



# Strategies numeriques avancees pour la simulation de modèles définis sur des geometries de plaques et coques : solutions 3D avec une complexite 2D

Brice Bognet

► **To cite this version:**

Brice Bognet. Strategies numeriques avancees pour la simulation de modèles définis sur des geometries de plaques et coques : solutions 3D avec une complexite 2D. Modélisation et simulation. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2013. Français. <tel-01021762>

**HAL Id: tel-01021762**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01021762>**

Submitted on 16 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Brice BOGNET**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale** : Science Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

**Discipline** : Génie mécanique, productique transport

**Unité de recherche** : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique - UMR CNRS 6183

**Soutenue le 16/04/2013**

## Stratégies numériques avancées pour la simulation de modèles définis sur des géométries de plaques et coques : solutions 3D avec une complexité 2D

### JURY

Président :	<b>Pierre LADEVEZE</b> , Professeur des Universités, École Normale Supérieure de Cachan
Rapporteurs :	<b>Philippe BOISSE</b> , Professeur des Universités, INSA Lyon <b>Aziz HAMDOUNI</b> , Professeur des Universités, Université de La Rochelle
Examineurs :	<b>Alain CIMETIÈRE</b> , Professeur des Universités, Université de Poitiers-ENSMA
Invités :	<b>Sylvain CHATEL</b> , Ingénieur R&D, EADS France Innovation Works <b>Adrien LEYGUE</b> , Chargé de recherche CNRS, École Centrale Nantes
Directeur de Thèse :	<b>Francisco CHINESTA</b> , Professeur des Universités, École Centrale Nantes
Co-directeur de Thèse :	<b>Arnaud POITOU</b> , Professeur des Universités, École Centrale Nantes



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Francisco (Paco) Chinesta, Professeur à l'École Centrale de Nantes pour m'avoir guidé dans ce travail de recherche. Le simple remerciement à titre professionnel n'est pas suffisant tant les qualités humaines, l'énergie, la disponibilité et la bonne humeur communicative de Paco sont précieuses dans un laboratoire. Je remercie particulièrement Arnaud Poitou co-directeur de cette thèse, directeur du laboratoire GeM, puis directeur de l'École Centrale Nantes, pour ses interventions extrêmement bénéfiques et sa vision très claire des problèmes traités au cours de cette thèse. Je remercie aussi chaleureusement Adrien Leygue, Chargé de Recherches CNRS au GeM et encadrant de ce travail, pour sa sympathie, sa disponibilité, sa grande expérience dans la résolution de problèmes numériques, et son aide précieuse au quotidien. Je remercie la Fondation EADS qui a financé ma thèse via la Chaire Advanced Modelling of Composites Manufacturing Processes.

Je remercie Messieurs Aziz Hamdouni et Philippe Boisse professeurs respectivement à l'université de La Rochelle et à l'INSA de Lyon pour leur excellente analyse du rapport et leur remarques tout aussi constructives lors de la présentation orale. Je remercie aussi Monsieur Alain Cimetière, professeur à l'université de Poitiers-ENSMA d'avoir participé au jury, ainsi que Monsieur Pierre Ladevèze d'avoir assuré la présidence du jury.

Je tiens aussi à remercier Patrice Cartraud, professeur à l'École Centrale Nantes pour ses interventions au début de ma thèse, ainsi qu'Eugenio Giner, professeur à l'Université Polytechnique de Valence pour notre collaboration qui a engendré un article, sans oublier Felipe Bordeu sans qui la visualisation des résultats des simulations de notre groupe serait beaucoup plus laborieuse.

Je remercie bien chaleureusement l'ensemble des membres de l'équipe pour avoir posé des questions, émis des interrogations et proposé de nouvelles pistes lors de nos réunions d'équipe, ou tout simplement au détour d'un couloir ou autour d'un café. J'ai particulièrement apprécié la bonne ambiance qui règne au laboratoire, et je remercie l'ensemble des membres de l'équipe tant pour leurs qualités humaines que scientifiques. Je remercie particulièrement Anaïs, Chady, Thomas, Fabien, José-Vicente, Loïc et évidemment Felipe pour les moments que nous avons passé à travailler ensemble. Je remercie aussi particulièrement Nicolas, Felipe et Adrien qui m'ont initié aux logiciels et systèmes d'exploitation libres dont je ne peux plus me passer à l'heure actuelle, sans oublier les autres personnes avec qui j'ai cohabité dans le bureau : Hajer, Xiaoli, Nicolas, Fabien et Prabu. J'exprime également ma gratitude envers Pierre-Émanuel et Éric qui font toujours leur maximum pour répondre à nos sollicitations et pour maintenir les ressources informatiques du laboratoire en bon

état de fonctionnement. Je remercie bien sur les autres membres de l'équipe avec qui j'ai passé du temps au laboratoire et à l'extérieur du laboratoire : Chrystelle, Anne-Sophie, Emmanuelle, Violette, Pierre, Sébastien, Christophe, Bertrand, Erwan, Michel, Jean-Michel, Jean-Christophe, Domenico, Benedict, Thibault, Raphaël et tous ceux que j'ai oublié qui me pardonneront j'espère.

Enfin, je remercie l'ensemble de ma famille, qui m'a toujours encouragé et très spécialement ma femme Gabrielle qui m'a aidé à corriger les innombrables coquilles présentes dans les premières versions du manuscrit.





# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Résolution de problèmes 2D</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte	3
1.2 Résolution d'un problème 2D	3
1.2.1 Formulation du problème	3
1.2.2 Séparation des variables d'espace	5
1.2.3 Résolution	8
1.2.4 Résultats	11
1.2.5 Convergence	12
1.3 Applications et limitations	15
<b>2 Résolution de problèmes 3D</b>	<b>17</b>
2.1 Différentes séparations possibles	19
2.1.1 Séparation du 3D vers 3 problèmes 1D	19
2.1.2 Séparation du 3D en 2D/1D	21
2.2 3D séparé en 2D/1D pour les plaques	24
2.2.1 Formulation du problème	24
2.2.2 Résolution	27
2.2.3 Exemple et validation	27
2.2.4 Performances	30
2.2.5 Application des conditions aux limites	32
2.2.6 Exemples	35
2.3 Analyse des modes PGD	38
2.4 Conclusion	42
<b>3 Problèmes 3D complexes</b>	<b>43</b>
3.1 Représentation en plusieurs modes	45
3.1.1 Mise en équation du problème	45
3.1.2 Résolution	47
3.1.3 Exemples de simulations définies sur des domaines complexes	48
3.2 Pénalisation	51
3.2.1 Présentation de la méthode	51
3.2.2 Exemple	53
3.3 Thermoélasticité	55

3.3.1	Formulation et résolution du problème de thermoélasticité . . . . .	55
3.3.2	Optimisation d'une cornière composite . . . . .	56
3.3.3	Discussion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Géométries 3D coques</b>	<b>61</b>
4.1	Introduction : 3D séparé en 2D/1D pour les coques . . . . .	63
4.1.1	Approche facetisée . . . . .	63
4.1.2	Approche continue . . . . .	63
4.2	Paramétrage de la géométrie . . . . .	64
4.2.1	Paramétrage de la surface moyenne . . . . .	64
4.2.2	Paramétrage du volume et séparation des variables . . . . .	64
4.3	Formulation du problème mécanique . . . . .	65
4.4	Résolution avec la PGD . . . . .	65
4.5	Expression du tenseur d'élasticité pour les matériaux composites stratifiés . . . . .	67
4.6	Exemples . . . . .	69
4.6.1	Exemple de validation . . . . .	69
4.6.2	Exemple de pièce composite stratifiée . . . . .	72
4.6.3	Exemple de simulation sur une géométrie complexe . . . . .	74
4.7	Conclusion . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Abaques numériques</b>	<b>77</b>
5.1	Paramétrisation d'une orientation d'un pli . . . . .	79
5.2	Paramétrisation d'une épaisseur . . . . .	82
5.3	Paramétrisation d'un coefficient matériau . . . . .	84
5.4	Autres paramètres additionnels . . . . .	86
5.5	Exemples multi-paramètres/Abaques numériques . . . . .	86
5.5.1	Pièce en matériau isotrope quelconque . . . . .	87
5.5.2	Étude paramétrique d'une éprouvette entaillée . . . . .	89
5.6	Post-traitement et reconstruction . . . . .	91
5.6.1	Enveloppe . . . . .	91
5.6.2	Construction d'un point sur un espace paramétrique . . . . .	92
5.6.3	Reconstruction à la volée sur une plateforme légère . . . . .	92
5.6.4	Optimisation . . . . .	93
5.7	Limitations - Conclusions . . . . .	94
	<b>Conclusion et discussion</b>	<b>95</b>
	<b>Développement des opérateurs en 2D</b>	<b>99</b>
	<b>Développement des opérateurs en 3D</b>	<b>105</b>
	<b>Détail des modes sur un problème de plaque</b>	<b>111</b>
	<b>Jacobien et son inverse pour une coque discrétisée</b>	<b>115</b>

<b>Bases de géométrie différentielle</b>	<b>119</b>
.1 Différentes bases	119
.1.1 Bases de la surface moyenne	119
.1.2 Bases dans le volume	121
.2 Formes fondamentales	123
.2.1 Formes fondamentales de la surface moyenne	123
.2.2 Formes fondamentales dans le volume et métrique 3D	126



# Table des figures

1	Structure d'un avion simplifiée à extrême . . . . .	ii
2	Différentes échelles de modélisation . . . . .	ii
3	Pièce volumique et maillages 1D et 2D associés . . . . .	iv
1.1	Présentation du problème à résoudre . . . . .	3
1.2	Domaine de résolution en variables d'espace séparées 1D/1D . . . . .	5
1.3	Algorithme de résolution d'un problème en variables séparées . . . . .	11
1.4	Problème et conditions aux limites . . . . .	12
1.5	Solution du problème défini en 1.4 . . . . .	12
1.6	Erreur entre la référence et la solution calculée pour $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-1}$ . . . . .	13
1.7	Erreur entre la référence et la solution calculée pour $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$ . . . . .	13
1.8	Erreur entre la référence et la solution calculée pour $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-3}$ . . . . .	13
1.9	Erreur entre la référence et la solution calculée pour $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-4}$ . . . . .	14
1.10	Erreur entre la référence et la solution calculée pour $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-5}$ . . . . .	14
1.11	Erreur en densité d'énergie de déformation en fonction de $\varepsilon_{\text{résidu}}$ . . . . .	14
1.12	Erreur en densité d'énergie de déformation en fonction du nombre de modes . . . . .	15
2.1	Séparation d'un problème 3D en 3 problèmes 1D . . . . .	19
2.2	Séparation d'un problème 3D en 2D/1D . . . . .	21
2.3	Séparation d'un problème 3D en 2D/1D sur une poutre . . . . .	22
2.4	Séparation d'un problème 3D en 2D/1D sur une plaque . . . . .	23
2.5	Problème 3D . . . . .	24
2.6	Géométrie 3D et les maillages 2D et 1D associés . . . . .	25
2.7	Définition du problème utilisé pour la validation . . . . .	28
2.8	Erreur relative en densité d'énergie de déformation . . . . .	29
2.9	Erreur relative en contrainte de Von Mises . . . . .	29
2.10	Discretisations des problèmes 3D, 2D et 1D . . . . .	30
2.11	Comparaison des temps de résolution . . . . .	31
2.12	Nombre de modes dans la solution . . . . .	32
2.13	Contrainte de Von Mises sur la plaque . . . . .	32
2.14	Conditions aux limites de type Neumann sur une face supérieure . . . . .	33
2.15	Conditions aux limites de type Neumann sur une face latérale . . . . .	33
2.16	Conditions aux limites de type Neumann sur une face latérale . . . . .	34
2.17	Premier mode pour imposer une condition de Dirichlet . . . . .	34

2.18	Premier mode pour imposer une condition de Dirichlet . . . . .	35
2.19	Définition du problème de mécanique sur la plaque trouée . . . . .	36
2.20	Déplacement en $x$ et contrainte $\sigma_{zz}$ sur la plaque trouée . . . . .	37
2.21	Contrainte $\sigma_{zz}$ au voisinage du trou . . . . .	37
2.22	Structure raidie . . . . .	38
2.23	Maillage 2D pour résoudre le problème de la figure 2.22 . . . . .	38
2.24	Définition du problème sur la plaque en forme de "L" . . . . .	39
2.25	Mode 1 . . . . .	40
2.26	Mode 2 . . . . .	41
2.27	Mode 3 . . . . .	41
2.28	Évolution de l'angle entre une fibre et la surface moyenne . . . . .	42
3.1	Représentation 3D reconstruite de $K_{ij}^i(x, y, z)$ . . . . .	45
3.2	Valeurs de composantes des $K_{xyij}^i$ et $K_{zij}^i$ . . . . .	46
3.3	Structure 3D en forme de caisson . . . . .	48
3.4	Indicatrice utilisée pour définir la raideur . . . . .	48
3.5	Champ de contrainte 3D sur la structure en caisson . . . . .	49
3.6	Maillage 2D pour le problème de plaque raidie . . . . .	49
3.7	Maillage 2D pour le problème de plaque raidie par raidisseur courbe . . . . .	49
3.8	Déformée de la plaque raidie . . . . .	50
3.9	Déformée de la plaque raidie par un raidisseur courbe . . . . .	50
3.10	Maillage 3D reconstruit d'une cellule de nid d'abeille . . . . .	50
3.11	Déformée de la plaque en sandwich composite et nid d'abeille . . . . .	51
3.12	Condition de Dirichlet sur un domaine quelconque . . . . .	52
3.13	Définition de problème . . . . .	54
3.14	Contrainte de Von Mises sur la pièce déformée . . . . .	54
3.15	Cornière composite . . . . .	57
3.16	Détail du maillage 2D utilisé pour l'optimisation de la cornière . . . . .	57
3.17	Déformée de la cornière à $90^\circ$ . . . . .	59
4.1	Représentation discrétisée de la coque . . . . .	63
4.2	Paramétrage de la surface moyenne . . . . .	64
4.3	Paramétrage du volume . . . . .	65
4.4	Définition d'une section du problème considéré . . . . .	69
4.5	Représentation 3D des trois maillages utilisés . . . . .	70
4.6	Déplacement radial en fonction du rayon pour les 3 maillages (2D/1D et 3D) et pour la solution analytique . . . . .	71
4.7	Mode 1 pour la composante $u$ calculée sur le MAILLAGE 3 . . . . .	71
4.8	Mode 1 pour la composante $v$ calculée sur le MAILLAGE 3 . . . . .	72
4.9	Mode 1 pour la composante $w$ calculée sur le MAILLAGE 3 . . . . .	72
4.10	Base locale orthonormée . . . . .	73
4.11	Déplacement radial le long d'un rayon . . . . .	73
4.12	$\varepsilon_{rr}$ le long d'un rayon . . . . .	74
4.13	Géométrie considérée . . . . .	74

4.14	$\varepsilon_{xx}$ sur la pièce . . . . .	75
4.15	Dépendance en $\zeta$ de la composante $u$ du déplacement pour les trois points définis sur la figure 4.14 . . . . .	76
5.1	Exemple de cas traité : plaque stratifiée paramétrée . . . . .	79
5.2	Coefficients du tenseur des coefficients élastiques en fonction de l'angle $\theta_l$ . . . . .	81
5.3	Coefficients du tenseur des coefficients élastiques en fonction de l'angle $\theta_l$ . . . . .	81
5.4	Déformée de la pièce en fonction de l'empilement . . . . .	82
5.5	Présentation du problème à épaisseur paramétrée . . . . .	83
5.6	Déformée de l'éprouvette entaillée pour 3 valeurs de l'épaisseur . . . . .	84
5.7	Coefficients du tenseur des coefficients élastiques $\mathbb{K}_\nu$ en fonction de $\nu$ . . . . .	85
5.8	Déformée de l'éprouvette entaillée pour 3 valeurs du coefficient de poisson . . . . .	86
5.9	Géométrie de la pièce utilisée . . . . .	87
5.10	Description du chargement sur la pièce paramétrée . . . . .	88
5.11	Optimisation de la pièce par post-processing . . . . .	88
5.12	Pièce optimisée pour deux matériaux différents . . . . .	89
5.13	Extension virtuelle du segment $\Delta_s$ de la fissure pour l'intégration de $J(s)$ . . . . .	90
5.14	Influence du coefficient de Poisson sur l'intégrale $J$ . . . . .	91
5.15	Influence de l'épaisseur sur l'intégrale $J$ . . . . .	91
5.16	Enveloppe des déformées de la pièce . . . . .	92
5.17	Déplacement d'un coin pour tout l'espace paramétrique $(\theta_1, \theta_4)$ . . . . .	92
5.18	Reconstruction à la volée d'une solution paramétrique . . . . .	93
5.19	Différentes sous structurations pour l'optimisation . . . . .	96
20	Mode 3 . . . . .	111
21	Mode 4 . . . . .	111
22	Mode 5 . . . . .	112
23	Mode 6 . . . . .	112
24	Mode 7 . . . . .	112
25	Mode 8 . . . . .	113
26	Mode 9 . . . . .	113
27	Mode 10 . . . . .	113
28	Représentation de l'élément parent ainsi que des fonctions de formes éléments finis . . . . .	116
29	Représentation de la base covariante sur un quart de tore . . . . .	120
30	Représentation de la base contravariante sur un quart de tore . . . . .	120
31	Représentation de la base locale orthonormée sur un quart de tore . . . . .	121
32	Champ métrique sur une portion de cylindre . . . . .	124
33	Champ métrique sur une portion de sphère . . . . .	124



# Liste des tableaux

2.1	Paramètres géométriques et coefficients matériau . . . . .	36
3.1	Coefficients matériau utilisés pour un pli composite . . . . .	58
3.2	Paramètres géométriques utilisés pour la cornière . . . . .	58
4.1	Paramètres géométriques et coefficients matériau . . . . .	69
4.2	Nombre d'éléments dans les différentes directions pour les trois maillages utilisés . . . . .	70
4.3	Coefficients matériau d'un pli composite . . . . .	72
4.4	Valeurs des dimensions géométriques . . . . .	75
5.1	Dimensions de l'éprouvette et intervalles de valeurs . . . . .	84
5.2	Coefficients matériaux utilisés pour l'acier et l'aluminium . . . . .	89



# Introduction

Les matériaux composites, dont la faible masse est un atout, représentent une part de plus en plus importante en masse dans la conception des aéronefs actuels, et plus généralement dans les transports (transport naval, ferroviaire, aéronautique, ...) et le domaine de l'énergie (éolienne, ...). Au sein des matériaux composites, les matériaux stratifiés composés de plis de matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcés par des fibres longues (de verre ou de carbone) figurent parmi les plus utilisés.

L'utilisation massive de ces matériaux implique de nombreux changements au niveau de la chaîne de conception des produits par rapport aux solutions métalliques, historiquement plus largement déployées.

- Le nombre de variables de conception augmente très largement : en plus du traditionnel choix du matériau, vient s'ajouter le choix des orientations des plis, ainsi que leur séquence d'empilement. De plus, pour la stratification d'une pièce constituée de plusieurs zones entre lesquelles l'empilement évolue, la complexité de l'optimisation de l'agencement des empilements entre eux combinée à la recherche de la facilité de mise en œuvre complique davantage le problème de la détermination de la solution optimale, qui n'est de plus pas unique.
- Le comportement des matériaux est complexe : l'état de contrainte résiduel des pièces fabriquées dépend de nombreux facteurs dépendant des variables de conception, des paramètres et des variabilités dans le procédé de fabrication. De plus, les mécanismes de dégradation et de vieillissement du matériau influencent ensuite fortement le comportement de la pièce pendant ses différentes phases de vie.

Un autre changement majeur indépendant de l'essor des matériaux composites auquel nous assistons est la nécessité de réduire le coût et le temps de conception des produits. Pour cette raison, les nombreux essais sur prototypes de pièces, assemblages, et même produits complets, extrêmement coûteux en temps, en argent et en matériel doivent être remplacés par des simulations numériques. Il s'agit donc de conserver uniquement des essais sur éprouvettes pour caractériser les matériaux, et effectuer des simulations pour les pièces et les structures. La stratégie de conception s'oriente vers le "virtual testing". Par conséquent, il est nécessaire de développer des outils de simulations performants et fiables afin de substituer les optimisations à base de simulations aux essais-erreur sur pièces et structures réelles.

L'objet de cette thèse est de mettre en place des stratégies de calcul efficaces pour répondre à cette nécessité.

Les pièces composites stratifiées se présentent dans la majorité des cas sous forme de

plaques, de coques ou d'assemblages de plaques et de coques. C'est d'autant plus vrai dans le cas de pièces pour l'aéronautique. La figure 1 illustre de façon extrêmement simplifiée mais néanmoins vrai cet aspect.

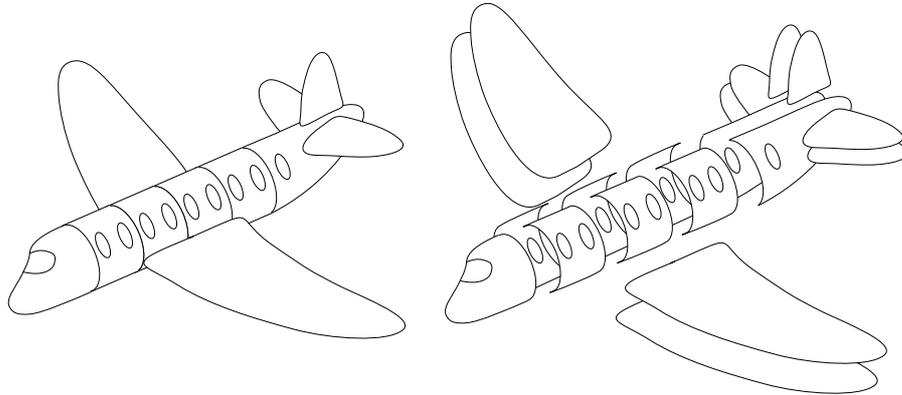


FIGURE 1 – Structure d'un avion simplifiée à extrême : grande majorité de plaques et de coques

L'objectif des travaux développés ici est triple :

- être capable d'effectuer des simulations pertinentes pour la fabrication et le dimensionnement de plaques et de coques en matériaux composites,
- proposer des outils de choix des variables de conception et d'optimisation de ces pièces,
- prendre en compte les sources de variabilité du procédé pour en évaluer les conséquences en termes de tolérance géométrique et de résistance des pièces.

Les phénomènes qui entrent en jeu lors de la mise en forme des pièces composites (à matrice thermoplastique ou therm durcissable) sont suffisamment connus pour permettre de simuler la fabrication de telles pièces. L'objectif de ce travail ne porte pas sur la modélisation de ces phénomènes, mais plutôt sur les moyens de les prendre en compte de façon efficace. Cependant ces phénomènes (principalement chimiques, thermiques et mécaniques) interviennent localement sur des structures possédant des longueurs caractéristiques d'ordre de grandeur très différents pour des pièces comme des plaques et des coques.

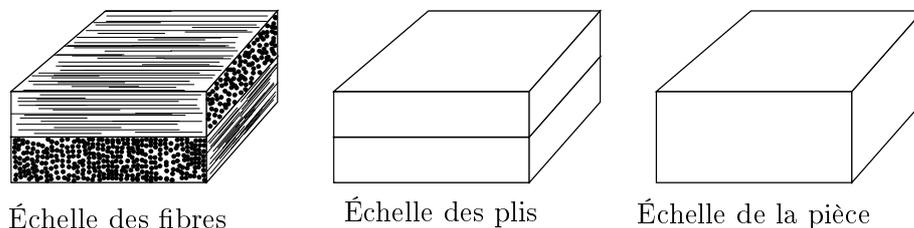


FIGURE 2 – Différentes échelles de modélisation

Pour prendre en compte de façon pertinente les phénomènes qui interviennent lors de la mise en forme, il faut utiliser une modélisation à l'échelle adéquate.

La modélisation à l'échelle des fibres (figure 2) semble inenvisageable pour une pièce voire une structure complète pour des problèmes de puissance de calcul. De plus, les va-

riabilités sont extrêmement nombreuses à cette échelle (distribution des fibres aléatoire, présences de vides, ...).

La modélisation à l'échelle de la structure est trop grossière, car la spécificité du comportement des matériaux composites qui provient de l'association de plusieurs plis fortement anisotropes orientés différemment se retrouve totalement masquée : les effets de contraintes internes inter-laminaires, essentielles pour déterminer les contraintes et la déformation résiduelle d'une pièce sont indisponibles à cette échelle.

Finalement, la modélisation à l'échelle des plis semble idéale pour la conception de pièces composites. Avec cette approche, chaque pli du stratifié est modélisé comme un milieu continu, on a donc accès à tous les champs par plis ainsi que l'évolution de ceux-ci dans l'épaisseur même des plis.

Par ailleurs, nous souhaitons introduire des paramètres additionnels dans les simulations pour prendre en considération différents paramètres de conceptions ou des sources de variabilités. Ceci entraîne une augmentation de la dimension de l'espace solution, et définit ainsi ce que l'on appelle une abaque numérique.

## Méthodes numériques

L'objectif est d'effectuer des simulations numériques sur des pièces composites de type plaques ou coques. La littérature est très riche dans ce domaine. Un état de l'art complet sur les méthodes de résolution des problèmes mécaniques n'est pas envisagé ici. Seules les méthodes les plus largement utilisées sont mentionnées ci-dessous.

Parmi les méthodes existantes, il existe :

- les approches analytiques [Pagano, 1970, 1969; Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959]. Ces méthodes fournissent des solutions analytiques à des problèmes simples, mais se limitent à des solutions pour des plaques rectangulaires ou circulaires. Elles manquent de flexibilité et sont par conséquent inadaptées pour le calcul de structure.
- les méthodes numériques utilisant la méthode des éléments finis 3D [Zienkiewicz *et al.*, 2005; Ramtekkar, 2003]. Inconvénient majeur : ces méthodes sont très gourmandes en ressources car la 3D implique une explosion rapide du nombre de degrés de liberté quand la taille du problème augmente.
- les méthodes numériques utilisant la méthode des éléments finis 2D basés sur des théories de plaques : avec ou sans cisaillement, avec ou sans contrainte normale : Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin, Timoshenko, Woinowsky-Krieger [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959; Hildebrand *et al.*, 1949; Reissner, 1977, 1979]... Les méthodes basées sur les théories de plaques peuvent être affinées dans le cadre des stratifiés pour prendre en compte l'effet de l'empilement. Parmi celles-ci, on trouve les méthodes zig-zag et leurs dérivées [Xiao *et al.*, 2008; Carrera, 1996; Reddy, 2004; Ochoa et Reddy, 1992; Pandit *et al.*, 2008; Semedogarcao *et al.*, 2004; Umasree et Bhaskar, 2006], sinus [Vidal et Polit, 2009], et autres méthodes multicouches : [Vidal et Polit, 2009; Ugrimov, 2002]. Ces solutions peuvent être enrichies pour mieux prendre en compte les effets de bords ou autres singularités [Sheng, 2002; Vel, 2000; Liew, 2003].

Les méthodes basées sur des théories de plaques reposent généralement sur une hypothèse sur le champ de déplacement et/ou de contrainte, celle-ci pouvant être plus ou moins pertinente selon les cas et l'emplacement du point considéré sur la pièce (effets de bords, ...). De plus, si l'on souhaite enrichir la solution pour capturer des effets 3D dus à une singularité, il faut décider à priori où les placer, ce qui pénalise la robustesse de la méthode.

Les difficultés majeures pour les méthodes 2D résident dans la difficulté d'assemblage entre structures, la représentation des effets locaux ainsi que la possibilité de représenter des physiques riches. Pour cela, nous avons choisi une approche 3D : celle-ci est extrêmement robuste du fait de l'absence d'hypothèses et d'enrichissement à placer à priori. Les effets de bords, singularités... sont automatiquement capturés car le modèle est de type mécanique des milieux continus 3D.

Cependant, les modèles 3D sont très gourmands en temps de calcul. Ainsi, nous utiliserons une méthode de réduction de modèle : la séparation des variables d'espace et la résolution par la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) [Ammar *et al.*, 2006; Chinesta *et al.*, 2010].

## Introduction à la PGD (Proper Generalized Decomposition)

L'approche retenue est d'effectuer des simulations 3D et d'utiliser la méthode de réduction de modèle PGD (Proper Generalized Decomposition) [Ammar *et al.*, 2006]. Cette méthode consiste à chercher la solution du problème en l'exprimant sous la forme d'une somme finie de produits de fonctions des différentes variables du problème.

Le cas de géométries de type plaques est particulièrement adapté pour une telle séparation de variables. En effet, la majorité des plaques stratifiées sont d'épaisseur constante : l'empilement des plis est identique sur toute la surface de la plaque.

Cette caractéristique autorise donc à chercher la solution sur la plaque sous la forme d'une somme de produits de fonctions du plan et de fonctions de l'épaisseur. La solution recherchée sera donc de la forme :  $\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{u}_z^i(z)$  où  $\mathbf{u}_{xy}^i(x, y)$  est une fonction vectorielle définie dans le plan (figure 3), et  $\mathbf{u}_z^i(z)$  est une fonction vectorielle définie dans l'épaisseur.

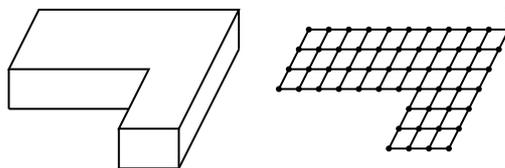


FIGURE 3 – Pièce volumique et maillages 1D et 2D associés

Une telle approche est intéressante, car la solution 3D est obtenue en résolvant uniquement des problèmes 1D et 2D. Ce formalisme rappelle finalement les théories des plaques originelles (Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin), qui définissent la solution comme le produit d'une fonction du plan et d'une fonction de l'épaisseur, cette dernière étant choisie à priori.

En effet ces théories de plaques sont basées sur une hypothèse cinématique de déplacement linéaire dans l'épaisseur. L'avantage majeur de la réduction de modèles en variables séparées, c'est que la forme des fonctions de  $(x, y)$  et de  $z$  n'est pas définie a priori. Aucune hypothèse cinématique n'est donc réalisée.

Les calculs 3D réalisés en variables séparées présentent donc une approximation supplémentaire par rapport à de véritables calculs 3D, car leur solution est représentée par une somme finie de produits de fonctions du plan et de l'épaisseur. L'espace des solutions de la PGD est une projection de l'espace des solutions éléments finis 3D sur un sous-espace de dimension inférieure.

Cependant, comme il sera montré dans ce document, la précision de la solution calculée par la méthode proposée est contrôlée via certains paramètres. Notons que l'espace des solutions PGD tend vers l'espace des solutions éléments finis 3D si le nombre de produits de fonctions tend vers le produit tensoriel des bases considérées dans chaque dimension. En pratique, sur un modèle discrétisé, la solution PGD tend assez rapidement vers la solution éléments finis 3D discrétisée de manière équivalente.

La technique de la séparation des variables permet de réduire la dimensionnalité des problèmes à résoudre. Des paramètres additionnels pourront donc être ajoutés dans des dimensions paramétriques sans faire exploser le coût de résolution du problème du fait de cette représentation séparée. Ceci afin de construire des abaques numériques.

## Organisation du document

Pour des raisons de simplicité des notations et pour ne pas alourdir excessivement les écritures, la méthode de résolution en variables d'espace séparées sera tout d'abord explicitée en détail pour des problèmes 2D, séparés en deux sous-problèmes 1D dans le chapitre 1. À la suite d'une brève présentation des différentes manières de décomposer un problème 3D, le chapitre 2 est consacré à la résolution de problèmes 3D décomposés sous la forme 2D/1D. L'ensemble des développements à propos des problèmes 3D, plus lourds au niveau des notations, seront présentés en annexe 5.7.

Le chapitre 3 fournit quelques compléments et techniques supplémentaires pour la résolution de problèmes 3D sous la forme 2D/1D.

Dans le chapitre 5, le concept d'abaque numérique sera présenté, ainsi qu'une extension de la méthode PGD permettant de construire ces abaques contenant une solution définie dans un espace spatio-paramétrique de dimension élevée.

La méthode de séparation des variables plan/hors plan sera enfin étendue au cas des pièces de type coques dans le chapitre 4, avant de présenter les conclusions et perspectives ouvertes par les travaux présentés dans ce manuscrit.



# Chapitre 1

## Résolution de problèmes mécaniques 2D avec la méthode PGD en variables d'espace séparées

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Résolution d'un problème 2D</b> . . . . .	<b>3</b>
1.2.1	Formulation du problème . . . . .	3
1.2.2	Séparation des variables d'espace . . . . .	5
1.2.3	Résolution . . . . .	8
1.2.4	Résultats . . . . .	11
1.2.5	Convergence . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Applications et limitations</b> . . . . .	<b>15</b>

---

Dans cette partie, nous étudierons comment résoudre un problème d'élasticité plane en utilisant une méthode de résolution de type PGD, basée sur la séparation des variables d'espace. Les détails de la méthode sont présentés ici de façon à introduire le concept de la séparation des variables d'espace sur les cas les plus simples.

Nous verrons donc dans ce chapitre comment résoudre un problème 2D en espace  $(x, y)$  sous forme d'une succession de problèmes 1D suivant chaque coordonnée. Le problème 2D en espace sera décrit par le produit tensoriel de deux problèmes 1D. Le problème 2D sera donc décomposé en 1D/1D.

La formulation du problème de mécanique sera tout d'abord présentée, elle sera suivie de l'introduction de la séparation des variables d'espace dans la structure du problème. Une méthode de résolution adaptée au problème en variables séparées sera ensuite décrite, celle-ci est basée sur l'utilisation de la PGD. Enfin, les résultats seront présentés ainsi qu'une analyse de la convergence et de la précision de la méthode, avant de conclure sur les applications et les limites de la méthode présentée précédemment.

## 1.1 Contexte

Le cadre général est celui de la mécanique des milieux continus, plus précisément de la mécanique des solides. Au sein de la mécanique des solides déformables, on se place ici dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959].

La résolution de problèmes mécaniques est basée sur la résolution de l'équation d'équilibre 1.1. La résolution de problèmes d'élasticité peut se faire de façon numérique ou analytique [Pagano, 1970]. La résolution analytique est réservée à des problèmes dont la géométrie est très simple. La résolution numérique permet de résoudre des problèmes plus complexes, mais peut nécessiter de faire un certain nombre d'hypothèses selon le type et la spécificité de la structure considérée (poutres, plaques, pièces axisymétriques, pièces massives).

Parmi les techniques de résolution numérique adaptées à la résolution de problèmes mécaniques, figure la méthode des éléments finis (MEF) [Zienkiewicz *et al.*, 2005]. L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse se place dans le contexte de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution de problèmes d'élasticité. Les bases de la méthode des éléments finis seront donc considérées comme acquises et ne seront pas explicitées dans ce document.

## 1.2 Résolution d'un problème 2D en variables d'espace séparées

### 1.2.1 Formulation du problème

Considérons un domaine plan  $\Omega$  (figure 1.1), tel que  $(x, y) \in \Omega$ . La résolution d'un problème plan en mécanique consiste à trouver  $\mathbf{u}(x, y)$  vérifiant l'équation d'équilibre :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y)) + \mathbf{f}_d(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (1.1)$$

et satisfaisant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y)) \cdot \mathbf{n}(x, y) &= \mathbf{F}_d(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial_2\Omega, \\ \mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{U}_d(x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial_1\Omega, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{n}(x, y)$  est la normale au contour  $\partial_2\Omega$  dirigée vers l'extérieur, et  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes.

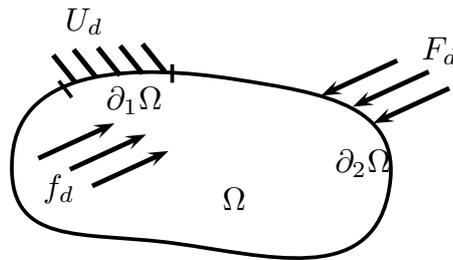


FIGURE 1.1 – Présentation du problème à résoudre

On se donne la loi de comportement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{K}} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.3)$$

où  $\tilde{\mathbb{K}}$  est le tenseur d'élasticité et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est la déformation linéarisée définie par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (1.4)$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture des équations, les notations de Voigt seront préférées. La relation de comportement 1.3 s'écrit donc comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$\mathbb{K}$  sera alors le tenseur d'élasticité généralisé (d'ordre 2).

Dans cette partie essentiellement destinée à présenter la méthode de façon la plus simple possible, le matériau sera considéré homogène et isotrope. Le tenseur d'élasticité  $\mathbb{K}$  ne dépend donc pas de l'espace.

La résolution d'un problème mécanique 2D conduit à faire une hypothèse sur la cinématique ou la statique :

- dans le cas de l'hypothèse de contraintes planes, on obtient :

$$\mathbb{K} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

- dans le cas de l'hypothèse de déformations planes, on obtient :

$$\mathbb{K} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré.

Pour conserver la généralité sans alourdir les notations, nous utiliserons dans la suite la notation générale suivante :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

L'équation 1.1 n'est pas adaptée pour la résolution par éléments finis, nous utiliserons donc la formulation faible associée. Celle-ci est obtenue de façon usuelle en intégrant par

parties l'équation :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y)) + \mathbf{f}_d(x, y)) d\Omega = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (1.9)$$

Après utilisation du théorème de la divergence et des propriétés de symétries des tenseurs, la formulation faible associée à l'équation d'équilibre 1.1 est immédiatement déduite :

$$\iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}^*. \quad (1.10)$$

On reconnaît ici l'expression du principe des travaux virtuels, où le membre de gauche représente le travail virtuel des efforts intérieurs et le membre de droite représente le travail virtuel des efforts extérieurs.

### 1.2.2 Séparation des variables d'espace

La résolution en variables séparées à l'aide de la PGD [Ammar *et al.*, 2007] conduit à exprimer l'ensemble des grandeurs du modèle sous la forme de sommes de produits de fonctions des variables que l'on a choisi de séparer. Dans le cas 2D, les variables sont les coordonnées spatiales  $x$  et  $y$ . Le domaine de résolution  $\Omega$  sera donc le rectangle de dimension  $L \times H$  :  $\Omega = [0 : L] \times [0 : H]$  (voir figure 1.2).

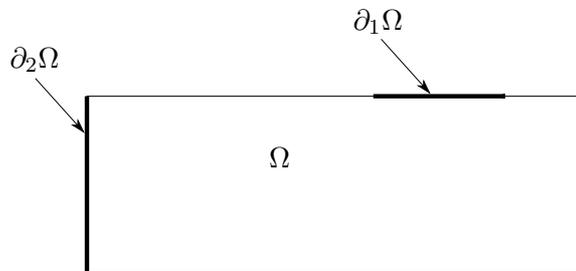


FIGURE 1.2 – Domaine de résolution en variables d'espace séparées 1D/1D

On exprime les domaines sous forme de produits tensoriels :

$$\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_y \quad (1.11)$$

$$\partial_1 \Omega = \partial_1 \Omega_x \otimes \partial_1 \Omega_y \quad (1.12)$$

$$\partial_2 \Omega = \partial_2 \Omega_x \otimes \partial_2 \Omega_y \quad (1.13)$$

ainsi que les éléments de surfaciques et linéiques élémentaires :

$$d\Omega = d\Omega_x \otimes d\Omega_y \quad (1.14)$$

$$d\Gamma = d\Gamma_x \otimes d\Gamma_y \quad (1.15)$$

On exprimera alors  $\mathbf{u}$  sous la forme séparée en  $x$  et  $y$  de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_x^i(x) \cdot u_y^i(y) \\ v_x^i(x) \cdot v_y^i(y) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_x^i(x) \circ \mathbf{u}_y^i(y), \quad (1.16)$$

où<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x^i(x) &= \mathbf{u}_x^i = \begin{pmatrix} u_x^i(x) \\ v_x^i(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^i \\ v_x^i \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_y^i(y) &= \mathbf{u}_y^i = \begin{pmatrix} u_y^i(y) \\ v_y^i(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y^i \\ v_y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est également nécessaire de disposer d'une représentation séparée pour l'ensemble des grandeurs du modèle :

– Les forces surfaciques :

$$\mathbf{f}_d(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{d_u}(x, y) \\ \mathbf{f}_{d_v}(x, y) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^{N_{f_d}} \begin{pmatrix} f_{d_{ux}}^i(x) \cdot f_{d_{uy}}^i(y) \\ f_{d_{vx}}^i(x) \cdot f_{d_{vy}}^i(y) \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Afin de ne pas surcharger l'ensemble des développements, nous supposons dans la suite que les forces de volumiques (surfiques dans le cas 2D) et les forces surfaciques (linéiques dans le cas 2D) s'expriment sous la forme d'un unique produit de fonctions de  $x$  et  $y$ . On se donne donc la représentation suivante :

$$\mathbf{f}_d(x, y) = \begin{pmatrix} f_{d_{ux}} \cdot f_{d_{uy}} \\ f_{d_{vx}} \cdot f_{d_{vy}} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_{d_x}(x) \circ \mathbf{f}_{d_y}(y) = \mathbf{f}_{d_x} \circ \mathbf{f}_{d_y}, \quad (1.18)$$

– Les forces linéiques :

$$\mathbf{F}_d(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{d_u}(x, y) \\ \mathbf{F}_{d_v}(x, y) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^{N_{F_d}} \begin{pmatrix} F_{d_{ux}}^i(x) \cdot F_{d_{uy}}^i(y) \\ F_{d_{vx}}^i(x) \cdot F_{d_{vy}}^i(y) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

On suppose également, sans perte de généralité, que les forces linéiques peuvent être séparées en un seul mode :

$$\mathbf{F}_d(x, y) = \begin{pmatrix} F_{d_{ux}} \cdot F_{d_{uy}} \\ F_{d_{vx}} \cdot F_{d_{vy}} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{d_x}(x) \circ \mathbf{F}_{d_y}(y) = \mathbf{F}_{d_x} \circ \mathbf{F}_{d_y}. \quad (1.20)$$

– Les coefficients matériau :

Dans le cas où  $\mathbb{K}$  dépend de l'espace, il doit être exprimé sous forme de produits de fonctions de  $x$  et  $y$  :

$$\mathbb{K}(x, y) \approx \sum_{i=1}^{N_{\mathbb{K}}} \mathbb{K}^i(x) \circ \mathbb{K}^i(y) \quad (1.21)$$

Il est facile de trouver les fonctions  $\mathbb{K}^i(x)$  et  $\mathbb{K}^i(y)$  pour des cas simples. Dans le cas d'une dépendance plus complexe des coefficients matériau par rapport à l'espace, il

---

1. Le symbole  $\circ$  représente le produit d'Hadamard ou produit composante par composante. Il sera utilisé de façon usuelle par la suite.

sera nécessaire d'effectuer une décomposition compatible avec le formalisme de représentation séparée. Sur le modèle discrétisé, une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [Drmač et Veselić, 2008a,b] de  $\mathbb{K}(x, y)$  est possible.

Dans la suite, nous supposons que  $\mathbb{K}$  ne dépend pas de l'espace. On a alors  $\mathbb{K}(x, y) = \mathbb{K}_x \circ \mathbb{K}_y = \mathbb{K}$ . Puisqu'il ne dépend pas de l'espace, il sera alors possible de sortir le coefficient  $\mathbb{K}$  des intégrales sur les coordonnées spatiales.

