



## ریاضیات محض در تمدن اسلامی\*

یان پ. هوخندایک<sup>۱</sup>

ترجمه راضیه سادات موسوی<sup>۲</sup>

### ۱. مقدمه

ریاضیات در تمدن اسلامی از قرن دوم تا یازدهم هجری را گروهی «ریاضیات اسلامی» و گروهی دیگر «ریاضیات عربی» می خوانند، اما هیچ کدام از این دو عبارت کاملاً مناسب نیستند. بسیاری از ریاضیدانانی که کارهایشان در این مقاله نام برده می شود، مسلمان بوده اند، اما ریاضیدانان دیگری با زمینه های مذهبی دیگر هم بوده اند. تعدادی از مسائل ریاضی رابطه ویژه ای با مفاهیم اسلامی داشته اند، اما بخش عمده ریاضیات در تمدن اسلامی مستقیماً با مذهب مرتبط نبود. بنابراین استفاده از عبارت های «ریاضیات عربی» و «ریاضیدانان عربی» در صورتی بهتر است که صفت «عربی» در معنی زبانی آن درک شود. بسیاری از ریاضیدانان مهم «عربی» که در ایران یا دیگر سرزمین های غیر عربی زبان زندگی می کردند، در حقیقت عرب نبودند، اما زبان عربی همواره زبان اصلی ریاضیات (و علم) در آن سرزمین ها بوده است. در قرن چهارم هجری و پس از آن، برخی از آثار ریاضی به زبان فارسی نگاشته یا ترجمه شده اند؛ اما تعداد آن ها در مقایسه با آثاری که به عربی نوشته شده ناچیز است، و بیشتر واژگان تخصصی ریاضی در این متون فارسی، از عربی گرفته شده است.<sup>۳</sup>

\* این مقاله ترجمه ای است از:

"Pure mathematics in Islamic civilization", *Companion Encyclopaedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, ed. by Ivor Grattan-Guinness, London-New York (Routledge), pp. 70-79. Reprinted in: Helen Lauer, ed., *History and Philosophy of Science for African Undergraduates*, Ibadan, Nigeria, 2003, pp. 494-499.

۱. Jan P. Hogendijk استاد ریاضیات و پژوهشگر تاریخ ریاضیات و نجوم دانشگاه اوترخت هلند، مشاور علمی نشریه میراث علمی،

j.p.hogendijk@uu.nl

۲. دانش آموخته کارشناسی ارشد تاریخ علم، دانشگاه تهران، raziesadatmusavi@gmail.com

۳. بنگرید به «علوم ایرانی، علوم عربی یا علوم دوره اسلامی» (سخن سردبیر)، میراث علمی، سال ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲،

ص ۱-۴.

منابع اصلی ما در ریاضیات دوره اسلامی، نسخه‌های خطی عربی هستند که کاتبانی بین قرن‌های چهارم تا سیزدهم هجری رونویسی کرده‌اند و در بیشتر موارد خودشان ریاضیدان نبوده‌اند (سزگین، ماتویفسکایا و روزنفلد). مهمترین مجموعه‌های این نسخه‌های خطی در حال حاضر در خاور نزدیک، اروپا و هند نگهداری می‌شوند. اگر چه تاریخ علم دوره اسلامی از ابتدای قرن نوزدهم میلادی مطالعه شده است، بخش بزرگی از کتاب‌های علمی به زبان عربی هنوز بررسی نشده است، بنابراین دانش ما از ریاضیات دوره اسلامی به هیچ وجه کامل نیست. ریاضیات دوره اسلامی را از مطالعه نسخه‌های خطی عربی درباره موضوعاتی خارج از بازه محدودی که امروزه به عنوان «ریاضیات» در نظر گرفته می‌شود نیز می‌توان شناخت، مانند متن‌ها و جدول‌های نجومی و آثار نورشناسی، فقه، زبان‌شناسی و مانند این‌ها. ابزارهایی چون اسطرلاب‌ها و ساعت‌های آفتابی، و نیز ترجمه‌های لاتینی و عبری نسخه‌های خطی عربی که از میان رفته‌اند، از دیگر منابع شناخت ریاضیات دوره اسلامی هستند.

مطالعه ریاضیات در تمدن اسلامی دلایل مختلفی داشته است. آشنایی با ریاضیات مقدماتی، اغلب بخشی از نظام آموزش علوم عقلی محسوب می‌شد. کاربردهای اولیه حساب و هندسه در تجارت، فقه، امور دیوانی و مساحی بود. دانش ما درباره کاربردهای هندسه در معماری و کاشی‌کاری اسلامی اندک است. کاربرد ریاضیات بسیار پیشرفته در نجوم، احکام نجوم و نورشناسی بود. بیشتر کسانی که ریاضیات پیشرفته را فرا می‌گرفتند، برای این بود که منجم (یا طالع‌بین) شوند. مهمترین دستاوردهای خلاقانه ریاضیات دوره اسلامی را کسانی به وجود آوردند که ریاضیات را به خاطر خودش مطالعه می‌کردند. بخش اساسی پیشرفت‌های ریاضیات (برای مثال، تقریباً تمامی جبر) هیچ گونه کاربردی نداشته است. بعضی از جبردانان عربی‌نویس، از کاربردهای جبر در محاسبات سهم‌الارث بحث می‌کردند، اما این احتمالاً تبلیغی برای ریاضیات بوده است.

