon, Portugal, 233–240, 2006. (Cité en page 12.)
- [54] A. Mobasher Amini, D. Dureisseix, P. Cartraud, Multi-scale domain decomposition method for large-scale structural analysis with a zooming technique : application to plate assembly, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009) 417–433. (Cité en page 12.)
- [55] C. Farhat, K. Pierson, M. Lesoinne, The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184 (2000) 333–374. (Cité en page 12.)
- [56] P. Avery, G. Rebel, M. Lesoinne, C. Farhat, A numerically scalable dual-primal substructuring method for the solution of contact problems part I : the frictionless case, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004) 2403–2426. (Cité en page 12.)
- [57] P. Avery, C. Farhat, The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming : Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009) 1673–1683. (Cité en page 12.)
- [58] D. Dureisseix, C. Farhat, A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001) 2643–2666. (Cité en page 12.)
- [59] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, M. Vidrascu, Additive Schwarz method for nonsymmetric problems : application to frictional multicontact problems, *Domain decomposition methods in science and engineering* (2002) 3–13. (Cité en page 12.)
- [60] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet, F. Compté, Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity, *Computational Mechanics* 44 (2009) 233–245. (Cité en page 12.)
- [61] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet, A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87 (2011) 889–905. (Cité en page 12.)
- [62] S. Andrieux, C. Varé, A 3D cracked beam model with unilateral contact. Application to rotors, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21 (2002) 793–810. (Cité en pages 12 et 50.)
- [63] T. Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice Hall, 1987. (Cité en page 17.)
- [64] N. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)* 85 (1959) 67–94. (Cité en page 17.)

- [65] A. Curnier, Méthodes numériques en mécanique des solides, Presses polytechniques et universitaires Romandes, ISBN 2-88074-247-1, 1993. (Cité en page 17.)
- [66] M. Géradin, D. Rixen, Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics, John Wiley and Sons, 1994. (Cité en pages 17, 19 et 83.)
- [67] T. Belytschko, D. Schoeberle, On the unconditional stability of an implicit algorithm for non-linear structural dynamics, Journal of Applied Mechanics 42 (1975) 865–869. (Cité en page 19.)
- [68] T. Hughes, Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics, Computers and Structures 6 (1976) 313–324. (Cité en pages 19 et 20.)
- [69] T. Hughes, A note on the stability of Newmark’s algorithm in nonlinear structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering 2 (1977) 383–386. (Cité en page 19.)
- [70] L. Noels, Contributions aux algorithmes d’intégration temporelle conservant l’énergie en dynamique non-linéaire des structures, Ph.D. thesis, Université de Liège-Faculté des Sciences Appliquées, 2004. (Cité en pages 20, 36 et 124.)
- [71] C. Kane, J. Mardsen, M. Ortiz, M. West, Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical system, International Journal for Numerical Methods in Engineering 49 (2000) 1295–1325. (Cité en page 20.)
- [72] C. Kane, J. Mardsen, M. Ortiz, Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators, Journal of Mathematical Physics 40 (1999) 3353–3371. (Cité en page 20.)
- [73] T. Hughes, T. Caughey, W. Liu, Finite-element method for nonlinear elastodynamics which conserves energy, Journal of Applied Mechanics 45 (1978) 366–370. (Cité en pages 20 et 22.)
- [74] J. Simo, N. Tarnow, K. Wong, Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 100 (1992) 63–112. (Cité en page 20.)
- [75] H. Hilber, T. Hughes, R. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 5 (1977) 283–292. (Cité en pages 20 et 21.)
- [76] W. Wood, M. Bossak, O. Zienkiewicz, An alpha modification of newmark’s method, International Journal for Numerical Methods in Engineering 15 (1981) 1562–1566. (Cité en pages 20 et 21.)
- [77] J. Chung, G. M. Hulbert, A time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation : The Generalised- $\alpha$  Method, Journal of Applied Mechanics 60 (1993) 371–375. (Cité en pages 20 et 21.)
- [78] J. Houbolt, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, Journal of Aeronautical Sciences 17 (1950) 540–550. (Cité en page 21.)



