



Comportement multiaxial de pièces élastomères pré-contraintes

Anne-Sophie Lectez

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Lectez. Comportement multiaxial de pièces élastomères pré-contraintes : Application aux suspensions moteur. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes, 2014. Français. <tel-01103755>

HAL Id: tel-01103755

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01103755>

Submitted on 5 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Anne-Sophie LECTEZ

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Discipline : Génie Mécanique

Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Soutenance le 14 octobre 2014

Comportement multiaxial de pièces élastomères pré-contraintes

Application aux suspensions moteur

JURY

Président :	Andrei CONSTANTINESCU , Directeur de Recherche CNRS, LMS, École Polytechnique
Rapporteurs :	Julie DIANI , Directeur de Recherche CNRS, PIMM, Arts et Métiers ParisTech Stéphane MEO , Professeur d'Université, LMR, Université François Rabelais de Tours
Examineurs :	Alexander LION , Professeur d'Université, Universität der Bundeswehr München Anne-Sophie BERANGER , Ingénieur, Renault S.A.
Invité :	Franck LE BRAZIDEC , Ingénieur, Renault S.A.
Directeur de Thèse :	Erwan VERRON , Professeur d'Université, GeM, École Centrale de Nantes
Co-directeur de Thèse :	Bertrand HUNEAU , Maître de conférences HDR, GeM, École Centrale de Nantes

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements vont à Julie Diani et Stéphane Méo, qui ont accepté de rapporter mes travaux ; pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit, leurs rapports et les interrogations et discussions que nous avons partagées avant et pendant la soutenance. Je souhaite également remercier Andrei Constantinescu d'avoir accepté de présider le jury de soutenance, ainsi qu'Alexander Lion de s'être déplacé jusqu'à Nantes et d'avoir partagé son expertise. Ainsi, je remercie tous les membres du jury d'avoir étudié mes travaux et fait part de leurs idées, ce qui m'a permis de prendre du recul et de considérer ma thèse sous des angles nouveaux.

Je tiens ensuite à remercier mes encadrants, d'abord du côté industriel au travers de la collaboration avec Renault, Anne-Sophie Béranger et Franck Le Brazidec, qui m'ont permis d'avoir les deux pieds dans l'application industrielle et la tête dans les sciences, puisque nous avons pu suivre à la fois le fil conducteur de la caractérisation et de la modélisation d'une pièce de suspension moteur, tout en développant les points de recherche qui nous paraissaient prometteurs. Mes remerciements vont également au service qui m'a accueillie et notamment à Christophe Le Guyader, Pascal Cabaret et Franck Aihpo pour leur disponibilité. Du côté du laboratoire, je remercie mes directeur et co-directeur de thèse, Erwan Verron et Bertrand Huneau pour leur confiance, leur soutien, mais surtout pour m'avoir appris la recherche et m'y avoir donné goût. Ils m'ont également poussée à me dépasser, leur optimisme et leur motivation ayant finalement raison de mes doutes initiaux dans de nombreux cas.

Je remercie également l'ensemble de l'équipe MPTC du GeM, pour le cadre de travail, combinant les moments de détente aux discussions riches, et notamment Violette, Pierre et J-C, collègues et amis de l'équipe SM, ceux qui m'ont aidée lors de la mise en place des différentes campagnes d'essais (Franck et Pierrick), et les étudiants (Marko, Nathan et Sébastien) qui ont contribué aux campagnes d'essais par leurs projets.

Je remercie enfin Lucs et Sylvies pour la détente en musique, mais aussi mes parents pour leur soutien sans faille (labor omnia...) et Morgan, notamment pour sa patience à toute épreuve. Pour terminer, encore merci à tous, et vivement la suite !

Remerciements

Table des matières

Introduction générale	1
I De la problématique industrielle à la problématique scientifique	3
1 Problématique industrielle	5
1.1 Présentation du système étudié	6
1.1.1 La suspension moteur	6
1.1.2 Les enjeux de la problématique industrielle	6
1.1.3 Caractéristiques du tampon moteur	7
1.2 Sollicitations subies par une suspension moteur	8
1.2.1 Les conditions d'usage	8
1.2.2 Analyse des débattements du tampon moteur	8
1.3 Modèle éléments finis du tampon moteur	10
1.3.1 Construction d'un modèle adapté au cas de la précharge moteur	11
1.3.2 Adaptation du modèle pour des chargements verticaux plus sévères	15
2 Analyse des déformations subies par un tampon moteur	21
2.1 Un outil original de compréhension de l'état de déformation : des invariants bien choisis du tenseur des déformations vraies	22
2.2 Méthode	22
2.3 Résultats	23
2.3.1 Précharge de l'étrier et du moteur	23
2.3.2 Tronçon 10	23
2.3.3 Tronçon 23	26
2.3.4 Tronçon 14	29
2.4 Bilan	31
II Essais de traction-torsion sur élastomères	33
1 Méthodologie expérimentale de la traction-torsion sur élastomère	35
1.1 Équations de la traction-torsion quasi-statique et isochore d'un cylindre	36
1.2 Conception de l'éprouvette	41

1.2.1	Les contraintes de conception	41
1.2.2	Étude préliminaire	42
1.2.3	Géométrie finale	47
1.2.4	Bilan	49
1.3	Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents	51
1.3.1	Par simulation éléments finis	52
1.3.2	Par stéréo-corrélation d'images	55
1.3.3	Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux	66
2	Post-traitement des essais de traction-torsion sur élastomère	71
2.1	Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?	72
2.1.1	Calcul des dérivées de l'énergie de déformation	74
2.1.2	Résultats	79
2.1.3	Discussion	86
2.1.4	Bilan	89
2.2	Post-traitement des essais cycliques	90
2.2.1	Post-traitement des déplacements et angles : linéarisation de la déformation	91
2.2.2	Post-traitement des efforts et couples	93
2.2.3	Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi viscoélastique linéarisée pour des oscillations autour d'une grande précharge quasi-statique multiaxiale ?	96
2.2.4	Bilan	106
3	Résultats des essais de traction-torsion	109
3.1	Description de la campagne d'essais	110
3.1.1	Accommodation	110
3.1.2	Essais quasi-statiques	111
3.1.3	Essais cycliques	113
3.1.4	Bilan	118
3.2	Essais quasi-statiques	119
3.2.1	Base de données et répétabilité	119
3.2.2	Observations classiques sur les courbes de traction-torsion quasi-statique	120
3.2.3	Influence du chemin suivi	125
3.2.4	Contraintes expérimentales	128
3.2.5	Dérivées de l'énergie de déformation expérimentales	129
3.3	Essais cycliques autour d'une précharge	133
3.3.1	Base de données et incertitudes	133
3.3.2	Comportement dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude	135
3.3.3	Comportement dynamique en fonction de la précharge	141

III	Modélisation	149
1	Modélisation du comportement quasi-statique en traction-torsion	151
1.1	Les modèles hyperélastiques	152
1.1.1	Les modèles physiques	152
1.1.2	Les modèles phénoménologiques	153
1.1.3	Bilan	154
1.2	Méthode d'identification des paramètres des trois modèles hyperélastiques sélectionnés	155
1.2.1	Choix du nombre de paramètres	155
1.2.2	Procédure d'identification	156
1.3	Résultats	160
1.3.1	Résultats sur la base de données d'identification	160
1.3.2	Résultats sur les autres essais en traction-torsion simultanées	165
2	Modélisation du comportement sous chargement cyclique superposé à une précharge statique	175
2.1	Les modèles viscoélastiques	176
2.1.1	L'approche intégrale	177
2.1.2	L'approche par variables internes	177
2.1.3	Une caractéristique commune entre certains modèles des deux ap- proches	178
2.2	Les modèles de Zener et de Poynting-Thomson en grandes déformations	180
2.2.1	Décomposition multiplicative des deux modèles	180
2.2.2	Relation contrainte/déformation pour le modèle de Zener	183
2.2.3	Relation contrainte/déformation pour le modèle de Poynting-Thomson	186
2.3	Linéarisation de modèles viscoélastiques	188
2.3.1	Méthode de linéarisation	188
2.3.2	Linéarisation du modèle de Zener	191
2.3.3	Linéarisation du modèle de Poynting-Thomson	193
2.3.4	Bilan	196
2.4	Identification des paramètres des modèles	198
2.4.1	Les paramètres du modèle de Zener	198
2.4.2	Les paramètres du modèle de Poynting-Thomson	200
2.5	Résultats	201
2.5.1	Prédiction des efforts et couples de la précharge	201
2.5.2	Prédiction des efforts et couples des oscillations	202
IV	Validation du modèle	219
1	Adaptation de la modélisation pour l'application numérique	221
1.1	Méthode d'adaptation	222
1.1.1	Les modèles existants dans Abaqus	222

1.1.2	Définition de la loi viscoélastique	224
1.1.3	Analyse de la loi de comportement adaptée à l'utilisation d'Abaqus avec précharge	229
1.2	Résultats sur éprouvette	234
1.2.1	En statique	234
1.2.2	En cyclique	238
2	Validation du modèle éléments finis de la pièce de suspension moteur	245
2.1	En statique	246
2.1.1	Déplacement en Z	246
2.1.2	Déplacement en X	253
2.1.3	Bilan	255
2.2	En cyclique	257
2.2.1	Oscillations en Z autour de la précharge	257
2.2.2	Oscillations en X autour de la précharge	258
2.2.3	Sollicitations cyclique des butées X seules	258
2.2.4	Bilan	260
	Conclusion générale	267
	Références bibliographiques	273
	Annexes	285
A	Résultats bruts des essais quasi-statiques en traction/torsion	285
A.1	Essais simultanés	285
A.2	Essais en chemin haut	286
A.3	Essais en chemin bas	287
B	Résultats d'essais d'oscillations autour d'un précharge quasi-statique en termes de contraintes équivalentes en fonction de la déformation	289
B.1	Oscillations en traction/compression uniaxiale	289
B.1.1	Précharges en traction uniaxiale	289
B.1.2	Précharges en compression uniaxiale	290
B.1.3	Précharges en torsion pure	291
B.1.4	Précharges en traction/torsion simultanées	292
B.2	Oscillations en torsion pure	293
B.2.1	Précharges en traction uniaxiale	293
B.2.2	Précharges en compression uniaxiale	295
B.2.3	Précharges en torsion pure	296
B.2.4	Précharge en traction/torsion simultanées	297

Introduction générale

De par leur capacité à supporter de grandes déformations réversibles et leurs propriétés dissipatives, les élastomères sont des matériaux tout à fait adaptés à de nombreuses applications industrielles. L'une de ces applications concerne le système de suspension moteur d'une voiture, qui est composé de plusieurs pièces. La définition et la validation des systèmes de suspension moteur est l'une des tâches du constructeur automobile Renault pour ses véhicules ; pour ce faire, il considère le système dans sa globalité, les pièces du système ne pouvant être considérées indépendamment les unes des autres. Actuellement, la validation d'un système de suspension moteur consiste principalement en la mise en place d'essais, sur véhicule et sur bancs. Or, dans un contexte de réduction des coûts et délais de développement de nouveaux véhicules, une plus grande part de simulation est nécessaire ; celle-ci permettrait notamment de réduire le nombre d'essais et de prototypes. Plus précisément, le comportement d'un système de suspension moteur est simulé via un logiciel d'analyse multicorps. Cette approche permet de modéliser simplement la suspension moteur par des corps rigides reliés entre eux par des liaisons mécaniques. Chaque liaison mécanique, appelée macro-élément dans ce contexte, correspond à une pièce de la suspension moteur, et est définie par la raideur globale de la pièce, c'est-à-dire par des courbes force/déplacement. Actuellement, les courbes sont issues de trois essais dans trois directions différentes, et sont la moyenne des courbes de charge et de décharge.

L'objectif du projet dans lequel s'inscrit cette thèse est d'affiner la modélisation du comportement des pièces en ne considérant plus les raideurs dans les trois directions comme indépendantes, mais en prenant en compte leurs couplages, et en ne négligeant plus la dissipation. L'objectif de la thèse est de développer une méthodologie de caractérisation, de modélisation, et de validation de cette modélisation pour l'une des pièces de la suspension. Cette méthodologie pourra être utilisée dans le calcul des raideurs globales de la pièce, et applicable aux autres types de pièce. Pour le constructeur, cette thèse permet d'adopter un nouveau point de vue qui place non pas le système de suspension, ni même la pièce, mais bien le matériau, à savoir un élastomère, au cœur de l'étude.

La première étape de l'étude du comportement du matériau consiste à déterminer les déformations qu'il subit, et plus précisément quelles sont les amplitudes et la multiaxialité à prendre en compte. Pour cela, l'enveloppe des déplacements imposés à la pièce de suspension moteur sous conditions d'usage doit d'abord être déterminée. Ensuite, les

déformations correspondantes sont calculées au travers d'invariants bien choisis grâce à un modèle éléments finis de la pièce. Cette étape est traitée dans la première partie de cette thèse, et permet de faire la transition entre la problématique industrielle et la problématique scientifique. En effet, à l'issue de cette partie, il sera établi que les grandes déformations et la multiaxialité devront être pris en compte dans la modélisation. De plus, les chargements de la pièce sont toujours effectués autour d'une grande précharge due au poids du moteur. Ces chargements peuvent être quasi-statiques ou dynamiques (une pièce peut être sollicitée jusqu'à quelques kilohertz), en grandes ou petites déformations. Nous choisissons ici de restreindre l'étude à deux types de chargement :

- Les chargements quasi-statiques en grandes déformations ;
- Les chargements dynamiques entre 0,1 et 30 Hz en petites déformations autour d'une grande précharge quasi-statique.

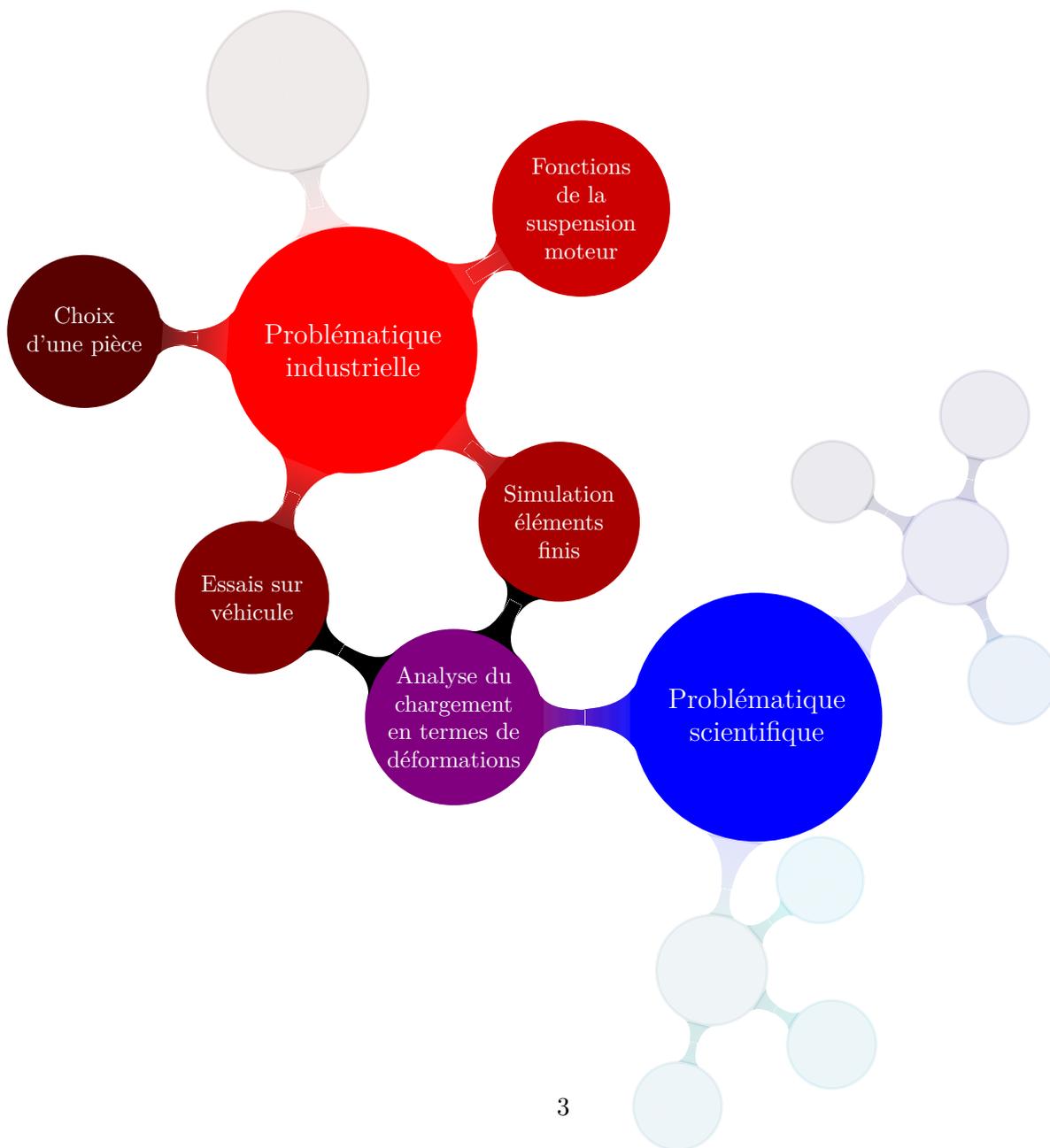
La seconde étape consiste à caractériser le matériau pour les deux types de chargement en prenant en compte la multiaxialité, et est présentée dans la seconde partie de cette thèse. Pour cela, des essais de traction-torsion seront mis en place, permettant ainsi de n'avoir recours qu'à une géométrie d'éprouvette et une machine d'essais. Une éprouvette cylindrique est alors conçue, de sorte que les déplacements et angles imposés par la machine génèrent des amplitudes et modes de déformation à l'échelle de l'éprouvette qui correspondent à ceux subis par la pièce de suspension moteur. La question se pose alors de savoir quelles sont les grandeurs pertinentes à étudier pour caractériser le matériau. Alors que les résultats d'essais sont des efforts et des couples, il est souhaitable de calculer des grandeurs qui ne dépendent pas de la géométrie de l'éprouvette, c'est-à-dire des contraintes ou des énergies de déformation. Or, la relation entre efforts et couples et contraintes ou énergies de déformation est complexe dans le cas de la traction-torsion, puisque ces dernières dépendent des coordonnées du point considéré. C'est pourquoi le post-traitement des essais fera l'objet d'une attention particulière.

La troisième étape, présentée en troisième partie de ce manuscrit, consiste à modéliser le comportement du matériau à partir des résultats d'essais. Le comportement du matériau sous chargement quasi-statique en grandes déformations sera modélisé par une loi de comportement hyperélastique incompressible. Plusieurs lois existantes seront comparées aux résultats d'essais, puis l'une d'entre elles sera sélectionnée. Le comportement du matériau soumis à de petites oscillations autour d'une grande précharge quasi-statique sera modélisé par une loi de comportement viscoélastique linéarisée. Après une linéarisation classique, une linéarisation originale sera proposée, l'intérêt étant d'obtenir une dépendance de toute la contrainte à la précharge, de la manière la plus naturelle possible. Les deux modèles seront ensuite comparés aux résultats d'essais, puis l'un d'entre eux sera sélectionné.

Enfin, la dernière étape consiste à valider le modèle de la pièce, en utilisant les lois de comportement identifiées dans le modèle éléments finis de la pièce. Cette étape sera présentée dans la quatrième et dernière partie de ce manuscrit. Elle nécessite en premier lieu une adaptation des paramètres, l'objectif étant d'utiliser les lois de comportement déjà existantes dans un logiciel commercial d'éléments finis. Finalement, les résultats issus du modèle éléments finis seront comparés à des essais sur pièce seule.

Première partie

De la problématique industrielle à la problématique scientifique



Chapitre 1

Problématique industrielle

Sommaire

1.1	Présentation du système étudié	6
1.1.1	La suspension moteur	6
1.1.2	Les enjeux de la problématique industrielle	6
1.1.3	Caractéristiques du tampon moteur	7
1.2	Sollicitations subies par une suspension moteur	8
1.2.1	Les conditions d'usage	8
1.2.2	Analyse des débattements du tampon moteur	8
1.3	Modèle éléments finis du tampon moteur	10
1.3.1	Construction d'un modèle adapté au cas de la précharge moteur	11
1.3.2	Adaptation du modèle pour des chargements verticaux plus sévères	15

Introduction

Dans ce premier chapitre, le cadre de l'étude est défini d'un point de vue industriel. En premier lieu, les différentes fonctions de la suspension moteur ainsi que les enjeux de sa modélisation sont décrits. De plus, un type de pièce, le tampon moteur, est choisi pour développer la méthodologie de modélisation et ces caractéristiques sont définies. Dans un deuxième temps, les déplacements subis par différentes parties de cette pièce sous plusieurs conditions d'usage sont mesurés grâce à une campagne d'essais sur véhicule. L'analyse de ces résultats permet alors de définir l'enveloppe des débattements. Enfin, un modèle éléments finis de la pièce est construit, grâce auquel l'enveloppe des débattements pourra être convertie en une enveloppe de déformations.

1.1 Présentation du système étudié

1.1.1 La suspension moteur

La suspension moteur remplit deux fonctions principales :

- Assurer la liaison entre le groupe moto-propulseur (GMP) et la caisse du véhicule. Il s'agit non seulement de limiter les débattements du GMP pour toutes les conditions d'usage rencontrées, mais aussi de transmettre le couple moteur et donc d'assurer la motricité du véhicule ;
- Filtrer les vibrations provenant du moteur pour éviter les nuisances sonores et les vibrations transmises aux occupants du véhicule.

Pour les moteurs transversaux, seul cas que nous considérons ici, le moteur est pendulé. Le GMP est alors suspendu par deux pièces, le tampon boîte, côté boîte de vitesses et le tampon moteur, côté moteur. Une troisième pièce, la biellette, relie le GMP au berceau et assure la reprise de couple. La figure I.1.1 montre le positionnement de ces trois pièces dans le véhicule. Pour les moteurs à plus fort couple, une biellette peut être ajoutée en position haute.

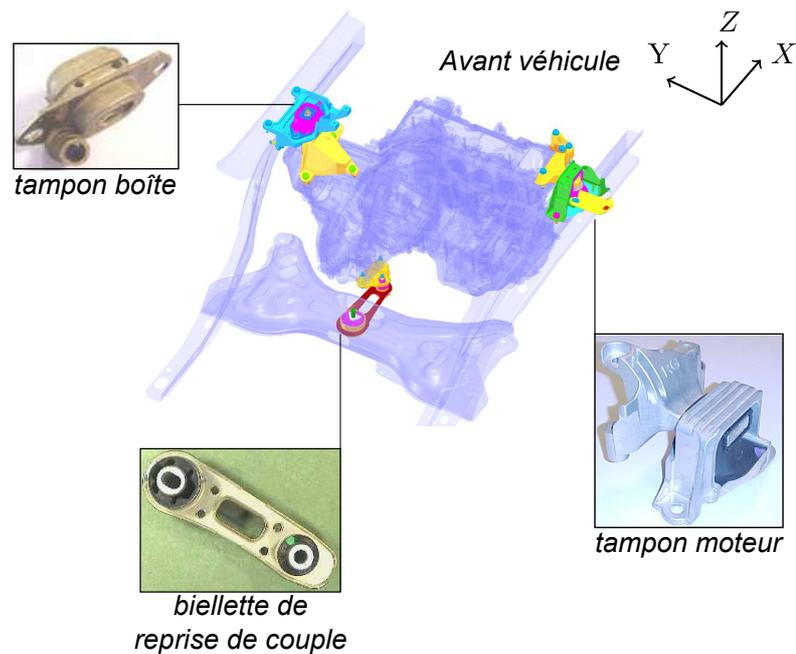


FIGURE I.1.1 : Schéma d'un moteur pendulé avec système de suspension moteur 3 points et positionnement du repère véhicule

1.1.2 Les enjeux de la problématique industrielle

Le développement d'une nouvelle pièce de suspension moteur débute par l'élaboration du cahier des charges. Il spécifie les objectifs à atteindre, notamment en terme d'endu-

rance, de contraintes architecturales, de confort et d'acoustique. La prise en compte de l'ensemble de ces contraintes nécessite des compromis. Ainsi, une raideur élevée permet de limiter efficacement les débattements du groupe moto-propulseur, alors qu'elle est un obstacle à la filtration des vibrations du moteur. Un prototype est proposé, puis soumis à validation vis-à-vis des différents critères fixés initialement. Une grande part de la validation se fait expérimentalement, sur bancs d'essais ou sur piste en instrumentant le véhicule.

Dans ce contexte, une modélisation précise de la pièce apporterait d'abord une meilleure compréhension de son comportement mécanique. Cela permettrait de fixer des objectifs plus précis et de diminuer le nombre de prototypes nécessaires. De plus, une diminution du nombre d'essais à réaliser serait rendue possible par le développement d'outils de calcul basés sur cette modélisation. Enfin, la précision apportée permettrait de dimensionner le système de suspensions moteur au juste nécessaire et par exemple de mieux cerner les cas où une seconde biellette est nécessaire. La méthode de caractérisation et de modélisation présentée dans ce manuscrit a été développée sur un tampon moteur, présenté ci-après, mais elle est bien sûr applicable aux autres types de pièces.

1.1.3 Caractéristiques du tampon moteur

Parmi les différents tampons moteurs couvrant la gamme de tous les GMP, une pièce a été retenue, à savoir un tampon tout caoutchouc, utilisé notamment sur les voitures de marque Logan (Dacia). Deux pièces composent une suspension moteur : la pièce de filtration avec la partie en élastomère et la pièce de liaison. Les différentes parties du tampon moteur sont identifiées sur la figure I.1.2, qui en montre une vue de dessus et une vue de face. La pièce de liaison du tampon moteur, appelée coiffe moteur, est visible

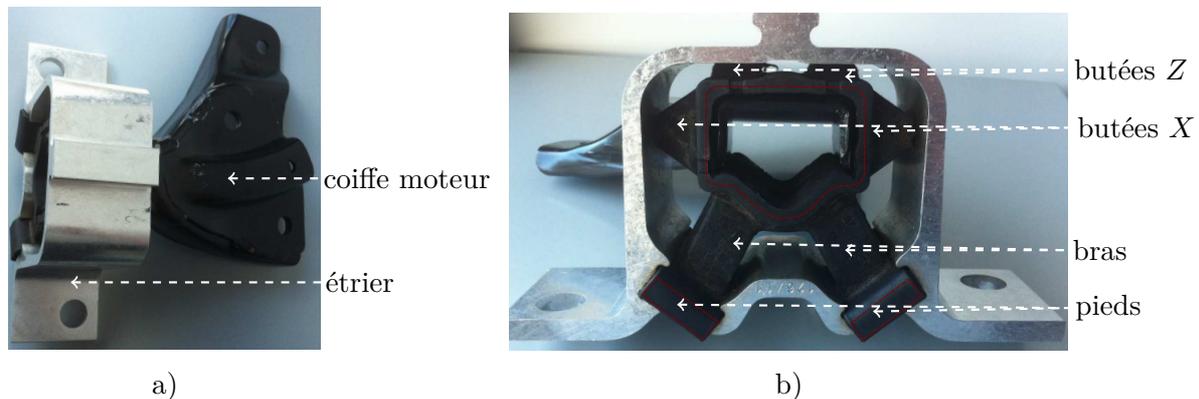


FIGURE I.1.2 : Vues de dessus (à gauche) et de face (à droite) du tampon moteur étudié. La position des inserts métalliques est indiquée en rouge

sur la figure I.1.2a. La coiffe moteur est emmanchée en force dans la partie centrale de la pièce de filtration, et effectue la liaison entre la pièce et le moteur. Deux parties sont à distinguer dans la pièce de filtration : l'étrier en aluminium qui permet de fixer

la suspension sur la caisse et de limiter ses débattements, identifié sur la figure [I.1.2a](#) et la partie composée principalement d'élastomère, renforcée par des inserts en acier. L'élastomère est un mélange de caoutchouc naturel (NR) et de styrène-butadiène (SBR) chargé au noir de carbone à hauteur de 30 pce, pce signifiant part pour cent d'élastomère : ici, 30 g de noir de carbone ont été incorporés dans 100 g de matrice élastomère. Afin de mieux cerner le comportement de la pièce entière, il est nécessaire de s'intéresser à chacun des éléments de sa géométrie. Ceux-ci sont représentés sur la figure [I.1.2b](#) et désignés comme suit :

- La partie centrale, dans laquelle est emmanchée la coiffe moteur, qui constitue le point d'application des sollicitations provenant du moteur ;
- Les butées Z , sollicitées lors de grands déplacements verticaux positifs ;
- Les butées X , sollicitées lors de déplacements latéraux ;
- Les bras, éléments majeurs de la pièce, sollicités pour tous les déplacements ;
- Les pieds, qui constituent l'interface entre la pièce élastomère et l'étrier.

Les désignations X et Z renvoient au repère véhicule représenté sur la figure [I.1.1](#).

1.2 Sollicitations subies par une suspension moteur

1.2.1 Les conditions d'usage

Afin de définir l'enveloppe de sollicitations à prendre en compte sur la pièce, des essais sur véhicule ont été menés. Les essais ont eu lieu sur les pistes du Centre Technique de Lardy (Essonne), où plusieurs conditions d'usage ont été testées. Ces conditions sont appelées tronçons. Parmi ces conditions, on distingue les sollicitations venant de la route, les sollicitations de mise sous couple et les sollicitations liées aux situations de roulage. Au total, 27 tronçons ont été réalisés. Dans la suite, chaque tronçon est nommé par son numéro.

1.2.2 Analyse des débattements du tampon moteur

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer les déplacements du GMP. Pour cela, des capteurs de déplacement polaires ont été disposés sur chacune des pièces de liaison des trois suspensions moteur. La figure [I.1.3](#) montre l'instrumentation du tampon moteur, avec un capteur polaire fixé d'un côté à la caisse, et de l'autre à la coiffe. Les déplacements mesurés sont projetés dans le repère véhicule. Il s'agit des déplacements mesurés après avoir fixé le moteur aux suspensions. Ceux-ci ne prennent donc pas en compte le déplacement dû à la précharge du poids du moteur. L'hypothèse est faite que l'ensemble bloc moteur/pièces de liaison est un corps rigide. À partir des déplacements mesurés en trois points, le torseur cinématique en n'importe quel point du moteur par rapport à la caisse peut être calculé.

L'objectif est d'analyser les déplacements imposés à la partie élastomère. Il a donc été choisi de calculer les déplacements de l'interface coiffe/élastomère. Pour plus de simplicité, cette interface est traitée comme un parallépipède rectangle rigide appartenant

1.2. Sollicitations subies par une suspension moteur



FIGURE I.1.3 : Instrumentation du tampon moteur

à l'ensemble bloc moteur/pièces de liaison. Pour chaque tronçon sont calculés les amplitudes de déplacement maximales au point central du parallélépipède dans les trois directions, ainsi que les différentes rotations. La figure I.1.4 montre le déplacement de l'interface lors du tronçon 7.

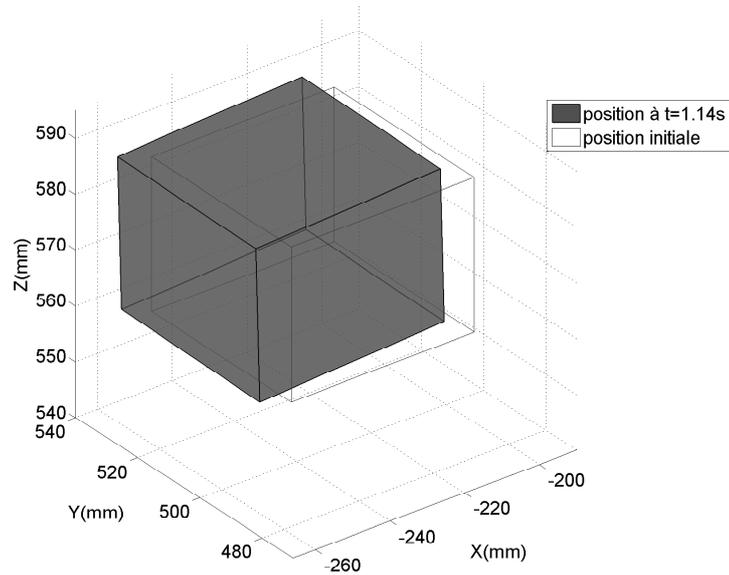


FIGURE I.1.4 : Exemple de mouvement de la partie centrale du tampon moteur dans le cas du tronçon 7

Parmi toutes les conditions d'usage, six tronçons ont été retenus. Le tableau I.1.1 décrit les tronçons sélectionnés et les composantes retenues du vecteur déplacement dans le repère véhicule. Pour chaque tronçon, la valeur surlignée indique la composante du vecteur déplacement qui est élevée et a causé la sélection du tronçon. Le tronçon 13 a quant à lui été retenu parce que le déplacement est important dans les trois directions.

Numéro de tronçon	u_X (mm)	u_Y (mm)	u_Z (mm)
11	0,06	6,71	-11,51
14	2,21	-2,43	-19,21
23	1	-1,65	2,23
24	3,04	-6,67	-4,84
13	4,59	-4,46	-4,08
10	-7,1	-0,9	-4,9

TABLEAU I.1.1 : Tronçons et déplacements retenus pour l'enveloppe de sollicitations

1.3 Modèle éléments finis du tampon moteur

Dans la section précédente, l'enveloppe des déplacements subis par la pièce a été déterminée via la sélection de six cas de chargements. Or, cette enveloppe de déplacements ne peut être utilisée telle quelle pour fixer le cadre de la modélisation pour deux raisons. D'une part, il s'agit d'un déplacement global, subi par le point central de la pièce. Or, l'application d'un déplacement au point central génère des états de déformation très différents dans chacune des parties de la pièce. De plus, les valeurs de déplacement n'ont de sens que s'ils sont associés à une géométrie connue. Or, pour pouvoir caractériser le comportement du matériau, il est nécessaire de s'affranchir de la géométrie. Ainsi, dans la suite, nous allons chercher à déterminer les déformations subies par chacun des éléments de la pièce, correspondant à chacun des vecteurs déplacement du tableau I.1.1. La géométrie de la pièce étant trop complexe pour avoir recours à une solution analytique, le calcul des déformations a été réalisé via un modèle éléments finis à l'aide du logiciel commercial Abaqus.

1.3.1 Construction d'un modèle adapté au cas de la précharge moteur

A) Objectif

L'objectif de cette première étape est de déterminer s'il est possible de simuler le comportement de la pièce lors de l'application de la précharge moteur (effort de -900 N dans la direction Z , ce qui correspond à l'application du poids du moteur) pour un maillage correct, puis d'imposer les sollicitations sélectionnées précédemment. Le fichier source à disposition est une numérisation de la pièce.

B) Importation de la géométrie

À l'aide du logiciel CATIA, deux fichiers ont été générés, contenant la partie élastomère avec les inserts et les inserts seuls. Ces deux fichiers sont importés dans le logiciel Abaqus. Une partie purement élastomère est créée en réalisant une coupe de l'intersection de la géométrie provenant des deux fichiers. Enfin, les parties latérales du caoutchouc sont rabotées sur 1 mm afin de rendre visibles les inserts. Les deux parties sont représentées sur la figure I.1.5.

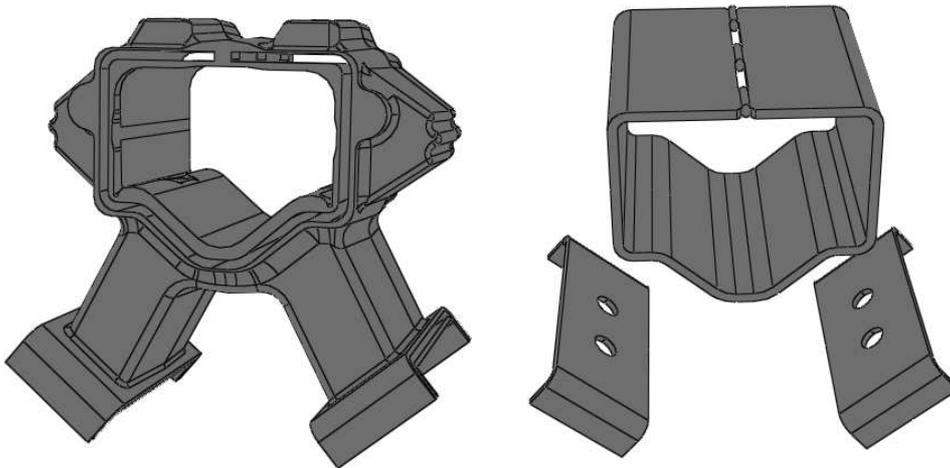


FIGURE I.1.5 : Vue des deux parties créées dans le modèle éléments finis : la partie élastomère (à gauche) et les inserts en acier (à droite)

C) Modélisation des inserts

Il a été choisi de ne pas prendre en compte les frottements entre les surfaces du caoutchouc et des inserts, mais de les lier complètement. Cette simplification permet d'éviter les problèmes de contact en fusionnant les régions sélectionnées, et ce même si leurs maillages sont différents. Les inserts étant la partie la plus raide, ceux-ci sont désignés comme surfaces maîtres alors que les surfaces esclaves seront celles de l'élastomère. Afin

de diminuer le temps de calcul et puisque le comportement des inserts ne rentre pas dans l'objet de l'étude, ils seront considérés comme des corps rigides. Pour cela, la partie inserts est définie comme un solide 3D déformable à l'importation, puis une contrainte de corps rigide est ajoutée sur les éléments des inserts. Ainsi, le mouvement des trois parties des inserts en acier (partie centrale et les deux pieds) est contraint par le mouvement de son point de référence : les positions relatives de chaque région restent constantes. La loi de comportement utilisée est celle d'un matériau élastique linéaire avec un module d'Young $E = 210$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

D) Modélisation de l'élastomère

En ce qui concerne l'élastomère, une loi de comportement très simple est choisie, à savoir une loi élastique linéaire. En effet, le premier objectif est de définir un maillage correct, le temps de calcul doit être faible afin de pouvoir optimiser la taille du maillage ainsi que le type d'éléments. Les paramètres choisis sont un module d'Young $E = 6$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,4995$. Cette valeur, très proche de 0,5 permet de se placer dans l'hypothèse d'incompressibilité tout en assurant une convergence du calcul rapide.

E) Conditions aux limites

L'étrier en aluminium n'est pas modélisé dans cette étude préliminaire; seule sa fonction de limitation des débattements est prise en compte via les conditions aux limites, alors que les frottements étrier/caoutchouc sont négligés. Les surfaces inférieures des pieds sont encastées, Les extrémités des butées X sont bloquées dans la direction X , et les déplacements ou efforts sont imposés sur le point de référence RP , qui contrôle le mouvement de la partie centrale des inserts. Les conditions aux limites sont représentées sur la figure I.1.6.

F) Maillage

Ensuite, les inserts sont maillés le plus grossièrement possible que le permet la contrainte de liaison avec l'élastomère, car on ne s'intéressera pas à leur déformation. Les éléments utilisés sont des tétraèdres linéaires C3D4. Après plusieurs tentatives infructueuses pour obtenir un maillage correct sur l'ensemble de la pièce élastomère, il apparaît que plusieurs zones posent problème pour la convergence du calcul. En effet, certaines zones présentent de fortes discontinuités. La discontinuité obtenue sur une grandeur (composante de déformation ou de contrainte, invariants) est la différence la plus élevée de valeur de cette grandeur évaluée aux nœuds qui sont communs à deux éléments ou plus. La figure I.1.7 montre un exemple de valeurs de discontinuités pour la contrainte de Von Mises. Il a été décidé d'ignorer les discontinuités et problèmes de convergence dans ces zones. En effet, l'objectif ici est de modéliser la pièce par un modèle de type ressort non linéaire. Il est donc pertinent de se focaliser sur les parties les plus massives de la pièce, qui lui confèrent une grande partie de sa raideur. Si une étude de modélisation en

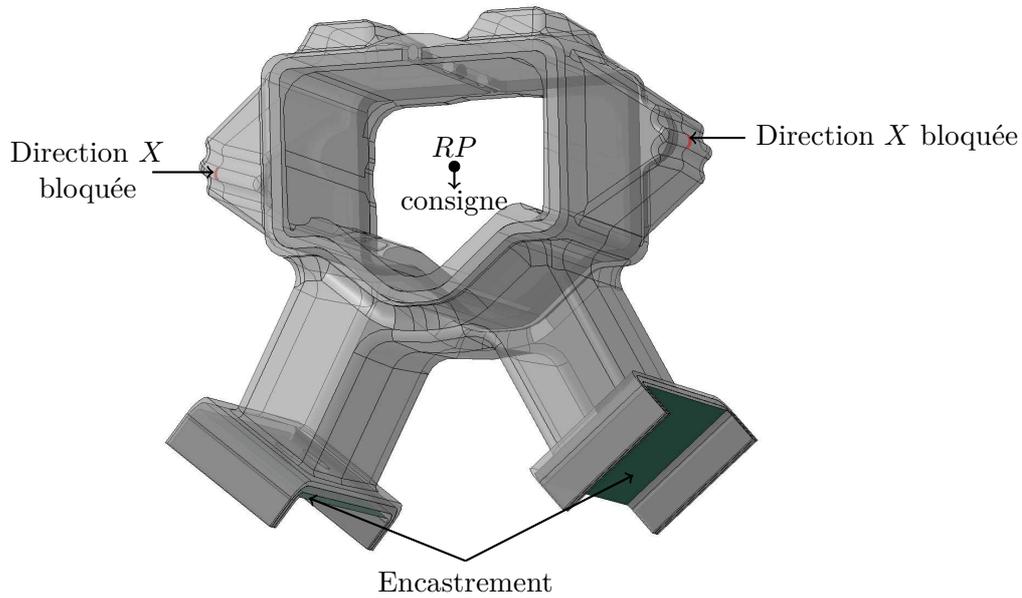


FIGURE I.1.6 : Visualisation des conditions aux limites sur pièce non déformée

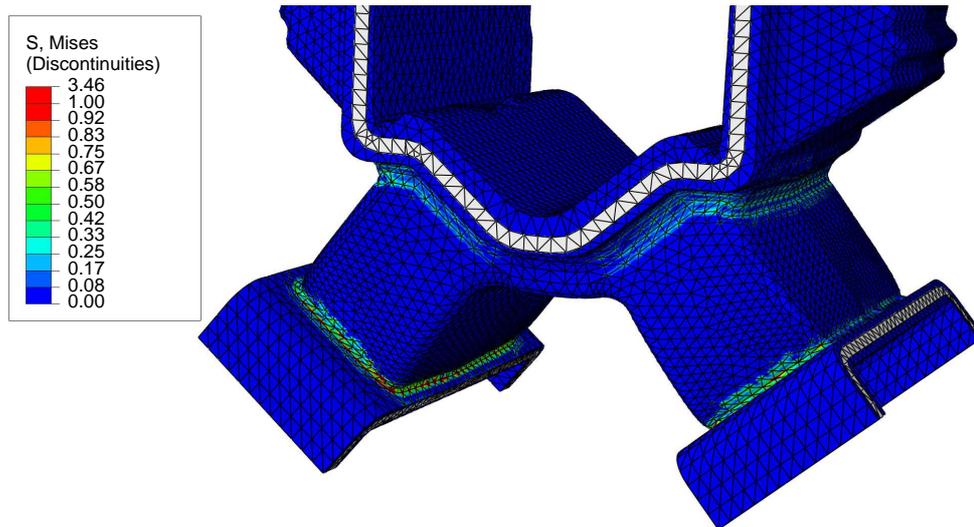


FIGURE I.1.7 : Visualisation des zones présentant de fortes discontinuités sur les valeurs de contrainte de Von Mises sur pièce déformée

fatigue ou rupture était à mener, ce modèle serait à retravailler pour prendre en compte les parties où les valeurs de contrainte sont les plus élevées. L'ensemble de la pièce est alors maillée grossièrement, de telle manière que le calcul converge. Un maillage plus fin est adopté sur les parties massives, à savoir les bras, les butées Z et les butées X. Le critère choisi stipule que les discontinuités doivent être inférieures à 10 % du maximum

de la contrainte de Von Mises. De plus, les éléments utilisés doivent prendre en compte la condition d'incompressibilité, ce qui nécessite l'utilisation de la formulation hybride. Enfin, il reste à déterminer s'il est plus pertinent d'utiliser des éléments linéaires (C3D4H) ou des éléments quadratiques (C3D10H). Pour cela, une étude comparative de la convergence de la solution en fonction du raffinement du maillage a été menée. La figure I.1.8 représente l'évolution du déplacement vertical U_3 calculé en un point de la partie centrale pour un chargement de -900 N en fonction du nombre de variables (correspondant à la somme des degrés de liberté du modèle et des multiplicateurs de Lagrange). Ce calcul est effectué d'une part pour les éléments linéaires, d'autre part pour les éléments quadratiques. Alors que la sous-figure de gauche montre le résultat de convergence dans le cas du modèle élastique linéaire présenté ci-dessus, la sous-figure de droite montre ce résultat dans le cas d'un modèle néo-hookéen. Pour cette loi, deux paramètres sont à fixer, à savoir le module de cisaillement μ et le module de compressibilité K . Leurs valeurs respectives sont initialement fixées à 2 MPa et 2000 MPa, le coefficient de compressibilité devant être grand pour respecter au mieux la condition d'incompressibilité. Le logiciel Abaqus requiert le renseignement de deux autres paramètres, C_{10} et D_1 , liés aux modules de cisaillement et de compressibilité par les relations :

$$C_{10} = \frac{\mu}{2}, \quad D_1 = \frac{2}{K}. \quad (\text{I.1.1})$$

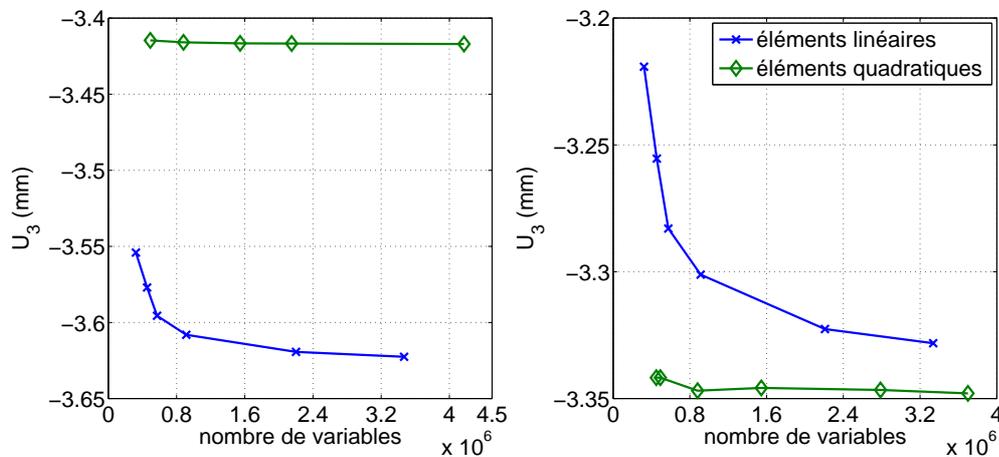


FIGURE I.1.8 : Valeurs de déplacement vertical (U_3) pour les modèles en élasticité linéaire (à gauche) et néo-hookéen (à droite), éléments linéaires et quadratiques

Sur la sous-figure de gauche, il apparaît que le maillage composé d'éléments linéaires demande plus d'éléments pour converger que le maillage composé d'éléments quadratiques. Avec les éléments quadratiques, la solution est stable dès le premier maillage à 491 691 variables, avec un temps de calcul d'environ trois minutes. Avec les éléments linéaires, il faut un maillage avec un minimum de 2 201 298 variables, pour un temps

de calcul d'environ trente minutes. De plus, des problèmes d'éléments à volume trop faible sont rencontrés lors du raffinement du maillage avec éléments linéaires. Les éléments quadratiques sont donc à privilégier. Cette assertion est éprouvée et confirmée avec l'utilisation d'une loi de comportement de type néo-hookéen, comme le montre la sous-figure de droite. Ainsi, il faut un nombre de degrés de liberté beaucoup plus élevé avec les éléments linéaires qu'avec les éléments quadratiques pour atteindre une solution stable. Les éléments quadratiques (C3D10H) sont donc choisis pour le maillage de la partie caoutchouc.

G) Paramètre de compressibilité

Afin d'être le plus proche possible de l'hypothèse d'incompressibilité, D_1 doit être faible. Cependant, une valeur très faible entraînera des temps de calcul trop longs. Plusieurs valeurs sont testées pour ce paramètre dans le cas de la précharge moteur, et la convergence de la solution en U_3 est étudiée. La figure I.1.9 en montre le résultat. La valeur $D_1 = 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$ est retenue.