La propagation du formalisme de représentation séparée dans l'écriture du déplacement conduit à l'expression de la déformation linéarisée sous forme séparée  $\boldsymbol{\varepsilon}$  suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x, y)) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{x,x}^i \cdot u_y^i \\ v_x^i \cdot v_{y,y}^i \\ u_x^i \cdot u_{y,y}^i + v_{x,x}^i \cdot v_y^i \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

La résolution d'un problème en variables séparées à l'aide de la méthode PGD consiste à chercher de façon itérative les couples de produits de fonctions (modes) représentant la solution (voir l'équation 1.16) [Ammar *et al.*, 2006].

La méthode d'enrichissement d'un mode supplémentaire est la suivante : on considère que l'on connaît déjà les  $N$  premiers produits de fonctions, et l'on cherche le  $(N + 1)^e$ .

$\mathbf{u}_N(x, y)$  satisfait les conditions de Dirichlet. Le nouveau mode  $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$  est donc un enrichissement du problème avec des conditions de Dirichlet homogènes sur  $\partial_1\Omega$ .

On a alors :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_x^i(x) \cdot u_y^i(y) \\ v_x^i(x) \cdot v_y^i(y) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_N(x,y)} + \begin{pmatrix} r_u(x) \cdot s_u(y) \\ r_v(x) \cdot s_v(y) \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

soit, en écriture plus compacte :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y) = \mathbf{u}_N(x, y) + \mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(y) \quad (1.24)$$

Où :

$$\mathbf{R}(x) = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_u(x) \\ r_v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}(y) = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_u(y) \\ s_v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_u \\ s_v \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la linéarité du problème, on écrit la déformation de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{N+1}(x, y)) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N(x, y)) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(y)) \quad (1.25)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(y)) = \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u \\ r_v \cdot s_{v,y} \\ r_u \cdot s_{u,y} + r_{v,x} \cdot s_v \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

On introduit également le champ test suivant :

$$\mathbf{u}^*(x, y) = \begin{pmatrix} r_u^*(x) \cdot s_u(y) + r_u(x) \cdot s_u^*(y) \\ r_v^*(x) \cdot s_v(y) + r_v(x) \cdot s_v^*(y) \end{pmatrix} = \mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^* \quad (1.27)$$

On obtient naturellement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(x, y)) = \begin{pmatrix} r_{u,x}^* \cdot s_u + & r_{u,x} \cdot s_u^* \\ r_v^* \cdot s_{v,y} + & r_v \cdot s_{v,y}^* \\ r_u^* \cdot s_{u,y} + r_{v,x}^* \cdot s_v + r_u \cdot s_{u,y}^* + r_{v,x} \cdot s_v^* \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

En injectant ceci dans la formulation faible 1.10, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(x, y)) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{N+1}(x, y)) \right) d\Omega = \\ \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dans le cas présent, nous considérons que le matériau est homogène, donc que  $\mathbb{K}$  ne dépend pas de l'espace. Il est bien sûr possible de décrire un matériau hétérogène en se donnant une représentation plus riche de  $\mathbb{K}$  (voir l'équation 1.21).

La résolution du problème défini par l'équation 1.29 peut se faire en variables séparées, c'est d'ailleurs dans ce but que l'on a défini l'ensemble des grandeurs du modèle sous des formes séparées.

L'injection de la forme du champ de déplacement à enrichir défini par l'équation 1.23 et du champ test défini par l'équation 1.27 dans la formulation faible 1.29 du problème conduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(x, y)) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}(x) \circ \mathbf{S}(y)) \right) d\Omega = \\ - \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(x, y)) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N(x, y)) \right) d\Omega \\ + \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.30)$$

Le membre de gauche contient le terme inconnu au moment de l'enrichissement du mode  $N$ , et le membre de droite contient uniquement des termes connus.

### 1.2.3 Résolution

L'ensemble des problèmes traités ici sont résolus par la méthode des éléments finis. La résolution du problème défini par l'équation 1.30 consiste à trouver le meilleur couple  $\{\mathbf{R}, \mathbf{S}\}$  pour enrichir la solution. Le problème en  $\{\mathbf{R}, \mathbf{S}\}$  est non-linéaire, une stratégie

adaptée doit donc être mise en place. Pour résoudre ce problème, une méthode de point fixe est utilisée : les sous-problèmes en  $\mathbf{R}$  et en  $\mathbf{S}$  sont alternativement résolus jusqu'à convergence.

En pratique, les itérations au sein du point fixe se déroulent comme ceci :

- on suppose  $\mathbf{S}$  connue, et on cherche à déterminer  $\mathbf{R}$ . Pour la première itération on initialise donc  $\mathbf{S}$  à une valeur quelconque faute de mieux. Pour les itérations suivantes, on utilise la valeur de  $\mathbf{S}$  calculée à l'itération précédente.

La fonction test 1.27 devient alors :

$$\mathbf{u}^*(x, y) = \begin{pmatrix} r_u^*(x) \cdot s_u(y) \\ r_v^*(x) \cdot s_v(y) \end{pmatrix} = \mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}. \quad (1.31)$$

En substituant dans l'équation 1.30 l'ensemble des expressions détaillées des différents termes, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} r_{u,x}^* \cdot s_u \\ r_v^* \cdot s_{v,y} \\ r_u^* \cdot s_{u,y} + r_{v,x}^* \cdot s_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} AB0 \\ BA0 \\ 0 \ 0 \ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u \\ r_v \cdot s_{v,y} \\ r_u \cdot s_{u,y} + r_{v,x} \cdot s_v \end{pmatrix} d\Omega \\ &= - \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N)) d\Omega \\ &+ \iint_{\Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_1 \Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma, \quad (1.32) \end{aligned}$$

qu'il est nécessaire de développer pour intégrer le problème. Le développement pour le calcul de  $\mathbf{R}$  est déporté en annexe 5.7 pour ne pas alourdir cette partie.

On obtient alors un problème elliptique que l'on peut résoudre par éléments finis.

- Ensuite, on suppose  $\mathbf{R}$  connue, et on cherche à déterminer  $\mathbf{S}$ . On utilise la valeur de  $\mathbf{R}$  calculée au pas précédent pour calculer l'ensemble des intégrales.

La fonction test 1.27 devient alors :

$$\mathbf{u}^*(x, y) = \begin{pmatrix} r_u(x) \cdot s_u^*(y) \\ r_v(x) \cdot s_v^*(y) \end{pmatrix} = \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*. \quad (1.33)$$

La formulation faible pour le calcul de  $\mathbf{S}$  devient :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u^* \\ r_v \cdot s_{v,y}^* \\ r_u \cdot s_{u,y}^* + r_{v,x} \cdot s_v^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} AB0 \\ BA0 \\ 0 \ 0 \ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u \\ r_v \cdot s_{v,y} \\ r_u \cdot s_{u,y} + r_{v,x} \cdot s_v \end{pmatrix} d\Omega \\ &= - \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N)) d\Omega \\ &+ \iint_{\Omega} ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \int_{\partial_1 \Omega} ((\mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma, \quad (1.34) \end{aligned}$$

qui une fois développée laisse apparaître le problème en  $\mathbf{S}$  (développé en annexe 5.7) que l'on résout également par éléments finis.

- La résolution alternée des problèmes en  $\mathbf{R}$  et en  $\mathbf{S}$  continue jusqu'à atteindre la convergence. Celle-ci est testée sur le produit  $\mathbf{R}^i \circ \mathbf{S}^i$  avec une précision  $\varepsilon_{\text{point fixe}}$ . Le critère  $\varepsilon_{\text{point fixe}}$  est généralement choisi voisin de la précision machine.

En d'autres termes, si on appelle  $\mathbf{R}^1$  et  $\mathbf{S}^1$  les fonctions respectivement de  $(x)$  et  $(y)$  calculées à la première itération de point fixe pour le  $N^{\text{e}}$  mode, et  $\mathbf{R}^i$  et  $\mathbf{S}^i$  les fonctions de  $(x)$  et  $(y)$  calculées à l'itération  $i$ , on sort de la boucle du point fixe lorsque :

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{R}^i(x) \circ \mathbf{S}^i(y) - \mathbf{R}^{i-1}(x) \circ \mathbf{S}^{i-1}(y))^2 d\Omega < \varepsilon_{\text{point fixe}}. \quad (1.35)$$

Une fois le nouveau mode  $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$  convergé, il est ajouté à la solution :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y) = \mathbf{u}_N(x, y) + \mathbf{R}^i(x) \circ \mathbf{S}^i(y).$$

La procédure d'enrichissement de la solution continue jusqu'à ce que la norme du résidu relatif de l'équation devienne négligeable :

$$\frac{- \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(x, y)) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{N+1}(x, y)) \right) d\Omega + \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega}{\iint_{\Omega} (\mathbf{u}^*(x, y) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega} < \varepsilon_{\text{résidu}} \quad (1.36)$$

où  $\varepsilon_{\text{résidu}} \in [10^{-8}; 10^{-2}]$  selon la précision désirée.

La stratégie globale d'enrichissement de la solution est résumée sur la figure 1.3.

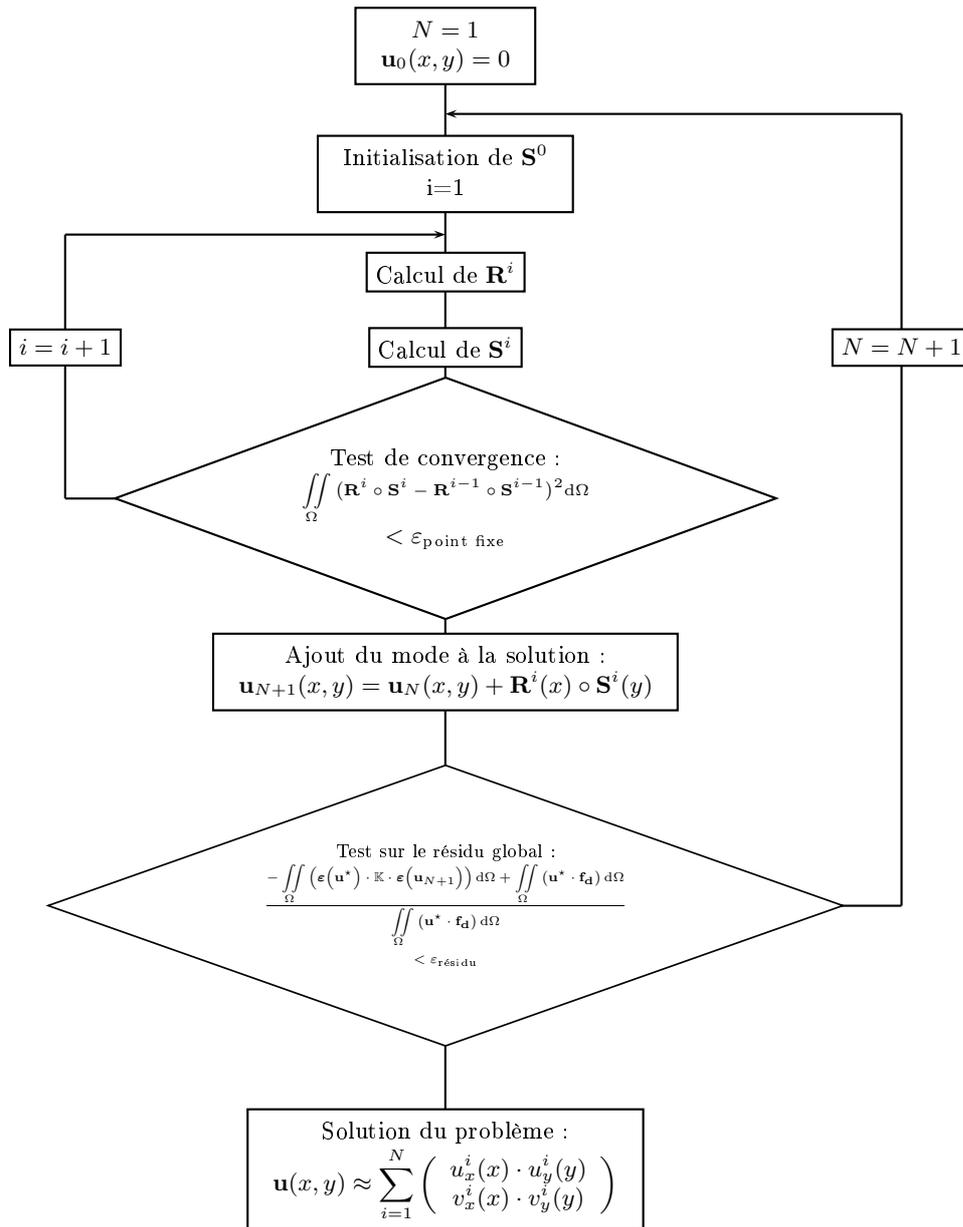


FIGURE 1.3 – Algorithme de résolution d'un problème en variables séparées

### 1.2.4 Résultats

Considérons le problème en contraintes planes défini sur la figure 1.4. Le matériau est isotrope avec  $E=200$  GPa, et  $\nu=0,3$ . Le chargement est un effort imposé sur la face supérieure, tel que :

$$\mathbf{F}_d(x, y = 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \end{pmatrix}.$$

Les faces de gauche et de droite sont encastées :

$$\mathbf{U}_d(x = (-4, 4), y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

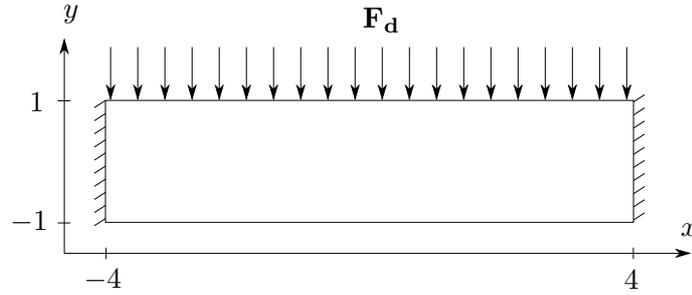


FIGURE 1.4 – Problème et conditions aux limites

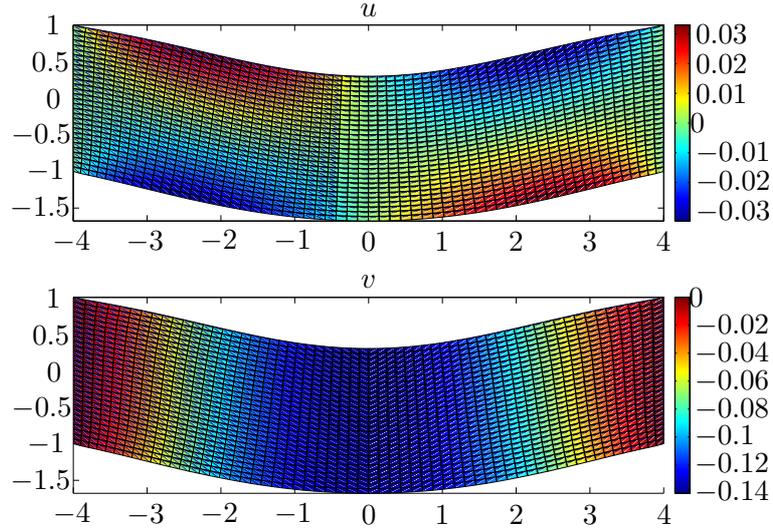


FIGURE 1.5 – Solution du problème défini en 1.4

La solution est calculée en utilisant la méthode décrite précédemment. La figure 1.5 montre le résultat du calcul avec le paramètre  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$  qui conduit à une solution exprimée en 9 modes.

### 1.2.5 Convergence

Un calcul de référence est réalisé en utilisant la méthode des éléments finis 2D sur un maillage de quadrangles équivalent.

Les figures 1.6, 1.7 et 1.8 représentent les cartes d'erreurs relatives en densité d'énergie de déformation entre la solution de référence calculée avec la méthode des éléments finis 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour différentes valeurs de  $\varepsilon_{\text{résidu}}$ . L'erreur locale en énergie de déformation est définie comme :

$$\text{Erreur locale} = 100 \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{\text{MEF 2D}} - \mathbf{u}_{\text{PGD}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\text{MEF 2D}} - \mathbf{u}_{\text{PGD}})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{\text{MEF 2D}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\text{MEF 2D}})}. \quad (1.37)$$

Comme pour toutes les méthodes itératives, il existe un compromis entre la qualité de la solution et le temps de résolution : plus on choisit un critère  $\varepsilon_{\text{résidu}}$  petit, plus la solution est précise et contient de modes, et plus le coût de calcul augmente.

Pour une valeur de  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$ , l'erreur est acceptable pour une application d'in-

génierie standard (inférieure à 1% partout), par ailleurs, cette erreur dépend du nombre de modes que contient la solution PGD. Elle est directement contrôlée par l'intermédiaire du paramètre  $\varepsilon_{\text{résidu}}$ . La convergence de la méthode établie par [Falcó et Nouy, 2011] est illustrée sur les figures 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10.

Nous proposons ici de représenter en échelle logarithmique l'erreur relative en densité d'énergie de déformation entre la solution calculée par la méthode des éléments finis 2D de référence et la méthode proposée ici en fonction du critère  $\varepsilon_{\text{résidu}}$ .

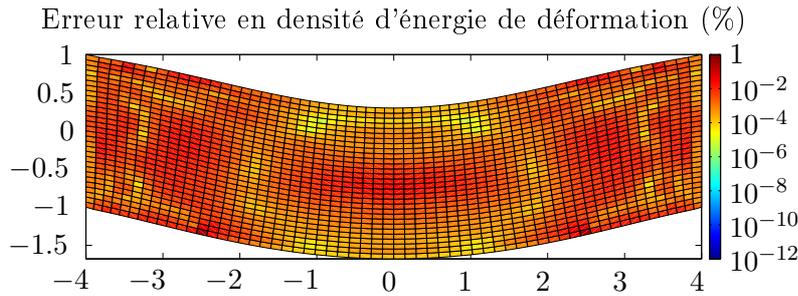


FIGURE 1.6 – Erreur relative entre la solution de référence 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-1}$  (6 modes)

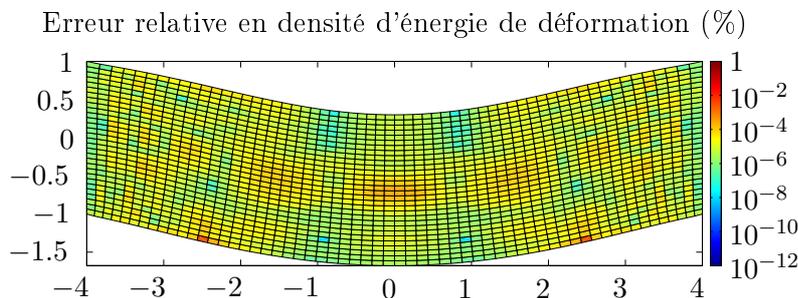


FIGURE 1.7 – Erreur relative entre la solution de référence 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$  (9 modes)

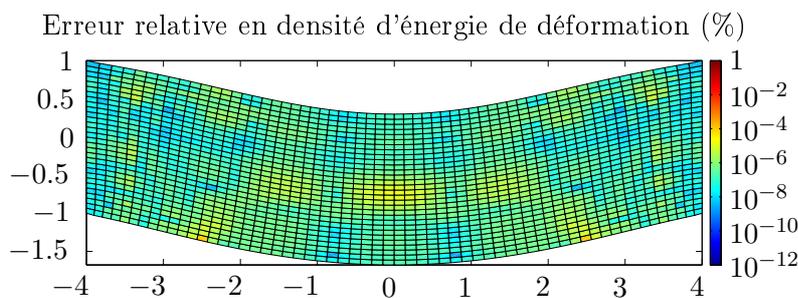


FIGURE 1.8 – Erreur relative entre la solution de référence 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-3}$  (11 modes)

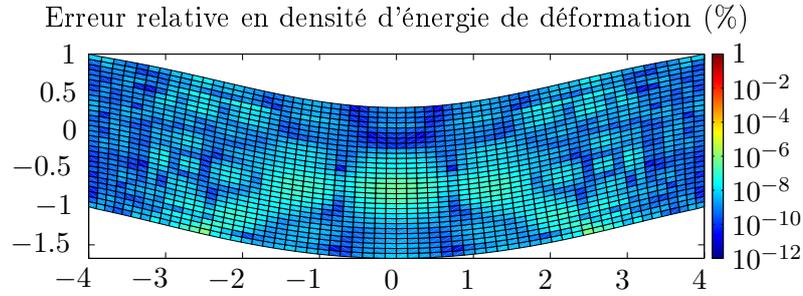


FIGURE 1.9 – Erreur relative entre la solution de référence 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-4}$  (13 modes)

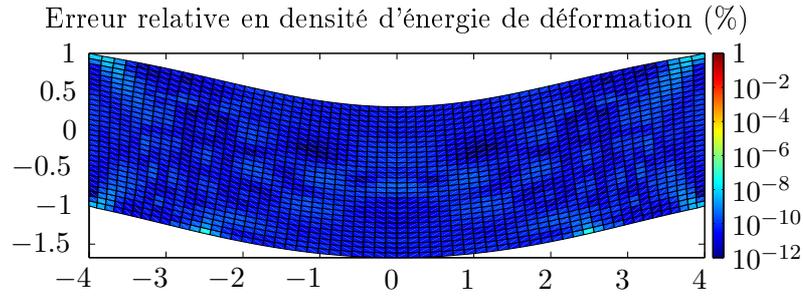


FIGURE 1.10 – Erreur relative entre la solution de référence 2D et la solution calculée avec la méthode PGD pour  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-5}$  (15 modes)

La convergence de la méthode est résumée sur les figures 1.11 et 1.12, qui indiquent la valeur de l'intégrale sur  $\Omega$  de l'erreur relative en densité d'énergie de déformation entre la référence éléments finis 2D et la solution en variables d'espace séparées en fonction respectivement de  $\varepsilon_{\text{résidu}}$  et du nombre de modes  $N$ .

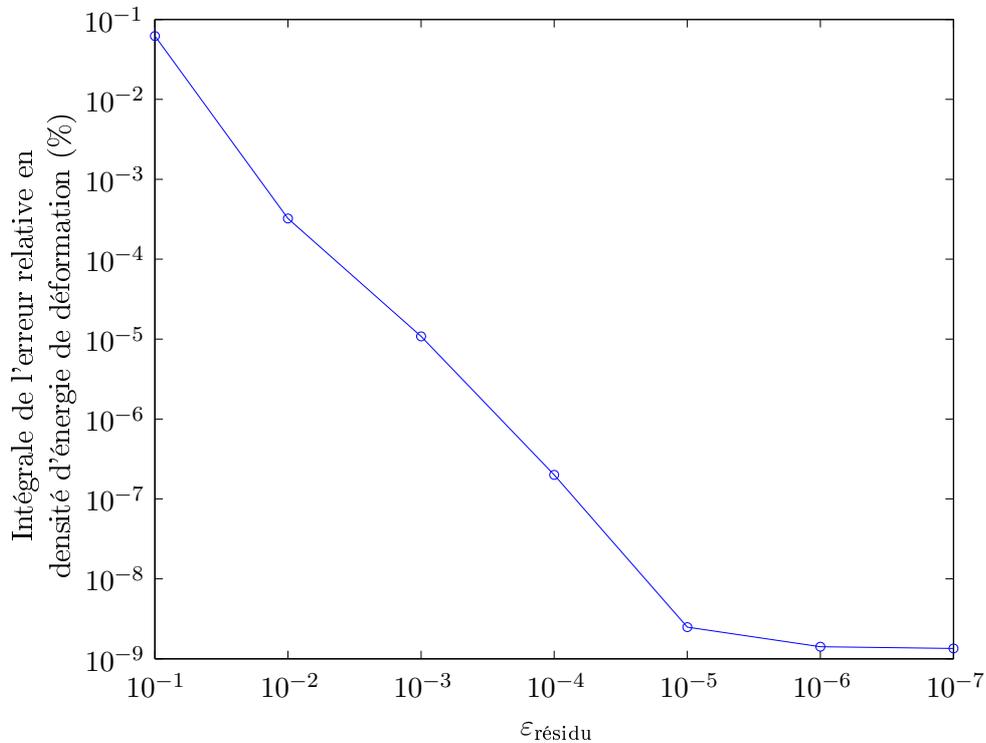


FIGURE 1.11 – Intégrale de l'erreur relative en densité d'énergie de déformation en fonction de  $\varepsilon_{\text{résidu}}$

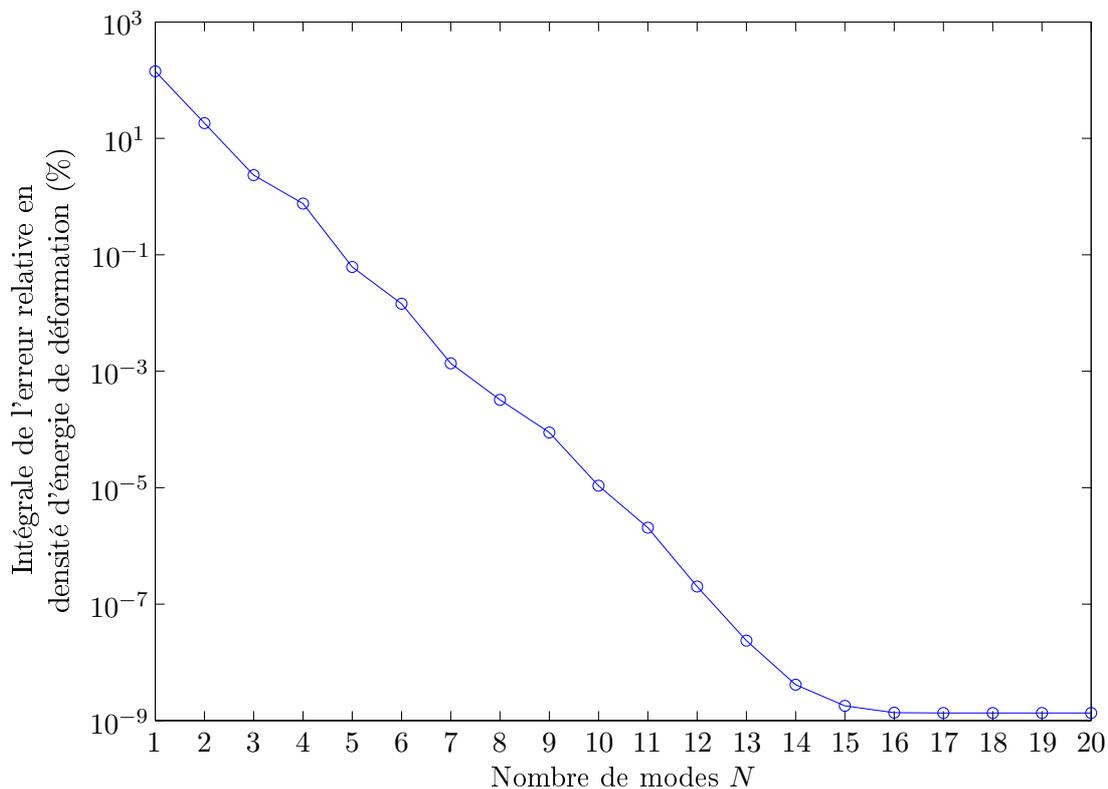


FIGURE 1.12 – Intégrale de l'erreur relative en densité d'énergie de déformation en fonction du nombre de modes

### 1.3 Applications et limitations

La représentation de la solution d'un problème 2D sous forme de produit tensoriel de 2 fonctions 1D a un certain nombre de conséquences :

- une réduction du coût de résolution du problème en termes d'impact mémoire et de temps de calcul, du fait de la séparation de l'espace 2D en deux espaces 1D (cet aspect sera développé dans le chapitre 2 sur des problèmes 3D).
- une restriction sur le type de problèmes qui peuvent être résolus : l'ensemble des grandeurs doit en effet être exprimé sous forme de produit tensoriel de grandeurs 1D, en particulier la géométrie. En 2D, les seules géométries que l'on peut définir par le produit tensoriel de deux fonctions 1D sont les géométries de type rectangles. Ceci limite donc considérablement les problèmes que l'on peut résoudre par cette méthode.

Malgré la contrainte sur la forme du domaine d'étude présentée ci-dessus, il existe de nombreux problèmes 2D définis dans des domaines rectangulaires (homogénéisation, corrélation d'images,...) qu'il peut être intéressant de résoudre rapidement à l'aide de la séparation des variables d'espace. En effet, l'émergence des nouveaux moyens de mesure (tomographie, analyse d'image, ...) qui fournissent des images en pixels (dont le nombre est généralement important) sont tout à fait adaptés pour fournir des problèmes à résoudre avec ce type de méthode [Passieux et Périé, 2012]. En effet, de telles mesures peuvent nécessiter de résoudre un problème inverse, par exemple, pour être post-traitées. Le problème inverse peut alors être résolu avec la PGD en variables d'espace séparées. De plus, ces moyens d'imagerie ou de mesure de champs fournissent des données sur des grilles relativement

finer (jusqu'à plusieurs milliers de pixels dans chaque direction). Si un degré de liberté est associé à chaque pixel, la taille du problème peut atteindre plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté, ce qui même en 2D est lourd à traiter, surtout si l'on souhaite par exemple piloter un essai en temps réel avec le résultat de la simulation.

# Chapitre 2

## Résolution de problèmes mécaniques 3D avec la PGD en variables d'espace séparées

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Différentes séparations possibles</b>	<b>19</b>
2.1.1	Séparation du 3D vers 3 problèmes 1D	19
2.1.1.1	Présentation	19
2.1.1.2	Coût de résolution	19
2.1.1.3	Applications et limitations	20
2.1.2	Séparation du 3D en 2D/1D	21
2.1.2.1	Présentation	21
2.1.2.2	Coût de résolution	23
2.1.2.3	Applications et limitations	23
<b>2.2</b>	<b>3D séparé en 2D/1D pour les plaques</b>	<b>24</b>
2.2.1	Formulation du problème	24
2.2.2	Résolution	27
2.2.3	Exemple et validation	27
2.2.4	Performances	30
2.2.5	Application des conditions aux limites	32
2.2.5.1	Conditions aux limites de type Neumann	32
2.2.5.2	Conditions aux limites de Dirichlet	34
2.2.6	Exemples	35
2.2.6.1	Plaque trouée stratifiée	35
2.2.6.2	Cas des plaques raidies	37
<b>2.3</b>	<b>Analyse des modes PGD</b>	<b>38</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

---

Les bases de la séparation des variables d'espace définies au chapitre 1 vont maintenant être utilisées pour résoudre des problèmes 3D en espace.

Contrairement aux problèmes 2D qui ne possèdent que deux coordonnées, en 3D plusieurs combinaisons de séparations des variables d'espace sont possibles pour séparer les 3 coordonnées. Une brève discussion à ce sujet sera présentée, suivie du développement de la méthode pour résoudre des problèmes 3D séparés en 2D/1D. En effet, les limitations de l'approche utilisant une séparation de l'espace 3D en trois sous-espaces 1D seront mise en évidence par rapport à l'objectif recherché.

Nous nous concentrerons donc ensuite sur l'étude de problèmes 3D dont la représentation sera 2D/1D. La démarche de résolution sera tout d'abord présentée, suivie de l'analyse de ses performances en termes de précision et de rapidité d'exécution. Enfin quelques exemples d'illustration seront traités.

Une brève analyse comparative entre la méthode présentée et les théories de plaques les plus simples sera finalement développée avant de conclure le chapitre.

## 2.1 Différentes séparations possibles

Dans cette partie, les différentes façons de séparer les variables d'espace seront exposées : tout d'abord la séparation d'un problème 3D en 3 problème 1D, puis la séparation du 3D en des problèmes 1D et 2D.

### 2.1.1 Séparation du 3D vers 3 problèmes 1D

#### 2.1.1.1 Présentation

La séparation d'un problème 3D en trois problèmes 1D conduit aux mêmes avantages et inconvénients que la séparation d'un problème 2D en deux problèmes 1D exposée au chapitre 1. L'utilisation d'une telle séparation permet de résoudre à très faible coût un problème 3D défini dans un parallélépipède.

On cherchera alors la solution du problème 3D en l'exprimant ainsi :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_x^i(x) \cdot u_y^i(y) \cdot u_z^i(z) \\ v_x^i(x) \cdot v_y^i(y) \cdot v_z^i(z) \\ w_x^i(x) \cdot w_y^i(y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_x^i(x) \circ \mathbf{U}_y^i(y) \circ \mathbf{U}_z^i(z). \quad (2.1)$$

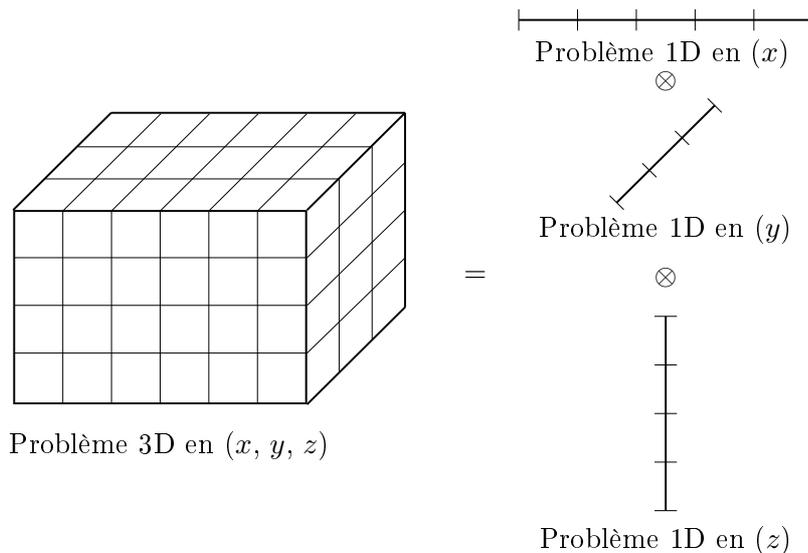


FIGURE 2.1 – Séparation d'un problème 3D en 3 problèmes 1D

La figure 2.1 illustre la décomposition du problème 3D en trois problèmes 1D qui génèrent la solution 3D par produit tensoriel.

#### 2.1.1.2 Coût de résolution

La résolution de ce type de problème est très similaire à ce qui est présenté au chapitre 1, elle n'est donc pas développée ici. Cependant, une brève discussion à propos de l'impact mémoire et du temps de calcul est exposée ci-après.

Considérons pour simplifier qu'il y a autant de degrés de liberté dans chaque direction de l'espace :  $Nx = Ny = Nz = N$ . Le nombre de degrés de liberté du problème 3D

équivalent est :

$$3 \cdot Nx \cdot Ny \cdot Nz = 3 \cdot N^3$$

Le nombre de degrés de liberté du problème en variables d'espace séparées est :

$$N_{\text{modes}} \cdot (3 \cdot Nx + 3 \cdot Ny + 3 \cdot Nz) = 9 \cdot N_{\text{modes}} \cdot N$$

En considérant que le problème éléments finis est résolu avec un solveur direct, le coût de résolution d'un problème avec ce type de solveur peut être approximé par la relation suivante :

$$N_{\text{opérations}} = N_{\text{ddl}} \cdot L_{\text{bande}}^2,$$

où  $L_{\text{bande}}$  est la largeur de bande du système linéaire.

Le coût de résolution du problème 3D,  $C_{3D}$ , est de :

$$C_{3D} = (3 \cdot Nx \cdot Ny \cdot Nz) \cdot (3 \cdot Ny \cdot Nz)^2 = 27 \cdot N^7$$

(dans le cas d'un maillage réglé avec des éléments hexaédriques, la largeur de bande est  $(3 \cdot Ny \cdot Nz)$ ).

Le coût de résolution du problème 3D avec la séparation 1D/1D/1D,  $C_{PGD}$ , est de :

$$C_{PGD} = N_{\text{modes}} \cdot k \cdot (3 \cdot Nx) \cdot 9 = N_{\text{modes}} \cdot k \cdot 27 \cdot N$$

(la largeur de bande d'un problème 1D en éléments finis est de 3), où  $k$  est le nombre moyen d'itérations de point fixe nécessaire pour qu'un mode converge.

Le gain en termes de temps de résolution s'écrit donc :

$$\frac{C_{PGD}}{C_{3D}} = \frac{N_{\text{modes}} \cdot k}{N^6}$$

Pour un problème dont la solution est très riche, celle-ci peut approcher la centaine de modes, par ailleurs, le nombre d'itérations de point fixe moyen pour converger un mode est largement inférieur à 100. Selon la valeur du nombre de degrés de liberté  $N$  du problème, les gains en temps de calcul peuvent donc être extrêmement importants.

Par exemple, imaginons que la solution d'un problème se décompose en 100 modes (ce qui est raisonnable au vue des expériences numériques réalisées), pour un problème comportant 100 degrés de liberté par dimension, le gain en temps de calcul est d'environ :

$$\frac{C_{PGD}}{C_{3D}} = \frac{100 \cdot 100}{100^6} = 10^{-8}$$

### 2.1.1.3 Applications et limitations

L'approche de décomposition du problème 3D en trois problèmes 1D implique le même type de conclusions que pour la séparation d'un problème 2D décomposé en 1D/1D :

– les gains en temps de calcul peuvent être spectaculaires du fait de la réduction im-

portante de la dimensionnalité du problème,

- les géométries de problèmes pouvant être résolus avec cette approche se limitent à des parallélépipèdes du fait de la décomposition choisie. Ceci est bien sûr extrêmement restrictif, mais peut être utile pour certaines applications bien particulières comme par exemple des simulations basées sur des microstructures issues de procédés d'imagerie 3D (tomographie par exemple), ou des problèmes d'homogénéisation.

Le domaine d'application de cette décomposition n'étant pas compatible avec les problèmes que nous souhaitons traiter, le développement de cette approche ne sera effectué.

## 2.1.2 Séparation du 3D en 2D/1D

### 2.1.2.1 Présentation

La séparation d'un problème 3D en un problème 2D et un problème 1D offre un gain en temps de calcul moindre que la séparation en trois problèmes 1D, mais elle apporte beaucoup plus de souplesse à la méthode.

La figure 2.2 illustre le problème 3D d'une part, et les problèmes 1D et 2D qui génèrent le problème 3D par produit tensoriel d'autre part. L'équation 2.2 présente le formalisme pour représenter le déplacement conformément à la décomposition choisie.

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z). \quad (2.2)$$

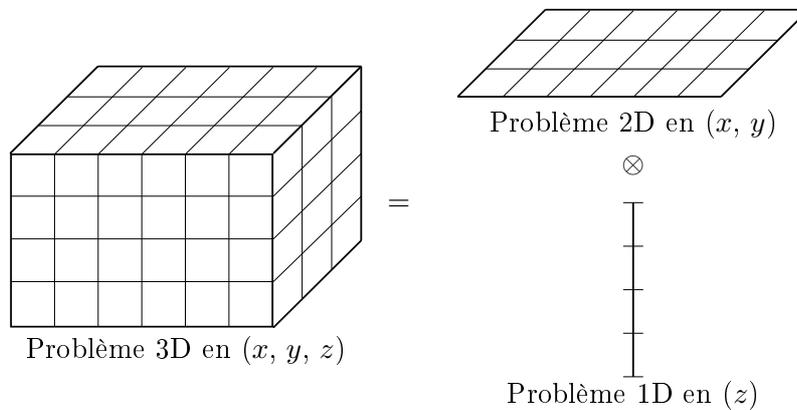


FIGURE 2.2 – Séparation d'un problème 3D en 2D/1D

Le temps de calcul est nettement moins avantageux que pour la séparation en problèmes 1D uniquement, car à chaque ajout d'un nouveau mode, il est nécessaire de résoudre  $k$  problèmes 2D et  $k$  problèmes 1D (si  $k$  est le nombre d'itérations nécessaires pour converger le point fixe associé à l'inévitable non-linéarité introduite par la PGD), alors que pour la séparation en trois problèmes 1D, il est seulement nécessaire de résoudre  $3 \cdot k$  problèmes 1D. La résolution du problème global implique ici de résoudre alternativement des problèmes 1D et des problèmes 2D. Le coût de résolution d'un problème 1D sera supposé négligeable par rapport au coût de résolution d'un problème 2D.

Cependant, l'introduction d'un problème 2D, qui reste tout de même nettement moins cher que la résolution du problème 3D, permet de varier considérablement les structures que l'on peut représenter par produit tensoriel par rapport à la séparation en problèmes 1D uniquement. En effet, grâce à cette décomposition, il est possible de représenter n'importe quelle géométrie possédant une (ou plusieurs) direction "d'extrusion".

Parmi l'ensemble des géométries possédant une direction "d'extrusion", on peut citer :

- les poutres ou profilés : dans ce cas, le problème 2D sera défini dans la section de la poutre, et le problème 1D dans sa longueur. Une telle représentation pour la résolution d'un problème de poutre permet d'obtenir la solution 3D du problème sans aucune hypothèse.

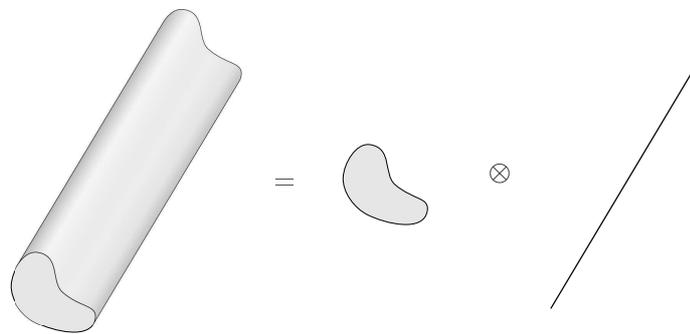


FIGURE 2.3 – Séparation d'un problème 3D sur une poutre en problèmes 2D et 1D

Le problème 2D est défini sur la section de la poutre, par conséquent il est de taille modérée en nombre d'éléments et donc en *ddl*. La résolution 3D avec l'approche proposée est donc très légère en temps de calcul. Le surcoût par rapport à un modèle de poutre 1D est minime, mais le résultat de la simulation est plus riche car la solution 3D du problème permet d'évaluer avec précision les concentrations de contraintes sur la structure dues aux différentes conditions aux limites, c'est-à-dire les effets 3D.

- les plaques : dans ce cas, le problème 2D est défini sur la surface moyenne, et le problème 1D représente l'épaisseur. Le surcoût par rapport à la modélisation usuelle d'une plaque en 2D via une théorie de plaque est minime, car à chaque ajout de mode, des problèmes 1D et 2D (dont la taille est équivalente voire inférieure à la taille du problème de plaque, selon la complexité de la théorie de plaque utilisée) doivent être résolus. Par ailleurs, la solution obtenue est une solution 3D libre de toute hypothèse, contrairement à celle fournie par une théorie de plaques. Tout comme dans le cas de géométries de type poutre, l'ensemble des concentrations de contraintes dues aux différentes conditions aux limites et effets géométriques, ou les écarts vis-à-vis des théories de plaques, sont obtenues directement par le caractère tridimensionnel modèle.

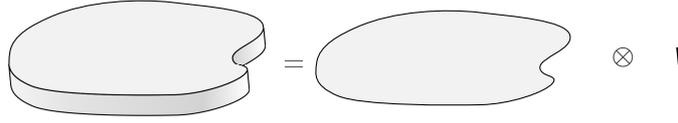


FIGURE 2.4 – Séparation d'un problème 3D sur une plaque en problèmes 2D et 1D

### 2.1.2.2 Coût de résolution

Considérons un problème tel que  $Nx > Ny$  et  $Nx \cdot Ny \gg Nz$ . Le nombre de degrés de liberté du problème 3D équivalent est :

$$3 \cdot Nx \cdot Ny \cdot Nz$$

Le nombre de degrés de liberté du problème en variables d'espace séparées est :

$$N_{\text{modes}} \cdot (3 \cdot Nx \cdot Ny + 3 \cdot Nz) \approx N_{\text{modes}} \cdot 3 \cdot Nx \cdot Ny$$

Le coût de résolution du problème 3D est de :

$$C_{3D} = (3 \cdot Nx \cdot Ny \cdot Nz) \cdot (3 \cdot Ny \cdot Nz)^2 = 27 \cdot Nx \cdot Ny^3 \cdot Nz^3$$

Le coût de résolution du problème 3D avec la séparation 2D/1D est de :

$$C_{PGD} = N_{\text{modes}} \cdot k \cdot (3 \cdot Nx \cdot Ny) \cdot (3 \cdot Ny)^2 = N_{\text{modes}} \cdot k \cdot 27 \cdot Nx \cdot Ny^3$$

Le rapport des coûts de calcul est donc :

$$\frac{C_{PGD}}{C_{3D}} = \frac{N_{\text{modes}} \cdot k}{Nz^3}$$

Les gains en temps de calcul sont donc extrêmement intéressants, et le sont d'autant plus que le problème est grand.