مسئله اصلی در این جا، جنبه‌های «محض» ریاضیات است که واژه «محض» در مفهوم کم‌کاربرد در دیگر دانش‌ها یا زندگی روزمره به کار می‌رود. بعضی از موضوعاتی که هر دو جنبه «محض» و «کاربردی» را دارند، در این مقاله آمده است؛ مثلاً مثلثات و گنج‌نگاشتی در همین جا بررسی شده است. ینس هویروپ دلایل احتمالی مهمتر بودن ارتباط میان ریاضیات محض، کاربردی و عملی در تمدن اسلامی را نسبت به پیش از آن، بررسی کرده است (منابع پایان مقاله).

## ۲. انتقال ریاضیات به زبان عربی

در آغاز قرن دوم هجری، سرزمین‌های ایران و شام بخشی از حکومت اسلامی محسوب می‌شدند که هنوز بازمانده سنت‌های علمی کهن در آن جا یافت می‌شد. تاریخ علم دوره اسلامی پس از پایه‌گذاری حکومت عباسیان (در سال ۱۴۲ هجری) و تأسیس پایتخت جدید در بغداد آغاز

می‌شود. در اواخر قرن دوم هجری، دربار بغداد پذیرای منجمان هندی بود و برخی آثار نجومی از سانسکریت به عربی ترجمه شد. در اوایل قرن سوم هجری، خلفای عباسی آثار علمی یونانیان را گردآوری کردند و «بیت‌الحکمه» را که نوعی فرهنگستان علوم بود، در بغداد بنا نهادند.

در آن زمان بسیاری از آثار علمی، اغلب بیش از یک بار، از یونانی به عربی ترجمه شد. انتقال ریاضیات به هیچ وجه فرآیند ساده‌ای نبود؛ چنان که در خصوص مخروطات آپولونیوس به خوبی مشهود است. بنوموسی، سه مهندس توانمند در قرن سوم تصمیم به ترجمه آن گرفتند، اما تنها یک نسخه خطی ناقص از هفت مقاله اول را در اختیار داشتند و نمی‌توانستند مفاهیم آن را دریابند. یکی از این سه برادر به نام حسن، خودش روی نظریه مقاطع استوانه کار کرد، زیرا اعتقاد داشت این مسئله می‌تواند مقدمه‌ای برای نظریه مقاطع مخروطی در کتاب مخروطات باشد. پس از مرگ او، برادرش احمد در شام نسخه‌ای از چهار مقاله اول را با شرحی از اتوکیوس یافت. احمد و برادر دیگرش، محمد، با استفاده از دو نسخه موجود و نظریه حسن، موفق شدند مطالب مخروطات آپولونیوس را دریابند و برای آن که مفهوم‌تر شود، ارجاعات درون متنی به اصل یونانی افزودند. سپس بر ترجمه هفت مقاله اول از هلال حمصی (مقاله اول تا چهارم) و ثابت بن قره (مقاله پنجم تا هفتم) نظارت کردند (تومر، ص ۶۲۰-۶۲۹). ترجمه آثار علمی به عربی اغلب نیازمند ابداع اصطلاحات فنی تازه بود. اصطلاحات بیگانه به سادگی در ساختار زبان عربی پذیرفته نمی‌شود، بنابراین ترانویسی همان اصطلاحات مطلوب نبود. از این رو برای مثال، واژه یونانی *hyperbole* (هذلولی) ابتدا به صورت «اوبریولا» ترانویسی و بعدها به «قطع زائد» ترجمه شد. پس از ابداع این اصطلاح، واژه اوبریولا دیگر به کار نرفت.

مترجمان عرب چندین اثر ریاضی یونانی را حفظ کردند که اصل یونانی‌شان از میان رفته است، مانند *اُکر منلائوس*، کتاب *القسمه* (در باب تقسیم‌ها) اقلیدس، مقالات پنجم تا هفتم مخروطات آپولونیوس و مقالات چهارم تا هفتم حساب دیوفانتوس. هنوز هم نشانه‌های تازه‌ای از آثار گمشده ریاضیات یونانی در متون عربی یافته می‌شود.