- [79] W. Zhai, Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996) 4199–4214. (Cité en page 21.)
- [80] E. Wilson, A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, in : *SESM Report 68-1 : Division of Structural Engineering and Structural Mechanics*, University of California, 1968. (Cité en page 21.)
- [81] K. Park, Evaluating time integration methods for nonlinear dynamic analysis, *Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Behaviour* (1975) 35–58. (Cité en page 21.)
- [82] H. Hilber, T. Hughes, Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 6 (1978) 99–118. (Cité en page 21.)
- [83] S. Krenk, State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 65 (2006) 595–619. (Cité en page 21.)
- [84] D. Kuhl, E. Ramm, Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 136 (1996) 293–315. (Cité en page 22.)
- [85] D. Kuhl, M. Crisfield, Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 45 (1999) 569–599. (Cité en page 22.)
- [86] D. Kuhl, E. Ramm, Generalized energy-momentum method for nonlinear adaptive shell dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178 (1999) 343–366. (Cité en page 22.)
- [87] O. Bauchau, N. Theron, Energy decaying scheme for non-linear beam models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 134 (1996) 37–56. (Cité en page 22.)
- [88] C. Bottasso, M. Borri, Energy preserving/decaying schemes for nonlinear beam dynamics using the helicoidal approximation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 143 (1997) 393–415. (Cité en page 22.)
- [89] J. C. Simo, N. Tarnow, The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, *ZAMP* 43 (1992) 757–792. (Cité en pages 22 et 23.)
- [90] F. Armero, I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II : second-order methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001) 6783–6824. (Cité en pages 22 et 24.)
- [91] F. Armero, I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I : low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001) 2603–2649. (Cité en pages 22 et 24.)

- [92] I. Romero, F. Armero, High-frequency dissipative time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear shells, in : In ECCOMAS 2000, Proceedings of the Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering Barcelona, Spain, 2000. (Cité en pages 22 et 24.)
- [93] I. Romero, F. Armero, Numerical integration of the stiff dynamics of geometrically exact shells : an energy-dissipative momentum-conserving scheme., International Journal for Numerical Methods in Engineering 54 (2002) 1043–1086. (Cité en pages 22 et 24.)
- [94] M. Géradin, D. Rixen, Théorie des Vibrations, Masson, 1996. (Cité en page 25.)
- [95] K.-J. Bathe, Finite Element Procedure, Prentice Hall, 1996. (Cité en page 25.)
- [96] P. Wriggers, Non linear finite element methods, Springer, 2008. (Cité en pages 26, 122 et 124.)
- [97] T. Belytschko, T. Hughes, Computational Methods for Transient Analysis, North Holland, 1983. (Cité en page 26.)
- [98] T. Belytschko, W. Liu, B. Moran, Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, John Wiley and Sons, 2000. (Cité en pages 26 et 122.)
- [99] A. Alarcon, Algorithmes d'intégration directe de l'opérateur DYNA\_LINE\_TRAN, R5.05.02, Code\_Aster documentation, 2011. (Cité en page 26.)
- [100] L. Maheo, Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis, Ph.D. thesis, Université de Bretagne Sud, 2006. (Cité en page 26.)
- [101] G. M. Hulbert, J. Chung, Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 137 (1996) 175–188. (Cité en page 27.)
- [102] J. Salençon, Mécanique des Milieux Continus, Ellipses, 1988. (Cité en page 31.)
- [103] J. Pellet, Raccord 3D - Poutre, R3.03.03., Tech. Rep., EDF R&D, Clamart, 2011. (Cité en page 45.)
- [104] M. Tannous, P. Cartraud, D. Dureisseix, M. Torkhani, A beam to 3D model switch for transient dynamic analysis, in : Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2012, 10-14 septembre 2012, Vienna, Austria. (Cité en page 77.)
- [105] M. Tannous, P. Cartraud, D. Dureisseix, M. Torkhani, A beam to 3D model switch for transient dynamic analysis, (submitted to) Finite Elements in Analysis and Design . (Cité en page 77.)
- [106] M. Tannous, P. Cartraud, D. Dureisseix, M. Torkhani, Bascule d'un modèle poutre à un modèle 3D en dynamique des machines tournantes, in : 11ème Colloque national en calcul des structures, CSMA 2013, Presqu'île de Giens, Var, 2013. (Cité en page 77.)