Par exemple, pour un problème comportant 500 *ddl* dans chaque direction, contenant 100 modes, le gain en temps de calcul est dans ce cas :

$$\frac{C_{PGD}}{C_{3D}} = \frac{100 \cdot 100}{500^3} = 8 \cdot 10^{-5}$$

### 2.1.2.3 Applications et limitations

L'approche 3D sous la forme 2D/1D permet de résoudre n'importe quel problème défini sur une géométrie qui possède au moins une direction "d'extrusion". La variété des problèmes que l'on peut envisager est donc bien plus importante que pour la décomposition en trois problèmes 1D.

Que ce soit pour effectuer des simulations sur des pièces en forme de plaques ou de

poutres, la méthode est particulièrement adaptée, puisqu'elle permet de résoudre le problème posé en résolvant séparément les sous problèmes 2D et 1D pour lesquels les dimensions spatiales caractéristiques sont très différentes. En plus d'offrir des gains en termes de temps de calcul, le problème du maillage tridimensionnel de telles pièces est évité.

Pour ces raisons, cette approche sera développée en profondeur dans la partie qui suit.

## 2.2 3D séparé en 2D/1D pour les plaques

### 2.2.1 Formulation du problème

L'objectif de cette partie est de résoudre un problème mécanique 3D en espace défini sur le domaine  $\Omega$ .

Le problème se traduit par l'équation d'équilibre suivante :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y, z)) + \mathbf{f}_d(x, y, z) = \mathbf{0}, \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.3)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y, z)) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) &= \mathbf{F}_d(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \partial_2\Omega, \\ \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{U}_d(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \partial_1\Omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{n}(x, y, z)$  est la normale à la frontière  $\partial_2\Omega$ .

On se donne la loi de comportement élastique en 3D suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(x, y, z)) = \mathbb{K}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x, y, z)), \quad (2.5)$$

où  $\mathbb{K}(x, y, z)$  est le tenseur d'élasticité généralisé, et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x, y, z))$  est la déformation linéarisée définie par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x, y, z)) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(x, y, z) + (\nabla \mathbf{u}(x, y, z))^T). \quad (2.6)$$

Tout comme pour le chapitre 1, pour simplifier l'écriture des équations, les notations de Voigt sont utilisées.

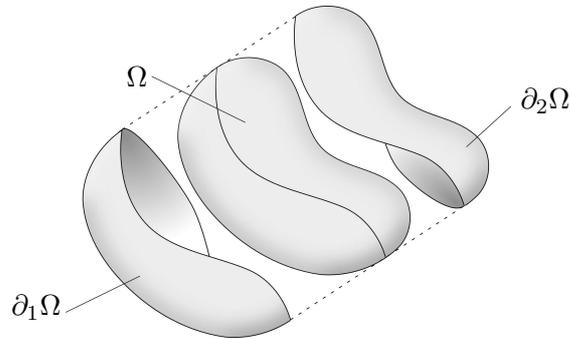


FIGURE 2.5 – Problème 3D

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega = \iiint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma \quad (2.7)$$

Comme il a été brièvement présenté dans la partie 2.1.2, l'ensemble des quantités du modèle doivent maintenant être exprimées de la façon suivante [Bognet *et al.*, 2012b] :

$$F(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^{N_F} F_{xy}^i(x, y) \cdot F_z^i(z). \quad (2.8)$$

Le problème 3D est représenté comme le produit tensoriel des problèmes 1D et 2D. L'ensemble des quantités sont exprimées sous formes séparées, et interpolées sur leurs maillages respectifs :

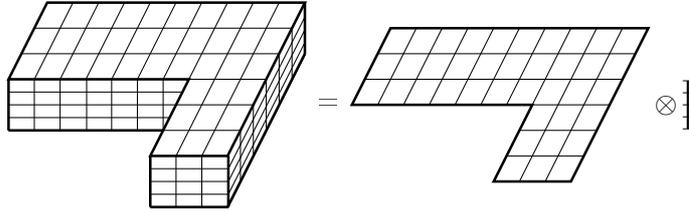


FIGURE 2.6 – Géométrie 3D et les maillages 2D et 1D associés

L'ensemble des domaines sont exprimés sous forme de produits tensoriels :

$$\Omega = \Omega_{xy} \otimes \Omega_z \quad (2.9)$$

$$\partial_1 \Omega = \partial_1 \Omega_{xy} \otimes \partial_1 \Omega_z \quad (2.10)$$

$$\partial_2 \Omega = \partial_2 \Omega_{xy} \otimes \partial_2 \Omega_z \quad (2.11)$$

ainsi que les éléments de volume et de surface élémentaires :

$$d\Omega = d\Omega_{xy} \otimes d\Omega_z \quad (2.12)$$

$$d\Gamma = d\Gamma_{xy} \otimes d\Gamma_z \quad (2.13)$$

Tout comme décrit dans la partie 1.2.2, il est nécessaire de disposer de représentations séparées pour les forces de volumes ainsi que les forces de surfaces. Leurs expressions ne sont pas rappelées ici car elles sont tout à fait similaires à celles de leurs composantes respectives dans le cas de la séparation d'un problème 2D en deux problèmes 1D.

Il est également nécessaire de se donner une représentation séparée pour  $\mathbb{K}(x, y, z)$  :

$$\mathbb{K}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_{\mathbb{K}}} \mathbb{K}(x, y) \circ \mathbb{K}(z). \quad (2.14)$$

Dans un premier temps, on souhaite résoudre des problèmes de plaques isotropes ou des stratifiés, on choisira donc que  $\mathbb{K}(x, y, z)$  ne dépend pas des coordonnées  $x$  et  $y$ , mais

uniquement de  $z$ . Dans ce cas, un seul terme suffit, on a donc :

$$\mathbb{K}(x, y, z) = \mathbb{K}(z), \quad (2.15)$$

où :

$$\mathbb{K}(z) = \begin{pmatrix} K_{11}K_{12}K_{13} & 0 & 0 & K_{16} \\ K_{12}K_{22}K_{23} & 0 & 0 & K_{26} \\ K_{13}K_{23}K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45}K_{55} & 0 \\ K_{16}K_{26}K_{36} & 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

La forme de  $\mathbb{K}$  définie en 2.16 permet de représenter tout type de matériau monoclinique dont le plan de symétrie est le plan défini par le plan orthogonal à la coordonnée  $z$ . Les matériaux monocliniques englobent les matériaux isotropes et orthotropes (termes en noir dans 2.16) lorsqu'ils sont définis dans leur base propre, ainsi que les matériaux orthotropes définis dans une base non principale, tournée autour de l'axe  $z$  (termes en bleu). Ces termes sont nécessaires pour définir la raideur de plis composites orientés à  $45^\circ$  par exemple.

Dans le cas de matériaux composites, si l'on considère un stratifié composé de  $p$  plis, on aura les composantes de  $\mathbb{K}(z)$ ,  $K_{ij}(z)$  définies de la façon suivante :

$$K_{ij}(z) = \sum_{q=1}^p K_{ij}^q \cdot \delta^q(z), \quad (2.17)$$

où :

$$\begin{cases} \delta^q(z) = 1 & \text{si } z \in \text{pli } q, \\ \delta^q(z) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

La fonction  $K_{ij}(z)$  sera donc une fonction constante par morceaux, représentative des composantes de la matrice  $\mathbb{K}$ , avec autant de morceaux qu'il y a de plis.

L'inconnue du problème en déplacement que l'on cherche à résoudre est exprimée sous forme séparée :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z). \quad (2.19)$$

La déformation s'écrit en fonction des composantes du déplacement sous forme séparée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{xy,x}^i \cdot u_z^i \\ v_{xy,y}^i \cdot v_z^i \\ w_{xy}^i \cdot w_{z,z}^i \\ v_{xy}^i \cdot v_{z,z}^i + w_{xy,y}^i \cdot w_z^i \\ u_{xy}^i \cdot u_{z,z}^i + w_{xy,x}^i \cdot w_z^i \\ u_{xy,x}^i \cdot u_z^i + u_{xy,y}^i \cdot v_z^i \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Résolution

Le schéma de résolution est similaire à celui donné au chapitre 1 en figure 1.3. Supposons que l'on connaisse déjà  $N$  modes de la solution et que l'on cherche le  $(N + 1)^{\text{e}}$ .

On a :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \mathbf{u}_N(x, y, z) + \mathbf{R}(x, y) \circ \mathbf{S}(z), \quad (2.21)$$

où :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_u^i(x, y) \cdot s_u^i(z) \\ r_v^i(x, y) \cdot s_v^i(z) \\ r_w^i(x, y) \cdot s_w^i(z) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

et :

$$\mathbf{u}^*(x, y, z) = \mathbf{R}^*(x, y) \circ \mathbf{S}(z) + \mathbf{R}(x, y) \circ \mathbf{S}^*(z), \quad (2.23)$$

d'où l'expression de la formulation faible :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} r_{u,x}^* \cdot s_u & + r_{u,x} \cdot s_u^* \\ r_{v,y}^* \cdot s_v & + r_{v,y} \cdot s_v^* \\ r_w^* \cdot s_{w,z} & + r_w \cdot s_{w,z}^* \\ r_{w,y}^* \cdot s_w + r_v^* \cdot s_{v,z} + r_{w,y} \cdot s_w^* + r_v \cdot s_{v,z}^* \\ r_{w,x}^* \cdot s_w + r_u^* \cdot s_{u,z} + r_{w,x} \cdot s_w^* + r_u \cdot s_{u,z}^* \\ r_{v,x}^* \cdot s_v + r_{u,y}^* \cdot s_u + r_{v,x} \cdot s_v^* + r_{u,y} \cdot s_u^* \end{pmatrix} \cdot \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u \\ r_{v,y} \cdot s_v \\ r_w \cdot s_{w,z} \\ r_{w,y} \cdot s_w + r_v \cdot s_{v,z} \\ r_{w,x} \cdot s_w + r_u \cdot s_{u,z} \\ r_{v,x} \cdot s_v + r_{u,y} \cdot s_u \end{pmatrix} d\Omega \\ & = - \iiint_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_N)) d\Omega \\ & + \iiint_{\Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} ((\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S} + \mathbf{R} \circ \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma \quad (2.24) \end{aligned}$$

Le détail de résolution est similaire à celui présenté au chapitre 1. Cependant la complexité supplémentaire apportée par la 3D engendre un grand nombre de termes lors du développement de l'équation (2.24). L'ensemble des termes et le détail de la résolution est donné en annexe 5.7.

### 2.2.3 Exemple et validation

La formulation présentée dans la partie 2.2.1 est basée sur les équations d'équilibre 3D. La solution est censée converger vers la solution du problème identique résolu par la méthode des éléments finis 3D [Falcó et Nouy, 2011]. Ceci est vérifié ici sur un exemple simple défini par la figure 2.7.

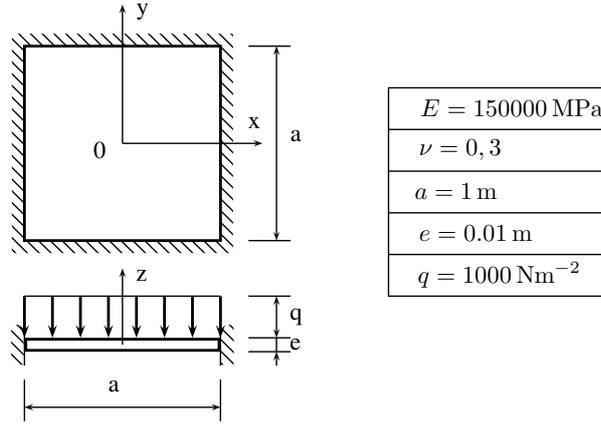


FIGURE 2.7 – Définition du problème utilisé pour la validation

Le même problème est résolu par la méthode utilisant la PGD et la séparation des variables d'espace en 2D/1D d'une part, et par la méthode des éléments finis 3D d'autre part. La discrétisation des deux problèmes est choisie de façon à ce que l'interpolation des champs respectifs des deux problèmes soit identique :

- pour le problème résolu par une approche 3D directe : des hexaèdres aux fonctions de formes trilinéaires sont utilisés
- pour le problème résolu par la méthode PGD 2D/1D : des quadrangles aux fonctions de formes bilinéaires sont utilisés pour le problème 2D, et des éléments 1D aux fonctions de formes linéaires sont utilisés.

La solution éléments finis 3D (FEM) est utilisée comme référence. La solution calculée par la PGD contient 7 Modes. Les figures 2.8 et 2.9 montrent respectivement l'erreur relative en densité d'énergie de déformation entre les solutions éléments finis 3D et PGD et l'erreur relative en contrainte de Von Mises. Les erreurs relatives sont calculées localement de la façon suivante :

$$Err\_Ed = 100 \cdot \frac{\sigma(\mathbf{u}_{PGD} - \mathbf{u}_{FEM}) : \varepsilon(\mathbf{u}_{PGD} - \mathbf{u}_{FEM})}{\sigma(\mathbf{u}_{FEM}) : \varepsilon(\mathbf{u}_{FEM})}, \quad (2.25)$$

et :

$$Err\_VonMises = 100 \cdot \frac{\sigma_{PGD}^{VM} - \sigma_{FEM}^{VM}}{\sigma_{FEM}^{VM}}. \quad (2.26)$$

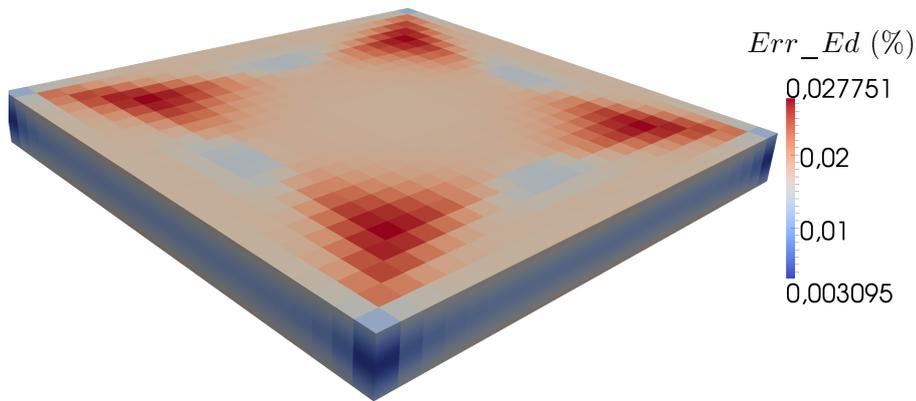


FIGURE 2.8 – Erreur relative en densité d'énergie de déformation entre la solution directe et la solution en variables d'espace séparées

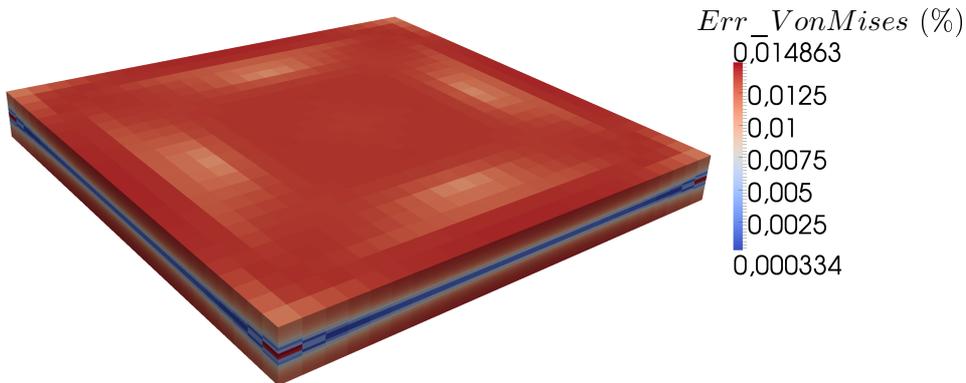


FIGURE 2.9 – Erreur relative en contrainte de Von Mises entre la solution directe et la solution en variables d'espace séparées

Les niveaux d'erreur sont tout à fait acceptables car très largement en dessous du pourcent, ce qui est généralement considéré comme acceptable pour la plupart des applications d'ingénierie.

De plus, ces niveaux d'erreur sont contrôlables grâce au paramètre  $\varepsilon_{\text{résidu}}$  défini par l'équation (1.36). Les valeurs d'erreur obtenues ici ont été calculées avec un  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$ .

La stratégie de calcul utilisée pour calculer la solution avec la méthode PGD est itérative, il en résulte un compromis entre le coût de résolution du problème et le niveau d'erreur que l'on souhaite avoir.

Comme pour toutes les méthodes de résolution numérique, une accumulation d'erreurs

provenant des différentes sources (approximation sur le modèle, la géométrie et la résolution) entraîne une erreur relative entre la solution calculée et la solution théorique du problème considéré. Des indicateurs d'erreurs proposés par [Ammar *et al.*, 2010] puis [Ladevèze et Chamoin, 2011] permettent d'évaluer l'erreur issue de l'approximation de la méthode PGD.

### 2.2.4 Performances

Cette partie est dédiée à l'évaluation de l'efficacité de la méthode en termes de temps de calcul. Pour l'exemple qui suit, la précision prescrite sur la norme du résidu du problème est gardée constante pour l'ensemble des simulations effectuées. La valeur choisie est toujours  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$ .

L'objectif est d'évaluer la compétitivité de la méthode PGD en variables d'espace séparées par rapport à la méthode des éléments finis 3D à précision fixée.

Le problème défini en figure 2.7 est conservé, ainsi que le type d'éléments utilisés. Une campagne de calcul à été lancée en faisant varier le nombre de degrés de liberté dans le plan et dans l'épaisseur de la plaque. La figure 2.10 montre les problèmes 3D, 2D et 1D ainsi que les notations utilisées pour les nombres de degrés de libertés.

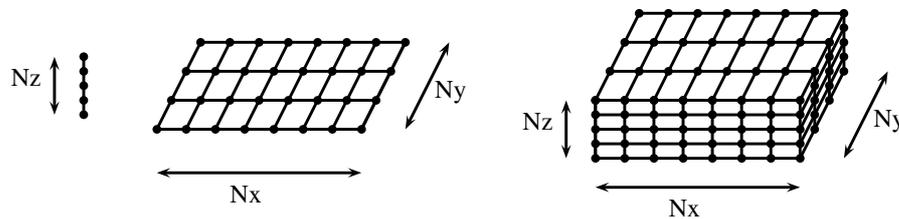


FIGURE 2.10 – Discretisations des problèmes 3D, 2D et 1D

La figure 2.11 présente le temps de calcul des deux méthodes (éléments finis 3D et PGD 2D/1D) en fonction de la discrétisation du problème.

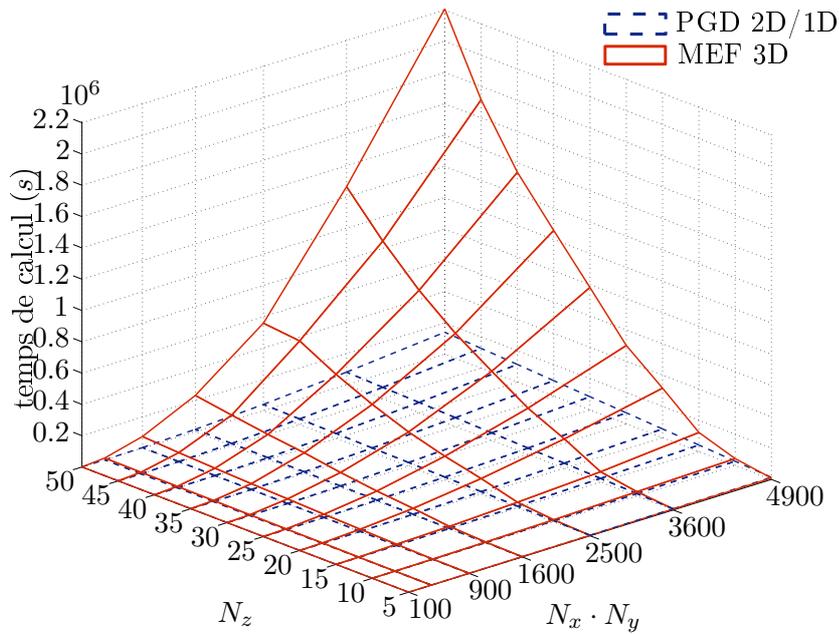


FIGURE 2.11 – Comparaison des temps de résolution respectifs entre la méthode en variables séparées et les éléments finis 3D

D'après les résultats, il apparaît que plus le nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur est important, plus il est avantageux d'utiliser la méthode PGD 2D/1D. En effet, le temps de calcul pour la version PGD n'est quasiment pas influencé par le nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur. Ceci s'explique par le fait que la résolution du problème 1D au cours des itérations est totalement masquée car son coût est négligeable devant le coût de résolution du problème 2D (voir la partie 2.1.2.2).

La méthode présentée ici est donc particulièrement adaptée à la résolution de problèmes définis sur des pièces composites stratifiées, pour lesquels il est nécessaire d'avoir plusieurs nœuds dans chaque pli (de 10 à 100 dans le cas d'éléments linéaires) pour décrire correctement la cinématique. Les pièces composites utilisées dans l'industrie peuvent de nos jours comporter plus de 50 plis. Ceci impose d'utiliser jusqu'à 5000 nœuds dans l'épaisseur de la pièce. De tels calculs sont excessivement lourds en 3D car ils conduisent à des problèmes à plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté et doivent par exemple être résolus par des méthodes de décomposition de domaines sur des machines parallèles [Gosselet et Rey, 2006]. Ce type de problème peut aisément être résolu sur un ordinateur de bureau en utilisant la méthodes PGD et une séparation 2D/1D.

La figure 2.12 montre l'évolution du nombre de modes dans la solution pour obtenir la précision désirée de  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$  en fonction de la discrétisation pour la résolution du problème défini en figure 2.7. La figure 2.13 montre la solution composée de 7 modes ainsi que la reconstruction des champs de déformation et de contrainte de Von Mises pour le problème défini par la figure 2.7, avec  $\varepsilon_{\text{résidu}} = 10^{-2}$ ,  $N_x = N_y = 25$  et  $N_z = 20$ .

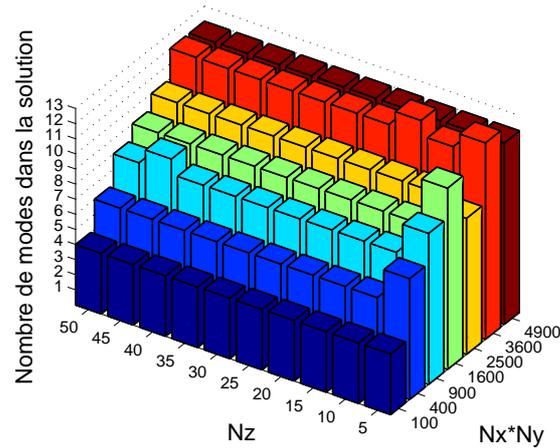


FIGURE 2.12 – Nombre de modes dans la solution calculée par la méthode PGD 2D/1D en fonction de la discrétisation

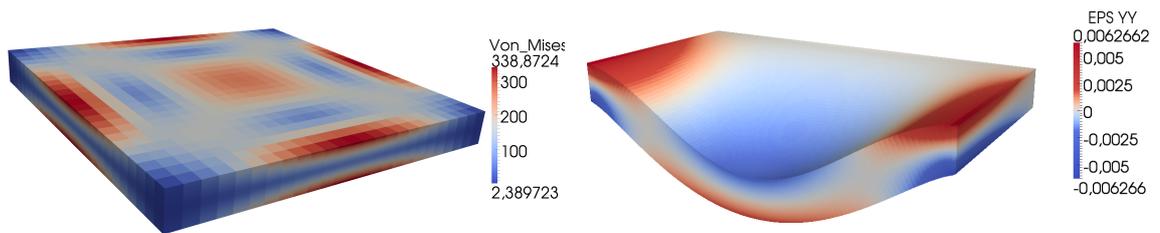


FIGURE 2.13 – Contrainte de Von Mises sur la plaque, et déformation affichée en coupe : l'ensemble des champs sont fortement tridimensionnels

Pour une discrétisation grossière, le nombre de modes pour représenter la solution est faible. En effet, la richesse de la solution (réelle) est dégradée par la pauvreté de la discrétisation ne permettant pas de représenter convenablement la cinématique. Dans ce cas, la raideur de la structure est surestimée, aussi bien pour la méthode PGD que pour les éléments finis 3D. Lorsque le maillage devient de plus en plus fin, le nombre de modes nécessaires pour représenter correctement la solution augmente, et stagne quand la précision élément fini est atteinte.

## 2.2.5 Application des conditions aux limites

### 2.2.5.1 Conditions aux limites de type Neumann

Les conditions aux limites de type Neumann sont les forces dans le cas des problèmes de mécanique. Celles-ci doivent être exprimées sous forme séparée conformément à la re-

présentation séparée choisie. Leur expression générale sera donc :

$$F_{xyz}(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^{N_F} F_{xy}^i(x, y) \circ F_z^i(z). \quad (2.27)$$

Dans une large majorité des cas, leur représentation est en plus compatible avec la séparation choisie. En effet, pour une plaque par exemple, les chargements sont communément des chargements hors plan, appliqués sur les faces, ou des chargements de membrane sur les bords de la plaque.

Les conditions aux limites de type Neumann s'expriment de différentes manières suivant la face sur laquelle elles s'appliquent :

- sur une face supérieure ou inférieure, la force s'exprime en un seul mode : la dépendance aux coordonnées du plan est incluse dans la partie  $F_{xy}$ , et la partie qui dépend de  $z$  vaut zéro partout, sauf sur le nœud extrême du côté de la face en question (voir figure 2.14).

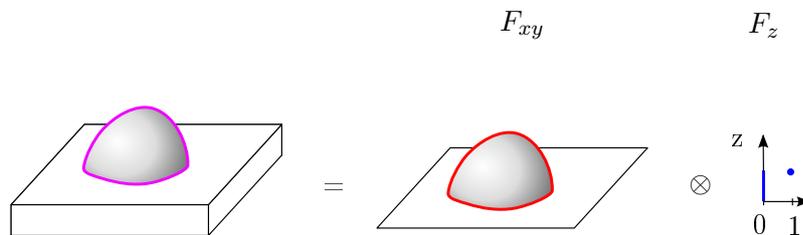


FIGURE 2.14 – Représentation des conditions aux limites de type Neumann sur une face supérieure

- sur une face latérale, les forces dites de membranes dans les théories de plaques peuvent s'exprimer en 3D en un seul mode dans les cas simples. La force vaut le produit tensoriel de la partie dépendant des coordonnées du plan sur un bord  $F_{xy}$  et la fonction de  $z$  (voir figure 2.15).

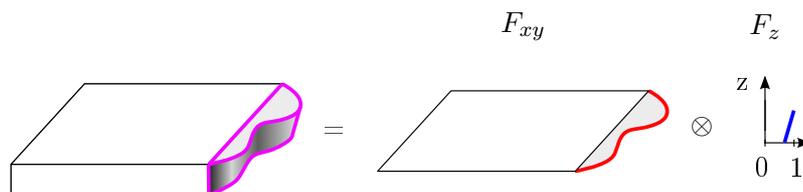


FIGURE 2.15 – Représentation des conditions aux limites de type Neumann simples sur une face latérale

- sur une face latérale, certaines forces aux dépendances complexes par rapport aux coordonnées spatiales doivent être exprimées en plusieurs modes. Dans ce cas il est nécessaire d'exprimer la force sous forme d'une somme de produits de fonctions. Pour la résolution du problème discret, une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [Drmač et Veselić, 2008a,b] de la fonction de  $(x, y, z)$  permet d'obtenir la représentation séparée associée (voir figure 2.16).

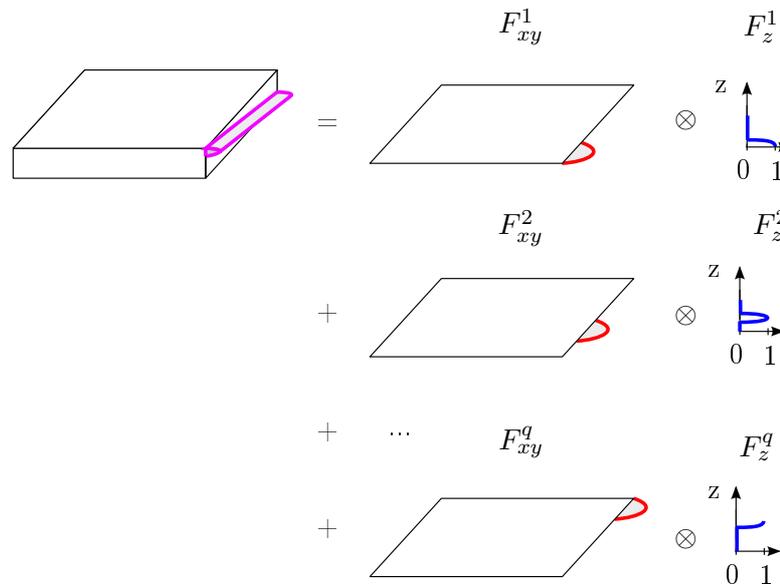


FIGURE 2.16 – Représentation des conditions aux limites de type Neumann complexes sur une face latérale

### 2.2.5.2 Conditions aux limites de Dirichlet

L'application des conditions aux limites de Dirichlet se fait de deux manières différentes selon le cas de figure. En effet, dans le cas où la condition à imposer est compatible avec la séparation des variables choisie, elle est imposée de façon classique sur le sous-problème adéquat. Par contre, dans le cas où la condition n'admet pas de séparation conforme à la séparation des variables choisie, une stratégie différente doit être adoptée.

- cas où la condition de Dirichlet est compatible avec la représentation séparée :  
pour imposer la condition de Dirichlet, un 1<sup>er</sup> mode satisfaisant les conditions de Dirichlet est déterminé arbitrairement. Celui-ci peut par exemple être zéro partout, sauf sur  $\partial_1\Omega$  où la fonction prend la valeur de la condition à imposer. Cette fonction existe puisque nous sommes ici dans le cas où la condition de Dirichlet est compatible avec la représentation séparée.

Dans ce cas, la compatibilité de la condition de Dirichlet avec la séparation des variables se traduit par :

- imposer un déplacement sur l'intégralité d'une des faces supérieures ou inférieures :

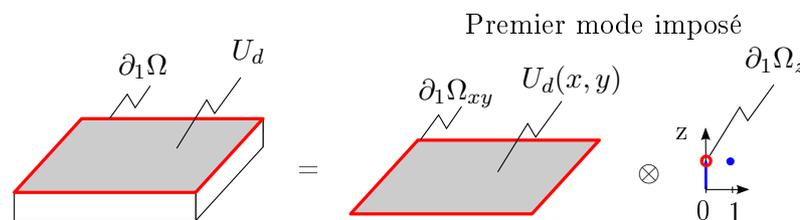


FIGURE 2.17 – Premier mode pour imposer une condition de Dirichlet sur une face supérieure ou inférieure

Le premier mode satisfaisant les valeurs de la condition est ajouté avant de commencer à enrichir la solution. Ensuite, lors de chaque enrichissement, une condition

homogène sera imposée sur la partie  $\partial_1\Omega$  via une méthode classique (les degrés de liberté associés sont imposés à zéro et retirés du système linéaire à résoudre). Dans ce cas, les seuls degrés de liberté à retirer sont les composantes du déplacement associées au premier ou au dernier nœud  $\partial_1\Omega_z$  (suivant la face sur laquelle la condition est imposée) du problème 1D.

- imposer un déplacement sur une partie du domaine 2D et l'intégralité du domaine 1D :

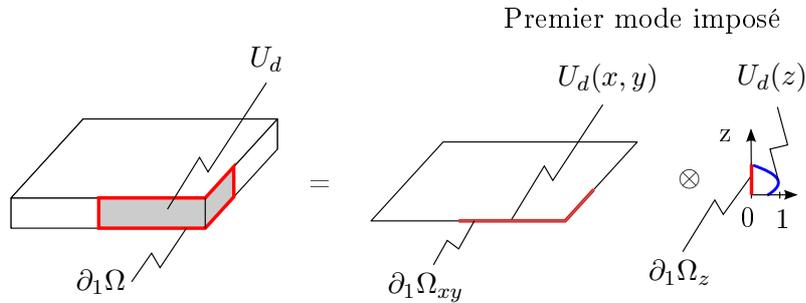


FIGURE 2.18 – Premier mode pour imposer une condition de Dirichlet sur une partie des faces latérales

Le premier mode satisfaisant les valeurs de la condition est ajouté avant de commencer à enrichir la solution, puis un enrichissement homogène sur  $\partial_1\Omega$  est ajouté pour l'ensemble des modes suivants. Dans ce cas, les degrés de liberté à retirer sont les composantes du déplacement associées aux nœuds de  $\partial_1\Omega_{xy}$  du problème 2D.

- cas où la condition de Dirichlet n'est pas compatible avec la représentation séparée : on ne peut pas employer la méthode décrite ci-dessus. En effet, s'il est possible de trouver un ou plusieurs modes dont la somme vaut bien la valeur à imposer sur  $\partial_1\Omega$ , il est impossible d'imposer une condition homogène ensuite sur les modes sur un domaine non représentable par le produit tensoriel des sous-espaces 2D et 1D. Une méthode alternative doit être utilisée. Une approche pour résoudre ce type de problème sera présentée dans la partie 3.2.1.

## 2.2.6 Exemples

Cette partie présente quelques exemples de problèmes qu'il est possible de résoudre avec la méthode présentée ci-dessus.

### 2.2.6.1 Plaque trouée stratifiée

La plaque trouée est un essai classique pour les matériaux composites [Soutis et Edge, 1997; Mollenhauer, 2000], en effet, de nombreuses structures composites sont assemblées par rivets ou par boulonnages. Les pièces composites sont donc percées de nombreux trous. De nombreux essais sont par conséquent effectués sur des plaques trouées pour en étudier le comportement et modéliser correctement les phénomènes d'endommagement et de rupture. En parallèle, il est également nécessaire d'effectuer des simulations précises basées sur la physique pour calculer l'ensemble des indicateurs utilisés pour prévoir le comportement et la ruine du matériau.

La méthode de séparation des variables d'espace est particulièrement adaptée pour effectuer des simulations sur ce genre de problème : un maillage 2D relativement grossier raffiné à proximité du trou est utilisé, associé à un maillage 1D fin dans l'épaisseur de manière à représenter très précisément le déplacement dans l'épaisseur au voisinage du trou. Un tel modèle est extrêmement léger à mettre en œuvre avec la méthode proposée, et peut être par exemple lancé à la volée sur un ordinateur de faible puissance sur le lieu des essais afin de donner des outils de compréhension aux résultats expérimentaux. Un modèle équivalent en 3D avec un degré de raffinement du maillage équivalent, dans le cas de pièces épaisses et comportant un grand nombre de plis est extrêmement lourd en comparaison, et ne peut pas être utilisé comme un outil de simulation *in situ* et *on-line* lors de la mise en œuvre d'essais sur éprouvettes par exemple.

L'exemple ici traite une plaque composite dont l'empilement est constitué de 8 plis agencés selon la séquence  $[0, +45, -45, 90]_s$ . La figure 2.19 présente le chargement. Les différents paramètres du chargement, longueurs et coefficients matériau sont définis par le tableau 2.1. Chaque pli est discrétisé par 20 éléments dans l'épaisseur, ce qui donne 161 degrés de liberté dans l'épaisseur. Le maillage 2D comporte 36000 éléments quadrangulaires, pour 37000 noeuds. Le problème 3D reconstruit comporte donc environ 18 millions de degrés de libertés, pour un temps de calcul de 12 minutes sur un ordinateur portable.

$E_1$	120000 MPa
$E_2 = E_3$	8900 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.35
$\nu_{23}$	0.32
$a$	0.2 m
$e$	0.001 m
$R$	0.025 m
$U_d$	0.05 m

TABLE 2.1 – Paramètres géométriques et coefficients matériau

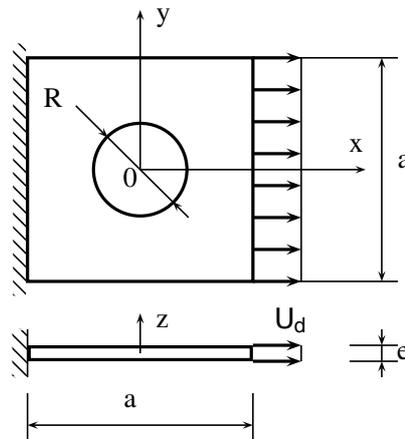


FIGURE 2.19 – Définition du problème de mécanique sur la plaque trouée

La reconstruction 3D de la solution est présentée sur la figure 2.20. La perturbation

induite par le trou produit un état de contrainte tridimensionnel complexe, qui ne peut être capturé qu’avec un modèle 3D.

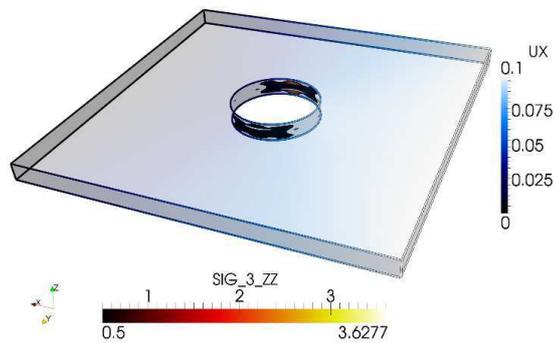


FIGURE 2.20 – Déplacement en  $x$  et contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la plaque trouée (géométrie dilatée 10 fois dans le sens de l’épaisseur)

La figure 2.21 représente le champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  au voisinage du trou.



FIGURE 2.21 – Contrainte  $\sigma_{zz}$  au voisinage du trou (géométrie dilatée 10 fois dans le sens de l’épaisseur)

### 2.2.6.2 Cas des plaques raidies

La méthode présentée dans la partie 2.2 est adaptée pour effectuer des simulations sur des structures de type “plaques raidies”. Les structures composites sont très souvent des structures minces. Pour éviter les phénomènes de flambage, des raidisseurs sont généralement ajoutés. C’est le cas de la majorité des structures pour l’aéronautique. Il est donc important de pouvoir prendre en compte ces types de structures.

Dans le cas de géométries simples comme celles de la figure 2.22, on constate qu’il existe une direction “d’extrusion”, mais que celle-ci n’est pas dans l’épaisseur de la plaque comme dans l’approche présentée précédemment.

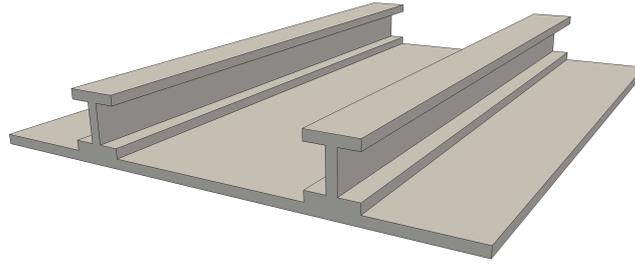


FIGURE 2.22 – Structure raidie

Ce type de structure peut être directement résolue avec la méthode PGD en variables d'espace séparées 2D/1D. Le problème 2D est cette fois pris dans la section du panneau auto-raidi (voir figure 2.23).



FIGURE 2.23 – Maillage 2D pour résoudre le problème de la figure 2.22

La séparation des variables d'espace en utilisant la section pour définir le problème 2D de la résolution PGD s'éloigne un peu de la philosophie mise en place précédemment. De plus, dans le cas d'une structure composite, le maillage de la section doit être compatible avec le grand nombre de plis. Très rapidement, on obtient un maillage 2D dont le nombre d'éléments explose. Cette stratégie n'est donc pas la plus adaptée pour résoudre ce genre de problèmes.

Une formulation du problème plus adaptée aux problèmes de ce type sera présentée dans le chapitre 3, dans la partie 3.1.

### 2.3 Analyse des modes PGD

Dans cette partie, seront discutées les similitudes et les différences que l'on observe entre l'approche présentée et certaines théories de plaques.

Considérons le problème d'une plaque stratifiée (empilement  $[0, 45, 90, -45]_s$ ) en forme de "L" défini sur la figure 2.24, encadrée sur l'ensemble de ses bords, et soumise à une force constante sur sa face supérieure.

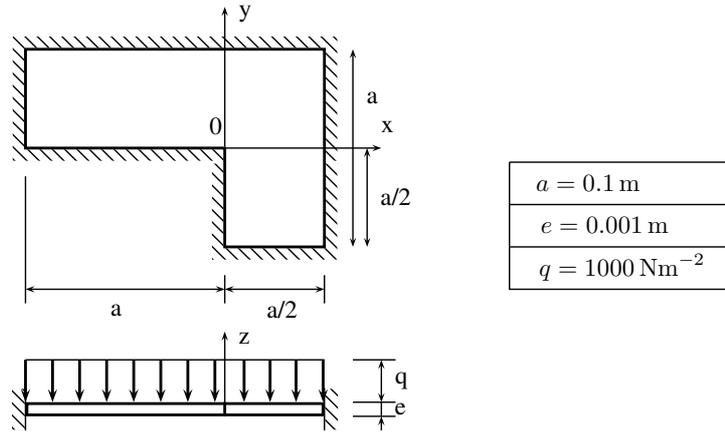


FIGURE 2.24 – Définition du problème sur la plaque en forme de “L”

La méthode décrite ici n’est pas présentée comme étant une théorie de plaque puisque les équations utilisées et résolues sont celles de l’élasticité 3D sans aucune hypothèse simplificatrice. L’approximation par rapport à une résolution éléments finis 3D complète se situe seulement dans le processus itératif de construction de la solution en forme séparée, dont la précision est contrôlée.

Cependant, la représentation sous forme de produit de fonctions 2D et de fonction 1D de l’épaisseur peut rappeler les théories de plaques.

La théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff développée par Love [Love, 1889], comme extension de la théorie des poutres d’Euler-Bernoulli, est basée sur une hypothèse cinématique proposée par Kirchhoff [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959] :

- les fibres normales à la surface moyenne restent rectilignes après déformation
- les fibres normales à la surface moyenne restent normales à la surface moyenne après déformation
- l’épaisseur de la plaque ne varie pas après déformation.

Ces hypothèses se traduisent par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z \cdot \theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = -z \cdot \theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y). \end{cases} \quad (2.28)$$

La solution d’un problème de plaque avec la théorie de Love-Kirchhoff peut donc être représentée avec l’approche PGD développée ici. La forme de la solution utilisée pour résoudre un problème de plaque avec la PGD est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Une solution Love-Kirchhoff du même problème peut s’écrire comme une restriction de la solution PGD au premier mode ( $i = 1$ ), avec des contraintes sur les composantes des modes de l’épaisseur suivantes :

$$\begin{cases} u_{xy}^1(x, y) = \theta_y(x, y) \\ u_z^1(z) = z \\ v_{xy}^1(x, y) = \theta_x(x, y) \\ v_z^1(z) = z \\ w_{xy}^1(x, y) = w(x, y) \\ w_z^1(z) = 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

En pratique, dans le cas d'une plaque mince, sans rien imposer de tel sur le modèle résolu par la PGD, le premier mode (voir figure 2.25) trouvé par l'algorithme montre une dépendance linéaire en  $z$  des composantes  $u$  et  $v$  et une constante en  $z$  pour  $w$ .