### ۳. دستگاه‌های عددنویسی و مفهوم عدد

ریاضیدانان عربی نویس، دستگاه‌های مختلفی را برای ثبت اعداد به کار می‌بردند. اعداد هندوعربی در اواخر قرن دوم هجری برای ثبت اعداد صحیح مثبت از هند به ریاضیات دوره اسلامی راه یافت. شیوه استفاده از این «اعداد هندی» در حدود سال ۲۱۵ق در کتابی از محمد بن موسی خوارزمی تبیین شده است. نام این دانشمند در قرن دوازدهم میلادی به صورت *الگوریسمی* (منشأ واژه امروزی «الگوریسم» یا «الگوریتم») به لاتینی برگردانده شد. در قرن چهارم هجری، دو گونه متفاوت از نمادها ظاهر شدند: ارقام هندی که هنوز هم در خاور نزدیک استفاده می‌شود، و ارقام غبار که در شمال آفریقا و اسپانیا به کار می‌رفت و نمونه‌های اولیه اعداد امروزی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 و 0 هستند.



هندسه‌دانان و منجمان دوره اسلامی از دستگاه دیگری استفاده می‌کردند که «حساب منجمان» خوانده می‌شد و از مجسطی بطلمیوس و دیگر آثار نجومی یونانی گرفته شده بود. در این نظام، اعداد صحیح در پایه شصتگانی با حروف الفبا، و کسرها به صورت شصتگانی، همچنان با حروف الفبا، نوشته می‌شد. مترجمان دوره اسلامی هر حرف یونانی را به حرفی عربی با همان ارزش عددی برگرداندند و نماد صفر یونانی را عیناً به کار بردند، حرف یونانی آمیکرون با خطی در بالای آن:  $\bar{\omicron}$ . مرتبه‌های کسری اعداد در نظام شصتگانی، «دقیقه» و «ثانیه» خوانده می‌شد. هیچ نماد جداکننده‌ای میان اعداد صحیح و کسرها نبود. کسرها دهدهی را (که در دستگاه شمار هندوعربی نوشته می‌شود) نخستین بار اقلیدسی (سده ۴هـ)، و پس از او سموأل (سده ۶هـ، بنگرید به: راشد، ص ۱۲۲-۱۲۸) و کاشانی (سده ۹هـ) به کار بردند.

در دستگاه هندوعربی و «حساب منجمان»، نماد هیچ، صفر خوانده می‌شد (لاتینی شده به صورت *cipherum* و *zephrium*، و از آن جا «*cipher*» و «*zero*» در زبان انگلیسی)، و به معنای «جای خالی» در نمایش شصتگانی یا دهدهی اعداد بود. خود صفر عموماً به عنوان عدد پذیرفته نمی‌شد و اعداد منفی هم در ریاضیات دوره اسلامی مطرح نبود. ریاضیدانان عمل تفریق را به عنوان یک عمل حسابی به کار گرفتند و «منهای ۳» یک عبارت پذیرفته در معادلات یا چندجمله‌ای‌ها بود. در سنت هندسه یونانی، پاره‌خط‌های گنگ (اصم)، مانند قطر مربعی به ضلع یک، عدد در نظر گرفته نمی‌شدند. ریاضیدانان عربی نویس مشتاق بودند ریشه دوم ۲ را یک عدد در نظر بگیرند، و حتی عمر خیام ارزشی عددی برای نسبت‌های میان مقادیر دلخواه وضع کرد. از این رو، به محض آن که یک پاره‌خط واحد انتخاب کنیم، هر پاره‌خطی می‌تواند با یک عدد، یعنی طول آن مرتبط شود. آن چه در این جا روی می‌دهد، بسط آگاهانه مفهوم عدد نیست؛ بلکه تطبیق نظریه اعداد برای کاربردشان در محاسبات هندسه و مثلثات است که از زمان بطلمیوس وجود داشته و لازم بوده طول پاره‌خط‌های گنگ محاسبه شود.

اعداد مختلط هیچ‌گاه در ریاضیات دوره اسلامی بروز نیافتند.

#### ۴. جبر

مقصود از «جبر» در این جا، فن حل معادله و عملیات ریاضی بر روی معادلات و چندجمله‌ای‌هاست. این که علم جبر چگونه و تا چه حدی از فرهنگ‌های پیش از اسلام به ریاضیات دوره اسلامی منتقل شده است، مشخص نیست.<sup>۱</sup> اثر متقدم و بسیار موفق عربی در عرضه

۱. بنگرید به مقاله «بحثی درباره پیدایش جبر در دوره اسلامی»، از مریم روزانسکایا، ترجمه حسین گل‌مژده، میراث علمی، سال ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۴، ص ۹۸-۱۰۱.