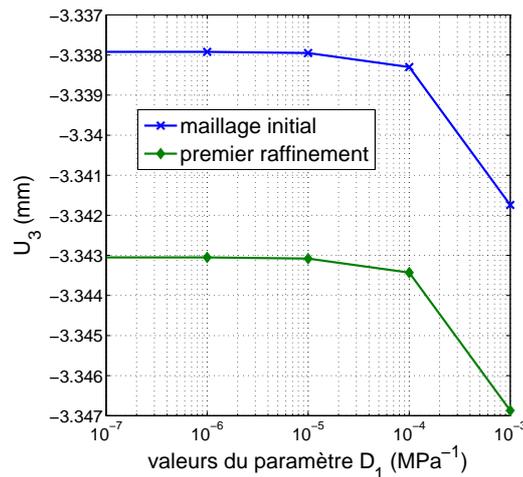


FIGURE I.1.9 : Valeurs de déplacement vertical (U_3) en fonction du paramètre de compressibilité D_1 , pour des éléments quadratiques, modèle néo-hookéen avec le maillage initial et le premier raffinement de maillage

1.3.2 Adaptation du modèle pour des chargements verticaux plus sévères

Le modèle éléments finis doit converger pour des déplacements verticaux allant jusqu'à -17 mm (valeur légèrement inférieure au maximum à atteindre pour les cas de chargement sélectionnés, mais très élevée au vu des déformations subies par la pièce). Or, des problèmes de convergence de calcul apparaissent, causés par des instabilités localisées sur les zones les plus déformées (cf. figure I.1.7). Plusieurs modifications ont été

effectuées sur le modèle et une étude comparative est menée afin de trouver les paramètres qui permettent d'imposer un chargement plus élevé avant divergence du calcul. Ainsi, la taille du maillage, le type d'éléments utilisé, les options de stabilisation du calcul, le type de condition aux limites (force, déplacement, mixte avec la méthode de longueur d'arc de Riks, voir par exemple [Crisfield \(1981\)](#)) ont été modifiés. Cependant, aucune combinaison de ces options n'a permis d'atteindre un chargement relativement proche de ce que subit la pièce dans des conditions d'utilisation standard. Décision a alors été prise de simplifier le modèle en s'affranchissant totalement des zones d'instabilités. La figure I.1.10 résume la démarche suivie lors de la construction du modèle, aboutissant à la simplification du modèle.

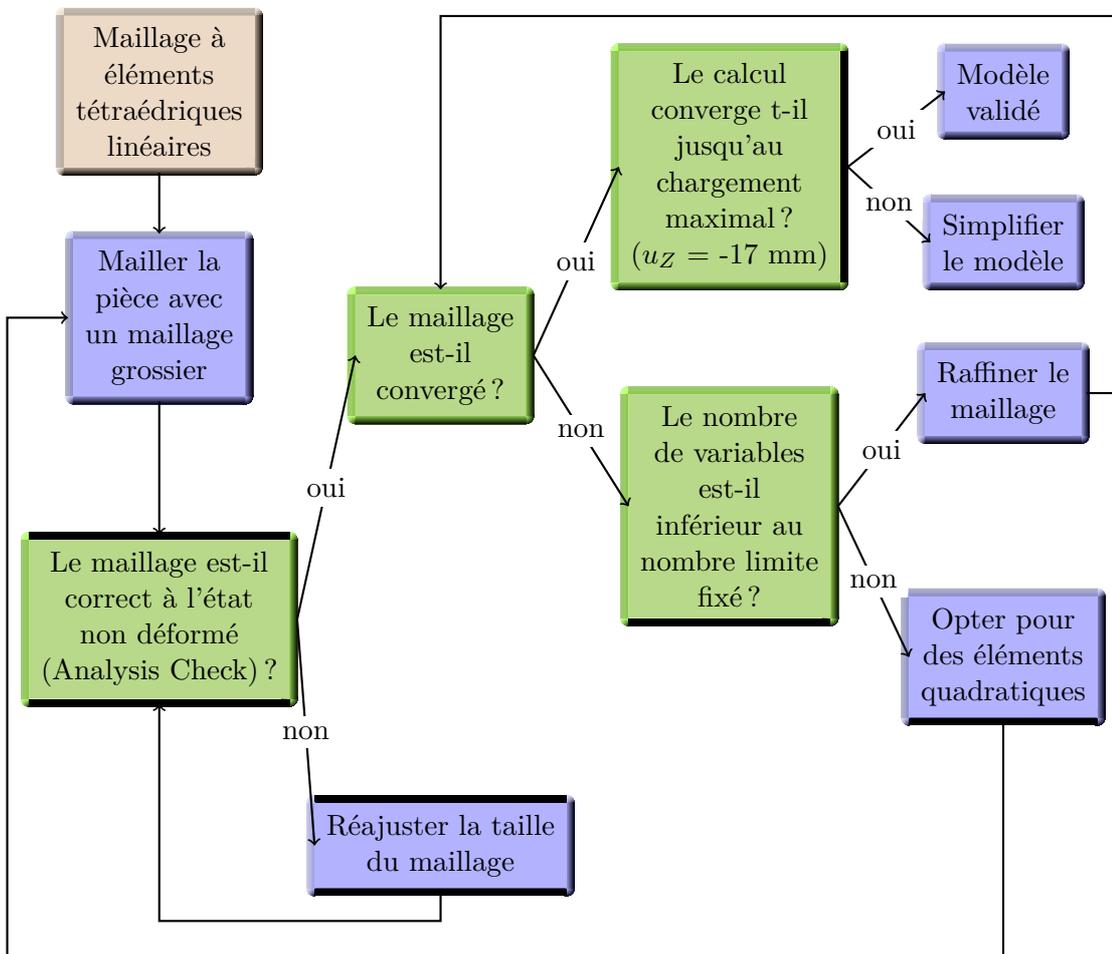


FIGURE I.1.10 : Diagramme décisionnel pour la construction du modèle éléments finis

Une partition de la pièce est effectuée : seules les trois parties principales, à savoir les bras, les butées X et les butées Z sont conservées. Cette simplification permet de mener à bien des calculs pour des chargements importants. Afin de se rapprocher du cas réel, une loi de type Mooney-Rivlin est utilisée. Les valeurs de paramètres matériaux sont issus

d'une étude préliminaire. Ces valeurs ont été identifiées à partir d'essais de traction uniaxiale et de cisaillement en grandes déformations. De plus, les parties de l'étrier susceptibles d'être en contact avec le caoutchouc sont ajoutées. Elles sont modélisées par des surfaces analytiques rigides. La figure I.1.11 représente les différentes parties du modèle : en bleu les parties caoutchouc, en vert les parties de l'étrier et en marron les surfaces analytiques rigides permettant de transmettre le chargement aux parties caoutchouc et de simuler le contact.

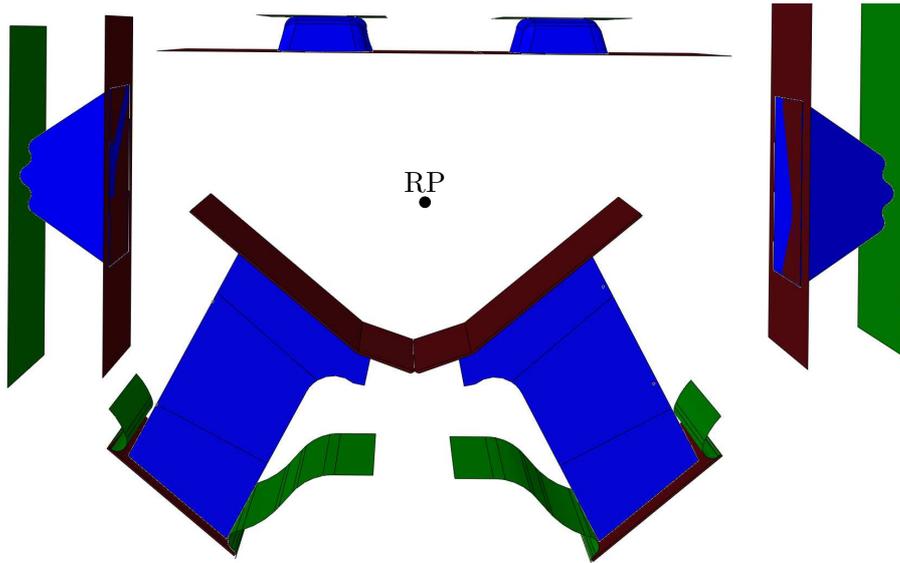


FIGURE I.1.11 : Vue du modèle simplifié du tampon moteur

Trois types de contact sont considérés :

- Liaison complète (*Tie*) entre les surfaces analytiques et le caoutchouc initialement en contact ;
- Contact surface à surface, avec un coefficient de frottement égal à 0,2 (contact caoutchouc/aluminium), pour les parties du caoutchouc qui ne sont initialement pas en contact avec l'étrier mais qui le deviennent ;
- Contact surface à surface, avec un coefficient de frottement égal à 0,6 (contact caoutchouc/caoutchouc), pour les parties du caoutchouc qui ne sont initialement pas en contact avec les surfaces analytiques rouges mais qui le deviennent.

Ces valeurs ont été ajustées pour que le résultat de la simulation soit comparable aux essais de traction et compression menés au laboratoire caoutchouc du Technocentre Renault (Guyancourt) sur la pièce réelle. Le modèle prévoit l'enchaînement de quatre étapes :

- Encastrement de l'étrier ;
- Précharge de l'étrier : lors de l'assemblage, la pièce en caoutchouc est comprimée pour être placée dans l'étrier. Ce chargement a été évalué par une mesure de la hauteur des différentes parties de la pièce avec et sans étrier. Cela correspond à

des déplacements de -2,8 mm en Z sur les butées Z , de ± 1 mm en X sur les butées X (appliqués via l'étrier) et de -2,5 mm en Z sur les bras (appliqué via les surfaces analytiques liées aux surfaces supérieures des bras);

- Précharge due au moteur : le déplacement vertical induit par le poids du moteur a été évalué à -8,25mm. Il est appliqué au point central (RP sur la figure I.1.11);
- Application du déplacement correspondant à un tronçon standard sur RP .

Tous les chargements sélectionnés précédemment sont simulés. Malgré les adaptations effectuées, deux d'entre eux restent trop sollicitants, et le calcul ne peut être mené à bien. Il s'agit des tronçons 14 et 23. Dans les deux cas, une zone de la pièce subit une compression très élevée. Pour le premier tronçon, il s'agit de la partie supérieure des bras, pincée entre le caoutchouc de la partie centrale et l'étrier. Pour le second tronçon, les butées Z sont écrasées sur le haut de l'étrier (cf. figure I.1.12). Outre les discontinuités de déformation engendrées, le confinement de cette zone n'est pas compatible avec l'hypothèse d'incompressibilité du matériau, ce qui explique la divergence du calcul. Le tableau I.1.2 indique les valeurs finales de déplacement atteintes pour ces tronçons.

Tronçon	u_X (mm)	u_Y (mm)	u_Z (mm)
14	1,56 (2,21)	-1,75 (-2,43)	-16,16 (-19,21)
23	0,81 (1)	-1,33 (-1,65)	0,20 (2,23)

TABLEAU I.1.2 : Tronçons et valeurs modifiées imposées lors de la simulation Abaqus. Entre parenthèses sont rappelées les consignes initialement prévues

Conclusion

Dans ce chapitre, la problématique industrielle a été présentée, au travers de la description de la suspension moteur et de la pièce, un tampon moteur, sur laquelle la méthode de modélisation est développée. Des essais sur véhicule ont été menés, permettant de mesurer les déplacements subis par la pièce pour plusieurs types de condition d'usage. Six de ces cas ont été retenus, constituant l'enveloppe de débattements subis par le tampon moteur. Or, un intervalle de déplacements n'a de sens que s'il est relié à une géométrie et ne peut donc pas être utilisé tel quel pour caractériser le comportement du matériau. Pour cela, il faut avoir accès aux déformations. Comme la géométrie de la pièce est complexe, il est nécessaire de construire un modèle éléments finis de celle-ci afin de calculer les déformations correspondant aux déplacements globaux. Des difficultés ont été rencontrées dans la construction de ce modèle, dues à la combinaison de chargements élevés avec une géométrie complexe, avec notamment des fortes compressions causant des instabilités dans les zones de congé. Finalement, la géométrie a été simplifiée, les zones empêchant la convergence du calcul ayant été exclues. Ainsi, les données d'entrée du modèle sont fixées (il s'agit du vecteur déplacement des six conditions d'usage retenues) et le modèle est entièrement construit. La question se pose maintenant de savoir comment post-traiter les résultats en termes de déformations.

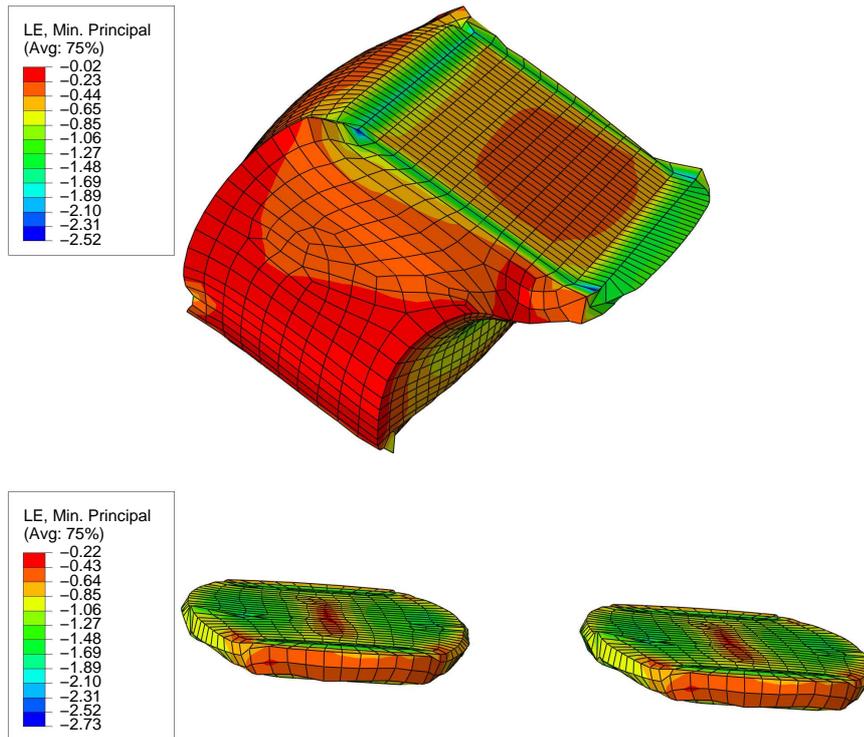


FIGURE I.1.12 : Zones de la pièces où les sollicitations sont trop importantes pour entraîner une convergence du calcul. En haut, bras lors d'un chargement de type tronçon 14; En bas, butées Z pour un chargement de type tronçon 23. L'échelle de couleur correspond aux valeurs de l'extension principale minimale

Chapitre 2

Analyse des déformations subies par un tampon moteur

Sommaire

2.1 Un outil original de compréhension de l'état de déformation : des invariants bien choisis du tenseur des déformations vraies	22
2.2 Méthode	22
2.3 Résultats	23
2.3.1 Précharge de l'étrier et du moteur	23
2.3.2 Tronçon 10	23
2.3.3 Tronçon 23	26
2.3.4 Tronçon 14	29
2.4 Bilan	31

Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est de déterminer une enveloppe de déformations subies par la pièce, en effectuant une simulation éléments finis pour chacun des six cas de chargement sélectionnés dans le chapitre précédent, dans lequel le modèle éléments finis simplifié utilisé pour la simulation a également été présenté. Au vue des déformées de la pièce lors des simulations préliminaires, il est certain que la pièce est sollicitée en grandes déformations. Or, dans ce cadre, plusieurs définitions de déformation existent (voir par exemple [Holzapfel \(2000\)](#)). Ici, nous choisissons des invariants particuliers qui permettent de décrire l'amplitude de déformation et le mode de déformation, indépendamment l'un de l'autre. Ainsi, à partir de ces données, les phénomènes à intégrer dans la modélisation de la pièce sont déterminés. Dans un premier temps, ces invariants sont rapidement présentés. Ensuite, la méthode de post-traitement est décrite, avant de présenter les résultats pour quatre cas de chargements.

2.1 Un outil original de compréhension de l'état de déformation : des invariants bien choisis du tenseur des déformations vraies

Parmi les différentes composantes de tenseurs de déformations, d'invariants ou de déformations principales, il a été choisi d'utiliser trois invariants K_1 , K_2 et K_3 du tenseur de Hencky, aussi appelé tenseur des déformations vraies. Ces invariants ont été proposés par [Criscione *et al.* \(2000\)](#) et ont été utilisés dans quelques publications ([Ogden *et al.* \(2004\)](#) et [Sendova et Walton \(2005\)](#) par exemple). Dans le cadre de ce chapitre orienté vers l'application industrielle, les équations qui définissent ces invariants ne sont volontairement pas introduites. Elles seront développées dans les chapitres 1 et 2 de la partie II, où leurs propriétés seront plus largement étudiées. Le choix de ces trois grandeurs mécaniques est principalement motivé par leur signification physique :

- K_1 prend ses valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$ et donne le signe et l'amplitude de dilatation (positif pour une expansion, négatif pour une contraction) ;
- K_2 prend ses valeurs entre 0 et $+\infty$ et correspond à l'amplitude de distorsion ;
- K_3 prend ses valeurs entre -1 et 1 et représente le mode de distorsion : 1 pour la traction uniaxiale, 0 pour du cisaillement pur et -1 pour de la compression uniaxiale ou de la traction équibiaxiale.

Dans le cas d'un matériau incompressible, comme il est considéré ici, $K_1 = 0$. En pratique, seuls K_2 et K_3 seront calculés. Pour chaque chargement sélectionné, il est donc possible de post-traiter les résultats en termes d'amplitude de déformation via le calcul de K_2 , mais aussi de proposer une mesure de la multiaxialité dans chacune des parties de la pièce via le calcul de K_3 .

2.2 Méthode

Dans un premier temps, les expressions de K_2 et K_3 sont écrites dans une routine en Fortran en fonction du tenseur de Hencky, dont les composantes sont une des données de sortie disponibles dans le logiciel Abaqus. Ce type de routine, qui permet de définir de nouvelles données de sortie est appelé UVARM dans Abaqus. Après avoir spécifié la définition de deux nouvelles grandeurs et associé le fichier de routine à la simulation de chacun des chargements, un fichier de sortie est obtenu, contenant notamment les valeurs de K_2 et K_3 aux points d'intégration de chaque élément du maillage. Il faut alors choisir les points auxquels les valeurs de déformation vont être relevées. On rappelle ici que l'objectif est d'obtenir une raideur globale de la pièce. Dans ce cadre, il est choisi de relever les valeurs de déformation au centre de chacune des parties de la pièce, à savoir les deux butées X , les deux butées Z et les deux bras. Notons que les calculs ont été effectués en statique sous Abaqus, alors que les chargements réels sont dynamiques. Cette hypothèse simplificatrice peut induire un écart entre les valeurs de K_2 et K_3 calculées ici, et leurs valeurs réelles. Il a cependant été vérifié que les efforts issus de la simulation sont proches des efforts moyens issus des essais, ce qui laisse à penser que l'écart entre le

cas statique et dynamique est peu important, et valide les valeurs issues de la simulation. D'autre part l'objectif de l'étude, qui est de déterminer l'enveloppe des valeurs de K_2 et K_3 , ne requiert pas une précision très fine. Pour chacun des chargements étudiés, deux figures seront présentées. La première montrera une vue de la déformée de la pièce, sur laquelle sera reportée les valeurs de K_2 et K_3 au centre de chaque partie, ainsi que le mode de déformation correspondant. Ensuite, un graphe montrera l'évolution de ces valeurs au cours du chargement.

2.3 Résultats

Dans cette section, les résultats sur K_2 et K_3 sont présentés pour quatre cas notables, à savoir :

- Le chargement dû à la précharge de l'étrier et du moteur, cette configuration étant la configuration de référence à partir de laquelle sont appliqués tous les autres chargements ;
- Le tronçon 10, lors duquel l'une des butées X est fortement sollicitée ;
- Le tronçon 23, lors duquel les butées Z sont fortement sollicitées ;
- Les tronçons 14, lors desquels ce sont les bras qui sont fortement sollicités.

2.3.1 Précharge de l'étrier et du moteur

La figure I.2.1 montre la déformée de la pièce après l'application des précharges étrier et moteur. La valeur de K_3 à $-0,96$ au cœur des deux bras signifie que ceux-ci sont principalement sollicités en compression, puisque K_3 est proche de -1 et qu'ils sont également soumis à un peu de cisaillement. L'amplitude de déformation dans cette zone est modérée, avec $K_2 = 0,37$. Suite à la précharge de l'étrier, les deux butées X sont soumises à de la compression associée à du cisaillement et l'amplitude de déformation est très faible puisque $K_2 = 0,05$. Les butées Z restent non déformées.

Il peut également être intéressant d'observer l'évolution de K_2 et de K_3 au cours du chargement. La figure I.2.2 montre ainsi l'évolution des deux invariants relevés au cœur d'un des bras, en fonction de la consigne en déplacement vertical U_3 appliqué au point central de la pièce. Sur cette figure, il apparaît que K_3 décroît très rapidement, puis reste constant. Cela signifie que le mode de déformation, à savoir ici de la compression avec un faible cisaillement, est le même pendant toute l'application de la précharge. L'amplitude de déformation, quantifiée par K_2 évolue quant à elle linéairement avec le déplacement global.

2.3.2 Tronçon 10

La figure I.2.3 montre la déformée de la pièce après l'application des précharges puis du chargement correspondant au tronçon 10. Dans ce cas, la partie la plus sollicitée en termes d'amplitude est la butée X droite, avec une valeur de K_2 à $1,48$, alors que le bras droit est modérément déformé ($K_2 = 0,5$) et le bras gauche l'est faiblement ($K_2 = 0,16$). La butée X droite est soumise à de la compression et du cisaillement. C'est aussi le cas

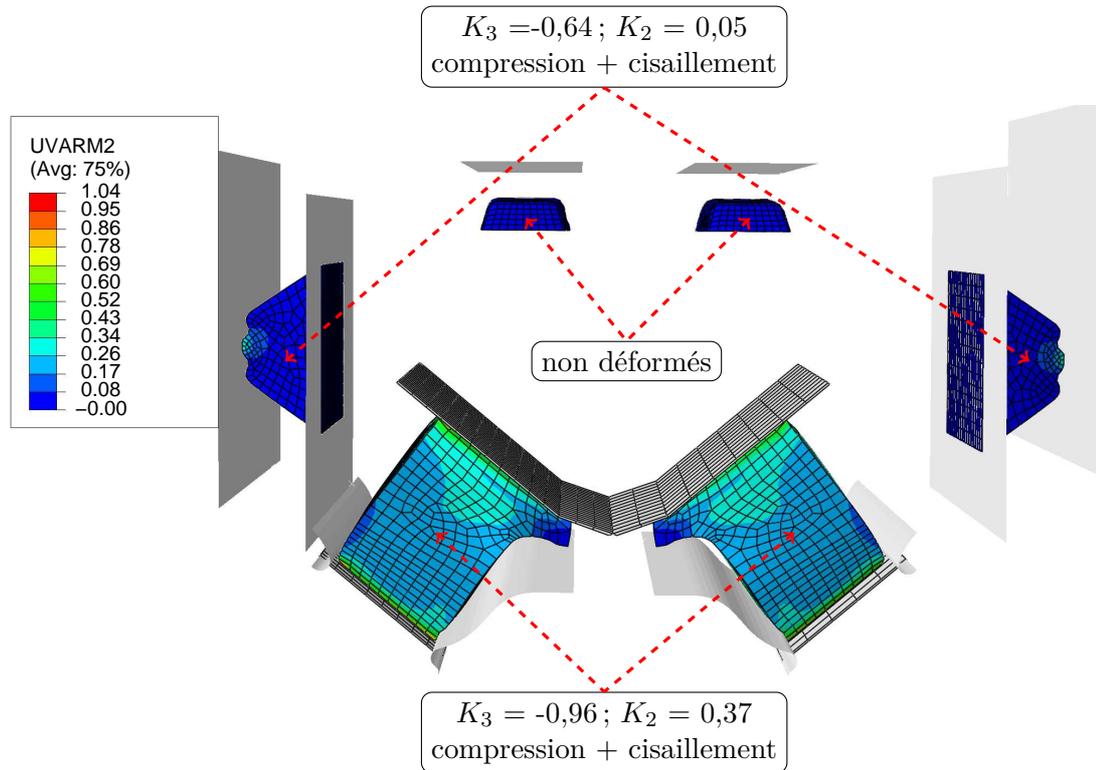


FIGURE I.2.1 : Etat déformé de la pièce après application de la précharge due à l'étrier et au moteur. L'échelle de couleur correspond aux valeurs de K_2

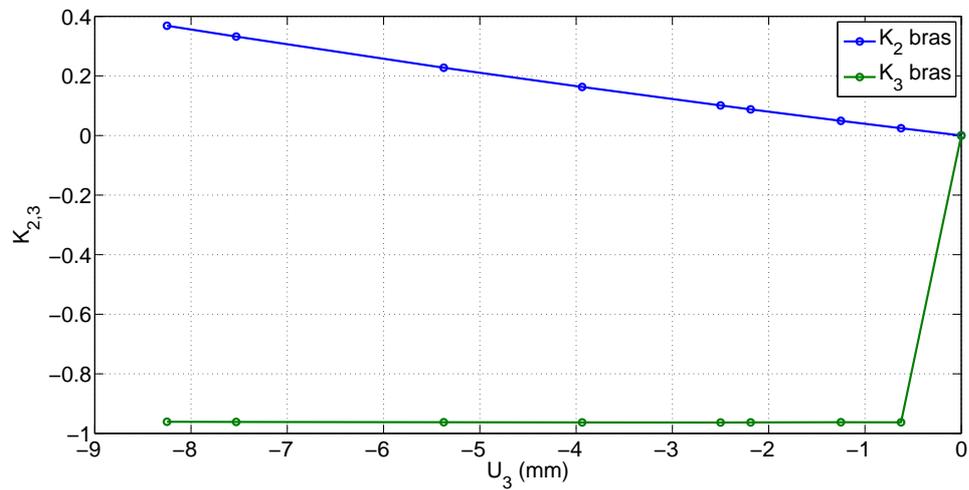


FIGURE I.2.2 : Evolution de K_2 et de K_3 à cœur d'un des bras en fonction du déplacement vertical global U_3 ; cas de la précharge due à l'étrier et au moteur

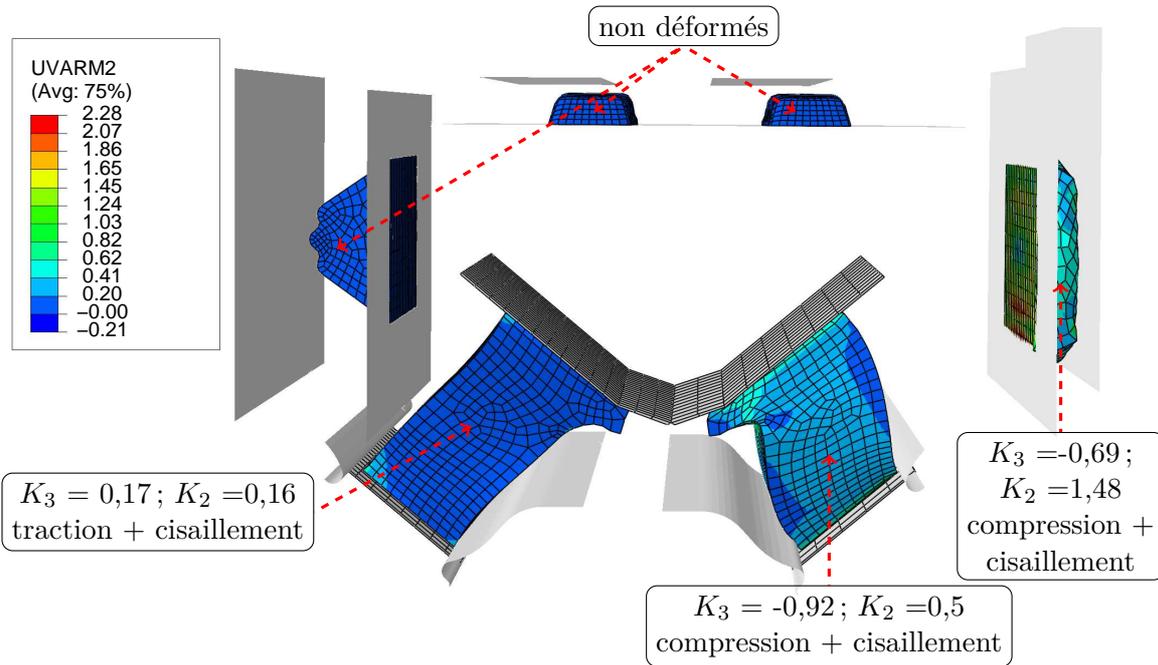


FIGURE I.2.3 : Etat déformé de la pièce après un chargement de type tronçon 10. L'échelle de couleur correspond aux valeurs de K_2

du bras droit, mais dans des proportions différentes puisque la compression y est prédominante. Enfin, le bras gauche est soumis à du cisaillement majoritaire auquel s'ajoute un peu de traction. Rappelons qu'avant l'application du chargement correspondant au tronçon 10, les deux bras sont en compression majoritaire superposée au cisaillement. Enfin, le bras gauche et les butées Z ne sont pas déformés.

La figure I.2.4 montre l'évolution des deux invariants à cœur de la butée X droite (symbole x), du bras droit (symbole o) et du bras gauche (symbole \square), en fonction du déplacement global horizontal U_1 . Tout d'abord, précisons que $U_1 = 0$ correspond à la fin de la précharge. À partir de ce point, le mode de déformation de la butée X varie peu : celle-ci est sollicitée en compression-cisaillement pendant tout le chargement. On remarque une légère variation de K_3 montrant que le cisaillement augmente jusqu'à $U_1 = -1$ mm puisque K_3 se rapproche de 0, puis la part de compression devient plus importante puisque K_3 se rapproche de -1. Logiquement, l'amplitude de déformation (K_2) subie par la butée X augmente lorsque le déplacement horizontal augmente. À présent, l'évolution de la déformation subie par le bras droit est décrite. Il apparaît que K_3 augmente légèrement au cours du chargement, tout en restant proche de -1. Cela signifie que la part de cisaillement augmente légèrement, mais que la compression reste majoritaire. De plus, l'amplitude de déformation augmente aussi faiblement. Enfin, le cas du bras gauche est étudié. Alors que les deux bras subissent la même déformation (même amplitude et même mode) lors de la précharge, ce n'est pas le cas lors du tronçon 10. Pendant que le bras droit reste sollicité en compression majoritaire, la compression subie

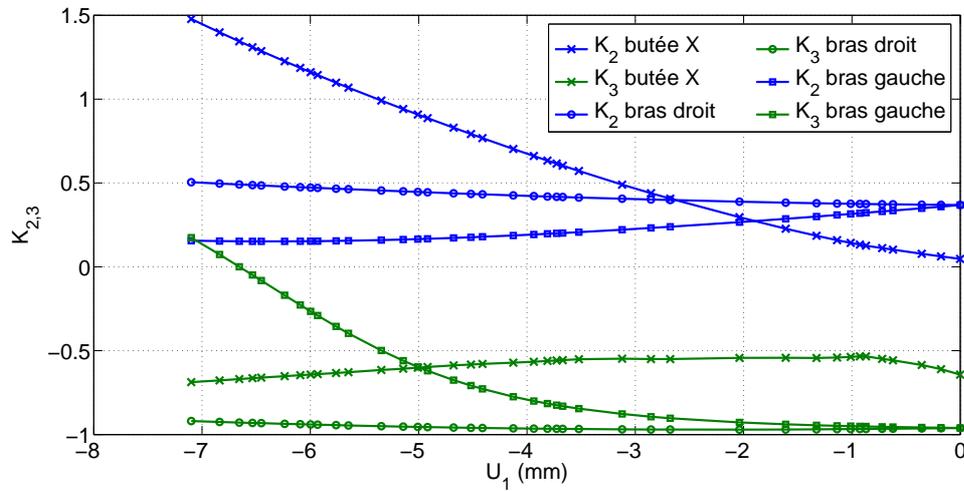


FIGURE I.2.4 : Évolution de K_2 et de K_3 à cœur de la butée X gauche et des deux bras en fonction du déplacement horizontal global U_1 ; cas du tronçon 10

par le bras gauche devient de moins en moins importante au cours du chargement, au profit du cisaillement. Lorsque $U_1 = -6,7$ mm, le bras gauche est sollicité en cisaillement pur. À la fin du chargement, il subit principalement du cisaillement auquel s'ajoute une faible part de traction. De plus, il est à noter que l'amplitude de déformation du bras gauche diminue au cours du chargement.

2.3.3 Tronçon 23

La figure I.2.5 montre la pièce déformée après application des précharges et du déplacement correspondant au tronçon 23. Dans ce cas, les butées Z sont très fortement écrasées, avec un amplitude de déformation $K_2 = 1,35$. La butée gauche est légèrement sollicitée ($K_2 = 0,10$), alors que l'amplitude de déformation au cœur des deux bras est encore plus faible ($K_2 = 0,04$). Au cœur des butées Z , la déformation correspond principalement à du cisaillement auquel s'ajoute de la compression. La butée X gauche subit également de la compression et du cisaillement, mais la part de compression est plus importante. Le cœur du bras gauche subit à peu près le même mode de déformation, alors que le bras droit est en traction majoritaire + cisaillement. La butée X droite n'est pas déformée.

La figure I.2.6 montre l'évolution des deux invariants à cœur de la butée X droite (symbole x), du bras droit (symbole o) et du bras gauche (symbole \square), en fonction du déplacement global vertical U_3 . Ici, $U_3 = -8,25$ mm correspond à la position de précharge. Concernant la butée X gauche, il apparaît que K_3 diminue. Cela signifie que la part de compression augmente légèrement pendant le chargement. L'amplitude de déformation, quantifiée par K_2 , augmente légèrement. Concernant les bras, il apparaît que leur mode de déformation est similaire jusqu'à environ $U_3 = -4$ mm. Ensuite, K_3 relevé pour le

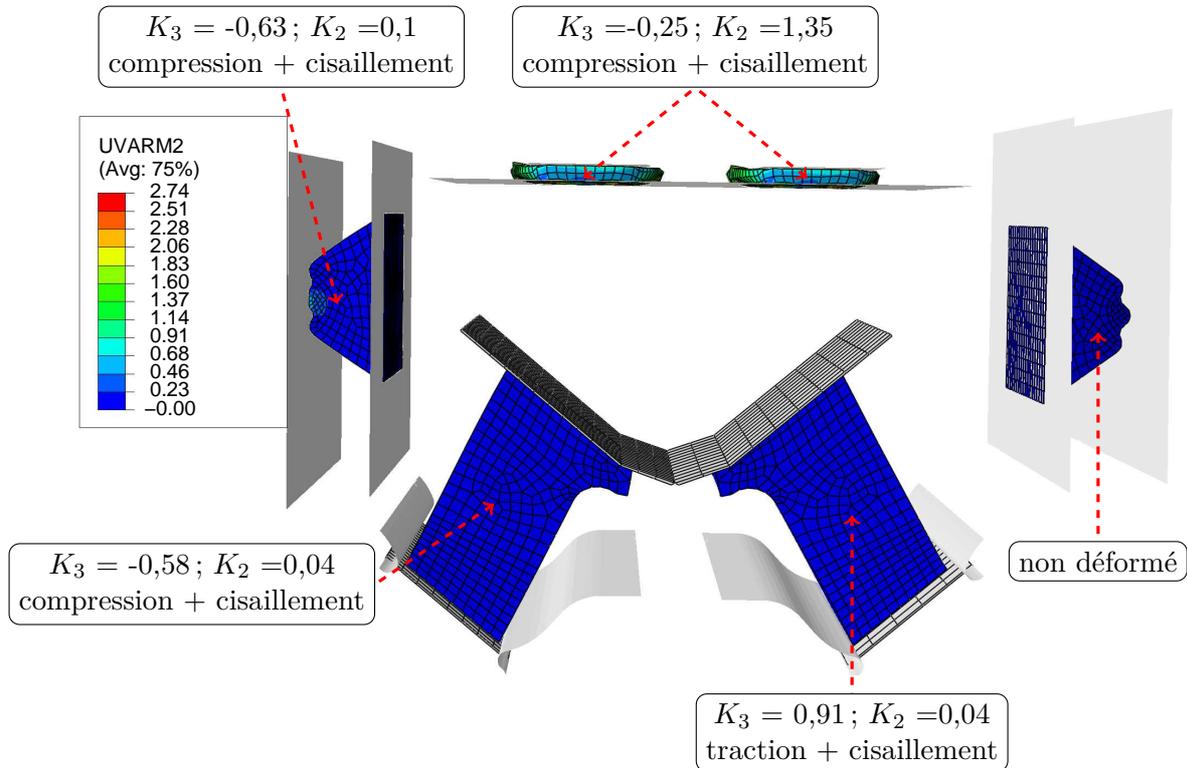


FIGURE I.2.5 : Etat déformé de la pièce après un chargement de type tronçon 23. L'échelle de couleur correspond aux valeurs de K_2

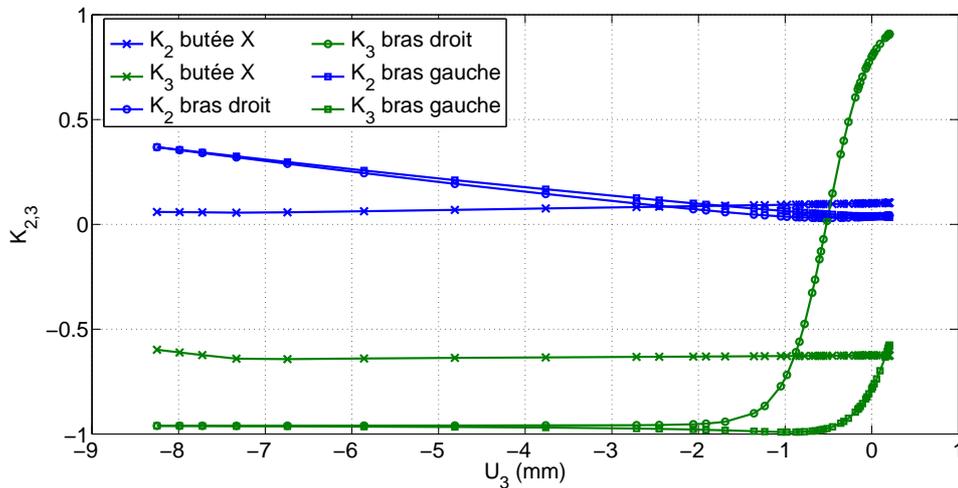


FIGURE I.2.6 : Évolution de K_2 et de K_3 à cœur de la butée X gauche et des deux bras en fonction du déplacement vertical global U_3 ; cas du tronçon 23

bras gauche reste constant jusqu'à environ $U_3 = -0,5$ mm et augmente jusqu'à atteindre $-0,58$, alors que pour le bras droit, K_3 augmente fortement à partir de $U_3 = -2,8$ mm, jusqu'à atteindre $0,91$. Cela signifie que le bras gauche reste en compression-cisaillement mais avec une part élevée de cisaillement, alors que le bras droit subit de moins en moins de compression, passe par un état de cisaillement pur puis est sollicité en traction-cisaillement. L'évolution de l'amplitude de déformation est similaire pour les deux bras : elle diminue au cours du chargement. Afin de mieux visualiser la différence de mode de déformation entre les deux bras, une coupe verticale de ceux-ci est montrée sur la figure I.2.7, sur laquelle est représentée la valeur de K_3 pour chaque élément. Alors que la

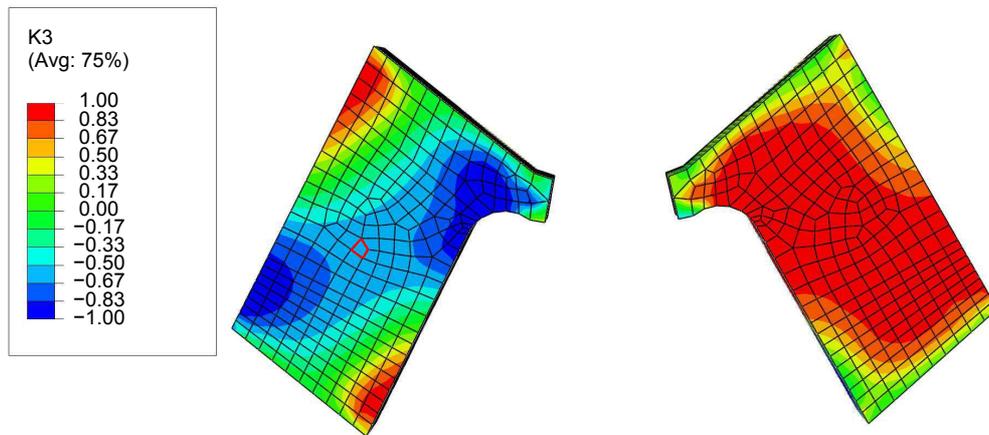


FIGURE I.2.7 : Vue en coupe verticale des bras du tampon moteur après un chargement de type tronçon 23

majeure partie du bras droit subit un état de déformation proche de la traction, l'état de déformation du bras est plus hétérogène : des zones en haut à gauche et en bas à droite subissent de la traction, alors qu'il existe une bande diagonale opposée qui subit de la compression. Plus l'élément considéré est proche du bord, plus la part de compression est forte. Au centre (l'élément central est repéré en rouge), il est vérifié qu'une valeur moyenne de $-0,5$ est obtenue. Hors de ces zones, les éléments subissent du cisaillement pur. La différence de mode de déformation entre les deux bras s'explique par le fait que le chargement n'est pas symétrique, avec en particulier $U_1 \neq 0$.

Finalement, l'évolution des deux invariants à cœur de la butée Z est tracée en fonction du déplacement global vertical U_3 sur la figure I.2.8. Jusqu'à $U_3 = -2,5$ mm, les butées Z ne sont pas déformées. Alors $K_2 = 0$ et K_3 n'est pas défini. À partir de ce point de chargement, les butées entrent en contact avec l'étrier. Elles sont d'abord sollicitées en compression/ cisaillement avec une forte part de compression, puis la part de cisaillement augmente et le mode de déformation est quasiment constant jusqu'à la fin du chargement.

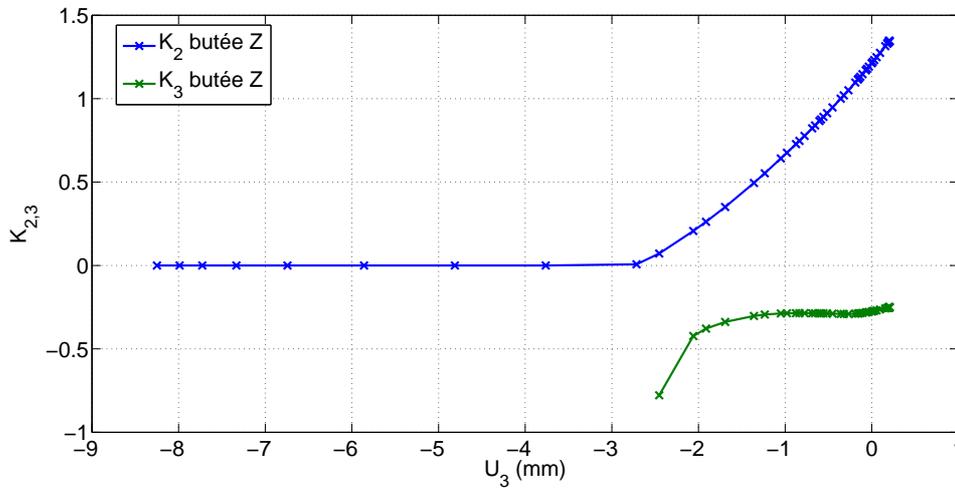


FIGURE I.2.8 : Évolution de K_2 et de K_3 à cœur d'une des butées Z en fonction du déplacement vertical global U_3 ; cas du tronçon 23

De plus, l'amplitude de déformation augmente fortement.

2.3.4 Tronçon 14

La figure I.2.9 montre la pièce déformée après application des précharges puis des déplacements correspondant au tronçon 14. Dans ce cas, ce sont les bras qui subissent l'amplitude de déformation la plus importante : à gauche $K_2 = 0,91$ et à droite, $K_2 = 0,76$. La butée X gauche est sollicitée plus faiblement ($K_2 = 0,24$). Les deux bras sont principalement en compression, le bras droit subissant plus de cisaillement que le bras gauche. La butée X gauche est en compression + cisaillement. Les autres parties de la pièce ne sont pas déformées.

La figure I.2.10 montre l'évolution des deux invariants à cœur de la butée X droite (symbole \times), du bras droit (symbole \circ) et du bras gauche (symbole \square), en fonction du déplacement global horizontal U_1 . $U_1 = 0$ correspond à la fin de la précharge. À partir de ce point, le mode de déformation de la butée X est quasiment constant, celle-ci est sollicitée en compression-cisaillement pendant tout le chargement, et l'amplitude de déformation augmente. Les deux bras subissent une compression majoritaire avec une part de cisaillement, et la part de compression augmente au cours du chargement. L'augmentation est plus marquée pour le bras gauche. De plus, l'amplitude de déformation augmente pour les deux, celle subie par le bras gauche étant supérieure à celle subie par le bras droit.