Ce comportement remarquable et non imposé à priori montre que l'hypothèse cinématique utilisée dans la théorie de Love-Kirchhoff est adaptée, puisque c'est la meilleure représentation de la solution tridimensionnelle en utilisant un seul produit des fonctions du plan et de l'épaisseur.

Les modes suivants (voir figures 2.25, 2.26, 2.27 et annexe 5.7) présentent des dépendances en  $z$  plus complexes et viennent corriger la solution majoritairement près des bords, là où le principe de Saint-Venant n'est pas vérifié et où la solution de la théorie de plaque n'est pas valide. Les modes suivants qui présentent moins d'intérêt sont placés en annexe 5.7.

La méthode présentée ici met en valeur la légitimité de l'hypothèse cinématique dans la théorie de plaques, et montre aussi ses limites.

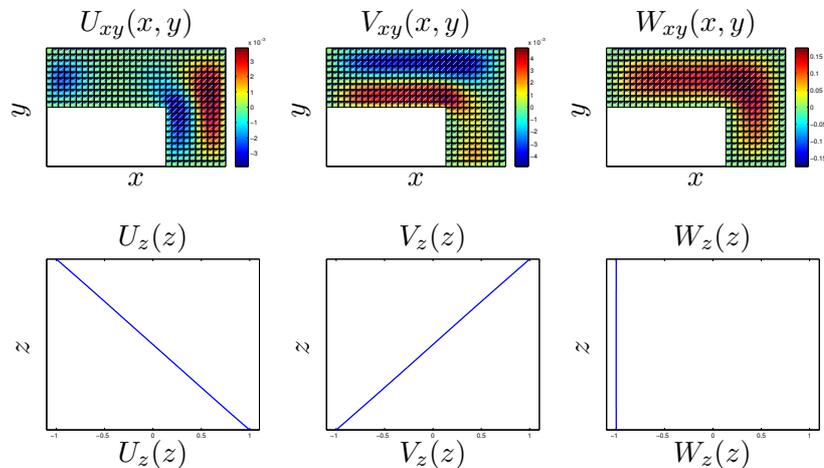


FIGURE 2.25 – Mode 1

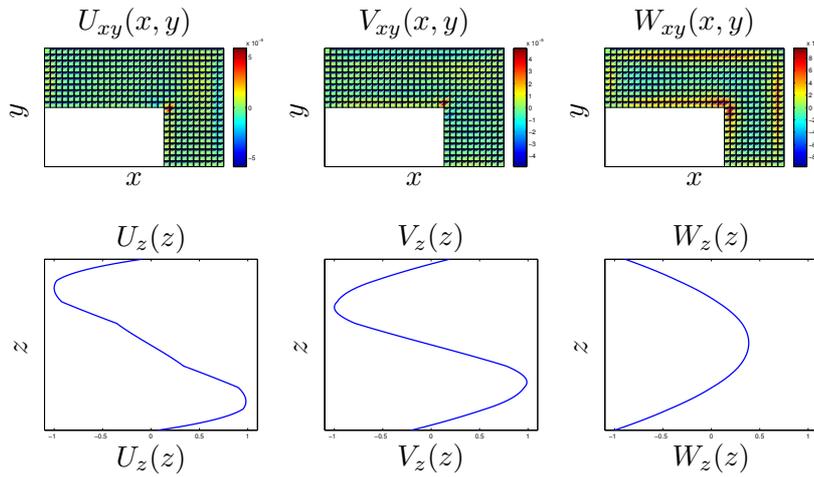


FIGURE 2.26 – Mode 2

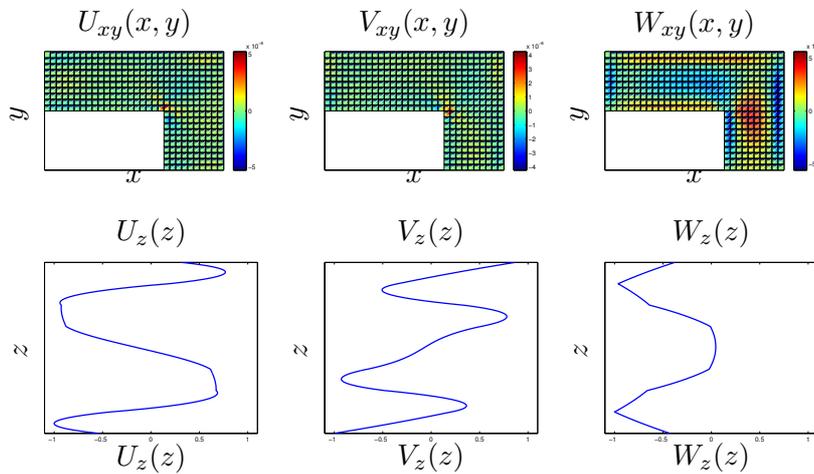


FIGURE 2.27 – Mode 3

La théorie de Reissner-Mindlin [Mindlin, 1951] [Reissner, 1945] qui prend en compte le cisaillement transverse n'impose plus la normalité de la fibre initialement normale à la surface moyenne dans l'état déformé. La figure 2.28 montre l'évolution de l'angle entre une fibre et la surface moyenne en fonction du rapport d'aspect de la plaque pour une solution calculée en un seul mode avec la PGD. Les domaines de validités des deux théories se retrouvent bien sur cette figure. En effet, pour un rapport d'aspect qui s'approche de  $10^2$ , l'hypothèse de Love-Kirchhoff se vérifie sur le premier mode de la PGD, tandis que pour des épaisseurs plus importantes, la fibre normale ne reste plus perpendiculaire à la surface moyenne.

Dans tous les cas, des modes additionnels sont nécessaires pour corriger la solution là où elle est tridimensionnelle et donc incompatible avec les hypothèses des différentes théories de plaques, notamment au voisinage des encastremements.

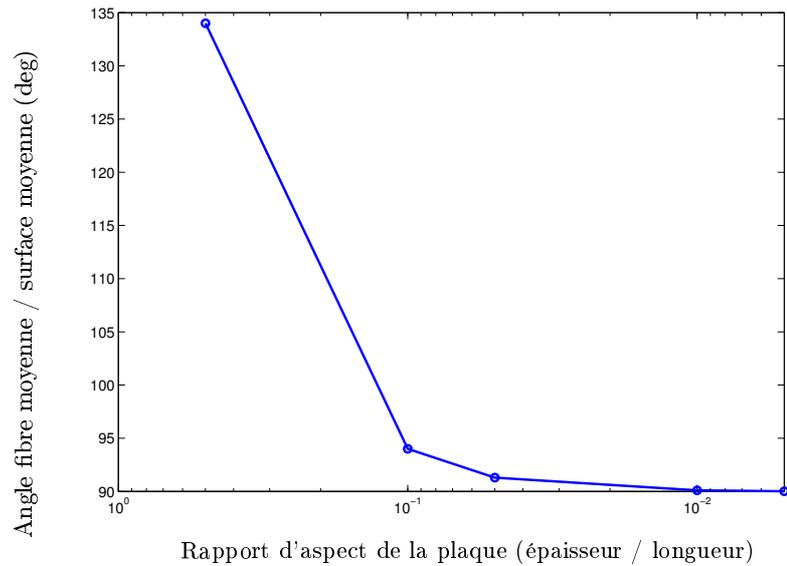


FIGURE 2.28 – Évolution de l'angle entre une fibre et la surface moyenne en fonction du rapport d'aspect de la plaque

## 2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons vu comment résoudre un problème d'élasticité 3D sur des géométries de type plaques en utilisant une représentation 2D/1D. La convergence de la méthode a été analysée, ainsi que ses performances en termes de temps de calcul.

L'application à des pièces composites est particulièrement intéressante, du fait de la facilité à traiter des problèmes présentant un grand nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur.

La méthode présentée dans cette partie se limite cependant à la résolution de problèmes sur des structures d'épaisseur constante et présentant des conditions aux limites compatibles avec la représentation séparée choisie.

Le chapitre suivant présente quelques compléments pour appliquer la représentation 2D/1D à des problèmes plus complexes.

# Chapitre 3

## Applications et résolution de problèmes mécaniques 3D complexes

### Sommaire

---

<b>3.1 Représentation en plusieurs modes</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1.1 Mise en équation du problème . . . . .	45
3.1.2 Résolution . . . . .	47
3.1.3 Exemples de simulations définies sur des domaines complexes . .	48
3.1.3.1 Structure en caisson . . . . .	48
3.1.3.2 Panneau auto-raidi . . . . .	49
3.1.3.3 Panneau sandwich . . . . .	49
<b>3.2 Pénalisation</b> . . . . .	<b>51</b>
3.2.1 Présentation de la méthode . . . . .	51
3.2.2 Exemple . . . . .	53
<b>3.3 Thermoélasticité</b> . . . . .	<b>55</b>
3.3.1 Formulation et résolution du problème de thermoélasticité . . . .	55
3.3.2 Optimisation d'une cornière composite . . . . .	56
3.3.3 Discussion . . . . .	59

---

Cette partie est un complément du chapitre précédent permettant de résoudre certains problèmes 3D plus complexes par rapport aux possibilités offertes par l'approche présentée au chapitre 2. La méthode sera entre autres étendue à la simulation de problèmes définis sur des géométries constituées d'assemblages de parties extrudées, puis une méthode pour appliquer des conditions aux limites de type Dirichlet non compatible avec la représentation séparée sera présentée. Enfin des exemples de simulation et d'optimisation de forme basés sur des problèmes thermoélastiques seront explicités.

## 3.1 Représentation de la structure en plusieurs modes

### 3.1.1 Mise en équation du problème

Pour résoudre des problèmes avec raidisseurs en conservant le problème 2D dans la surface moyenne de la plaque, on reprendra l'équation (2.14), avec  $\mathbb{K}(x, y, z)$  sous la forme d'une somme.

Considérons un problème dont le matériau possède une matrice d'élasticité définie par :

$$\mathbb{K} = K_{0_{ij}}. \quad (3.1)$$

Pour résoudre le problème de la figure 2.22, l'expression du terme général de  $\mathbb{K}(x, y, z)$  sera :

$$K_{ij}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 K_{xy_{ij}}^i \cdot K_{z_{ij}}^i. \quad (3.2)$$

Les valeurs des différentes composantes  $K_{xy_{ij}}^i$  et  $K_{z_{ij}}^i$  sont représentées sur la figure 3.2, et une représentation 3D est donnée par la figure 3.1.

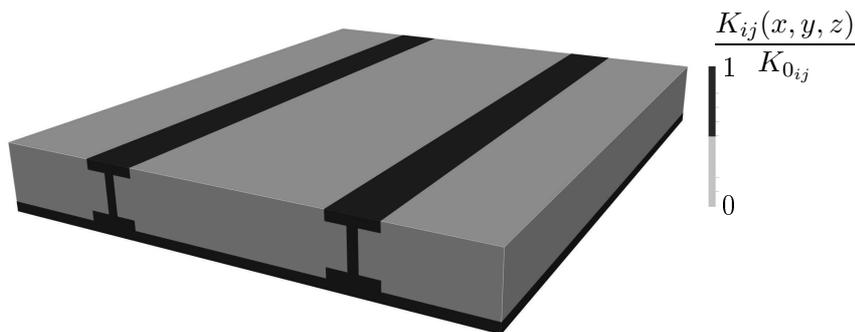
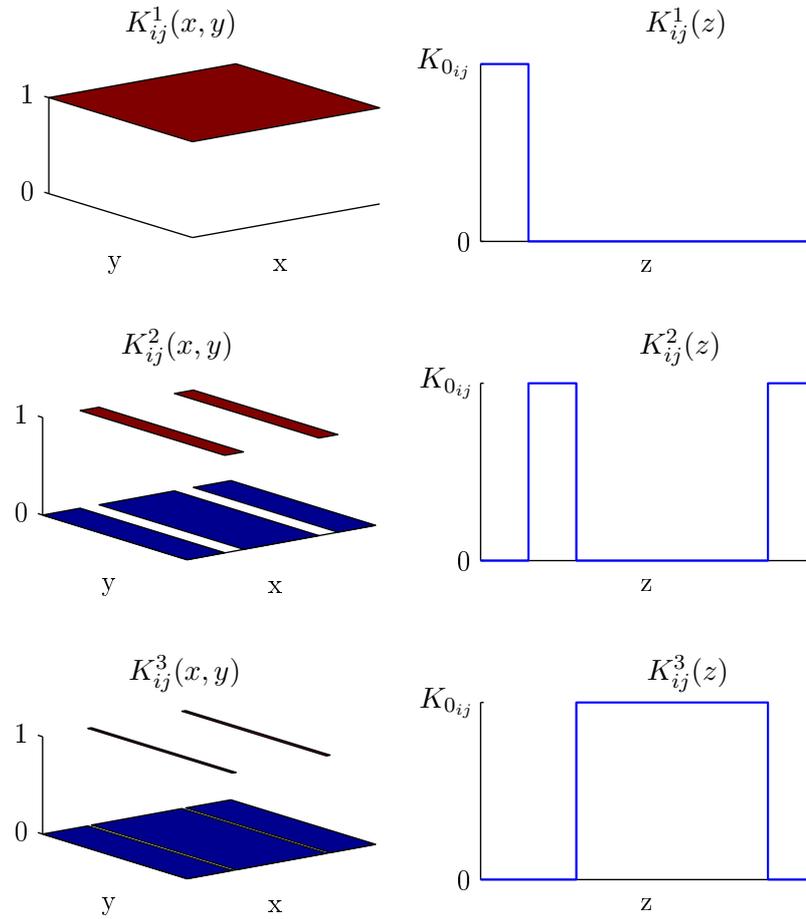


FIGURE 3.1 – Représentation 3D reconstruite de  $K_{ij}^i(x, y, z)$

L'expression de  $\mathbb{K}(x, y, z)$  sous la forme d'une somme de trois termes permet de représenter la raideur associée à la structure représentée en figure 2.22. La figure 3.1 représente la reconstruction en 3D de la composante générale  $K_{ij}(x, y, z)$ .

FIGURE 3.2 – Valeurs de composantes des  $K_{xy_{ij}}^i$  et  $K_{z_{ij}}^i$ 

Les parties représentées en bleu ont une raideur nulle, et ne participent donc pas à la raideur globale de la pièce simulée. Pour l'ensemble des opérations de visualisation et post-traitement des résultats, les zones représentées en bleu sont cachées, laissant apparaître la géométrie réelle de la pièce.

La raideur localement nulle ne pose pas de problème de résolution ici, car la résolution est effectuée en variables d'espace séparées avec la PGD. Les problèmes 2D et 1D définis respectivement dans le plan et dans l'épaisseur sont résolus alternativement jusqu'à convergence. Lors de la résolution de chacun des problèmes 1D et 2D, l'autre est pris en compte de façon totalement intégrée sur son espace de définition sous la forme d'un scalaire strictement positif. Aucun problème de conditionnement du système n'est donc posé ici du fait de la raideur nulle sur une partie du domaine.

### 3.1.2 Résolution

La formulation faible utilisée pour le calcul du problème en  $\mathbf{R}$  en prenant en compte la définition de  $\mathbb{K}(x, y, z)$  sous forme d'une somme s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{41} \sum_{q=1}^3 \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot K_{xy m_i n_i}^q \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{z m_i n_i}^q \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \\
&= - \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{41} \sum_{q=1}^3 \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot K_{xy m_i n_i}^q \cdot d_{i, xy, \gamma_i}^p) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{z m_i n_i}^q \cdot d_{i, z, \delta_i}^p) d\Omega_z \\
&+ \iint_{\Omega_{xy}} (r_u^* \cdot f_{d_{uxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_u \cdot f_{d_{uz}}) d\Omega_z + \iint_{\Omega_{xy}} (r_v^* \cdot f_{d_{vxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_v \cdot f_{d_{vz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_w^* \cdot f_{d_{wxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_w \cdot f_{d_{wz}}) d\Omega_z \\
&+ \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_u^* \cdot F_{d_{uxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_u \cdot F_{d_{uz}}) d\Gamma_z + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_v^* \cdot F_{d_{vxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_v \cdot F_{d_{vz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_w^* \cdot F_{d_{wxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_w \cdot F_{d_{wz}}) d\Gamma_z. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Et celle associée à la résolution du problème en  $\mathbf{S}$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{41} \sum_{q=1}^3 \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot K_{xy m_i n_i}^q \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{z m_i n_i}^q \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \\
&= - \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{41} \sum_{q=1}^3 \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot K_{xy m_i n_i}^q \cdot d_{i, xy, \gamma_i}^p) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{z m_i n_i}^q \cdot d_{i, z, \delta_i}^p) d\Omega_z \\
&+ \iint_{\Omega_{xy}} (r_u \cdot f_{d_{uxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_u^* \cdot f_{d_{uz}}) d\Omega_z + \iint_{\Omega_{xy}} (r_v \cdot f_{d_{vxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_v^* \cdot f_{d_{vz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_w \cdot f_{d_{wxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_w^* \cdot f_{d_{wz}}) d\Omega_z \\
&+ \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_u \cdot F_{d_{uxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_u^* \cdot F_{d_{uz}}) d\Gamma_z + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_v \cdot F_{d_{vxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_v^* \cdot F_{d_{vz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_w \cdot F_{d_{wxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_w^* \cdot F_{d_{wz}}) d\Gamma_z. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

L'ensemble des notations utilisées est détaillé dans l'annexe 5.7.

### 3.1.3 Exemples de simulations définies sur des domaines complexes

#### 3.1.3.1 Structure en caisson

Dans cet exemple, la séparation de la raideur en deux modes est exploitée. Grâce à la méthode présentée dans la partie 3.1, la structure tridimensionnelle de la figure 3.3 est modélisée à l'aide de la représentation séparée par le produit tensoriel d'un modèle 2D et d'un modèle 1D. Les indicatrices utilisées pour l'intégration partielle du volume sont définies sur la figure 3.4.

La structure présentée sur la figure 3.3 est encadrée sur la face de gauche, et soumise à une charge verticale sur la face de droite.

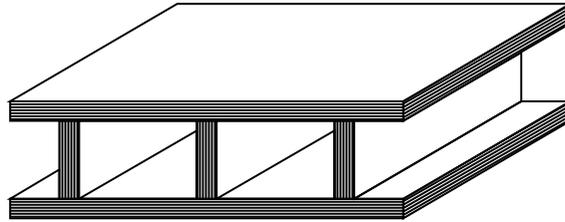


FIGURE 3.3 – Structure 3D en forme de caisson

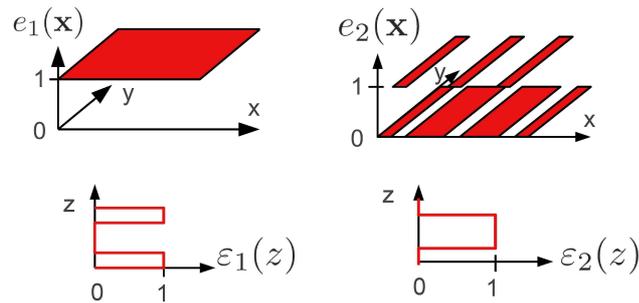
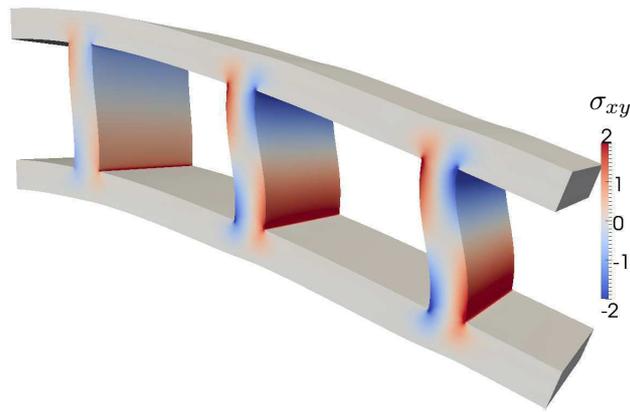


FIGURE 3.4 – Indicatrice utilisée pour définir la raideur

La solution calculée est fortement tridimensionnelle, comme on peut le constater sur la figure 3.5. La méthode fonctionne parfaitement pour capturer l'ensemble des effets tridimensionnels même aux jonctions entre les différents domaines.

FIGURE 3.5 – Composante  $\sigma_{xy}$  du champ de contrainte 3D sur la structure en caisson

### 3.1.3.2 Panneau auto-raidi

La pièce présentée en 3.1 et sa variante à raidisseur courbe sont également des exemples dont la géométrie peut être exprimée comme la combinaison de plusieurs géométries extrudées. Les maillages 2D associés sont présentés en figure 3.6 et figure 3.7

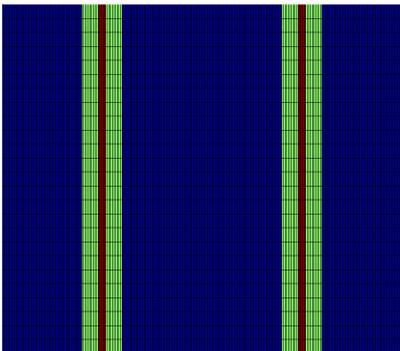


FIGURE 3.6 – Maillage 2D pour le problème de plaque raidie

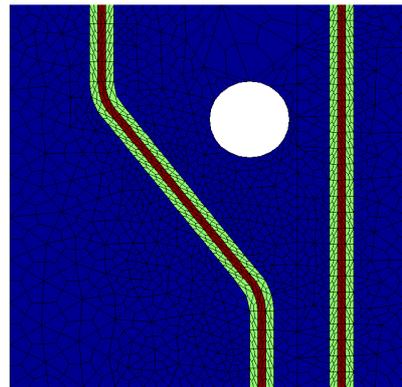


FIGURE 3.7 – Maillage 2D pour le problème de plaque raidie par raidisseur courbe

La plaque raidie de la figure 3.8 est encadrée sur les faces latérales avant et arrière, et soumise à une pression constante sur la face du dessous. La plaque de la figure 3.9 est encadrée sur les faces de gauche et de devant, les deux autres faces sont soumises à des contraintes de symétrie. Une pression constante est également appliquée sur la face du dessous.

### 3.1.3.3 Panneau sandwich avec cœur en nid d'abeille

Suivant exactement le même principe que les deux exemples précédents, des géométries complexes voire des microstructures peuvent être mises en œuvre avec la méthode proposée.

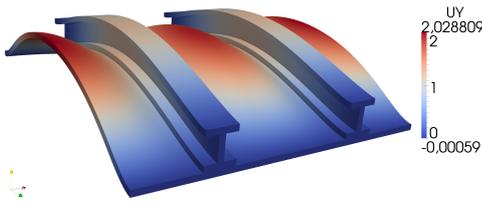


FIGURE 3.8 – Déformée de la plaque raidie



FIGURE 3.9 – Déformée de la plaque raidie par un raidisseur courbe

L'exemple ici concerne un calcul sur un panneau type sandwich avec un cœur en nid d'abeille et deux peaux composites stratifiées de 8 plis chacune. Conventionnellement, pour des raisons de puissance de calcul, le cœur en nid d'abeille est considéré comme un matériau homogène équivalent. Ici, la "microstructure" du nid d'abeille est prise en compte dans la simulation.

Le coût du calcul est abordable avec la méthode proposée. Avec une méthode 3D classique et la discrétisation utilisée, le calcul est trop gros pour être mis en œuvre sur un ordinateur conventionnel. La solution présentée ici comporte plus de 10 millions de degrés de libertés, et à été calculée sur un ordinateur portable standard en seulement 10 h.

La figure 3.10 représente un détail du nid d'abeille. La finesse du maillage donne une idée de la taille du problème éléments finis à résoudre.

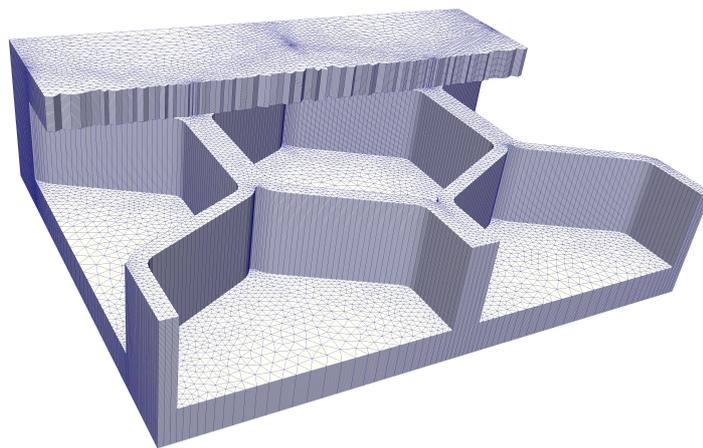


FIGURE 3.10 – Maillage 3D reconstruit d'une cellule de nid d'abeille

Sur la figure 3.11, on peut observer la tridimensionnalité du champ de contrainte, en particulier dans le nid d'abeille. Ces informations sont inaccessibles dans le cas de l'utilisation d'un modèle d'âme homogénéisé.

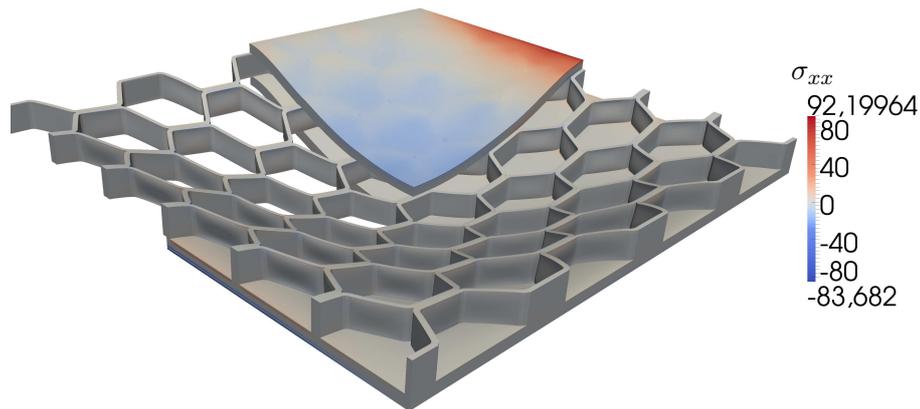


FIGURE 3.11 – Déformée de la plaque en sandwich composite et nid d’abeille

Un calcul de ce type permet non seulement d’accéder au champ de contrainte réel aussi bien dans la peau stratifiée, que dans l’âme en nid d’abeille, mais également de se passer d’une procédure d’homogénéisation non triviale du nid d’abeille qui entraîne de plus une grosse approximation sur l’ensemble des champs à proximité de l’interface peau/âme.

## 3.2 Méthode de pénalisation pour l’application de conditions limites de Dirichlet non compatibles avec la représentation séparée choisie

### 3.2.1 Présentation de la méthode

La méthode présentée ici est une méthode de pénalisation utilisée pour l’imposition de conditions aux limites de type Dirichlet spécifiques, qui ne peuvent pas s’écrire simplement sous forme de produit tensoriel conformément à la représentation choisie (voir figure 3.12). Son emploi est motivé par sa simplicité d’implémentation.

La méthode de pénalisation est une méthode de résolution approchée, qui se différencie des méthodes plus précises, basées sur des multiplicateurs de Lagrange par exemple. L’inconvénient majeur lié à l’utilisation de multiplicateurs de Lagrange, est que la taille du système à résoudre se trouve augmentée, contrairement à la méthode de pénalisation qui conserve la dimension du système.

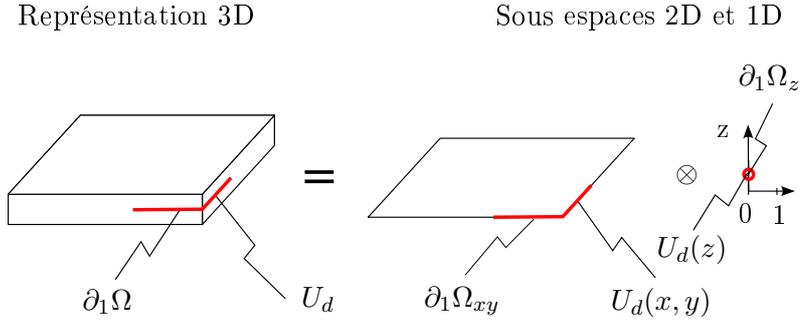


FIGURE 3.12 – Méthode pour imposer une condition de Dirichlet sur un domaine quelconque

L'imposition de la condition de Dirichlet par pénalisation se fait en ajoutant un terme agissant sur le déplacement associé au domaine  $\partial_1\Omega$  dans la formulation faible 2.7 :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \iint_{\partial_1\Omega} (K_{pen} \cdot \mathbf{u}^* (\mathbf{u} - \mathbf{U}_d)) d\Gamma \\ = \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ce terme additionnel doit être séparé en deux : la partie qui dépend de  $\mathbf{u}$  est conservée dans le membre de gauche, et la partie connue qui dépend de  $\mathbf{U}_d$  est déplacée dans le membre de droite. Au final, la formulation faible adaptée pour la résolution du problème en  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  devient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \iint_{\partial_1\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot K_{pen} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma \\ = - \iint_{\partial_1\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot K_{pen} \cdot \mathbf{U}_d) d\Gamma + \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le facteur de pénalisation  $K_{pen}$  est choisi en fonction du problème selon les critères de choix habituels.

L'équation suivante détaille l'ensemble des termes de la formulation faible utilisée pour

la résolution du sous-problème en  $\mathbf{S}$  (selon les notations déjà utilisées en annexe 5.7) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{m_i n_i} \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \\
& \quad + \iint_{\partial_1 \Omega} (\mathbf{u}^* \cdot K_{pen} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma \\
& = - \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot d_{i_{xy}, \gamma_i}^p) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{m_i n_i} \cdot d_{i_z, \delta_i}^p) d\Omega_z \\
& \quad + \iint_{\partial_1 \Omega} (\mathbf{u}^* \cdot K_{pen} \cdot \mathbf{U}_d) d\Gamma \\
& + \iint_{\Omega_{xy}} (r_u \cdot f_{d_{uxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_u^* \cdot f_{d_{uz}}) d\Omega_z + \iint_{\Omega_{xy}} (r_v \cdot f_{d_{vxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_v^* \cdot f_{d_{vz}}) d\Omega_z \\
& \quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_w \cdot f_{d_{wxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_w^* \cdot f_{d_{wz}}) d\Omega_z \\
& + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_u \cdot F_{d_{uxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_u^* \cdot F_{d_{uz}}) d\Gamma_z + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_v \cdot F_{d_{vxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_v^* \cdot F_{d_{vz}}) d\Gamma_z \\
& \quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_w \cdot F_{d_{wxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_w^* \cdot F_{d_{wz}}) d\Gamma_z. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Les composantes de  $\mathbf{u}$  dans l'équation 3.7 sont volontairement présentées non développées. En effet, le nombre de composantes dépend de la nature de la condition à imposer.

Par exemple, dans le cas d'une condition d'encastrement de la partie  $\partial_1 \Omega$ , les 3 composantes de  $\mathbf{u}$  figureront dans le terme de pénalisation, et le terme du membre de droite sera absent car le déplacement imposé est nul. En revanche, si l'on souhaite imposer une contrainte de glissement de  $\partial_1 \Omega$  sur une surface normale au plan formé par les directions  $y$  et  $z$ , seul la composante  $u$  du déplacement sera incluse dans le terme de pénalisation.

### 3.2.2 Exemple

Pour illustrer la méthode présentée dans cette partie, considérons l'exemple défini sur la figure 3.13. Le matériau est isotrope avec  $E = 200 \text{ GPa}$ , et  $\nu = 0.3$ . Un effort  $\mathbf{F}_d$  est imposé sur la face de droite :

$$\mathbf{F}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \end{pmatrix},$$

la face de gauche est encadrée :

$$\mathbf{U}_{d1} = \begin{pmatrix} u_{d1} \\ v_{d1} \\ w_{d1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et la composante  $w$  du déplacement est imposée sur la partie centrale :

$$w_{d2} = 0$$

La séparation des variables adoptée est la suivante : le problème 2D est défini sur la section du tube, et le problème 1D est représentatif de la direction de la longueur.

Le déplacement imposé  $\mathbf{U}_{d1}$  est compatible avec la séparation choisie, il est donc pris en compte de façon normale (voir partie 2.2.5.2) dans la simulation. Le déplacement imposé  $\mathbf{U}_{d2}$  n'est pas compatible avec la séparation choisie, il est donc pris en compte dans la simulation en utilisant la méthode décrite dans la partie 3.2.1.

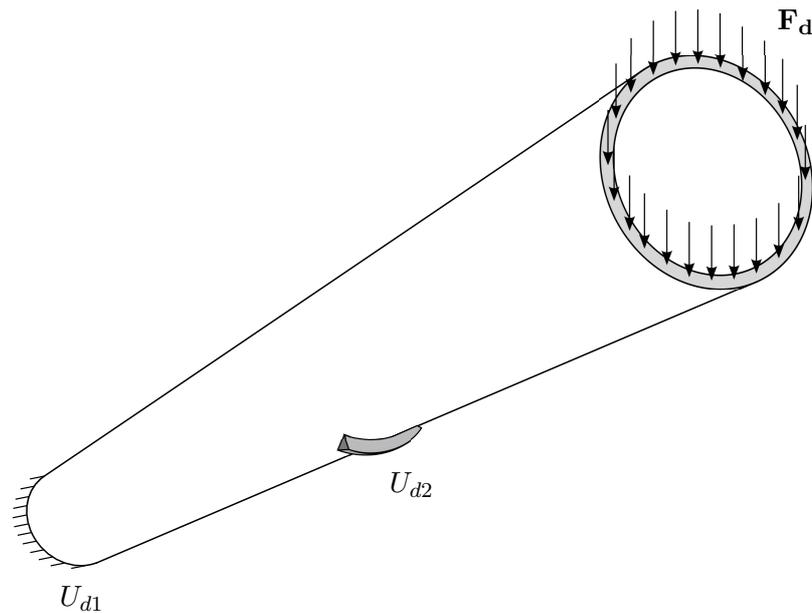


FIGURE 3.13 – Définition de problème

Le résultat de la simulation présenté en figure 3.14 représente la contrainte de Von Mises sur la déformée de la pièce.

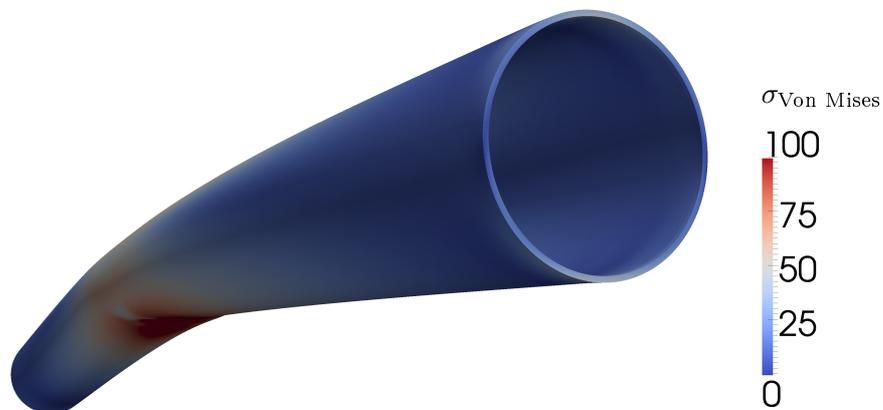


FIGURE 3.14 – Contrainte de Von Mises sur la pièce déformée

### 3.3 Thermoélasticité

#### 3.3.1 Formulation et résolution du problème de thermoélasticité

De nombreux procédés de fabrication imposent des variations de température de la pièce et de l'outillage lors de la mise en forme. C'est en particulier le cas pour les matériaux composites à matrices thermoplastiques et thermodurcissables. Ces changements de température au sein de la pièce lors de la mise en forme, couplés à la forte anisotropie des plis dans les pièces composites induisent des états de contraintes résiduelles dans les pièces fabriquées [Chinesta *et al.*, 2012].

Pour dimensionner et modéliser correctement le cycle de vie de la pièce, il est nécessaire de prendre ces phénomènes en compte dans la simulation. Une première approche est développée ici : il s'agit de prendre en compte les variations de température par un modèle thermoélastique linéaire.

L'idée ici est de considérer en première approche un état à chaud libre de contraintes, au début de la mise en forme, puis un refroidissement de la pièce. C'est à ce moment qu'apparaissent les contraintes [Chinesta *et al.*, 2012; Bognet *et al.*, 2011, 2012a].

La prise en compte des variations de température se fait via un calcul thermique (basé sur l'exothermie des réactions, ainsi que les cycles thermiques prescrits par les différents outillages), ce champ de variation de température (en utilisant une représentation séparée) induit un champ de forces volumiques exprimé sous forme séparée. On considère ici que la matrice est libre de contrainte à l'état chaud, et que les contraintes d'origine thermique apparaissent uniquement lors du refroidissement.

On résout donc d'abord l'équation de la chaleur en prenant en compte l'exothermie dans un terme source, et les différentes températures imposées par les outillages [Ghnatios *et al.*, 2011] :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (T^* \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{T}) d\Omega dt + \iint_{\Omega} (\nabla T^* \cdot k \cdot \nabla T) d\Omega dt \\ = \iint_{\Omega} (T^* \cdot h) d\Omega dt + \iint_{\partial_2 \Omega} (T^* \cdot q) d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ensuite, le résultat du calcul thermique est utilisé dans le calcul mécanique :

$$\iint_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\mathbf{u})) d\Omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} (u^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma, \quad (3.9)$$

où les forces volumiques générées par le refroidissement sont données sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_d = -\varepsilon(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{1} \delta T), \quad (3.10)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  est le tenseur des coefficients de dilatations thermiques, et :

$$\delta T = T_{\text{ambiante}} - T(x, y, z, t = 0). \quad (3.11)$$

où  $T(x, y, z, t = 0)$  représente la température initiale, à la fin de la mise en forme à chaud.

Les problèmes thermiques et mécaniques sont résolus en cherchant les champs solutions, respectivement  $T(x, y, z)$  et  $\mathbf{u}(x, y, z)$  sous forme séparée (équations 3.12 et 3.13) [Ghnatios *et al.*, 2011; Chinesta *et al.*, 2012] :

$$T(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^n T_{xy}^i(x, y) \cdot T_z^i(z), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

L'approche présentée ici néglige un certain nombre de phénomènes, comme les changements d'états, les réactions chimiques et leur couplage avec la thermique et la mécanique. Il s'agit d'un premier pas permettant de résoudre des problèmes linéaires en prenant en compte une certaine physique. Cependant, la méthode décrite ici permet de résoudre des problème 3D avec un coût de calcul suffisamment faible pour pouvoir être techniquement mise en œuvre. En effet, pour modéliser correctement les phénomènes thermoélastiques, un modèle 3D est nécessaire : les contraintes thermoélastiques ainsi que les déformations associées qui apparaissent lors de la mise en forme des matériaux composites proviennent entre autres du rapport élevé entre les coefficients de dilatation thermique dans le plan du pli et dans la direction transverse. La méthode peut être étendue par la suite à des modèles multiphysiques couplés [Chinesta *et al.*, 2012].

### 3.3.2 Optimisation d'une cornière composite

Les pièces en forme de cornières ou de "coin de malle" sont très utilisées, en particulier dans l'industrie aéronautique pour assembler des panneaux entre eux. Les tolérances géométriques sur ces pièces sont exigeantes, car elles définissent l'orientation relative des pièces de grande dimension à assembler entre elles.

Du fait de l'anisotropie marquée des matériaux composites, lors du refroidissement après mise en forme, les rayons de courbures des pièces diminuent. Ce phénomène est principalement provoqué par le rapport important entre les coefficients de dilatation thermique dans le plan, et hors plan. Une résolution 3D semble être la façon la plus précise pour déterminer l'amplitude de la fermeture de la pièce lors du refroidissement.

La conséquence de ce phénomène est que les pièces qui possèdent un rayon de courbure se referment. Ceci est d'ailleurs d'autant plus marqué que le rayon initial est faible. C'est précisément le cas de figure rencontré avec les cornières composites.

Une correction de l'outillage est nécessaire afin d'obtenir une pièce qui ne soit pas hors tolérance. Dans le cas d'une cornière, il est nécessaire de fabriquer un moule avec un angle légèrement plus ouvert que la pièce finale désirée. Le but de cette partie est précisément de déterminer l'angle de l'outillage en fonction de l'angle de la pièce désirée, le rayon de courbure du coin, et l'empilement.

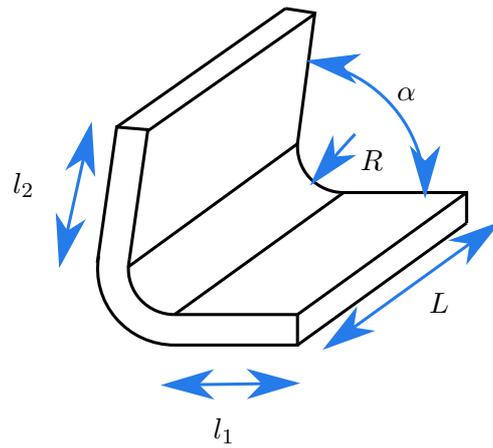


FIGURE 3.15 – Cornière composite

Afin de pouvoir automatiser le processus d'optimisation, un générateur automatique de maillage d'une cornière est mis en place. La figure 3.16 montre le détail du maillage au niveau de la partie courbe de la cornière. Les données d'entrée sont les suivantes :

- la longueur  $L$  de la pièce
- les largeurs des faces  $l_1$  et  $l_2$
- le rayon du coin  $R$
- l'angle d'ouverture  $\alpha$
- l'empilement et l'épaisseur d'un pli
- le nombre d'éléments dans l'épaisseur d'un pli

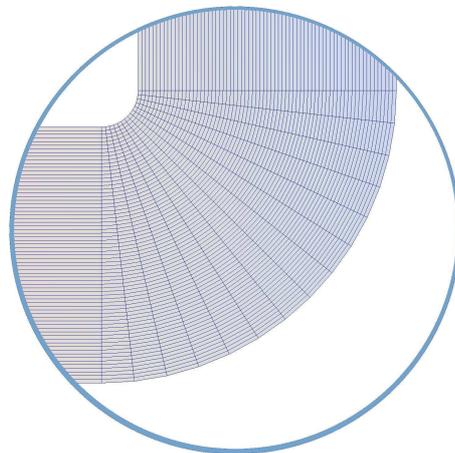


FIGURE 3.16 – Détail du maillage 2D utilisé pour l'optimisation de la cornière

Ensuite, la procédure d'optimisation est lancée : une première simulation est effectuée, avec la valeur de l'angle nominal souhaité. Un refroidissement de  $160^{\circ}\text{C}$  est imposé sur la pièce (les conditions aux limites mécaniques se limitent à la suppression des mouvements de corps rigide). Ensuite, avec une méthode de la sécante, en fonction de l'angle mesuré entre les deux faces de la cornière après refroidissement via une méthode de moindres carrés,

l'angle du moule est modifié et la simulation relancée.

Considérons une cornière avec un empilement  $[0, 90, 90, 0]_s$ , dont les coefficients matériau sont définis par la table 3.1, et les dimensions par la table 3.2.