جبر، کتاب جبر و مقابله خوارزمی است. او نخست حل شش معادله متعارف را توضیح می‌دهد که به بیان امروزی عبارتند از:  $ax^2 = bx$ ،  $bx = c$ ،  $ax^2 = c$ ،  $ax^2 = bx + c$ ،  $ax^2 + c = bx$  و  $ax^2 + bx = c$  با این شرط که  $a, b, c > 0$ . سپس خوارزمی با استفاده از مثال‌های حل شده بسیار، تحویل معادلات خطی و درجه دوم را به این معادلات متعارف توضیح می‌دهد؛ او معادله  $ax^2 = bx + c$  را به صورت «مال‌هایی برابر با شیء‌هایی به علاوه عددی است» بیان می‌کند و به جای معادله امروزی  $4x^2 - 3 = 2x$  می‌گوید «چهار مال به جز سه درهم برابر است با دوشیء». برای حل این معادله، باید ۳ درهم ناقص (کاهنده) را به سوی دیگر معادله ببریم. اصطلاح فنی این عمل، یعنی جبر (به معنای جبران و ترمیم)، در لاتینی به algebra ترجمه شد.

در این جا مثال‌هایی از پیشرفت‌های جبر دوره اسلامی پس از خوارزمی عرضه می‌کنیم. ابوکامل معادلات درجه دوم با ضرایب گنگ و معادلات درجه چهارمی را که به سادگی (با جایگزینی) قابل تحویل به معادلات درجه دوم بودند بررسی کرد. کرجی و سموال عبارت‌هایی با توان‌های (صحیح) دلخواه از مجهول، اما بدون نمادی مناسب برای توان، در نظر گرفتند. آن‌ها  $x^a$  را با «مال کعب کعب» (یعنی  $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$ ) و  $1/x^a$  را با «یک جزء از مال کعب کعب» بیان می‌کردند. کرجی دریافت که ریشه دوم چند جمله‌ای  $a_{n+k}x^{n+k} + \dots + a_k x^k$  را می‌توان با استفاده از الگوریتم آشنای استخراج جذر اعداد دهدهی به صورت  $a_{n+k}10^{n+k} + \dots + a_k 10^k$  به دست آورد. کرجی از این الگوریتم تنها در مواردی که چند جمله‌ای داده شده مربع چند جمله‌ای دیگری باشد استفاده کرد، بنابراین پاسخ به راحتی به دست می‌آمد. سموال نیز دریافت روش تقسیم اعداد دهدهی را می‌توان به همان شیوه برای تقسیم چند جمله‌ای‌ها تعمیم داد.

ریاضیدانان عربی نويس تلاش کردند معادله درجه سوم را به صورت جبری حل کنند، اما موفق نشدند. روش هندسی آن‌ها برای حل این معادلات در بخش ۷ این مقاله بررسی شده است. در قرن نهم هجری، ریاضیدانی از غرب جهان اسلام با نام قلصادی، از علائم اختصاری، بسیار شبیه به آنچه دیوفانتوس در رساله حساب و جبردانان دوره نوزایی در اروپا به کار بردند، در معادلات استفاده کرد.

## ۵. نظریه اعداد

بخش‌های مرتبط با نظریه اعداد در اصول اقلیدس و آثار نیکوماخوس و دیوفانتوس در حساب، به عربی ترجمه شدند و بسیاری از ریاضیدانان دوره اسلامی آن‌ها را به طور کامل مطالعه کردند. یکی از دستاوردهای قابل توجه اعراب، دستور اعداد متحاب است که ثابت بن قره آن را کشف و اثبات کرد: اگر  $p = 2(2^{n-1} - 1)$ ،  $q = 2(2^n - 1)$  و  $r = 9(2^{2n-1} - 1)$  همگی اعداد اول باشند، آن گاه اعداد

مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی  $a$  برابر با  $b$ ، و مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی  $b$  برابر با  $a$  است. ابن هیشم دریافت که هر عدد اول  $p$  مقدار  $(p-1)+1$  را عاد می‌کند، و در قرن چهارم هجری معتقد بودند معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  هیچ جواب صحیحی ندارد (راشد، ص ۲۲۰ و ۲۴۲). احتمال نمی‌رود اثبات‌های سخت دو گزاره اخیر در دوره اسلامی عرضه شده باشد. ریاضیدانان عربی نویسی برخی از معادلات سیاله را با ایجاد تغییرات هوشمندانه در روش‌های یونانی حل کردند (سزینانو ← منابع)، اما در کل هیچ‌گونه پیشرفت اساسی در روش‌های نظریه اعداد حاصل نشد.

### ۶. هندسه

هندسه‌دانان عربی نویسی، تصحیح و شرح آثار کهن هندسی یونانیان، شامل آثار اقلیدس، آپولونیوس، ارشمیدس و منلائوس را پیگیری کردند، و هندسه دوره اسلامی را می‌توان تا حدودی ادامه این آثار در نظر گرفت. اصول اقلیدس الهام‌بخش بررسی‌های عمیقی در مبانی هندسه بوده است. مثلاً برخی از ریاضیدانان تلاش کردند اصل توازی اقلیدس را اثبات کنند، اما برخی دیگر، مانند ابن هیشم و نصیرالدین طوسی، آن را با گزاره دیگری که فکر می‌کردند ساده‌تر و در نتیجه مناسب‌تر است، جایگزین کردند (بنگرید به «جاویش» در منابع). ماهانی تعریف تناسب در اصول اقلیدس را با تعریف معادلی به این صورت عوض کرد که  $a:b=c:d$  اگر بسط دو طرف تساوی به صورت کسر مسلسل یکی باشد.