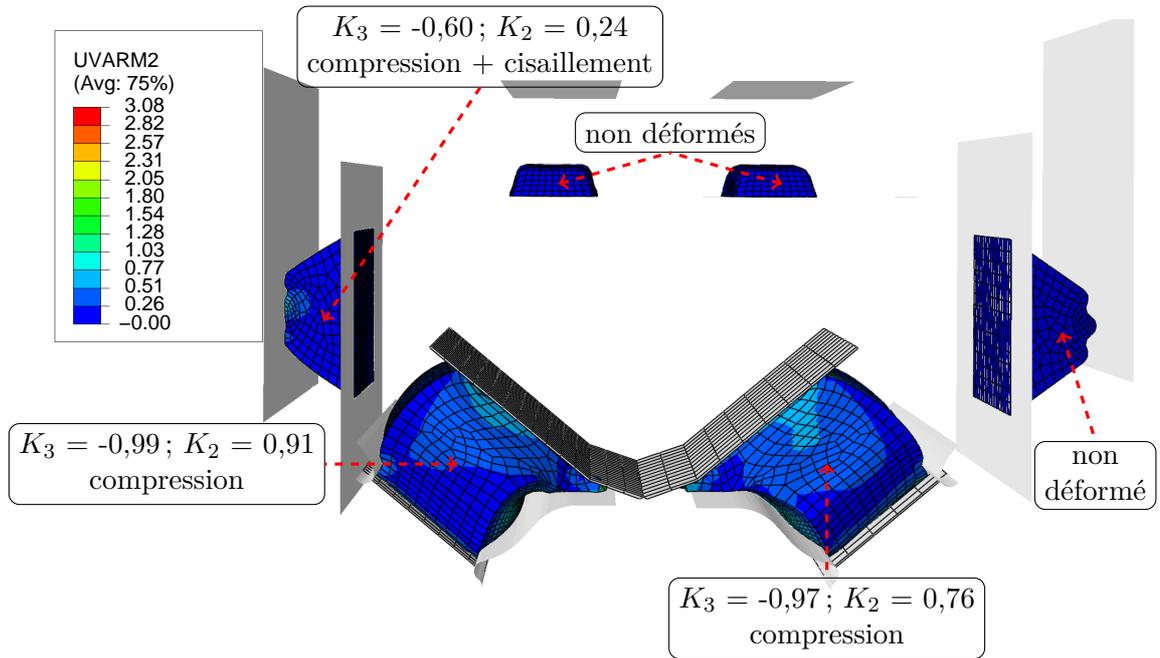


FIGURE I.2.9 : Etat déformé de la pièce après un chargement de type tronçon 14. L'échelle de couleur correspond aux valeurs de K_2

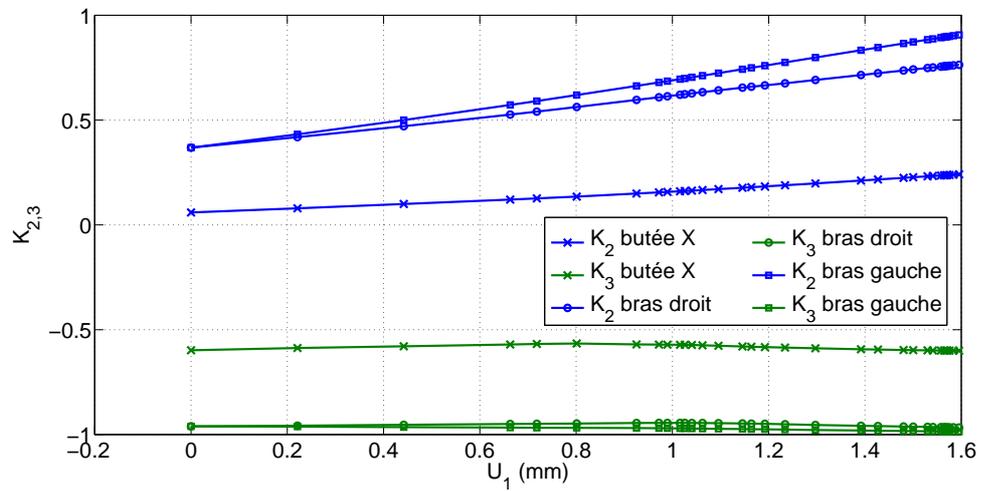


FIGURE I.2.10 : Évolution de K_2 et de K_3 à cœur de la butée X gauche et des deux bras en fonction du déplacement horizontal global U_1 ; cas du tronçon 14

2.4 Bilan

À présent, les points de chargements maximaux sont considérés pour chaque tronçon ainsi que pour la précharge moteur, et les valeurs de K_2 sont portées sur un graphe en fonction des valeurs de K_3 . C'est ce que montre la figure I.2.11. Dans certains cas de chargement, toutes les zones ne sont pas sollicitées ($K_2 = 0$). Dans ce cas, aucun point n'est reporté sur le graphique pour la zone concernée. On distingue trois modes

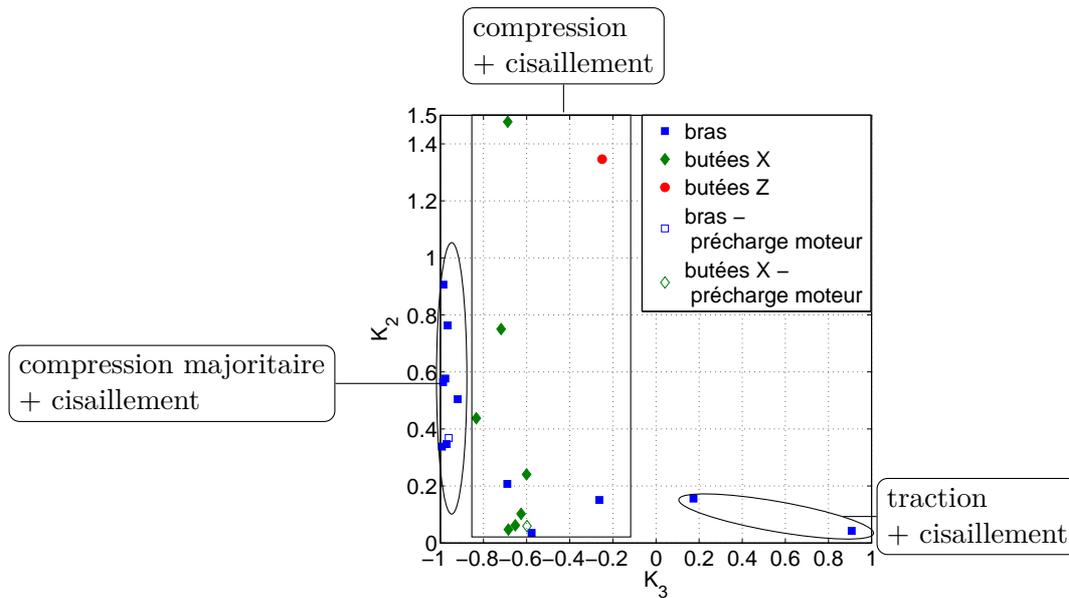


FIGURE I.2.11 : Valeurs finales de K_2 et K_3 pour chaque tronçon, au centre des butées X, des butées Z et des bras

de déformation principaux, à savoir :

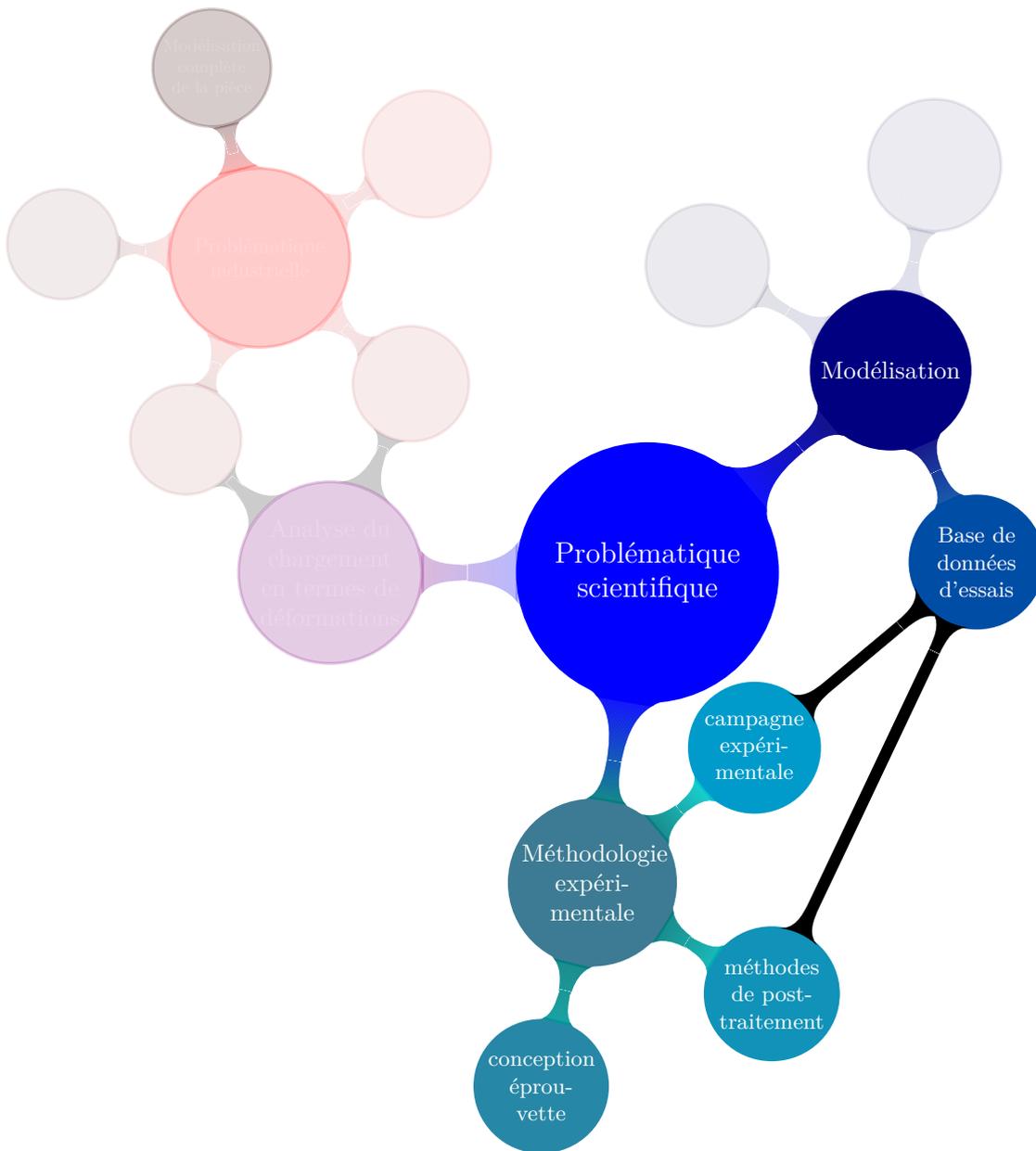
- Compression uniaxiale majoritaire, avec un léger cisaillement. Ce mode concerne les bras, et la plus grande amplitude est atteinte pour le chargement issu du tronçon 14 ($K_2 = 0,91$) ;
- Compression uniaxiale et cisaillement. On retrouve ce mode dans toutes les parties de la pièce. L'amplitude la plus élevée est atteinte dans une butée X, lors du tronçon 10 ($K_2 = 1,48$) ;
- Traction uniaxiale et cisaillement. Ce mode ne concerne que les bras et se produit lors du tronçon 10 ($K_2 = 0,16$) pour l'un des bras, alors que le second est en compression-cisaillement (cf. figure I.2.3). On retrouve ce mode pour le tronçon 23, où la part de traction uniaxiale est cette fois-ci beaucoup plus importante que la part de cisaillement.

Conclusion

Dans ce chapitre, l'enveloppe de déplacements déterminée dans le chapitre précédent a été traduite en une enveloppe de déformations. Pour cela, il a été choisi de calculer deux invariants du tenseur de Hencky, K_2 , qui quantifie l'amplitude de déformation et K_3 , qui caractérise sa multiaxialité, au centre de chacune des parties de la pièce. Quatre cas de chargements ont été étudiés. Ces exemples permettent d'abord de visualiser comment se traduit le chargement global, imposé au centre de la pièce, à l'échelle des parties de la pièce. Ensuite, l'évolution des deux invariants a été tracée au cours du temps. Dans certain cas, le mode de déformation peut varier fortement au cours d'un même chargement. Enfin, l'ensemble des valeurs de K_2 et K_3 , évaluées au point central de chacune des parties ont été regroupées dans un même graphe. En considérant les valeurs d'amplitude de déformation, il est clair que l'étude devra prendre en compte les grandes déformations. De plus, les valeurs de K_3 ont fait apparaître que les différentes parties de la pièce sont constamment soumises à des chargements multiaxiaux, combinant cisaillement et traction ou compression. Ces deux phénomènes, à savoir les grandes déformations et la multiaxialité seront donc au cœur de l'étude. L'étape suivante consiste à déterminer comment mener des essais de caractérisation sur éprouvettes constituées d'un mélange proche de celui de la pièce, qui prennent en compte cette multiaxialité en grandes déformations.

Deuxième partie

Essais de traction-torsion sur élastomères



Chapitre 1

Méthodologie expérimentale de la traction-torsion sur élastomère

Sommaire

1.1 Équations de la traction-torsion quasi-statique et isochores d'un cylindre	36
1.2 Conception de l'éprouvette	41
1.2.1 Les contraintes de conception	41
1.2.2 Étude préliminaire	42
1.2.3 Géométrie finale	47
1.2.4 Bilan	49
1.3 Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents	51
1.3.1 Par simulation éléments finis	52
1.3.2 Par stéréo-corrélation d'images	55
1.3.3 Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux	66

Introduction

Dans le chapitre précédent, il a été montré que la pièce est couramment soumise à des sollicitations multiaxiales. Or, les lois de comportement identifiées sur des essais uniaxiaux conduisent à des résultats peu probants lorsqu'elles sont utilisées pour prédire la réponse mécanique sous d'autres types de chargement, comme le cisaillement pur ou la traction équibiaxiale. Ajouter d'autres types d'essais aux données sur lesquelles sont basées l'identification permet d'améliorer cette prédiction (voir par exemple [Marckmann et Verron \(2006\)](#) et [Steinmann *et al.* \(2012\)](#)). L'inconvénient est qu'il faut à la fois une éprouvette et un dispositif d'essai différents pour chacun des essais. Une autre solution consiste à imposer plusieurs modes de chargement sur la même géométrie. C'est ce qu'il est possible de réaliser via des essais de traction biaxiale sur des éprouvettes en croix ([Treloar, 1948](#); [Rivlin et Saunders, 1951](#); [Blatz et Ko, 1962](#); [Kawabata et Kawai, 1977](#)),

ou des *bulge tests* (application d'une pression sur membrane, voir par exemple [Treloar \(1944a\)](#); [Tsakalakos \(1981\)](#); [Sasso et al. \(2008\)](#); [Machado et al. \(2012\)](#)). Cependant, la réalisation de ces essais s'avère relativement complexe et des problèmes d'homogénéité de la déformation sont fréquemment rencontrés.

Les essais de traction-torsion sur éprouvette cylindrique constituent une bonne alternative, puisque d'une part l'éprouvette cylindrique associée est de géométrie simple, et d'autre part des machines commerciales dédiées à ces essais sont aujourd'hui disponibles. Les éprouvettes sont soit creuses (voir par exemple [Gent et Rivlin \(1952\)](#) ou [Mars et Fatemi \(2004\)](#)), soit pleines ([Rivlin et Saunders, 1951](#); [Penn et Kearsley, 1976](#); [McKenna et Zapas, 1983](#); [Haupt et Sedlan, 2001](#)). Pour des raisons de simplicité de fabrication et de montage, il a été choisi de concevoir une éprouvette cylindrique pleine. La conception de l'éprouvette est régie par plusieurs types de contraintes, notamment celle de générer des efforts et couples mesurables par les capteurs disponibles. Les efforts et couples associés aux déformations maximales que l'on veut imposer vont donc être calculés grâce à la solution analytique du cylindre parfait. Dans une première partie, le problème mécanique de la traction-torsion d'un cylindre sera donc rappelé. Ensuite, les différentes étapes de conception de l'éprouvette seront présentées. Enfin, la géométrie adoptée n'étant pas parfaitement cylindrique, la question de comment se rapporter au cas d'un cylindre parfait sera traitée.

1.1 Équations de la traction-torsion quasi-statique et isochore d'un cylindre

Les équations décrivant la traction-torsion quasi-statique d'un cylindre sont largement utilisées depuis [Rivlin et Saunders \(1951\)](#). La figure [II.1.1](#) présente les différentes notations de la traction-torsion d'un cylindre homogène, dans la configuration non déformée (à gauche) et déformée (à droite). Dans notre cas d'étude, le matériau est considéré comme incompressible. Ainsi, toute transformation est supposée isochore (le volume reste constant).

Un cylindre homogène de longueur et rayon initiaux L et A est considéré. Dans la configuration initiale (C_0), un point M du cylindre non déformé est repéré par ces coordonnées (R, Θ, Z) dans le repère cylindrique initial $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$. La transformation consiste en un déplacement axial u dans la direction \mathbf{e}_Z et un angle de torsion ϕ autour du même vecteur, appliqué sur la surface supérieure S_{sup} alors que la surface inférieure S_{inf} est maintenue et la surface latérale S_{lat} est libre. La longueur et le rayon du cylindre déformé sont notés l et a respectivement. Par cette transformation, le point M devient M' , dont les coordonnées sont (r, θ, z) dans le repère cylindrique déformé $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Le déplacement de M à M' est décrit par

$$r = \frac{R}{\sqrt{\lambda}} \quad , \quad \theta = \Theta + \tau Z \quad , \quad z = \lambda Z, \quad (\text{II.1.1})$$

où λ est l'extension et τ est l'angle par unité de longueur non déformée. Parmi les auteurs qui ont étudié la traction-torsion, certains choisissent de définir l'angle par unité de

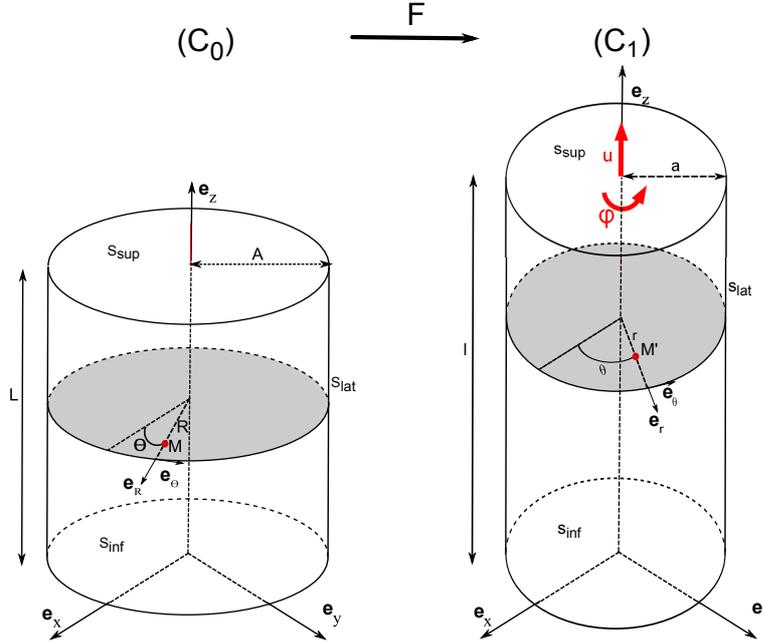


FIGURE II.1.1 : Cinématique d'un cylindre soumis à de la traction-torsion : notations

longueur non déformée (Huber et Tsakmakis, 2000a; Haupt et Sedlan, 2001; Hartmann, 2001a; Xiao *et al.*, 2001; De Tommasi et Puglisi, 2007) alors que d'autres choisissent de définir l'angle par unité de longueur déformée (Rivlin et Saunders, 1951; Plešek et Kruisová, 2006; Kanner et Horgan, 2008; Kakavas *et al.*, 2008). Deux arguments justifient notre choix d'utiliser l'angle par unité de longueur non déformée. Premièrement, ce choix simplifie la définition de la campagne d'essais, dans laquelle les résultats obtenus pour plusieurs couples (λ, τ) seront comparés, et notamment les résultats de l'application de différentes extensions λ combinées au même τ . Dans ce cas, le calcul de l'angle est simple puisqu'il ne dépend que de la longueur initiale du cylindre et non de λ . Enfin, il semble plus judicieux d'imposer deux variables λ et τ totalement indépendantes, notamment si des dérivées en fonction de ces grandeurs sont à calculer. Ces deux grandeurs sont uniformes et définies par

$$\lambda = \frac{l}{L}, \quad \tau = \frac{\phi}{L}. \quad (\text{II.1.2})$$

Par conséquent, le gradient de la transformation \mathbf{F} s'écrit

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) + \tau r \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_Z + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \quad (\text{II.1.3})$$

et le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} a la forme suivante

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{\lambda} + \tau^2 r^2 \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \lambda \tau r (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \lambda^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (\text{II.1.4})$$

L'équation (II.1.4) montre que la déformation est complètement déterminée par l'extension λ et l'angle par unité de longueur τ . En termes de déformations, le logiciel Abaqus

fournit les composantes du tenseur de Hencky, aussi nommé tenseur des déformations vraies. Le post-traitement des données sera basé sur ces grandeurs, nous introduisons donc ici ce tenseur. Le théorème de décomposition polaire affirme que le tenseur gradient de la transformation \mathbf{F} peut être décomposé en un tenseur unique, symétrique et défini positif et un tenseur unique orthogonal de la façon suivante (voir [Holzapfel \(2000\)](#) par exemple) :

$$\exists! \mathbf{V} \in \mathcal{S}^3, \mathbf{R} \in \mathcal{O}_3 / \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (\text{II.1.5})$$

où \mathbf{R} est le tenseur orthogonal qui décrit la partie rotation de la transformation. \mathbf{V} , quant à lui, est le tenseur symétrique défini positif qui décrit la partie extension de la déformation. Il est nommé tenseur d'extension gauche et est relatif à la configuration eulérienne. Il est relié au tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} par

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{B}. \quad (\text{II.1.6})$$

\mathbf{V} est diagonalisable et sa forme propre s'écrit

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (\text{II.1.7})$$

où les \mathbf{n}_i sont les vecteurs propres de \mathbf{V} et sont désignés comme les directions principales spatiales (c'est-à-dire de la configuration eulérienne). Il s'agit des directions qui sont restées orthogonales entre elles après application de la transformation. Les λ_i sont les valeurs propres de \mathbf{V} , aussi appelées extensions principales. Ce sont les extensions respectives subies dans chacune des directions principales. On définit alors le tenseur des déformations de Hencky :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (\text{II.1.8})$$

aussi noté

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{V}. \quad (\text{II.1.9})$$

Ce tenseur est appelé tenseur des déformations vraies car il constitue une généralisation rigoureuse en grandes déformations du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$. Prenons l'exemple d'une traction uniaxiale en 1D, en notant L la longueur initiale du segment et l sa longueur déformée. La déformation, continue, peut être vue comme la somme d'incrément de déformation :

$$\int d\epsilon = \int_L^l \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{l}{L} \right) = \ln(\lambda). \quad (\text{II.1.10})$$

Dans la partie suivante, il sera nécessaire de calculer λ et τ à partir des données du logiciel Abaqus. Pour cela, nous exprimons la relation entre λ , τ et les valeurs propres du tenseur \mathbf{H} , notées α_1 , α_2 et α_3 , toujours dans le cas du cylindre parfait

$$\lambda = e^{-2\alpha_2}, \quad (\text{II.1.11})$$

$$\tau = \sqrt{\frac{e^{2\alpha_1} + e^{2\alpha_3} - e^{2\alpha_2} - e^{-4\alpha_2}}{A^2 e^{2\alpha_2}}}, \quad (\text{II.1.12})$$

où

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3. \quad (\text{II.1.13})$$

À présent, nous nous intéressons à l'état de contrainte : l'objectif est de déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. D'un point de vue expérimental, les quantités mesurées sont l'effort N et le couple M ; ils sont respectivement reliés aux composantes du tenseur des contraintes de Cauchy par

$$N\mathbf{e}_z = \int_{S_{\text{sup}}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z dS = \int_{S_{\text{sup}}} \sigma_{zz} dS \mathbf{e}_z, \quad (\text{II.1.14})$$

et

$$M\mathbf{e}_z = \int_{S_{\text{sup}}} r\mathbf{e}_r \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\theta) dS = \int_{S_{\text{sup}}} r\sigma_{\theta z} dS \mathbf{e}_z. \quad (\text{II.1.15})$$

Comme $\boldsymbol{\sigma}$ est défini localement (il dépend de la coordonnée radiale), il est impossible de passer outre l'intégration et d'exprimer $\sigma_{\theta z}$ and σ_{zz} comme des fonctions explicites de N et M . De plus, sans hypothèses supplémentaires, il n'existe pas d'autres équations faisant intervenir les autres composantes de la contrainte. L'étude est maintenant restreinte au cas de matériaux homogènes, incompressibles, isotropes et hyperélastiques. Alors, la réponse mécanique du matériau est définie par une fonction énergie de déformation W qui, dans le cas isotrope incompressible, dépend uniquement des deux premiers invariants de \mathbf{B} , notés I_1 and I_2 , et donnés par

$$I_1 = \text{trace}(\mathbf{B}) = \tau^2 r^2 + \frac{2}{\lambda} + \lambda^2, \quad (\text{II.1.16})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{trace}(\mathbf{B}))^2 - \text{trace}(\mathbf{B}^2) \right] = \frac{\tau^2 r^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda. \quad (\text{II.1.17})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy dérive de cette fonction énergie de déformation (voir par exemple [Holzapfel \(2000\)](#)). En notant W_1 et W_2 les dérivées de W par rapport à I_1 et I_2 respectivement,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{B} - 2W_2\mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II.1.18})$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité 3×3 et p est le multiplicateur de Lagrange dû à la contrainte d'incompressibilité, souvent appelé pression hydrostatique. Appliqué au tenseur \mathbf{B} dans le cas de la traction-torsion, donné par l'équation (II.1.4), les composantes de la contrainte de Cauchy s'écrivent

$$\sigma_{rr}(r) = 2W_1\lambda^{-1} - 2W_2\lambda - p \quad (\text{II.1.19})$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = 2W_1(\lambda^{-1} + \tau^2 r^2) - 2W_2\lambda - p \quad (\text{II.1.20})$$

$$\sigma_{zz}(r) = 2W_1\lambda^2 - 2W_2 \left(\lambda^{-2} + \frac{\tau^2 r^2}{\lambda} \right) - p \quad (\text{II.1.21})$$

$$\sigma_{\theta z}(r) = 2W_1\lambda\tau r + 2W_2\tau r \quad (\text{II.1.22})$$

$$\sigma_{r\theta}(r) = 0 \quad (\text{II.1.23})$$

$$\sigma_{rz}(r) = 0 \quad (\text{II.1.24})$$

Afin de déterminer p , on considère l'équation d'équilibre dans la direction radiale

$$\frac{d\sigma_{rr}(s)}{ds} + \frac{1}{s}(\sigma_{rr}(s) - \sigma_{\theta\theta}(s)) = 0 \quad 0 < s < a \quad (\text{II.1.25})$$

et la condition aux limites sur la surface latérale

$$\sigma_{rr}(a) = 0. \quad (\text{II.1.26})$$

L'intégration de l'équation (II.1.25) entre le rayon $s = r$ et la surface latérale $s = a$ avec les équations (II.1.19-II.1.20) et la condition aux limites (II.1.26) permet d'obtenir la valeur de p en r

$$p(r) = 2\tau^2 \int_r^a W_1(s) s ds + 2W_1(r)\lambda^{-1} - 2W_2(r)\lambda, \quad (\text{II.1.27})$$

ainsi que les composantes diagonales de σ

$$\sigma_{rr}(r) = -2\tau^2 \int_r^a W_1(s) s ds \quad (\text{II.1.28})$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -2\tau^2 \int_r^a W_1(s) s ds + 2W_1(r)\tau^2 r^2 \quad (\text{II.1.29})$$

$$\sigma_{zz}(r) = 2W_1(r)(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - 2W_2(r) \left(\lambda^{-2} - \lambda + \frac{\tau^2 r^2}{\lambda} \right) - 2\tau^2 \int_r^a W_1(s) s ds. \quad (\text{II.1.30})$$

Il est alors possible d'exprimer N en fonction des dérivées de l'énergie de déformation

$$N = 4\pi \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \int_0^a (\lambda W_1(r) + W_2(r)) r dr - 4\pi \frac{\tau^2}{\lambda} \int_0^a W_2(r) r^3 dr - 4\pi \tau^2 \int_0^a \left[r \int_r^a W_1(s) s ds \right] dr, \quad (\text{II.1.31})$$

ou encore, après intégration par parties du dernier terme de la partie droite de l'équation,

$$N = 4\pi \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \int_0^a r (\lambda W_1(r) + W_2(r)) dr - 2\pi \frac{\tau^2}{\lambda} \int_0^a (2W_2(r) + \lambda W_1(r)) r^3 dr. \quad (\text{II.1.32})$$

De même, en utilisant les équations (II.1.15)₂ et (II.1.22), le couple s'écrit

$$M = 4\pi \tau \int_0^a (\lambda W_1(r) + W_2(r)) r^3 dr. \quad (\text{II.1.33})$$

Les équations de la traction-torsion d'un cylindre ont été présentées. Dans la suite, une partie de ces équations sera utilisée pour concevoir une éprouvette cylindrique.

1.2 Conception de l'éprouvette

1.2.1 Les contraintes de conception

Les premières contraintes de conception sont imposées par la machine d'essais utilisée. Il s'agit d'une Instron Electropuls E10000, visible sur la figure II.1.2, permettant d'imposer des déplacements ou efforts en traction et torsion, combinées ou non. Cette machine est adaptée aux essais sur élastomères puisqu'elle permet d'imposer des grandes déformations, avec une course verticale du vérin de 60 mm et des rotations importantes (jusqu'à 11 tours). Deux capteurs d'effort et de couple sont disponibles. Le premier permet de mesurer des efforts jusqu'à 10 kN et des couples jusqu'à 100 N.m, alors que le second est limité à 1 kN et 25 N.m, respectivement.



FIGURE II.1.2 : Machine de traction-torsion Instron Electropuls E10000

L'objectif est de parvenir à imposer des déformations importantes (on fixe les valeurs cibles initiales à une extension $\lambda = 4$ et un angle par unité de longueur $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$), tout en générant des efforts et couples assez élevés pour ne pas se situer dans le bruit du capteur et inférieurs à ces limites. Il est également nécessaire d'assurer une accroche de qualité entre l'éprouvette et la machine. Pour cela, des mâchoires en V sont choisies. Des inserts métalliques cylindriques, collés à la partie caoutchouc lors de la fabrication de l'éprouvette seront pris entre ces mâchoires. Cette combinaison permet d'éviter des problèmes de centrage de l'éprouvette lors de son montage sur la machine. Le deuxième type de contrainte concerne les instabilités. Afin de contrôler les déformations subies par l'éprouvette et ainsi éviter tout phénomène de plissement ou de flambement, celle-ci doit être suffisamment robuste. Enfin, au niveau de la partie centrale de l'éprouvette, l'état de déformation doit être analogue à celui d'un cylindre parfait. Les paramètres géométriques à déterminer afin de respecter au mieux les contraintes énoncées sont présentés sur la figure II.1.3 : le rayon supérieur R_{sup} , la hauteur de bourrelet h' , le rayon utile de la partie centrale cylindrique R_u et sa hauteur h . Dans le tableau II.1.1 ont été reliées les contraintes de conception avec les paramètres principaux à optimiser pour qu'elles soient respectées.

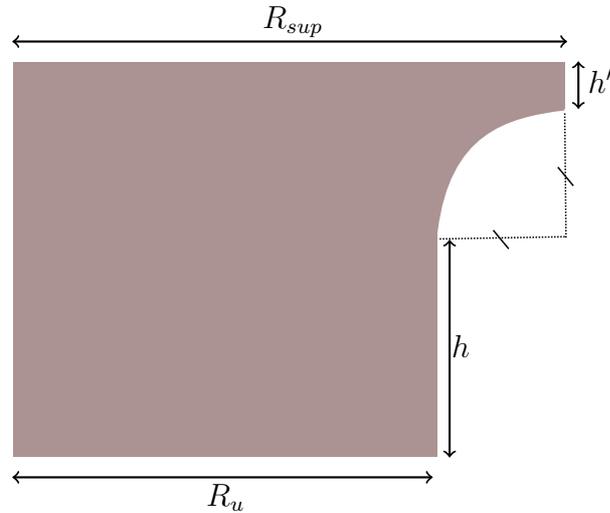


FIGURE II.1.3 : Schéma du quart de la coupe de l'éprouvette

Contraintes de conception	Paramètres géométriques à optimiser
Atteindre $\lambda = 4$ et $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$ Efforts et couples mesurables par l'un des capteurs Eviter les instabilités	h, R_u
Assurer une bonne accroche (interface machine/éprouvette)	$R_{sup}, h',$ forme inserts
Générer un état de déformation analogue à celui d'un cylindre parfait	h

TABLEAU II.1.1 : Liste des contraintes de conception associées aux paramètres géométriques ayant une influence sur celles-ci. Les paramètres sont définis sur la figure II.1.3

1.2.2 Étude préliminaire

Dans un premier temps, une plage de valeurs raisonnables est fixée pour le rayon utile $R_u : 4 \leq R_u \text{ (mm)} \leq 25$. Les grandeurs qui importent le plus dans la détermination du rayon sont les efforts et couples engendrés, qui, pour rappel, doivent être inférieurs aux limites d'un des capteurs de la machine, sans être trop faibles pour garantir des mesures « propres ». L'objectif est de calculer des ordres de grandeur d'efforts et couples lorsque l'extension $\lambda = 4$ et l'angle par unité de longueur $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$ maximaux sont imposés. Pour cela, une loi de comportement est choisie, et la solution analytique d'un cylindre parfait est calculée pour plusieurs valeurs de rayon R_u . Comme, au moment de la conception, le mélange destiné à la fabrication de l'éprouvette n'était pas disponible, un autre matériau a été utilisé pour identifier les paramètres matériaux, à savoir un caoutchouc naturel chargé en noir de carbone. Un essai de traction uniaxiale a été réalisé

sur ce matériau, sur lequel ont été identifiés les 3 coefficients d'une loi de comportement polynomiale (Mooney-Rivlin généralisé) :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2, \quad (\text{II.1.34})$$

avec

$$C_{10} = 0,7158 \quad ; \quad C_{01} = 0,2808 \quad ; \quad C_{20} = 0,0561. \quad (\text{II.1.35})$$

Bien sûr, l'identification des paramètres sur le mélange de l'éprouvette devrait être différente et l'influence des paramètres sur les efforts et couples calculés est non négligeable, mais il s'agit ici uniquement d'obtenir des ordres de grandeurs qui sont comparés aux capacités des capteurs disponibles. Le tableau II.1.2 présente les valeurs d'efforts et couples obtenus pour plusieurs rayons R_u .

R_u (mm)	M (N.m)	N (kN)
4	0,09	0,91
5	0,23	1,43
10	3,73	5,74
12,5	9,27	8,99
15	19,63	13
20	65,34	23,31
22	97,98	28,29
25	169,86	36,64

TABLEAU II.1.2 : Moment et effort en fonction de R_u pour le chargement maximal. En gris clair sont indiquées les valeurs mesurables par les deux capteurs, en gris foncé celles qui le sont uniquement par le capteur 10 kN/100 N.m

Une première restriction due aux limites des capteurs apparaît ici : pour que les efforts soient mesurables, il faut que le rayon utile soit inférieur ou égal à 12,5 mm. Il est préférable d'adopter la valeur la plus importante possible du rayon pour générer des couples qui ne se situent pas dans le bruit du capteur utilisé. Pour utiliser le capteur 1 kN/25 N.m, il faudrait choisir $R_u = 4$ mm. Or, le couple correspondant est très faible par rapport à la pleine échelle. On choisit donc le rayon utile maximal compatible avec le capteur 10 kN/100 N.m, soit $R_u = 12,5$ mm. Il reste à déterminer R_{sup} et h . Pour cela, un modèle éléments finis est réalisé sur Abaqus. Il s'agit d'un modèle 2D axisymétrique où seul le quart de la section de l'éprouvette est représenté. La loi de comportement sélectionnée est la même que plus haut, définie par les équations (II.1.34) et (II.1.35). Dans un premier temps, un chargement en traction uniaxiale est imposé. Sur la figure II.1.4 sont représentées les conditions aux limites : un appui simple glissant pour la surface inférieure S_{inf} , un déplacement vertical D de la surface supérieure S_{sup} associé à un blocage du déplacement latéral. Initialement, on fixe $R_{sup} = 2R_u$, ce qui assure une surface d'adhérence caoutchouc/insert métallique importante. On cherche alors la valeur de h qui permet d'atteindre une extension $\lambda = 4$ dans une zone de l'éprouvette lorsqu'un déplacement $D = 30$ mm est imposé. L'analyse éléments finis indique alors

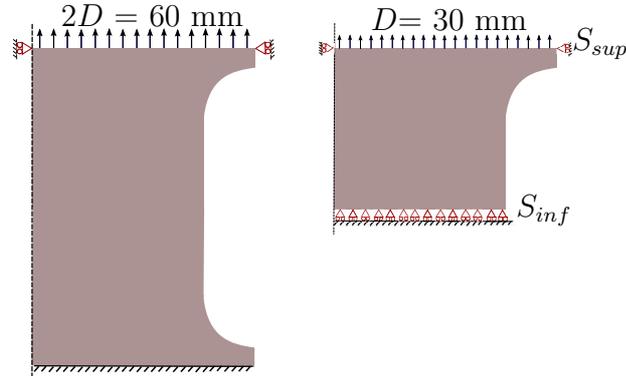


FIGURE II.1.4 : Conditions aux limites dans le cas de la traction simple

que h doit être inférieur à 1,5 mm, ce qui est trop faible, notamment pour obtenir une zone suffisamment grande de l'éprouvette où la déformation est homogène. La valeur de R_{sup} est alors diminuée et h est ajusté pour atteindre $\lambda = 4$ et obtenir une zone assez importante où l'extension est homogène. Cette zone est caractérisée par sa hauteur h_h . Le tableau II.1.3 présente les résultats obtenus : pour plusieurs valeurs de R_{sup} sont indiqués la valeur de h optimisée, le rapport h_h/h et le rapport R_{sup}/R_u . On remarque

R_{sup} (mm)	h (mm)	h_h (mm)	h_h/h	R_{sup}/R_u
>21	-	-	-	-
20,5	3,15	0,6	0,19	1,64
20	3,6	1,9	0,53	1,6
19,5	4,05	2,8	0,69	1,56
19	4,45	3,3	0,74	1,52
18,5	5	3,9	0,78	1,48

TABLEAU II.1.3 : Valeurs de hauteur h à fixer pour atteindre l'extension maximale avec un déplacement $D=30$ mm, résultats en terme de hauteur de zone homogène h_h et de rapport de rayons

que plus R_{sup} est petit, plus la hauteur de la zone homogène est grande et plus le rapport h_h/h est important. Un compromis est nécessaire puisque d'une part il est intéressant d'avoir une zone homogène étendue, et donc de choisir R_{sup} le plus faible possible, mais d'autre part il faut garantir une bonne accroche et donc choisir un rapport R_{sup}/R_u important. La valeur intermédiaire $R_{sup} = 19,5$ mm est donc retenue. La figure II.1.5 représente l'extension obtenue pour la géométrie sélectionnée.

La deuxième étape consiste à simuler le comportement de l'éprouvette en traction-torsion pour le chargement maximal souhaité, et de déterminer la zone où l'extension λ et l'angle par unité de longueur τ sont homogènes. Un angle $\alpha = 0,52$ rad ainsi qu'un déplacement axial $D = 30$ mm sont imposés. En pratique, dans Abaqus, pour imposer la rotation de la surface supérieure, il faut d'abord imposer un couplage cinématique

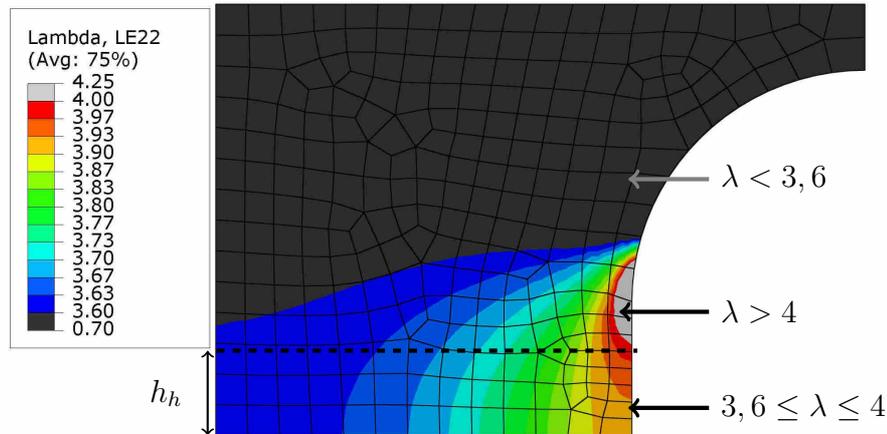


FIGURE II.1.5 : Valeurs de l'extension locale λ lors de la simulation éléments finis de l'éprouvette initiale sollicitée en traction uniaxiale ($D = 30$ mm)

sur le degré de liberté de la rotation autour de l'axe vertical entre tous les points de la surface et l'un des points, qui est désigné comme maître (ici, nous choisissons le point le plus à l'extérieur). Ensuite, on impose la rotation uniquement sur le point maître. Les conditions aux limites du cas traction-torsion sont représentées sur la figure II.1.6. En affichant les valeurs de l'extension sur toute l'éprouvette comme précédemment, on

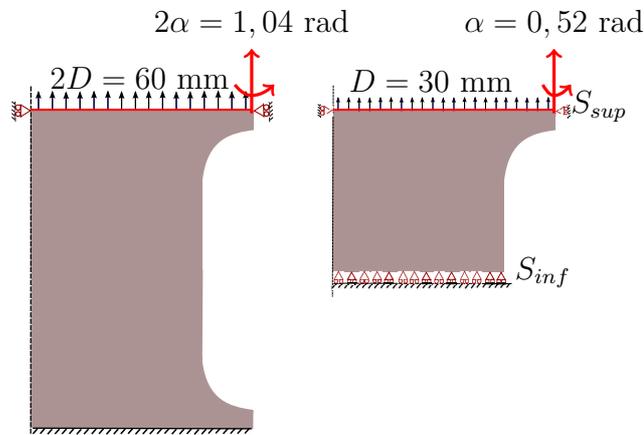


FIGURE II.1.6 : Conditions aux limites dans le cas de la traction-torsion

trouve des valeurs homogènes à 10 % près pour l'extension sur une hauteur $h_h = 2,53$ mm. De plus, l'angle par unité de longueur est relevé en quelques points de cette zone, et il est vérifié qu'il est également homogène à 10% près, ce qui est satisfaisant par rapport au critère initialement fixé. Cependant, en ajoutant de la torsion dans le chargement imposé, l'écart entre l'extension à coeur λ_c , c'est-à-dire en $R = 0$, et l'extension à l'extérieur λ_e , c'est-à-dire en $R = R_u$ a augmenté : l'extension est moins homogène lorsque de la

torsion est appliquée. La figure II.1.7 montre la position des points auxquels sont relevés l'extension. Même si l'écart relatif entre l'extension à cœur et à l'extérieur de l'éprouvette

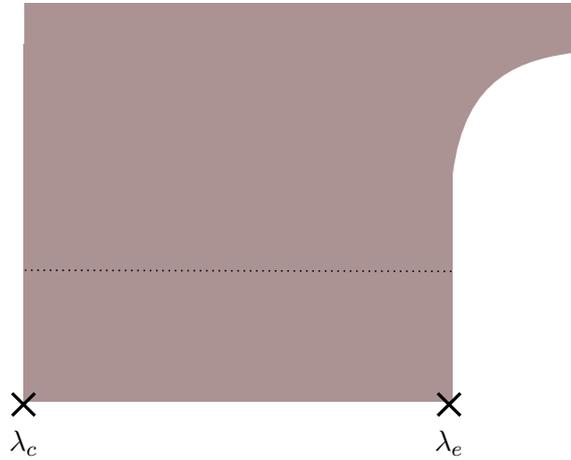


FIGURE II.1.7 : Position des points auxquels est comparée l'extension

reste inférieur à 10 %, il est jugé trop important (8,6 %). Il est alors décidé de faire varier les valeurs de R_u dans l'objectif de réduire l'écart entre λ_c et λ_e . La variation du rayon ne permet pas de faire diminuer l'écart des extensions de façon conséquente. De plus, elle entraîne une forte diminution du couple, le rendant difficilement mesurable par le capteur sélectionné. Ainsi, une division par 2 du rayon entraîne une division par 10 du couple. Les dimensions ne sont donc pas modifiées.

La figure II.1.8 montre les différentes dimensions retenues. Pour conclure, la solution

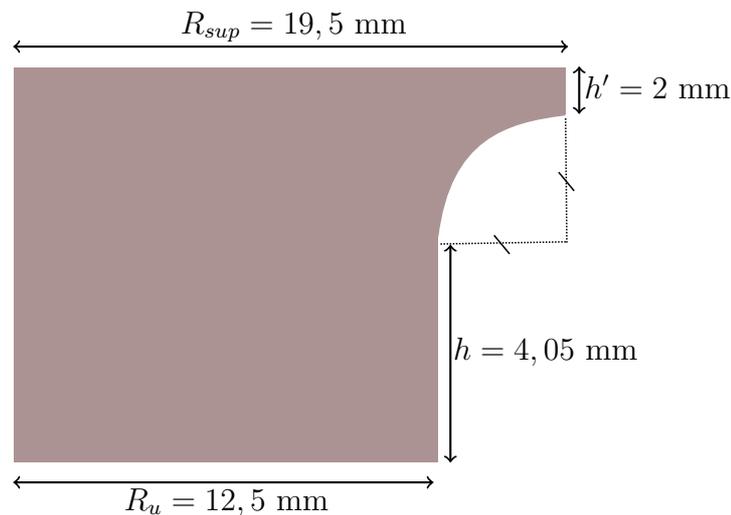


FIGURE II.1.8 : Dimensions retenues pour l'éprouvette lors de l'étude préliminaire

respecte les objectifs initialement fixés :

- Valeurs $\lambda = 4$ et $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$ atteintes ;
- Efforts et couples mesurables par le capteur 10 kN/100 N.m ;
- Géométrie compacte : peu de risque d'instabilité ;
- Zone importante où l'extension et l'angle par unité de longueur sont homogènes à 10%.

Cependant, l'écart entre l'extension à cœur et à l'extérieur est trop important lorsque de la torsion est imposée. Le dernier critère doit être plus sévère, mais il a été montré qu'il n'existait pas de solution satisfaisante avec le capteur 10 kN/100 N.m. Il est donc décidé de considérer un nouveau dimensionnement, basé cette fois-ci sur l'utilisation du capteur 1 kN/25 N.m. On notera que l'utilisation de ce capteur requiert une diminution de la valeur cible en extension, qui devient $\lambda = 2,5$.

1.2.3 Géométrie finale

Les nouvelles contraintes de dimensionnement sont :

- Atteindre $\lambda = 2,5$ et $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$;
- Déplacement maximal 60 mm, efforts et couples mesurables par le capteur 1 kN/25 N.m ;
- Eviter les instabilités ;
- Une zone de l'éprouvette présente des écarts relatifs de λ et τ inférieurs à 10% le long de la surface extérieure, alors que l'écart relatif des extensions à cœur et à l'extérieur est inférieur à 2%.
- Si M_{min} est le couple obtenu pour un angle de 5° , et $M_{maxC}=25 \text{ N.m}$ le couple maximum mesurable par le capteur $M_{min}/M_{maxC} \geq 1\%$

Comme pour la géométrie précédente, le premier paramètre fixé est le rayon utile R_u . Le tableau II.1.4 présente les moments et efforts résultants calculés pour plusieurs valeurs de R_u , à $\lambda = 2,5$ et $\tau=0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$. Le rayon le plus grand possible est choisi, soit 7 mm.

$R_u(\text{mm})$	M (N.m)	N (kN)
4	0,052	0,30
5	0,127	0,47
6	0,265	0,69
7	0,492	0,92
7.5	0,65	1,06

TABLEAU II.1.4 : Moment et effort en fonction de R_u pour le chargement maximal. Les valeurs comprises dans les limites du capteur 1 kN/25 N.m sont indiquées en gris

On fixe ensuite $R_{sup} = 2R_u$. L'étape suivante consiste à déterminer la hauteur h et le déplacement D à imposer pour atteindre les valeurs maximales de λ et τ souhaitées, tout en assurant les nouvelles contraintes d'homogénéité. Plusieurs valeurs de déplacement D sont imposées. Les valeurs de h , l'écart relatif entre les extensions et le rapport de

couple obtenus sont présentés dans le tableau II.1.5. Les valeurs surlignées sont retenues puisqu'elles représentent un bon compromis vis-à-vis des deux contraintes considérées. Afin de comparer plus rigoureusement l'homogénéité de la solution vis-à-vis de celle

D (mm)	h(mm)	$(\lambda_e - \lambda_c) / \lambda_e$	M_{min} / M_{maxC} (%)
30	14	0,08	0,5
25	10	0,4	0,8
23	9	0,6	0,97
21	8	0,8	1,1
20	7	1,6	1,3

TABLEAU II.1.5 : Hauteur h , écart relatif de l'extension à coeur/à l'extérieur et rapport des couples pour plusieurs valeurs de déplacement imposé D

d'un cylindre parfait, nous choisissons de comparer les valeurs propres du tenseur des déformations de Hencky. Pour cela,

1. Les trois valeurs propres du tenseur de Hencky finales calculées par éléments finis sont relevées en plusieurs points de la partie purement cylindrique de l'éprouvette, puis sont exportées dans un fichier texte. Ces valeurs sont notées $\alpha_i^{FEA}(R, Z)$. On remarque qu'à cause de l'hétérogénéité induite par la complexité de la géométrie, ces valeurs peuvent dépendre à la fois des coordonnées radiale et axiale du point auquel elles sont calculées, alors que la solution analytique du cylindre parfait ne dépend que de la coordonnée radiale ;
2. Les trois valeurs propres du tenseur de Hencky sont calculées analytiquement dans le cas du cylindre parfait (voir la section 1.1 de ce chapitre) en prenant $\lambda = 2, 5$ et $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$. Ces valeurs sont notées $\alpha_i^{analy}(R)$;
3. L'erreur relative est calculée pour chacune des valeurs propres :

$$Err_i(R, Z) = \frac{\alpha_i^{FEA}(R, Z) - \alpha_i^{analy}(R)}{\alpha_i^{analy}(R)}; \quad (\text{II.1.36})$$

4. Ces erreurs, ramenées en pourcentages, sont tracées en fonction de la position axiale Z sur la figure II.1.9. L'échelle de couleur représente la position radiale R . Pour chacune des sous-figures, des barres limites sont placées à $+5\%$ et -5% .

Il apparaît que pour les valeurs propres minimales et maximales, l'erreur commise entre les deux calculs est comprise entre -5 et $+5\%$ pour la quasi-totalité de la partie cylindrique de l'éprouvette, qui, pour rappel, mesure 16 mm (8 mm pour la demi-éprouvette). L'erreur sur la valeur propre minimale (Err_1), en valeur absolue, est même inférieure à 3% jusqu'à une hauteur $Z = 3 \text{ mm}$. On remarque alors que l'erreur la plus grande est atteinte pour une position radiale proche de 0 . L'erreur sur la valeur propre maximale (Err_3) ne dépasse pas $1,9\%$ en valeur absolue pour $Z < 3 \text{ mm}$, l'erreur maximale à cette position étant atteinte à l'extérieur du cylindre ($R = 7 \text{ mm}$). Enfin, l'erreur sur la valeur propre médiane (Err_2) est la plus élevée : elle atteint 5% pour une hauteur

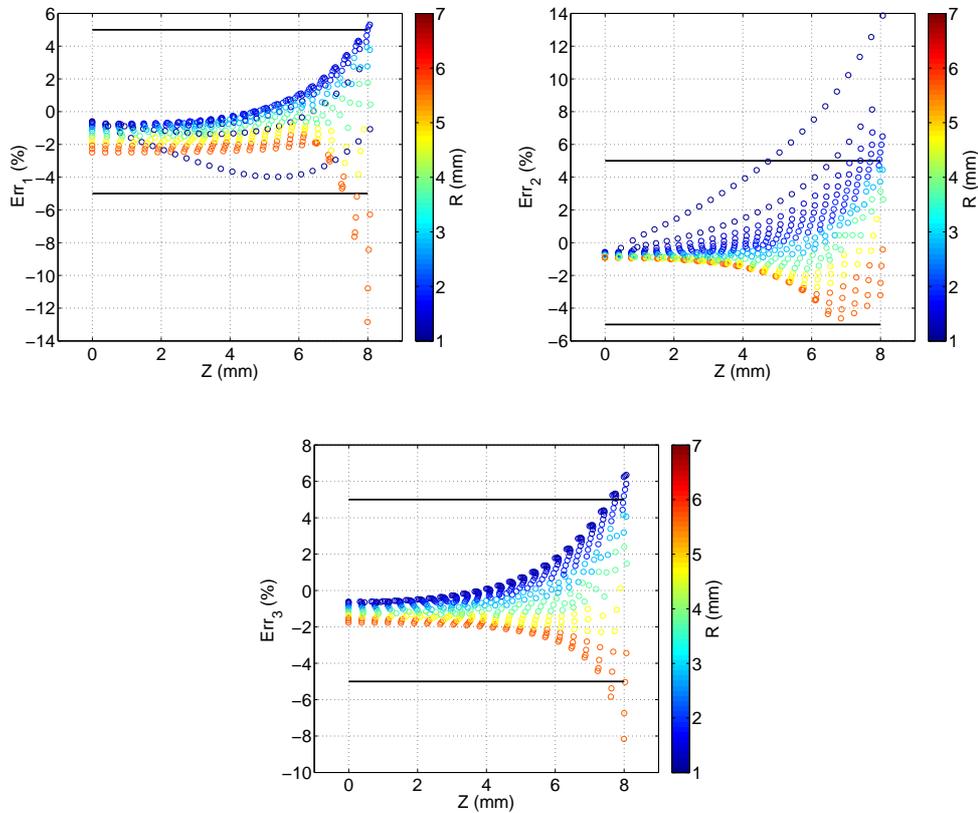


FIGURE II.1.9 : Erreurs relatives commises sur chacune des valeurs propres du tenseur de Hencky entre la solution du calcul éléments finis sur éprouvette et la solution analytique du cylindre parfait

$Z = 4,7$ mm et une position radiale proche de 0. Ainsi, le critère d'homogénéité avec la solution analytique du cylindre parfait est considéré comme validé puisque les erreurs relatives sur deux des valeurs propres du tenseur de Hencky sont bien en dessous de 5 % en valeur absolue, et toutes sont en dessous de ces 5 % jusqu'à une hauteur $Z = 4,7$ mm.