$E_1$	$120 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_2$	$8.9 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_3$	$8.9 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$\nu_{12}$	0.35
$\nu_{13}$	0.35
$\nu_{23}$	0.32
$G_{12}$	$4.5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{13}$	$4.5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{23}$	$5.3 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$\alpha_{11}$	$130 \cdot 10^{-9}$
$\alpha_{22}$	$30 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_{33}$	$30 \cdot 10^{-6}$

TABLE 3.1 – Coefficients matériau utilisés pour un pli composite

$L$	$500 \text{ mm}$
$l_1$	$50 \text{ mm}$
$l_2$	$50 \text{ mm}$
$R$	$2 \text{ mm}$

TABLE 3.2 – Paramètres géométriques utilisés pour la cornière

Après 4 itérations, l'angle recherché est atteint. L'angle optimisé du moule pour obtenir la cornière à  $90^\circ$  est  $90.4^\circ$ .

Le maillage utilisé pour la résolution est un maillage 2D d'une section de la cornière composé de 2680 éléments quadrangles bilinéaires, et le maillage 1D composé de 100 éléments linéaires. Le problème 3D reconstruit contient 836400 degrés de libertés, l'optimisation est effectuée en un temps de 177s sur un ordinateur portable ordinaire.

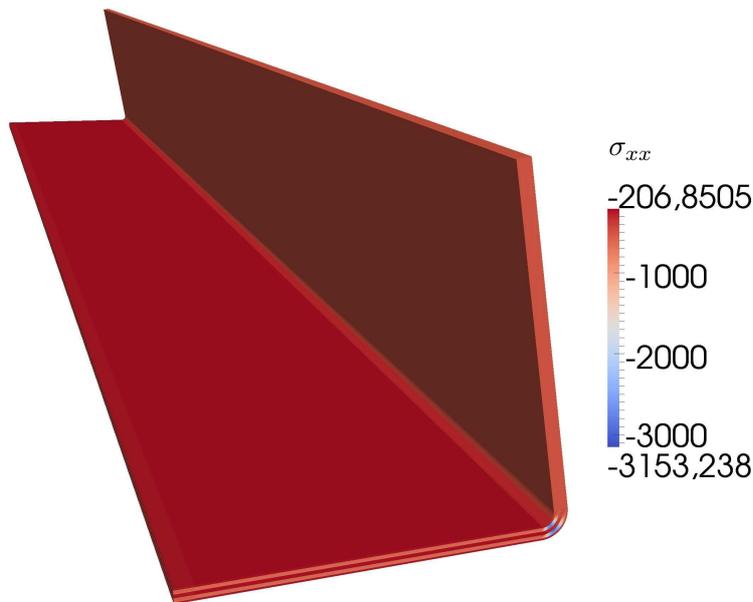


FIGURE 3.17 – Déformée de la cornière à 90°

### 3.3.3 Discussion

Les ingrédients présentés dans cette partie permettent de résoudre des problèmes réels utiles pour la conception de pièces composites. En effet, contrairement aux matériaux métalliques, l'anisotropie des matériaux composites peut entraîner des déformations résiduelles très importantes sur les pièces fabriquées si les outillages ne sont pas prévus pour les anticiper.

Pour procéder correctement, le modèle numérique doit pouvoir prendre en compte aussi bien des conditions aux limites variées que des chargement complexes basés sur la physique.

La modélisation proposée ici, bien qu'assez simple concernant la physique, donne des résultats encourageants fort utiles pour la conception des moules utilisés pour la fabrication des pièces. L'exemple de la cornière stratifiée illustre bien la nécessité d'utiliser des moules dont les caractéristiques dimensionnelles dépendent des paramètres du procédé de mise en forme (histoire thermique, drapage des plis,...).



# Chapitre 4

## Séparation des variables d'espace sur des géométries coques

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction : 3D séparé en 2D/1D pour les coques</b>	<b>63</b>
4.1.1 Approche facetisée	63
4.1.2 Approche continue	63
<b>4.2 Paramétrage de la géométrie</b>	<b>64</b>
4.2.1 Paramétrage de la surface moyenne	64
4.2.2 Paramétrage du volume et séparation des variables	64
<b>4.3 Formulation du problème mécanique</b>	<b>65</b>
<b>4.4 Résolution avec la PGD</b>	<b>65</b>
<b>4.5 Expression du tenseur d'élasticité pour les matériaux composites stratifiés</b>	<b>67</b>
<b>4.6 Exemples</b>	<b>69</b>
4.6.1 Exemple de validation	69
4.6.1.1 Définition du problème	69
4.6.1.2 Résultats	70
4.6.2 Exemple de pièce composite stratifiée	72
4.6.2.1 Définition du problème	72
4.6.2.2 Résultats	73
4.6.3 Exemple de simulation sur une géométrie complexe	74
4.6.3.1 Définition du problème	74
4.6.3.2 Résultats	75
<b>4.7 Conclusion</b>	<b>75</b>

---

Les chapitres précédents décrivent en détail la méthode de résolution de problèmes 3D en variables d'espaces séparées pour des pièces planes. Cette partie a pour but de détailler l'extension de la méthode pour des pièces de type coques. La philosophie est très similaire à ce qui est présenté au chapitre 2, avec une certaine complexité supplémentaire induite par la courbure du domaine considéré.

Tout d'abord, les différentes approches possibles seront présentées, leurs points forts et faibles respectifs seront brièvement discutés. Par la suite, l'approche utilisant la géométrie différentielle sera présentée en détail, avant de présenter divers exemples d'illustration et de validation.

## 4.1 Introduction : 3D séparé en 2D/1D pour les coques

Plusieurs approches sont possibles pour résoudre des problèmes d'élasticité 3D sur des géométries de type coques. La première façon qui vient à l'esprit est de résoudre le problème dans un espace curviligne en utilisant les outils de géométrie différentielle. Cependant, le problème peut également être étudié sous sa forme discrétisée. La formulation du problème est alors extrêmement simplifiée, et diffère très peu de l'approche décrite au chapitre 2.

### 4.1.1 Approche facétisée

Considérons la géométrie d'une coque, discrétisée en pentaèdres comme représenté sur la figure 4.1.

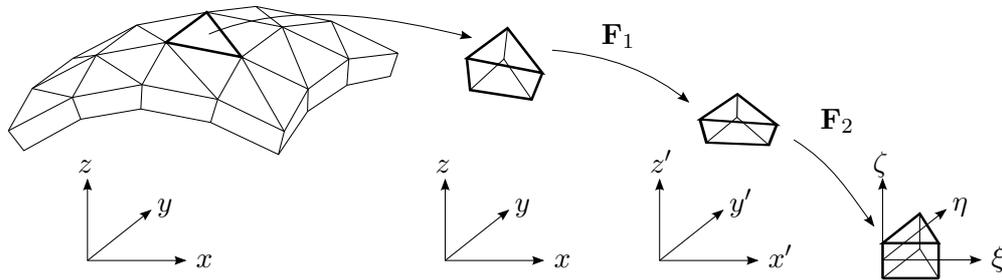


FIGURE 4.1 – Représentation discrétisée de la coque

Chacun des pentaèdres représente un sous espace de la coque, qui par une succession de transformations peut se ramener à un prisme parent dans l'espace  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Un point clé de cette approche consiste à évaluer correctement le jacobien de la transformation, ainsi que son inverse. La transformation  $\mathbf{F}_1$  est une simple rotation afin de ramener des faces supérieures et inférieures du pentaèdre orientées selon la direction  $z'$ . Le calcul de son jacobien ainsi que son inverse ne pose pas de difficulté particulière.

La transformation  $\mathbf{F}_2$  peut s'exprimer sous forme séparée selon le formalisme  $\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N_J} \mathbf{J}_{\xi, \eta}^i \cdot \mathbf{J}_{\zeta}^i$ , dont les détails sont présentés en annexe 5.7.

Sous certaines hypothèses, il est également possible d'obtenir une représentation séparée de l'inverse du jacobien.

Cette approche de résolution en variables séparées, une fois les représentations séparées du jacobien et de son inverse déterminées, est tout à fait similaire du point de vue de la méthode à l'approche présentée au chapitre 2.

### 4.1.2 Approche continue

L'approche continue basée sur la géométrie différentielle est plus élégante car l'écriture du principe des travaux virtuels peut être formulée sur le problème continu. La géométrie différentielle est utilisée notamment dans le cadre des théories de coques classiques [Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959; Batoz, 1992; Reddy, 2004; Chapelle et Bathe, 2003; Patrick Muller, 1999; Niordson, 1985]. L'annexe 5.7 définit les outils et les notations

nécessaires à la résolution du problème d'élasticité 3D sur des domaines de types coques présentée dans la suite de ce chapitre.

## 4.2 Paramétrage de la géométrie

### 4.2.1 Paramétrage de la surface moyenne

Considérons tout d'abord la surface moyenne de la coque définie par son équation paramétrique  $\mathbf{x}_P(\xi, \eta)$  (voir figure 4.2) :

$$\mathbf{x}_P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X_P(\xi, \eta) \\ Y_P(\xi, \eta) \\ Z_P(\xi, \eta) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

$\mathbf{x}_P(\xi, \eta)$  est le vecteur des coordonnées cartésiennes de la surface moyenne en fonction des coordonnées paramétriques  $\xi$  et  $\eta$ .

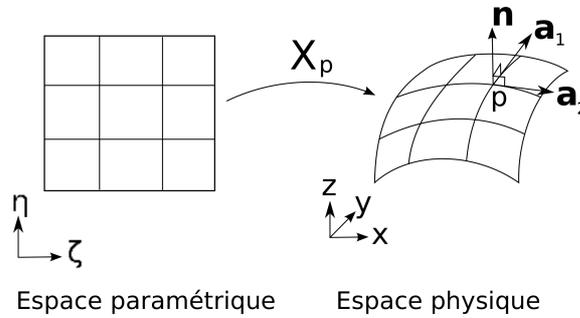


FIGURE 4.2 – Paramétrage de la surface moyenne

À partir de l'équation de la surface, il est aisé de définir les deux vecteurs tangents à la surface au point  $P$ , définissant la base covariante. Les vecteurs de la base covariante  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont définis comme étant respectivement la dérivée partielle de l'équation de la surface moyenne par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ .

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_{P,\xi}(\xi, \eta), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_{P,\eta}(\xi, \eta). \quad (4.3)$$

Le vecteur unitaire normal à la surface moyenne s'exprime facilement en fonction de  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}. \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Paramétrage du volume et séparation des variables

Considérons maintenant un point  $M$  appartenant au volume (voir figure 4.3), repéré dans l'espace par ses trois coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$  :

$$\mathbf{x}_M(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_P(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta). \quad (4.5)$$

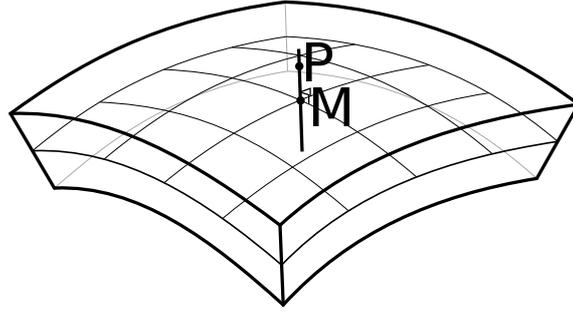


FIGURE 4.3 – Paramétrage du volume

La résolution d'un problème mécanique en variables d'espace séparées sur une géométrie de type coque conduit à chercher la solution sous la forme séparée suivante :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{\xi\eta}^i(\xi, \eta) \cdot u_{\zeta}^i(\zeta) \\ v_{\xi\eta}^i(\xi, \eta) \cdot v_{\zeta}^i(\zeta) \\ w_{\xi\eta}^i(\xi, \eta) \cdot w_{\zeta}^i(\zeta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{\xi\eta}^i \circ \mathbf{U}_{\zeta}^i. \quad (4.6)$$

### 4.3 Formulation du problème mécanique

Considérons un problème mécanique 3D en espace défini sur le domaine  $\Omega$ .

Le champs solution  $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$  doit satisfaire le principe des travaux virtuels :

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega = \iiint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_1\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma. \quad (4.7)$$

où  $\mathbb{K}$  est le tenseur d'élasticité 3D,  $\mathbf{f}_d$  les forces de volume, et  $\mathbf{F}_d$  les efforts surfaciques sur le domaine  $\partial_1\Omega$ .

Conformément à l'expression du déplacement 4.6, la déformation s'écrit en petites perturbations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right), \quad (4.8)$$

où :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} u_{\xi\eta,\xi}^i \cdot u_{\zeta}^i & u_{\xi\eta,\eta}^i \cdot u_{\zeta}^i & u_{\xi\eta}^i \cdot u_{\zeta,\zeta}^i \\ v_{\xi\eta,\xi}^i \cdot v_{\zeta}^i & v_{\xi\eta,\eta}^i \cdot v_{\zeta}^i & v_{\xi\eta}^i \cdot v_{\zeta,\zeta}^i \\ w_{\xi\eta,\xi}^i \cdot w_{\zeta}^i & w_{\xi\eta,\eta}^i \cdot w_{\zeta}^i & w_{\xi\eta}^i \cdot w_{\zeta,\zeta}^i \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

et :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-1} = \mathbf{F}_{\zeta}^{-1}. \quad (4.10)$$

Le gradient de la transformation inverse  $\mathbf{F}_{\zeta}^{-1}$  est défini en annexe 5.7.

### 4.4 Résolution avec la PGD

Pour résoudre le problème en variables d'espace séparées, la fonction test  $\mathbf{u}^*$  est exprimée sous la forme :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_{\zeta} + \mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_{\zeta}^*. \quad (4.11)$$

L'expression de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$  s'exprime de façon similaire à  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ .

L'enrichissement de  $\mathbf{u}$  avec un nouveau mode s'effectue de manière similaire à l'enrichissement d'un problème défini sur une géométrie plane (voir chapitre 2) : on suppose  $N$  modes déjà connus, et le  $(N + 1)^{\text{e}}$  est recherché sous la forme :

$$\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_N + \mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{\xi\eta}^i \circ \mathbf{U}_\zeta^i + \mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta. \quad (4.12)$$

La non-linéarité introduite par la représentation du nouveau mode  $\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta$  comme un produit est gérée de la même façon que pour les problèmes définis sur des géométries planes : les problèmes en  $\mathbf{R}_{\xi\eta}$  et  $\mathbf{S}_\zeta$  sont alternativement résolus dans un point fixe [Bognet *et al.*, 2012b; Ammar *et al.*, 2007].

Le problème à résoudre devient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta) \right) d\Omega \\ &= - \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \cdot \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N) \right) d\Omega \\ & \quad + \iiint_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_d) d\Omega + \iint_{\partial_1\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_d) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.13)$$

où les quantités  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbb{K}$ ,  $d\Omega$ ,  $d\Gamma$ ,  $\mathbf{f}_d$  et  $\mathbf{F}_d$  doivent être substituées par leur représentations séparées définies en annexe 5.7. L'ensemble des grandeurs  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbf{f}_d$  et  $\mathbf{F}_d$  sont supposées, sans perte de généralité, s'exprimer en un seul produit de fonctions du plan et de l'épaisseur.

**Résolution du problème en  $\mathbf{R}_{\xi\eta}$**  Pour résoudre le problème en  $\mathbf{R}_{\xi\eta}$ , on suppose  $\mathbf{S}_\zeta$  connu afin de calculer explicitement les intégrales sur la coordonnée  $\zeta$ . Le champ test  $\mathbf{u}^*$  devient :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_\zeta, \quad (4.14)$$

et le principe des travaux virtuels se reformule comme suit :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_\zeta) \cdot (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_\zeta) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta) \right) d\Omega \\ &= - \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_\zeta) \cdot (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_\zeta) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{\xi\eta}^i \circ \mathbf{U}_\zeta^i \right) \right) d\Omega \\ & \quad + \iiint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_\zeta) \cdot (\mathbf{f}_{d\xi\eta} \circ \mathbf{f}_{d\zeta}) \right) d\Omega \\ & \quad + \iint_{\partial_1\Omega} \left( (\mathbf{R}_{\xi\eta}^* \circ \mathbf{S}_\zeta) \cdot (\mathbf{F}_{d\xi\eta} \circ \mathbf{F}_{d\zeta}) \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.15)$$

**Résolution du problème en  $\mathbf{S}_\zeta$**  Pour résoudre le problème en  $\mathbf{S}_\zeta$ , l'ensemble des intégrales sur les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  sont effectuées car la fonction  $\mathbf{R}_{\xi\eta}$  est connue (précédemment calculée). Le champ test  $\mathbf{u}^*$  devient :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta^*, \quad (4.16)$$

et le principe des travaux virtuels se reformule comme suit :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta^*) \cdot (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_\zeta) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta) \right) d\Omega \\ &= - \iint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta^*) \cdot (\mathbb{K}_{\xi\eta} \circ \mathbb{K}_\zeta) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{\xi\eta}^i \circ \mathbf{U}_\zeta^i \right) \right) d\Omega \\ & \quad + \iint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta^*) \cdot (\mathbf{f}_{d\xi\eta} \circ \mathbf{f}_{d\zeta}) \right) d\Omega \\ & \quad + \iint_{\partial_1 \Omega} \left( (\mathbf{R}_{\xi\eta} \circ \mathbf{S}_\zeta^*) \cdot (\mathbf{F}_{d\xi\eta} \circ \mathbf{F}_{d\zeta}) \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le point fixe continue jusqu'à atteindre la convergence selon le même principe que pour les domaines plans (voir chapitre 2). L'enrichissement continue jusqu'à atteindre la précision voulue (voir chapitre 2).

## 4.5 Expression du tenseur d'élasticité pour les matériaux composites stratifiés

La base locale orthonormée (définie en annexe 5.7) est utilisée comme référence pour définir l'orientation des renforts dans les différents plis des matériaux stratifiés. Les vecteurs  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  appartiennent au plan tangent à la surface, et l'angle de rotation autour de  $\mathbf{n}$  entre les renforts du pli  $i$  et le vecteur  $\mathbf{t}_1$  est appelé  $\theta^i$ .

Le tenseur d'élasticité dans la base globale doit s'écrire sous forme séparée de façon à être compatible avec la résolution du problème. Son expression est la suivante :  $\mathbb{K} = \sum_{i=1}^p \mathbb{K}^i(\xi, \eta) \circ \mathbb{K}^i(\zeta)$ , où  $p$  est le nombre d'orientations différentes des plis dans l'empilement du stratifié.

Alors  $\mathbb{K}^i(\zeta)$  s'écrit :

$$\mathbb{K}^i(\zeta) = \delta^i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

où :

$$\delta^i = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta \in \text{ pli d'orientation } \theta^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.19)$$

$\mathbb{K}^i(\xi, \eta)$  s'écrit :

$$\mathbb{K}^i(\xi, \eta) = \overline{\mathbf{Q}}^T \mathbf{R}^{iT} \mathbb{K} \mathbf{R}^i \overline{\mathbf{Q}}, \quad (4.20)$$

où  $\overline{\mathbf{Q}}$  est la matrice de passage de la base locale orthonormée à la base cartésienne en notation de Voigt :

$$\overline{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} t_{1x}^2 & t_{2x}^2 & n_x^2 & 2t_{2x}n_x & 2t_{1x}n_x & 2t_{1x}t_{2x} \\ t_{1y}^2 & t_{2y}^2 & n_y^2 & 2t_{2y}n_y & 2t_{1y}n_y & 2t_{1y}t_{2y} \\ t_{1z}^2 & t_{2z}^2 & n_z^2 & 2t_{2z}n_z & 2t_{1z}n_z & 2t_{1z}t_{2z} \\ t_{1y}t_{1z} & t_{2y}t_{2z} & n_y n_z & (t_{2y}n_z + t_{2z}n_y) & (t_{1y}n_z + t_{1z}n_y) & (t_{1y}t_{2z} + t_{1z}t_{2y}) \\ t_{1x}t_{1z} & t_{2x}t_{2z} & n_x n_z & (t_{2x}n_z + t_{2z}n_x) & (t_{1x}n_z + t_{1z}n_x) & (t_{1x}t_{2z} + t_{1z}t_{2x}) \\ t_{1x}t_{1y} & t_{2x}t_{2y} & n_x n_y & (t_{2x}n_y + t_{2y}n_x) & (t_{1x}n_y + t_{1y}n_x) & (t_{1x}t_{2y} + t_{1y}t_{2x}) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$\mathbf{R}^i$  est la matrice de rotation pour le passage de la base principale du matériau à la base locale orthonormée en notation de Voigt :

$$\mathbf{R}^i = \begin{pmatrix} \cos(\theta^i)^2 & \sin(\theta^i)^2 & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta^i)\cos(\theta^i) \\ \sin(\theta^i)^2 & \cos(\theta^i)^2 & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta^i)\cos(\theta^i) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta^i) & \sin(\theta^i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta^i) & \cos(\theta^i) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta^i)^2 - \sin(\theta^i)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

et  $\mathbb{K}$  est le tenseur d'élasticité du pli composite défini dans sa base principale :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Cette représentation est adaptée pour des pièces développables, ou si les variations de métrique sont faibles et autorisent le drapage sans difficultés et sans déformations importantes du pli déposé. Par contre, dès que la métrique varie fortement, la déformation des plis devient importante, et le calcul des propriétés mécaniques locales du matériau doit être effectué de manière plus poussée [Boisse *et al.*, 1995; Allaoui *et al.*, 2011]. Cet aspect complexe en lui-même n'est pas développé ici. Nous supposons simplement que quelles que soient les propriétés locales du matériau, on peut les représenter sous la forme  $\mathbb{K} = \sum_{i=1}^p \mathbb{K}^i(\xi, \eta) \circ \mathbb{K}^i(\zeta)$ .

## 4.6 Exemples

### 4.6.1 Exemple de validation

#### 4.6.1.1 Définition du problème

Afin de valider l'approche décrite ci-dessus, la solution numérique calculée par le code de calcul dont le principe à été présenté précédemment est comparée avec la solution analytique du problème.

Le problème considéré est le suivant : un tube cylindrique de longueur infinie, de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$  est soumis à une pression unitaire sur sa face interne. La figure 4.4 montre une représentation d'une section du problème considéré.

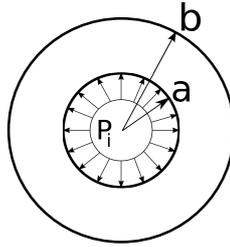


FIGURE 4.4 – Définition d'une section du problème considéré

Étant donné l'état de déformation plane dans le plan de la section du tube, une longueur arbitraire peut être considérée pour la résolution numérique en utilisant des conditions aux limites adaptées. Les dimensions ainsi que les coefficients matériau utilisés pour le problème sont définis en table 4.1.

$a$	$2 \text{ mm}$
$b$	$3 \text{ mm}$
$P_i$	$1 \text{ MPa}$
$E$	$150000 \text{ MPa}$
$\nu$	$0.3$

TABLE 4.1 – Paramètres géométriques et coefficients matériau

Afin d'utiliser la méthode décrite précédemment, une tranche d'épaisseur unitaire est modélisée. L'espace paramétrique est discrétisé par un maillage éléments finis. Celui-ci est constitué d'éléments quadrangulaires bilinéaires sur l'espace défini par  $\xi \in [0, 2\pi \cdot R_{moy}]$  et  $\eta \in [0, 1]$ , où  $R_{moy} = 2.5$ . Le maillage de l'épaisseur est réalisé avec des éléments 1D linéaires sur l'intervalle  $[-0.5, 0.5]$ .

L'équation paramétrique de la surface moyenne est donnée par la relation :

$$\begin{cases} X = \frac{R_{moy}}{2\pi} \sin\left(\frac{\xi}{R_{moy}}\right) \\ Y = \eta \\ Z = \frac{R_{moy}}{2\pi} \cos\left(\frac{\xi}{R_{moy}}\right) \end{cases} \quad (4.24)$$

Pour effectuer la résolution numérique, les conditions aux limites adéquates doivent être

imposées : la face interne est soumise à une pression unitaire, et les faces planes en  $y = 0$  et  $y = 1$  sont contraintes d'avoir un déplacement nul dans la direction  $y$ . Par ailleurs, les mouvements de solide rigide restant sont supprimés en imposant le déplacement nul d'un point d'un rayon orienté par l'axe  $z$  suivant la direction  $x$ , et le déplacement nul suivant  $z$  de deux points de deux rayons orientés par la direction  $x$ .

#### 4.6.1.2 Résultats

La solution analytique du problème est calculée en utilisant la mécanique des milieux continus. La solution est un déplacement purement radial de la forme :

$$u_r(r) = \frac{1 + \nu}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1 - 2\nu)(a^2 P_i r) + \frac{a^2 b^2 P_i}{r} \right]. \quad (4.25)$$

Pour la résolution du problème en variables d'espace séparées, une brève étude de convergence sur le maillage est effectuée. Le problème est résolu successivement pour trois discrétisations différentes (voir table 4.2 et figure 4.5), où  $N_\xi$ ,  $N_\eta$  et  $N_\zeta$  sont respectivement les nombres d'éléments dans la direction orthoradiale, la direction de l'axe du cylindre, et la direction de l'épaisseur.

	$N_\xi$	$N_\eta$	$N_\zeta$
MAILLAGE 1	8	2	2
MAILLAGE 2	16	2	4
MAILLAGE 3	32	2	8

TABLE 4.2 – Nombre d'éléments dans les différentes directions pour les trois maillages utilisés

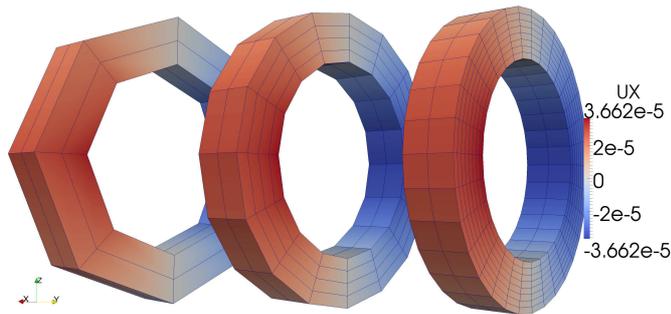


FIGURE 4.5 – Représentation 3D des trois maillages utilisés

Les résultats de l'approche 2D/1D sont comparés avec la solution analytique ainsi qu'avec la solution du problème résolu avec la méthode des éléments finis 3D sur les trois maillages. L'ensemble des résultats est synthétisé sur la figure 4.6.

Comme attendu, les solutions des modèle 2D/1D et 3D convergent vers la solution analytique. Cependant la solution 2D/1D converge plus rapidement, en effet, l'utilisation de l'approche basée sur la géométrie différentielle permet d'intégrer plus précisément les

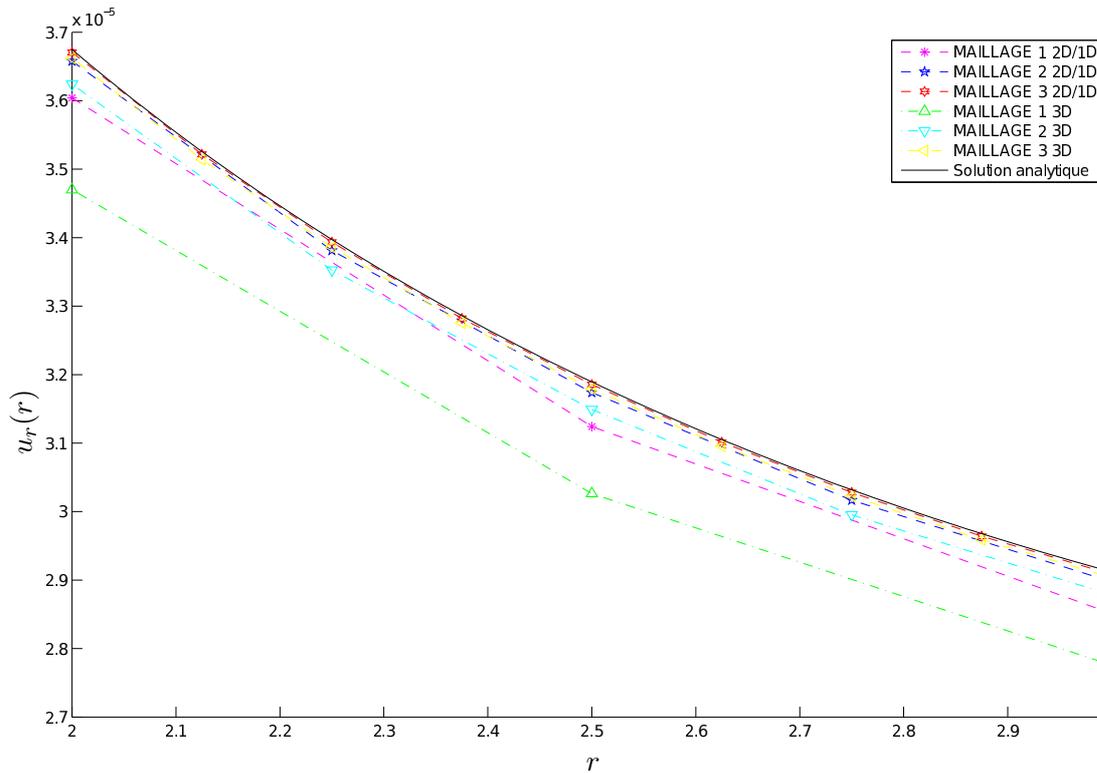


FIGURE 4.6 – Déplacement radial en fonction du rayon pour les 3 maillages (2D/1D et 3D) et pour la solution analytique

champs que l’approche 3D dont l’intégration est effectuée sur le modèle discrétisé.

Par ailleurs, la solution analytique s’exprime comme une unique fonction du rayon. La solution du problème résolu avec l’approche PGD est donc supposée atteindre la précision maximale en un seul mode, ce qui est effectivement observé. Les figure 4.7, 4.8 et 4.9 montrent les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  de l’unique mode de la solution calculée sur le MAILLAGE 3.

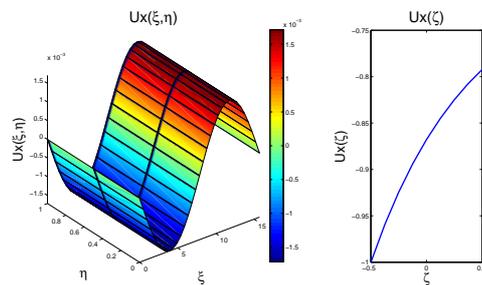
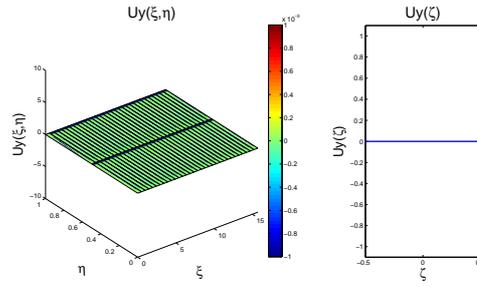
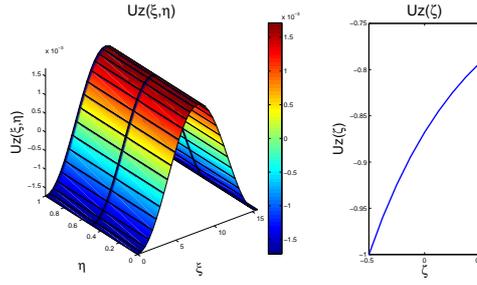


FIGURE 4.7 – Mode 1 pour la composante  $u$  calculée sur le MAILLAGE 3

Cet exemple illustre donc parfaitement la validité de l’approche présentée, ainsi que son excellente convergence en fonction du maillage du fait de l’intégration des opérateurs en tenant compte des courbures locales et de la métrique issues des résultats de géométrie différentielle.

FIGURE 4.8 – Mode 1 pour la composante  $v$  calculée sur le MAILLAGE 3FIGURE 4.9 – Mode 1 pour la composante  $w$  calculée sur le MAILLAGE 3

## 4.6.2 Exemple de pièce composite stratifiée

### 4.6.2.1 Définition du problème

Le problème considéré est identique au problème défini dans la partie 4.6.1 pour la géométrie. Par contre, le matériau considéré est maintenant un composite stratifié. La séquence d'empilement est de  $[90, 45, 0, -45]_s$  dans la base locale orthonormée (voir figure 4.10), et l'épaisseur de chaque pli est de 0.125 mm. L'angle défini par la séquence d'empilement représente l'angle entre la direction des fibres, et le vecteur  $\mathbf{t}_1$  de la base orthonormée. La table 4.3 donne les coefficients matériau d'un pli dans sa base locale propre. L'espace paramétrique  $(\xi, \eta)$  est discrétisé par un maillage régulier de quadrangles bilinéaires tel que  $N_\xi = 40$  et  $N_\eta = 2$ , et chaque pli est discrétisé par 10 éléments 1D linéaires, ce qui fait un total de  $N_\zeta = 80$ .

$E_1$	$120 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_2$	$8.9 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_3$	$8.9 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$\nu_{12}$	0.35
$\nu_{13}$	0.35
$\nu_{23}$	0.32
$G_{12}$	$4.5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{13}$	$4.5 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{23}$	$5.3 \cdot 10^3 \text{ MPa}$

TABLE 4.3 – Coefficients matériau d'un pli composite

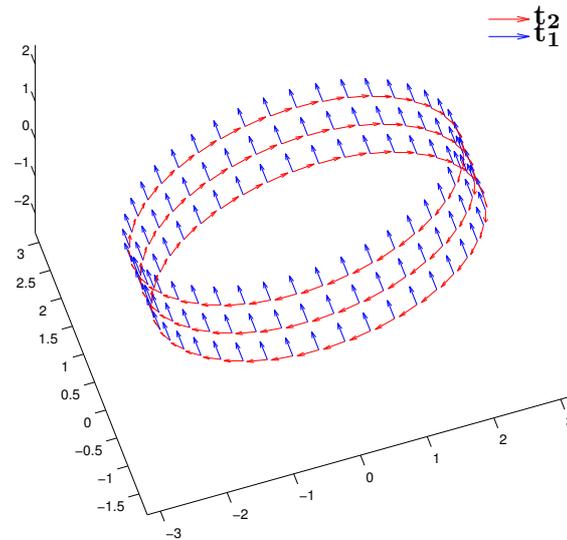


FIGURE 4.10 – Base locale orthonormée

#### 4.6.2.2 Résultats

La forme du déplacement est très similaire à celle du déplacement calculé pour un matériau isotrope, cependant de petites perturbations sont visibles sur le déplacement radial (voir figure 4.11).

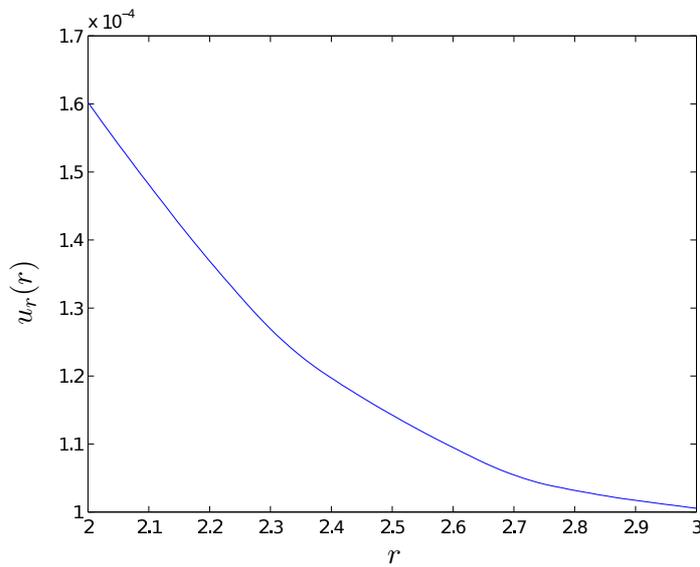
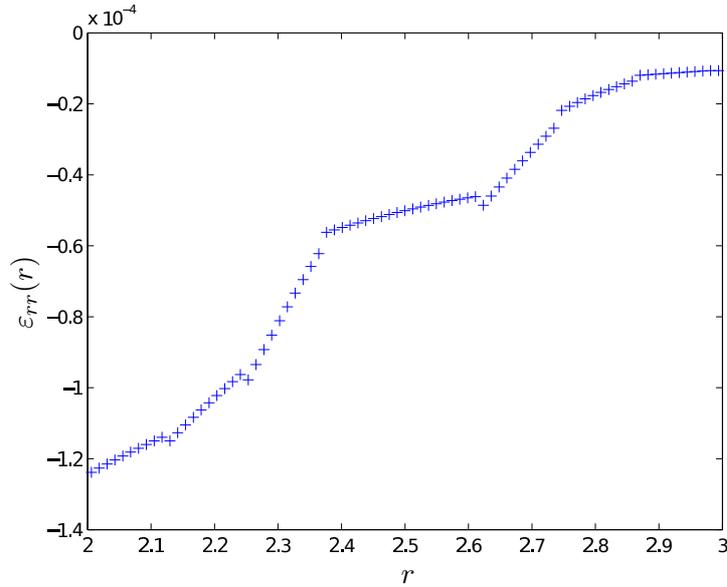


FIGURE 4.11 – Déplacement radial le long d'un rayon

Le calcul de la déformation  $\varepsilon_{rr}$  permet de mieux voir l'effet de l'empilement. La déformation  $\varepsilon_{rr}$  est tracée sur la figure 4.12.

FIGURE 4.12 –  $\varepsilon_{rr}$  le long d'un rayon

### 4.6.3 Exemple de simulation sur une géométrie complexe

#### 4.6.3.1 Définition du problème

Considérons un tore creux d'épaisseur  $h$  dont la section est en forme de fleur, avec un angle d'hélice, représenté figure 4.13.

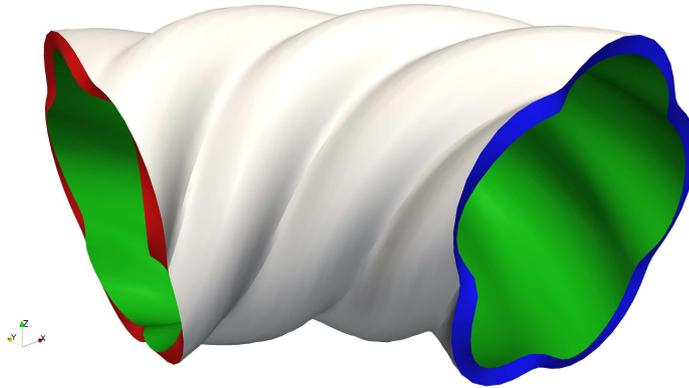


FIGURE 4.13 – Géométrie considérée

L'équation paramétrique de la surface moyenne est donnée ci dessous, et les valeurs des coefficients  $r$ ,  $R$ ,  $e$  et  $h$  est donnée par la table 4.4 :

$$\begin{cases} X = (r + R \cdot \cos(\xi + 2\eta) + e \cdot \cos(6\xi))\cos(\eta) \\ Y = (r + R \cdot \cos(\xi + 2\eta) + e \cdot \cos(6\xi))\sin(\eta) \\ Z = R \cdot \sin(\xi + 2\eta) + e \cdot \sin(6\xi) \end{cases} \quad (4.26)$$

Le chargement appliqué sur la pièce est une pression unitaire sur la surface interne du tore. Les conditions aux limites en déplacement sont les suivantes : les sections opposées

R		2
r		4
e		0.15
h		0.2

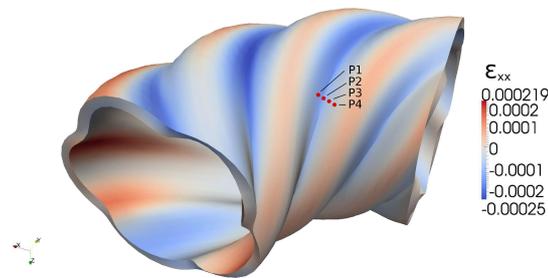
TABLE 4.4 – Valeurs des dimensions géométriques

sont contraintes d’avoir un déplacement nul dans la direction normale à la face. Un point de la pièce est contraint d’avoir un déplacement nul dans la direction  $z$  afin de supprimer le dernier mouvement de solide rigide.

Le maillage utilisé pour le problème 2D est un maillage régulier de  $80 \times 40$  éléments quadrangulaires, et le maillage de l’épaisseur est constitué de 40 éléments 1D linéaires.

#### 4.6.3.2 Résultats

La figure 4.14 représente la composante  $\sigma_{xx}$  de la déformation.

FIGURE 4.14 –  $\epsilon_{xx}$  sur la pièce

Comme on peut s’y attendre, la solution de ce problème est fortement tridimensionnelle. La figure 4.15 montre la dépendance du déplacement en fonction de la coordonnée de l’épaisseur  $\zeta$  pour les points représentés sur la figure 4.14. Ceci illustre l’intérêt de la méthode présentée ici par rapport aux théories de plaques et coques qui ne sont pas prévues pour représenter un champ de déplacement aussi riche que celui rencontré ici.

## 4.7 Conclusion

L’approche 3D est motivée par la difficulté de formuler des hypothèses cinématiques adéquates et surtout universelles, permettant de résoudre n’importe quel problème défini sur une géométrie de plaque ou de coque. Comme il a été montré dans le cas de l’exemple 4.6.1, même certains problèmes simples peuvent difficilement être résolus efficacement avec des théories de plaques ou de coques.

Par ailleurs, l’approche présentée dans ce chapitre permet de résoudre efficacement des problèmes d’élasticité 3D sur des pièces de types coques. L’utilisation de la géométrie différentielle permet d’intégrer efficacement les opérateurs nécessaires à la résolution des problèmes 1D et 2D issus de la séparation des variables d’espace, et conduit à une convergence en maillage rapide.

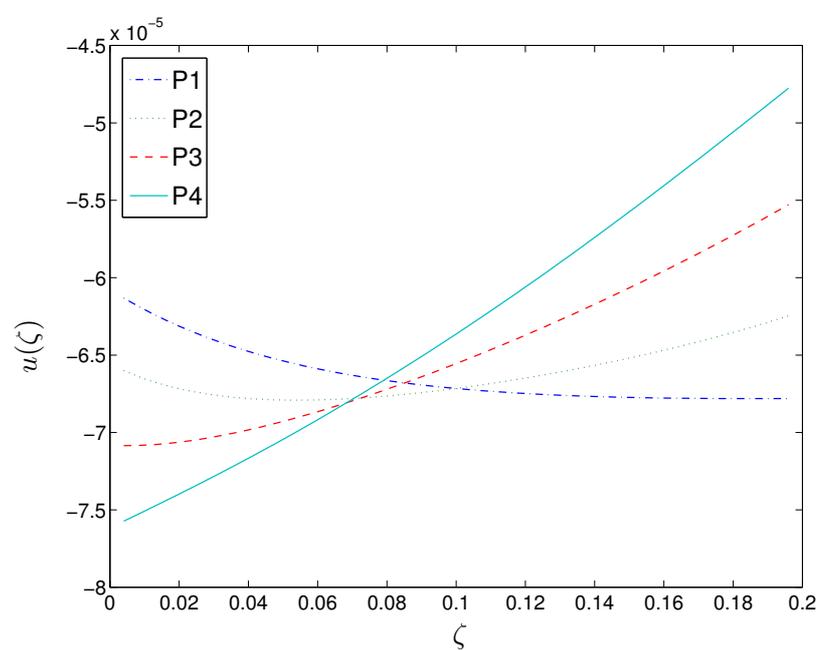


FIGURE 4.15 – Dépendance en  $\zeta$  de la composante  $u$  du déplacement pour les trois points définis sur la figure 4.14

# Chapitre 5

## Abaques numériques : résolution de problèmes multi-paramétriques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Paramétrisation d'une orientation d'un pli</b>	<b>79</b>
<b>5.2</b>	<b>Paramétrisation d'une épaisseur</b>	<b>82</b>
<b>5.3</b>	<b>Paramétrisation d'un coefficient matériau</b>	<b>84</b>
<b>5.4</b>	<b>Autres paramètres additionnels</b>	<b>86</b>
<b>5.5</b>	<b>Exemples multi-paramètres/Abaques numériques</b>	<b>86</b>
5.5.1	Pièce en matériau isotrope quelconque	87
5.5.2	Étude paramétrique d'une éprouvette entaillée	89
<b>5.6</b>	<b>Post-traitement et reconstruction</b>	<b>91</b>
5.6.1	Enveloppe	91
5.6.2	Construction d'un point sur un espace paramétrique	92
5.6.3	Reconstruction à la volée sur une plateforme légère	92
5.6.4	Optimisation	93
<b>5.7</b>	<b>Limitations - Conclusions</b>	<b>94</b>

---

Dans cette partie, des problèmes 3D seront résolus en utilisant la représentation détaillée au chapitre 2. Des paramètres supplémentaires seront inclus dans le problème en tant que coordonnées supplémentaires. La solution du problème sera alors exprimée sous la forme de produits tensoriels d'espaces.