در قرن چهارم هجری، هندسه‌دانان عربی نویسی از مخروطات آپولونیوس در حل مسائلی که به کمک خط‌کش و پرگار قابل حل نیست، استفاده کردند، مانند ترسیم هفت ضلعی منتظم (هوخندایک، ۱۹۸۴)، تثلیث زاویه، محاط کردن پنج ضلعی منتظم در مربع، و نیز حل این مسئله نورشناسی: یافتن محل نقطه بازتاب با دانستن موضع آینه مقعر یا محدب، چشم و شیء. این مسئله که حسن بن هیشم آن را در کتاب المناظر حل کرد، به نام وی «مسئله ابن هیشم» نامیده شد. تریبعات (تعیین مساحت‌های) سهمی ارشمیدس به عربی انتقال نیافت، اما هندسه‌دانان عربی نویسی از مقدمه کتاب کره و استوانه می‌دانستند که ارشمیدس روی این موضوع کار کرده است. پس از آن ثابت بن قره مساحت قطعه سهمی را با روش خودش به دست آورد و نیز حجم سهمی گونی را که از دوران سهمی حول محورش به دست می‌آید حساب کرد. ابن هیشم این مسئله را برای سهمی گونی که حول یکی از مقاطع عرضی اش دوران کند، به دست آورد.

ریاضیدانان عربی نویسی این نظریه‌ها را با روش دقیق ارشمیدسی اثبات کردند: آن‌ها شکل‌های محاط و محیط مناسبی در نظر گرفتند، مساحت یا حجم این شکل‌ها را مشخص کردند، و سپس با

شیوه‌ای غیرمستقیم، حد آن را با برهان خلف به دست آوردند. برای تعیین حجم برخی شکل‌های محاط و محیط، ابن هیثم مسئله‌ای را حل کرد که به لحاظ ریاضی معادل نمایش عبارت  $n^4 + 2^4 + \dots + 1^4$  به صورت یک چند جمله‌ای درجه پنجم بر حسب  $n$  است و ثابت کرد که این نمایش صحیح است (یوشکیویچ، ص ۲۸۸-۲۹۵). ابوسهل [بیژن بن رستم] کوهی مرکز ثقل برخی رویه‌ها و اجسام را به دست آورد؛ او (به دلایل نامعلومی) نظریه‌ای تخمینی برای تعیین مرکز ثقل نیم‌دایره وضع کرد و از آن جا  $\pi$  را معادل  $3\frac{1}{9}$  به دست آورد که با مقدار ارشمیدسی  $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{1}{8}$  مغایر بود (برگرن، ۱۹۸۳).<sup>۱</sup> بسیاری از ریاضیدانان عربی نویس مقادیر بهتری نسبت به کوهی به دست آوردند و در قرن نهم هجری، کاشانی  $\pi$  را تا ۱۷ رقم اعشار به درستی محاسبه کرد (یوشکیویچ، ص ۳۱۲-۳۱۹).

خلاصه‌ای که در این جا آورده شد، گویای تمامی دستاوردهای مهم علم دوره اسلامی در زمینه هندسه نیست. برای مثال، برخی ریاضیدانان عربی نویس روش‌های جدیدی برای مسئله آپولونیوس عرضه کردند: رسم یک دایره مماس بر سه دایره مفروض (با استفاده از خط‌کش و پرگار). همچنین رساله‌های عربی جالبی درباره روش‌شناسی و آموزش هندسه وجود دارد.

#### ۷. جبر و هندسه

جبر و هندسه دو زمینه متمایز به شمار می‌آمدند که پیوندهایی با هم داشتند. هندسه اغلب به عنوان یکی از مبانی جبر به کار می‌رفت. ثابت بن قره بر مبنای مقاله دوم اصول اقلیدس رساله‌ای در اثبات درستی دستوره‌های خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم نگاشت. برخی دیگر از جبردانان عربی نویس پس از او مانند کرجی، سموال و شرف الدین طوسی تلاش کردند علم جبر را بر پایه محکمی، یعنی نظریه تناسب مقادیر دلخواه در مقاله پنجم اصول اقلیدس، قرار دهند. از قرن چهارم هجری به بعد، معادلات درجه سوم را به صورت هندسی با تقاطع دو مقطع مخروطی که از روی ضرایب معادله مشخص می‌شد، حل می‌کردند. روش خیام، مشهور اما ناقص است، زیرا درباره شرط لازم و کافی وجود ریشه در معادلات غیربدهی بحث نمی‌کند. در قرن چهارم و پنجم، دریافتند که دو مقطع مخروطی به کار رفته در حل هندسی معادله  $ax^2 + c = x^3$ ، بر دایره  $c = (\frac{4}{27})a^3$  مماسند، و شرط درست  $c \leq (\frac{4}{27})a^3$  به دست آمد.<sup>۲</sup> در قرن ششم هجری،

۱. بنگرید به مقاله «بادداستی بر سه قضیه مکانیک کوهی و پیامدهای آن» از ژاک سزایانو، ترجمه رضا علی‌اکبرپور، میراث علمی، سال ۱، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، ص ۳-۱۸.