1.2.4 Bilan

La figure II.1.10 représente la géométrie finale de l'éprouvette. Finalement, cette solution est satisfaisante pour plusieurs raisons. D'abord, la qualité de l'accroche est assurée grâce à un rapport de rayons important, $R_{sup}/R_u = 2$. Ensuite, il existe une zone de hauteur 3 mm sur laquelle l'homogénéité est satisfaisante. Les contraintes machine sont respectées puisque le déplacement total maximum imposé est inférieur à la course du vérin et que les efforts et couples sont mesurables par le capteur 1 kN/25 N.m. Les couples sont faibles par rapport à la pleine échelle du capteur, mais nous ne disposons pas de

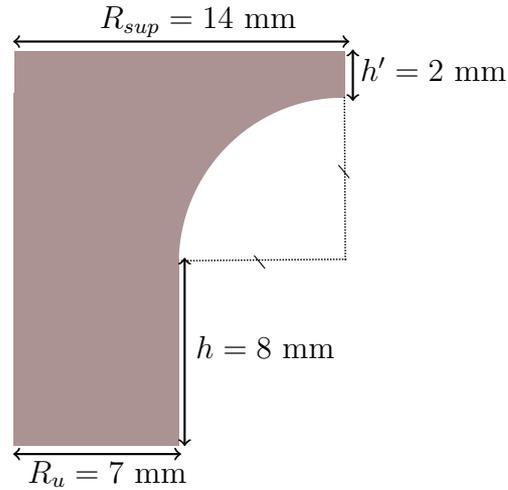


FIGURE II.1.10 : Géométrie finale de l'éprouvette

capteurs associant une limite maximum d'effort assez élevée avec un limite maximum de couple faible. Enfin le rapport hauteur sur rayon, $h/R_u = 1,1$ doit permettre d'éviter les instabilités. A posteriori, il a été décidé d'augmenter la valeur maximum de l'angle par unité de longueur à $0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, les valeurs d'homogénéité le permettant. La valeur maximale d'extension est conservée à $\lambda = 2,5$. Finalement, rappelons que l'objectif est de mener des essais de caractérisation sur éprouvette, essais pour lesquels les niveaux et modes de déformations doivent être cohérents avec ceux qui ont été déterminés sur la pièce de tampon moteur dans la partie I. Afin de s'en assurer, les valeurs de K_2 (amplitude de déformation) et de K_3 (mode de déformation) qui peuvent être obtenues sur éprouvette avec les extensions et angles considérés sont reportées sur la figure II.1.11, alors que les valeurs maximales déterminées sur la pièce sont également rappelées. Il est à noter que les extensions considérées pour l'éprouvette se situent dans l'intervalle $[0,67; 2,5]$, et les angles par unité de longueur se situent dans l'intervalle $[0; 0,09] \text{ (rad.mm}^{-1}\text{)}$. Cette valeur d'extension minimale de 0,67 sera justifiée dans le chapitre 3 de la présente partie, lors de la définition de la campagne d'essais. Enfin, les valeurs de K_2 et K_3 ont été calculées au rayon extérieur via la solution analytique du cylindre parfait. Sur les vingt points correspondant aux déformations subies par chacune des parties de la pièce, six sont en dehors des valeurs d'amplitude et de mode de déformation qu'il est possible d'atteindre avec les extensions et angles par unité de longueur considérés pour l'éprouvette. Plus précisément, il est possible de reproduire tous les modes de déformation, mais les amplitudes sont trop élevées. Pour atteindre les amplitudes en compression/cisaillement obtenues au cœur des bras lors d'un chargement de type tronçon 14, il faudrait imposer une extension minimale de 0,55, ce qui, avec l'éprouvette considérée, causerait des instabilités. Pour les quatre autres cas de chargement, il faudrait imposer des angles extrêmement élevés (supérieurs à 360°), ce qui engendrerait également des instabilités et ne permettrait pas de contrôler la déformation. Il n'est donc pas possible de reproduire

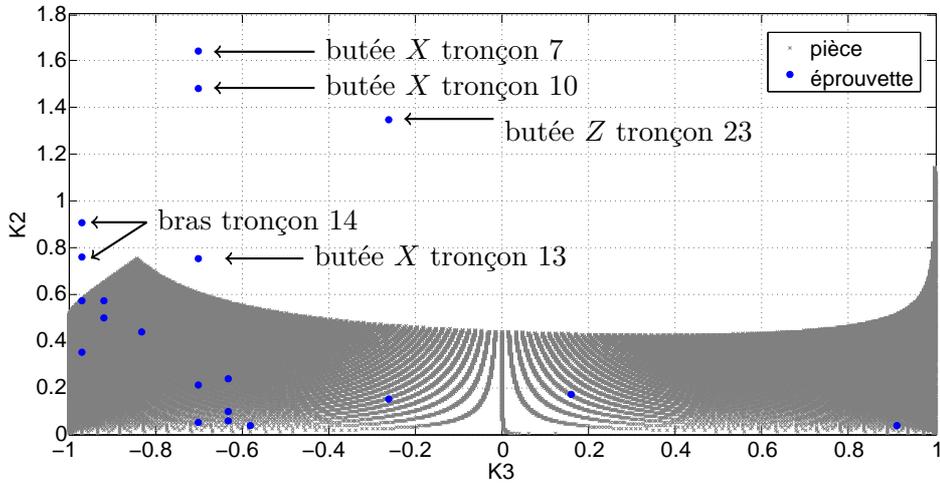


FIGURE II.1.11 : Amplitudes et modes de déformation obtenus pour les intervalles d'extension et d'angle par unité de longueur à appliquer sur l'éprouvette et correspondant aux cas de chargement de la pièce de suspension moteur sélectionnés dans la partie I

ces six cas de chargements avec cette éprouvette. Rappelons cependant qu'il s'agit ici de points de l'enveloppe de déformations subies par la pièce, donc de cas critiques, et que la grande majorité des couples (K_2, K_3) de cette enveloppe peuvent être reproduits sur l'éprouvette.

À partir de cette géométrie finale d'éprouvette, un plan de moule a été conçu à l'aide du logiciel CATIA. Les éprouvettes ont été moulées par compression au LRCCP (Laboratoire de Recherches et de Contrôle du Caoutchouc et des Plastiques). Pour rappel, les inserts sont en acier, et la composition de l'élastomère est proche de celle de la pièce, à savoir un mélange de caoutchouc naturel (NR) et de styrène-butadiène (SBR), chargé en noir de carbone à hauteur de 30 pce. La figure II.1.12 montre l'éprouvette montée sur la machine d'essais.

1.3 Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents

Lors des campagnes d'essais menés sur l'éprouvette, les consignes seront exprimées en terme d'extension λ et d'angle par unité de longueur τ . Alors que la relation entre ces grandeurs d'une part, le déplacement axial et l'angle imposés d'autre part est triviale dans le cas du cylindre parfait (voir l'équation (II.1.2)), elle est plus difficile à obtenir avec la géométrie d'éprouvette adoptée. Pour y parvenir, deux méthodes ont été mises en place : d'abord par éléments finis, puis expérimentalement via la stéréo-corrélation d'images (SDIC).

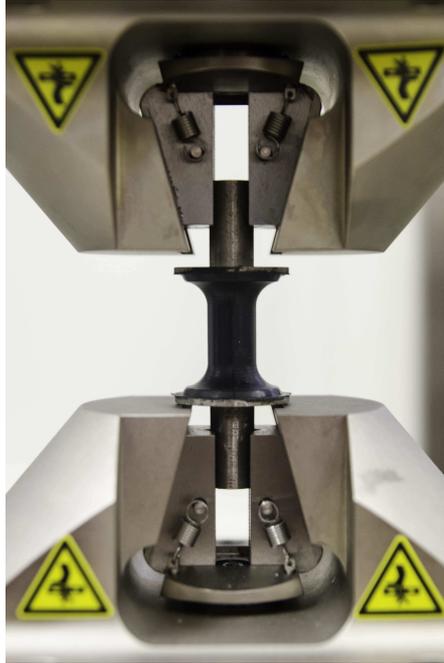


FIGURE II.1.12 : Vue de l'éprouvette montée sur la machine d'essais

1.3.1 Par simulation éléments finis

Du calcul numérique sur le modèle éléments finis de l'éprouvette sous divers couples de sollicitations (déplacement, angle) sont extraites les valeurs propres α_1 , α_2 , α_3 respectivement maximale, médiane et minimale du tenseur des déformations de Hencky. Les différents couples de sollicitations sont résumés dans le tableau II.1.6.

Dans la section précédente, il a été établi que la solution analytique du cylindre parfait et celle du modèle éléments finis de l'éprouvette pouvaient être considérées semblables sur une hauteur $Z = 4,7$ mm. On choisit alors de relever les trois valeurs propres du tenseur de Hencky en un point de coordonnées $Z = 0$ mm et $R = 2,5$ mm. Les équations (II.1.11) et (II.1.12) permettent de calculer λ et τ à partir de ces trois valeurs propres. La figure II.1.13 présente l'évolution de cette valeur de λ en fonction du déplacement (l'angle varie aussi). Deux constatations sont faites :

1. Quel que soit l'angle appliqué, à déplacement axial constant, la valeur de λ est la même ;
2. La relation entre l'extension λ et le déplacement axial D est linéaire.

À partir de ces résultats, on peut donc conclure que λ ne dépend que du déplacement axial D , et une régression linéaire des points obtenus fournit :

$$\lambda = 0,039D + 1, \quad (\text{II.1.37})$$

où D est exprimé en millimètres.

1.3. Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents

D (mm)	α (rad)
40	1,76
-6	0,8
1,2	0,28
-1,4	1,71
10,8	1,80
10	0
19	0
28	0
38	0,40
38	0,77
40	1,20
29,6	3,40
19	3,00
-4	1,61
-7,8	1,00
-8	0,70
-8	0,30
-4	0
40	0
40	3,40
-8	1,31
-8	0

TABLEAU II.1.6 : Couples de déplacement axial et d'angle imposés

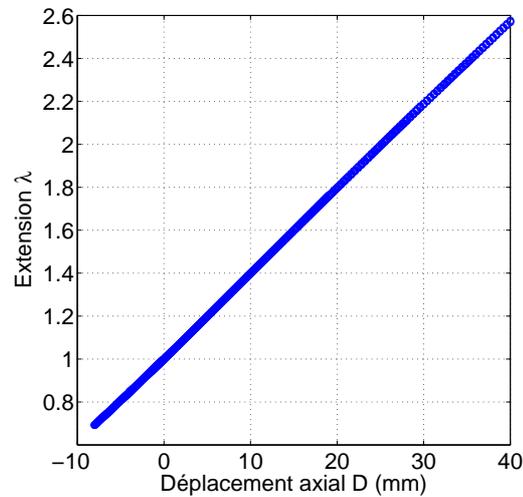


FIGURE II.1.13 : Calcul de λ en fonction du déplacement, via la simulation éléments finis, par analogie avec la solution analytique du cylindre parfait

La figure II.1.14 montre l'évolution de τ en fonction de l'angle imposé. Contrairement aux résultats obtenus sur l'extension, on observe que :

1. À angle imposé constant, lorsque le déplacement varie, le résultat sur τ n'est pas le même ;

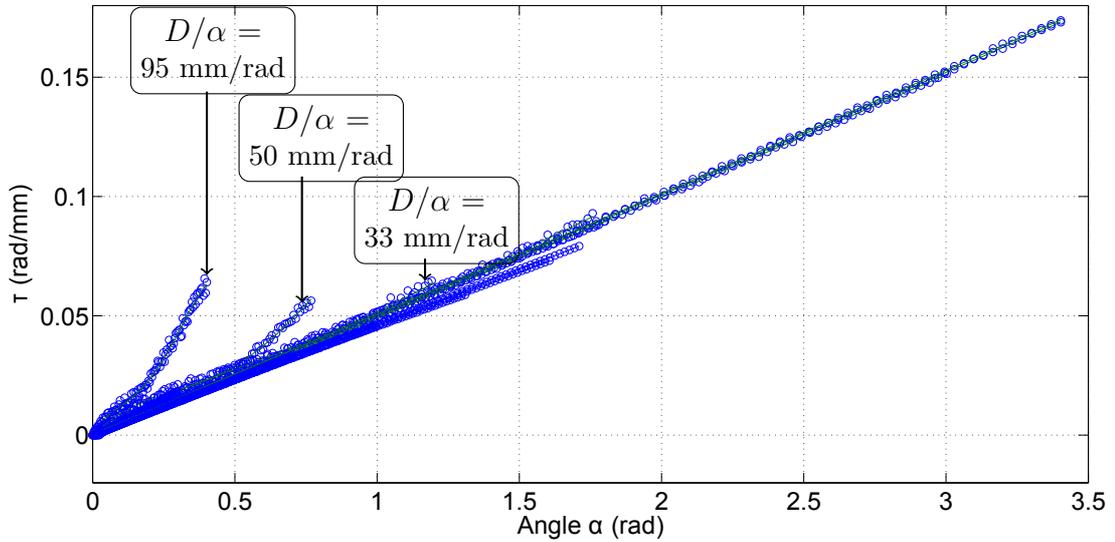


FIGURE II.1.14 : Calcul de τ , en fonction de l'angle, via la simulation éléments finis, par analogie avec la solution analytique du cylindre parfait

2. Les courbes pour lesquelles le rapport déplacement/angle est grand (supérieur à 26 mm/rad) ne sont pas des droites.

Étant donné que nous avons choisi une définition de l'angle par unité de longueur par rapport à la configuration non déformée, dans le cas du cylindre parfait, τ ne peut pas dépendre du déplacement axial, et sa relation à l'angle imposé est linéaire. Trois arguments peuvent expliquer les résultats obtenus via le modèle éléments finis de l'éprouvette :

- l'éprouvette n'est pas un cylindre parfait ;
- la loi de comportement n'est pas adaptée à la multiaxialité, puisque plus le déplacement est grand devant l'angle imposé, plus la non-linéarité de τ par rapport à l'angle est importante ;
- les éléments utilisés ne sont pas adaptés à la multiaxialité.

Pour tenter de mieux comprendre ces résultats, une simulation éléments finis est réalisée avec des lois de comportement différentes, pour le couple déplacement/angle qui présente le plus de non-linéarité, à savoir (38 mm; 0,4 rad). Le résultat de ces simulations est présenté sur la figure II.1.15, où τ est tracé en fonction de l'angle pour 4 lois différentes, à savoir :

- deux lois de type néo-Hookéen :

$$W = C_1(I_1 - 3), \quad (\text{II.1.38})$$

avec $C_1 = 0,6018$ pour la loi qui sera référencée *Néo-Hookéen 1* et $C_1 = 0,3853$ pour la loi qui sera référencée *Néo-Hookéen 2*;

- une loi de type Mooney-Rivlin :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (\text{II.1.39})$$

1.3. Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents

- avec $C_1 = 0,215$ et $C_2 = 0,081$;
 — une loi polynomiale de degré 3 :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{30}(I_1 - 3)^3, \quad (\text{II.1.40})$$

avec $C_{10} = 0,266$, $C_{01} = 0,134$, $C_{30} = 0,003$.

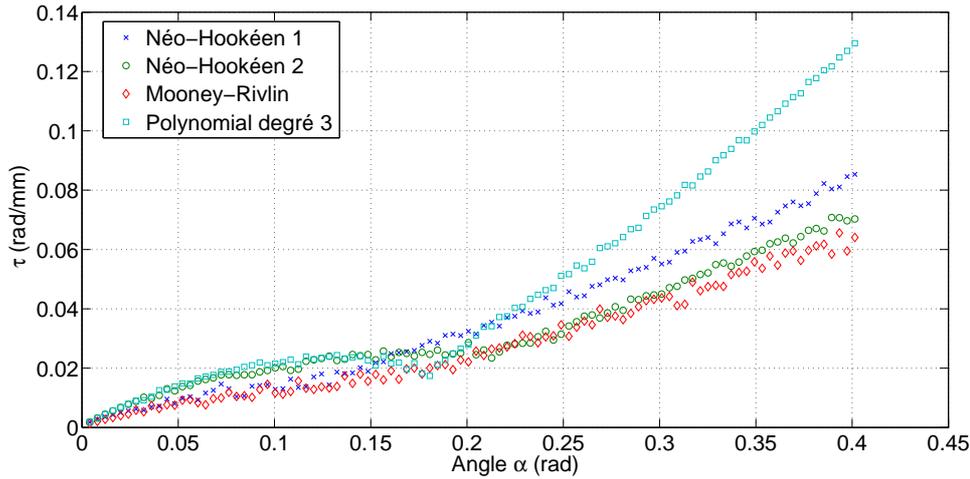


FIGURE II.1.15 : Évolution de l'angle par unité de longueur en fonction de l'angle imposé, pour un chargement $D = 38$ mm et $\alpha = 23^\circ$, calcul par éléments finis pour 4 lois de comportement

La même tendance est observée sur chacune des courbes : à partir d'un certain angle, les points forment quasiment une droite. Cependant, cet angle critique est différent pour chacune des courbes, comme l'est la pente de la droite ainsi formée. De plus, l'évolution de τ à des angles faibles est non linéaire. Le fait de ne pas trouver les mêmes résultats pour τ avec des lois de comportement différentes (ce qui n'est pas le cas pour λ), qui semble dépendre du déplacement axial et qui ne sont pas linéaires en fonction de l'angle nous conduisent à explorer le sujet expérimentalement.

1.3.2 Par stéréo-corrélation d'images

Face aux limitations rencontrées par l'utilisation du calcul numérique, nous décidons de considérer le problème d'un point de vue expérimental : comment déterminer la relation entre des grandeurs globales, à savoir des déplacements axiaux et des angles à imposer sur la surface supérieure de l'éprouvette, et des grandeurs locales liées à la déformation, à savoir l'extension et l'angle par unité de longueur ? Alors que les grandeurs globales sont imposées par le biais de la machine et donc connues, la résolution du problème peut être décomposé en trois étapes :

1. Mesurer le champ de déformation local correspondant à plusieurs couples de déplacement et d'angle dans la zone cylindrique de l'éprouvette ;

2. En se basant sur la solution analytique du cylindre parfait, extraire les valeurs de λ et τ ;
3. Déterminer précisément la zone de l'éprouvette dans laquelle ces valeurs de λ et τ peuvent être considérées comme uniformes, ce qui conduit à définir la partie de l'éprouvette qui peut être assimilée à un cylindre parfait.

Concernant le premier point, plusieurs méthodes expérimentales basées sur l'optique existent. Ces méthodes peuvent être regroupées en deux catégories, à savoir les méthodes basées sur l'interférométrie, comme par exemple la photoélasticimétrie ou l'interférométrie speckle (ESPI), et les méthodes géométriques, parmi lesquelles s'inscrivent la méthode des grilles et la corrélation d'images numériques (pour des détails sur ces différentes méthodes, se référer par exemple à [Cloud \(1998\)](#) et [Vautrin *et al.* \(2002\)](#)). Dans notre étude, nous nous focaliserons sur la corrélation d'images. La corrélation d'images est une méthode expérimentale qui permet de déterminer le champ de déplacement d'un ensemble de points d'une surface plane en corrélant deux images de cette même surface, avant et après transformation. La stéréo-corrélation d'images permet de mesurer un champ de déplacement en 3D à l'aide de deux caméras. Dans notre étude qui concerne les déplacements à la surface d'un cylindre, il s'agit en fait d'un champ 2D hors plan. Pour plus de détails sur le principe de la stéréo-corrélation, se référer à [Orteu \(2009\)](#). La mise en place de ces essais est plutôt complexe dû à la combinaison des grandes déformations et de la multiaxialité (voir par exemple [Chevalier *et al.* \(2001\)](#) et [Sutton *et al.* \(2008\)](#)). Dans cette partie, nous allons d'abord présenter la démarche expérimentale, puis le post-traitement permettant d'obtenir λ et τ , avant de discuter les résultats obtenus.

A) Mise en place expérimentale

a) Calibration La stéréo-corrélation d'images requiert une première étape de calibration, afin que le logiciel (nous utilisons DaVis de LaVision) connaisse les positions relatives des deux caméras et de la zone à filmer. Pour cela, une plaque de calibration est utilisée. Cette plaque carrée présente des marches en profondeur et des pastilles blanches régulièrement espacées. Une image de la plaque est acquise par chacune des caméras, qui sont réglées avec des paramètres identiques. Le logiciel requiert alors que l'utilisateur pointe trois pastilles identiques sur chacune des vues, et connaissant la répartition des pastilles sur la plaque, il détecte toutes les pastilles. Grâce à ces informations, le logiciel calcule la relation entre les coordonnées (X, Y, Z) des points dans le repère cartésien global défini par les directions de la plaque de calibration et ces coordonnées dans les repères du plan de référence de chacune des caméras : (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) (cf. figure [II.1.16](#)).

b) Suivi du déplacement L'étape suivante consiste en la reconstruction de la surface initiale en 3D. Un mouchetis est d'abord réalisé sur l'éprouvette, à l'aide de peinture blanche (figure [II.1.17](#)). Deux caméras (des FASTCAM SA1 et APX de Photron) filment l'éprouvette pendant qu'un déplacement et un angle lui sont appliqués. Les deux vues de

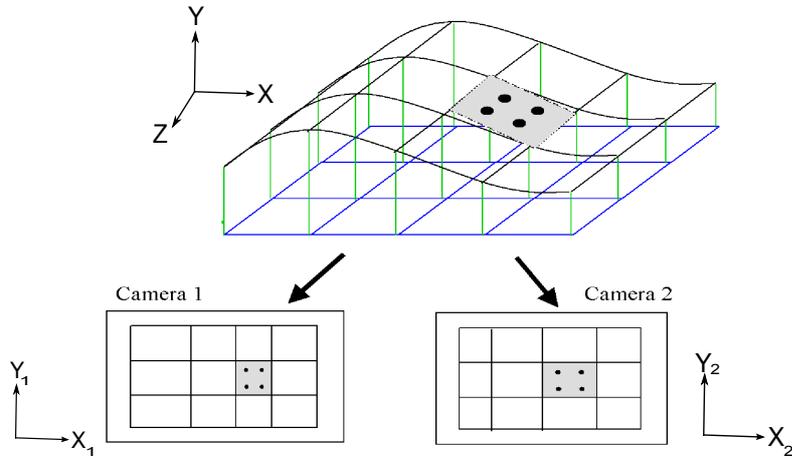


FIGURE II.1.16 : Repères de référence en stéréo corrélation

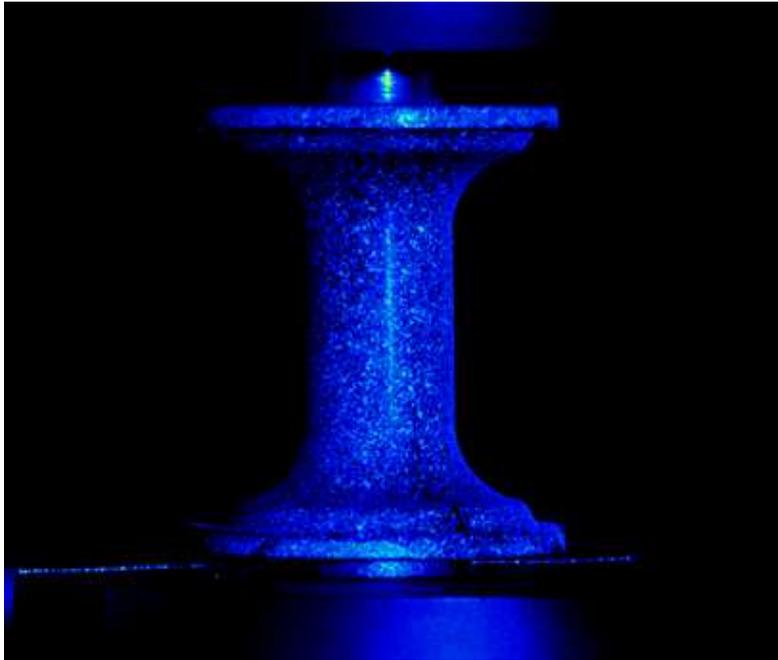


FIGURE II.1.17 : Vue de l'éprouvette après application du mouchetis

la première image (avant sollicitations) sont analysées en termes de niveaux de gris. Une correspondance entre les deux images est alors réalisée pour reconstituer une image 3D, discrétisée en une grille dont les coordonnées (x,y) et la hauteur de surface z des points dans le repère global sont connus. Cette correspondance est réalisée pour chacune des séquences suivantes (éprouvette sous sollicitations). La position des points à la séquence $i+1$ est comparée à celle des points de la séquence i , ce qui permet de calculer le champ

de déplacement (calcul réalisé par le logiciel). Les premiers résultats obtenus sont peu probants : la zone de l'éprouvette sur laquelle des points sont reconnus et suivis est peu étendue, et ces points ne sont pas suivis jusqu'à la fin de l'essai (pour de grands déplacements et angles). Il est donc décidé de lister d'une part les paramètres expérimentaux influençant la qualité de l'image et d'autre part les paramètres du calcul de corrélation. Du point de vue expérimental, les paramètres sont principalement la taille, la répartition et la nature (talc ou peinture) du mouchetis ; la qualité de l'éclairage (notamment l'intensité) ; l'angle entre les caméras ; l'éloignement des caméras par rapport à l'éprouvette et le nombre d'images acquises lors de la calibration avec des inclinaisons de la plaque différentes. Du point de vue du calcul de corrélation, il est possible de faire varier le mode de corrélation (*slow/medium/accurate*) ; le choix de l'image de référence (la première, la précédente ou les k -ième précédentes) ; la distance entre le centre de chaque maille (*step*) et la taille de chaque maille (*window size*). Après avoir fait varier indépendamment les paramètres dans chacune des catégories, il est apparu que la méthode la plus adaptée est la suivante :

1. Accommoder l'éprouvette (5 cycles de charge/décharge à la sollicitation maximale, tous les essais sont réalisés à 10^{-3} s^{-1}) ;
2. Apposer le mouchetis à l'aide d'une bombe de peinture blanche, de manière à obtenir un mouchetis fin et resserré ;
3. Positionner grossièrement les caméras avec un angle entre elles assez faible (entre 20° et 30°). Cet angle est l'objet d'un compromis. En effet, d'une part un grand angle entre les caméras permet d'augmenter la surface de l'éprouvette filmée, et donc le nombre de points suivis mais aussi l'angle maximum qui peut être appliqué à l'éprouvette sans que la majorité des points filmés initialement sortent du champ couvert par les caméras ; d'autre part, un angle faible entre les caméras permet d'augmenter la zone de l'éprouvette qui est filmée simultanément par les deux caméras, ce qui va dans le sens d'une meilleure corrélation d'images ;
4. La distance entre les caméras et l'éprouvette est réglée de telle manière à pouvoir faire le point et pour que le haut de la partie cylindrique soit à la limite du champ des caméras après déformation ;
5. Opter pour un éclairage puissant (attention cependant à ce qu'il ne soit pas trop près de l'éprouvette pour éviter qu'il n'induisse une augmentation de température non négligeable).
6. L'inclinaison des deux caméras est réglée à l'aide d'un niveau, afin que leurs faces soient parfaitement horizontales et verticales ;
7. Effectuer un zoom important de l'image à l'aide du logiciel d'acquisition, et faire la mise au point pour que l'image soit la plus nette possible ;
8. Poser un petit repère temporaire sur l'éprouvette, et régler finement l'angle entre les deux caméras de manière à ce que le repère soit au centre des deux images ;
9. Lancer le chargement de l'éprouvette et l'acquisition avec des paramètres adaptés au temps d'essai, tout en assurant un contraste et une résolution satisfaisants ;

10. Démonter l'éprouvette, placer la plaque de calibration au niveau des mors de la machine. Plusieurs vues de la plaque sont à acquérir, d'abord précisément droite, puis inclinées dans différentes directions. Effectuer la calibration après avoir filmé l'éprouvette sous chargement permet de régler tout le montage expérimental précisément par rapport à l'éprouvette, puis d'acquérir les images de calibration avec exactement le même montage.

Notons qu'il est absolument requis que les mors de la machine soient parfaitement alignés, ce qui n'était pas le cas aux débuts de nos essais et résultait en une reconstruction de cylindre largement incliné, puisque l'éprouvette était réellement inclinée. Concernant les paramètres du calcul de corrélation, un réglage avec un mode de calcul *medium* en effectuant des sommes de différentielles (c'est-à-dire l'image actuelle est comparée avec l'image précédente), un pas de grille resserré accompagné d'une taille de maille assez large conduit à des résultats satisfaisants.

B) Post-traitement

Les données récupérées (coordonnées des points initiaux et déplacements dans les trois directions) doivent être filtrées avant de calculer les extensions λ et angles par unité de longueur τ locaux. Le post-traitement a été effectué avec le logiciel Matlab.

a) Post-traitement du cylindre de référence La corrélation est effectuée sur la zone cylindrique de l'éprouvette. Or, il apparaît que la reconstruction de l'image 3D n'est pas parfaitement cylindrique, ce qui est dû à une imprécision de la mesure, concentrée principalement sur les points les plus éloignés du centre de l'image, puisque soit ils ne sont filmés que par une caméra, soit ils se trouvent au bord de l'image de la seconde caméra, où la netteté est moindre. Il faut également retirer les points qui ne font pas partie du cylindre. La figure II.1.18 montre les données brutes, puis les points après ce premier filtrage. Y est la coordonnée verticale, Z est la coordonnée en profondeur (hauteur de surface). Ensuite, on cherche les caractéristiques du cylindre parfait qui passe par ces points. Pour cela, on calcule le rayon optimal R et les coordonnées (X_0, Z_0) du centre du cercle qui permettent, à partir des coordonnées X_{expe} des points, d'approcher au mieux leurs coordonnées Z_{expe} par la valeur Z_{optim} :

$$Z_{optim} = \sqrt{R^2 - (X_{expe} - X_0)^2} - Z_0. \quad (\text{II.1.41})$$

Ces trois variables sont optimisées via un algorithme de minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés, pondérés avec une gaussienne centrée sur Z_{max} , afin de donner du poids aux points du centre de l'image puisque la précision de la mesure y est maximale. Ensuite, on exclut tous les points dont les coordonnées diffèrent de plus de 1% des coordonnées du cylindre parfait. La figure II.1.19 montre le nuage de points obtenu après ce filtrage.

b) Post-traitement du cylindre déformé Afin d'exposer la méthode de post-traitement des données après chargement de l'éprouvette, nous prenons l'exemple d'une

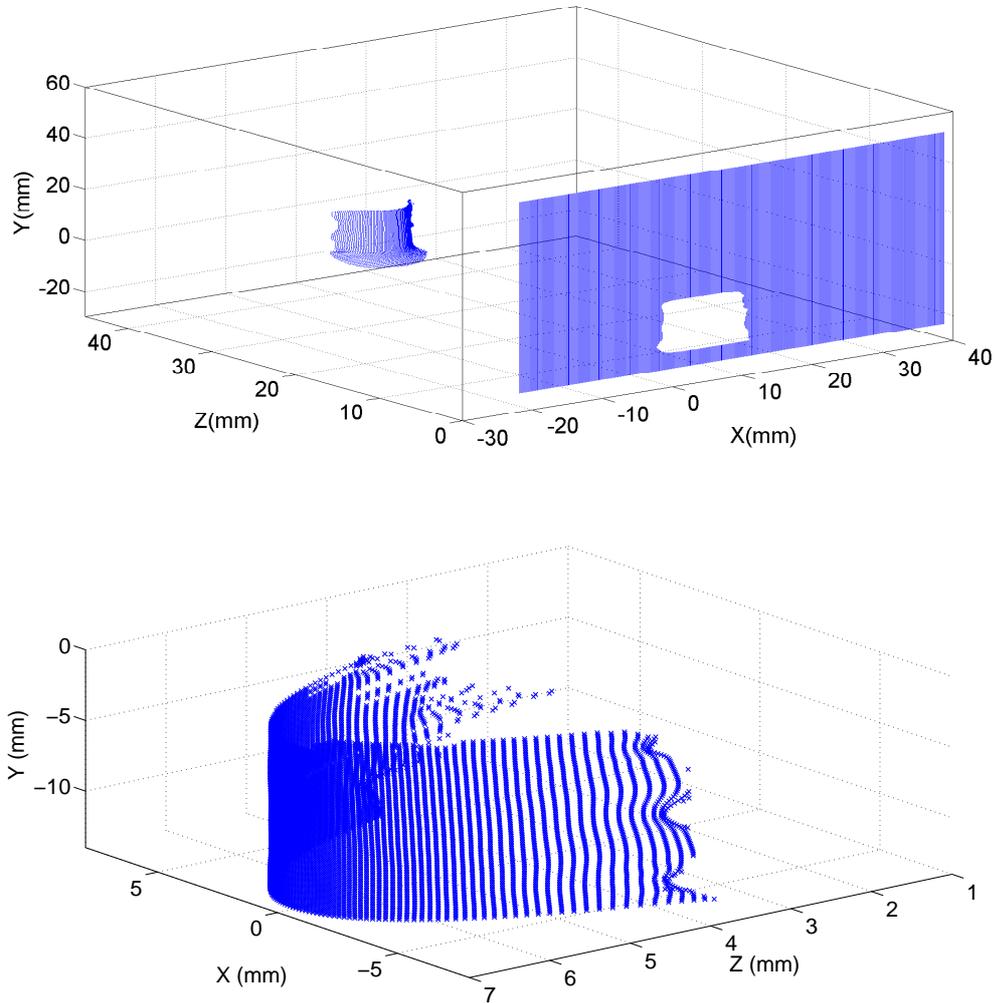


FIGURE II.1.18 : En haut : données brutes de l'image de référence, en bas : sélection des points de la zone cylindrique

traction à 40 mm suivie d'une torsion à $100,7^\circ$. Il a été noté qu'il est plus facile de mener le calcul de corrélation lorsque la traction et la torsion ne sont pas imposées simultanément. De la même manière que pour les points de la configuration non déformée, nous déterminons les caractéristiques du cylindre déformé, et nous excluons les points qui diffèrent de ces coordonnées de plus de +2% ou -7%. Les points obtenus après ce filtrage sont montrés sur la figure II.1.20.

Après ces deux étapes de post-traitement, nous avons obtenu les coordonnées non déformées et déformées de points expérimentaux appartenant à un cylindre. Nous pouvons alors calculer les extension et angle par unité de longueur locaux.

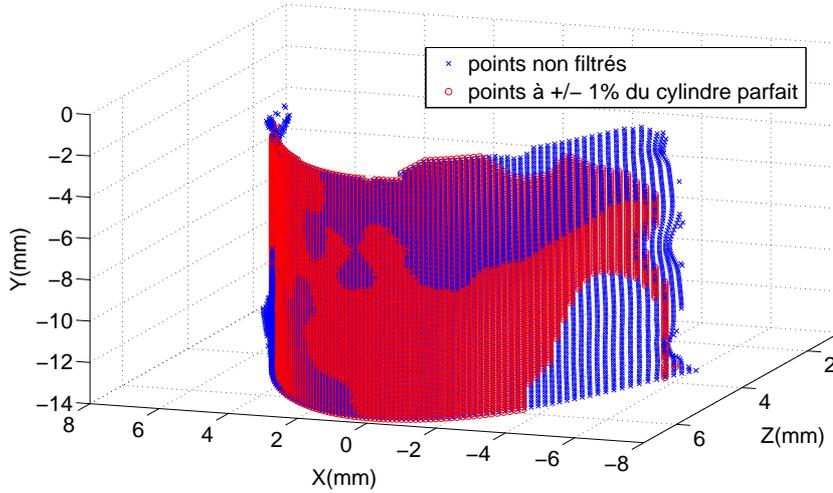


FIGURE II.1.19 : Suppression des points qui diffèrent de plus de 1% du cylindre de référence théorique

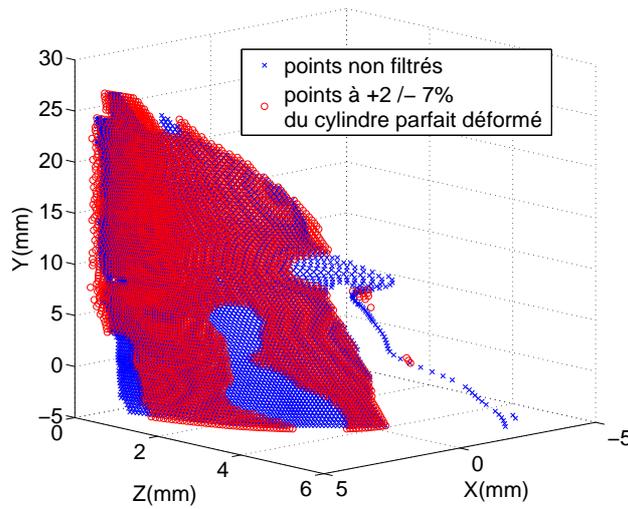


FIGURE II.1.20 : Suppression des points qui diffèrent de plus de 2% ou -7% du cylindre déformé théorique

c) Calcul de λ et τ locaux Soit deux points M et M' très proches l'un de l'autre. Notons Y et y les coordonnées axiales de ces points, respectivement non déformée et déformée. L'extension locale au point M s'exprime par la relation :

$$\lambda(M) = \frac{dy(M)}{dY(M)} \approx \frac{y(M') - y(M)}{Y(M') - Y(M)}. \quad (\text{II.1.42})$$

En pratique, on compare donc la distance verticale de chaque point avec son voisin le plus proche qui a la même position radiale, dans la configuration non déformée et déformée. La figure II.1.21 montre le résultat brut sur λ en fonction de la coordonnée axiale non déformée Y du point auquel il a été calculé (points bleus). Ces données correspondent au point de chargement maximal. Le résultat étant très bruité, il est nécessaire de le filtrer (points verts). Le calcul de τ est basé sur sa définition donnée par l'équation

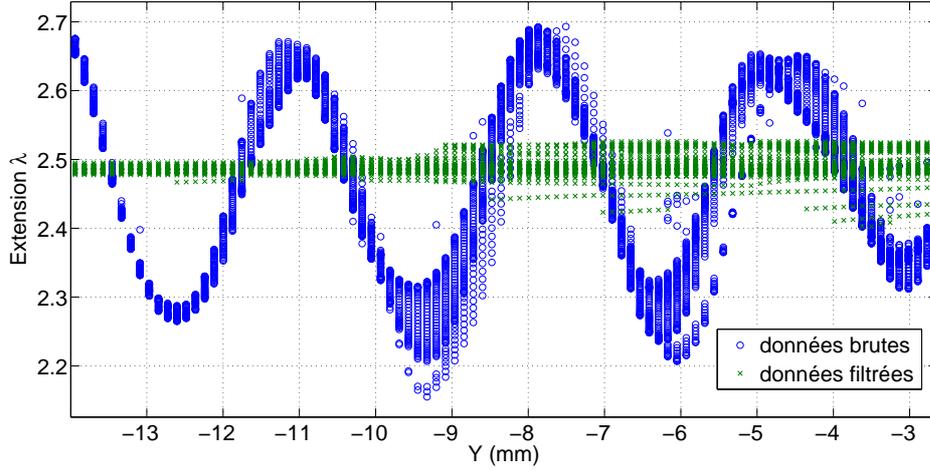


FIGURE II.1.21 : λ local en fonction de la hauteur non déformée

(II.1.1). Trois grandeurs sont donc nécessaires : la coordonnée angulaire non déformée Θ , la coordonnée angulaire déformée θ et la coordonnée axiale non déformée, notée dans cette section Y . Les coordonnées cartésiennes des points expérimentaux sont converties en coordonnées cylindriques :

$$\Theta(M) = \arctan\left(\frac{Z(M)}{X(M)}\right) + \pi, \text{ pour } X(M) < 0, \quad (\text{II.1.43})$$

$$\Theta(M) = \arctan\left(\frac{Z(M)}{X(M)}\right), \text{ pour } X(M) \geq 0, \quad (\text{II.1.44})$$

et de même pour les coordonnées déformées :

$$\theta(M) = \arctan\left(\frac{z(M)}{x(M)}\right) + \pi, \text{ pour } x(M) < 0, \quad (\text{II.1.45})$$

$$\theta(M) = \arctan\left(\frac{z(M)}{x(M)}\right), \text{ pour } x(M) \geq 0, \quad (\text{II.1.46})$$

Considérons maintenant deux points M et M' qui ont la même coordonnée angulaire non déformée Θ et qui sont proches dans la direction axiale. On a alors :

$$\tau = \frac{d\theta(M)}{dY(M)} \approx \frac{\theta(M') - \theta(M)}{Y(M') - Y(M)}. \quad (\text{II.1.47})$$

La figure II.1.22 montre le résultat brut sur τ en fonction de la coordonnée axiale non déformée Y du point auquel il a été calculé (points bleus). Ces données correspondent au point de chargement maximal. Le résultat étant encore une fois très bruité, il est nécessaire de le filtrer (points verts). La méthode mise en place permet donc d'obtenir

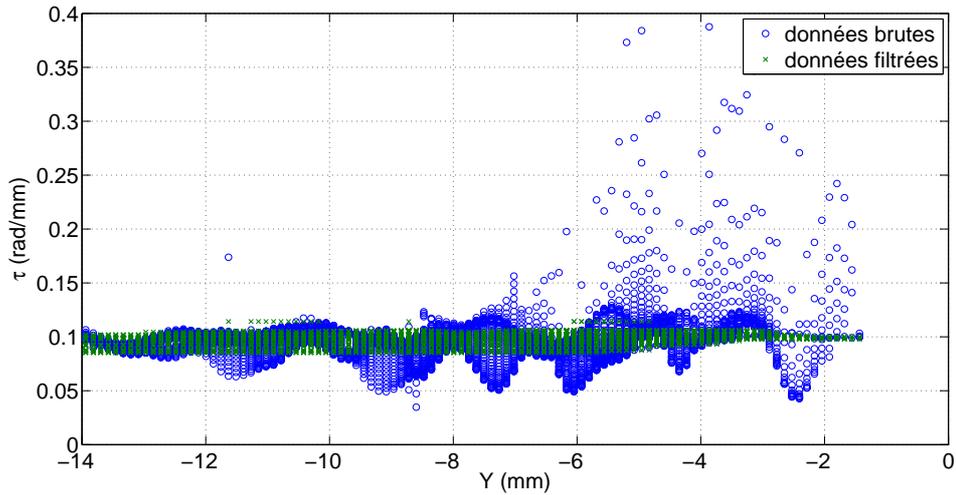


FIGURE II.1.22 : τ local en fonction de la hauteur non déformée

une valeur moyenne de λ et τ sur une hauteur de 10 mm située dans la zone cylindrique de l'éprouvette. Il est cependant impossible, avec la qualité des données expérimentales obtenues, d'observer une différence entre les valeurs de λ et τ obtenues au centre de l'éprouvette et aux extrémités de la zone étudiée. On ne peut donc pas se prononcer sur la limite de la zone où l'on peut considérer ces valeurs homogènes. Il serait intéressant d'envisager d'autres essais avec du matériel plus précis. En effet, les caméras utilisées sont des caméras haute vitesse avec une résolution assez faible. De plus, mener les essais avec deux caméras strictement identiques devrait permettre d'améliorer la qualité des résultats. La figure II.1.23 montre l'évolution de λ et τ au cours de l'essai, en fonction du numéro d'image traitée (l'acquisition se fait à un pas de temps constant, et les déplacements et angles sont appliqués en rampe, les déplacements ou angles varient donc linéairement avec le numéro de l'image). Pour rappel, un déplacement axial seul est d'abord appliqué jusqu'à 40 mm (point correspondant à l'image 76), puis l'extension est maintenue constante avant d'appliquer un angle de 158° . Les points bleus représentent les valeurs de λ à chaque image, et donc à chaque configuration déformée, alors que les points rouges donnent les valeurs de τ . Les barres grises indiquent les valeurs minimum et maximum de λ et τ après filtrage. Plusieurs observations sont faites sur cette figure. Tout d'abord, lors du déplacement axial seul, la valeur de λ croît linéairement alors que τ reste à 0. De plus, lors de l'application de l'angle alors que l'extension est maintenue constante, τ croît linéairement, alors que λ décroît légèrement, ce qui peut être attribué à la relaxation du matériau.

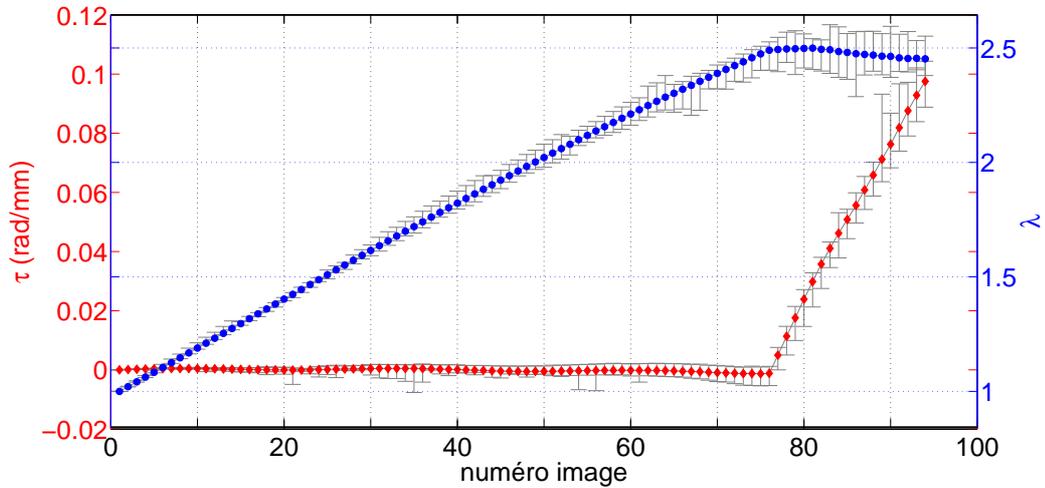


FIGURE II.1.23 : Évolution de λ et τ moyens, min et max dans la zone utile de l'éprouvette lors d'un essai de traction puis torsion (torsion à partir de l'image 76)

d) Essai à $D = 40$ mm, $\alpha = 195^\circ$ Un deuxième essai est présenté ici : un déplacement axial seul $D = 40$ mm est d'abord appliqué (jusqu'à l'image 38), suivi d'un angle de 195° alors que l'extension est maintenue constante. La répétabilité de la méthode est éprouvée en ré-effectuant l'expérience douze fois, en faisant varier certains des paramètres expérimentaux et de calcul évoqués plus haut. La dispersion des résultats obtenus sur les valeurs moyennes de λ et de τ est plutôt importante. Afin de pouvoir donner plus de poids aux résultats les plus fiables, pour chaque essai est calculé un indicateur de la dispersion autour de la valeur moyenne de τ , noté R^2 : plus il est proche de 1, moins la dispersion est importante. Les résultats sur les valeurs moyennes de λ et τ sont présentés sur la figure II.1.24. De nouveau, on constate que λ évolue linéairement avec le déplacement, puis diminue légèrement lorsque le déplacement est maintenu constant. Les douze essais donnent des résultats très proches. Concernant τ , les résultats sont beaucoup plus dispersés. L'évolution est quasi-linéaire pour chacun des essais. On remarquera que les essais les plus fiables c'est-à-dire ceux pour lesquels R^2 est le plus proche de 1 (points représentés par un losange), donnent des résultats proches. Ainsi, les résultats obtenus sur cet essai qui combine un très grand déplacement et un très grand angle sont satisfaisants.

e) Essai à $D = 38$ mm, $\alpha = 23^\circ$ Envisageons maintenant le cas de chargement pour lequel l'évolution de τ est le plus fortement non-linéaire avec le calcul éléments finis, c'est-à-dire un essai combiné avec une rampe de déplacement jusqu'à 38 mm et un angle jusqu'à 23° . La figure II.1.25 montre l'évolution de λ et de τ respectivement en fonction du déplacement et de l'angle imposés. De nouveau, on observe que λ évolue linéairement avec le déplacement D et que τ évolue linéairement avec l'angle α .