La représentation séparée des quantités et des inconnues est propice à l'ajout de paramètres additionnels. En effet, la représentation séparée permet entre autre d'éviter la "malédiction de la dimensionnalité" et autorise la résolution de modèles définis dans des espaces multi-dimensionnels. Les problèmes à résoudre restent donc en dimension petite (1 ou 2). Certains paramètres du modèle dont on souhaite connaître l'influence sur la solution du problème considéré peuvent facilement être pris en compte comme des coordonnées supplémentaires du problème. La solution reconstruite du problème vit alors dans un espace dont la dimension est élevée (4 ou plus dans le cas d'un problème 3D en espace, avec un ou plusieurs paramètres supplémentaires), et doit être post-traitée avec des outils adaptés pour en extraire les informations relatives à la quantité d'intérêt recherchée. La solution multidimensionnelle constitue alors une abaque numérique de la solution d'une famille de problèmes sur un ou plusieurs intervalles de paramètres.

## 5.1 Paramétrisation d'une orientation d'un pli composite

Dans les procédés de mise en forme, il existe une certaine variabilité. Généralement, les simulations sont effectuées sur les pièces nominales, sans forcément prendre en compte cette variabilité.

Dans le cas de stratifiés, une des sources de variabilité est l'orientation des plis de matériau unidirectionnel. Nous présentons ici une méthode permettant de prendre en compte la variabilité de l'orientation des plis du stratifié. Pour plus de détails, lire l'article [Bognet *et al.*, 2012b].

Considérons une pièce composite (figure 5.1), dont la direction des renforts fibreux de certains plis est paramétrée angulairement. La solution est alors cherchée comme une somme de produits de fonctions du plan, de l'épaisseur, et des paramètres angulaires définissant l'orientation des renforts (équation 5.1), où les directions des renforts sont des coordonnées supplémentaires du problème. Il s'agit d'un problème à résoudre dans un espace de dimension 5, que la PGD permet de résoudre à faible coût. L'utilisation de méthodes classiques pour résoudre ce type de problème est proscrite du fait de son coût de calcul élevé, car elle implique de résoudre autant de problèmes 3D qu'il y a de combinaisons possibles d'orientations pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

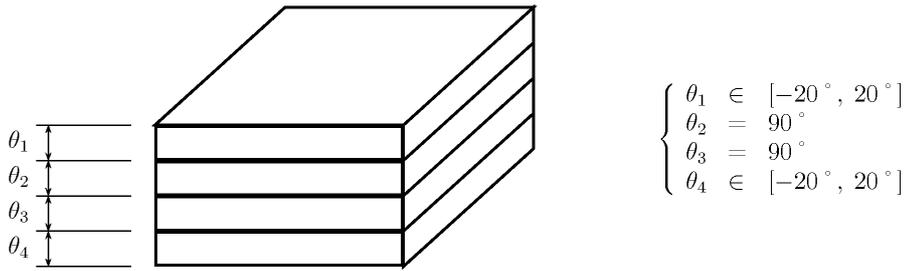


FIGURE 5.1 – Exemple de cas traité : plaque stratifiée paramétrée

$$\mathbf{u}(x, y, z, \theta_1, \theta_2) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_{\theta_1}^i(\theta_1) \circ \mathbf{U}_{\theta_2}^i(\theta_2) \quad (5.1)$$

Les paramètres matériaux sont alors exprimés en fonction de  $z$ , et de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

$$\begin{aligned} K_{ij}(z, \theta_1, \theta_2) &= \sum_{m=1}^2 Z^m(z) \cdot \prod_{l=1}^2 K_{ij}^l \\ \boldsymbol{\alpha}(z, \theta_1, \theta_2) &= \sum_{m=1}^2 Z^m(z) \cdot \prod_{l=1}^2 \alpha_{ij}^l \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} Z^m(z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \text{pli } m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ K_{ij}^l &= \begin{cases} K_{ij}^l(\theta_l) & \text{si } m = l \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_{ij}^l &= \begin{cases} \alpha_{ij}^l(\theta_l) & \text{si } m = l \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les  $K_{ij}^l(\theta_l)$  sont définis par rotation de la base principale du matériau d'un angle  $\theta_l$  :

$$K_{ij}^l(\theta_l) = R^T(\theta_l) \cdot \mathbb{K} \cdot R(\theta_l), \quad (5.3)$$

où  $R(\theta_l)$  est la matrice de rotation de changement de base définie par :

$$R(\theta_l) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_l) & \sin^2(\theta_l) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\theta_l) \\ \sin^2(\theta_l) & \cos^2(\theta_l) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\theta_l) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_l) & -\sin(\theta_l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_l) & \cos(\theta_l) & 0 \\ \sin(2\theta_l)/2 & -\sin(2\theta_l)/2 & 0 & 0 & 0 & \cos(2\theta_l) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

et les  $\alpha_{ij}^l(\theta_l)$  sont définis par :

$$\alpha_{ij}^l(\theta_l) = R'^T(\theta_l) \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot R'(\theta_l), \quad (5.5)$$

où :

$$R'(\theta_l) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_l) & \sin(\theta_l) & 0 \\ \sin(\theta_l) & \cos(\theta_l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Les  $\theta_l$  sont définis sur un intervalle choisi à priori  $[\theta_l^{\min}; \theta_l^{\max}]$ . Ici le but est d'évaluer les conséquences sur la géométrie et les contraintes internes d'une perturbation de l'orientation d'un pli par rapport au nominal. L'intervalle  $[\theta_l^{\min}; \theta_l^{\max}]$  est donc restreint autour de l'orientation nominale.

Avec les valeurs de coefficients matériaux donnés par le tableau 3.1 (chapitre 3), la valeur des  $K_{ij}^l(\theta_l)$  est donnée par la figure 5.2 pour  $\theta_l \in [-20^\circ; 20^\circ]$  et par la figure 5.3 pour  $\theta_l \in [0^\circ; 180^\circ]$ .

Ainsi, il est possible de choisir  $\theta_l \in [0; 180^\circ]$ , dans ce cas le calcul est effectué pour n'importe quelle orientation du pli. Un tel calcul peut être effectué pour des pièces avec un nombre de plis pas trop important, et l'ensemble des orientations des plis du stratifié comme paramètres. L'empilement est ensuite choisi à posteriori avec l'aide de l'abaque calculée. Pour garder un nombre de paramètre raisonnable, et pour conserver la symétrie de l'empilement par exemple, il est possible de paramétrer différents plis avec la même coordonnée.

Pour la résolution, la formulation faible prend en compte les coefficients matériaux des plis paramétrés dans la dimension paramétrique qui leur est associée.

La partie du membre de gauche de la formulation faible associée aux plis paramétrés s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{41} \sum_{m=1}^2 \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot Z^m \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \cdot \prod_{l=1}^2 \int_{\theta_l} (t_{c_i} \cdot K_{ij}^l(\theta_l) \cdot t_{d_i}) d\theta_l. \quad (5.7)$$

Les plis dont l'orientation n'est pas paramétrée sont traités comme décrit dans le chapitre 2, en intégrant l'unité sur les dimensions paramétriques. Le membre de gauche de la

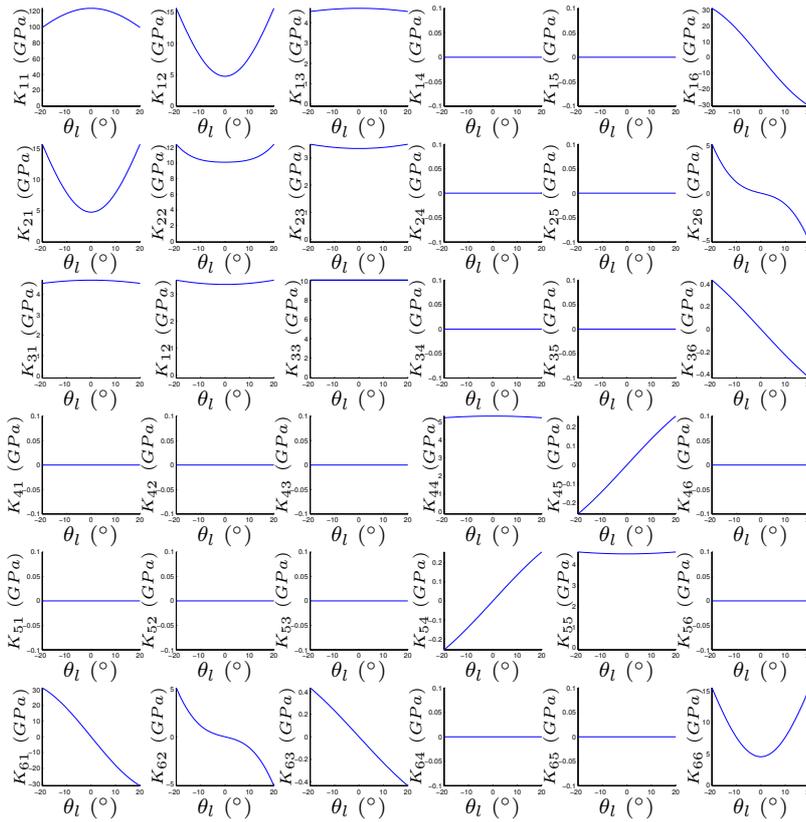


FIGURE 5.2 – Évolution du tenseur des coefficients élastiques en fonction de l'angle  $\theta_l \in [-20^\circ; 20^\circ]$

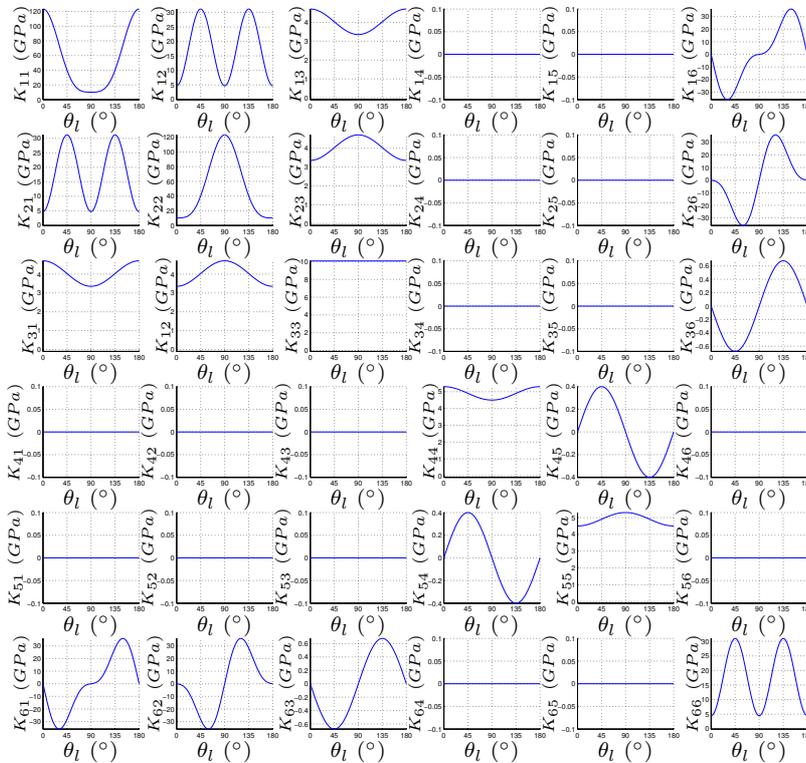


FIGURE 5.3 – Évolution du tenseur des coefficients élastiques en fonction de l'angle  $\theta_l \in [0^\circ; 180^\circ]$

formulation faible associée aux plis non paramétrés s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \cdot \prod_{l=1}^2 \int_{\theta_l} (t_{c_i} \cdot t_{d_i}) d\theta_l. \quad (5.8)$$

Pour résoudre ce problème à deux plis paramétrés, il est donc nécessaire d'assembler 123 matrices ( $41 \times 3$ ) pour le problème 2D et 123 matrices pour chacun des trois problèmes 1D (en  $z$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_4$ ).

Pour les calculs thermoélastiques, les forces volumiques doivent également être exprimées en fonction des paramètres d'orientation adéquats en fonction des plis. Le détail n'est pas développé car il ne présente pas de difficultés.

On simule ensuite le problème de refroidissement uniforme de la plaque (de  $180^\circ\text{C}$  à  $20^\circ\text{C}$ ) représentatif du refroidissement de la pièce en fin de fabrication. On obtient une solution dans un espace de dimension 5, il ne reste qu'à particulariser la solution en fixant les angles  $\theta_1$  et  $\theta_4$  aux valeurs voulues et on obtient alors par post-processing la solution 3D du problème associé (voir figure 5.4).

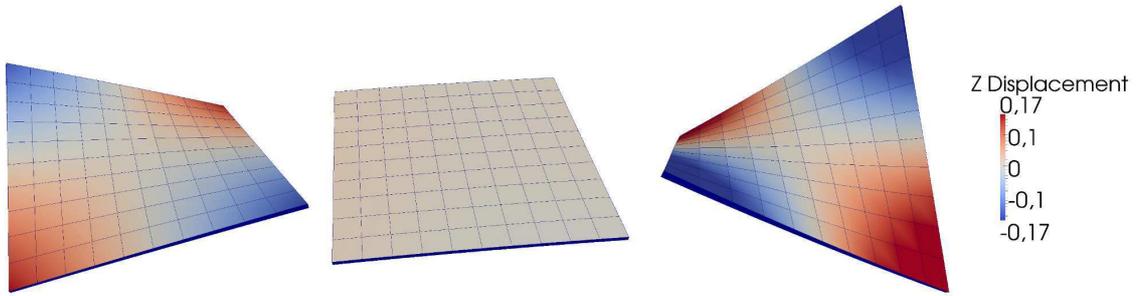


FIGURE 5.4 – Déformée de la pièce en fonction de l'empilement. De gauche à droite :  $[0,90,90,20]$ ,  $[0,90,90,0]$ ,  $[10,90,90,-20]$

## 5.2 Paramétrisation d'une épaisseur

Dans cette partie, on se propose d'effectuer un calcul de structure sur une plaque, dont l'épaisseur n'est pas définie a priori. Le calcul sera alors effectué pour une épaisseur  $e$  quelconque comprise dans l'intervalle défini. La solution du problème sera alors cherchée sous la forme [Leygue et Verron, 2010] :

$$\mathbf{u}(x, y, z, e) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_e^i(e). \quad (5.9)$$

La coordonnée  $z'$  de l'épaisseur réelle sera donnée par :  $z' = B \cdot z$ , où  $z \in [0, 1]$ . Il en résulte alors une homothétie de l'épaisseur de la pièce, de facteur  $B$ .

La dérivation par rapport à la coordonnée  $z'$  s'écrit alors en fonction de la dérivée par rapport à la coordonnée  $z$  de la façon suivante :

$$\frac{d}{dz'} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{dz}{dz'} \quad (5.10)$$

or,  $z' = B \cdot z$ , donc

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{1}{B} \quad (5.11)$$

d'où, l'expression de la composition des dérivées :

$$\frac{d}{dz'} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{1}{B}. \quad (5.12)$$

enfin :

$$dz' = B \cdot dz \quad (5.13)$$

La résolution du problème en 4 dimensions est ensuite effectuée de manière similaire à celle présentée en annexe 5.7.

Considérons une éprouvette de forme parallélépipédique d'épaisseur  $B$ , à moitié entaillée en son milieu, et soumise à une force de traction sur sa face supérieure. La symétrie du problème par rapport au plan de la fissure permet de conserver uniquement la moitié du problème pour la résolution (voir figure 5.5).

Le problème 2D est défini par le plan  $(x, y)$ , et le problème 1D dans la direction  $z$ . L'intégration de la force surfacique  $\sigma$  doit également prendre en compte le changement de variable de l'épaisseur. Celle-ci ne pose pas de difficulté particulière.

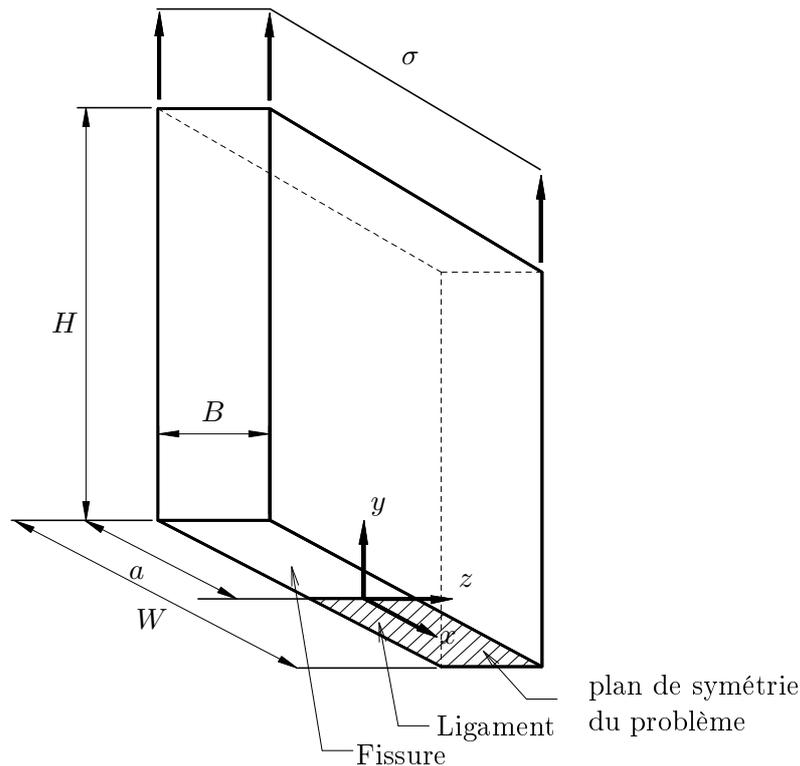


FIGURE 5.5 – Présentation du problème à épaisseur paramétrée

Le problème de l'éprouvette entaillée est alors résolu pour une épaisseur quelconque comprise dans l'intervalle donné par le tableau 5.1. La solution peut alors être reconstruite pour n'importe quelle valeur de l'épaisseur. La figure 5.6 montre le déplacement suivant la direction  $z$  pour plusieurs valeurs du paramètre d'épaisseur  $B$ .

$H$	$6 \cdot 10^{-3}m$
$a$	$1 \cdot 10^{-3}m$
$W$	$2 \cdot 10^{-3}m$
$\sigma$	$1MPa$
$E$	$207 GPa$
$\nu$	$0.3$
$B$	$[1 \cdot 10^{-4}m; 1m]$

TABLE 5.1 – Dimensions de l'éprouvette et intervalles de valeurs

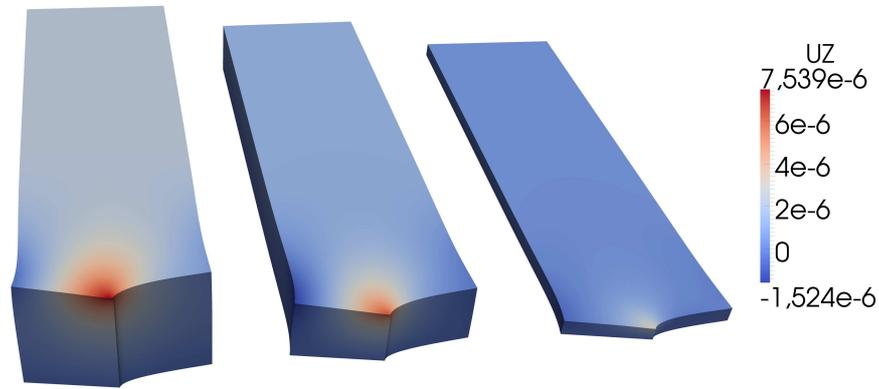


FIGURE 5.6 – Déformée de l'éprouvette entaillée pour 3 valeurs de l'épaisseur

### 5.3 Paramétrisation d'un coefficient matériau

La paramétrisation d'un coefficient matériau se fait de la même façon que la paramétrisation d'un angle d'orientation d'un pli composite présenté en 5.1.

Dans cette partie, on se propose de paramétrer le coefficient de Poisson pour un matériau isotrope. On rappelle le tenseur d'élasticité en notations de Voigt :

$$\mathbb{K} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Pour simplifier les notations, il est aisé de représenter le tenseur comme un produit d'un tenseur qui dépend de  $E$  et d'un tenseur qui dépend de  $\nu$  :  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_E \circ \mathbb{K}_\nu$ , où :

$$\mathbb{K}_\nu = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

et :

$$\mathbb{K}_E = \begin{pmatrix} E & E & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

On cherchera alors la solution du problème sous la forme séparée suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, z, \nu) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_\nu^i(\nu). \quad (5.17)$$

Pour la résolution, la partie  $\mathbb{K}_E$  est conservée dans le problème en  $z$  comme défini dans le chapitre 2, et la partie  $\mathbb{K}_\nu$  est intégrée séparément dans la dimension correspondant au problème paramétrique en  $\nu$ . La représentation de  $\mathbb{K}_\nu$  est donnée en figure 5.7.

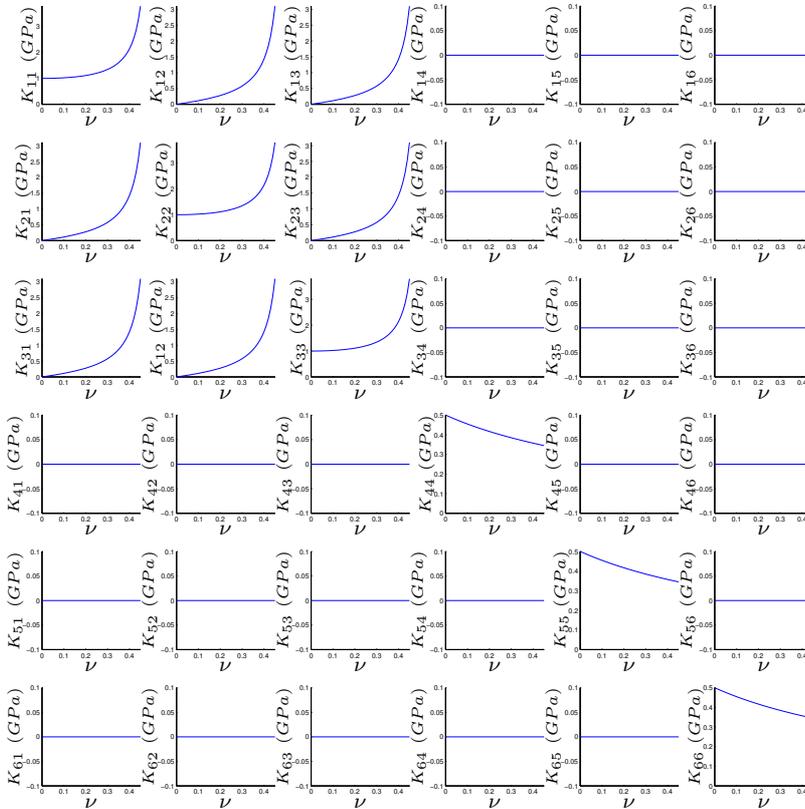


FIGURE 5.7 – Évolution du tenseur des coefficients élastiques  $\mathbb{K}_\nu$  en fonction de  $\nu$

La résolution du problème en 4 dimensions se fait de manière similaire aux exemples précédents.

Considérons le problème de l'éprouvette entaillée, similaire à celui défini dans la partie 5.2, mais cette fois, l'épaisseur est fixe, et le coefficient de Poisson  $\nu$  est ajouté comme coordonnée supplémentaire. La discrétisation de la valeur du coefficient de Poisson est effectuée par 44 éléments linéaires, sur l'intervalle  $\nu \in [0, 0.45]$ .

La figure 5.8 présente la solution du problème particularisé pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson.

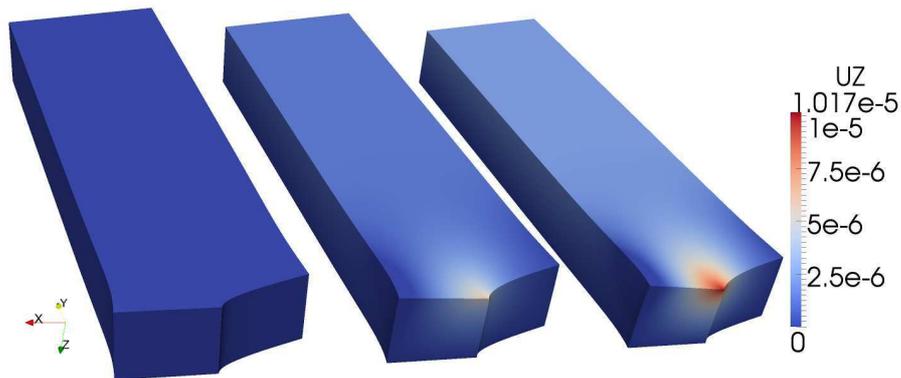


FIGURE 5.8 – Déformée de l'éprouvette entaillée pour 3 valeurs du coefficient de Poisson. De gauche à droite :  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\nu = 0.45$

## 5.4 Autres paramètres additionnels

Les exemples de paramètres additionnels présentés ici ne représentent pas de façon exhaustive les possibilités de la méthode. En effet, de nombreux autres types de paramètres peuvent être intégrés aux simulations.

Par exemple, le chargement peut être mobile dans le temps, ou dépendre d'un ou plusieurs autres paramètres. Dans ce cas, les paramètres peuvent être introduits dans des dimensions supplémentaires. La raideur de la structure est identique pour l'ensemble des paramètres, seul le second membre de chargement dépend des coordonnées supplémentaires.

## 5.5 Exemples multi-paramètres/Abaques numériques

Les simulations paramétriques sont d'autant plus intéressantes qu'elles intègrent plusieurs paramètres. En effet, si l'on souhaite étudier l'influence d'un seul paramètre, une méthode de résolution directe pour plusieurs valeurs du paramètre est encore possible, bien qu'assez coûteuse. Par contre, si l'on souhaite déterminer l'influence de plusieurs paramètres, la campagne de calcul devient très rapidement beaucoup trop lourde, car de très nombreuses simulations doivent être effectuées pour couvrir l'ensemble des espaces paramétriques. De plus, l'échantillonnage optimal est loin d'être évident.

Avec l'approche en variables séparées utilisée ici, l'ajout de paramètres ne représente pas un surcoût important, car il n'est nécessaire de résoudre que des problèmes 1D sup-

plémentaires à chaque enrichissement. La représentation sous forme de modes utilisée avec la PGD est adaptée car elle permet une description compacte d'un ensemble solution très riche.

### 5.5.1 Abaque numérique pour une pièce en matériau isotrope quelconque

L'idée ici est d'exploiter les paramétrages proposés dans les parties précédentes pour calculer une abaque numérique pour une famille de pièces dont le matériau n'est pas défini à priori. On introduit donc  $\nu$  et  $E$  comme des paramètres dans la simulation. Par conséquent, la simulation est réalisée pour n'importe quel matériau isotrope dont les coefficients matériaux sont inclus dans les intervalles définis à priori. Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, l'introduction du module d'Young  $E$  comme paramètre supplémentaire n'est pas nécessaire car la solution en déplacement est linéaire en fonction de  $\frac{1}{E}$ . Cependant, pour des facilités de post-traitement, le paramétrage de  $E$  est conservé dans l'exemple traité ici.

On souhaite pouvoir optimiser la pièce en fonction du matériau, il est donc nécessaire d'introduire un paramètre dimensionnel à la pièce. Un paramètre d'épaisseur variable comme décrit dans la partie 5.2 est introduit sur une partie de la pièce (voir figure 5.9).

On cherchera donc la solution du problème sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, z, E, \nu, e) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_E^i(E) \circ \mathbf{U}_\nu^i(\nu) \circ \mathbf{U}_e^i(e), \quad (5.18)$$

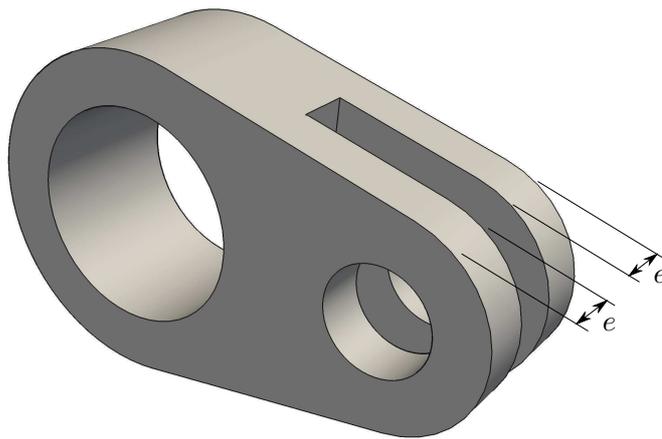


FIGURE 5.9 – Géométrie de la pièce utilisée

La simulation en 6 dimensions est effectuée, en utilisant les éléments décrits dans les parties 5.2 et 5.3. Le chargement appliqué représente un état de contrainte de service, il est décrit par la figure 5.10.

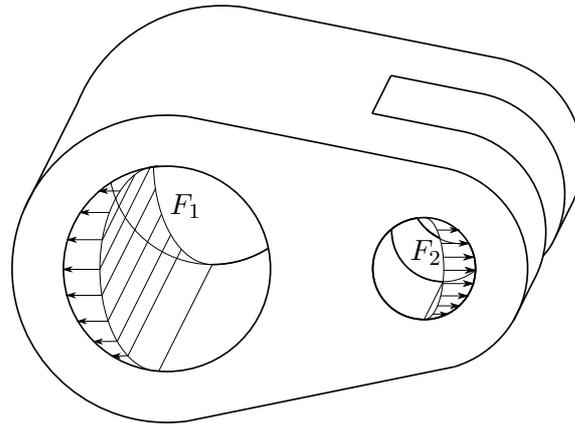


FIGURE 5.10 – Description du chargement sur la pièce paramétrée

Il reste ensuite à choisir le matériau et optimiser la pièce par post-processing (voir figure 5.11).

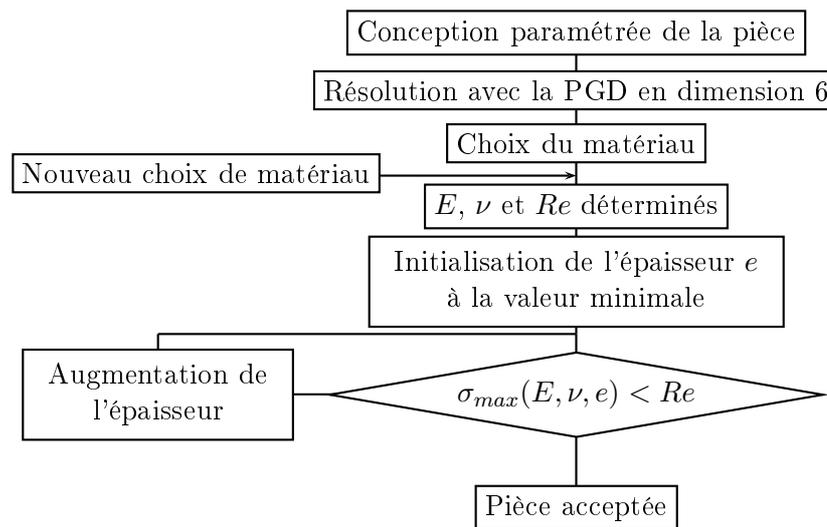


FIGURE 5.11 – Optimisation de la pièce par post-processing

Une fois la simulation effectuée, le matériau choisi et l'optimisation effectuée, il est possible à tout moment de changer le matériau et d'effectuer à nouveau l'optimisation sans avoir à effectuer une nouvelle simulation.

En pratique, pour un cas industriel où des facteurs d'approvisionnement, économiques (fluctuation du prix des matériaux) peuvent varier rapidement, l'utilisation d'une approche telle que celle présentée ici peut permettre d'être beaucoup plus réactif et augmente la flexibilité de la production des pièces.

La figure 5.12 présente la pièce optimisée pour deux matériaux différents. Les coefficients matériaux utilisés sont donnés dans le tableau 5.2.

	Acier	Aluminium
$E$	200GPa	70GPa
$\nu$	0.3	0.35
$Re$	350MPa	200MPa

TABLE 5.2 – Coefficients matériaux utilisés pour l’acier et l’aluminium

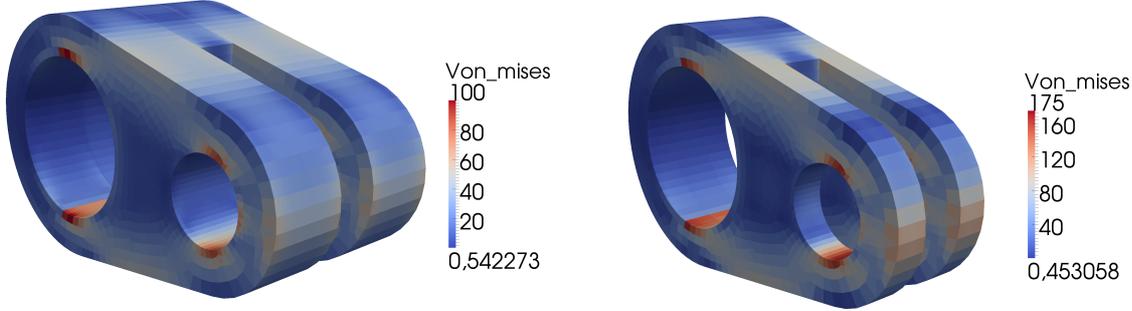


FIGURE 5.12 – Pièce optimisée pour deux matériaux différents : aluminium à gauche et acier à droite

### 5.5.2 Abaque numérique pour l’étude paramétrique d’une éprouvette entaillée

L’exemple suivant consiste à étudier la criticité d’une fissure dans une éprouvette en fonction de son épaisseur et du coefficient de Poisson du matériau. La mécanique linéaire de la rupture est couramment utilisée et permet de calculer les taux de restitution d’énergie sur une solution élastique.

Nous proposons ici de résoudre un problème d’élasticité sur une éprouvette entaillée (défini en 5.5) pour n’importe quelle épaisseur de l’éprouvette, ainsi que pour n’importe quelle valeur de coefficient de Poisson.

La solution est cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, \nu, B) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_\nu^i(\nu) \circ \mathbf{U}_B^i(B). \quad (5.19)$$

Le post-processing de cette solution multidimensionnelle permet de calculer des indicateurs de criticité et de propagation de la fissure en mode  $I$  en fonction du paramètre d’épaisseur  $B$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ . Les coordonnées paramétriques  $B$  et  $\nu$  sont choisies respectivement dans les intervalles  $[0.1, 10]$  et  $[0, 0.45]$ , et discrétisées par 10 (répartition logarithmique des nœuds) et 45 (répartition linéaire des nœuds) éléments finis 1D linéaires.

L’intégrale  $J(z)$  est calculée le long de l’abscisse curviligne  $s$  du front de fissure en utilisant un domaine d’intégration équivalent proposé par [Li *et al.*, 1985] et [Shih *et al.*, 1986] :

$$J(s) \approx J_{vol} = \frac{\Delta_a}{A_c} \iiint_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dV, \quad (5.20)$$

où  $W$  représente la densité d'énergie de déformation,  $\delta_{1i}$  le symbole de Kronecker,  $\Delta_a$  l'extension virtuelle unitaire de la fissure au point d'abscisse curviligne  $s$ .  $A_c$  représente l'aire virtuellement créée par l'extension virtuelle de la fissure, et  $q_1$  est une fonction de pondération qui varie continument de 1 à 0 à l'intérieur de la  $\Delta_a$  (voir figure 5.13). L'ensemble des champs sont exprimés dans le système d'axe local  $(x_1, x_2, x_3)$ , où  $x_3$  est tangent au front de fissure. Dans le cas présenté, le système d'axes ne dépend pas de  $s$  car le front de fissure est parfaitement rectiligne. Le volume d'intégration  $V$  englobe la fissure d'une face à l'autre et sa largeur est  $\Delta_s$ .

Cette approche volumique est adaptée à la méthode des éléments finis, car elle permet de calculer  $J(s)$  sous la forme d'une intégrale de volume, sans forcément inclure le voisinage proche de la singularité difficile à représenter avec l'interpolation des éléments finis. L'ensemble des détails est explicité dans [Giner *et al.*, 2012].

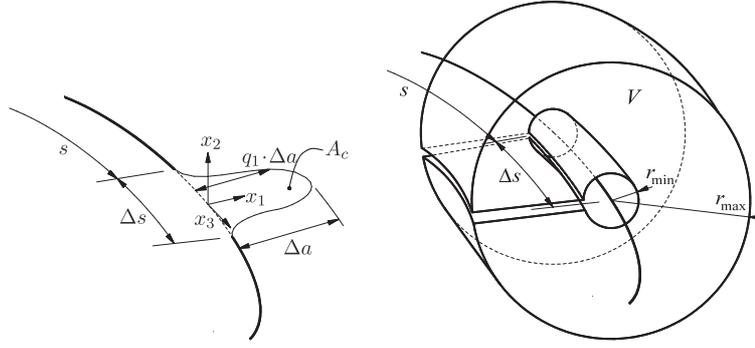


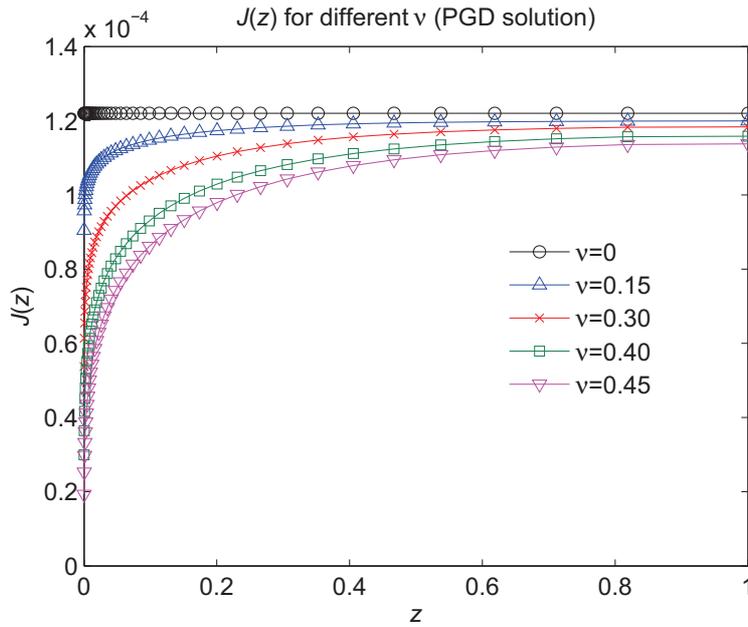
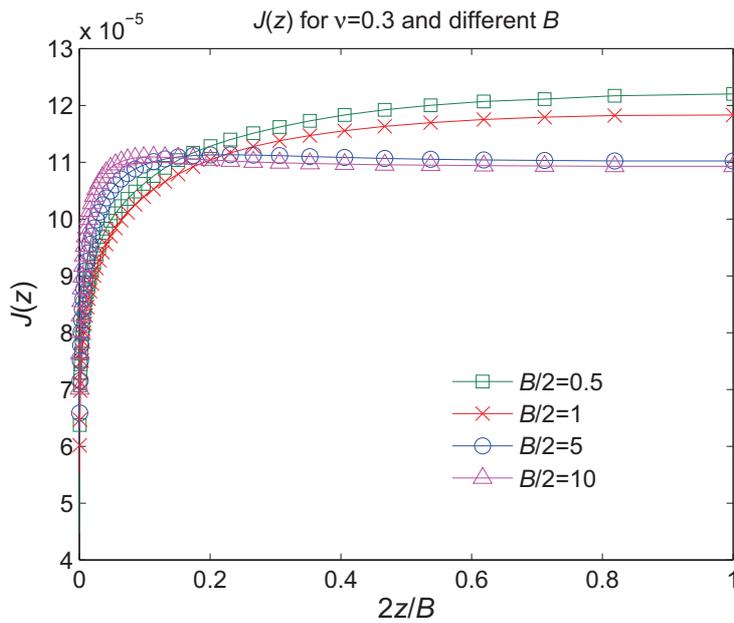
FIGURE 5.13 – Extension virtuelle du segment  $\Delta_s$  de la fissure pour l'intégration de  $J(s)$

Le taux de restitution de l'énergie en mode  $I$  est directement donné par la relation :

$$K_I(s) = \sqrt{J(s) \frac{E}{1 - \nu^2}}, \quad (5.21)$$

où  $J(s)$  est donné par l'équation 5.20.

Le post-processing de la solution multidimensionnelle précédemment calculée permet d'évaluer le taux de restitution d'énergie en mode  $I$  pour l'ensemble des coordonnées  $\nu$  et  $B$ . L'analyse de l'influence des paramètres  $\nu$  et  $B$  est résumée sur les figures 5.14 et 5.15. La figure 5.14 représente l'évolution de  $K_I(s)$  le long du front de fissure particularisée pour cinq valeurs de  $\nu$  pour une valeur de  $B = 1$ , et la figure 5.15 représente l'évolution de  $K_I(s)$  particularisée pour quatre valeurs de  $B$ , pour une valeur de  $\nu = 0.3$ .

FIGURE 5.14 – Influence du coefficient de Poisson sur l'intégrale  $J$ FIGURE 5.15 – Influence de l'épaisseur sur l'intégrale  $J$ 

## 5.6 Post-traitement et reconstruction

### 5.6.1 Enveloppe

Considérons le problème défini dans la partie 5.1. À partir de la solution paramétrique, il est possible de déterminer par exemple l'enveloppe des déformées résiduelles possibles sur l'intervalle d'incertitude de l'orientation des plis (voir figure 5.16). Ce type d'étude peut par exemple être utilisé pour déterminer si l'incertitude sur l'orientation des plis engendre des

pièces qui sont compatibles ou non avec les tolérances géométriques définies par le cahier des charges.