۲. این شرط امروزه به صورت  $4p^3 + 27q^2 \leq 0$  برای معادله  $x^3 + px + q = 0$  بیان می‌شود. م

شرف‌الدین طوسی شرایط لازم و کافی وجود ریشه‌های مثبت در انواع معادلات درجه سوم  $f(x) = c$  را با استفاده ماهرانه از عبارتهای  $f(y) - f(x)$  و اسلوب مقاله دوم اصول اقلیدس، یافت (هوخذایک، ۱۹۸۹).

تمام این‌ها مواردی بودند که هندسه در جبر کاربرد داشت. اما از جبر نیز در هندسه، به ویژه در کاربردهای مثلثاتی استفاده می‌شد. ابوکامل برای به دست آوردن ضلع  $x$  در پنج ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۰، معادله درجه دومی به دست آورد، و سپس  $x$  را به روش عددی تخمین زد. در قرن چهارم هجری نشان داده شد که رسم هفت ضلعی و نه ضلعی منتظم معادل حل معادلات درجه سوم هستند. کاشانی نیز اثبات کرد که تثلیث هر زاویه دلخواه معادل حل معادله درجه سوم است. او با استفاده از این اصل و بهره‌گیری از روش تکرار که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود، مقدار جیب (سینوس) یک درجه را محاسبه کرد که کمیتی اساسی در جدول‌های مثلثاتی بود.

## ۸. ریاضیات عددی

ریاضیدانان عربی نویس با استفاده از آنچه امروزه روش روفینی-هورنر خوانده می‌شود، پیشرفت قابل توجهی در حل عددی معادلات جبری حاصل کردند. روش کلی چنین است (بنگرید به «لوکی» در منابع): فرض کنید که  $P(x) = Q(x)$  معادله‌ای است که می‌خواهیم آن را حل کنیم (البته تمام جملات مثبت هستند). (این توضیح برای یافتن  $x$  در دستگاه دهدهی است؛ برای یافتن  $x$  در دستگاه شصتگانی، ۱۰ را به ۶۰ تغییر دهید). ابتدا باید مرتبه اندازه  $x$ ، یعنی مقدار  $k$  را رابطه  $10^k \leq x < 10^{k+1}$  را بیابیم. سپس می‌توان (بر مبنای روش آزمون و خطا)  $x_0 = m \cdot 10^k$  را چنان به دست آورد که  $m$  عدد صحیح، و یکی از جفت گزاره‌های  $P(x_0) \leq Q(x_0)$  یا  $P(x_0) > Q(x_0)$  درست باشد. واضح است که  $m$  نخستین رقم بسط ده دهی عدد  $x$  است. اگر رابطه  $x = x_0 + 10y$  را در نظر بگیریم، آن گاه  $P(x) = Q(x)$  باید معادل رابطه‌ی همانی  $P_1(x) = Q_1(x)$  برای چندجمله‌ای‌های معین  $P_1$  و  $Q_1$  باشد. اکنون می‌توانیم این فرآیند را تکرار کنیم و نخستین رقم بسط دهدهی  $y$  را به دست آوریم که در حقیقت رقم دوم  $x$  است، و همین‌طور تا پایان.

روش روفینی-هورنر اساساً الگوریتمی برای به دست آوردن  $P_1$  و  $Q_1$  از  $P$ ،  $Q$  و  $x_0$  است. از این روش در دوره باستان (به صورت شصتگانی) برای استخراج ریشه‌های دوم، و در چین باستان و نیز توسط کوشیار گیلانی در قرن چهارم هجری برای استخراج ریشه‌های سوم استفاده می‌شد.<sup>۱</sup> در

۱. برای اطلاع بیشتر بنگرید به مقاله زیر:

Karine Chemla, "Similarities Between Chinese and Arabic Mathematical Writings: (I) Root Extraction", *Arabic Science and Philosophy*, vol. 4 (1994), pp. 207-266.



قرن ششم یا پیش از آن، این روش برای تقریب ریشه‌های معادلات درجه سوم دلخواه و نیز معادلاتی با درجات بالاتر، تعمیم داده شد (راشد، ص ۱۰۰). کاشانی در قرن نهم هجری ریشه  $n$  ام برای هر  $n$  دلخواه با این روش به دست آورد (برگرن آن را برای  $n = 5$  نشان داده است، ۱۹۸۶: ص ۵۳-۶۲؛ ترجمه فارسی ص ۶۶-۷۸).