Finalement, sur les différents essais qui ont été menés en stéréo-corrélation d'images,

1.3. Calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur équivalents

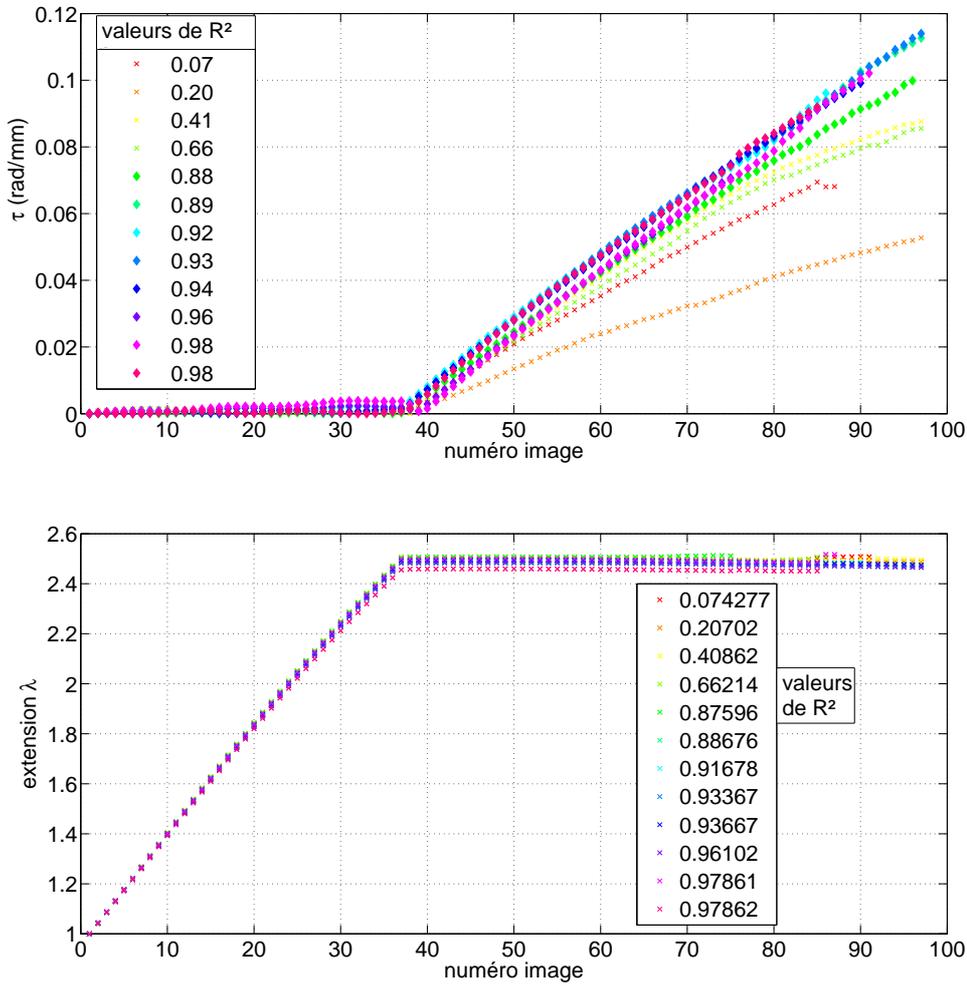


FIGURE II.1.24 : Valeur moyenne de τ et de λ pour un déplacement de 40 mm (jusqu'à l'image 38) suivi d'un angle de 195°

il est apparu que :

1. λ évolue linéairement avec le déplacement. Une régression linéaire moyennée sur les différents essais menés fournit la relation suivante :

$$\lambda = 0,039D + 1 = \frac{D}{H_D} + 1, \quad (\text{II.1.48})$$

où D est exprimé en millimètres et $H_D = 25,64$ mm est une hauteur équivalente;

2. τ ne dépend pas du déplacement axial ;
3. τ évolue linéairement avec l'angle imposé, et une régression linéaire moyennée sur les différents essais menés donne la relation suivante :

$$\tau = 0,033\alpha = \frac{\alpha}{H_\alpha}, \quad (\text{II.1.49})$$

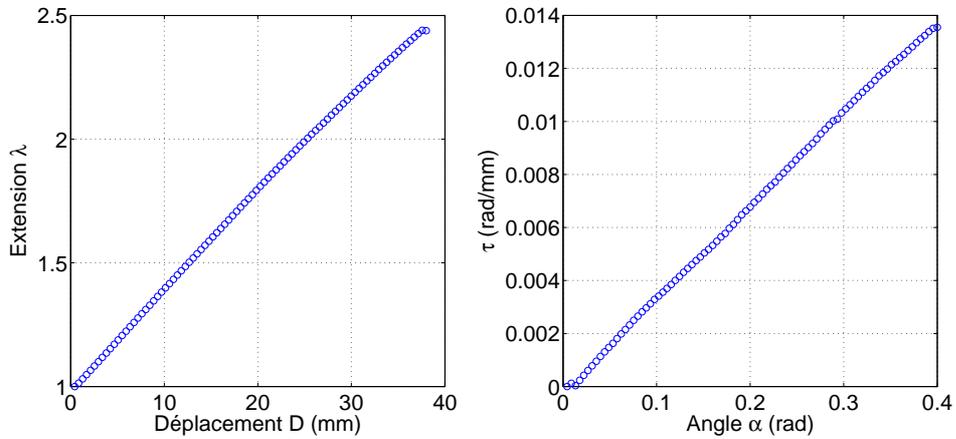


FIGURE II.1.25 : Valeur moyenne de τ et de λ pour un chargement combiné avec un déplacement de 38 mm suivi d'un angle de 23°

avec α en rad, τ en $\text{rad}\cdot\text{mm}^{-1}$ et $H_\alpha = 30,3$ mm est une autre hauteur équivalente.

Le fait que λ et τ dépendent linéairement respectivement du déplacement axial D et de l'angle α imposés à la totalité de l'éprouvette, permet d'écrire le même type de relation entre eux que dans le cas d'un cylindre parfait, d'où l'introduction de hauteurs équivalentes. Autrement dit, une partie de la zone cylindrique de l'éprouvette se comporte comme un cylindre soumis à (D, α) , à ceci près que la hauteur de ce cylindre équivalent n'est pas la même dans le calcul de l'extension et de l'angle par unité de longueur. Le même type de résultats, obtenus par éléments finis, a été présenté par Mars et Fatemi (2004) dans le cas de la traction-torsion d'un autre type d'éprouvette.

1.3.3 Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux

A) Concernant l'extension λ

La figure II.1.26 montre l'évolution de λ en fonction du déplacement axial imposé calculé via la simulation éléments finis (une seule courbe est représentée, puisque tous les cas conduisaient au même résultat) et lors des trois essais de stéréocorrélation d'images, où étaient imposés $(D, \alpha) = (40 \text{ mm}, 158^\circ)$; $(40 \text{ mm}, 19^\circ)$; $(38 \text{ mm}, 23^\circ)$. Il apparaît que les quatre courbes sont très proches les unes des autres. L'erreur maximale relative aux résultats éléments finis est atteinte en $D = 40$ mm pour l'essai de stéréocorrélation couplé à un angle de 195° , et vaut 2,8 %. Les résultats sur λ étant très proches aussi bien par éléments finis qu'expérimentalement, on peut considérer la relation linéaire avec le déplacement comme fiable.

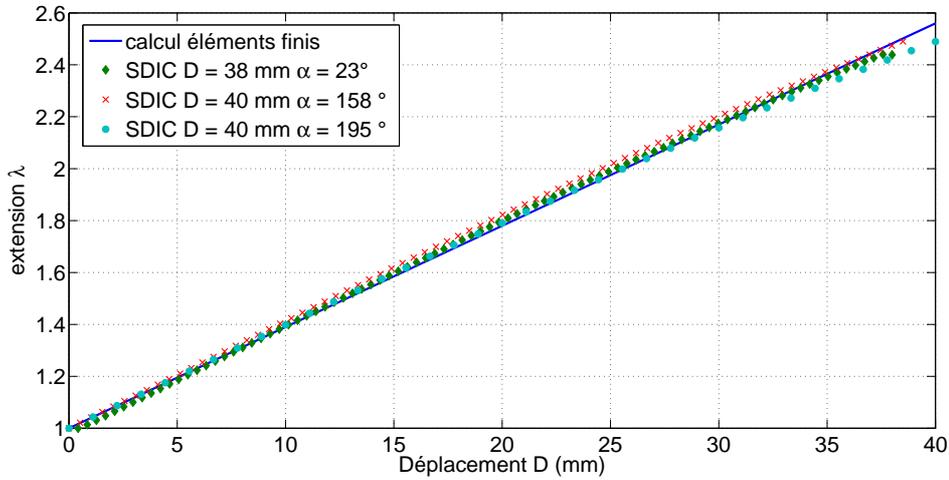


FIGURE II.1.26 : Comparaison de l'évolution de l'extension en fonction du déplacement déterminée par simulation éléments finis et stéréo-corrélation d'images

B) Concernant l'angle par unité de longueur τ

Étant donné que l'évolution de τ diffère selon le chargement considéré pour le calcul éléments finis, la comparaison est faite chargement par chargement.

a) **Essai à $D = 40$ mm, $\alpha = 158^\circ$** La figure II.1.27 montre l'évolution de τ en fonction de l'angle imposé calculé via la simulation éléments finis pour les quatre modèles et lors de l'essai de stéréo-corrélation d'images (seule la valeur moyenne de τ est représentée ici). Dans ce cas, τ croît linéairement avec l'angle imposé, mais la pente n'est pas la même dans les cinq cas. Les valeurs de τ calculées par éléments finis, quel que soit le modèle, surestiment les valeurs déterminées expérimentalement. Les modèles de Mooney-Rivlin et Néo-Hookéen 1 en sont proches pour de très faibles angles, mais s'en éloignent lorsque l'angle augmente. Les deux autres modèles en sont encore plus éloignés.

b) **Essai à $D = 40$ mm, $\alpha = 195^\circ$** La figure II.1.28 montre l'évolution de τ en fonction de l'angle imposé calculé via la simulation éléments finis pour le modèle Néo-Hookéen et le modèle de type Mooney-Rivlin et lors d'un essai de stéréo-corrélation d'images (l'un des essais où R^2 est proche de 1 est sélectionné). Ce cas est similaire au cas du chargement précédent : les cinq courbes ont quasiment la même pente que précédemment. On constate donc que les 5 modèles surestiment largement les données expérimentales.

c) **Essai à $D = 38$ mm, $\alpha = 23^\circ$** La figure II.1.29 montre l'évolution de τ en fonction de l'angle imposé calculé via la simulation éléments finis pour les quatre modèles

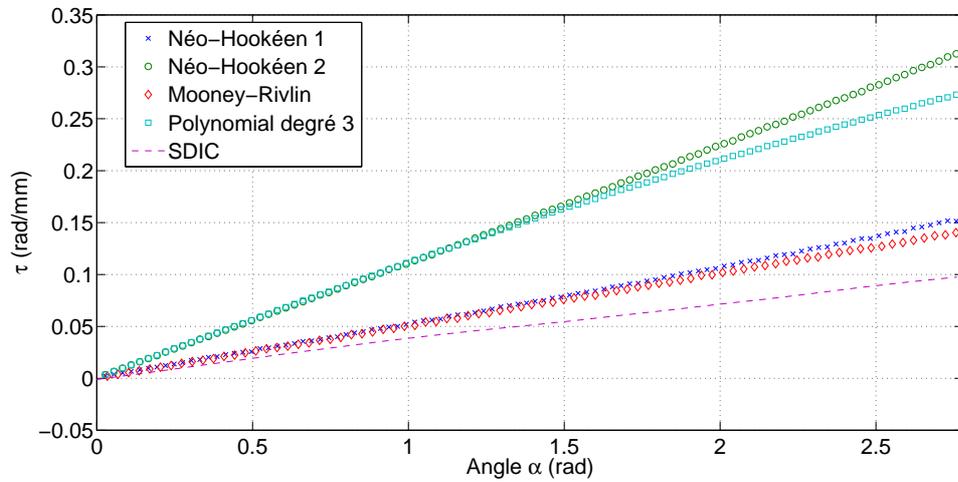


FIGURE II.1.27 : Comparaison de l'évolution de l'angle par unité de longueur en fonction de l'angle imposé déterminée par simulation éléments finis et stéréo-corrélation d'images pour $D = 40$ mm, $\alpha = 158^\circ$

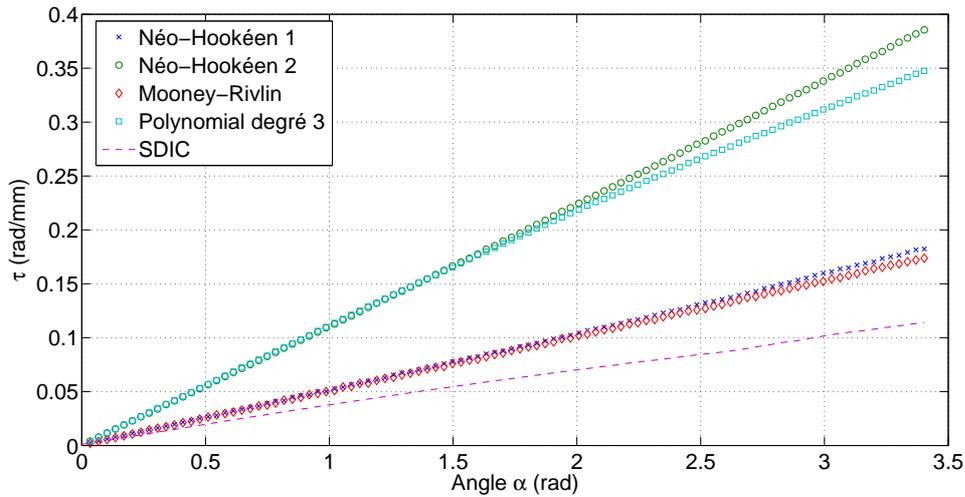


FIGURE II.1.28 : Comparaison de l'évolution de l'angle par unité de longueur en fonction de l'angle imposé déterminée par simulation éléments finis et stéréo-corrélation d'images pour $D = 40$ mm, $\alpha = 195^\circ$

évoqués précédemment et l'essai de stéréo-corrélation d'images. Ici, comme il avait été vu précédemment, l'évolution de τ prédite par les quatre calculs éléments finis est non linéaire par rapport à l'angle imposé. On constate une nouvelle fois que les quatre modèles surestiment largement les valeurs expérimentales de τ . Pour les deux chargements

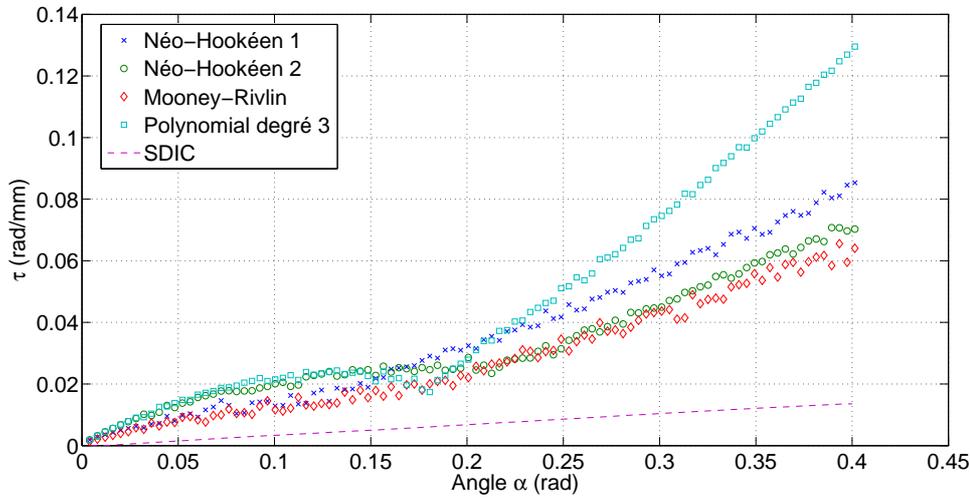


FIGURE II.1.29 : Comparaison de l'évolution de l'angle par unité de longueur en fonction de l'angle imposé déterminée par simulation éléments finis et stéréocorrélation d'images pour $D = 38$ mm, $\alpha = 23^\circ$

précédents, les modèles Néo-Hookéen 1 et Mooney-Rivlin d'une part, Néo-Hookéen 2 et Polynomial de degré 3 d'autre part donnaient des résultats similaires en termes de valeurs de τ . Ici, on retrouve cette tendance jusqu'à l'angle critique, mais les modèles divergent ensuite.

Conclusion

Dans la première section de ce chapitre, les étapes de conception d'une éprouvette adaptée aux essais de traction-torsion ont été exposées. La conception est basée sur deux types de contraintes :

- Contraintes dues à la machine utilisée (efforts et couples mesurables, déplacements et angles imposables, accroche des mors) ;
- État de déformation souhaité (valeurs d'extension et d'angle par unité de longueur maximales à atteindre, pas d'instabilité, zone homogène assimilable à un cylindre).

Des calculs analytiques du problème de traction-torsion d'un cylindre parfait couplés à des simulations éléments finis ont permis d'aboutir à une géométrie d'éprouvette respectant les contraintes fixées initialement.

Dans la seconde section de ce chapitre nous avons répondu à la question suivante : comment déterminer l'état de déformation dans la zone centrale de l'éprouvette, dont la géométrie n'est pas exactement celle d'un cylindre ? Pour cela, nous avons cherché à déterminer une relation entre les grandeurs globales imposées par la machine, à savoir le déplacement et l'angle, et les grandeurs locales qui caractérisent l'état de déformation d'un

cylindre, à savoir l'extension et l'angle par unité de longueur non déformée. Ce problème est d'abord traité par simulation éléments finis. Alors que la relation entre l'extension et le déplacement global est linéaire et identique pour tous les cas de chargements imposés, indépendamment de la loi de comportement choisie, les résultats sur l'angle par unité de longueur sont difficilement exploitables puisque non seulement τ semble dépendre du déplacement axial et évolue non linéairement avec l'angle imposé, mais aussi les résultats dépendent de la loi de comportement choisie. Ces phénomènes seront plus amplement discutés dans le chapitre 1 de la partie IV, où le modèle éléments finis de l'éprouvette sera comparé avec la solution analytique du cylindre parfait, en utilisant la loi hyperélastique finale. Ces résultats peu exploitables nous ont conduit à considérer le problème du point de vue expérimental. Pour cela, des essais de stéréo-corrélation d'images ont été mis en place pour des chargements en grands déplacements et grands angles. Après plusieurs tentatives, un protocole de montage et de post-traitement a permis d'obtenir une valeur moyenne de l'extension et de l'angle par unité de longueur dans la zone cylindrique de l'éprouvette. Les résultats ont montrés que la valeur moyenne de λ varie linéairement avec le déplacement global et la valeur moyenne de τ varie linéairement avec l'angle global.

Chapitre 2

Post-traitement des essais de traction-torsion sur élastomère

p

Sommaire

2.1	Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?	72
2.1.1	Calcul des dérivées de l'énergie de déformation	74
2.1.2	Résultats	79
2.1.3	Discussion	86
2.1.4	Bilan	89
2.2	Post-traitement des essais cycliques	90
2.2.1	Post-traitement des déplacements et angles : linéarisation de la déformation	91
2.2.2	Post-traitement des efforts et couples	93
2.2.3	Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi viscoélastique linéarisée pour des oscillations autour d'une grande précharge quasi-statique multiaxiale ?	96
2.2.4	Bilan	106

Introduction

Dans le chapitre précédent, une éprouvette adaptée aux essais de traction-torsion a été conçue. De plus, l'objectif étant d'imposer un état de déformation, les relations déplacement/extension et angle/angle par unité de longueur ont été déterminées. Avant de présenter la campagne d'essais et ces résultats, il est intéressant de se demander quels types de résultats peuvent en être dégagés et sont pertinents pour caractériser le comportement du matériau et identifier les paramètres des lois de comportement choisies. Alors qu'en données brutes issues des essais sont disponibles l'effort, le couple, le déplacement

et l'angle, l'objectif pour étudier le comportement du matériau est de s'affranchir de la géométrie de l'éprouvette. Il s'agit donc de calculer des déformations, des contraintes ou des énergies de déformation, tâche que la prise en compte des grandes déformations, d'une transformation hétérogène (la traction-torsion) et de la dépendance du matériau au temps ne rend pas triviale. En effet, il existe plusieurs définitions de la déformation en mécanique des milieux continus en grandes déformations, et autant d'invariants ou de valeurs propres qui peuvent être choisis pour caractériser l'état de déformation. À cause de la transformation hétérogène, les énergies de déformations et contraintes, qui dépendent de la position radiale du point considéré sont difficiles à déterminer à partir des efforts et couples qui n'en dépendent pas. Dans la première section de ce chapitre, une méthode sera présentée pour parvenir à les calculer au rayon extérieur du cylindre, dans le cas où l'extension est maintenue constante et où la transformation est statique. La discussion sera ensuite étendue aux quantités qu'il est alors possible de calculer et à leur pertinence. Dans la seconde section, on montrera que cette méthode n'est pas applicable au cas de la viscoélasticité linéarisée sans données expérimentales et hypothèses fortes sur la loi de comportement. Des contraintes équivalentes, plus globales, seront proposées pour caractériser le comportement sous chargement cyclique du matériau.

2.1 Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

Cette section est une version traduite d'une partie de l'article [Lectez *et al.* \(2014\)](#). Dans le cas statique, trois approches peuvent être mises en place pour identifier une loi de comportement hyperélastique :

1. Choisir une loi de comportement et identifier ses paramètres en comparant les efforts et couples expérimentaux et théoriques ;
2. Déterminer l'état de contrainte à partir des données expérimentales, choisir une loi de comportement et identifier ses paramètres à partir des données expérimentales de contraintes et déformations ;
3. Déterminer les dérivées de l'énergie de déformation à partir des données expérimentales, choisir une loi de comportement et identifier ses paramètres à partir des dérivées de l'énergie de déformation, et des déformations.

La première approche est classique et ne sera pas développée ici. Son principal inconvénient est que l'énergie de déformation doit être présupposée sans avoir d'éléments aidant à ce choix. Les deux autres approches ne requièrent pas de présupposer l'énergie de déformation. Dans le cas d'une déformation homogène, comme la traction uniaxiale, le cisaillement pur, la traction équibiaxiale ou biaxiale, la seconde approche est souvent utilisée. En effet, la relation entre la contrainte et l'effort est directe (voir par exemple [Treloar \(1944b\)](#) et [Kawabata *et al.* \(1981\)](#)). Dans ce cas, la comparaison essai/modèle se fait souvent par le tracé d'un graphe spécifique qui présente la contrainte réduite en

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

fonction de l'extension. Ce type de graphe est appelé *Mooney plot* (voir par exemple [Treloar \(1975\)](#), [Han et al. \(1999\)](#) et [Boyce et Arruda \(2000\)](#)). Cependant, dû à l'hétérogénéité de la transformation d'un cylindre dans la direction radiale, la détermination de contraintes expérimentales pour des essais de traction-torsion n'est pas aisée. [Penn et Kearsley \(1976\)](#) ont présenté une méthode pour déterminer des dérivées de l'énergie de déformation expérimentales au rayon extérieur d'un cylindre, par rapport à des invariants de la déformation, pour la torsion pure (la longueur est maintenue constante). Plus tard, [Humphrey et al. \(1992\)](#) ont appliqué la méthode au cas d'une pré-extension suivie par de la torsion pour un cylindre isotrope transverse. Connaissant les dérivées de l'énergie de déformation expérimentales, il devient facile de calculer les contraintes. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de courbes contrainte/déformation dans la littérature pour des essais de traction-torsion en grandes déformations sur des élastomères. Ainsi, le premier objectif de cette section est de présenter les contraintes expérimentales calculées au rayon extérieur d'un cylindre en élastomère, soumis à une pré-extension suivie par de la torsion.

La troisième approche est plus complexe. Premièrement, il faut choisir les quantités par rapport auxquelles seront calculées les dérivées de l'énergie de déformation. La plupart des auteurs considèrent des essais en traction uniaxiale et biaxiale, et choisissent les deux premiers invariants des tenseurs de dilatation de Cauchy-Green, notés I_1 et I_2 ([Rivlin et Saunders, 1951](#); [Becker, 1967](#); [Obata et al., 1970](#); [Treloar, 1975](#); [Jones et Treloar, 1975](#); [Kawabata et Kawai, 1977](#); [Fukahori et Seki, 1991](#); [Lambert-Diani et Rey, 1999](#); [Chevalier et Marco, 2002](#)). Deuxièmement, en fonction des quantités choisies et du chargement considéré, des hypothèses fortes doivent être faites. Par exemple, il est possible de calculer une combinaison des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à I_1 et I_2 dans le cas de la traction uniaxiale, mais il est impossible de les déterminer l'une indépendamment de l'autre sans plus d'hypothèses. Ainsi, [Rivlin et Saunders \(1951\)](#) suppose que $\partial W/\partial I_1$ est constant alors que $\partial W/\partial I_2$ est une fonction de I_2 seulement. Troisièmement, une analyse rigoureuse des dérivées de l'énergie de déformation expérimentales n'est pas facilitée par le couplage entre les invariants et par la dispersion des résultats expérimentaux, surtout pour les petites déformations ([Rivlin et Saunders, 1951](#); [Haines et Wilson, 1979](#); [Criscione, 2003](#)). Concernant le cas hétérogène de la traction-torsion, des auteurs ([McKenna et Zapas \(1985\)](#) par exemple) ont appliqué la méthode présentée par [Penn et Kearsley \(1976\)](#) pour tracer des courbes de dérivées de l'énergie de déformation expérimentales. Ces données sont restreintes à la torsion pure et sont toujours exprimées en fonction de I_1 et I_2 ; Ainsi, le deuxième objectif de cette section est de calculer les dérivées de l'énergie de déformation en fonction de plusieurs grandeurs mécaniques (invariants de tenseurs, extensions principales) pour plusieurs niveaux d'extension suivie par de la torsion et de proposer une discussion sur le meilleur choix pour déterminer la loi de comportement la plus adaptée aux données d'essais.

Dans un premier temps, la méthode de [Penn et Kearsley \(1976\)](#) sera présentée et appliquée à d'autres grandeurs mécaniques. Ensuite, les résultats obtenus aussi bien pour la contrainte que pour les différentes dérivées de l'énergie de déformation seront exposés. Enfin, une discussion sur les avantages et inconvénients de chacune des approches sera

proposée, et l'importance du choix d'un ensemble d'invariants bien conditionné sera mis en valeur, comme il l'a été par [Criscione \(2003\)](#).

2.1.1 Calcul des dérivées de l'énergie de déformation

Après avoir réalisé les essais, et utilisé les relations déplacement/extension et angle/angle par unité de longueur, l'extension λ , l'angle par unité de longueur τ , l'effort N et le couple M sont connus (les essais sont pilotés en déplacement). En assimilant la zone centrale de l'éprouvette à un cylindre parfait, les équations présentées dans la section 1.1 du premier chapitre de cette partie sont valables. Notamment, le calcul de la contrainte fait intervenir les dérivées de l'énergie de déformation (équations (II.1.19-II.1.24)), mais celles-ci sont inconnues. Elles sont reliées à l'effort N et au couple M par les équations (II.1.32-II.1.33), et peuvent être exprimées en fonction de ces deux grandeurs sous certaines conditions. Dans les paragraphes suivants, ces expressions et les conditions qui les rendent valables sont d'abord présentées. Ensuite, les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales sont établies, avant d'introduire de nouveaux invariants de la déformation afin de proposer une nouvelle approche du problème.

A) Les dérivées de l'énergie de déformation en fonction de $(I_i)_{i=1,2}$

Cette première dérivation a été introduite pour la première fois par [Penn et Kearsley \(1976\)](#). Comme le montrent les équations (II.1.16-II.1.17), I_1 et I_2 sont des fonctions de λ et de τr , où, pour rappel, λ est l'extension, τ est l'angle par unité de longueur non déformée et r est la coordonnée radiale déformée du point considéré. Ainsi, W , W_1 et W_2 sont aussi des fonctions de ces deux quantités. En effectuant le changement de variables $u = \tau r$, les équations (II.1.32-II.1.33) deviennent :

$$N\tau^2 = 4\pi \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \int_0^{\tau a} (\lambda W_1(\lambda, u) + W_2(\lambda, u)) u du - \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\tau a} (2W_2(\lambda, u) + \lambda W_1(\lambda, u)) u^3 du, \quad (\text{II.2.1})$$

et

$$M\tau^3 = 4\pi \int_0^{\tau a} (\lambda W_1(\lambda, u) + W_2(\lambda, u)) u^3 du. \quad (\text{II.2.2})$$

Dans les deux équations, le membre de droite ne dépend maintenant de τ que par la limite supérieure des intégrales.

L'étape suivante consiste à dériver les équations (II.2.1-II.2.2) en fonction de τ . Cependant, cette étape n'est possible que si une hypothèse supplémentaire est adoptée : λ doit rester constante, ce qui signifie que seule la torsion autour d'une extension maintenue constante peut être considérée. Alors, en appliquant la règle de dérivation sous le signe d'intégration (règle de Leibniz), W_1 et W_2 peuvent être évaluées au rayon extérieur

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

du cylindre non déformé A :

$$W_1(\lambda, \tau A) = \frac{\lambda}{\tau^2 A^2} T_N + 2 \left(\frac{1}{\lambda \tau^2 A^2} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{\tau^2 A^2} \right) T_M \quad (\text{II.2.3})$$

$$W_2(\lambda, \tau A) = -\frac{\lambda^2}{\tau^2 A^2} T_N + \left(\frac{2\lambda^3}{\tau^2 A^2} - \frac{2}{\tau^2 A^2} - 1 \right) T_M \quad (\text{II.2.4})$$

où

$$T_N = \frac{\lambda}{2\pi\tau A^2} \frac{d(N\tau^2)}{d\tau} \quad \text{and} \quad T_M = \frac{\lambda^2}{4\pi\tau^3 A^4} \frac{d(M\tau^3)}{d\tau}. \quad (\text{II.2.5})$$

Ainsi, les fonctions $N\tau^2$ et $M\tau^3$ peuvent être mesurées expérimentalement, puis dérivées par rapport à τ , ce qui permet de calculer les dérivées de l'énergie de la déformation par rapport à I_1 et I_2 en utilisant l'équation (II.2.5) dans les équations (II.2.3-II.2.4).

B) Les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$

Certains modèles hyperélastiques classiques sont exprimés en fonction des extensions principales $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, comme l'est par exemple le modèle d'Ogden (Ogden (1972)). Dans ce cas, l'énergie de déformation est explicitement écrite en fonction des extensions principales : $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, et les différences entre les contraintes principales de Cauchy s'écrivent :

$$\sigma_i - \sigma_j = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j}, \quad (i, j) = (1, 2, 3)^2 \quad i \neq j. \quad (\text{II.2.6})$$

Dans le cas particulier des matériaux incompressibles, les extensions principales vérifient $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, et l'énergie de déformation peut alors s'écrire $\bar{W}(\lambda_1, \lambda_3) = W(\lambda_1, 1/(\lambda_1 \lambda_3), \lambda_3)$. Les différences des contraintes principales de Cauchy deviennent (voir par exemple Ogden *et al.* (2004)):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \lambda_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1} \quad (\text{II.2.7})$$

$$\sigma_3 - \sigma_2 = \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3} \quad (\text{II.2.8})$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3} - \lambda_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1}. \quad (\text{II.2.9})$$

De plus, en rappelant que les invariants sont

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \quad (\text{II.2.10})$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \quad (\text{II.2.11})$$

les dérivées de \bar{W} par rapport à λ_1 et λ_3 sont reliées à W_1 et W_2 par :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1} = 2 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_3^2} \right) W_1 + 2 \left(\lambda_1 \lambda_3^2 - \frac{1}{\lambda_1^3} \right) W_2 \quad (\text{II.2.12})$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3} = 2 \left(\lambda_3 - \frac{1}{\lambda_3^3 \lambda_1^2} \right) W_1 + 2 \left(\lambda_1^2 \lambda_3 - \frac{1}{\lambda_3^3} \right) W_2 \quad (\text{II.2.13})$$

Pour le cas particulier de la traction-torsion, les extensions principales calculées au rayon extérieur A s'écrivent en fonction de λ et τ :

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \left(\lambda^2 + \frac{1 + \tau^2 A^2}{\lambda} - \sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{1 + \tau^2 A^2}{\lambda} \right)^2 - 4\lambda} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.2.14})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{II.2.15})$$

$$\lambda_3 = \left[\frac{1}{2} \left(\lambda^2 + \frac{1 + \tau^2 A^2}{\lambda} + \sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{1 + \tau^2 A^2}{\lambda} \right)^2 - 4\lambda} \right) \right]^{1/2}. \quad (\text{II.2.16})$$

De plus, comme la contrainte radiale σ_2 est nulle sur le rayon extérieur, les équations (II.2.7-II.2.8) fournissent les deux contraintes principales de Cauchy non nulles, calculées au rayon extérieur :

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3}, \quad (\text{II.2.17})$$

où les dérivées partielles de \bar{W} sont données par les équations (II.2.12-II.2.13), et les extensions principales λ_1 et λ_3 par les équations (II.2.14-II.2.16).

C) Les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants $(K_i)_{i=2,3}$ du tenseur des déformations de Hencky

À partir du travail de [Criscione et al. \(2000\)](#), nous proposons ici d'utiliser le tenseur des déformations de Hencky, défini par l'équation (II.1.8). En effet, [Criscione et al. \(2000\)](#) ont développé cette théorie pour surmonter les difficultés observées lorsque des modèles hyperélastiques classiques en fonction de I_1 et I_2 sont utilisés pour reproduire des données expérimentales, difficultés dues à la corrélation des grandeurs impliquées dans le modèle. La pertinence mathématique de ce cadre a été récemment étudiée par [Sendova et Walton \(2005\)](#).

Des invariants particuliers de \mathbf{H} introduits par [Criscione et al. \(2000\)](#), déjà utilisés dans la partie I, sont définis comme suit :

$$K_1 = \text{tr} \mathbf{H} \quad (\text{II.2.18})$$

$$K_2 = \sqrt{\text{dev} \mathbf{H} : \text{dev} \mathbf{H}} \quad (\text{II.2.19})$$

$$K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{K_2^3} \det(\text{dev} \mathbf{H}), \quad (\text{II.2.20})$$

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

où $\text{dev}\bullet = \bullet - (\text{tr}\bullet/3)\mathbf{I}$ est l'opérateur déviatorique. Il est important de noter que chacun de ces invariants possède un sens mécanique simple : K_1 quantifie la dilatation volumétrique, K_2 quantifie la distorsion, alors que K_3 décrit le mode de distorsion. Comme il a été vu dans la première partie, $K_3 = -1$ correspond à de la compression uniaxiale ou à de la traction équibiaxiale, $K_3 = 0$ correspond à du cisaillement pur, et $K_3 = 1$ correspond à de la traction uniaxiale. Pour les matériaux incompressibles, $K_1 = 1$, et l'énergie de déformation ne dépend que de K_2 et K_3 . On notera qu'alors \mathbf{H} est purement déviatorique et $\text{dev}\mathbf{H} = \mathbf{H}$. Dans ce cas $(K_i)_{i=2,3}$ admettent des expressions simples en fonction des extensions principales :

$$K_2 = \sqrt{(\ln\lambda_1)^2 + (\ln\lambda_2)^2 + (\ln\lambda_3)^2} \quad (\text{II.2.21})$$

$$K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{K_2^3} \ln\lambda_1 \ln\lambda_2 \ln\lambda_3. \quad (\text{II.2.22})$$

Considérons maintenant une énergie de déformation écrite en fonction des invariants du tenseur des déformations de Hencky, $W(K_2, K_3)$. Notons que dans la configuration non déformée, $K_2 = 0$ et K_3 est indéterminé. Il est alors choisi de fixer $W(0, K_3) = 0$. Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par [Criscione et al. \(2000\)](#) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{1}{K_2} \frac{\partial W}{\partial K_2} \mathbf{H} + \frac{1}{K_2} \frac{\partial W}{\partial K_3} \mathbf{Y} \quad (\text{II.2.23})$$

où le tenseur d'ordre 2 \mathbf{Y} est défini par :

$$\mathbf{Y} = \frac{3\sqrt{6}}{K_2^2} \mathbf{H}^2 - 3 \frac{K_3}{K_2} \mathbf{H} - \sqrt{6}\mathbf{I}. \quad (\text{II.2.24})$$

Comme l'ont souligné [Criscione et al. \(2000\)](#), les termes du tenseur des contraintes de Cauchy dans l'équation (II.2.23) sont mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire $\mathbf{I} : \mathbf{H}$, $\mathbf{I} : \mathbf{Y}$ et $\mathbf{H} : \mathbf{Y}$ sont nuls. Alors, les dérivées de l'énergie de déformation par rapport à K_2 et K_3 sont fournies respectivement par les relations :

$$\frac{\partial W}{\partial K_2} = \frac{1}{K_2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{H} \quad \left(= \frac{\sigma_1 \ln\lambda_1 + \sigma_3 \ln\lambda_3}{K_2} \right), \quad (\text{II.2.25})$$

et

$$\frac{\partial W}{\partial K_3} = \frac{K_2}{9(1 - K_3^2)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{Y}. \quad (\text{II.2.26})$$

Remarque 1 : Quand K_3^2 tend vers 1, \mathbf{Y} tend vers 0. Sans plus d'hypothèses, il n'est pas possible de déterminer si $\partial W/\partial K_3$ est fini ou non quand $K_3^2 = 1$. Cependant, en rappelant que $\boldsymbol{\sigma}$ est fini et en considérant l'équation (II.2.23), $\partial W/\partial K_3 \mathbf{Y}$ tend vers 0. Les résultats expérimentaux pour la grandeur $\partial W/\partial K_3$ au voisinage de $K_3^2 = 1$ seront étudiés dans le paragraphe Résultats.

Finalement, d'après l'équation (II.2.17), les dérivées de l'énergie de déformation dans les équations (II.2.25-II.2.26) peuvent être écrites en fonction des dérivées de W par

rapport aux extensions principales :

$$\frac{\partial W}{\partial K_2} = \frac{1}{K_2} \left(\lambda_1 \ln \lambda_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1} + \lambda_3 \ln \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3} \right), \quad (\text{II.2.27})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial K_3} = \frac{1}{9(1 - K_3^2)} \left[\left(\frac{3\sqrt{6}}{K_2} (\ln \lambda_1)^2 - \sqrt{6} K_2 - 3K_3 \ln \lambda_1 \right) \lambda_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1} \right. \\ \left. + \left(\frac{3\sqrt{6}}{K_2} (\ln \lambda_3)^2 - \sqrt{6} K_2 - 3K_3 \ln \lambda_3 \right) \lambda_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_3} \right]. \quad (\text{II.2.28}) \end{aligned}$$

D) Bilan

Dans les paragraphes précédents, nous avons établi les équations qui expriment les dérivées de l'énergie de déformation par rapport à plusieurs quantités mécaniques, dérivées évaluées au rayon extérieur d'un cylindre en extension uniaxiale soumis à de la torsion. Ces équations font uniquement intervenir les données expérimentales globales, à savoir l'extension λ , l'angle par unité de longueur τ , l'effort N et le couple M . Plus précisément, ces calculs nécessitent la dérivation de N et M par rapport à τ . De plus, une fois les dérivées calculées, il est possible de déterminer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy. Le tableau II.2.1 reprend les résultats précédents et les relie aux équations nécessaires pour déterminer chaque quantité.

Quantité	Équations
$\partial W / \partial I_1$	(II.2.3), (II.2.5)
$\partial W / \partial I_2$	(II.2.4), (II.2.5)
$\partial \bar{W} / \partial \lambda_1$	(II.2.12), (II.2.14), (II.2.16), (II.2.3-II.2.5)
$\partial \bar{W} / \partial \lambda_3$	(II.2.13), (II.2.14), (II.2.16), (II.2.3-II.2.5)
$\partial W / \partial K_2$	(II.2.27), (II.2.21), (II.2.12-II.2.13), (II.2.14-II.2.16), (II.2.3-II.2.5)
$\partial W / \partial K_3$	(II.2.28), (II.2.21-II.2.22), (II.2.12-II.2.13), (II.2.14-II.2.16), (II.2.3-II.2.5)
$\sigma_{\theta\theta}$	(II.1.29) en $r = a$, (II.2.3-II.2.5)
σ_{zz}	(II.1.30) en $r = a$, (II.2.3-II.2.5)
$\sigma_{\theta z}$	(II.1.22) en $r = a$, (II.2.3-II.2.5)

TABLEAU II.2.1 : Equations nécessaires au calcul des dérivées de l'énergie de déformation et des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy au rayon extérieur pour des essais de traction-torsion

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

2.1.2 Résultats

Les calculs précédents sont maintenant appliqués à quelques données expérimentales. Deux types d'essais sont considérés : la torsion pure, c'est-à-dire $\lambda = 1$, et une pré-extension uniaxiale ($\lambda > 1$) suivie par de la torsion. La figure II.2.1 montre un exemple de ce cas de chargement, avec les extension, angle par unité de longueur, effort et couple mesurés en fonction du temps, pour un chargement maximal $\lambda = 1,75$ et $\tau = 0,09$ rad.mm⁻¹.

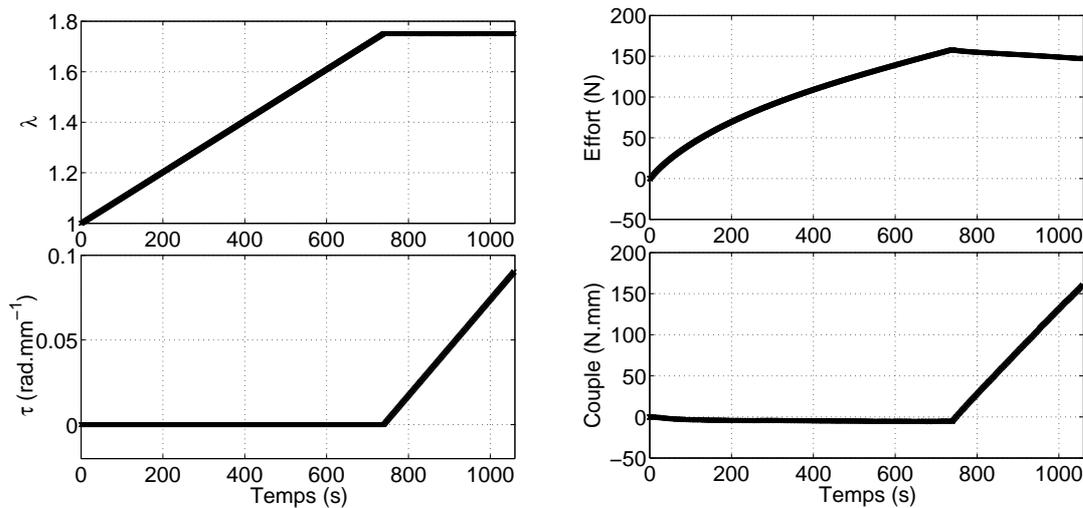


FIGURE II.2.1 : Extension λ et angle par unité de longueur τ imposés en fonction du temps (à gauche). Effort et couple mesurés (à droite)

A) Tenseur des contraintes de Cauchy

En utilisant la méthode décrite précédemment, il est d'abord possible d'obtenir des courbes contrainte/déformation valables pour le rayon extérieur de l'éprouvette. Considérant les équations (II.1.23), (II.1.24) et (II.1.26), il apparaît que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy sont les composantes dans le plan tangent à la surface ($\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$), soit $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ et σ_{zz} . Ici, deux cas sont analysés, à savoir la torsion pure et une pré-extension suivie par de la torsion.

a) Torsion pure Les courbes contrainte/déformation correspondant à de la torsion pure sont présentées sur la figure II.2.2. Plus précisément, elles montrent les composantes des contraintes (vraies) de Cauchy non nulles en fonction des composantes des déformations (vraies) de Hencky, c'est-à-dire $H_{\theta\theta}$, $H_{\theta z}$ et H_{zz} . Il apparaît que pour le domaine de déformation considéré, chaque composante du tenseur des contraintes de Cauchy évolue linéairement avec la composante correspondante du tenseur des déformations de Hencky.

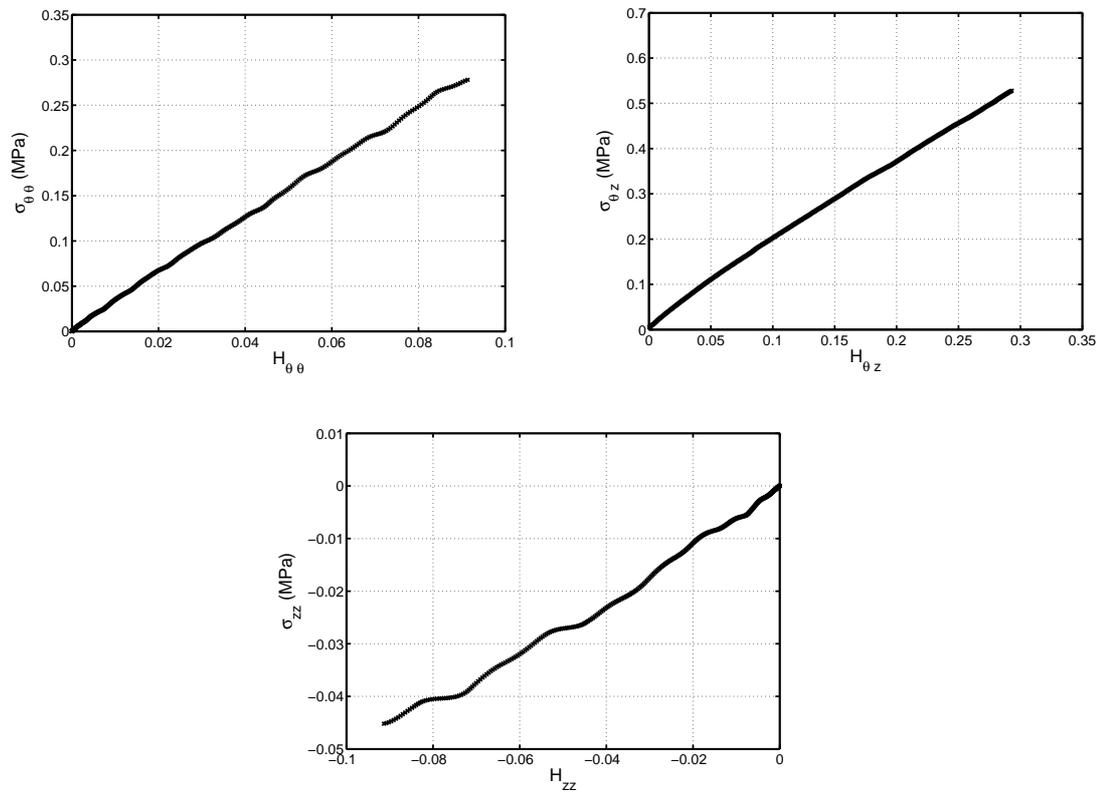


FIGURE II.2.2 : Torsion pure : courbes de contrainte/déformation

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

De plus, la composante axiale de la contrainte σ_{zz} décroît lorsque H_{zz} croît, et elle est négative : c'est l'effet Poynting (voir par exemple Billington (1986)).

b) Pré-extension suivie par de la torsion Ici, deux exemples sont considérés, avec deux valeurs de pré-extension : $\lambda = 1,75$ et $2,5$. La figure II.2.3 montre l'évolution des composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy en fonction de l'angle par unité de longueur τ . τ est dans ce cas préféré aux composantes de \mathbf{H} pour plus de clarté dans les graphes. Premièrement, il est vérifié que la valeur initiale de

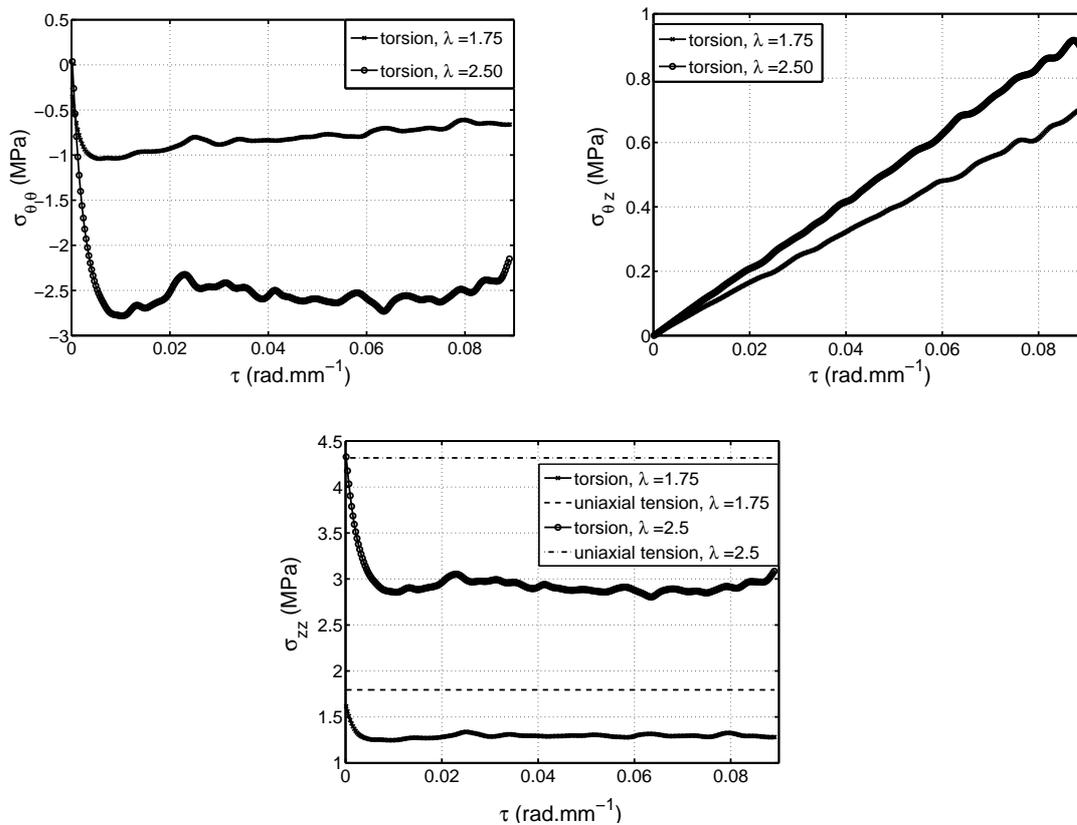


FIGURE II.2.3 : Pré-extension suivie par de la torsion : contrainte de Cauchy en fonction de l'angle par unité de longueur

la contrainte axiale σ_{zz} est égale à la contrainte axiale mesurée pour l'essai de traction uniaxiale effectué au même niveau d'extension. Ensuite, σ_{zz} décroît rapidement jusqu'à atteindre une valeur presque constante : cette décroissance de la contrainte peut être induite par la relaxation de la contrainte axiale due à des effets visqueux, la transformation n'étant pas parfaitement statique. De plus, lorsque σ_{zz} atteint la valeur quasi-constante, cela signifie que la contribution de la torsion à la contrainte axiale (c'est-à-dire l'effet Poynting) est négligeable comparée à la contribution de l'extension. Cela est aussi vi-

sible en comparant les valeurs de σ_{zz} avec celles atteintes dans le cas de la torsion pure montrées sur la figure II.2.2. De plus, $\sigma_{\theta\theta}$ suit la même évolution que σ_{zz} , en commençant de zéro (traction uniaxiale) puis en décroissant rapidement avant d'atteindre une valeur quasi-constante. En ce qui concerne $\sigma_{\theta z}$, elle prend des valeurs positives et varie linéairement avec τ , la pente augmentant avec la pré-extension.