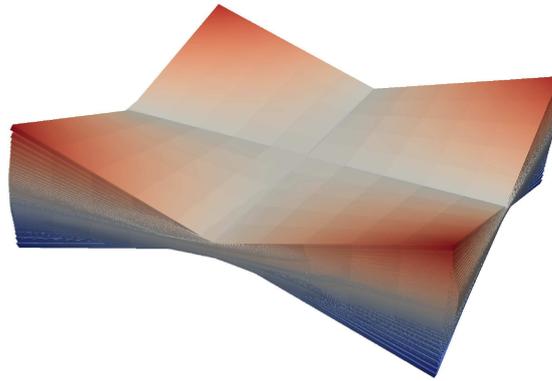


FIGURE 5.16 – Enveloppe des déformées de la pièce pour l'ensemble de l'espace paramétrique  $(\theta_1, \theta_4)$

### 5.6.2 Construction d'un point sur un espace paramétrique

Considérons toujours le problème défini dans la partie 5.1. L'espace 5D de la solution doit être coupé suivant certaines dimensions pour pouvoir être visualisé. Généralement, on choisit de visualiser la solution 3D en espace pour une combinaison de valeurs des paramètres inclus dans la simulation en tant que coordonnée supplémentaire. Cependant, la solution peut également être visualisée de manière différente : un point de l'espace est choisi, et on représente par exemple le déplacement de ce point pour tout l'espace paramétrique. La figure 5.17 montre le déplacement vertical d'un des coins de la plaque pour l'ensemble des valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_4$ . Notons que sur la diagonale  $\theta_1 = \theta_4$ , qui correspond à un stratifié symétrique, le voilement de la plaque dû au refroidissement est inexistant, par contre, plus la différence  $\theta_1 - \theta_2$  est importante, plus le voilement est prononcé.

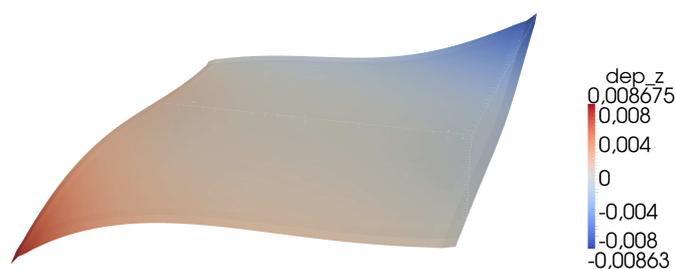


FIGURE 5.17 – Déplacement d'un coin pour tout l'espace paramétrique  $(\theta_1, \theta_4)$

### 5.6.3 Reconstruction à la volée sur une plateforme légère

La représentation compacte des solutions sous la forme de somme de produits de fonctions permet de stocker de façon efficace des solutions paramétriques. En effet, cette représentation exploite la régularité de la solution par rapport aux coordonnées, et constitue en quelque sorte une représentation compressée de la solution d'une classe de problèmes similaires sous forme de produit de  $N$  modes par dimension.

La reconstruction de la solution sur un sous-espace de l'espace de définition consiste uniquement à sommer des produits de vecteurs, et est par conséquent extrêmement rapide à évaluer.

Le caractère peu encombrant de la solution et sa facilité de reconstruction permettent d'utiliser des plateformes légères (*smartphone* ou tablette) pour la visualisation des solutions.

Il est alors possible d'explorer l'espace en effectuant à la volée des coupes dans l'espace solution et visualiser en temps réel la reconstruction de la solution. La figure 5.18 montre une reconstruction de la solution du problème à deux paramètres présenté en 5.1. Dans l'article [Bognet *et al.*, 2012b], des représentations similaires sont effectuées avec des *smartphones*.

Pour visualiser la partie de la solution choisie, une partie des coordonnées (spatiales ou paramétriques) doit être fixée, l'autre partie est représentée sur tout l'espace.

Considérons à nouveau la solution du problème défini dans la partie 5.1. Sur la figure 5.18, la solution est représentée pour l'ensemble des coordonnées spatiales, et un couple de valeurs particulier de  $(\theta_1, \theta_4)$  est fixé. La solution est alors reconstruite sous la forme :

$$\mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \theta_1, \theta_4) \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(\tilde{x}, \tilde{y}) \circ \mathbf{U}_z^i(\tilde{z}) \circ \mathbf{U}_{\Theta_1}^i(\theta_1) \circ \mathbf{U}_{\Theta_4}^i(\theta_4), \quad (5.22)$$

où la solution  $\mathbf{u}$  est représentée pour l'ensemble de l'espace pour les coordonnées surmontées d'un  $\sim$ , et pour une valeur particulière des coordonnées non surmontées d'un  $\sim$ .

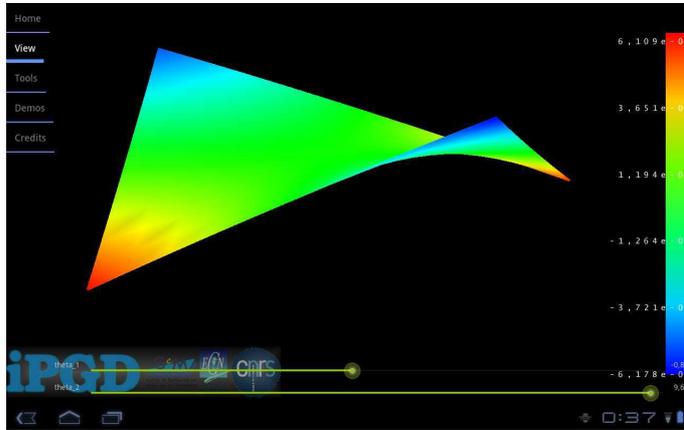


FIGURE 5.18 – Reconstruction à la volée d'une solution paramétrique

#### 5.6.4 Optimisation

La représentation séparée permet d'évaluer de façon explicite la sensibilité de la solution à une coordonnée. Cette caractéristique est un atout pour effectuer des optimisations en post-processing d'une solution multidimensionnelle. Par exemple, si l'on souhaite optimiser une fonction coût dont l'expression est explicite en fonction de la solution multidimensionnelle calculée, alors l'optimisation par un algorithme de Newton (par exemple) qui nécessite de connaître la dérivée de la fonction coût par rapport au paramètre à optimiser est explicite.

Si la solution est de la forme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, \theta_1, \theta_4) = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_{\Theta_1}^i(\theta_1) \circ \mathbf{U}_{\Theta_4}^i(\theta_4), \quad (5.23)$$

alors, la dérivée de  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\theta_4$  s'écrit immédiatement :

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z, \theta_1, \theta_4)}{\partial \theta_4} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{xy}^i(x, y) \circ \mathbf{U}_z^i(z) \circ \mathbf{U}_{\Theta_1}^i(\theta_1) \circ \frac{\partial \mathbf{U}_{\Theta_4}^i(\theta_4)}{\partial \theta_4}. \quad (5.24)$$

## 5.7 Limitations - Conclusions

L'approche multi-paramétrique présentée ici permet de résoudre de nombreux problèmes en y intégrant des paramètres en tant que coordonnées supplémentaires. Celles-ci peuvent aussi bien être des sources de variabilités, des paramètres géométriques, ou encore une paramétrisation d'un chargement ou d'une condition aux limites. Cette approche puissante autant au niveau de la résolution, qu'au niveau de l'exploitation de la solution multidimensionnelle fournit une nouvelle manière d'envisager l'optimisation ou encore l'intégration de l'incertitude sur certaines grandeurs (incertitude sur un coefficient matériau, sur la géométrie, sur l'orientation d'un pli composite, ...) dans les simulations dimensionnantes pour des produits d'ingénierie.

Cependant, l'approche basée sur la PGD développée ici est particulièrement adaptée pour la résolution de problèmes linéaires, mais atteint rapidement ses limites dans le cas de problèmes non-linéaires paramétriques. La résolution en variables d'espace séparées d'un problème 3D peut potentiellement être intégrée dans une stratégie de résolution non-linéaire en utilisant simplement la PGD pour résoudre chaque problème linéarisé au lieu d'un solveur "classique". Par contre, la généralisation d'une telle approche aux problèmes non-linéaires n'est clairement pas évidente et constitue donc un inconvénient majeur de la méthode.

# Conclusion et discussion

## Conclusion

De nos jours, les contraintes cumulées de rapidité de développement, de coût des matériaux, et de nécessité de concevoir des moyens de transports plus économes en carburant et donc plus légers et aérodynamiques, imposent de réaliser des produits structurellement optimisés. De plus, l'utilisation croissante des matériaux composites, en particulier dans l'industrie aéronautique, complexifie d'autant plus le dimensionnement et les procédés de fabrication des pièces.

Lors de la conception de produits industriels complexes et de grandes dimension, comme par exemple des avions de transport de passagers, des choix de conception sont effectués très en amont du projet, puis en aval, un grand nombre d'optimisations locales sont effectuées sur des partitions de la structure.

Actuellement, les contraintes de temps de développement imposent de fixer très tôt dans le projet les grandes lignes du design global du produit. Ce choix est issu des limites des moyens de simulations qui ne permettent pas d'effectuer des calculs suffisamment efficaces sur l'ensemble de la structure pour effectuer l'optimisation complète directement.

Cette approche conduit malheureusement à produire une solution sous optimale à l'échelle de la structure complète. En effet, le fait d'imposer très tôt des contraintes communes qui n'évolueront plus ou peu au niveau zones de raccordement entre les sous-structures qui seront optimisées par la suite empêche l'exploration de nombreuses solutions potentiellement plus optimales.

Les capacités techniques de simulation n'augmentant pas de manière suffisamment significative, des alternatives au niveau des méthodes de simulation doivent être mises en place. Les méthodes de réduction de modèle sont d'excellentes candidates pour répondre à ce besoin. En effet, comme il a été montré dans les chapitres 1, 2, 3 et 4, la méthode PGD permet de réaliser un gain de temps très significatif sur la résolution de problèmes 3D.

Par ailleurs, sur des structures de très grande complexité tels que les aéronefs actuels, des familles de pièces semblables sont utilisées massivement pour réaliser des assemblages ou des fonctions structurelles. Le pré-calcul sous forme d'abaque numérique de solutions générales, englobant toute les variantes de la famille de pièce et/ou de matériau et/ou de chargements permet d'optimiser la structure plus efficacement en appelant le résultat contenu dans l'abaque pré-calculée pour un certain nombre de pièces standards. Le chapitre 5 présente les premiers pas qui permettent de se diriger vers une telle approche.

L'utilisation de ces nouvelles techniques peut également permettre une meilleure réactivité dans l'étape d'optimisation et de dimensionnement local des composants, et ainsi permettre de mieux guider les options de design plus en amont du projet de façon à obtenir une solution finale plus optimale.

Par ailleurs, la méthode présentée ici permet d'effectuer des simulations sur des domaines de grande dimension à coût nettement réduit par rapport aux méthodes classiques. Ceci peut permettre d'augmenter la dimension des sous-structures qui sont optimisées en parallèle, voire de s'attaquer à l'optimisation de la structure complète. Ceci conduirait naturellement à une solution globale de meilleur qualité, tout en évitant d'effectuer des boucles sur les interfaces à cause du partitionnement pour effectuer l'optimisation (illustration sur la figure 5.19).

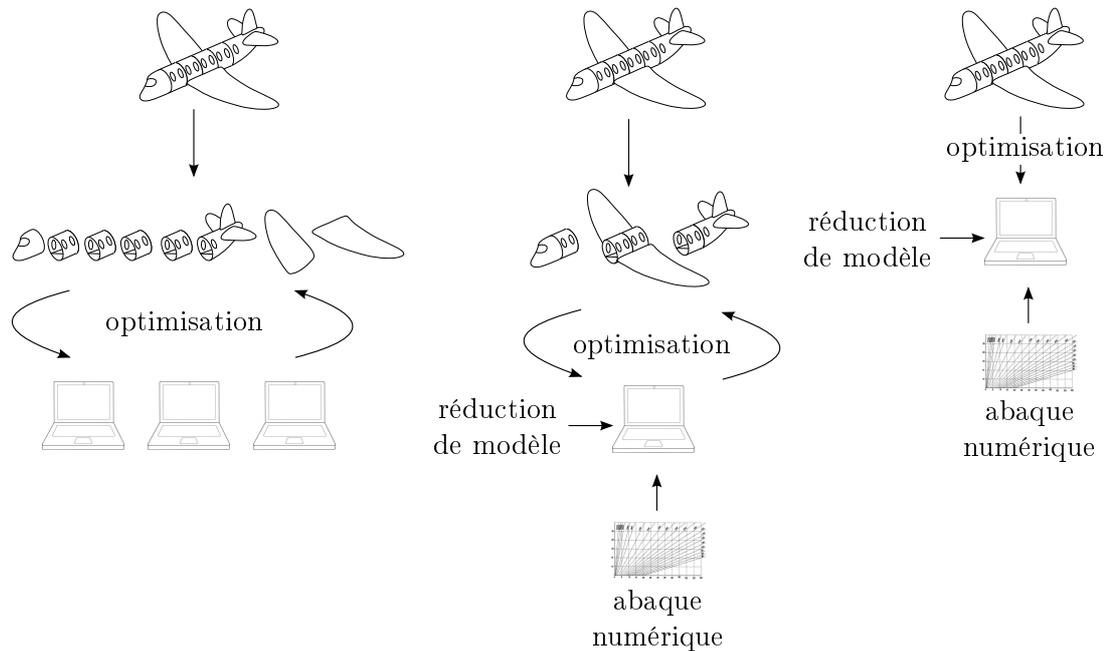


FIGURE 5.19 – Différentes sous structures pour l'optimisation

## Perspectives

La méthode présentée ici est prometteuse, surtout si elle peut être intégrée de façon non intrusive dans des codes de calcul commerciaux afin de profiter de leur optimisation à résoudre des problèmes linéaires. En effet, la plupart des logiciels de calculs sont "scriptables", on peut alors imaginer d'appeler le logiciel pour résoudre chaque problème éléments finis lors du point fixe.

Par ailleurs, la méthode de résolution 2D/1D permet de résoudre des problèmes 3D de dimension très importante du fait de son faible impact mémoire et son coût de calcul restreint. Intégrer cette méthode dans une stratégie de résolution en décomposition de domaines permettrait de résoudre des problèmes de dimension encore supérieure, pouvant atteindre  $10^9$  à  $10^{10}$  de degrés de libertés.

L'extension de la méthode à la résolution de problèmes non-linéaires et/ou multiply-

siques couplés, dans le cas paramétrique et non paramétrique constitue une perspective intéressante qui se doit d'être explorée.



# Développement des opérateurs pour la séparation 1D/1D

La résolution du problème en  $\mathbf{R}$  défini en 1.2.3 conduit à développer l'équation 1.32

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left( A \cdot r_{u,x}^* \cdot r_{u,x} \cdot s_u \cdot s_u + A \cdot r_v^* \cdot r_v \cdot s_{v,y} \cdot s_{v,y} \right. \\
 & \quad + B \cdot r_v^* \cdot r_{u,x} \cdot s_{v,y} \cdot s_u + B \cdot r_{u,x}^* \cdot r_v \cdot s_u \cdot s_{v,y} \\
 & \quad + C \cdot r_u^* \cdot r_u \cdot s_{u,y} \cdot s_{u,y} + C \cdot r_u^* \cdot r_{v,x} \cdot s_{u,y} \cdot s_v \\
 & \quad \left. + C \cdot r_{v,x}^* \cdot r_u \cdot s_v \cdot s_{u,y} + C \cdot r_{v,x}^* \cdot r_{v,x} \cdot s_v \cdot s_v \right) d\Omega \\
 = & - \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega} \left( A \cdot r_{u,x}^* \cdot u_{x,x}^i \cdot s_u \cdot u_y^i + A \cdot r_v^* \cdot v_x^i \cdot s_{v,y} \cdot v_{y,y}^i \right. \\
 & \quad + B \cdot r_v^* \cdot u_{x,x}^i \cdot s_{v,y} \cdot u_y^i + B \cdot r_{u,x}^* \cdot v_x^i \cdot s_u \cdot v_{y,y}^i \\
 & \quad + C \cdot r_u^* \cdot u_x^i \cdot s_{u,y} \cdot u_{y,y}^i + C \cdot r_u^* \cdot v_{x,x}^i \cdot s_{u,y} \cdot v_y^i \\
 & \quad \left. + C \cdot r_{v,x}^* \cdot u_x^i \cdot s_v \cdot u_{y,y}^i + C \cdot r_{v,x}^* \cdot v_{x,x}^i \cdot s_v \cdot v_y^i \right) d\Omega \\
 & + \iint_{\Omega} \left( r_u^* \cdot f_{d_{ux}} \cdot s_u \cdot f_{d_{uy}} + r_v^* \cdot f_{d_{vx}} \cdot s_v \cdot f_{d_{vy}} \right) d\Omega \\
 & + \int_{d_1\Omega} \left( r_u^* \cdot F_{d_{ux}} \cdot s_u \cdot F_{d_{uy}} + r_v^* \cdot F_{d_{vx}} \cdot s_v \cdot F_{d_{vy}} \right) d\Gamma,
 \end{aligned} \tag{25}$$

L'ensemble des intégrales en  $\mathbf{S}$  peuvent être calculées car la fonction  $\mathbf{S}$  est connue. On

obtient :

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \cdot \int_{\Omega_x} (r_{u,x}^* \cdot r_{u,x}) dx & + \alpha_2 \cdot \int_{\Omega_x} (r_v^* \cdot r_v) dx \\
& + \alpha_3 \cdot \int_{\Omega_x} (r_v^* \cdot r_{u,x}) dx & + \alpha_4 \cdot \int_{\Omega_x} (r_{u,x}^* \cdot r_v) dx \\
& + \alpha_5 \cdot \int_{\Omega_x} (r_u^* \cdot r_u) dx & + \alpha_6 \cdot \int_{\Omega_x} (r_u^* \cdot r_{v,x}) dx \\
& + \alpha_7 \cdot \int_{\Omega_x} (r_{v,x}^* \cdot r_u) dx & + \alpha_8 \cdot \int_{\Omega_x} (r_{v,x}^* \cdot r_{v,x}) dx \\
= & - \sum_{i=1}^N \left( \beta_1^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_{u,x}^* \cdot u_{x,x}^i) dx & + \beta_2^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_v^* \cdot v_x^i) dx \right. \\
& + \beta_3^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_v^* \cdot u_{x,x}^i) dx & + \beta_4^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_{u,x}^* \cdot v_x^i) dx \\
& + \beta_5^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_u^* \cdot u_x^i) dx & + \beta_6^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_u^* \cdot v_{x,x}^i) dx \\
& + \beta_7^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_{v,x}^* \cdot u_x^i) dx & + \beta_8^i \cdot \int_{\Omega_x} (r_{v,x}^* \cdot v_{x,x}^i) dx \left. \right) \\
& + \gamma_1 \cdot \int_{\Omega_x} (r_u^* \cdot f_{d_{ux}}) dx & + \gamma_2 \cdot \int_{\Omega_x} (r_v^* \cdot f_{d_{vx}}) dx \\
& + \delta_1 \cdot \int_{d_1 \Omega_x} (r_u^* \cdot F_{d_{ux}}) dx & + \delta_2 \cdot \int_{d_1 \Omega_x} (r_v^* \cdot F_{d_{vx}}) dx,
\end{aligned} \tag{26}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_{\Omega_y} (s_u \cdot A \cdot s_u) dy & \beta_1^i &= \int_{\Omega_y} (s_u \cdot A \cdot u_y^i) dy \\
\alpha_2 &= \int_{\Omega_y} (s_{v,y} \cdot A \cdot s_{v,y}) dy & \beta_2^i &= \int_{\Omega_y} (s_{v,y} \cdot A \cdot v_{y,y}^i) dy \\
\alpha_3 &= \int_{\Omega_y} (s_{v,y} \cdot B \cdot s_u) dy & \beta_3^i &= \int_{\Omega_y} (s_{v,y} \cdot B \cdot u_y^i) dy \\
\alpha_4 &= \int_{\Omega_y} (s_u \cdot B \cdot s_{v,y}) dy & \beta_4^i &= \int_{\Omega_y} (s_u \cdot B \cdot v_{y,y}^i) dy \\
\alpha_5 &= \int_{\Omega_y} (s_{u,y} \cdot C \cdot s_{u,y}) dy & \beta_5^i &= \int_{\Omega_y} (s_{u,y} \cdot C \cdot u_{y,y}^i) dy \\
\alpha_6 &= \int_{\Omega_y} (s_{u,y} \cdot C \cdot s_v) dy & \beta_6^i &= \int_{\Omega_y} (s_{u,y} \cdot C \cdot v_y^i) dy \\
\alpha_7 &= \int_{\Omega_y} (s_v \cdot C \cdot s_{u,y}) dy & \beta_7^i &= \int_{\Omega_y} (s_v \cdot C \cdot u_{y,y}^i) dy \\
\alpha_8 &= \int_{\Omega_y} (s_v \cdot C \cdot s_v) dy & \beta_8^i &= \int_{\Omega_y} (s_v \cdot C \cdot v_y^i) dy \\
\gamma_1 &= \int_{\Omega_y} (s_u \cdot f_{d_{u,y}}) dy & \delta_1 &= \int_{d_1 \Omega_y} (s_u \cdot F_{d_{u,y}}) dy \\
\gamma_2 &= \int_{\Omega_y} (s_v \cdot f_{d_{v,y}}) dy & \delta_2 &= \int_{d_1 \Omega_y} (s_v \cdot F_{d_{v,y}}) dy.
\end{aligned} \tag{27}$$

Il reste à résoudre le problème 1D en  $\mathbf{R}$  par la méthode des éléments finis.

Pour la résolution du problème en  $\mathbf{S}$ , on développe l'équation 1.34 sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \cdot \int_{\Omega_y} (s_u^* \cdot s_u) dy & + \alpha_2 \cdot \int_{\Omega_y} (s_{v,y}^* \cdot s_{v,y}) dy \\
& + \alpha_3 \cdot \int_{\Omega_y} (s_{v,y}^* \cdot s_u) dy & + \alpha_4 \cdot \int_{\Omega_y} (s_u^* \cdot s_{v,y}) dy \\
& + \alpha_5 \cdot \int_{\Omega_y} (s_{u,y}^* \cdot s_{u,y}) dy & + \alpha_6 \cdot \int_{\Omega_y} (s_{u,y}^* \cdot s_v) dy \\
& + \alpha_7 \cdot \int_{\Omega_y} (s_v^* \cdot s_{u,y}) dy & + \alpha_8 \cdot \int_{\Omega_y} (s_v^* \cdot s_v) dy \\
= & - \sum_{i=1}^N \left( \beta_1^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_u^* \cdot u_y^i) dy & + \beta_2^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_{v,y}^* \cdot v_{y,y}^i) dy \right. \\
& + \beta_3^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_{v,y}^* \cdot u_y^i) dy & + \beta_4^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_u^* \cdot v_{y,y}^i) dy \\
& + \beta_5^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_{u,y}^* \cdot u_{y,y}^i) dy & + \beta_6^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_{u,y}^* \cdot v_y^i) dy \\
& + \beta_7^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_v^* \cdot u_{y,y}^i) dy & + \beta_8^i \cdot \int_{\Omega_y} (s_v^* \cdot v_y^i) dy \left. \right) \\
& + \gamma_1 \cdot \int_{\Omega_y} (s_u^* \cdot f_{d_{uy}}) dy & + \gamma_2 \cdot \int_{\Omega_y} (s_v^* \cdot f_{d_{vy}}) dy \\
& + \delta_1 \cdot \int_{d_1 \Omega_y} (s_u^* \cdot F_{d_{uy}}) dy & + \delta_2 \cdot \int_{d_1 \Omega_y} (s_v^* \cdot F_{d_{vy}}) dy,
\end{aligned} \tag{28}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_{\Omega_x} (r_{u,x} \cdot r_{u,x}) dx & \beta_1^i &= \int_{\Omega_x} (r_{u,x} \cdot u_{x,x}^i) dx \\
\alpha_2 &= \int_{\Omega_x} (r_v \cdot r_v) dx & \beta_2^i &= \int_{\Omega_x} (r_v \cdot v_x^i) dx \\
\alpha_3 &= \int_{\Omega_x} (r_v \cdot r_{u,x}) dx & \beta_3^i &= \int_{\Omega_x} (r_v \cdot u_{x,x}^i) dx \\
\alpha_4 &= \int_{\Omega_x} (r_{u,x} \cdot r_v) dx & \beta_4^i &= \int_{\Omega_x} (r_{u,x} \cdot v_x^i) dx \\
\alpha_5 &= \int_{\Omega_x} (r_u \cdot r_u) dx & \beta_5^i &= \int_{\Omega_x} (r_u \cdot u_x^i) dx \\
\alpha_6 &= \int_{\Omega_x} (r_u \cdot r_{v,x}) dx & \beta_6^i &= \int_{\Omega_x} (r_u \cdot v_{x,x}^i) dx \\
\alpha_7 &= \int_{\Omega_x} (r_{v,x} \cdot r_v) dx & \beta_7^i &= \int_{\Omega_x} (r_{v,x} \cdot v_x^i) dx \\
\alpha_8 &= \int_{\Omega_x} (r_{v,x} \cdot r_{v,x}) dx & \beta_8^i &= \int_{\Omega_x} (r_{v,x} \cdot v_{x,x}^i) dx \\
\gamma_1 &= \int_{\Omega_x} (s_u \cdot f_{d_{ux}}) dx & \delta_1 &= \int_{d_1 \Omega_x} (s_u \cdot F_{d_{ux}}) dx \\
\gamma_1 &= \int_{\Omega_x} (s_v \cdot f_{d_{vx}}) dx & \delta_2 &= \int_{d_1 \Omega_x} (s_v \cdot F_{d_{vx}}) dx.
\end{aligned} \tag{29}$$

De la même façon que pour résoudre le problème en  $\mathbf{R}$ , on résout ici le problème 1D en  $\mathbf{S}$  par la méthode des éléments finis.



# Développement des opérateurs pour la séparation 2D/1D

Cette annexe présente les détails de la résolution des problèmes mécaniques 3D en variables d'espace séparées en utilisant la méthode PGD.

La stratégie d'enrichissement de la solution est la suivante : on cherche à enrichir la solution contenant déjà  $N$  modes avec un  $(N + 1)^{\text{ème}}$ .

Les conditions de Diriclet sont satisfaites par le premier mode imposé par la méthode décrite en 2.2.5.2. Les modes suivants sont cherchés pour un problème homogène sur la frontière  $\partial_2\Omega$ .

Considérons la formulation faible définie par l'équation 2.24 dans la partie 2.2.1. Pour la résolution de ce problème non-linéaire en  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$ , la stratégie adoptée est de résoudre alternativement les problèmes en  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  par une méthode de point fixe, jusqu'à convergence (voir chapitre 1).

Le développement de l'équation 2.24 compte plus ou moins de termes selon le remplissage du tenseur des coefficients élastiques 2.16. Considérons le remplissage correspondant à un matériau monoclinique. Dans ce cas, le développement de l'équation 2.24 compte 41 termes (21 dans le cas d'un matériau isotrope ou orthotrope dont les directions principales sont les directions du repère du calcul).

Pour la résolution, on suppose  $\mathbf{S}$  connue, et on cherche à déterminer  $\mathbf{R}$ . Pour la première itération on initialise donc  $\mathbf{S}$  à une valeur quelconque. Pour les itérations suivantes, on utilise la valeur calculée au pas précédent.

La fonction test (2.23) devient alors :

$$\mathbf{u}^*(x, y, z) = \mathbf{R}^*(x, y) \circ \mathbf{S}(z). \quad (30)$$

En substituant dans l'équation 2.24 l'ensemble des expressions détaillées des différents termes, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \begin{pmatrix} r_{u,x}^* \cdot s_u \\ r_{v,y}^* \cdot s_v \\ r_w^* \cdot s_{w,z} \\ r_{w,y}^* \cdot s_w + r_v^* \cdot s_{v,z} \\ r_{w,x}^* \cdot s_w + r_u^* \cdot s_{u,z} \\ r_{v,x}^* \cdot s_v + r_{u,y}^* \cdot s_u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_{11}K_{12}K_{13} & 0 & 0 & K_{16} \\ K_{12}K_{22}K_{23} & 0 & 0 & K_{26} \\ K_{13}K_{23}K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45}K_{55} & 0 \\ K_{16}K_{26}K_{36} & 0 & 0 & K_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{u,x} \cdot s_u \\ r_{v,y} \cdot s_v \\ r_w \cdot s_{w,z} \\ r_{w,y} \cdot s_w + r_v \cdot s_{v,z} \\ r_{w,x} \cdot s_w + r_u \cdot s_{u,z} \\ r_{v,x} \cdot s_v + r_{u,y} \cdot s_u \end{pmatrix} d\Omega \\
& = - \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N) \right) d\Omega \\
& \quad + \iiint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \quad (31)
\end{aligned}$$

La formulation faible sous forme développée s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \left( r_{u,x}^* \cdot s_u \cdot K_{11} \cdot r_{u,x} \cdot s_u + r_{v,y}^* \cdot s_v \cdot K_{12} \cdot r_{u,x} \cdot s_u + r_w^* \cdot s_{w,z} \cdot K_{13} \cdot r_{u,x} \cdot s_u \right. \\
& \quad + r_{u,x}^* \cdot s_u \cdot K_{12} \cdot r_{v,y} \cdot s_v + r_{u,x}^* \cdot s_u \cdot K_{16} \cdot r_{u,y} \cdot s_u + r_{u,y}^* \cdot s_u \cdot K_{16} \cdot r_{u,x} \cdot s_u \\
& \quad + r_{v,x}^* \cdot s_v \cdot K_{16} \cdot r_{u,x} \cdot s_u + r_{u,x}^* \cdot s_u \cdot K_{13} \cdot r_w \cdot s_{w,z} + r_{u,x}^* \cdot s_u \cdot K_{16} \cdot r_{v,x} \cdot s_v \\
& \quad + r_{v,y}^* \cdot s_v \cdot K_{22} \cdot r_{v,y} \cdot s_v + r_w^* \cdot s_{w,z} \cdot K_{23} \cdot r_{v,y} \cdot s_v + r_{v,y}^* \cdot s_v \cdot K_{26} \cdot r_{u,y} \cdot s_u \\
& \quad + r_{v,y}^* \cdot s_v \cdot K_{23} \cdot r_w \cdot s_{w,z} + r_{u,y}^* \cdot s_u \cdot K_{26} \cdot r_{v,y} \cdot s_v + r_{v,x}^* \cdot s_v \cdot K_{26} \cdot r_{v,y} \cdot s_v \\
& \quad + r_{v,y}^* \cdot s_v \cdot K_{26} \cdot r_{v,x} \cdot s_v + r_w^* \cdot s_{w,z} \cdot K_{36} \cdot r_{u,y} \cdot s_u + r_w^* \cdot s_{w,z} \cdot K_{33} \cdot r_w \cdot s_{w,z} \\
& \quad + r_w^* \cdot s_{w,z} \cdot K_{36} \cdot r_{v,x} \cdot s_v + r_{u,y}^* \cdot s_u \cdot K_{36} \cdot r_w \cdot s_{w,z} + r_{v,x}^* \cdot s_v \cdot K_{36} \cdot r_w \cdot s_{w,z} \\
& \quad + r_v^* \cdot s_{v,z} \cdot K_{45} \cdot r_u \cdot s_{u,z} + r_{w,y}^* \cdot s_w \cdot K_{45} \cdot r_u \cdot s_{u,z} + r_v^* \cdot s_{v,z} \cdot K_{44} \cdot r_v \cdot s_{v,z} \\
& \quad + r_{w,y}^* \cdot s_w \cdot K_{44} \cdot r_v \cdot s_{v,z} + r_u^* \cdot s_{u,z} \cdot K_{45} \cdot r_v \cdot s_{v,z} + r_{w,x}^* \cdot s_w \cdot K_{45} \cdot r_v \cdot s_{v,z} \\
& \quad + r_v^* \cdot s_{v,z} \cdot K_{44} \cdot r_{w,y} \cdot s_w + r_{w,y}^* \cdot s_w \cdot K_{44} \cdot r_{w,y} \cdot s_w + r_u^* \cdot s_{u,z} \cdot K_{45} \cdot r_{w,y} \cdot s_w \\
& \quad + r_v^* \cdot s_{v,z} \cdot K_{45} \cdot r_{w,x} \cdot s_w + r_{w,x}^* \cdot s_w \cdot K_{45} \cdot r_{w,y} \cdot s_w + r_{w,y}^* \cdot s_w \cdot K_{45} \cdot r_{w,x} \cdot s_w \\
& \quad + r_u^* \cdot s_{u,z} \cdot K_{55} \cdot r_u \cdot s_{u,z} + r_{w,x}^* \cdot s_w \cdot K_{55} \cdot r_u \cdot s_{u,z} + r_u^* \cdot s_{u,z} \cdot K_{55} \cdot r_{w,x} \cdot s_w \\
& \quad + r_{w,x}^* \cdot s_w \cdot K_{55} \cdot r_{w,x} \cdot s_w + r_{u,y}^* \cdot s_u \cdot K_{66} \cdot r_{u,y} \cdot s_u + r_{v,x}^* \cdot s_v \cdot K_{66} \cdot r_{u,y} \cdot s_u \\
& \quad \left. + r_{u,y}^* \cdot s_u \cdot K_{66} \cdot r_{v,x} \cdot s_v + r_{v,x}^* \cdot s_v \cdot K_{66} \cdot r_{v,x} \cdot s_v \right) d\Omega \\
& = - \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N) \right) d\Omega \\
& \quad + \iiint_{\Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \quad (32)
\end{aligned}$$

Pour rendre les équations plus compactes, le terme général du développement sera écrit :

$$\iiint_{\Omega} \left( r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot r_{d_i, \gamma_i} \cdot s_{d_i, \delta_i} \right) d\Omega, \quad (33)$$

où les indices  $c_i, d_i, m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  sont tels que :

$$\begin{aligned}
c_i &\in [u, v, w] \\
d_i &\in [u, v, w] \\
\alpha_i &\in [\emptyset, x, y] \\
\beta_i &\in [\emptyset, z] \\
\gamma_i &\in [\emptyset, x, y] \\
\delta_i &\in [\emptyset, z] \\
m_i &\in [1, 2, 3, 4, 5, 6] \\
n_i &\in [1, 2, 3, 4, 5, 6].
\end{aligned} \tag{34}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{41} r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot r_{d_i, \gamma_i} \cdot s_{d_i, \delta_i} \right) d\Omega \\
&= - \iiint_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_N) \right) d\Omega \\
&\quad + \iint_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}_d \right) d\Omega + \iint_{\partial_2 \Omega} \left( (\mathbf{R}^* \circ \mathbf{S}) \cdot \mathbf{F}_d \right) d\Gamma \tag{35}
\end{aligned}$$

Le développement du membre de droite se fait exactement de la même façon. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{41} r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot r_{d_i, \gamma_i} \cdot s_{d_i, \delta_i} \right) d\Omega \\
&= - \sum_{p=1}^N \iiint_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{41} r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot d_{i_{xy}, \gamma_i}^p \cdot d_{i_{z}, \delta_i}^p \right) d\Omega \\
&\quad + \iint_{\Omega} \left( r_u^* \cdot s_u \cdot f_{d_{uxy}} \cdot f_{d_{uz}} + r_v^* \cdot s_v \cdot f_{d_{vxy}} \cdot f_{d_{vz}} + r_w^* \cdot s_w \cdot f_{d_{wxy}} \cdot f_{d_{wz}} \right) d\Omega \\
&\quad + \iint_{\partial_2 \Omega} \left( r_u^* \cdot s_u \cdot F_{d_{uxy}} \cdot F_{d_{uz}} + r_v^* \cdot s_v \cdot F_{d_{vxy}} \cdot F_{d_{vz}} + r_w^* \cdot s_w \cdot F_{d_{wxy}} \cdot F_{d_{wz}} \right) d\Gamma, \tag{36}
\end{aligned}$$

enfin, après séparation des intégrales, le problème en  $\mathbf{R}$  à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \\
&= - \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i}^* \cdot d_{i_{xy}, \gamma_i}^p) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i} \cdot K_{m_i n_i} \cdot d_{i_z, \delta_i}^p) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_u^* \cdot f_{d_{uxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_u \cdot f_{d_{uz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_v^* \cdot f_{d_{vxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_v \cdot f_{d_{vz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_w^* \cdot f_{d_{wxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_w \cdot f_{d_{wz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_u^* \cdot F_{d_{uxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_u \cdot F_{d_{uz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_v^* \cdot F_{d_{vxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_v \cdot F_{d_{vz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_w^* \cdot F_{d_{wxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_w \cdot F_{d_{wz}}) d\Gamma_z \quad (37)
\end{aligned}$$

La résolution numérique de ce problème par la méthode des éléments finis 2D permet de trouver le vecteur d'inconnues nodales  $\mathbf{R}$ .

Ensuite, le problème en  $\mathbf{S}$  doit être résolu. Pour cela, la fonction  $\mathbf{R}$  est fixée à la valeur précédemment calculée, et la fonction test (2.23) devient alors :

$$\mathbf{u}^*(x, y, z) = \mathbf{R}(x, y) \circ \mathbf{S}^*(z). \quad (38)$$

Le problème 1D à résoudre par la méthode des éléments finis s'obtient de façon similaire à celle présentée pour le problème en  $\mathbf{R}$ . On obtient la formulation faible suivante pour le problème en  $\mathbf{S}$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot r_{d_i, \gamma_i}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{m_i n_i} \cdot s_{d_i, \delta_i}) d\Omega_z \\
&= - \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^{41} \iint_{\Omega_{xy}} (r_{c_i, \alpha_i} \cdot d_{i_{xy}, \gamma_i}^p) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_{c_i, \beta_i}^* \cdot K_{m_i n_i} \cdot d_{i_z, \delta_i}^p) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_u \cdot f_{d_{uxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_u^* \cdot f_{d_{uz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_v \cdot f_{d_{vxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_v^* \cdot f_{d_{vz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \iint_{\Omega_{xy}} (r_w \cdot f_{d_{wxy}}) d\Omega_{xy} \cdot \int_{\Omega_z} (s_w^* \cdot f_{d_{wz}}) d\Omega_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_u \cdot F_{d_{uxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_u^* \cdot F_{d_{uz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_v \cdot F_{d_{vxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_v^* \cdot F_{d_{vz}}) d\Gamma_z \\
&\quad + \int_{\partial_2 \Omega_{xy}} (r_w \cdot F_{d_{wxy}}) d\Gamma_{xy} \cdot \int_{\partial_2 \Omega_z} (s_w^* \cdot F_{d_{wz}}) d\Gamma_z \quad (39)
\end{aligned}$$

Une fois la solution du problème en  $\mathbf{S}$  trouvée, on calcule à nouveau la valeur de  $\mathbf{R}$  avec la valeur de  $\mathbf{S}$  actualisée et ainsi de suite. La figure 1.3 résume le schéma d'enrichissement décrit ci-dessus.

Une fois la convergence atteinte, selon les critères définis dans la partie 1.2.3, le nouveau mode est ajouté à la solution :

$$\mathbf{u}_{N+1}(x, y, z) = \mathbf{u}_N(x, y, z) + \mathbf{R}_N(x, y) \circ \mathbf{S}_N(z).$$



# Détail des modes sur un problème de plaque

Cette annexe est dédiée à la représentation des modes pour le problème de plaque défini dans la partie 2.3. Les 10 premiers modes de la solution sont représentés ci-après.

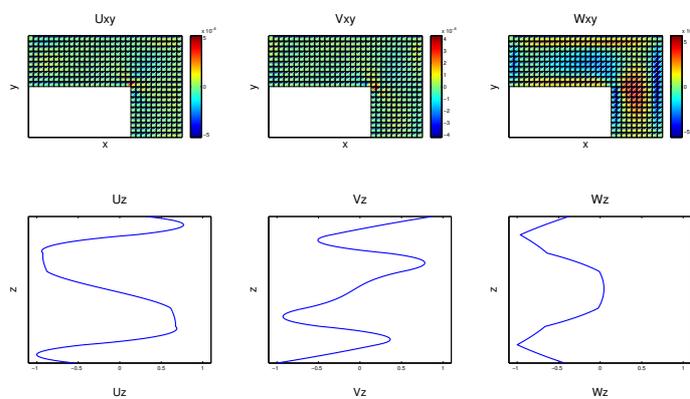


FIGURE 20 – Mode 3

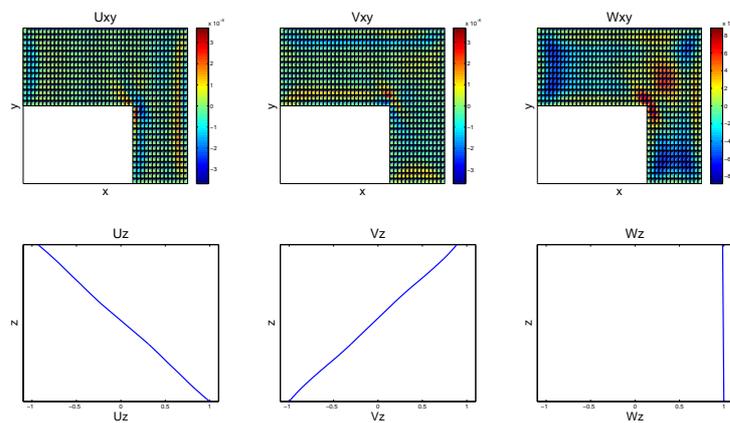


FIGURE 21 – Mode 4

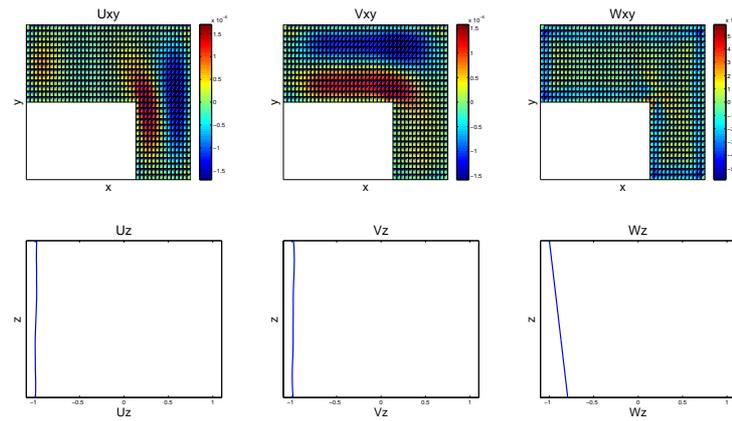


FIGURE 22 – Mode 5

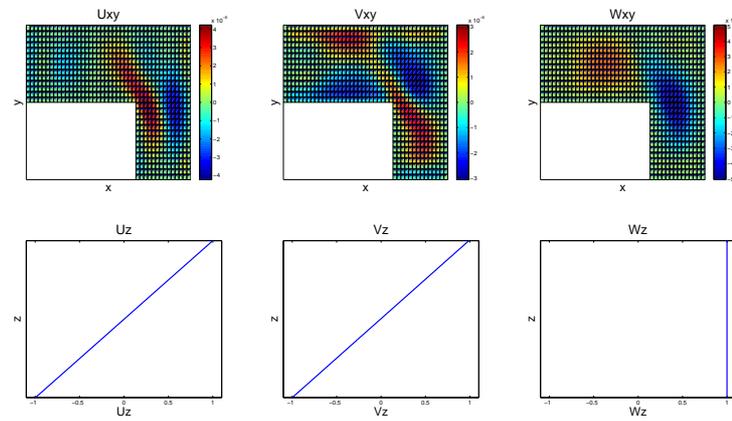


FIGURE 23 – Mode 6

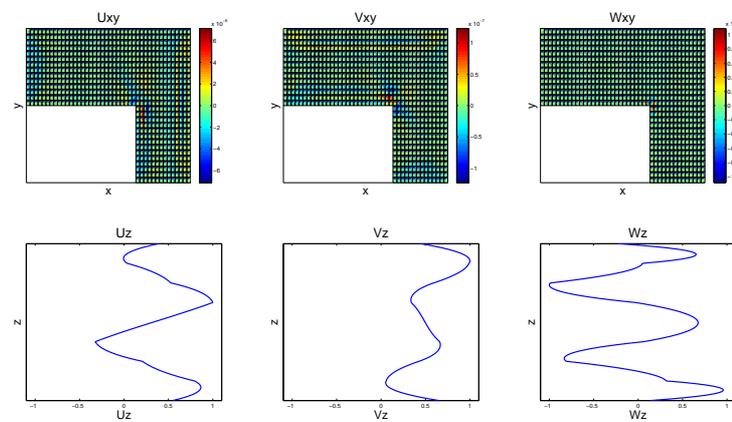


FIGURE 24 – Mode 7

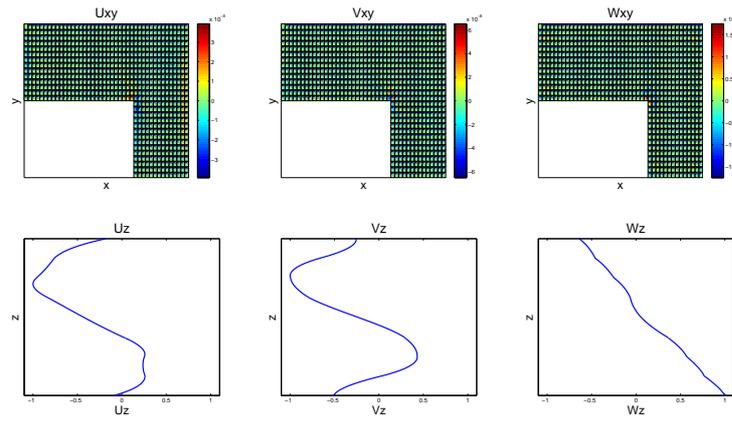


FIGURE 25 – Mode 8

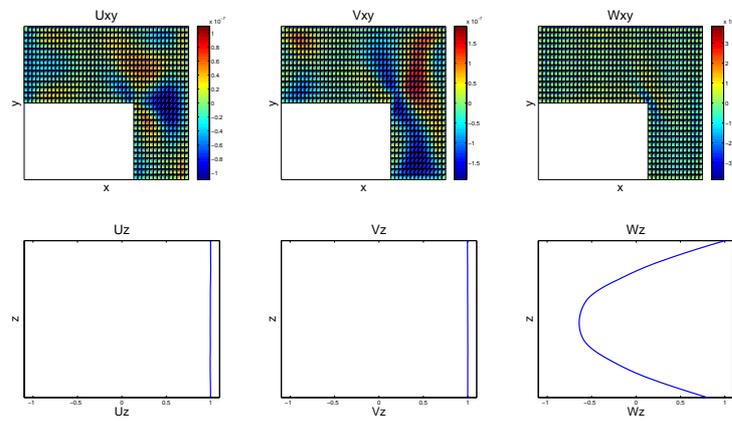


FIGURE 26 – Mode 9

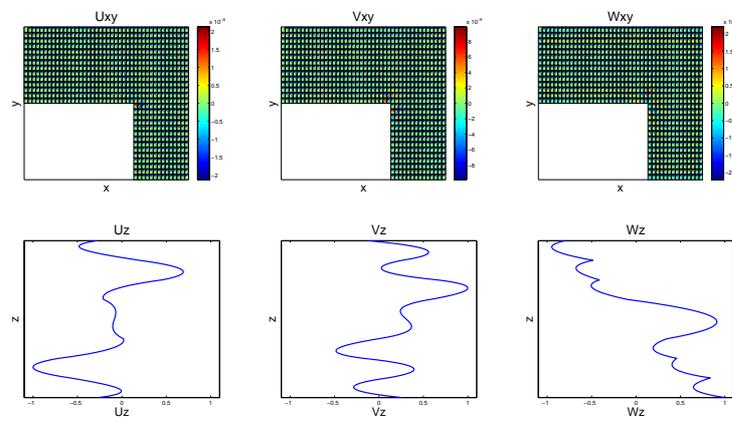


FIGURE 27 – Mode 10



# Jacobien et son inverse pour un problème défini sur une coque discrétisée

La transformation  $\mathbf{F}_2$  définit le passage de la base  $(x', y', z')$  à la base paramétrique  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Le prisme parent est un élément volumique obtenu par le produit tensoriel d'un triangle et d'un élément 1D (défini figure 28).