- [107] D. Childs, *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis*, New York : Wiley, 1993. (Cité en page [115](#).)
- [108] M. Lalanne, G. Ferraris, *Dynamique des Rotors en Flexion*, Ed. Techniques Ingénieur, 1996. (Cité en page [115](#).)
- [109] Z. Sun, J. Xu, T. Zhou, Analysis on complicated characteristics of a high-speed rotor system with rub-impact, *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002) 659–672. (Cité en page [115](#).)
- [110] B. Al Bedoor, Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing, *Journal of Sound and Vibration* 229 (2000) 627–645. (Cité en page [115](#).)
- [111] G. Jacquet-Richardet, M. Torkhani, P. Cartraud, F. Thouverez, T. Baranger, M. Herran, C. Gibert, S. Baquet, P. Almeida, L. Peletan, Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application, accepted in MSSP, 2013 . (Cité en page [116](#).)
- [112] A. Muszynska, *Rotor dynamics*, CRC Press, 2005. (Cité en pages [116](#), [117](#) et [119](#).)
- [113] P. Schmiechen, Travelling wave speed coincidence, Ph.D. thesis, Imperial college of London, 1997. (Cité en page [116](#).)
- [114] S. Sinha, Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub, *Journal of Sound and Vibration* 273 (2004) 879–919. (Cité en page [116](#).)
- [115] S. Sinha, Rotordynamic analysis of asymmetric turbofan rotor due to fan blade-loss event with contact-impact rub loads, *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013) 2253–2283. (Cité en page [116](#).)
- [116] M. Legrand, *Modèles de Prédiction de l'interaction Rotor/Stator dans un Moteur d'Avion*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2005. (Cité en page [116](#).)
- [117] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud, J.-P. Lombard, Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction, *Journal of Sound and Vibration* 319 (2009) 366–391. (Cité en pages [116](#) et [117](#).)
- [118] M. Legrand, A. B. Pierre, Numerical investigation of abradable coating removal in aircraft engines through plastic constitutive law, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7 (2012) article 011010. (Cité en pages [116](#) et [128](#).)
- [119] A. Batailly, M. Legrand, C. Pierre, Influence of abradable coating wear mechanical properties on rotor stator interaction, in : *Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, GT2011-45189*, 2011. (Cité en pages [116](#) et [128](#).)
- [120] A. Batailly, M. Legrand, P. Cartraud, C. Pierre, Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010) 5546–5562. (Cité en page [117](#).)
- [121] A. Batailly, M. Legrand, P. Cartraud, C. Pierre, J.-P. Lombard, Study of Component Mode synthesis Methods in a Rotor-Stator Interaction Case, in :

IDETC CIE 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, United States, 2007. (Cité en page [117](#).)