B) Les dérivées de l'énergie de déformation

Les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux trois grandeurs mécaniques sont calculées ici, en utilisant les équations du tableau II.2.1.

a) Dérivées par rapport aux invariants classiques des tenseurs de Cauchy-Green $(I_i)_{i=1,2}$ La figure II.2.4 montre l'évolution de W_1 et W_2 en fonction des invariants correspondants. Plus précisément, les figures II.2.4(a-b) correspondent à de la torsion pure, les abscisses sont alors $I_1 - 3$ et $I_2 - 3$, alors que les figures II.2.4(c-d) correspondent au cas d'une pré-extension suivie par de la torsion, et les abscisses sont la différence entre la valeur actuelle des invariants et leur valeur à la fin de la pré-extension, soit $I_1 - (\lambda^2 + 2\lambda^{-1})$ and $I_2 - (2\lambda + \lambda^{-2})$.

Considérons tout d'abord le cas de la torsion pure. Dans ce cas, $I_1 = I_2$. Comme il est observé respectivement sur les figures II.2.4(a) et (b), W_1 décroît très rapidement jusqu'à une valeur positive constante, alors que W_2 croît très rapidement jusqu'à une autre valeur positive constante. La décroissance de W_1 et la croissance de W_2 sont presque symétriques par rapport à un axe horizontal. De plus, les valeurs finales de W_1 et W_2 sont en accord avec les valeurs classiques des paramètres de Mooney-Rivlin pour ce type de matériau. Des résultats similaires ont été observé par exemple par Penn et Kearsley (1976), et Fukahori et Seki (1991) : W_1 et W_2 semblent tendre vers l'infini lorsque I_1 et I_2 tendent vers 3, c'est-à-dire vers la configuration non déformée. À notre connaissance, seul un modèle a été proposé dans la littérature pour prédire ce type de comportement : Obata *et al.* (1970) définissent W_1 et W_2 comme des fonctions en puissances négatives de $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$. Cependant, cette approche n'a pas été exploitée par la suite.

Considérons maintenant le cas des pré-extensions suivies par de la torsion. L'évolution de W_1 et W_2 pendant la torsion est montrée respectivement sur les figures II.2.4(c-d) pour deux valeurs de pré-extension. Comme pour la torsion pure, W_1 et W_2 semblent tendre vers l'infini lorsque les invariants modifiés sont les plus faibles, i.e lorsqu'ils sont proches des valeurs qu'ils avaient à la fin de la pré-extension. La différence la plus notable avec le cas de la torsion pure est le changement de signe des deux dérivées de l'énergie de déformation.

Finalement, en considérant les limites infinies des quatre courbes de la figure II.2.4, et rappelant qu'aucune loi hyperélastique ne peut prédire ce type de comportement, les résultats conduisent à s'interroger sur la pertinence des invariants de Cauchy-Green dans ce contexte.

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

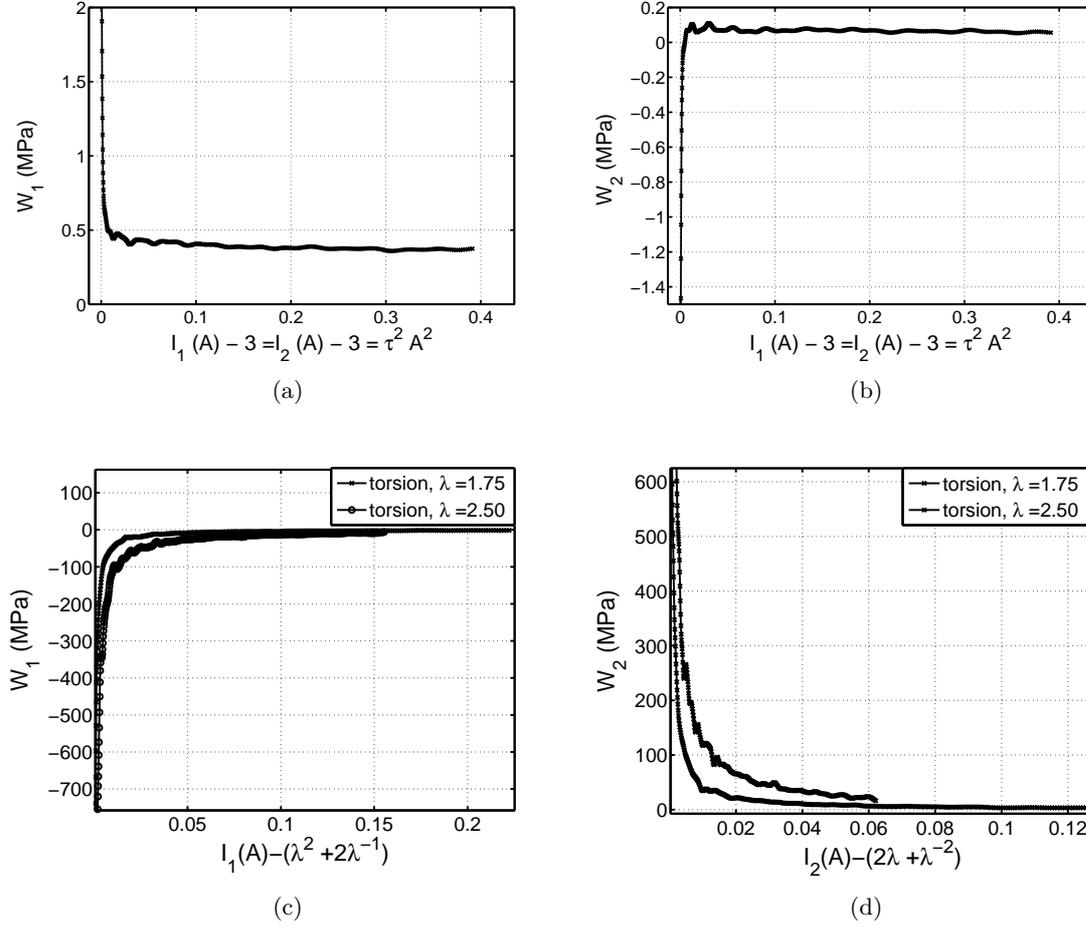


FIGURE II.2.4 : Dérivées de l'énergie de déformation en fonction des I_1 and I_2 translétés. En haut: torsion pure, en bas: pré-extension suivie par de la torsion

b) Dérivées par rapport aux extensions principales $(\lambda_i)_{i=1,3}$ La figure II.2.5 montre l'évolution de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales, c'est-à-dire $\bar{W}_1 = \partial\bar{W}/\partial\lambda_1$ et $\bar{W}_3 = \partial\bar{W}/\partial\lambda_3$, pour la torsion pure et pour la pré-extension suivie par de la torsion. Les figures II.2.5(a-b) concernent la torsion pure. \bar{W}_1 est toujours négative et décroît linéairement avec λ_1 , alors que \bar{W}_3 est positive et croît lorsque λ_3 augmente. Contrairement à W_1 et W_2 aucune singularité n'est observée. Pour la pré-extension suivie d'une torsion, après la pré-extension, comme l'état de déformation est uniaxial, la seule composante non nulle de la contrainte est σ_{zz} et $\lambda_3 = \lambda$, $\lambda_1 = \lambda^{-1/2}$. Alors, en utilisant l'équation (II.2.17),

$$\bar{W}_1 = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{and} \quad \bar{W}_3 = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda}. \quad (\text{II.2.29})$$

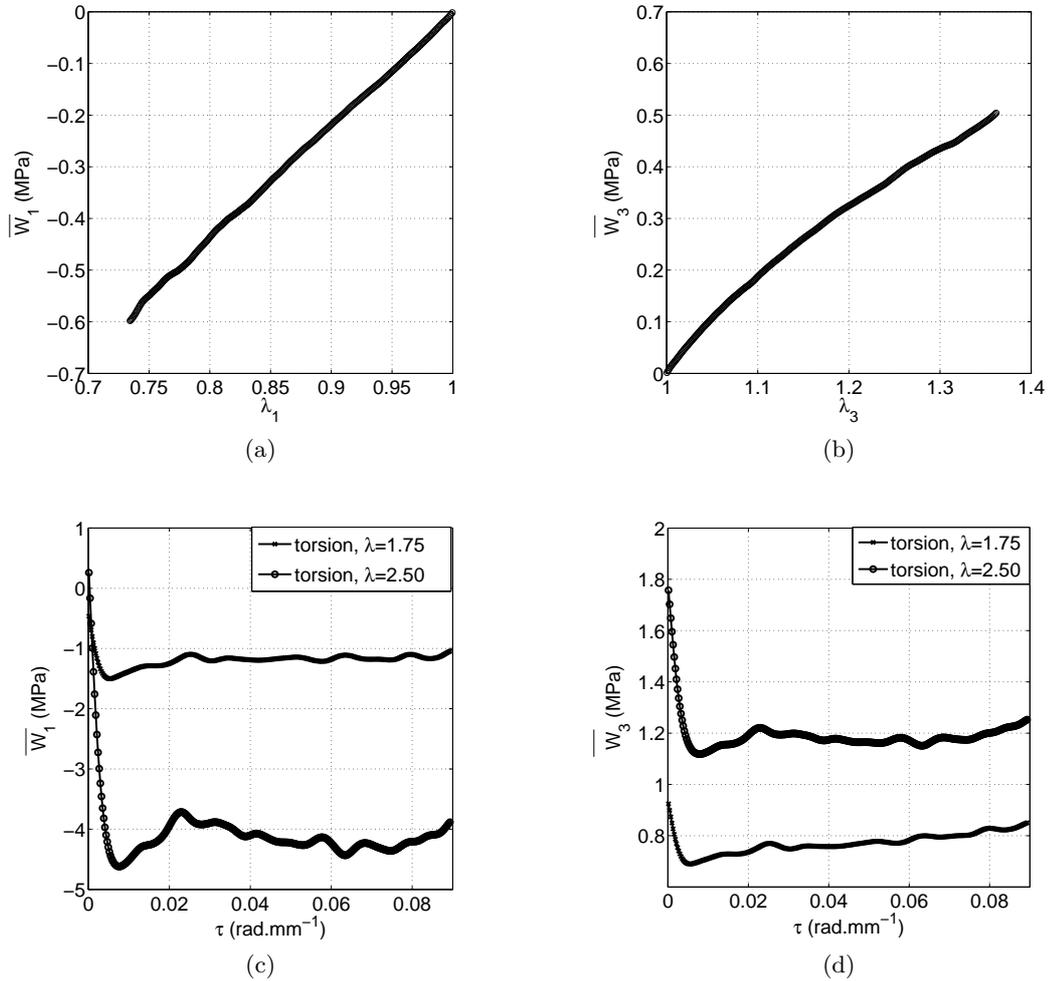


FIGURE II.2.5 : Dérivées de l'énergie de déformation en fonction de λ_1 , λ_3 et de l'angle par unité de longueur. En haut: torsion pure, en bas: pré-extension suivie par de la torsion

Les valeurs initiales de \overline{W}_1 et \overline{W}_3 sur les figures II.2.5(c) et (d) correspondent respectivement à celles de $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} sur la figure II.2.3. Ensuite, pendant la torsion, \overline{W}_1 et \overline{W}_3 évoluent avec τ de la même manière que le font $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} : d'abord, une décroissance rapide est observée, due probablement à la relaxation de la contrainte de traction, puis se stabilisent à une valeur quasi constante, ce qui s'explique par la contribution négligeable de la torsion sur la contrainte, comparé à celle de la pré-extension.

c) Dérivées en fonction des invariants de la déformation de Hencky $(K_i)_{i=2,3}$
 Finalement, les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants de la dé-

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

formation de Hencky sont étudiées. Les résultats sont présentés sur la figure II.2.6. Les grandeurs sont notées $W_{K_2} = \partial W / \partial K_2$ et $W_{K_3} = \partial W / \partial K_3$. Dans le cas de la torsion

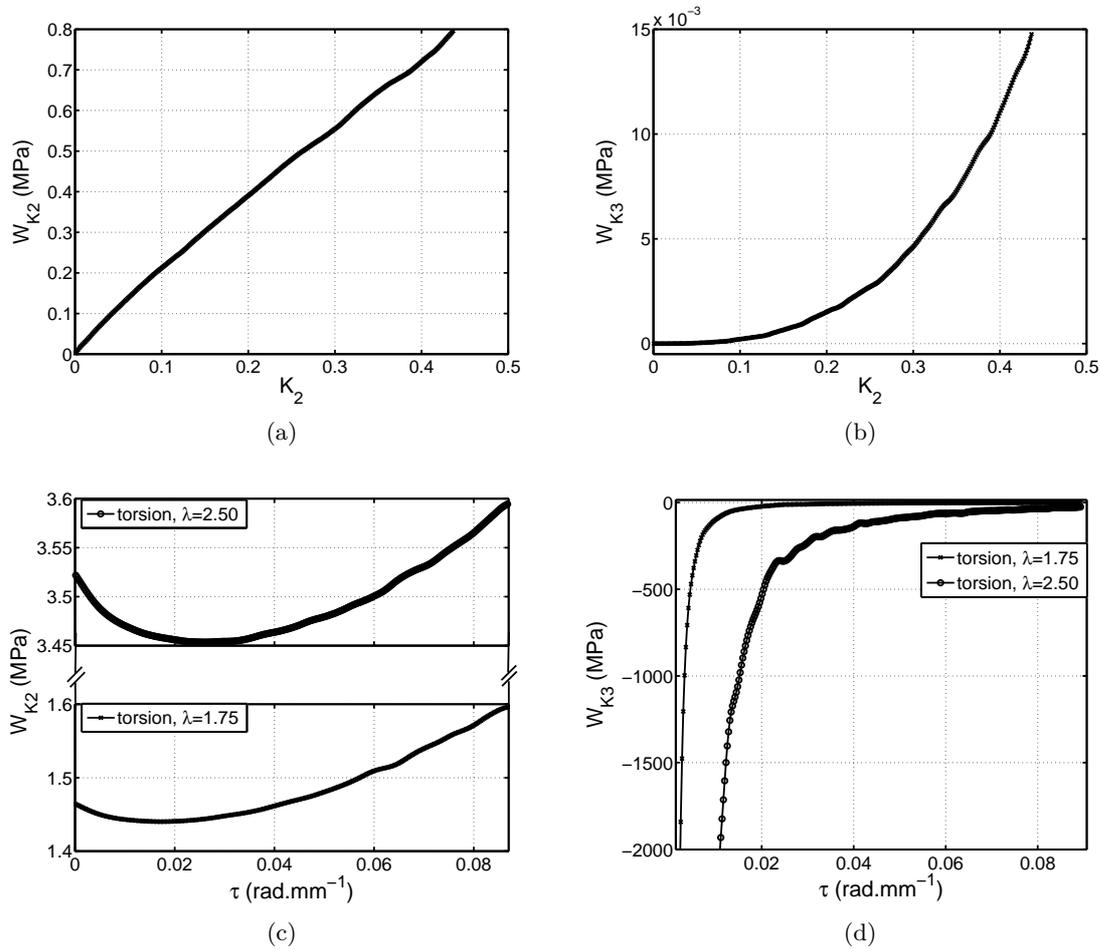


FIGURE II.2.6 : Dérivées de l'énergie de déformation par rapport à K_2 et K_3 , en fonction de K_2 et de l'angle par unité de longueur. En haut: torsion pure, en bas: pré-extension suivie par de la torsion

pure, $K_3 = 0$ et W_{K_2} et W_{K_3} sont tracées en fonction de K_2 sur les figures II.2.6(a-b). Contrairement aux dérivées par rapport à $(I_i)_{i=1,2}$, il n'y a pas de singularité, particulièrement pour des angles faibles, c'est-à-dire pour de faibles valeurs de K_2 : W_{K_2} et W_{K_3} tendent toutes deux vers zéro lorsque K_2 tend vers zéro. Il est aussi noté que W_{K_2} varie linéairement avec K_2 .

Les figures II.2.6(c-d) montrent l'évolution des grandeurs sus-citées avec τ lors d'une torsion imposée après des pré-extensions à $\lambda = 1,75$ et $2,5$. Premièrement, sur la figure II.2.6(c), les valeurs initiales de W_{K_2} correspondent à celles atteintes à la fin de la pré-extension. Pendant la torsion, W_{K_2} décroît d'abord, probablement à cause de la

relaxation, puis croît lorsque τ augmente. Notons que lors de la torsion K_3 passe de 1, ce qui correspond à de la traction uniaxiale, à 0,993. Deuxièmement, la figure II.2.6(d) présente une singularité : W_{K_3} tend vers l'infini lorsque K_3 tend vers 1. Cependant, il a été vérifié que le terme $W_{K_3}\mathbf{Y}$ tend vers 0 lorsque K_3 tend vers 1, il n'y a donc pas d'influence sur la mesure de la contrainte (voir l'équation (II.2.23) et la Remarque 1). Afin d'expliquer le comportement de W_{K_3} au voisinage de $\tau = 0$, deux hypothèses peuvent être formulées :

- Soit W_{K_3} tend réellement vers l'infini lorsque K_3 tend vers 1, mais plus lentement que \mathbf{Y} tend vers 0 ;
- Ou l'erreur de mesure est amplifiée pendant le calcul de W_{K_3} , comme l'affirme Criscione (2003). Alors, dans ce cas, la détermination expérimentale de W_{K_3} n'est pas pertinente.

Afin de faire un choix entre ces deux possibilités, la réponse théorique d'un matériau néo-Hookéen ($C = 0,35$) soumis à une transformation pendant laquelle K_2 est fixé à 2 et K_3 varie est étudiée. L'évolution de W_{K_3} en fonction de K_3 dans ce cas est présenté sur la figure II.2.7. Le graphe ne présente aucune singularité : W_{K_3} varie linéairement avec

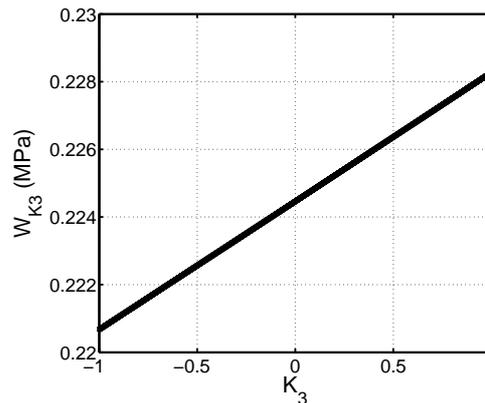


FIGURE II.2.7 : Déformation d'un matériau néo-Hookéen : évolution de W_{K_3} en fonction de K_3 , K_2 étant fixé constant (=2)

K_3 . Même si cet exemple ne constitue pas une preuve rigoureuse, nous sommes enclins à considérer que la seconde hypothèse est la bonne : considérer des valeurs expérimentales de W_{K_3} au voisinage de $K_3 = 1$ n'est pas pertinent, ce qui corrobore la conclusion de Criscione (2003).

2.1.3 Discussion

Trois méthodes existent pour identifier une loi de comportement hyperélastique pour un matériau élastomère à partir de résultats expérimentaux en traction-torsion. Dans la suite, ces trois méthodes sont résumées, de la plus restrictive à la moins restrictive, c'est-à-dire de celle qui nécessite le plus d'hypothèses à celle qui en nécessite le moins.

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

A) Mener des essais de traction-torsion simultanées et considérer les efforts et couples mesurés

Dans ce cas, il n'est pas possible de calculer directement les dérivées de l'énergie de déformation, puis les contraintes. Cependant, il est possible de postuler a priori une énergie de déformation. Ensuite, en remplaçant W_1 et W_2 par leurs formes explicites en fonction des paramètres matériaux dans les expressions d'effort et couple donnés par les équations (II.1.32-II.1.33), les paramètres matériaux peuvent être déterminés par une méthode classique d'identification. D'un point de vue expérimental, cette méthode est simple de mise en œuvre et a déjà été considérée par plusieurs auteurs (voir par exemple Rivlin et Saunders (1951); Hartmann (2001a)). Cependant, d'un point de vue théorique, le choix en amont de l'énergie de déformation la rend très restrictive. En effet, il est bien connu que le choix d'une loi de comportement hyperélastique capable de prédire la réponse d'un matériau élastomère sous chargement multiaxial est un problème complexe (Marckmann et Verron, 2006).

B) Mener des essais de pré-extension suivie par de la torsion et considérer les dérivées de l'énergie de déformation

Lorsque l'extension uniaxiale λ est maintenue constante pendant la torsion, le calcul des dérivées de l'énergie de déformation au rayon extérieur du cylindre à partir de la mesure de N et M est rendu possible. Cependant, il a été montré que cette détermination expérimentale des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants classiques des tenseurs de Cauchy-Green I_1 et I_2 n'est pas pertinente pour des déformations faibles, comme montré par exemple sur la figure II.2.4. Beaucoup d'autres auteurs ont rencontré les mêmes difficultés avec les essais de traction-torsion (Penn et Kearsley, 1976; McKenna et Zapas, 1986) et les essais biaxiaux (Becker, 1967; Obata *et al.*, 1970; Treloar, 1975; Jones et Treloar, 1975; Kawabata et Kawai, 1977; Fukahori et Seki, 1991; Lambert-Diani et Rey, 1999; Chevalier et Marco, 2002). Dans la plupart des cas, les auteurs excluent les valeurs expérimentales correspondant à de faibles déformations, affirmant qu'il s'agit de la conséquence d'erreurs de mesure. En fait, cette difficulté est inhérente à la dépendance mutuelle entre les termes qui apparaissent lorsque la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à \mathbf{B} est décomposée en dérivées de l'énergie de déformation en fonction de I_1 et I_2 . Ce problème a été étudié en détail par Criscione (2003) pour des chargements biaxiaux. Criscione a démontré que pour les matériaux hyperélastiques incompressibles, l'erreur de calcul dans les dérivées de l'énergie de déformation est amplifiée par le facteur k donné par :

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - R_C(\text{dev}\mathbf{B}, \text{dev}\mathbf{B}^{-1})^2}}, \quad (\text{II.2.30})$$

où la fonction $R_C(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ quantifie la covariance entre les tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} , avec

$$R_C(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{\text{abs}(\mathbf{P} : \mathbf{Q})}{\sqrt{\mathbf{P} : \mathbf{P}} \sqrt{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}}}. \quad (\text{II.2.31})$$

En pratique, R_c prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et plus la covariance est élevée plus la dépendance mutuelle entre les tenseurs est élevée. Ainsi, si $R_C(\text{dev}\mathbf{B}, \text{dev}\mathbf{B}^{-1})$ tend vers 1, alors k tend vers l'infini et donc l'erreur de calcul dans les dérivées de W est très grande. Appliquons maintenant cette approche au cas de la traction-torsion : la figure II.2.8 présente les valeurs de R_c en fonction du chargement donné par λ et τ . Clairement pour la plupart des couples (λ, τ) , R_c est très proche de 1, particulièrement

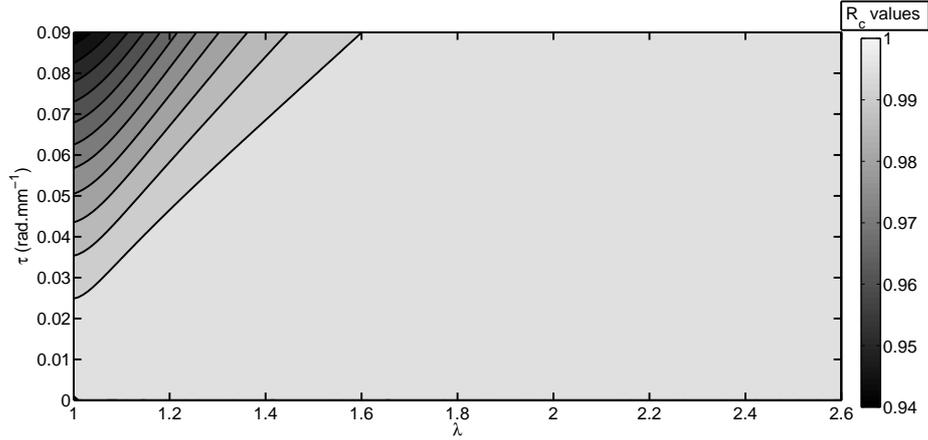


FIGURE II.2.8 : Valeurs de covariance pour plusieurs cas de traction-torsion

pour les faibles valeurs d'angle. Ainsi, pour les essais de traction-torsion, l'utilisation des invariants de Cauchy-Green I_1 et I_2 conduit à de grandes erreurs de calcul.

Contrairement aux invariants de Cauchy-Green, pour les extensions principales λ_1 et λ_3 , et pour les invariants des déformations de Hencky K_2 et K_3 , les termes impliqués dans l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy sont mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire $R_c = 0$. Cette propriété garantit l'indépendance des dérivées correspondantes de l'énergie de déformation. Pour donner une illustration simple de cette analyse, le cas de la traction uniaxiale est considéré, la seule composante non nulle de la contrainte de Cauchy étant σ_{zz} . En utilisant les équations (II.1.30), (II.2.17)₂ et (II.2.23), il vient :

$$\sigma_{zz} = 2(\lambda W_1 + W_2) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} W_{K2} = \lambda_3 \bar{W}_3. \quad (\text{II.2.32})$$

Si l'on considère que σ_{zz} a été obtenue par des données expérimentales, alors l'équation (II.2.32)₁ montre que W_1 et W_2 sont indéterminées, l'équation (II.2.32)₂ mène directement à W_{K2} , alors que W_{K3} est indéterminée, et l'équation (II.2.32)₃ donne directement \bar{W}_3 alors que $\bar{W}_1 = 0$ est simplement déduit de $\sigma_{\theta\theta} = 0$.

Pour conclure, cette méthode requiert certaines restrictions expérimentales et théoriques, mais elle est plus appropriée pour rassembler des informations pertinentes pour choisir l'énergie de déformation. Cependant, le choix du groupe d'invariants à utiliser est d'une importance majeure :

- $(I_i)_{i=1,2}$ induisent une covariance égale à 1 pour les termes de contrainte, ce qui

2.1. Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi de comportement hyperélastique à partir d'essais de traction-torsion ?

mène à des erreurs de calcul très importantes pour les faibles déformations en torsion ;

- $(K_i)_{i=2,3}$ mènent à des termes de contrainte orthogonaux entre eux, ce qui permet une détermination satisfaisante de W_{K_2} , mais la détermination de W_{K_3} est biaisée lorsque K_3 est proche de 1, c'est-à-dire pour la traction uniaxiale ;
- $\lambda_{i=1,3}$ est le groupe d'invariants le plus pertinent pour déterminer les dérivées de l'énergie de déformation.

C) Mener des essais de pré-extension suivie par de la torsion et considérer les contraintes

Dans ce cas, les essais sont les mêmes que pour la méthode précédente : l'extension uniaxiale doit rester constante pendant la torsion. Peu importe le groupe d'invariants choisi, le tenseur des contraintes de Cauchy peut être déterminé au rayon extérieur du cylindre. Il est calculé à partir des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à I_1 et I_2 . La combinaison des deux dérivées de l'énergie de déformation permet d'éviter les problèmes mentionnés plus haut pour les petites déformations. Ce simple calcul étend le travail de [Penn et Kearsley \(1976\)](#) à la détermination du tenseur des contraintes de Cauchy.

2.1.4 Bilan

Il est reconnu que la meilleure méthode pour déterminer une loi de comportement hyperélastique d'un matériau élastomère consiste à calculer les dérivées de l'énergie de déformation. Dans cette section, il a été établi que les dérivées de l'énergie de déformation peuvent être facilement calculées à partir des données expérimentales de pré-extension suivie par de la torsion, si un groupe de grandeurs mécaniques (invariants de la déformation, extensions principales) approprié est adopté. Ce résultat est particulièrement utile pour comparer les lois de comportement hyperélastiques, c'est-à-dire les énergies de déformation pour un matériau élastomère, et pour déterminer laquelle est la plus appropriée pour prédire sa réponse sous chargement multiaxial quasi-statique.

Le point de départ de cette étude était l'application de la méthode de [Penn et Kearsley \(1976\)](#) pour calculer les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants de la déformation de Cauchy-Green $((I_i)_{i=1,2})$ pour des résultats expérimentaux de torsion pure et de pré-extension suivie par de la torsion. Il a été montré que ces invariants ne permettent pas de déterminer les dérivées de l'énergie de déformation, car elles sont fortement corrélées. Ensuite, nous avons démontré que deux autres groupes de grandeurs mécaniques, à savoir les extensions principales $(\lambda_i)_{i=1,3}$ et les invariants du tenseur de Hencky $((K_i)_{i=2,3})$, introduits par [Criscione \(2003\)](#), sont théoriquement adaptés au calcul des dérivées de l'énergie de déformation, parce qu'ils sont associés à des termes mutuellement orthogonaux dans l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy. Cependant, comme l'erreur de mesure est fortement amplifiée pour la dérivée de l'énergie de déformation en fonction de K_3 quand K_3^2 tend vers 1, c'est-à-dire pour la

traction uniaxiale, le meilleur groupe de grandeurs mécaniques est celui des extensions principales.

Finalement, nous avons établi que les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy peuvent être directement calculées à partir des mesures d'effort et de couple. En fait, ce calcul est indépendant de la discussion sur les dérivées bien posées ou non, et mène aux mêmes résultats indépendamment du groupe d'invariants choisi. Ce résultat est notable puisqu'il s'applique à des transformations hétérogènes et ne requiert pas de présupposer la forme de la loi de comportement. De plus, il poursuit les résultats des travaux de [Penn et Kearsley \(1976\)](#). Notons que cette méthode peut être utilisée pour des matériaux compressibles ([McKenna et Zapas \(1985\)](#)).

2.2 Post-traitement des essais cycliques

Comme il a été souligné dans la Partie I, la pièce de suspension moteur subit des sollicitations dynamiques, et, dans le cadre de cette thèse, l'étude du comportement sous de telles sollicitations est limité à des fréquences allant jusqu'à 30 Hz. Pour caractériser ce type de comportement, il a été choisi de mener des essais cycliques particuliers, qui consistent en l'application d'une grande précharge quasi-statique multiaxiale, suivie de petites oscillations en traction/compression uniaxiale et en torsion pure, ce qui permet de reproduire certains chargements subis par la pièce, avec la précharge moteur et étrier, suivies par de petites oscillations causées par exemple par les conditions de route. De la même manière que dans la section précédente, le déplacement D et l'angle α sont imposés, et l'effort N et le couple M sont mesurés. En appliquant les relations déplacement/extension et angle/angle par unité de longueur déterminées dans le chapitre précédent, l'état de déformation après précharge est entièrement déterminé. Ensuite, l'état de déformation lors de l'application des petites oscillations est linéarisé autour de celui de la précharge, ce qui sera présenté dans un premier temps ici.

Une fois l'état de déformation déterminé pour tout le chargement, il s'agit de calculer la contrainte. Concernant la précharge, et donc un chargement en traction-torsion quasi-statique, nous avons montré qu'il n'était possible de calculer le tenseur des contraintes de Cauchy qu'au rayon extérieur du cylindre et uniquement si le chargement est fractionné en une extension suivie d'une torsion, grâce au calcul de [Penn et Kearsley \(1976\)](#). Il pourrait être envisagé de linéariser le calcul de [Penn et Kearsley \(1976\)](#) pour obtenir le tenseur des contraintes de Cauchy linéarisé correspondant aux petites oscillations. Cependant, des restrictions viennent s'ajouter à celles déjà citées pour le cas statique. Tout d'abord, l'application de ce calcul à une formulation hyper-viscoélastique suppose de choisir a priori une forme de modèle viscoélastique. Ensuite, quand bien même ce choix aurait été fait, la linéarisation des équations ferait intervenir des dérivées secondes des efforts et couples, difficiles à déterminer sans ajouter une grande quantité d'essais à la campagne de caractérisation. Cette piste est donc laissée de côté. Il ne sera ainsi pas possible de comparer directement les résultats de contraintes/déformations pour différentes précharges. Afin de pouvoir malgré cela établir un point de comparaison entre les cas étudiés, des grandeurs équivalentes aux contraintes en traction, σ_{eq} , et en

cisaillement, T , vont être calculées, ce qui sera présenté dans un second temps.

Ces grandeurs équivalentes expérimentales n'ont pas pour seule fonction de servir de base pour l'identification des paramètres d'une loi viscoélastique linéarisée. En effet, l'objectif est également de caractériser le comportement cyclique sous précharge du matériau. Classiquement, le post-traitement d'essais cycliques sans précharge est effectué par le calcul des modules de conservation et de perte, notés respectivement E' et E'' en traction uniaxiale, et G' et G'' en cisaillement, grandeurs qui seront définies dans la suite. De façon analogue, nous allons calculer des équivalents à ces grandeurs à partir de σ_{eq} et T , et étudier leur évolution en fonction de l'amplitude et de la fréquence des oscillations. L'introduction d'une précharge multiaxiale dans les essais amène une autre dimension au post-traitement des données, et nous chercherons à savoir si le comportement dynamique du matériau dépend de sa précharge, c'est-à-dire de son niveau de précharge et de sa direction de précharge. Une nouvelle fois, une discussion sur les grandeurs pertinentes à tracer pour mener cette étude sera proposée.

2.2.1 Post-traitement des déplacements et angles : linéarisation de la déformation

De petites oscillations sont imposées en déplacement après application d'une précharge multiaxiale. Ces oscillations sont effectuées soit en traction/compression uniaxiale, soit en torsion pure. Concernant la précharge, quatre chargements sont distingués : compression uniaxiale, torsion pure, traction-torsion combinée et traction uniaxiale. Chaque cas est traité ci-après. Pour rappel, l'état de déformation de l'éprouvette est assimilé à celui d'un cylindre parfait.

A) Oscillations en traction/compression uniaxiale

Considérons un point P du cylindre dans la configuration préchargée, dont le repère cylindrique est noté $(\mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{e}_{\theta_0}, \mathbf{e}_{z_0})$. Les coordonnées du point P dans cette configuration sont notées (r_0, θ_0, z_0) . Une faible extension λ_1 est appliquée dans l'axe du cylindre préchargé. Le vecteur incrément de déplacement ainsi généré au point P , s'exprime, dans la configuration finale $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ par la relation :

$$\Delta \mathbf{u}(P) = r_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - 1 \right) \mathbf{e}_r + z_0 (\lambda_1 - 1) \mathbf{e}_z \quad (\text{II.2.33})$$

Le gradient du déplacement par rapport à la configuration préchargée est alors :

$$\mathbf{grad} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - 1 \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta_0}) + (\lambda_1 - 1) (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_{z_0}), \quad (\text{II.2.34})$$

où \mathbf{x} est le vecteur position de la configuration préchargée \mathbf{OP} . On peut maintenant exprimer $\boldsymbol{\epsilon}$, le tenseur des petites déformations par rapport à la configuration préchargée :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad}^T \Delta \mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - 1 \right) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{r_0} + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{\theta_0}) + (\lambda_1 - 1) (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_{z_0}) \quad (\text{II.2.35})$$

Les tenseurs ϵ et $\mathbf{grad}\Delta\mathbf{u}$ sont en fait identiques puisque $\mathbf{grad}\Delta\mathbf{u}$ est diagonal.

Notons ϵ la composante en $(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$ du tenseur ϵ :

$$\epsilon = \lambda_1 - 1 = \frac{\Delta u}{l_0} = \frac{\Delta u}{\lambda_0 L_0} = \frac{\epsilon_0}{\lambda_0}, \quad (\text{II.2.36})$$

où l_0 et L_0 sont respectivement les longueurs après et avant précharge du cylindre, λ_0 est l'extension imposée lors de la précharge et ϵ_0 est la petite déformation due aux oscillations rapportée à la configuration non déformée. Soulignons le fait que ϵ est exprimée par rapport à la configuration préchargée alors que ϵ_0 est exprimé par rapport à la configuration initiale. Dans le chapitre précédent, la relation extension/déplacement, permettant d'assimiler une zone de l'éprouvette à un cylindre parfait, a été établie (équation (II.1.48)). Elle permet de déterminer ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = 0,039 \Delta u. \quad (\text{II.2.37})$$

Toutes les données expérimentales d'oscillations en traction uniaxiale seront tracées en fonction de ϵ .

B) Oscillations en torsion pure

Considérons maintenant qu'un faible angle est appliqué sur la surface supérieure du cylindre préchargé, ce qui induit un angle $\Delta\alpha$ appliqué au point P . Le vecteur incrément de déplacement ainsi généré au point P , s'exprime, dans la configuration finale par la relation :

$$\Delta\mathbf{u}(P) = r_0 (\cos(\Delta\alpha) - 1) \mathbf{e}_r + r_0 \sin(\Delta\alpha) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{II.2.38})$$

Comme $\Delta\alpha$ est très petit, on ne considère que les termes de premier ordre :

$$\cos(\Delta\alpha) \cong 1, \quad \sin(\Delta\alpha) \cong \Delta\alpha. \quad (\text{II.2.39})$$

L'équation (II.2.38) se simplifie :

$$\Delta\mathbf{u}(M) = r_0 \Delta\alpha \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{II.2.40})$$

De façon analogue à la déformation en traction uniaxiale, la variation d'angle par unité de longueur peut être exprimée par rapport à la configuration préchargée, on la notera alors $\Delta\tau$, ou par rapport à la configuration non déformée, auquel cas elle sera notée $\Delta\tau_0$. Ces deux grandeurs sont calculées en fonction de l'angle imposé pendant les oscillations :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\alpha}{z_0} = \frac{\Delta\alpha}{\lambda_0 Z_0} = \frac{\Delta\tau_0}{\lambda_0}. \quad (\text{II.2.41})$$

Dans le chapitre précédent, la relation angle par unité de longueur/angle imposé, permettant d'assimiler une zone de l'éprouvette à un cylindre parfait, a été établie (équation (II.1.49)). Elle permet de déterminer $\Delta\tau_0$:

$$\Delta\tau_0 = 0,00057 \Delta\alpha, \quad (\text{II.2.42})$$

où $\Delta\alpha$ est exprimé en degrés et $\Delta\tau_0$ en rad.mm^{-1} . La grandeur $\Delta\tau$ est choisie, de sorte que toutes les données expérimentales d'oscillations en torsion pure puissent être tracées en fonction de celle-ci. L'expression du gradient du déplacement par rapport à la configuration préchargée est :

$$\mathbf{grad}\Delta\mathbf{u} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} = \Delta\tau z_0 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{r0} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{\theta0}) + r_0\Delta\tau (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{z0}), \quad (\text{II.2.43})$$

ce qui conduit au tenseur des petites déformations ϵ dans la configuration préchargée :

$$\epsilon = \frac{r_0\Delta\tau}{2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_{z0} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_{\theta0}). \quad (\text{II.2.44})$$

On retrouve l'expression d'un tenseur des petites déformations pour un chargement de cisaillement, mais qui dépend de la coordonnée radiale du point auquel il est exprimé.

Finalement, si des oscillations en traction/compression uniaxiale sont imposées, ϵ sera calculé, alors que pour les oscillations en torsion pure, il est choisi de considérer $\Delta\tau$ puisqu'il ne dépend pas du rayon.

La figure II.2.9 montre certaines des grandeurs introduites dans cette sous-section.

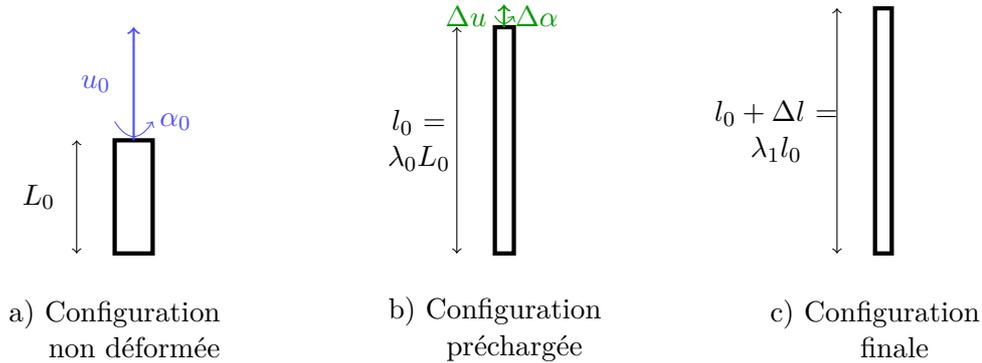


FIGURE II.2.9 : Quelques notations utilisées pour décrire la cinématique d'un cylindre soumis à des oscillations autour d'une précharge

2.2.2 Post-traitement des efforts et couples

Comme expliqué dans l'introduction, le calcul de contraintes à partir des efforts et couples n'est pas envisageable dans le cas d'oscillations superposées à une précharge multiaxiale. En fait, il l'est uniquement dans le cas où de la traction ou compression uniaxiale est appliquée lors de la précharge et lors des oscillations. Ce cas sera donc d'abord traité, avant de distinguer, dans les essais restants, ceux pour lesquels les oscillations sont en traction/compression uniaxiale, et ceux pour lesquels les oscillations sont en torsion pure.

A) Précharge et oscillations en traction/compression uniaxiale

Dans ce cas, les deux transformations sont homogènes. Il est donc aisé de calculer la contrainte à partir de l'effort mesuré. Partant de la relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T, \quad (\text{II.2.45})$$

où \mathbf{P} est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff I, et en la linéarisant :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{P}\Delta\mathbf{F}^T, \quad (\text{II.2.46})$$

on peut exprimer la variation de la contrainte de Cauchy en fonction de la variation d'effort. Pour cela, exprimons la variation du gradient de la transformation :

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta(\mathbf{I} + \mathbf{Grad}\mathbf{u}) = \mathbf{Grad}\Delta\mathbf{u}, \quad (\text{II.2.47})$$

où \mathbf{Grad} est le gradient par rapport à la configuration initiale. La règle de dérivation en chaîne permet d'exprimer ce gradient en fonction du gradient dans la configuration préchargée :

$$\mathbf{Grad}\Delta\mathbf{u} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{grad}\Delta\mathbf{u}\mathbf{F}_0, \quad (\text{II.2.48})$$

où \mathbf{X} est le vecteur position dans la configuration non déformée, et \mathbf{F}_0 est le tenseur gradient de la transformation de la précharge. Appliquons cette relation au cas d'une précharge en traction ou compression uniaxiale, à laquelle se superposent des oscillations en traction uniaxiale :

$$\Delta\mathbf{F} = -\frac{\epsilon}{2\sqrt{\lambda_0}} (e_{r0} \otimes e_R + e_{\theta 0} \otimes e_{\theta}) + \epsilon\lambda_0 (e_{z0} \otimes e_Z). \quad (\text{II.2.49})$$

Pour le cas étudié, une seule composante du tenseur des contraintes de Cauchy est non nulle, à savoir $\Delta\sigma_{zz}$. Ainsi, l'utilisation de l'équation (II.2.49) dans l'équation (II.2.46) permet de la déterminer :

$$\Delta\sigma_{zz} = \Delta P_{zz}\lambda_0 + P_{zz}\epsilon\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\pi A^2} (\Delta N + \epsilon N_0), \quad (\text{II.2.50})$$

où A est le rayon du cylindre non déformé, N_0 est l'effort mesuré lors de la précharge, et ΔN est la variation d'effort mesurée pendant les oscillations.

B) Précharge en torsion pure ou précharge multiaxiale, oscillations en traction/compression uniaxiale

Dans ce cas, les oscillations sont en traction uniaxiale. La relation déformation/déplacement est donc celle définie par les équations (II.2.36-II.2.37). Des variations d'efforts ΔN et de couple ΔM sont mesurées, et permettent de calculer respectivement une réponse en traction et en cisaillement. Pour la réponse en traction, la relation contrainte/effort déterminée par l'équation (II.2.50) est utilisée pour définir une contrainte normale équivalente :

$$\Delta\sigma_{eq} = \frac{\lambda_0}{\pi A^2} (\Delta N + \epsilon N_0). \quad (\text{II.2.51})$$

Dans ce cas, la courbe $\Delta\sigma_{eq}$ en fonction de ϵ servira de référence au post-traitement.

Pour la réponse en cisaillement, l'objectif est de déterminer un module de cisaillement équivalent, par analogie avec le cisaillement pur en petites déformations :

$$\sigma_{xy} = G\gamma, \quad (\text{II.2.52})$$

où σ_{xy} est la contrainte de cisaillement, G est le module de cisaillement, et $\gamma = 2\epsilon_{xy}$ est la mesure du glissement. Dans le cas d'un barreau cylindrique de rayon r sollicité en torsion uniforme en petites déformations, avec un angle par unité de longueur τ ,

$$\gamma = \tau r, \quad (\text{II.2.53})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{M}{I_g} r, \quad (\text{II.2.54})$$

$$(\text{II.2.55})$$

où M est le moment de torsion et I_g est le moment quadratique de torsion. Dans le cas du cylindre plein,

$$I_g = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (\text{II.2.56})$$

Finalement, on détermine le module de cisaillement G par la relation :

$$\frac{M}{I_g} = G\tau, \quad (\text{II.2.57})$$

soit la pente de la courbe (τ, T) , avec $T = M/I_g$. C'est cette grandeur T , dont l'unité est en $\text{N}\cdot\text{mm}^{-3}$ que nous allons calculer. Dans le cas d'oscillations en traction uniaxiale autour d'une précharge, l'angle α_0 appliqué sur la surface supérieure de l'éprouvette ne varie pas, mais l'angle par unité de longueur déformée total varie :

$$\tau_{tot} = \frac{\alpha_0}{\lambda_{tot}L_0} = \frac{\alpha_0}{\lambda_0L_0} (1 - \epsilon) = \frac{\tau_0}{\lambda_0} (1 - \epsilon), \quad (\text{II.2.58})$$

où τ_0 est l'angle par unité de longueur non déformée de la précharge. Cette relation permet de déterminer la variation d'angle par unité de longueur déformée lors des oscillations :

$$\Delta\tau = -\frac{\tau_0}{\lambda_0}\epsilon. \quad (\text{II.2.59})$$

Calculons maintenant la grandeur T :

$$T_{tot} = \frac{2M_{tot}}{\pi r^4} \quad (\text{II.2.60})$$

$$T_0 + \Delta T = \frac{2(M_0 + \Delta M)\lambda_0^2(1 + 2\epsilon)}{\pi A^4}, \quad (\text{II.2.61})$$

d'où l'on déduit

$$\Delta T = 2T_0\epsilon + 2\frac{\Delta M\lambda_0^2(1 + 2\epsilon)}{\pi A^4}. \quad (\text{II.2.62})$$

Dans ce cas, le post-traitement sera basé sur la courbe ΔT en fonction de $\Delta\tau$.

C) Toute précharge, oscillations en torsion pure

Dans ce cas là, pendant les oscillations, le déplacement axial de tout point du cylindre est nul. Il n’y a donc pas de ϵ , et donc pas de comportement en traction à étudier. Notons que malgré cela, une variation d’effort est observée lors des oscillations (la part de relaxation due à la précharge mise à part) due à l’effet Poynting. Le comportement en cisaillement sera étudié, en utilisant la définition de $\Delta\tau$ donnée par les équations (II.2.41-II.2.42), et celle de ΔT donnée par l’équation (II.2.62). Le tableau II.2.2 rappelle les différentes grandeurs étudiées pour chacun des essais, ainsi que les équations qui permettent de les obtenir en fonction des grandeurs imposées et mesurées, à savoir les efforts, couples, déplacements et angles.

Oscillations	Traction uniaxiale	Torsion pure
Précharge		
Traction uniaxiale	$\Delta\sigma_{zz}$ vs. ϵ	
Compression uniaxiale	Eqs. (II.2.37, II.2.36, II.2.50)	ΔT vs. $\Delta\tau$
traction-torsion	$\Delta\sigma_{eq}$ vs. ϵ , ΔT vs. $\Delta\tau$	Eqs. (II.2.42, II.2.41, II.2.62)
Torsion pure	Eqs. (II.2.37, II.2.36, II.2.59, II.2.62)	

TABLEAU II.2.2 : Grandeurs étudiées pour chaque essai

2.2.3 Quelles grandeurs choisir pour identifier une loi viscoélastique linéarisée pour des oscillations autour d’une grande précharge quasi-statique multiaxiale ?

Dans cette sous-section, les différents aspects du comportement dynamique du matériau sur lesquels notre étude s’est focalisée sont exposés. Alors que le comportement dynamique peut être caractérisé par plusieurs types d’essais tels que les essais de fluage et de relaxation, la plage de fréquence étudiée et le type de chargements considérés pour l’application industrielle nous ont conduit à choisir les essais d’oscillations imposées. Le lecteur est invité à se référer au livre de Ward (1983) pour des détails sur les différentes techniques d’études expérimentales de la viscoélasticité. Chaque phénomène sera formulé sous forme d’interrogation, et une brève description composée notamment de quelques observations rapportées dans la littérature sera proposée, avant d’exposer la méthode choisie pour caractériser ce phénomène, c’est-à-dire quelles sont les grandeurs à tracer pour l’étudier. À chaque fois, une courbe illustrant cette méthode sera présentée. Cependant, l’ensemble des résultats ne sera montré et discuté que dans le chapitre suivant, et sera traité dans le même ordre que dans cette sous-section. Il a été choisi de présenter les différents phénomènes du plus étudié dans la bibliographie au moins étudié.

A) Le comportement du matériau dépend-il de la fréquence et de l'amplitude des oscillations ?