La transformation des coordonnées est la suivante :

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cdot M_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot M_1 \cdot x_2 + N_3 \cdot M_1 \cdot x_3 + N_1 \cdot M_2 \cdot x_4 + N_2 \cdot M_2 \cdot x_5 + N_3 \cdot M_2 \cdot x_6 \\ y &= N_1 \cdot M_1 \cdot y_1 + N_2 \cdot M_1 \cdot y_2 + N_3 \cdot M_1 \cdot y_3 + N_1 \cdot M_2 \cdot y_4 + N_2 \cdot M_2 \cdot y_5 + N_3 \cdot M_2 \cdot y_6 \\ z &= N_1 \cdot M_1 \cdot z_1 + N_2 \cdot M_1 \cdot z_2 + N_3 \cdot M_1 \cdot z_3 + N_1 \cdot M_2 \cdot z_4 + N_2 \cdot M_2 \cdot z_5 + N_3 \cdot M_2 \cdot z_6, \end{aligned} \quad (40)$$

où  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ ,  $(x_4, y_4, z_4)$ ,  $(x_5, y_5, z_5)$ ,  $(x_6, y_6, z_6)$  représentent les coordonnées des nœuds du pentaèdre dans la base  $(x', y', z')$ . Les fonctions  $M_i$  ( $i \in [1 : 3]$ ) et  $N_i$  ( $i \in [1 : 2]$ ) sont les fonctions d'interpolations respectivement pour les coordonnées  $(\xi, \eta)$  et  $\zeta$ . Par définition, les deux faces triangulaires sont parallèles au plan défini par  $(x', y')$ , donc  $z_1 = z_2 = z_3 = z_+$  et  $z_4 = z_5 = z_6 = z_-$ .

L'expression du jacobien de  $F_2$  est la suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{plan}} & \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 & J_z \end{pmatrix} \quad (41)$$

où la partie "plane"  $\mathbf{J}_{\text{plan}}$  s'écrit :

$$\mathbf{J}_{\text{plan}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_+ \cdot M_1 + \mathbf{J}_- \cdot M_2, \quad (42)$$

la partie  $\mathbf{J}_1$  ne dépend plus de  $\zeta$  après dérivation :

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\xi, \eta) \\ f_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad (43)$$

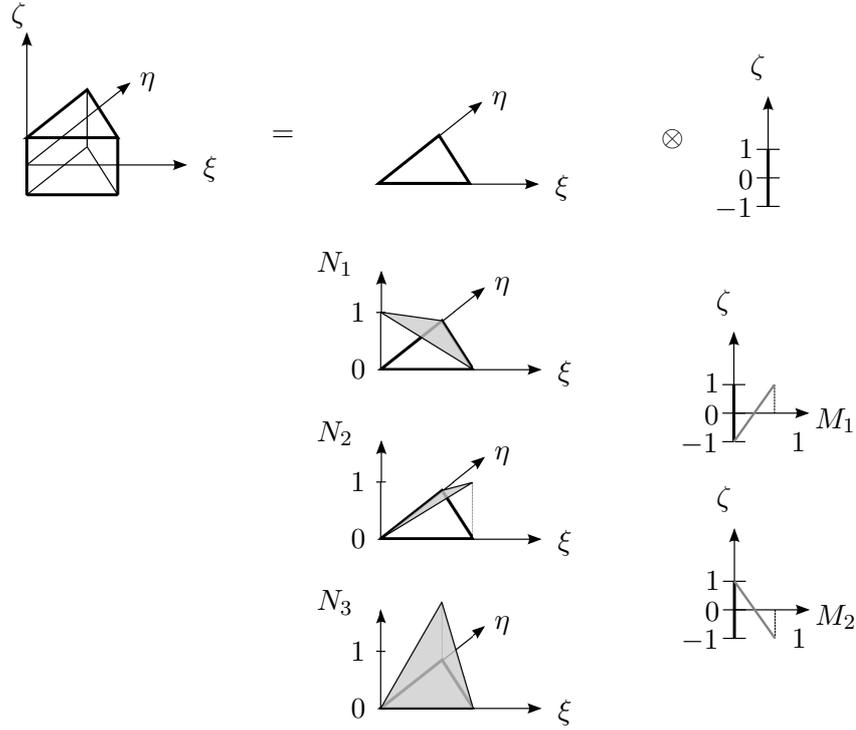


FIGURE 28 – Représentation de l'élément parent ainsi que des fonctions de formes éléments finis

la partie  $\mathbf{J}_2$  s'annule car  $z_1 = z_2 = z_3 = z_+$  et  $z_4 = z_5 = z_6 = z_-$  :

$$\mathbf{J}_2^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \cdot M_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

enfin,

$$z = (N_1 + N_2 + N_3) \cdot z_+ \cdot M_1 + (N_1 + N_2 + N_3) \cdot z_- \cdot M_2 = z_+ \cdot M_1 + z_- \cdot M_2, \quad (45)$$

d'où :

$$J_z = \frac{z_+ - z_-}{2} \quad (46)$$

En résumé, le jacobien s'exprime aisément sous forme séparée :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_+ & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_- & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_1(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & f_2(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & \frac{z_+ - z_-}{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

L'inverse du jacobien doit être calculé afin d'évaluer les gradients de  $\mathbf{u}$  dans la base

cartésienne. L'inverse du jacobien peut être calculé de deux manières : soit le jacobien est évalué partout, et sa représentation séparée est calculée à l'aide d'une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [Drmač et Veselić, 2008a,b] (voir .1.2.2), soit l'on se place dans le cadre d'une structure dont la courbure et l'épaisseur sont faibles. À ce moment, l'inverse du jacobien peut être approché en effectuant un développement limité.

Si l'épaisseur et la courbure sont faibles, alors les faces supérieures et inférieures du pentaèdre extrait de la coque sont très similaires. On peut alors écrire :

$$\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_{\text{moyen}} + \boldsymbol{\varepsilon}_+, \quad (48)$$

et :

$$\mathbf{J}_- = \mathbf{J}_{\text{moyen}} + \boldsymbol{\varepsilon}_-. \quad (49)$$

Alors :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{moyen}} & f_1(\xi, \eta) \\ & f_2(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & \frac{z_+ - z_-}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_+ & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_1 + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_- & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_2, \quad (50)$$

à l'ordre 0, l'inverse du jacobien s'exprime alors :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{moyen}} & f_1(\xi, \eta) \\ & f_2(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & \frac{z_+ - z_-}{2} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (51)$$



# Bases de géométrie différentielle

Cette annexe est consacrée au développement des outils de géométrie différentielle. Les différentes bases seront tout d'abord définies, et une représentation séparée de  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  sera explicitée. Ensuite, les trois formes fondamentales seront présentées, utiles pour définir l'élément de volume élémentaire  $d\Omega$ , ainsi que l'élément de surface  $d\Gamma$  sous une forme séparée nécessaires à l'intégration des opérateurs définis dans le chapitre 4.

## .1 Différentes bases

### .1.1 Bases de la surface moyenne

Considérons le tenseur  $\mathbf{F}_0$  contenant les composantes Cartésiennes des vecteurs de la base covariante :

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

La base contravariante est définie par la relation :

$$\mathbf{F}_0^{-T} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \mathbf{n} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Les vecteurs de la base contravariante vérifient la relation  $\mathbf{F}_0 \mathbf{F}_0^{-1} = \mathbb{1}$ , où  $\mathbb{1}$  est la matrice identité de taille 3. On en déduit immédiatement que  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^2 = 1$  et  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}^1 = 0$ .

Par définition, les vecteurs de la base covariante et les vecteurs de la base contravariante sont orthogonaux entre eux. Les figures 29 et 30 représentent respectivement les bases covariantes et contravariantes sur un quart de tore, dont le paramétrage présente un angle d'hélice afin de bien mettre en valeur l'orthogonalité des vecteurs de la base contravariante avec ceux de la base covariante.

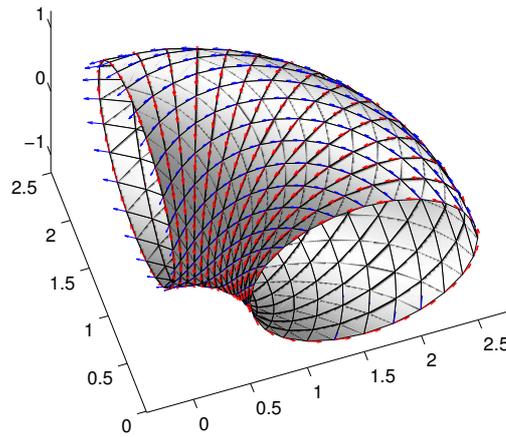


FIGURE 29 – Représentation de la base covariante sur un quart de tore

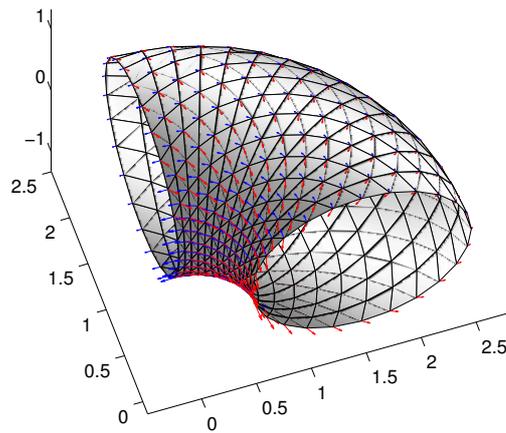


FIGURE 30 – Représentation de la base contravariante sur un quart de tore

La base locale orthonormée (voir figure 31) est également utile pour définir certaines quantités, comme par exemple l'orientation de la direction des renforts fibreux dans le cas de matériaux composites. Cet aspect est détaillé dans la partie 4.5. La direction de référence de la base locale orthonormée est choisie dans le plan tangent selon les critères que l'on souhaite. Considérons ici que le premier vecteur de la base orthonormée locale est colinéaire au vecteur  $\mathbf{a}_1$ .

Soit  $\mathbf{Q}$  le tenseur contenant les vecteurs de la base locale orthonormée :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

selon la convention choisie, on aura alors :

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \quad (55)$$

et :

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1. \quad (56)$$

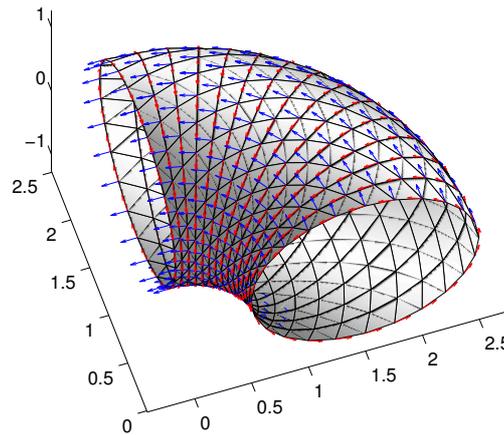


FIGURE 31 – Représentation de la base locale orthonormée sur un quart de tore

### .1.2 Bases dans le volume

Un point quelconque du volume est défini de la sorte :

$$\mathbf{x}_M(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_P(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta). \quad (57)$$

Les vecteurs de la base covariante dans le volume s'écrivent :

$$\mathbf{a}_{1\zeta} = \mathbf{x}_{P,\xi} + \zeta \mathbf{n}_{,\xi} = \mathbf{a}_1 + \zeta \mathbf{n}_{,\xi}, \quad (58)$$

$$\mathbf{a}_{2\zeta} = \mathbf{x}_{P,\eta} + \zeta \mathbf{n}_{,\eta} = \mathbf{a}_2 + \zeta \mathbf{n}_{,\eta}. \quad (59)$$

La représentation séparée de  $\mathbf{F}_\zeta$  s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_\zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{2\zeta} & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_0 + \zeta \mathbf{F}_n, \quad (60)$$

où :

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{n}_{,\eta} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (61)$$

ou encore :

$$\mathbf{F}_\zeta = \mathbf{F}_0(\mathbf{1} + \zeta \mathbf{b}_n), \quad (62)$$

avec :

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}, \xi & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}, \eta & 0 \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}, \xi & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}, \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Les vecteurs de la base contravariante dans le volume sont donc les lignes du tenseur  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  :

$$\mathbf{F}_\zeta^{-1} = \begin{pmatrix} a^1_x & a^1_y & a^1_z \\ a^2_x & a^2_y & a^2_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}. \quad (64)$$

### .1.2.1 Calcul de la représentation séparée de la base contravariante dans le cas d'un produit courbure-épaisseur faible

La représentation de la base covariante sous la forme décrite par l'équation 62 permet d'approcher l'inverse de  $\mathbf{F}_\zeta$  par un développement limité dans le cas où  $\zeta \mathbf{b}_n$  est petit devant  $\mathbf{1}$ .

Dans ce cas, la représentation séparée des vecteurs de la base contravariante s'écrit :

$$\mathbf{F}_\zeta^{-1} = (\mathbf{1} - \zeta \mathbf{b}_n + \zeta^2 \mathbf{b}_n^2) \mathbf{F}_0^{-1}. \quad (65)$$

Cette approche est typiquement utilisée dans le cadre des théories de coques.

De façon à s'intégrer correctement dans le formalisme de représentation séparée utilisée au chapitre 4, les vecteurs de la base contravariante sont exprimés de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_\zeta^{-1} = \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{F}_\zeta}} \mathbf{F}_{\text{cont}}^i(\xi, \eta) \circ \mathbf{F}_{\text{cont}}^i(\zeta), \quad (66)$$

où  $N_{\mathbf{F}_\zeta} = 3$  et :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cont}}^1(\xi, \eta) &= \mathbf{F}_0^{-1} \\ \mathbf{F}_{\text{cont}}^2(\xi, \eta) &= \mathbf{b}_n \mathbf{F}_0^{-1} \\ \mathbf{F}_{\text{cont}}^3(\xi, \eta) &= \mathbf{b}_n^2 \mathbf{F}_0^{-1} \\ \mathbf{F}_{\text{cont}}^1(\zeta) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{\text{cont}}^2(\zeta) &= \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta & -\zeta \\ -\zeta & -\zeta & -\zeta \\ -\zeta & -\zeta & -\zeta \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{\text{cont}}^3(\zeta) &= \begin{pmatrix} \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (67)$$

### .1.2.2 Calcul de la représentation séparée de la base contravariante dans le cas d'un produit courbure-épaisseur important

Dans le cas général, la courbure et l'épaisseur peuvent être importantes, le produit  $\zeta \mathbf{b}_n$  n'est alors pas forcément petit devant  $\mathbf{1}$ . Dans ce cas, l'inverse de  $\mathbf{F}_\zeta$  ne peut raisonnablement pas être approximé par un développement limité. Une alternative doit être trouvée.

L'exploitation de l'aspect discret de la méthode des éléments finis utilisée pour résoudre le problème permet d'évaluer les quantités  $\mathbf{F}_\zeta$  aussi bien aux nœuds, qu'aux points d'intégration des éléments.

Le tenseur  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  est alors calculé en tout point (nœuds ou points d'intégrations) et ses composantes sont stockées dans des tableaux dont les lignes sont les coordonnées  $(\xi, \eta)$  et les colonnes les coordonnées  $\zeta$ . Ainsi il est aisé d'appliquer une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [Drmač et Veselić, 2008a,b] ou une Décomposition en Valeurs Singulières Tronquée (truncated SVD) sur ces matrices afin d'obtenir la représentation séparée des composantes de  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  nécessaires à la résolution :

$$\mathbf{F}_\zeta^{-1} = \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{F}_\zeta}} \mathbf{F}_{\text{cont}}^i(\xi, \eta) \circ \mathbf{F}_{\text{cont}}^i(\zeta), \quad (68)$$

où  $N_{\mathbf{F}_\zeta}$  est le nombre de termes nécessaires pour représenter correctement la quantité selon la tolérance souhaitée.

Cette méthode d'évaluation systématique des composantes de  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  sur l'ensemble des points et d'y appliquer ensuite une SVD garantie d'obtenir une représentation sous forme séparée de  $\mathbf{F}_\zeta^{-1}$  même dans le cas de fortes épaisseurs et de courbures importantes.

## .2 Formes fondamentales

### .2.1 Formes fondamentales de la surface moyenne

#### .2.1.1 Première forme fondamentale et tenseur métrique

La définition de la surface par son équation paramétrique  $\mathbf{x}_P(\xi, \eta)$  permet d'exprimer la longueur de l'arc élémentaire  $ds$  :

$$\begin{aligned} I = (ds)^2 &= d\mathbf{x}_P \cdot d\mathbf{x}_P \\ &= (\mathbf{a}_1 d\xi + \mathbf{a}_2 d\eta) \cdot (\mathbf{a}_1 d\xi + \mathbf{a}_2 d\eta) \\ &= \begin{pmatrix} d\xi & d\eta \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

Le tenseur  $\mathbf{a}$  est appelé tenseur métrique. Il s'écrit en fonction des vecteurs de la base covariante de la façon suivante :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

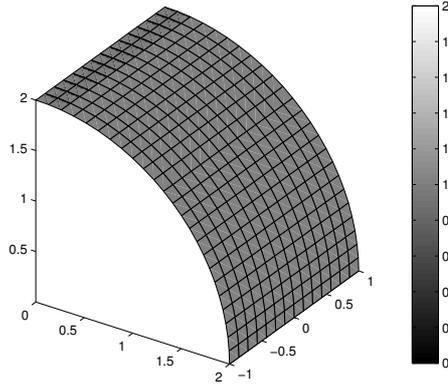


FIGURE 32 – Champ métrique sur une portion de cylindre

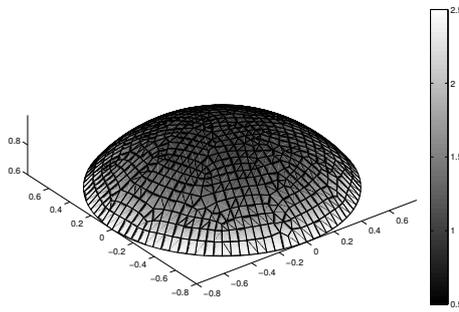


FIGURE 33 – Champ métrique sur une portion de sphère

La métrique  $a$ , est alors définie par :

$$a = \det(\mathbf{a}). \quad (71)$$

L'élément de surface  $d\mathbf{A}$  s'écrit :

$$d\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 d\xi \wedge \mathbf{a}_2 d\eta = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| d\xi d\eta \mathbf{n}. \quad (72)$$

Pour rappel, le produit vectoriel possède la propriété suivante :

$$\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det(\mathbf{a}), \quad (73)$$

on en déduit alors l'expression de l'élément de surface  $d\mathbf{A}$  en fonction de la métrique :

$$d\mathbf{A} = \sqrt{a} d\xi d\eta \mathbf{n}. \quad (74)$$

Les surfaces développables possèdent une métrique constante sur tout l'espace (voir figure 32), par contre toute surface dont la métrique varie en fonction du point n'est pas développable (voir figure 33).

Nous verrons par la suite que les surfaces à double courbures posent certains problèmes pour la mise en forme des matériaux composites [Allaoui *et al.*, 2011].

**.2.1.2 Deuxième forme fondamentale et tenseur de courbure**

La deuxième forme fondamentale est la dérivée partielle seconde de  $\mathbf{x}_P(\xi, \eta)$  projetée sur la direction de la normale. Ceci s'écrit :

$$II = \mathbf{n} \cdot d^2 \mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} d\xi & d\eta \end{pmatrix} \mathbf{b} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}, \quad (75)$$

où  $\mathbf{b}$  est le tenseur de courbure :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\xi} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{a}_{1,\eta} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{a}_{2,\xi} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{a}_{2,\eta} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

En dérivant l'expression :  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}_P = 0$ , on obtient directement que  $d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}_P + \mathbf{n} \cdot d^2 \mathbf{x}_P = 0$ . Ceci permet d'exprimer la deuxième forme fondamentale  $II$  sous la forme :

$$II = -d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}_P, \quad (77)$$

soit :

$$\mathbf{b} = - \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} \\ \mathbf{n}_{,\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

En utilisant la définition de la base contravariante,  $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1$  et  $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_1 = 0$ , on obtient :

$$\mathbf{b} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} \\ \mathbf{n}_{,\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

et enfin, la dérivée du vecteur normal  $\mathbf{n}$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} \\ \mathbf{n}_{,\eta} \end{pmatrix} = -\mathbf{b} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

On définit également  $\bar{\mathbf{b}}$  tel que ( $\mathbf{b}$  est le tenseur de courbure covariant-covariant,  $\bar{\mathbf{b}}$  est le tenseur de courbure covariant-contravariant) :

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \mathbf{a}^{-1}. \quad (81)$$

La courbure moyenne  $H$  s'écrit alors :

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}). \quad (82)$$

et la courbure Gaussienne  $K$  :

$$K = \det(\bar{\mathbf{b}}). \quad (83)$$

### .2.1.3 Troisième forme fondamentale

La troisième forme fondamentale s'écrit :

$$III = \mathbf{dn} \cdot \mathbf{dn} = \begin{pmatrix} d\xi & d\eta \end{pmatrix} \mathbf{c} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}. \quad (84)$$

En utilisant l'équation 80,  $\mathbf{c}$  devient :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{n}_{,\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{,\xi} \\ \mathbf{n}_{,\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}. \quad (85)$$

## .2.2 Formes fondamentales dans le volume et métrique 3D

L'élément différentiel s'écrit au point  $M$  :

$$d\mathbf{x}_M = d\mathbf{x}_P + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n} d\zeta = \mathbf{a}_{1\zeta} d\xi + \mathbf{a}_{2\zeta} d\eta + \mathbf{n} d\zeta. \quad (86)$$

La première forme fondamentale s'écrit, pour un point du volume :

$$I = (ds)^2 = d\mathbf{x}_M \cdot d\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \end{pmatrix} \mathbf{a}_\zeta \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix}, \quad (87)$$

où :

$$\mathbf{a}_\zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} & 0 \\ \mathbf{a}_{2\zeta} \cdot \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{2\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

En utilisant les équations 69, 77, 84 et 57, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{1\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} \\ \mathbf{a}_{2\zeta} \cdot \mathbf{a}_{1\zeta} & \mathbf{a}_{2\zeta} \cdot \mathbf{a}_{2\zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{a} - 2\zeta \mathbf{b} + \zeta^2 \mathbf{c}. \quad (89)$$

On note également :

$$a_\zeta = \det(\mathbf{a}_\zeta) = \det(\mathbf{a} - 2\zeta \mathbf{b} + \zeta^2 \mathbf{c}). \quad (90)$$

En utilisant l'expression 81,  $a_\zeta$  peut s'écrire sous la forme :

$$a_\zeta = a \det(\mathbf{1} - 2\zeta \bar{\mathbf{b}} + \zeta^2 \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}) = a (\det(\mathbf{1} - 2\zeta \bar{\mathbf{b}}))^2. \quad (91)$$

L'utilisation de l'expression des courbures moyenne et Gaussienne (équation 83 et 82) conduit à l'expression suivante :

$$\det(\mathbf{1} - 2\zeta \bar{\mathbf{b}}) = \det \left( \begin{pmatrix} 1 - \zeta b_1^1 & -\zeta b_1^2 \\ -\zeta b_2^1 & 1 - \zeta b_2^2 \end{pmatrix} \right) = 1 - 2H\zeta + K\zeta^2. \quad (92)$$

L'élément de surface  $dA_\zeta$  s'écrit alors :

$$dA_\zeta = \| \mathbf{a}_{1\zeta} \wedge \mathbf{a}_{2\zeta} \| d\xi d\eta = \sqrt{a_\zeta} d\xi d\eta, \quad (93)$$

et l'élément de volume  $d\Omega$  s'exprime :

$$d\Omega = (\mathbf{a}_{1\zeta}d\xi \wedge \mathbf{a}_{2\zeta}d\eta) \cdot \mathbf{n}d\zeta = dA_\zeta d\zeta. \quad (94)$$

En utilisant l'expression 92, on obtient enfin :

$$d\Omega = \sqrt{\mathbf{a}}(1 - 2H\zeta + K\zeta^2)d\xi d\eta d\zeta. \quad (95)$$

L'élément de volume  $d\Omega$  est nécessaire pour effectuer l'ensemble des intégrales de volume, il doit s'exprimer sous forme séparée pour s'intégrer au formalisme du chapitre 4. Son expression devient alors :

$$d\Omega = \sum_{i=1}^3 (dv_{\xi\eta}^i \cdot dv_\zeta^i) d\xi d\eta d\zeta, \quad (96)$$

où :

$$\begin{aligned} dv_{\xi\eta}^1 &= \sqrt{\mathbf{a}} & dv_\zeta^1 &= 1, \\ dv_{\xi\eta}^2 &= -2\sqrt{\mathbf{a}}H & dv_\zeta^2 &= \zeta, \\ dv_{\xi\eta}^3 &= \sqrt{\mathbf{a}}K & dv_\zeta^3 &= \zeta^2. \end{aligned} \quad (97)$$



# Index

- à la volée, 93
- abaque numérique, v
- abaque numérique, 78
- Algorithme de résolution, 11
- anisotropie, 55
  
- base contravariante, 119
- base covariante, 64, 119
- base locale orthonormée, 120
  
- campagne de calcul, 86
- cas industriel, 88
- cisaillement transverse, 41
- coefficients de dilatation thermique, 56
- coin de malle, 56
- composites stratifiés, 67
- condition homogène, 35
- contraintes planes, 4, 11
- contraintes résiduelles, 55
- convergence, 10
- coordonnées supplémentaires, 78
- cornière, 56
  
- décomposition en valeurs  
    singulières (SVD), 33
- déformation, 65
- déformation (2D), 4, 7
- déformation (3D), 24, 26
- déformations planes, 4
- déformée résiduelle, 91
- densité d'énergie de déformation, 28
- deuxième forme fondamentale, 125
- Dirichlet, 52
- Dirichlet, 7, 34
- discrétisation, 30
  
- élastique (comportement), 4, 24
- enrichissement, 7
  
- enveloppe, 91
- éprouvette entaillée, 89
- erreur relative, 28
- espaces multi-dimensionnels, 78
- espaces paramétriques, 86
- état de contrainte tridimensionnel, 37
- exothermie, 55
- extrusion, 22
  
- fissure, 89
- flambage, 37
- fonction de forme, 28
- force, 32
- forces de surfaces, 25
- forces de volumes, 25
- frappage, 68
  
- géométrie différentielle, 63
  
- Hadamard (produit), 6
- hors plan, 33
- hypothèse cinématique, 39
  
- impact mémoire, 15, 19
- isotrope, 26
  
- matériau monoclinique, 26
- matériaux composites, 35
- membrane, 33
- méthode de la sécante, 57
- méthode des éléments finis, 8
- métrique 3D, 126
- microstructure, 49
- modèle 2D, 4
- modèle 3D, 37
- multi-paramétriques, 77
- multiplicateur de Lagrange, 51
  
- Neumann, 32

nid d'abeille, 50

optimisation, 56

orthotrope, 26

panneau auto-raidi, 38

paramètres d'orientation, 82

pénalisation, 51

pièces nominales, 79

plaque trouée, 35

plaques, 22

point fixe, 9

poutres, 22

Première forme fondamentale, 123

produit tensoriel, 19, 21

profilé, 22

propagation, 89

raidisseur, 37, 45

raidisseur courbe, 49

représentation séparée (2D), 6

résidu, 10

sandwich, 50

simulations paramétriques, 86

solution multidimensionnelle, 78

stratifiés, 25

surface développable, 124

surface moyenne, 22

SVD, 123

taux de restitution d'énergie, 89

temps de calcul, 15, 19, 30

temps réel, 93

tenseur de courbure, 125

tenseur métrique, 123

théorie de plaque, 22, 38

thermodurcissable, 55

thermoélastique, 55, 82

thermoplastique, 55

tolérances géométriques, 56, 92

troisième forme fondamentale, 126

variabilité, 79

Voigt, 24

Von Mises, 28





# Bibliographie

- Allaoui, S., Boisse, P., Chatel, S., *et al.*, 2011, “Experimental and numerical analyses of textile reinforcement forming of a tetrahedral shape,” *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 42, no. 6, pp. 612–622. [68](#), [124](#)
- Ammar, A., Chinesta, F., Diez, P., *et al.*, 2010, “An error estimator for separated representations of highly multidimensional models,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, no. 25-28, pp. 1872–1880. [30](#)
- Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F., *et al.*, 2006, “A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids,” *Journal Of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 139, no. 3, pp. 153–176. [iv](#), [7](#)
- Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F., *et al.*, 2007, “A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids - Part II : Transient simulation using space-time separated representations,” *Journal Of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 144, no. 2-3, pp. 98–121. [5](#), [66](#)
- Batoz, J.-L., 1992, *Modélisation des structures par éléments finis, tome 3 : coques*, Hermes Sciences Publicat. [63](#)
- Bognet, B., Ghnatios, C., Barasinski, A., *et al.*, 2011, “Composites manufacturing processes. Towards an advanced simulation,” *Revue des Composites et des Matériaux Avancés* pp. 23–32. [55](#)
- Bognet, B., Leygue, A., *et* Chinesta, F., 2012a, “On the fully 3D simulations of thermoelastic models defined in plate and shell geometries,” *European Journal of Computational Mechanics* , no. September 2012, pp. 37–41. [55](#)
- Bognet, B., Leygue, A., Chinesta, F., *et al.*, 2012b, “Advanced Simulation of Models Defined in Plate Geometries : 3D Solutions with 2D Computational Complexity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201-204, pp. 1–12. [25](#), [66](#), [79](#), [93](#)
- Boisse, P., Cherouat, A., Gelin, J. C., *et al.*, 1995, “Experimental study and finite element simulation of a glass fiber fabric shaping process,” *Polymer Composites* 16, no. 1, pp. 83–95. [68](#)
- Carrera, E., 1996, “C<sup>0</sup> Reissner-Mindlin Multilayered Plate Elements Including Zig-Zag and Interlaminar Stress Continuity,” *Int J for Num Meth in Engineering* 39, no. 11, pp. 1797–1820. [iii](#)

- Chapelle, D. et Bathe, K. J., 2003, *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*, Springer-Verlag. **63**
- Chinesta, F., Ammar, A., et Cueto, E., 2010, “Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models,” *Archives of Computational Methods in Engineering* 1, pp. 327–350. **iv**
- Chinesta, F., Leygue, A., Bognet, B., *et al.*, 2012, “First steps towards an advanced simulation of composites manufacturing by automated tape placement,” *International Journal of Material Forming*. **55, 56**
- Drmač, Z. et Veselić, K., 2008a, “New Fast and Accurate Jacobi SVD Algorithm. I,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 29, no. 4, pp. 1322–1342. **7, 33, 117, 123**
- Drmač, Z. et Veselić, K., 2008b, “New Fast and Accurate Jacobi SVD Algorithm. II,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 29, no. 4, pp. 1343–1362. **7, 33, 117, 123**
- Falcó, A. et Nouy, A., 2011, “Proper generalized decomposition for nonlinear convex problems in tensor Banach spaces,” *Numerische Mathematik* 121, no. 3, pp. 503–530. **13, 27**
- Ghnatios, C., Chinesta, F., Cueto, E., *et al.*, 2011, “Methodological approach to efficient modeling and optimization of thermal processes taking place in a die : Application to pultrusion,” *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 42, no. 9, pp. 1169–1178. **55, 56**
- Giner, E., Bognet, B., Rodenas, J., *et al.*, 2012, “The Proper Generalized Decomposition (PGD) as a numerical procedure to solve 3D cracked plates in linear elastic fracture mechanics,” *International Journal of Solids and Structures*. **90**
- Gosselet, P. et Rey, C., 2006, “Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics,” *Archives of computational methods in engineering* 13, no. July 2005, pp. 515–572. **31**
- Hildebrand, F. B., Reissner, E., et Thomas, G. B., 1949, “Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells,” *NACA TN1833*. **iii**
- Ladevèze, P. et Chamoin, L., 2011, “On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, no. 23-24, pp. 2032–2047. **30**
- Leygue, A. et Verron, E., 2010, “A First Step Towards the Use of Proper General Decomposition Method for Structural Optimization,” *Archives of Computational Methods in Engineering* 17, no. 4, pp. 465–472. **82**
- Li, F. Z., Shih, C. F., et Needleman, A., 1985, “A comparison of methods for calculating energy release rates,” *Engineering Fracture Mechanics* 21, no. 2, pp. 405–421. **89**
- Liew, K., 2003, “Three-dimensional modelling of elastic bonding in composite laminates using layerwise differential quadrature,” *International Journal of Solids and Structures* 40, no. 7, pp. 1745–1764. **iii**
- Love, A. E. H., 1889, *The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell*, Philosophical transactions of the Royal Society of London, Harrison and Sons. **39**

- Mindlin, R., 1951, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics* Vol. 18, pp. pp. 31–38. 41
- Mollenhauer, D., 2000, "Measurements of interlaminar deformation along the cylindrical surface of a hole in laminated composite materials by Moiré interferometry," *Composites Science and Technology* 60, no. 12-13, pp. 2375–2388. 35
- Niordson, F. I., 1985, *Shell Theory*, Elsevier Science Ltd. 63
- Ochoa, O. O. et Reddy, J. N., 1992, "Finite Element Analysis of Composite Laminates - Ochoa and Reddy," . iii
- Pagano, N. J., 1969, "Rectangular Bidirectional and Sandwich Plates," *October*. iii
- Pagano, N. J., 1970, "Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plate," *J of composite materials* 4, pp. 20–34. iii, 3
- Pandit, M., Sheikh, a., et Singh, B., 2008, "An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core," *Finite Elements in Analysis and Design* 44, no. 9-10, pp. 602–610. iii
- Passieux, J. et Périé, J., 2012, "High resolution digital image correlation using proper generalized decomposition : PGD-DIC," *International Journal for Numerical . . .* 15
- Patrick Muller, C. O., 1999, *Introduction aux coques minces élastiques*, Hermès science publications. 63
- Ramtekkar, G., 2003, "Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate," *Computers & Structures* 81, no. 22-23, pp. 2183–2198. iii
- Reddy, J. N., 2004, *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*, second edi ed., CRC PRESS. iii, 63
- Reissner, E., 1945, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *Journal of Applied Mechanics* Vol. 12, pp. pp. A68–77. 41
- Reissner, E., 1977, *A Note on Generating Generalized Two-Dimensional Plate and Shell Theories*, Defense Technical Information Center. iii
- Reissner, E., 1979, *Note on the Effect of Transverse Shear Deformation in Laminated Anisotropic Plates*, California univ san diego la jolla dept of applied mechanics and engineering sciences. iii
- Semedogarcia, J., Motasoaes, C., et Reddy, J. N., 2004, "Analysis of laminated adaptive plate structures using layerwise finite element models," *Computers & Structures* 82, no. 23-26, pp. 1939–1959. iii
- Sheng, H., 2002, "A state space finite element for laminated composite plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191, no. 37-38, pp. 4259–4276. iii
- Shih, C., Moran, B., et Nakamura, T., 1986, "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body," *International Journal of fracture* 30, pp. 79–102. 89
- Soutis, C. et Edge, E. C., 1997, "Interlaminar stresses in composite laminates with a circular hole," 8223, no. 96, pp. 223–232. 35

- Timoshenko, S. P. et Woinowsky-Krieger, S., 1959, *Theory of plates and shells*, second ed., McGraw-Hill. [iii](#), [3](#), [39](#), [63](#)
- Ugrimov, S., 2002, "Generalized theory of multilayer plates," *International Journal of Solids and Structures* 39, no. 4, pp. 819–839. [iii](#)
- Umasree, P. et Bhaskar, K., 2006, "Analytical solutions for flexure of clamped rectangular cross-ply plates using an accurate zig-zag type higher-order theory," *Composite Structures* 74, no. 4, pp. 426–439. [iii](#)
- Vel, S., 2000, "The generalized plane strain deformations of thick anisotropic composite laminated plates," *International Journal of Solids and Structures* 37, no. 51, pp. 715–733. [iii](#)
- Vidal, P. et Polit, O., 2009, "Assessment of the refined sinus model for the non-linear analysis of composite beams," *Composite Structures* 87, no. 4, pp. 370–381. [iii](#)
- Xiao, J., Gilhooley, D., Batra, R., *et al.*, 2008, "Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method," *Composites Part B : Engineering* 39, no. 2, pp. 414–427. [iii](#)
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., et Zhu, J. Z., 2005, *The finite element method its basis & fundamentals*, 6th ed., Elsevier. [iii](#), [3](#)



# Thèse de Doctorat

Brice BOGNET

**Titre de thèse : Stratégies numériques avancées pour la simulation de modèles définis sur des géométries de plaques et coques : solutions 3D avec une complexité 2D**

**Title of thesis: Advanced Simulation of Models Defined in Plate and shell Geometries: 3D Solutions with 2D Computational Complexity**

## Résumé

La plupart des produits d'ingénierie actuels, que ce soit dans le domaine des transports (naval, aéronautique, automobile, ...), de l'énergie (éolien, ...) ou du génie civil, font massivement appel à des pièces de faible épaisseur de formes variées : les plaques et les coques. Les matériaux métalliques sont toujours très utilisés, bien que l'utilisation des matériaux composites augmente fortement. La conception et le dimensionnement des pièces métalliques et composites nécessite par conséquent des outils de calculs adaptés et performants.

L'approche retenue est d'effectuer des simulations mécaniques 3D et d'utiliser la méthode de réduction de modèle PGD (Proper Generalized Decomposition) pour résoudre le problème en variables d'espace séparées. Cette méthode consiste à chercher la solution sous la forme d'une somme finie de produits de fonctions des coordonnées de la surface moyenne et de fonctions de la coordonnée de l'épaisseur. La résolution par la méthode des éléments finis des problèmes 2D (fonction des coordonnées de la surface moyenne) et 1D (fonction de la coordonnée de l'épaisseur) issus de la séparation des variables permet de construire de façon itérative la solution 3D du problème avec une complexité qui reste celle d'un problème 2D.

Des variables supplémentaires sont également ajoutées en tant que coordonnées du problème afin d'inclure dans les simulations d'éventuelles incertitudes, variabilités, des paramètres de conception ou des paramètres du procédé d'élaboration. Ces simulations multidimensionnelles fournissent donc des abaques numériques qui peuvent ensuite être utilisées pour la conception et l'optimisation.

## Mots clés :

**plaques, coques, matériaux composites, matériaux métalliques, réduction de modèle, PGD (Proper Generalized Decomposition), simulations 3D, éléments finis**

## Abstract

Nowadays, most of the engineering products for transports (naval, aeronautical, automotive, ...), energy (wind power, ...), and civil engineering widely uses parts of small thickness: plates and shells. Metallic materials are still very used although composite materials are more and more used. The design and dimensioning of metal and composite parts therefore requires adapted and efficient simulation tools.

The here chosen approach is to perform 3D mechanical simulations combined with a PGD (Proper Generalized Decomposition) based model reduction method to solve the problem in separated space variables. This method consists in looking for the solution under the form of a finite sum of products of functions involving the mean surface's coordinates and functions involving the coordinate of the thickness. The finite element method is used to solve the 2D (based on the coordinates of the mean surface) and 1D (depending on the thickness coordinate) problems from the variables separation. Thanks to this method, the 3D solution of the problem is iteratively built, with a complexity that scales like the complexity of a 2D problem.

Additional variables are added as coordinates of the problem in order to include possible uncertainties, variabilities, design parameters or process parameters in the simulations. These multidimensional simulations therefore provide numeric charts, which can then be used for design and optimization.

## Key Words:

**plates, shells, composite materials, metallic materials, model reduction, PGD (Proper Generalized Decomposition), 3D simulations, finite elements**