- [122] M. Legrand, A. Batailly, B. Magnain, P. Cartraud, C. Pierre, Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines, *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 2578–2601. (Cité en pages [117](#), [121](#) et [128](#).)
- [123] A. Muszynska, Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery, *The Shock and Vibration Digest* 21-3 (1989) 3–11. (Cité en page [117](#).)
- [124] S. Ahmad, Rotor Casing Contact Phenomenon in Rotor Dynamics - Literature Survey, *Journal of Vibration and Control* 16 (2010) 1369–1377. (Cité en page [117](#).)
- [125] F. Ehrich, *Handbook of Rotordynamics*, Krieger Publishing Co, 1999. (Cité en page [117](#).)
- [126] A. Bartha, Dry Friction Backward Whirl of Rotors, Ph.D. thesis, Swiss federal institute of technology, 2000. (Cité en page [118](#).)
- [127] Y. Choi, Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub, *Journal of Sound and Vibration* 258 (2002) 191–198. (Cité en page [118](#).)
- [128] F. Choy, J. Padovan, Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events, *Journal of Sound and Vibration* 113 (1987) 529–545. (Cité en page [118](#).)
- [129] D. Childs, A. Bhattacharya, Prediction of Dry-Friction Whirl and Whip Between a Rotor and a Stator, *Journal of Vibrations and Acoustics* 129 (2007) 355–362. (Cité en page [118](#).)
- [130] J. Jiang, H. Ulbrich, The physical reason and the analytical condition for the onset of dry whip in rotor-to-stator contact systems, *Journal of vibrations and Acoustics* 127 (2005) 594–603. (Cité en page [118](#).)
- [131] H. Khanlo, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, Chaotic vibration analysis of rotating, flexible, continuous shaft-disk system with a rub-impact between the disk and the stator, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 16 (2010) 566–582. (Cité en page [118](#).)
- [132] Z. Shang, J. Jiang, L. Hong, The global responses characteristics of a rotor/stator rubbing system with dry friction effects, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 2150–2160. (Cité en page [118](#).)
- [133] A. Muszynska, P. Goldman, Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs, *Chaos, Solitons & Fractals* 5 (1995) 1683–1704. (Cité en page [118](#).)
- [134] S. Popprath, H. Ecker, Nonlinear dynamics of a rotor contacting an elastically suspended stator, *Journal of Sound and Vibration* 308 (2007) 767–784. (Cité en pages [118](#) et [119](#).)

- [135] S. Braut, R. Zigulic, A. Skoblar, G. Stimac, M. Butkovic, M. Jokic, Dynamic Analysis of the Rotor-Stator Contact due to Blade Loss, in : 12th IF-ToMMWorld Congress, Besançon (France), June18-21, 2007, 2007. (Cité en page [119](#).)
- [136] F. Chu, W. Lu, Stiffening effect of the rotor during the rotor-to-stator rub in a rotating machine, *Journal of Sound and Vibration* 308 (2007) 758–766. (Cité en page [119](#).)
- [137] A. Millecamps, Interaction aube-carter : contribution de l’usure et de la thermomécanique sur la dynamique de l’aube, Ph.D. thesis, Université Lille 1, 2010. (Cité en page [119](#).)
- [138] A. Millecamps, F. Brunel, P. Dufrenoy, F. Garcin, M. Nucci, Influence of thermal effects during blade-casing contact experiments, *ASME International Design Engineering Technical Conference* 1 (2010) 855–862. (Cité en page [119](#).)
- [139] P. Goldman, A. Muszynska, D. Bently, Thermal Bending of the Rotor Due to Rotor-to-Stator Rub, *International Journal of Rotating Machinery* 6 (2000) 91–100. (Cité en page [119](#).)
- [140] J. Sawicki, A. Montilla-Bravo, Z. Gosiewski, Thermomechanical Behavior of Rotor with Rubbing, *International Journal for Rotating Machinery* 9 (2003) 41–47. (Cité en page [119](#).)
- [141] N. Bachschmid, P. Pennacchi, A. Vania, Thermally induced vibrations due to rub in real rotors, *Journal of Sound and Vibration* 299 (2007) 683–719. (Cité en page [120](#).)
- [142] P. Goldman, A. Muszynska, Rotor-to-Stator, Rub-Related, Thermal/Mechanical Effects in Rotating Machinery, *Chaos, Solitons & Fractals* 9 (1995) 1579–1601. (Cité en page [120](#).)
- [143] E. Karpenko, M. Wiercigrocha, E. Pavlovskaiiaa, M. Cartmellb, Piecewise approximate analytical solutions for a Jeffcott rotor with a snubber ring, *International Journal of Mechanical Sciences* 44 (2002) 475–488. (Cité en page [120](#).)
- [144] F. Chu, Z. Zhang, Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Vibrations of a Rub-Impact Rotor System Supported on Oil Film Bearings, *Int. J. Engng Sci.* 35 (1997) 963–973. (Cité en page [120](#).)
- [145] F. Chu, Z. Zhang, Bifurcation and Chaos in a Rub-Impact JEFFCOTT Rotor System, *Journal of Sound and Vibration* 210 (1998) 1–18. (Cité en page [120](#).)
- [146] X. Dai, Z. Jin, X. Zhang, Dynamic Behavior of the Full Rotor/Stop Rubbing : Numerical Simulation and Experimental verification, *Journal of Sound and Vibration* 251 (2002) 807–822. (Cité en page [120](#).)
- [147] L. Peletan, S. Baguet, G. Jacquet Richardet, M. Torkhani, Use and limitations of the Harmonic Halance Method for rub-impact phenomena in rotor-stator dynamics, in : *ASME Turbo Expo 2012 Turbine Technical Conference and Exposition*, Copenhagen : Danemark, 2012. (Cité en page [121](#).)