La dépendance du comportement des élastomères à la fréquence et à l'amplitude sous chargement cyclique (sans précharge) a fait et fait encore l'objet de nombreuses études. On peut citer par exemple [Payne \(1962a,b\)](#), [Luo *et al.* \(2010\)](#), [Rendek et Lion \(2010\)](#) et [Höfer et Lion \(2009\)](#). Le cadre de ces études est présenté ici en se basant grandement sur le livre de [Ward \(1983\)](#). Considérons le cas où une petite déformation harmonique uniaxiale ϵ est imposée,

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t), \quad (\text{II.2.63})$$

où ϵ_0 est l'amplitude des oscillations, ω leur pulsation et t le temps. Pour de petites oscillations, la contrainte peut être approchée par :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (\text{II.2.64})$$

où σ_0 est l'amplitude de la contrainte, et ϕ est le déphasage par rapport au signal de déformation. La contrainte peut être développée sous la forme :

$$\sigma(t) = \epsilon_0 E' \sin(\omega t) + \epsilon_0 E'' \cos(\omega t), \quad (\text{II.2.65})$$

avec $E' = \cos \phi \sigma_0 / \epsilon_0$ et $E'' = \sin \phi \sigma_0 / \epsilon_0$. Une troisième grandeur est classiquement introduite lorsqu'une représentation complexe du problème est proposée, à savoir $E^* = e^{i\phi} \sigma_0 / \epsilon_0 = E' + iE''$. Les trois grandeurs sont homogènes à des raideurs. E^* est le module complexe, E' , sa partie réelle, intervient dans la partie de la contrainte en phase avec la déformation et est appelée module de conservation ou de stockage (*storage modulus* en anglais). La partie imaginaire E'' du module complexe intervient dans la partie de la contrainte qui est hors-phase avec la déformation, et est appelée module de perte (*loss modulus* en anglais). Beaucoup d'auteurs choisissent de calculer ces grandeurs à partir d'essais de DMA (Dynamic Mechanical Analysis), pour des sollicitations en traction uniaxiale ou en cisaillement simple (voir par exemple [Höfer et Lion \(2009\)](#)). Il peut être choisi d'étudier d'autres grandeurs liées à E' et E'' . Ainsi, E'' est directement liée à la dissipation d'énergie pendant un cycle ΔW :

$$\Delta W = \int \sigma d\epsilon = \omega \epsilon_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} (E' \sin(\omega s) \cos(\omega s) + E'' \cos^2(\omega s)) ds = \pi E'' \epsilon_0^2. \quad (\text{II.2.66})$$

La dissipation peut aussi être caractérisée par le rapport $\tan \phi = E''/E'$.

Concrètement, dans notre cas, des données expérimentales de déformations et de contraintes équivalentes temporelles sont disponibles. Il est alors choisi de calculer l'aire de la boucle contrainte équivalente/déformation, c'est-à-dire ΔW , puis d'utiliser la relation (II.2.66) pour accéder à E'' , et donc mesurer la dissipation. Soit t_{max} le temps pour lequel la déformation est maximale au cours d'un cycle : $\epsilon(t_{max}) = \epsilon_{max}$. Alors, la raideur dynamique est obtenue en calculant le rapport $\sigma(t_{max})/\epsilon_{max}$, ce qui correspond à E' . Les grandeurs ΔW et E' sont représentées sur la figure II.2.10. Pour post-traiter les données issues d'essais d'oscillations en torsion pure, la dissipation d'énergie sera calculée par l'aire de la boucle de la courbe ΔT en fonction de $\Delta \tau$. Ensuite, cette dissipation

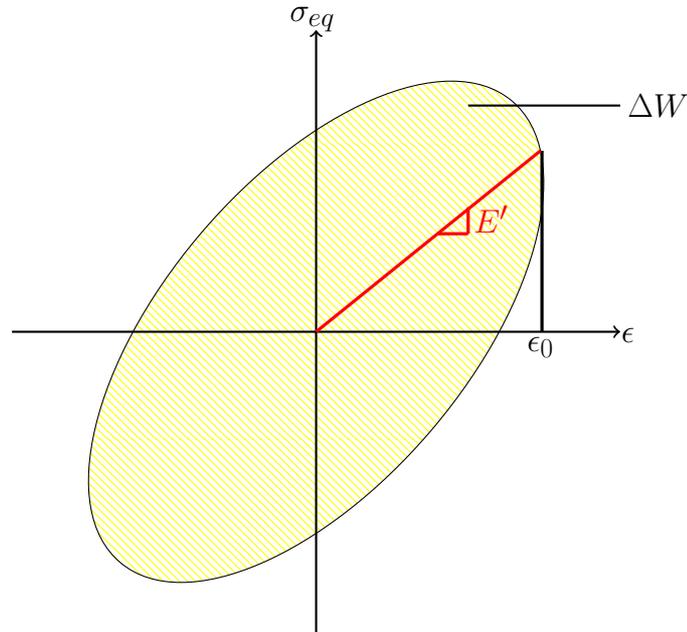


FIGURE II.2.10 : Représentation des grandeurs ΔW et E' calculée à partir des données expérimentales d'essais cycliques

sera divisée par $\pi\epsilon_{\theta z}^2$, où $\epsilon_{\theta z}$ est relié à $\Delta\tau$ par la relation II.2.44. Comme cette grandeur dépend de la position radiale du point considéré, nous choisissons de n'exploiter ces données qu'au rayon extérieur du cylindre. Ainsi, par la suite, pour toute référence à G'' et ϵ dans le cas de la torsion pure, il sera sous-entendu que ces grandeurs sont étudiées au rayon extérieur du cylindre. Dans notre cas, le post-traitement de E' et E'' se révèle assez complexe pour plusieurs raisons :

- Les données expérimentales sont bruitées car les variations d'efforts et surtout de couples mesurées sont très faibles par rapport aux efforts et couples mesurables par le capteur (la variation minimum d'effort traitée représente 0,01% du maximum d'effort mesurable par le capteur). Le bruit devient de plus en plus important lorsque la fréquence augmente.
- Le calcul de E' et E'' nécessite d'isoler chaque cycle d'essai. Alors que le numéro de cycle est renseigné dans le fichier de sortie à la fin de l'essai, le changement de numéro de cycle ne correspond pas exactement au début d'un nouveau cycle. De même, le temps de cycle n'est pas exactement synchronisé. Il faut alors synchroniser toutes les données d'entrée.
- La décroissance globale de l'effort et du couple après la précharge quasi-statique n'est pas négligeable et est retranché aux efforts et couple mesurés pendant les oscillations.

Pour chaque fréquence et chaque amplitude imposées, plusieurs cycles ont été réalisés. Afin de lisser les données expérimentales bruitées, E' et ΔW sont calculés pour plusieurs

cycles (le premier cycle est écarté car les données ne sont pas stabilisées), puis une moyenne est effectuée. À un couple de fréquence et d'amplitude correspondent donc une unique valeur de E' et une unique valeur de ΔW . Dans la suite, l'étude de l'évolution de E' puis celle de E'' sont décrites.

a) Évolution de E' Pour chaque cas de précharge, le même type de graphe que Höfer et Lion (2009) est tracé, à savoir des graphes en trois dimensions représentant l'évolution de E' en fonction de la fréquence et de l'amplitude. La figure II.2.11 montre ce graphe dans le cas d'une précharge quasi-statique à $\lambda = 0,67$ suivie d'oscillations en traction/compression uniaxiale. Sur cette figure, les mêmes tendances que celles obser-

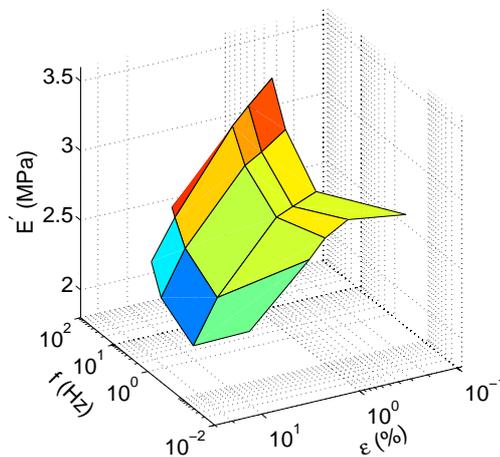


FIGURE II.2.11 : Évolution du module de conservation E' en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour des oscillations en traction/compression uniaxiale après une précharge en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$

vées par d'autres auteurs (par exemple Höfer et Lion (2009) et Rendek et Lion (2010)) sont retrouvées, à savoir que E' diminue lorsque l'amplitude augmente et lorsque la fréquence diminue.

b) Évolution de E'' Le calcul de E'' est beaucoup plus sensible au bruit des données expérimentales (les incertitudes seront présentées dans le chapitre suivant, avec les résultats), et le tracé d'un graphe en trois dimensions est moins pertinent. Il est choisi d'étudier l'évolution de la dissipation en fonction de l'amplitude, pour plusieurs valeurs de fréquence.

B) Le comportement du matériau dépend-il de la précharge ? Cas d'une précharge et d'oscillations en traction/compression uniaxiale

Alors que l'étude du comportement cyclique des élastomères non préchargés en fonction de la fréquence et de l'amplitude fait l'objet de nombreuses études, seules quelques unes concernent les élastomères préchargés. Dans cette catégorie, la plupart des auteurs traitent le cas d'une précharge et d'oscillations en traction et/ou compression uniaxiale. Ce type d'étude a notamment été mené par [Meinecke et Maksin \(1980\)](#), [Dutta et Tripathy \(1990\)](#), [Kim et Youn \(2001\)](#), [Cho et Youn \(2006\)](#), [Rendek et Lion \(2010\)](#), [Thorin *et al.* \(2012\)](#) et [Wollscheid et Lion \(2013\)](#). L'évolution de E' et E'' en fonction de l'extension imposée lors de la précharge est très différente selon les études, pour lesquels des matériaux de compositions différentes ont été utilisés. Lors de la campagne expérimentale en dynamique, quatre précharges uniaxiales à des extensions différentes ont été imposées. Dans le chapitre suivant, l'évolution de E' et E'' en fonction de l'extension de la précharge sera donc présentée, et comparée avec les observations des autres auteurs.

Il apparaît clairement dans la littérature que E' dépend de la précharge. De plus, compte tenu de la non-linéarité de la relation contrainte/déformation du matériau étudié en grandes déformations, la raideur statique dépend évidemment elle aussi de la précharge. Il peut être intéressant de comparer la raideur statique et la raideur dynamique, et leur dépendance à la précharge. En effet, il est logique que raideur statique et raideur dynamique soient liées, et on pourrait se demander si la dépendance de la raideur dynamique à la précharge n'est pas uniquement due à la dépendance de la raideur statique à la précharge. La figure II.2.12 montre l'évolution des deux raideurs en fonction de l'extension de précharge λ pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%. Sur cette figure, il apparaît clairement que les deux

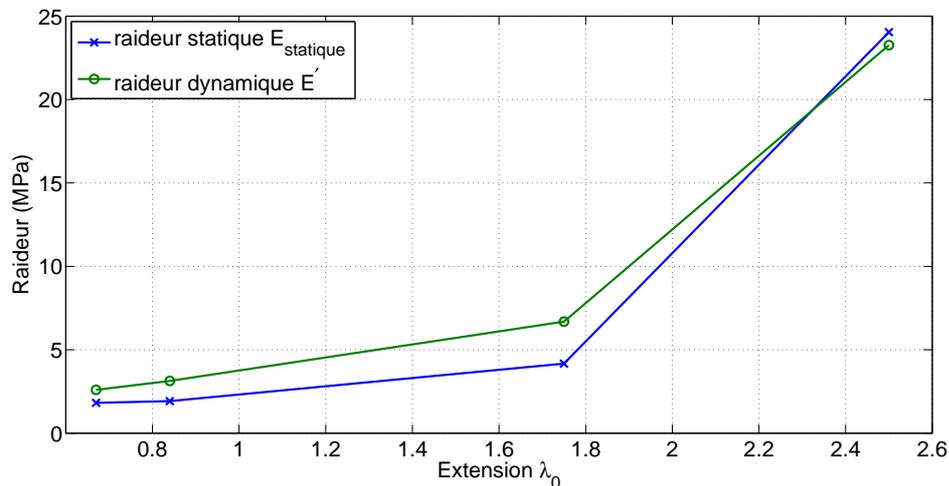


FIGURE II.2.12 : Évolution des raideurs statique et dynamique en fonction de l'extension de précharge λ , pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

raideurs suivent la même tendance. Alors que la comparaison de la dépendance de E' à la fréquence et à l'amplitude pour plusieurs extensions est plutôt difficile, il peut être intéressant de proposer un nouveau type de post-traitement, en normalisant la raideur dynamique par la raideur statique, ce qui permettra d'avoir le même ordre de grandeur pour les différentes précharges. Pour cela, nous introduisons la grandeur adimensionnée $E'/E_{statique}$, raideur dynamique / raideur statique. Pour calculer la raideur statique, la moyenne de la contrainte de Cauchy σ_{moy} entre la charge et la décharge sera calculée puisque malgré la faible vitesse de déformation imposée, les deux courbes ne sont pas superposées, puis la relation suivante sera appliquée :

$$E_{statique}(\lambda_0) = \frac{\sigma_{moy}(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \sigma_{moy}(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \lambda_0, \quad (\text{II.2.67})$$

où λ_0 est l'extension de la précharge, et $\Delta\lambda$ un petit incrément d'extension. Une fois la grandeur $E'/E_{statique}$ calculée, son évolution peut être étudiée en fonction de l'extension de la précharge. Ainsi, si $E'/E_{statique}$ est quasi-constante lorsque la précharge évolue, il pourra être conclu que c'est la contribution de la raideur statique qui est majoritaire dans la réponse du matériau dépendante de la précharge. Au contraire, l'évolution de $E'/E_{statique}$ avec la précharge montrera que le comportement dynamique est influencé par la précharge. Si tel est le cas, il sera intéressant d'étudier l'évolution de cette grandeur $E'/E_{statique}$ en fonction de la fréquence, et donc de déterminer si la dépendance à la précharge a une influence sur la dépendance à la fréquence. Pour résumer ce paragraphe, la stratégie proposée est la suivante :

1. Tracer E' et E'' en fonction de l'extension de précharge, et comparer leurs évolutions avec celles observées par d'autres auteurs ;
2. Calculer la grandeur $E'/E_{statique}$ pour normaliser la raideur et observer si elle évolue avec la précharge, auquel cas le comportement dynamique dépend effectivement de la précharge ;
3. Etudier le couplage entre ces la dépendance à la fréquence et la dépendance à la précharge.

C) Le comportement du matériau dépend-il de la précharge? Prise en compte de la multiaxialité

Peu de références existent pour ce type de chargement, parmi lesquelles on peut citer [Azoug et al. \(2013\)](#) qui ont réalisé des essais biaxiaux sur éprouvettes en croix, [Suphadon et al. \(2010\)](#) qui ont superposé des oscillations en cisaillement simple à une précharge en cisaillement pur et [Suphadon \(2010\)](#) qui a superposé des oscillations libres en torsion pure à une précharge en traction uniaxiale.

Dans notre étude, plusieurs précharges en traction-torsion combinées ont été imposées, ainsi que des oscillations en traction/compression uniaxiale et en torsion pure. Alors que dans le paragraphe précédent, l'étude du comportement dynamique par rapport à la précharge se résumait simplement à tracer E' , E'' et $E'/E_{statique}$ en fonction de l'extension de la précharge, dans le cas multiaxial, il est possible de calculer des modules de

cisaillement et de perte à l'aide des grandeurs équivalentes introduites précédemment, mais il faut choisir la grandeur en fonction de laquelle elles vont être tracées. Comme dans les chapitres précédents, la déformation de la précharge peut être décomposée en une amplitude, caractérisée par l'invariant K_2 , et en un mode de déformation caractérisé par K_3 . Ces deux grandeurs peuvent donc servir de référence pour étudier l'évolution du comportement dynamique du matériau en fonction d'une précharge multiaxiale.

Considérons d'abord le comportement dynamique en traction, c'est-à-dire pour des oscillations en traction/compression uniaxiale.

a) Comportement dynamique en traction La figure II.2.13 montre l'évolution de $E'/E_{statique}$ en fonction de K_2 pour toutes les précharges considérées suivies d'oscillations en traction/compression uniaxiale, à $f = 0,1$ Hz et une amplitude d'oscillation $\epsilon = 0,4\%$. Cette figure est difficile à interpréter puisqu'il n'y a pas de franche tendance

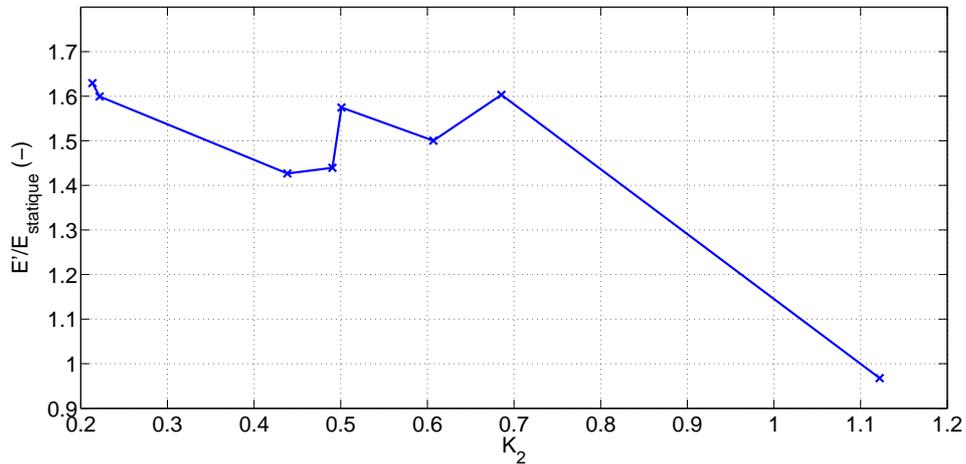


FIGURE II.2.13 : Évolution du rapport raideur dynamique/raideur statique en fonction de l'amplitude de précharge K_2 , pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

entre l'évolution de $E'/E_{statique}$ et de K_2 , ce qui peut être dû d'une part au bruit de mesure (peu probable puisque le même type de résultat est trouvé en considérant un seul cycle ou une moyenne sur plusieurs cycles), d'autre part au couplage entre l'amplitude de déformation et le mode de déformation de la précharge. On peut néanmoins observer que toutes les valeurs de $E'/E_{statique}$ se situent entre 1,43 et 1,63, sauf une qui est nettement plus faible et qui correspond à l'amplitude la plus élevée. Étant donné que $E'/E_{statique}$ est une grandeur rapportée à la raideur statique, il peut être intéressant d'observer si $E'/E_{statique}$ dépend encore de la raideur statique, ou si la division par $E_{statique}$ a permis de s'en affranchir, ce qui signifierait que la raideur dynamique varie linéairement avec la raideur statique. La figure II.2.14 montre ainsi l'évolution de $E'/E_{statique}$ par rapport à $E_{statique}$, toujours pour des oscillations de traction/compression uniaxiale à

une fréquence de 0,1 Hz et une amplitude à $\epsilon = 0,4\%$. Cette figure montre qu'à part

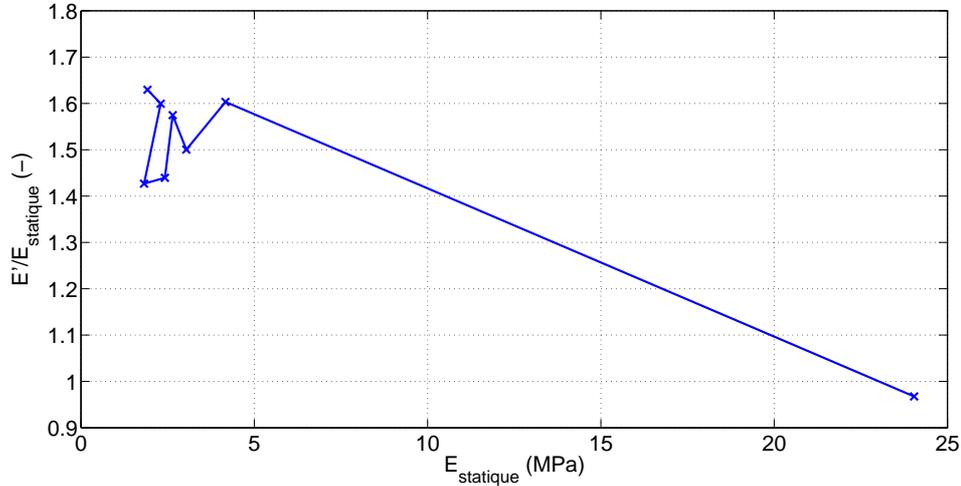


FIGURE II.2.14 : Évolution du rapport raideur dynamique/raideur statique en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

le cas du chargement maximal en traction uniaxiale, toutes les raideurs statiques sont proches, ce qui entraîne que toutes les valeurs de E'/E_{statique} sont proches. Face à cette tendance, l'idée de diviser E'/E_{statique} par la raideur statique E_{statique} vient. L'évolution de E'/E_{statique}^2 en fonction de E_{statique} est tracée sur la figure II.2.15. Sur cette figure,

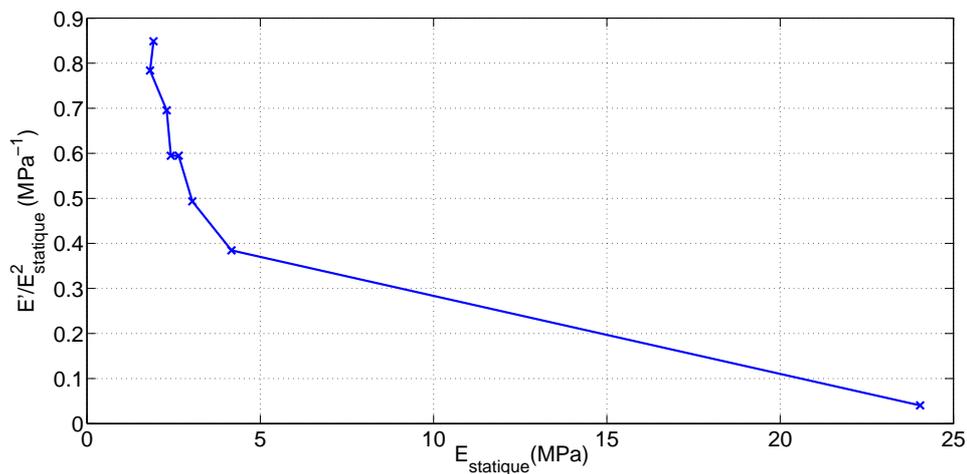


FIGURE II.2.15 : Évolution du rapport raideur dynamique/(raideur statique)² en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

une tendance nette apparaît : le rapport $E'/E_{statique}^2$ décroît lorsque $E_{statique}$ augmente. On notera que des points intermédiaires entre les raideurs statiques 4 et 24 MPa seraient utiles pour confirmer cette courbe, ce qui peut être réalisé par exemple avec une précharge en traction uniaxiale avec une extension comprise entre 1,8 et 2,4. Le même graphe est tracé avec des échelles logarithmique sur la figure II.2.16. Les points forment

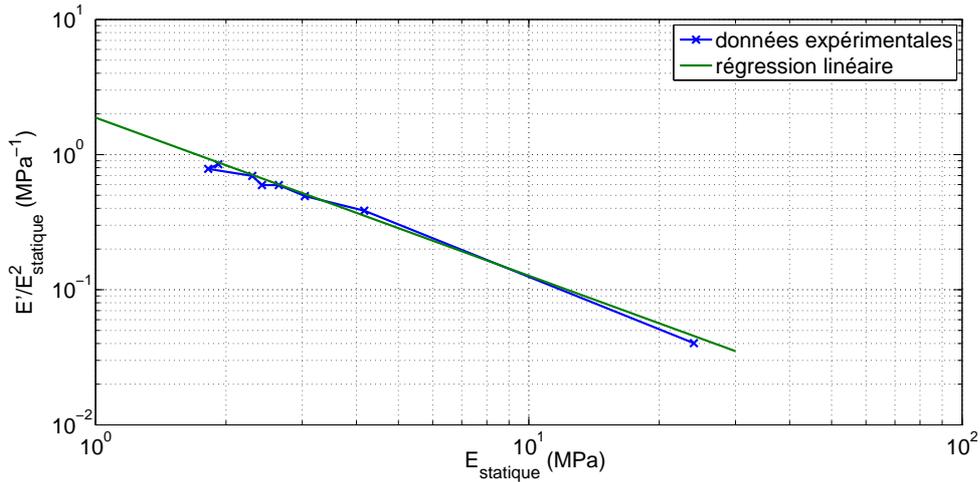


FIGURE II.2.16 : Évolution du rapport raideur dynamique/(raideur statique)² en fonction de la raideur statique en échelle logarithmique et régression linéaire, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

quasiment une droite, dont les coefficients sont trouvés grâce à une régression linéaire :

$$E' = \alpha E_{statique}^{\beta}, \text{ où } \alpha = 0,59 \text{ et } \beta = 0,83, \quad (\text{II.2.68})$$

β étant sans dimension et α s'exprimant en $\text{MPa}^{1-\beta}$. Dans le chapitre suivant, ce type de graphe sera ainsi tracé pour plusieurs fréquences. Il sera alors observé si des droites sont trouvées à chaque fois, et si dans ce cas les paramètres α et β évoluent avec la fréquence. Ce type de représentation est intéressante, puisqu'elle permet de relier simplement la raideur dynamique à la raideur statique. Cependant, on pourrait y opposer le fait que si la courbe $\ln(E'/E_{statique}^2)$ en fonction de $\ln(E_{statique})$ est linéaire, alors la courbe $\ln(E')$ en fonction de $\ln(E_{statique})$ devrait l'être également. La figure II.2.17 montre cette courbe. La courbe se rapproche également d'une droite, mais les points sont légèrement plus dispersés. Enfin, il peut être intéressant de comparer la courbe expérimentale de E' en fonction de $E_{statique}$ et la courbe de E' calculé à partir de l'équation (II.2.68) en fonction de $E_{statique}$, afin de s'assurer que la combinaison de la représentation logarithmique et de la division par $E_{statique}^2$ n'induit pas une perte d'informations sur la relation entre modules dynamique et statique. C'est ce que montre la figure II.2.18. Des points intermédiaires sont là aussi nécessaires pour confirmer la tendance, mais en première approximation, la relation déterminée par l'équation (II.2.68) permet d'approcher

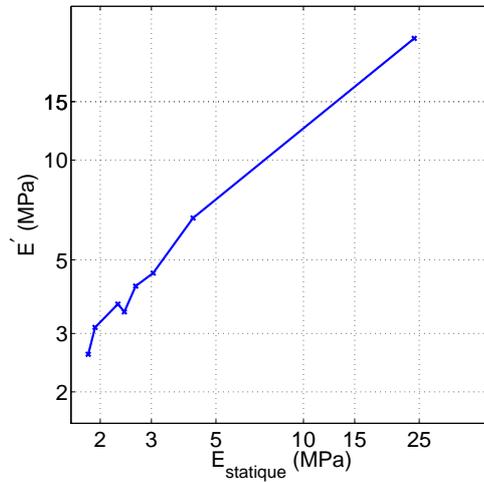


FIGURE II.2.17 : Évolution du rapport raideur dynamique en fonction de la raideur statique en échelle logarithmique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

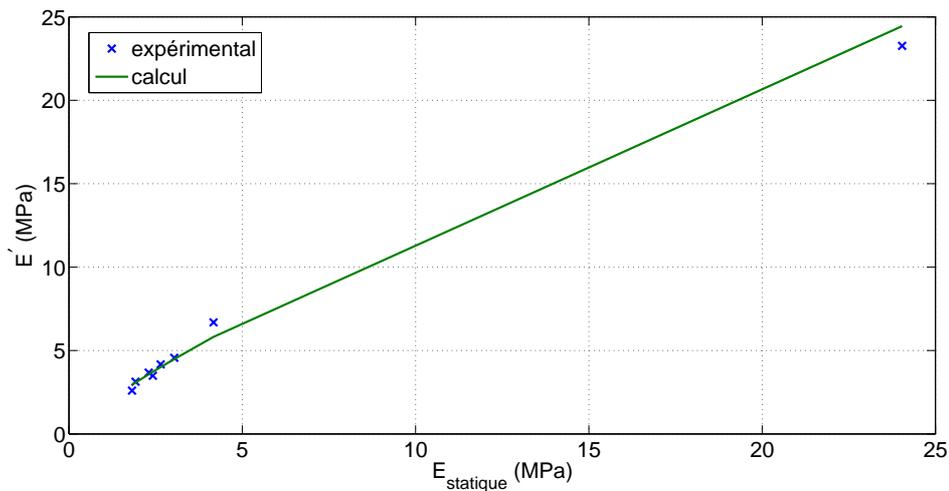


FIGURE II.2.18 : Évolution du module de conservation en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale à 0,1 Hz, d'amplitude 0,4%

correctement la relation module de conservation en fonction du module statique (l'écart relatif maximal est ici de 13,5 %). Le post-traitement de cette grandeur $E'/E_{statique}^2$ permet donc d'étudier simplement la relation entre la raideur dynamique et la raideur statique, et donc, l'influence de la précharge sur le comportement dynamique. L'atout principal de ce post-traitement est qu'il permet de prendre en compte tous les cas de précharge, malgré leur multiaxialité. Ainsi, il est finalement choisi de ne pas présenter

l'évolution de $E'/E_{statique}$ en fonction de l'extension dans le cas d'une précharge en traction ou compression uniaxiale, mais d'intégrer ces données en traçant $E'/E_{statique}^2$ en fonction de $E_{statique}$ pour toutes les précharges, traction et compression uniaxiales comprises. De plus, il peut être intéressant d'observer l'évolution de $E''/E_{statique}^2$ en fonction de $E_{statique}$.

Enfin, la démarche qui vient d'être exposée pour le comportement dynamique en traction sera appliquée de la même manière au comportement dynamique en cisaillement, c'est-à-dire pour toutes les précharges avec des oscillations en torsion pure. G' peut alors être calculé à partir des courbes T en fonction de $\Delta\tau$.

2.2.4 Bilan

Dans cette section, la méthode de post-traitement des essais cycliques pour des oscillations en traction/compression uniaxiale superposées à une précharge en traction ou compression uniaxiale, en torsion pure ou un traction-torsion combinées a été présentée. D'abord, la déformation des oscillations sera caractérisée par ϵ pour des oscillations en traction-torsion uniaxiale et par $\Delta\tau$ pour des oscillations en torsion pure. Ensuite, des grandeurs équivalentes aux contraintes ont été introduites, $\Delta\sigma_{eq}$ pour les oscillations en traction, ΔT pour les oscillations en torsion, l'hétérogénéité de la transformation ne permettant pas de calculer des contraintes. Il s'agit de rapporter les efforts et couples à la géométrie globale de l'éprouvette.

Enfin, une méthode a été proposée pour caractériser le comportement dynamique du matériau préchargé à partir de ces quatre grandeurs. En se basant sur l'étude classique du comportement dynamique sans précharge, il est d'abord proposé de calculer des valeurs de E' , E'' , G' , G'' , de les comparer avec les données existantes dans la littérature (principalement pour des oscillations et une précharge en traction/compression uniaxiale). Ensuite, un post-traitement plus original a été exposé, dans lequel les raideurs dynamiques sont normalisées par les raideurs statiques. De même qu'il est difficile de relier la raideur statique à une mesure de déformation dans le cas multiaxial, il est assez difficile de dégager des tendances à partir des courbes de raideur normalisée en fonction de l'amplitude ou du mode de déformation. L'étude de l'évolution du comportement de la raideur normalisée en fonction de la raideur statique semble plus prometteuse.

Conclusion

Dans ce chapitre, des méthodes de post-traitement adaptées aux essais de traction-torsion ont été présentées. Dans la première section, le cas du comportement quasi-statique a été étudié, et les trois méthodes consistant à se baser sur les courbes d'effort et couple, de contraintes vraies ou de dérivées de l'énergie de déformation par rapport à plusieurs grandeurs mécaniques ont été comparées. Il a été notamment montré que les extensions principales sont les plus adaptées pour le calcul des dérivées de l'énergie de déformation, et qu'il est possible de tracer des contraintes de Cauchy expérimentales au rayon extérieur du cylindre dans le cas d'une pré-extension suivie par de la torsion. Dans

la seconde section, le post-traitement de données d'essais d'oscillations dynamiques en traction/compression uniaxiale ou en torsion pure superposées à une précharge quasi-statique multiaxiale a été étudié. Comme il est très complexe de calculer des contraintes dans ce cas, des grandeurs équivalentes permettant d'étudier le comportement dynamique global en traction et en cisaillement ont été introduites. Ensuite, la démarche a été de calculer des grandeurs classiques pour pouvoir les comparer avec les données déjà existantes et présentées par d'autres auteurs, avant de proposer une nouvelle approche qui consiste à comparer raideur dynamique et raideur statique.

Chapitre 3

Résultats des essais de traction-torsion

Sommaire

3.1 Description de la campagne d'essais	110
3.1.1 Accommodation	110
3.1.2 Essais quasi-statiques	111
3.1.3 Essais cycliques	113
3.1.4 Bilan	118
3.2 Essais quasi-statiques	119
3.2.1 Base de données et répétabilité	119
3.2.2 Observations classiques sur les courbes de traction-torsion quasi-statique	120
3.2.3 Influence du chemin suivi	125
3.2.4 Contraintes expérimentales	128
3.2.5 Dérivées de l'énergie de déformation expérimentales	129
3.3 Essais cycliques autour d'une précharge	133
3.3.1 Base de données et incertitudes	133
3.3.2 Comportement dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude	135
3.3.3 Comportement dynamique en fonction de la précharge	141

Introduction

Après avoir mis en place les essais via la conception d'une éprouvette dédiée à la traction-torsion dans le chapitre 1 de cette partie et avoir développé des méthodes de post-traitement de ces essais dans le chapitre 2, les résultats sont présentés dans le présent chapitre. Pour cela, les procédures d'essais vont d'abord être définies en détail. Ensuite, les résultats concernant la campagne d'essais quasi-statiques seront exposés et discutés, en commençant par les résultats les plus classiques, et en terminant par le tracé

de courbes de contraintes et dérivées de l'énergie de déformation au rayon extérieur du cylindre. Enfin, les résultats obtenus lors de la campagne d'essais cycliques autour d'une précharge seront présentés, en suivant la démarche exposée dans le chapitre précédent. Ainsi, des modules de conservation et de perte seront d'abord tracés en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour les différents types de précharge, et leur évolution sera comparée avec les observations présentées par d'autres auteurs. Enfin, l'influence de la précharge sur ces modules sera étudiée, en privilégiant leur comparaison avec la raideur statique.

3.1 Description de la campagne d'essais

Toute la campagne d'essais a été effectuée sur des éprouvettes dont la géométrie a été présentée dans le chapitre 1 de cette partie, sur la machine de traction-torsion Instron E10000 également présentée dans ce chapitre.

3.1.1 Accommodation

Avant tout essai, des cycles de traction-torsion ont été réalisés jusqu'au chargement maximal entre tous les essais. Cette procédure est mise en place afin de s'affranchir de l'effet Mullins, qui ne sera pas pris en compte dans la modélisation. L'effet Mullins est un phénomène d'adoucissement cyclique dépendant de la déformation maximale subie par le matériau, mis en évidence par [Bouasse et Carrière \(1903\)](#) et largement étudié par [Mullins \(1948\)](#). Pour plus de détails sur l'effet Mullins, le lecteur pourra se référer à [Chagnon \(2003\)](#) et [Diani *et al.* \(2009\)](#). Notons simplement ici que l'effet Mullins se manifeste par une perte de raideur au cours des premiers cycles. L'adoucissement est le plus marqué entre les deux premiers cycles, et la courbe contrainte-déformation se stabilise après un certain nombre de cycles, nombre qui varie en fonction du matériau concerné. Enfin, l'adoucissement apparaît pour des déformations inférieures ou égales à la déformation maximale atteinte lors du premier cycle. Nous choisissons d'effectuer 5 cycles de charge/décharge en traction-torsion combinées jusqu'à l'extension et l'angle par unité de longueur maximaux, à savoir $\lambda = 2,5$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, ce qui correspond à un déplacement maximum $D = 38,5 \text{ mm}$ et un angle $\alpha = 158^\circ$. Les déplacements et angles sont appliqués simultanément sous forme de rampes à une vitesse $\dot{\lambda} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. La figure [II.3.1](#) montre l'évolution de l'effort en fonction du déplacement et du couple en fonction de l'angle pendant les 5 cycles d'accommodation. Sur cette figure, il est vérifié que l'adoucissement est le plus fort entre le premier et le deuxième cycle, et que la réponse est stable après 5 cycles. Un dernier point est à noter à propos de l'effet Mullins : il a été observé que celui-ci est presque entièrement réversible à long terme : [Chagnon \(2003\)](#) montre qu'un recouvrement d'environ 90 % est atteint en 150 jours. Pour être certain de pouvoir négliger ce recouvrement, l'accommodation sera répétée chaque semaine. Après l'accommodation, l'éprouvette est laissée au repos pendant une heure, temps suffisant pour que le matériau soit relaxé.

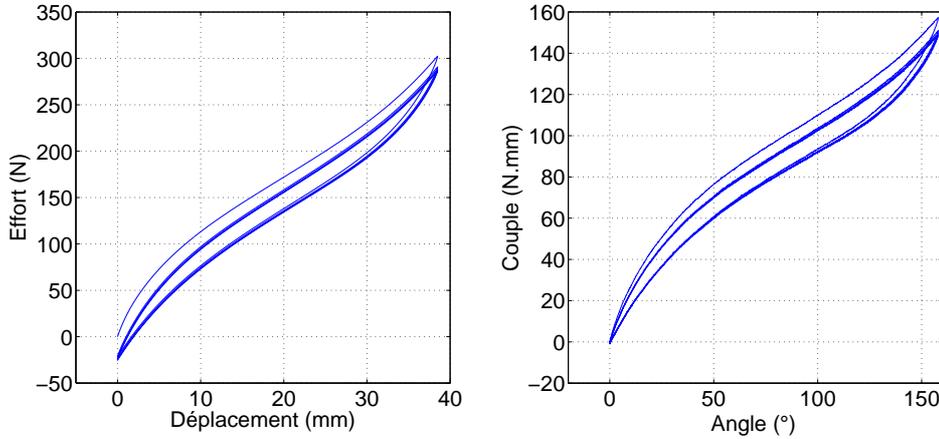


FIGURE II.3.1 : Effort en fonction du déplacement et couple en fonction de l'angle pendant la phase d'accommodation

3.1.2 Essais quasi-statiques

A) Cartographie des points de chargement

Afin de s'assurer de la répétabilité des essais, chaque essai est réalisé trois fois, sur trois éprouvettes différentes, avec une rampe de charge suivie immédiatement par une rampe de décharge. Pour décider des chargements en déplacement et angle qui seront appliqués, il a été choisi de placer des points espacés régulièrement dans le repère (τ, λ) . Pour cela, il faut d'abord déterminer les chargements maximaux. L'extension et l'angle par unité de longueur maximaux sont en fait déjà fixés respectivement à $\lambda = 2,5$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$ grâce à l'étude menée dans le chapitre 1 de cette partie. Il reste à déterminer l'extension minimale à atteindre en compression. Pour cela, un essai de compression uniaxiale a été réalisé jusqu'au point de chargement où l'effet tonneau, visible par un bombement de la surface latérale du cylindre, n'est plus négligeable (la transformation n'est alors plus homogène). L'extension minimale est alors fixée à $\lambda = 0,67$. Les quatorze couples extension/angle par unité de longueur étudiés sont représentés sur la figure II.3.2. Tous les points de chargements sont réalisés en traction-torsion simultanées. Dans le cadre des essais quasi-statiques, on pourrait se demander si le chemin suivi a une influence sur le résultat, c'est-à-dire trouve-t-on les mêmes efforts et couples maximaux en imposant un chargement simultané, en imposant d'abord de la traction puis de la torsion et en imposant d'abord de la torsion puis de la traction? Pour répondre à cette question, cinq des points de chargement ont été réalisés des trois manières. Ces cinq points sont représentés par des croix sur la figure II.3.2. Dans la suite, les essais durant lesquels de la traction a d'abord été imposée seront référencés sous le nom de « chemin bas », ceux pour lesquels de la torsion a d'abord été imposée seront nommés « chemin haut », alors que les essais simultanés seront nommés « chemin direct ». Ce ré-

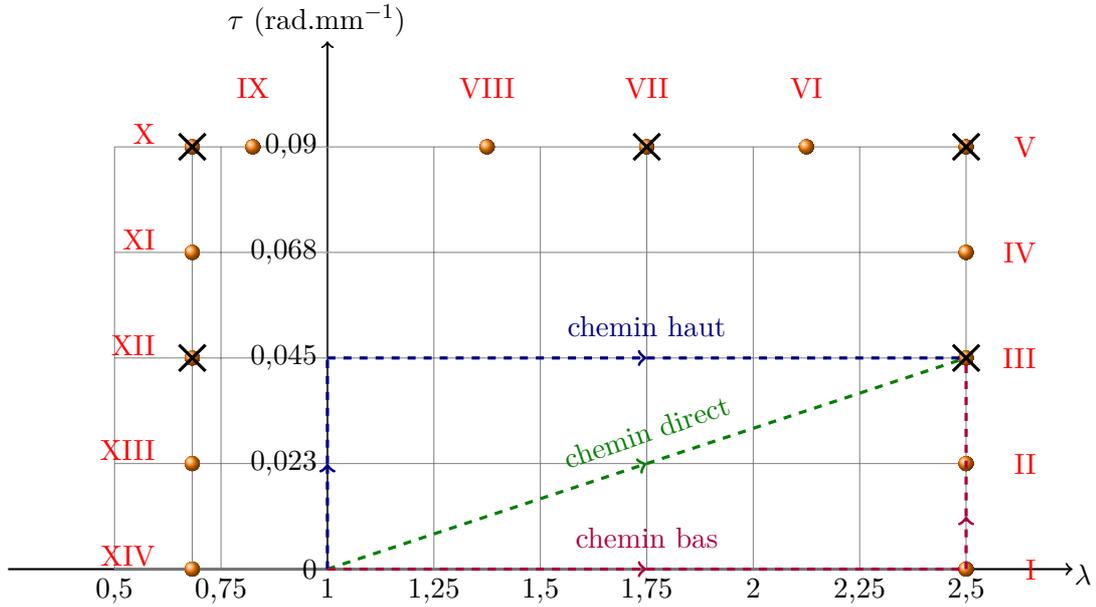


FIGURE II.3.2 : Cartographie des points de chargement en termes d'extension et d'angle par unité de longueur, campagne d'essais quasi-statiques

sultat est notamment utile dans le contexte du post-traitement présenté dans le chapitre précédent. En effet, il a été montré qu'on ne pouvait calculer des contraintes expérimentales au rayon extérieur du cylindre que dans le cas d'une pré-extension suivie par de la torsion, c'est-à-dire en suivant le chemin bas. Si les mêmes résultats sont obtenus indépendamment du chemin suivi, il sera possible d'étendre les résultats en contraintes déterminés à l'aide des essais en chemin bas aux essais simultanés.

B) Vitesse de déformation

L'objectif est d'imposer une vitesse de déformation lente $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Pour déterminer la durée de la rampe en déplacement et/ou en angle, on distingue la déformation en traction de la déformation en torsion. Dans les deux cas, on utilise les relations déplacement/extension et angle/angle par unité de longueur déterminées dans le chapitre 1 de cette partie pour déterminer la vitesse de déplacement \dot{D} et d'angle $\dot{\alpha}$:

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{0,039} = 0,026 \text{ s}^{-1}, \quad (\text{II.3.1})$$

$$\dot{\alpha} = \frac{2\dot{\epsilon}}{0,0326R}. \quad (\text{II.3.2})$$

La déformation en torsion dépendant du rayon nous choisissons de la calculer au rayon extérieur non déformé du cylindre, soit $R = 7$:

$$\dot{\alpha} = 0,0088 \text{ rad.s}^{-1}. \quad (\text{II.3.3})$$

À partir des équations (II.3.1) et (II.3.3), les durées de rampe en traction t_D et en torsion t_α sont déterminées en fonction du déplacement et de l'angle maximums, respectivement D_{max} et α_{max} à atteindre :

$$t_D = 38,46 D_{max}, t_\alpha = 113,64 \alpha_{max}. \quad (\text{II.3.4})$$

Par exemple, pour un essai en traction uniaxiale jusqu'à une extension $\lambda = 2,5$ correspondant à un déplacement $D = 38,5$ mm, la rampe de charge devra durer, en arrondissant, 24 min 30 s. Lorsqu'un essai simultané est réalisé, les durées de rampe en traction et en torsion sont calculées, et la plus élevée des deux est retenue, ce qui permet d'adopter la vitesse la plus lente, et donc de se rapprocher au mieux d'un chargement statique. Le tableau II.3.1 reprend chacun des essais simultanés et indique son extension, son angle par unité de longueur, les déplacements et angles correspondant ainsi que la durée de la rampe de charge.

point	λ	τ (rad.mm ⁻¹)	D(mm)	α (°)	durée de la rampe (min)
I	2,5	0	38,5	0	24,5
II	2,5	0,0225	38,5	39,5	24,5
III	2,5	0,045	38,5	79	24,5
IV	2,5	0,067	38,5	118	24,5
V	2,5	0,09	38,5	158	24,5
VI	2,125	0,09	28,8	158	18,5
VII	1,75	0,09	19,25	158	12,25
VIII	1,375	0,09	9,6	158	6,15
IX	0,84	0,09	-4,25	158	5,3
X	0,67	0,09	-8,5	158	5,5
XI	0,67	0,067	-8,5	118	5,5
XII	0,67	0,045	-8,5	79	5,5
XIII	0,67	0,0225	-8,5	39,5	5,5
XIV	0,67	0	-8,5	0	5,5

TABLEAU II.3.1 : Extensions, angles par unités de longueur, déplacement, angle et durée de rampe de charge pour les essais quasi-statiques simultanés

Tous les paramètres de la campagne d'essais quasi-statiques sont fixés, la campagne d'essais cycliques est maintenant détaillée.

3.1.3 Essais cycliques

Comme il a été expliqué dans le chapitre précédent, un type d'essais particulier a été réalisé pour caractériser le comportement dynamique du matériau sous certains chargements typiques subis par la pièce de suspension moteur. Ces essais consistent en l'application d'une précharge quasi-statique multiaxiale en grandes déformations, suivie de petites oscillations dynamiques autour de cette précharge. Dans cette sous-section,

les conditions d'application de la précharge sont d'abord exposées, avant de détailler les caractéristiques des oscillations.

A) Les précharges

Au total, huit précharges ont été appliquées. Toutes les précharges en traction-torsion combinées ont été réalisées en chemin direct. La figure II.3.3 reprend le formalisme de la figure II.3.2 et montre les différents points de chargement atteints lors des précharges pour la première étape des essais cycliques.