روش تکرار در تقریب عددی ریشه‌های معادلات نیز کاربرد داشت. کاشانی نشان داد که  $x = 60 \sin 1^\circ$  ریشه معادله درجه سوم  $x^3 + c = bx$  است که در آن  $c = 54000 \sin 3^\circ$  و  $b = 2700$ ؛ سپس این ریشه را با روش تکرار  $x_0 = c/b$ ،  $x_n = (x_{n-1}^3 + c)/b$  برای  $n \geq 1$  تقریب زد (یوشکیویچ، ص ۳۲۱). از زمان بطلمیوس نیز روش تکرار در مسائل نجومی و احکام نجومی استفاده می‌شد. در حل این گونه مسائل گاهی لازم بود کمیت  $\theta$  برای  $\lambda$  داده شده و تابع مفروض  $f$  طوری به دست آید که  $\lambda = \theta - f(\theta)$ . نمونه‌های بسیاری از این گونه مسائل وجود دارد که به کمک روش تکرار  $\theta_0 = \lambda$ ،  $\theta_n = \lambda + f(\theta_{n-1})$  حل شده است (یوشکیویچ، ص ۳۲۴، برای  $f(\theta) = m \sin \theta$ ). اگر به ازای  $\xi$  در همسایگی  $\theta$ ،  $f(\xi)$  در مقایسه با  $\xi$  کوچک باشد، این روش همگرا خواهد بود. توجه کنید که روش تکرار کاشانی برای مورد خاص  $\lambda = c/b$ ،  $f(\theta) = \theta^3/b$  بود.

#### ۹. سایر زمینه‌ها

از زمان ابوکامل، ریاضیدانان عربی نویس به محاسباتی شامل جمع و تفریق‌های پیچیده ریشه‌های دوم علاقمند بودند. آن‌ها معادله‌های بسط امروزی  $(a+b)^n$  بر حسب توان‌های  $a$  و  $b$  را برای دست کم  $n \leq 12$  به دست آوردند. کرجی در متن نیافته‌ای که سموال از آن یاد کرده است، جدولی از ۱۲ ردیف نخست ضرایب دوجمله‌ای را که امروزه با نام مثلث پاسکال خوانده می‌شود، عرضه کرد (راشد، ص ۷۶-۷۷). ابن منعم در حدود سال ۶۱۰ق، ضرایب دوجمله‌ای را از منظر ترکیبیاتی محض، بدون اشاره به  $(a+b)^n$  بیان کرد (جبار-منابع). کاشانی نیز ضرایب دوجمله‌ای را برای  $n = 5$  در تقریب عددی ریشه پنجم با صورت ساده شده روش روفینی-هورنر به دست آورد.

#### ۱۰. تأثیرگذاری ریاضیات اسلامی

در قرن دوازدهم و سیزدهم میلادی (ششم و هفتم هجری)، بسیاری از متون ریاضی دوره اسلامی در اسپانیا و در ابعاد کمتری در جزیره سیسیل به لاتینی ترجمه شدند. این کار بیشتر شامل ترجمه‌های عربی ریاضیات یونانی بود، اما برخی آثار مؤلفان عربی نویس مانند نوشته‌های خوارزمی درباره اعداد هندی و جبر و المناظر ابن هیثم را نیز در برمی‌گرفت. بنابراین دانشمندان سده‌های میانه اروپا با ریاضیات و نجومی آشنا شدند که بسیار برتر از دانش پیشین آن‌ها بود. نمونه دیگری از این انتقال، مورد لئوناردو فیبوناچی پیزی است که به غرب سرزمین‌های اسلامی سفر و



در آن جا تحصیل کرد و پس از بازگشت، آثار ریاضی متنوعی نگاشت. نکته مهمی که باید به خاطر سپرد این است که سطح ریاضیات در شرق دنیای اسلام (عراق و ایران) به مراتب بالاتر از سرزمین‌های غربی بود و این که بیشتر دستاوردهای ریاضی در مناطق غرب مصر ناشناخته بود. از این رو انتقال ریاضیات دوره اسلامی به اروپای سده‌های میانه بسیار ناقص بوده و اغلب آثاری که منتقل می‌شدند (مانند آثاری از خوارزمی) مربوط به مرحله‌ای از پیشرفت بودند که بسیار زودتر در شرق جهان اسلام پشت سر گذاشته شده بود. دستاوردهای مهم‌ترین ریاضیدانان عربی‌نویس مانند ثابت بن قره، ابراهیم بن سنان، کوهی، بیرونی، خیام، شرف‌الدین طوسی و کاشانی، تنها در نتیجه بررسی‌های تاریخی جدید شناخته شده‌اند.

## منابع

Berggren, J. L. 1983, 'The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Ishāq al-Šābī: A translation with commentaries', *Journal for History of Arabic Science*, 7, pp. 39-124.