- [148] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani, G. Jacquet Richardet, A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics, *NonLinear Dynamics*, Springer, 2013. (Cité en page [121](#).)
- [149] P. Wriggers, *Computational contact mechanics*, Chichester, England ; Hoboken, NJ : J. Wiley & Sons, 2002. (Cité en page [122](#).)
- [150] T. Laursen, *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*, Berlin : Springer, 2003. (Cité en page [122](#).)
- [151] I. Kragelsky, M. Dobychin, V. Kombalov, *Friction and Wear-Calcutation Methods*, Pergamon Press, Oxford, 1982. (Cité en page [125](#).)
- [152] M. Minoux, *Mathematical programming : theory and algorithms*, Chichester - West Sussex ; New York : Wiley, 1986. (Cité en page [125](#).)
- [153] T. Belytschko, M. Neal, Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991) 547–572. (Cité en page [127](#).)
- [154] M. Géradin, A. Cardona, *Flexible Multibody Dynamics (A Finite Element Approach)*, John Wiley and Sons, 2000. (Cité en page [128](#).)
- [155] R. Glowinski, P. L. Tallec, *Finite element analysis in nonlinear incompressible elasticity*, *Finite Element*, Vol. V : Special Problems in Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984. (Cité en page [129](#).)
- [156] N. Kikuchi, J. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988. (Cité en page [130](#).)
- [157] T. Laursen, J. Simo, Algorithmic symmetrization of Coulomb frictional problems using augmented Lagrangians, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 108 (1993) 133–146. (Cité en page [130](#).)
- [158] P. Wriggers, J. Simo, A note on tangent stiffnesses for fully nonlinear contact problems, *Communications in Applied Numerical Methods* 1 (1985) 199–203. (Cité en page [130](#).)
- [159] P. Alart, A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991) 353–375. (Cité en page [130](#).)
- [160] J. Oden, Exterior penalty methods for contact problems, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (1981) 655–665. (Cité en page [130](#).)
- [161] J. Simo, R. Taylor, K. Pister, Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1985) 177–208. (Cité en page [130](#).)
- [162] A. Alarcon, R5.06.03 Modélisation des chocs et du frottement en analyse transitoire par recombinaison modale, Tech. Rep., EDF R&D, 2011. (Cité en page [133](#).)

- [163] P. Van der Houwen, B. Sommeijer, N. Cong, Stability of collocation based Runge-Kutta-Nystrom methods, *BIT* 31 (1991) 469–481. (Cité en page [133](#).)
- [164] N. Greffet, U4.53.01 Opérateur DYNA\_NON\_LINE, Tech. Rep., EDF E&D, 2013. (Cité en page [133](#).)
- [165] J. J. Moreau, Numerical aspects of sweeping process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177 (1999) 329–349. (Cité en page [138](#).)
- [166] V. Chawlar, T. Laursen, Energy consistent algorithms for frictional contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42 (1998) 799–827. (Cité en page [138](#).)