-----1986, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York: Springer.  
انتشارات فاطمی این اثر برگرن را با عنوان گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی (ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی، تهران، ۱۳۷۳) چاپ کرده است.

Djebbar, A. 1983, *L'Analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun'im*, Orsay: Université de Paris-Sud.

Hogendijk, J. P. 1984, 'Greek and Arabic constructions of the regular heptagon', *Archive for History of Exact Sciences*, 30, pp. 197-330.

-----1989, 'Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī on the number of positive roots of cubic equations', *Historia Mathematica*, 16, pp. 69-85.

Høyrup, J. 1987, 'The formation of "Islamic mathematics": Sources and conditions', *Science in Context*, 1, pp. 281-329.

Jaouiche, K. 1986, *La Théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris: Vrin.

Juschkevitch, A. P. 1964, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig: Teubner. [The best survey to date. Translated from the Russian *Istoria matematiki b srednie veka*, 1961, Moscow: Nauka. The section on Arabic mathematics was translated into French as: Youschkevitch, A. P. 1976, *Les Mathématiques Arabes (VII<sup>e</sup>—XV<sup>e</sup> siècles)*, Paris: Vrin.]

Luckey, P. 1948, 'Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik', *Mathematische Annalen*, 120, pp. 217-74.

*Mathematical Reviews*. [The best source of bibliographical information on recent publications in the history of Arabic mathematics; subject code 01A30.]



Matvievskaya, G. P. and Rozenfeld, B. A. 1983, *Matematiki i astronomy musul'-manskogo srednevekovya i ikh trudy (VIII-XVII vv.)*, Moscow: Nauka. [References to manuscripts of all authors up to 1700. Large bibliography. Knowledge of the Russian alphabet is all that is necessary to consult this work with profit.]

ترجمه انگلیسی با افزوده‌ها و اصلاحات (بدون ذکر نام ماتویفسکایا):

Rosenfeld, Boris A.; Ihsanoglu, Ekmeleddin, *Mathematicians, Astronomers, and Other Scholars of Islamic Civilization and Their Works (7<sup>th</sup>-19<sup>th</sup> c.)*, Istanbul, 2003.

ترجمه فارسی ناویراسته‌ای از این اثر هم با افزوده‌ها و اصلاحات منتشر شده است:

علی اکبر ولایتی، تاریخ علم در فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، جلد دوم، کتاب اول و دوم، تهران ۱۳۹۳. این بخش از کل مجموعه، شامل ترجمه عبد الله زرافشان از اثر اصلی روسی است.

Rashed, R. 1984, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes*. Paris: Les Belles Lettres. [Algebraical interpretation in the style of N. Bourbaki.]

مرحوم محمدهادی شفیعیهها ترجمه بخشی از مقدمه این اثر را با عنوان «شرف‌الدین طوسی و

مفهوم مشتق» در نشر ریاضی، سال ۴، شماره ۳، مهرماه ۱۳۷۱، ص ۵۲-۶۰ منتشر کرده‌اند.

Sesiano, J. 1977, 'Le Traitement des équations indéterminées dans le *Badī' fil-Hisāb* d'Abū Bakr al-Karajī', *Archive for History of Exact Sciences*, 17, pp. 297-379.

Sezgin, F. 1974, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. 5, *Mathematik bis ca. 430 H.*, Leiden: Brill. [References to all known Arabic manuscripts of authors before 1050, Hebrew and Latin translations of such texts, and Arabic translations of ancient texts.]

Toomer, G. L. 1990, *Apollonius, Conics, Books V to VII. The Arab Translation of the Lost Greek Original*, New York: Springer.

... و باید دانست که هندسه به خواننده آن سود فراوان می‌بخشد؛ خرد وی را تابناک و اندیشه او را مستقیم و راست می‌کند، زیرا کلیه براهین آن از لحاظ ترتیب و انتظام آشکار و روشن است و به هیچ رو به قیاس‌های آن غلط راه نمی‌یابد، ازاین‌رو که قواعد و اصول آن مرتب و منظم است و در نتیجه ممارست در آن دانش، اندیشه از لغزش و خطا دور می‌شود و عقل تمرین‌کننده آن به همان شیوه با نظم و ترتیب پرورش می‌یابد ... و استادان و شیوخ ما (رح) می‌گفتند: «ممارست در علم هندسه برای اندیشیدن به مثابه صابون برای جامه است که از آن ناپاکی‌ها و آلودگی‌ها را می‌زداید و آن را از هر گونه پلیدی پاک می‌کند.» و همه این‌ها به سبب همان نکته‌ای است که بدان اشاره کردیم و گفتیم دانش مزبور دارای اصول و براهین مرتب و منظمی است. [مقدمه ابن خلدون، ترجمه محمد پروین گنابادی، ۱۳۷۹، ج ۲، ص ۲۴۰ و ۲۴۱]