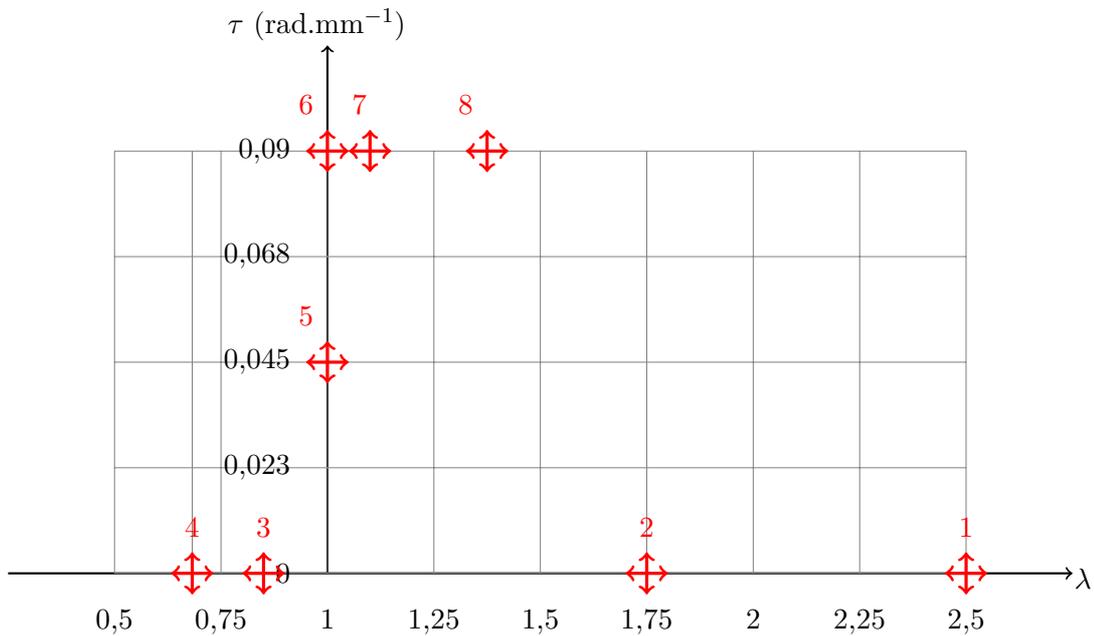


FIGURE II.3.3 : Cartographie des points de chargement de précharge en termes d'extension et d'angle par unité de longueur, campagne d'essais cycliques

Quatre précharges sont réalisées en traction ou compression uniaxiale, deux précharges en torsion pure et deux précharges en traction-torsion combinées. On notera que les extensions pour les deux précharges multiaxiales sont plutôt faibles. Ce choix est basé sur une volonté d'imposer une multiaxialité importante. Afin de développer cet aspect, K_3 , qui est une mesure de la multiaxialité, est tracé en fonction de λ et τ dans les intervalles considérés durant les essais sur la figure II.3.4. Sur ce graphe, il apparaît qu'à $\tau = 0$ (premier plan), K_3 ne peut prendre que deux valeurs, à savoir -1 et 1, ce qui avait déjà été souligné puisqu'il s'agit alors respectivement de compression uniaxiale et de traction uniaxiale. À $\lambda = 1$, $K_3 = 0$, et le matériau est sollicité en cisaillement pur. L'objectif, avec les précharges en traction-torsion combinées, est d'atteindre une multiaxialité importante, et donc de s'éloigner de ces valeurs de K_3 à -1, 1, et 0. Pour cela, il est plus simple de fixer τ à $0,09$ rad.mm⁻¹. En effet, la figure II.3.4 montre que plus

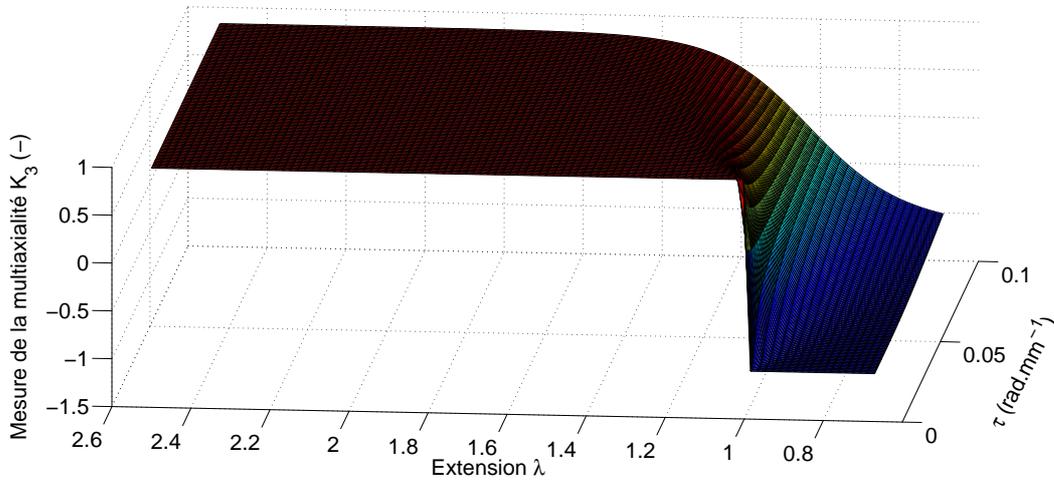


FIGURE II.3.4 : Évolution de K_3 en fonction de l'extension λ et de l'angle par unité de longueur τ , calcul par la solution analytique du cylindre parfait

l'angle par unité de longueur est important, plus les valeurs intermédiaires de K_3 sont accessibles. Il ne reste plus qu'à fixer l'extension. Il pourrait être envisagé d'adopter des valeurs de λ telles que K_3 se situe autour de 0,5 (pour obtenir cette valeur, $\lambda = 1,13$ est requis). Cependant, la multiaxialité n'est pas le seul critère qui entre en jeu ici. En effet, nous souhaitons également atteindre des amplitudes de déformation importantes lors de la précharge, c'est-à-dire des valeurs de K_2 élevées. La figure II.3.5 montre l'évolution des valeurs de K_2 en fonction de λ et τ . Sur cette figure, considérons l'évolution de K_2

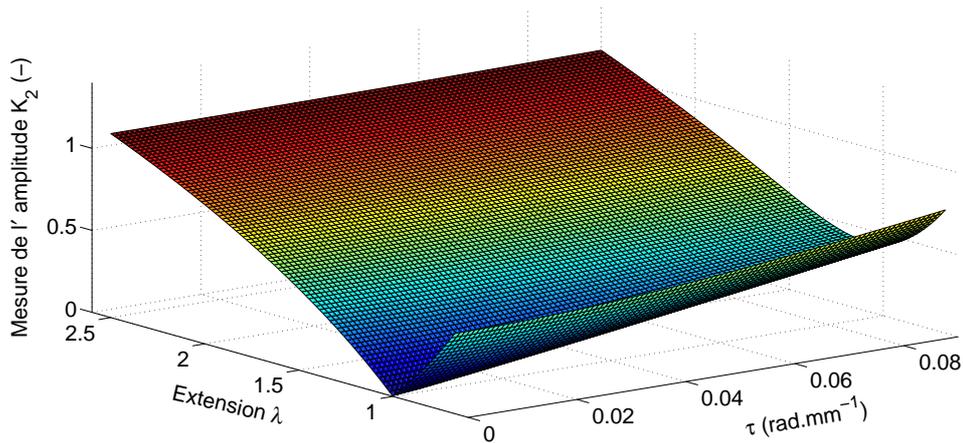


FIGURE II.3.5 : Évolution de K_2 en fonction de l'extension λ et de l'angle par unité de longueur τ , calcul par la solution analytique du cylindre parfait

pour $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$ et $\lambda > 1$. Plus λ est élevé, plus l'amplitude K_2 est élevée. Il faut donc trouver un compromis entre une déformation multiaxiale qui requiert une extension plutôt proche de 1 et une déformation d'amplitude élevée qui requiert une grande extension.

Il est alors décidé de considérer deux précharges en traction-torsion combinées :

- Une précharge qui privilégie une amplitude plutôt élevée, avec une extension $\lambda = 1,375$ qui résulte en une valeur de $K_2=0,52$ et de $K_3=0,91$;
- Une précharge qui privilégie la multiaxialité, avec une extension $\lambda = 1,187$ qui résulte en une valeur de $K_2=0,44$ et de $K_3=0,66$;

Les caractéristiques des huit précharges sont précisées dans le tableau II.3.2. Les mêmes règles de détermination de la vitesse de déformation que pour la campagne d'essais quasi-statiques sont employées.

point	λ	$\tau(\text{rad.mm}^{-1})$	D(mm)	α (°)	durée de la rampe (min)
1	2,5	0	38,5	0	24,5
2	1,75	0	19,25	0	12,25
3	0,84	0	-4,25	0	2,25
4	0,67	0	-8,5	0	5,5
5	1	0,045	0	79	2,65
6	1	0,09	0	158	5,3
7	1,187	0,09	4,8	158	5,3
8	1,375	0,09	9,6	158	6,15

TABLEAU II.3.2 : Extensions, angles par unités de longueur, déplacement, angle et durée de rampe de charge pour les précharges d'essais cycliques

Les huit précharges sont fixées, il reste à décider des oscillations à imposer.

B) Les oscillations

Tous les essais sont réalisés à fréquence fixe. Autour de chacune des précharges, des oscillations en traction/compression uniaxiale et en torsion pure sont imposées lors de deux essais distincts. Pour quatre précharges (points 1, 4, 6 et 8 du tableau II.3.2) les essais sont réalisés à 0,1 ; 1 ; 10 ; 20 et 30 Hz, alors que pour les quatre autres, seules les fréquences à 0,1 ; 1 et 20 Hz ont été considérées par manque de temps. Enfin, pour chaque essai à fréquence et précharge fixes, plusieurs amplitudes d'oscillations sont imposées de la plus faible à la plus élevée, et pour chaque amplitude, dix cycles sont réalisés. La figure II.3.6 montre le déplacement imposé lors d'oscillations en traction/compression uniaxiale autour de la précharge 1 (traction uniaxiale) à une fréquence de 10 Hz. Le nombre d'amplitudes imposées et leurs valeurs dépendent de la fréquence considérée, puisque plus la fréquence est élevée, plus l'amplitude maximale atteignable par la machine de traction-torsion est faible. Deux difficultés expérimentales ont été rencontrées pour les essais cycliques :

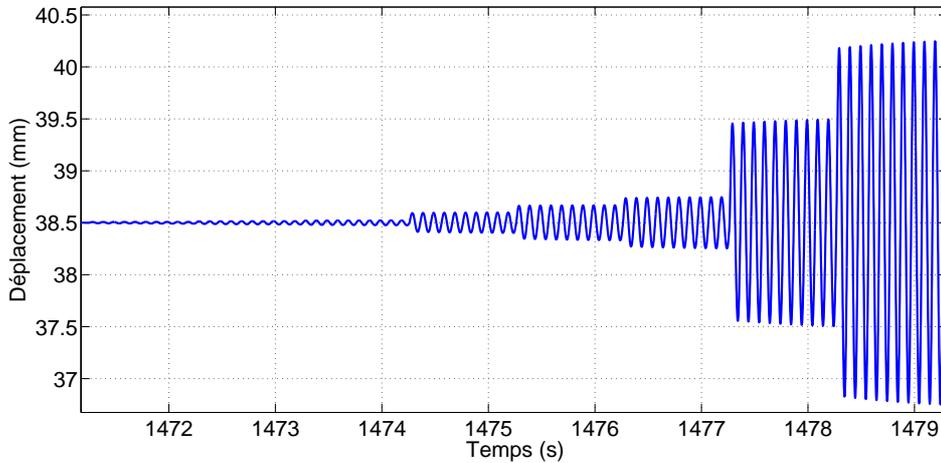


FIGURE II.3.6 : Évolution du déplacement en fonction du temps lors d'un essai cyclique à $f = 10$ Hz autour d'une précharge en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$

- À partir de 10 Hz, la machine peine à atteindre la consigne en déplacement ou angle en dix cycles. Ce phénomène est d'autant plus marqué lorsque la fréquence augmente et lorsqu'il s'agit d'imposer un angle. Pour pallier ce problème, il faut passer en mode contrôle d'amplitude évolué, ce qui permet d'entrer une valeur majorée de la consigne à atteindre lors des premiers cycles, ainsi que la véritable valeur de consigne, à atteindre ensuite. À condition d'appliquer la bonne majoration, cela permet d'atteindre une valeur plus proche de la consigne dès les premiers cycles. Des abaques de majoration en fonction de l'amplitude, de la précharge dans le cas de la traction et de la torsion ont été réalisées à ce titre par Marko Vogric lors de son stage au laboratoire GeM.
- À partir de 18 Hz, la machine entre en résonance. Les signaux de mesure, déjà faibles, sont alors complètement perturbés. L'utilisation de nouveaux mors, plus légers, a permis de décaler la résonance à 22 Hz, ce qui n'est pas suffisant puisque la caractérisation doit se faire jusqu'à 30 Hz. Un accéléromètre indépendant des deux autres capteurs est alors installé, ce qui, en renseignant la masse du système, permet de corriger la mesure de l'effort.

Les tableaux II.3.3 et II.3.4 indiquent les amplitudes appliquées pour chaque fréquence, respectivement dans le cas d'oscillations en traction/compression uniaxiale et en torsion pure. Les amplitudes ont d'abord été fixées en termes de déformation, avant de les traduire en déplacement et angle. Pour rappel, deux déformations ont été introduites dans le chapitre précédent, à savoir la déformation par rapport à la configuration non déformée, notée ϵ_0 , et la déformation par rapport à la configuration préchargée, notée ϵ . Les valeurs ont été fixées en termes de ϵ_0 , mais dans la suite, tous les termes d'amplitude de déformation feront référence à ϵ .

ϵ_0 (%)	0,01	0,04	0,07	0,1	0,4	0,7	1	4	7
A (10^{-1} mm)	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$10,3 \cdot 10^{-2}$	$17,9 \cdot 10^{-2}$	$25,6 \cdot 10^{-2}$	1,026	1,795	2,564	10,26	17,949
0,1 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X
30 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	

TABLEAU II.3.3 : Amplitudes en termes de déformation et de déplacement en fonction de la fréquence pour les oscillations en traction/compression uniaxiale lors des essais cycliques

ϵ_0 (%)	0,01	0,04	0,07	0,1	0,4	0,7	1	4	7	10
A (°)	0,05	0,2	0,35	0,5	2,1	3,51	5,01	20,05	35,09	50,13
0,1 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1 Hz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10 Hz	X	X	X	X	X	X	X			
20 Hz	X	X	X	X	X					
30 Hz	X	X	X	X	remplacé par 0,2 % soit 1°					

TABLEAU II.3.4 : Amplitudes en termes de déformation et d'angle en fonction de la fréquence pour les oscillations en torsion pure lors des essais cycliques

3.1.4 Bilan

Au total ont été réalisés 42 essais quasi-statiques simultanés, 30 essais quasi-statiques non simultanés et 64 essais cycliques autour d'une précharge. Les résultats bruts, c'est-à-dire les mesures d'effort et couple en fonction du déplacement et de l'angle ne vont pas être tous présentés ici. Dans les deux sections suivantes, les bases de données brutes seront d'abord introduites. Le nombre de courbes est trop important pour pouvoir faire figurer chaque cas en annexe. Pour chaque type d'essais, seules quelques courbes représentatives y seront montrées. Ainsi, il sera possible de visualiser l'allure de quelques courbes brutes en annexe. S'il est souhaité consulter l'ensemble des courbes, un document complémentaire exhaustif est disponible auprès du directeur de thèse. Dans un deuxième temps, les essais post-traités respectivement pour la campagne d'essais quasi-statiques et pour la campagne d'essais cycliques autour d'une précharge seront présentés. Pour chacune des campagnes, les résultats seront d'abord comparés avec les résultats connus, avant d'exposer ceux concernant les post-traitements plus originaux présentés dans le chapitre précédent.

3.2 Essais quasi-statiques

3.2.1 Base de données et répétabilité

Des données brutes résultant des essais quasi-statiques sont exposées dans l'annexe A dans l'ordre suivant :

- Section A.1 : chemin direct (simultané) ;
- Section A.2 : chemin haut (torsion puis traction) ;
- Section A.3 : chemin bas (traction puis torsion).

Pour chaque point de chargement, deux graphes sont présentés, correspondant à l'effort en fonction du déplacement et au couple en fonction de l'angle. Sur chaque graphe figurent les trois courbes correspondant aux trois essais effectués dans les mêmes conditions mais sur trois éprouvettes différentes.

Afin de juger de la répétabilité des essais, tous les essais quasi-statiques ont été réalisés trois fois sur des éprouvettes différentes. Dans le tableau II.3.5 est indiqué le plus grand écart relatif entre les trois essais, évalué au maximum d'effort et de couple.

point	écart max effort %	écart max couple %
I	4,24	-
II	9,91	1,82
III	8,94	6,92
IV	8,72	9,28
V	8,25	11,59
VI	4,76	5,00
VII	3,29	4,96
VIII	2,76	2,67
IX	0,77	0,82
X	0,35	0,17
XI	0,87	0,62
XII	1,00	2,45
XIII	1,44	1,76
XIV	2,22	-

TABLEAU II.3.5 : Maxima des écarts relatifs sur l'effort et sur le couple évalués au maximum d'effort ou de couple, pour tous les essais simultanés de la campagne quasi-statique

L'écart maximum sur l'effort varie entre 0,35 et 9,91 % alors que celui sur le couple varie entre 0,17 et 11,59 %. Les écarts importants peuvent être dus aux éprouvettes et à leur fabrication, aussi bien qu'aux conditions d'essais. Notamment, le laps de temps entre deux essais sur une même éprouvette varie entre 1h et 1 semaine.

3.2.2 Observations classiques sur les courbes de traction-torsion quasi-statique

A) Courbe de traction/compression uniaxiale

Avant d'aborder les essais de traction-torsion à proprement parler, la courbe de traction/compression uniaxiale qui correspond aux points de chargements I et XIV est présentée ici. La figure II.3.7 montre l'évolution de la contrainte de Cauchy, calculée simplement par la relation $\sigma_{zz} = F\lambda/(\pi A^2)$, où F est l'effort, et A le rayon non déformé de l'éprouvette, en fonction de l'extension λ . Sur cette courbe à l'allure classique, du côté de

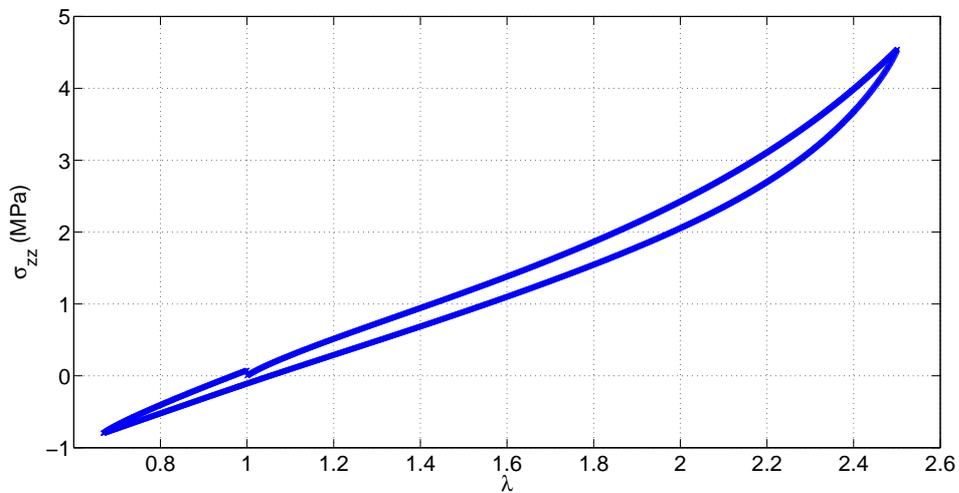


FIGURE II.3.7 : Contrainte de Cauchy en fonction de l'extension pour un essai de traction/compression uniaxiale

la traction on retrouve tout d'abord le domaine linéaire des petites déformations jusqu'à environ $\lambda = 1,04$, puis un raidissement avec une partie quasi-linéaire, correspondant aux déformations moyennes jusqu'à environ 1,9, et enfin les grandes déformations où un raidissement plus grand apparaît. De plus, un hystérésis est observé : les courbes de charge et de décharge ne sont pas superposées. En effet, il faudrait que les essais soient réalisés à une vitesse infiniment lente pour que chaque point soit un état d'équilibre entièrement relaxé, et donc pour que les courbes de charge et de décharge soient superposées. Un point de vue mécanique étant adopté pour le présent travail de thèse, il est choisi de ne pas commenter les différents phénomènes physiques à l'origine de ces comportements. Considérons maintenant les essais en traction-torsion combinées.

B) Effet Poynting

Le premier phénomène bien connu à propos des essais de traction-torsion quasi-statiques est l'effet Poynting, décrit notamment par [Poynting \(1909, 1912\)](#); [Truesdell et Noll \(1965\)](#); [Billington \(1986\)](#) par l'observation d'une extension proportionnelle au carré

de l'angle par unité de longueur lorsqu'un cylindre incompressible au comportement élastique dont la surface supérieure est libre est soumis à de la torsion. Dans notre cas, comme dans celui de [Sedlan \(2001\)](#), l'extension est maintenue constante. La figure [II.3.8](#) montre l'évolution de l'effort en fonction de l'angle par unité de longueur au carré lors de l'application d'un angle alors que l'extension est maintenue constante à $\lambda = 1$. Sur

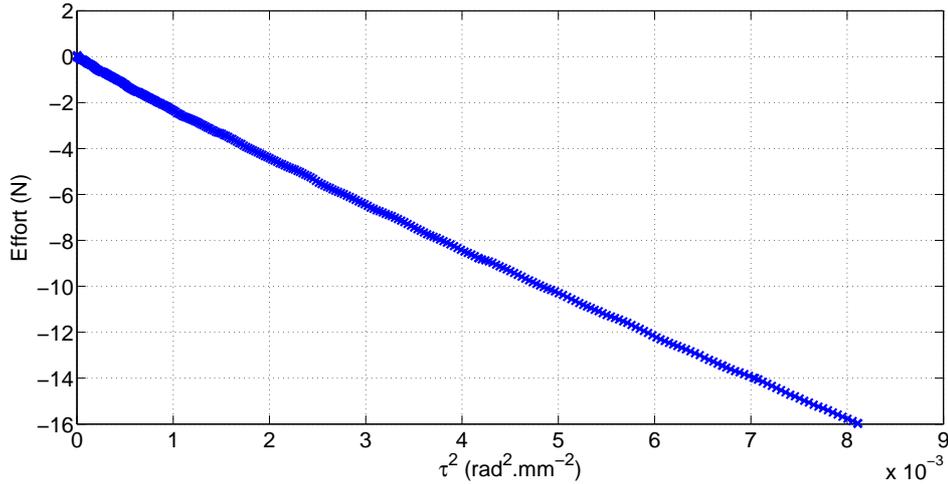


FIGURE II.3.8 : Évolution de l'effort en fonction de l'angle par unité de longueur au carré alors que l'extension est maintenue constante à 1, essai quasi-statique

cette figure, il apparaît clairement que l'effort est proportionnel à l'angle par unité de longueur au carré, et est négatif. Cette observation est à mettre en lien avec les équations de la traction-torsion. En effet l'équation [\(II.1.32\)](#) donnant l'effort appliquée au cas d'une extension égale à 1 devient :

$$N = -2\pi\tau^2 \int_0^A (2W_2(\tau r) + W_1(\tau r)) r^3 dr, \quad (\text{II.3.5})$$

où, pour rappel, A est le rayon du cylindre, et W_1 et W_2 sont les dérivées de l'énergie de déformation respectivement par rapport à I_1 et I_2 . L'évolution expérimentale de l'effort en fonction de τ permet de déduire que le terme intégral est positif. [Wineman \(2005\)](#) propose d'en déduire que $W_1 > 0$ et $W_2 > 0$, alors qu'on ne peut réellement en déduire que seule la somme $2W_2 + W_1$ est positive. Étant donné que N semble varier linéairement en τ^2 , le terme intégral pourrait être considéré comme indépendant de τ pour l'intervalle de τ considéré. Cela signifierait que le terme $2W_2(\tau r) + W_1(\tau r)$ ne dépend pas de τ . Or la dépendance en τ est directement couplée à celle en r , et donc on pourrait considérer que ce terme ne dépend pas de r non plus. On peut alors l'extraire de l'intégrale, et l'exprimer simplement en fonction de N :

$$2W_2 + W_1 = -\frac{2N}{\pi\tau^2 A^4}. \quad (\text{II.3.6})$$

Ce terme est censé être indépendant de τ . Pour vérifier le raisonnement, $-2N/(\pi\tau^2A^4)$ est tracé en fonction de τ sur la figure II.3.9. Sur cette figure, il apparaît que $-2N/(\pi\tau^2A^4)$

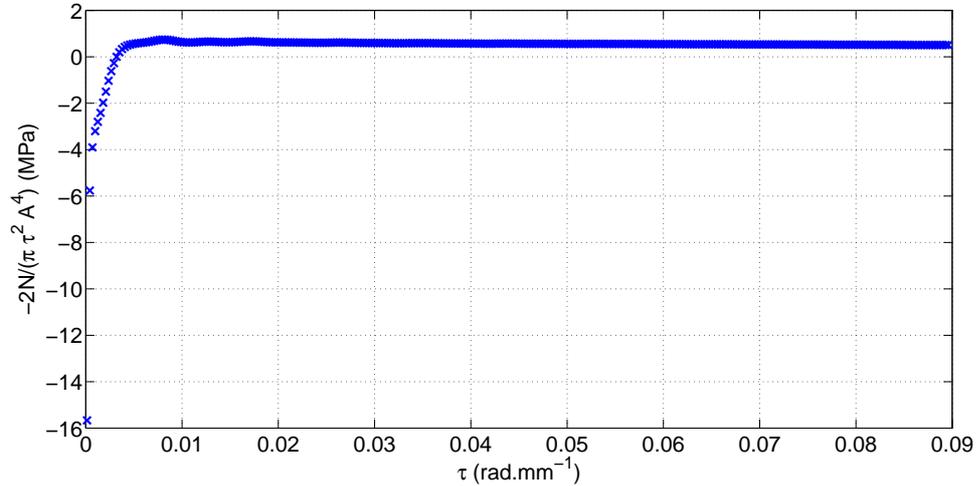


FIGURE II.3.9 : Évolution de $-2N/(\pi\tau^2A^4)$ en fonction de l'angle par unité de longueur alors que l'extension est maintenue constante à 1, essai quasi-statique

augmente fortement aux faibles angles, puis se stabilise à une valeur quasi-constante, en réalité, $-2N/(\pi\tau^2A^4)$ diminue légèrement. Ainsi, considérer la variation de N avec τ^2 comme linéaire est une hypothèse trop simplificatrice, et le terme $2W_2 + W_1$ dépend de τr . Ainsi, il n'est pas possible de se baser sur ce type de raisonnement pour obtenir des informations sur les dérivées de l'énergie de déformation, et le post-traitement des résultats grâce à la méthode présentée dans le chapitre précédent permet de tirer des conclusions plus rigoureuses.

C) Relations universelles

Deux relations universelles (relations qui ne dépendent pas de la forme de la loi de comportement, valables pour une certaine classe de matériau) sont connues pour la traction-torsion de matériaux hyperélastiques incompressibles. La première d'entre elles a été présentée pour la première fois par Rivlin et Saunders (1951), l'autre a été étudiée par Horgan et Saccomandi (1999), et est restreinte aux matériaux dont l'énergie de déformation ne dépend que du premier invariant : $W = W(I_1)$. C'est cette seconde relation qui est présentée en premier, car elle fait suite à la discussion sur l'effet Poynting.

a) **Relation universelle de Horgan et Saccomandi (1999)** Cette première relation relie l'effort et le couple généré dans le cas de la torsion pure ($\lambda = 1$) :

$$N = -\frac{\tau}{2}M. \quad (\text{II.3.7})$$

Cette relation universelle est intéressante puisqu'elle permet de déterminer si le matériau considéré appartient à cette classe de matériau, et donc si une dépendance en I_2 doit être prise en compte. [Horgan et Saccomandi \(1999\)](#) ont montré que le matériau caractérisé par [Rivlin et Saunders \(1951\)](#), dont les essais de traction-torsion servent encore aujourd'hui de référence, n'appartenait pas à cette catégorie de matériau. La figure [II.3.10](#) montre l'évolution de l'effort et de la grandeur $-\frac{\tau}{2}M$ en fonction de τ , toujours dans le cas de la torsion pure. Comme pour les données de [Rivlin et Saunders \(1951\)](#), les deux grandeurs

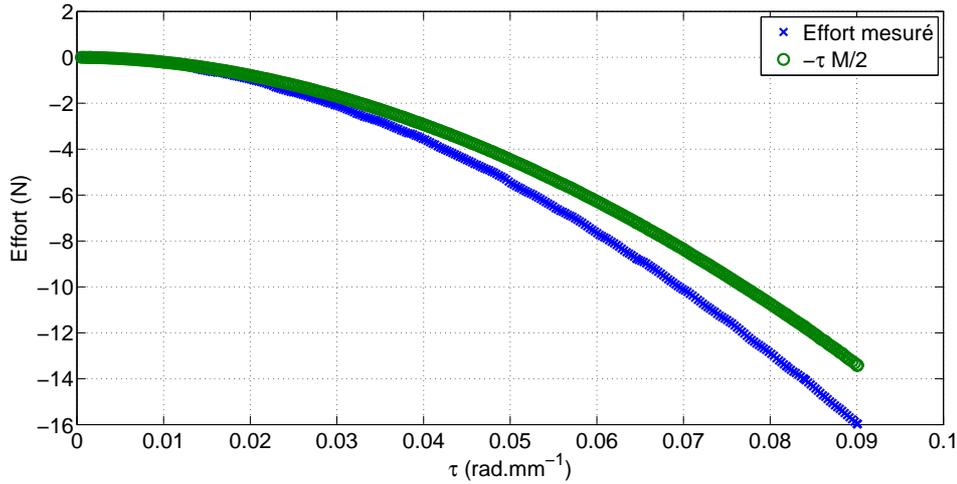


FIGURE II.3.10 : Évolution de l'effort et de $-\frac{\tau}{2}M$ en fonction de l'angle par unité de longueur alors que l'extension est maintenue constante à 1, essai quasi-statique

ne sont pas égales, avec un écart relatif moyen de 20%. Il est donc d'ores et déjà établi qu'un modèle où l'énergie de déformation ne dépend pas de I_2 ne pourra pas prédire correctement le comportement du matériau en traction-torsion quasi-statique. [Wineman \(2005\)](#) propose d'exploiter plus largement cette relation. Cette fois-ci, en ne considérant plus $W_2=0$,

$$N + \frac{\tau}{2}M = -2\pi\tau^2 \int_0^a W_2 r^3 dr. \quad (\text{II.3.8})$$

[Wineman \(2005\)](#) tente de développer des arguments qui permettent de déterminer si les dérivées de l'énergie de déformation sont positives ou négatives. La relation [\(II.3.8\)](#) permet d'affirmer que si $W_2 > 0$, alors l'intégrale de $W_2 r^3$ est positive et $N + \frac{\tau}{2}M < 0$. La proposition contraposée nous permet d'écrire que si $N + \frac{\tau}{2}M > 0$, alors $W_2 < 0$. Les données de notre campagne expérimentale montrent que, pour l'intervalle de τ étudié, $N + \frac{\tau}{2}M < 0$ et donc, contrairement à [Wineman \(2005\)](#) qui écrit que les données suggèrent que $W_2 > 0$, rien ne peut être conclu sur le signe de W_2 , la proposition énoncée étant nécessaire mais pas suffisante. La seule façon de pouvoir donner des indications sur le signe de W_2 , aussi bien que de W_1 , semble être de calculer les dérivées de l'énergie de déformation via la méthode de [Penn et Kearsley \(1976\)](#), ce qui restreint l'étude aux valeurs prises au rayon extérieur du cylindre.

b) Relation universelle de Rivlin et Saunders (1951) Partant des équations (II.1.32) et (II.1.33), Rivlin et Saunders (1951) ont montré que pour des angles infinitésimaux superposés à de la traction uniaxiale,

$$\frac{[N]_{\tau=0}A^2}{[M/\tau]_{\tau=0}} = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1}), \quad (\text{II.3.9})$$

en faisant l'hypothèse que la dépendance de W_1 et W_2 à τr est alors négligeable, ce qui permet de les extraire de l'intégrale. Il est important de noter que nous n'écrivons pas la relation exactement de la même manière que Rivlin et Saunders (1951), puisqu'ils utilisent un angle par unité de longueur déformée alors que nous utilisons un angle par unité de longueur non déformée. Ainsi, le rapport entre l'effort et le ratio couple sur angle par unité de longueur ne dépend pas de la forme de l'énergie de déformation pour des angles infinitésimaux. La figure II.3.11 reprend le type de graphes tracés dans Rivlin et Saunders (1951), à savoir le couple mesuré et le couple calculé à partir de la relation (II.3.9), pour les points de chargement V, VII, X et XII en suivant les chemins bas (traction puis torsion). Les mêmes tendances que celles des données de Rivlin et

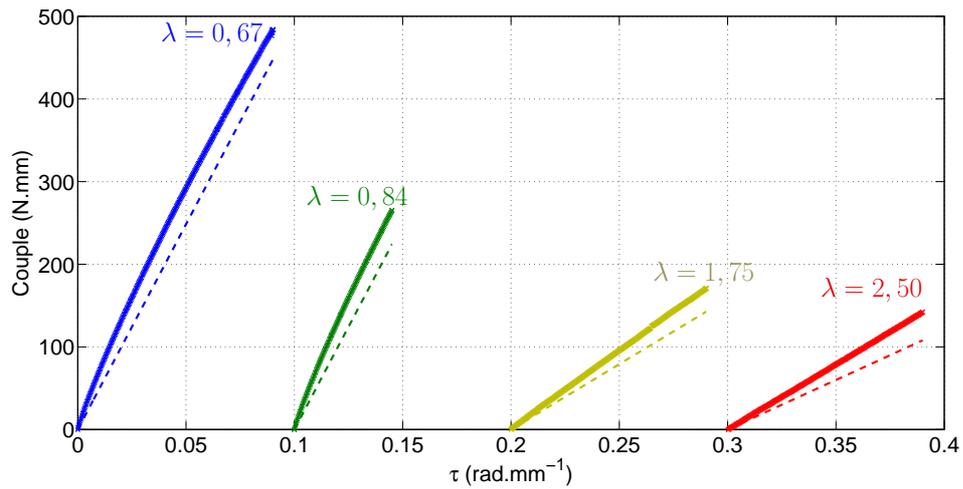


FIGURE II.3.11 : Évolution du couple mesuré et du couple calculé par la relation (II.3.9) en fonction de l'angle par unité de longueur, pour plusieurs essais en chemin bas avec diverses extensions. Pour plus de visibilité, l'origine de l'angle par unité de longueur est translatté de $0,1 \text{ rad.mm}^{-1}$ pour chaque λ

Saunders (1951) sont observées :

- Les deux courbes coïncident pour les faibles angles ;
- Plus λ est élevé, plus l'angle jusqu'auquel les deux courbes coïncident est élevé ;
- Plus λ est faible, plus la courbe de couple mesuré en fonction de l'angle est non linéaire.

Notons que ces résultats étendent ceux de Rivlin et Saunders (1951), qui ont considéré des extensions comprises entre 1,095 et 2,501 alors que nos valeurs extrêmes de λ valent

0,67 et 2,5. Ainsi deux courbes en compression sont ajoutées par rapport à l'étude de Rivlin et Saunders (1951).

D) Bilan

Dans cette sous-section, les caractéristiques classiques d'un élastomère soumis à un chargement quasi-statique, aussi bien en traction/compression uniaxiale qu'en traction-torsion ont été présentées. De plus, il a été établi qu'un modèle où $W_2 = 0$ ne peut pas prédire le comportement du matériau correctement. Enfin il n'est pas possible d'obtenir plus d'informations sur l'évolution de W_1 et W_2 sans faire appel à la méthode de Penn et Kearsley (1976) (à cause de la présence de l'intégrale).

3.2.3 Influence du chemin suivi

Dans cette sous-section, les efforts et couples obtenus en suivant les chemins haut, bas et direct sont comparés. Cette comparaison permettra de déterminer si les résultats obtenus avec les chemins haut et bas, pour lesquels il est possible de calculer contraintes et dérivées de l'énergie de déformation au rayon extérieur du cylindre, sont assimilables à ceux obtenus avec le chemin direct. Afin d'exposer clairement les types de chargement considérés, la figure II.3.12 montre l'évolution de λ et τ en fonction du temps pour les trois chemins suivis, dans le cas d'un chargement maximal à $\lambda = 2,5$ et $\tau = 0,09$ rad. mm⁻¹ (point de chargement V). Les figures II.3.13 et II.3.14 montrent l'évolution

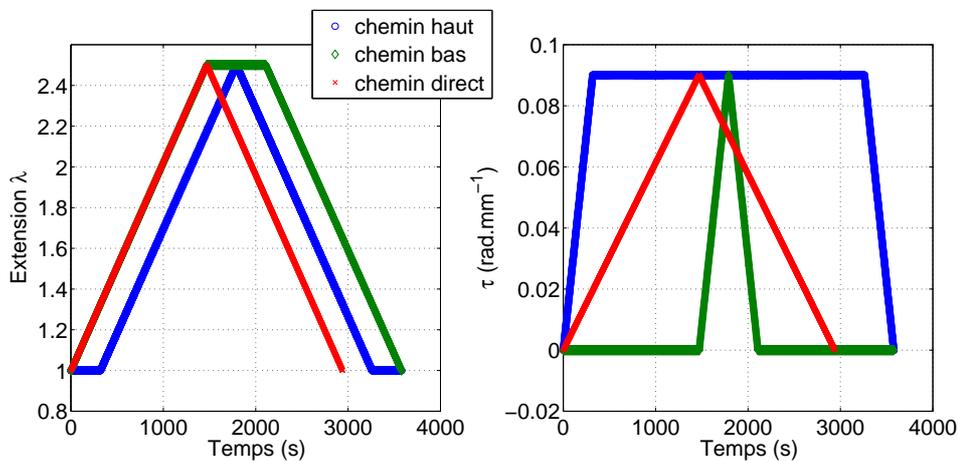


FIGURE II.3.12 : Extension et angle par unité de longueur imposé en fonction du temps pour le point de chargement V via les chemins haut, bas et direct, essai quasi-statique

respectivement de l'effort en fonction de l'extension et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, pour les trois chemins suivis. Sur chacune des deux figures, seuls trois points sont à considérer, à savoir l'effort et le couple obtenus pour le déplacement

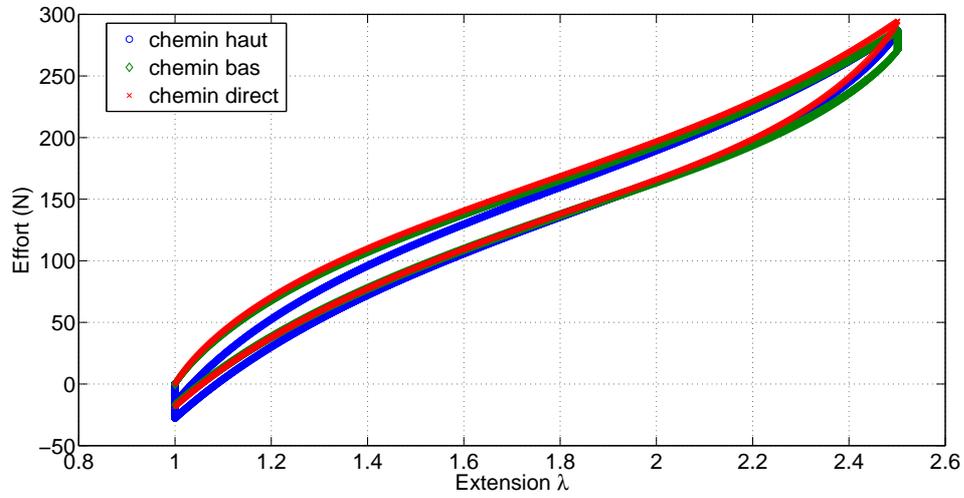


FIGURE II.3.13 : Effort en fonction de l'extension pour le point de chargement V via les chemins haut, bas et direct, essai quasi-statique

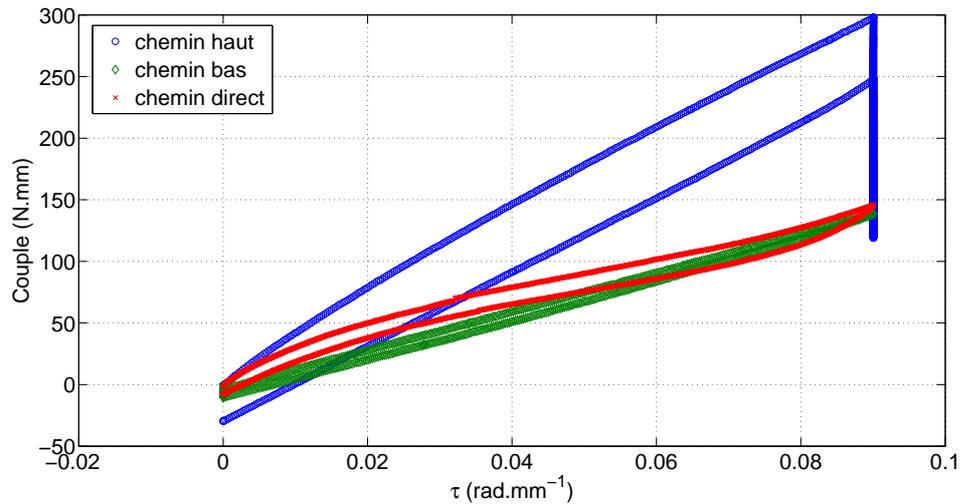


FIGURE II.3.14 : Couple en fonction de l'angle par unité de longueur pour le point de chargement V via les chemins haut, bas et direct, essai quasi-statique

et l'angle maximum, en suivant chacun des trois chemins. L'effort maximal obtenu en suivant les chemins haut et bas est très proche : un écart relatif de 0,06 % les sépare. L'effort maximal obtenu en suivant le chemin direct est un peu plus élevé que les deux autres, avec un écart relatif de 2,7 %, ce qui reste très inférieur à l'écart obtenu lors du test de répétabilité pour ce point de chargement. La figure II.3.14 ne permet pas de distinguer le couple obtenu lorsque le déplacement et l'angle maximum sont atteints en

suivant le chemin haut (torsion puis traction). Ce point est plus visible sur la courbe du couple en fonction du temps, présentée sur la figure II.3.15 ; le point correspondant à $\lambda = 2,5$ et $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$ est marqué par un cercle rouge. Alors que l'écart relatif

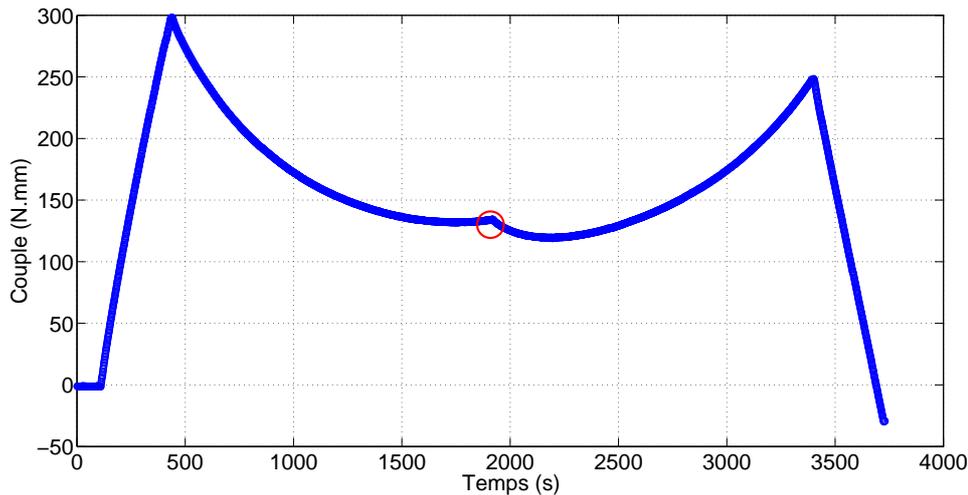


FIGURE II.3.15 : Couple en fonction du temps pour le point de chargement V via le chemin haut, essai quasi-statique

de couple entre le chemin direct et le chemin bas vaut 5 %, celui entre le chemin haut et le chemin bas vaut 3,1 %, et celui entre le chemin haut et le chemin direct vaut 8%. Même si ce dernier écart est plutôt important, il reste inférieur à celui obtenu lors du test de répétabilité sur ce point de chargement. Ainsi, par la suite, il sera considéré que la réponse du matériau lors d'un essai quasi-statique en traction-torsion est indépendante du chemin suivi.

À présent, la méthode développée dans le chapitre précédent est appliquée pour présenter les courbes de contrainte et de dérivées de l'énergie de déformation expérimentales, calculées au rayon extérieur du cylindre. Ces grandeurs ne peuvent être calculées qu'en torsion pure (en utilisant les données de l'un des essais suivant le chemin haut) et en pré-extension suivie par de la torsion (en utilisant les données des essais suivant le chemin bas). Les résultats concernant la torsion pure ont déjà été présentés dans le chapitre précédent à titre d'illustration de la méthode, comme l'ont été les résultats de pré-extension à $\lambda = 1,75$ et $2,5$ (points V et VII). Le point III ne présente pas d'intérêt puisque la même extension que le point V, soit $2,5$ a été appliquée, la torsion maximale appliquée ensuite étant plus faible ($\tau = 0,045 \text{ rad. mm}^{-1}$ et non $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$). Il reste donc à présenter les résultats avec pré-extension en compression, c'est-à-dire le point X (le point XII étant similaire au point X).

3.2.4 Contraintes expérimentales

La figure II.3.16 montre l'évolution des trois composantes du tenseur des contraintes de Cauchy non nulles en fonction de l'angle par unité de longueur. Sur cette figure, on

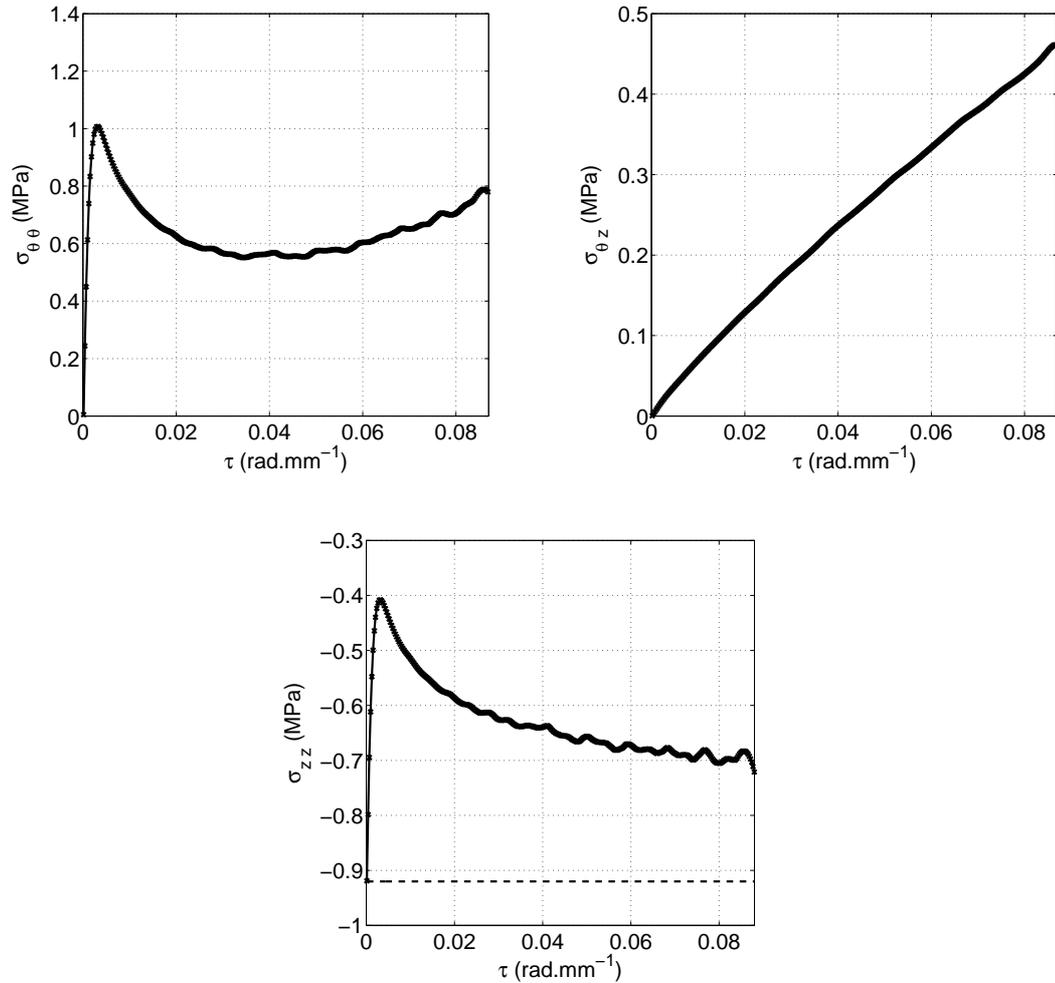


FIGURE II.3.16 : Pré-extension en compression à $\lambda = 0,67$ suivie par de la torsion : contrainte de Cauchy en fonction de l'angle par unité de longueur

retrouve d'abord la valeur des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy après précharge en compression uniaxiale, à savoir $\sigma_{\theta z} = 0$, $\sigma_{\theta\theta} = 0$ et $\sigma_{zz} = N\lambda/(\pi A^2)$. Afin de commenter ces trois courbes, il est utile de visualiser les efforts et couples correspondant, présentés en figure II.3.17. Le couple évolue quasi-linéairement avec l'angle par unité de longueur, alors que la courbe d'effort en fonction de l'angle par unité de longueur présente un point stationnaire : elle croît jusqu'à atteindre son maximum en $\tau = 0,025 \text{ rad. mm}^{-1}$, puis décroît. Cette évolution peut s'expliquer par la compétition de deux phénomènes :

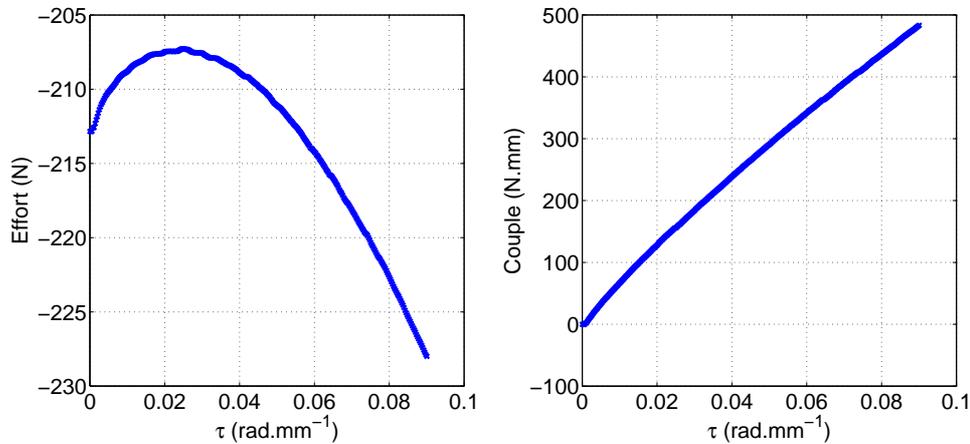


FIGURE II.3.17 : Pré-extension en compression à $\lambda = 0,67$ suivie par de la torsion : effort et couple en fonction de l'angle par unité de longueur

- La relaxation de l'effort dû à la pré-extension, qui opère principalement au début de l'essai et donc à angle faible (la relaxation suit une courbe exponentielle décroissante). Elle entraîne une diminution de l'effort en valeur absolue (et donc ici une augmentation d'effort) ;
- L'effet Poynting qui au contraire est d'autant plus important que l'angle est élevé, et entraîne une diminution de l'effort lorsque l'angle augmente.

Cela explique la transition observée à $\tau = 0,025 \text{ rad. mm}^{-1}$ sur la courbe de $\sigma_{\theta\theta}$. Cependant, contrairement à ce qui a été avancé dans le chapitre précédent, le comportement pour des angles inférieurs à $\tau = 0,025 \text{ rad. mm}^{-1}$ ne peut pas être uniquement causé par de la relaxation. En effet quelques essais de relaxation ont été menés sur les différentes précharges, et les valeurs obtenues après relaxation de la précharge n'atteignent jamais les valeurs de pic obtenues ici. Ainsi, il apparaît que l'application de très faibles angles superposés à l'extension induit un changement important pour les contraintes dans les directions e_{zz} et $e_{\theta\theta}$. Cette observation est aussi valable pour les deux autres cas présentés dans le chapitre précédent.

3.2.5 Dérivées de l'énergie de déformation expérimentales

Dans le chapitre précédent, il a été vu qu'il était plus pertinent d'étudier les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales. La figure II.3.18 montre l'évolution des deux dérivées par rapport aux extensions principales λ_1 et λ_3 (où $\lambda_3(\tau = 0) = \lambda = 0,67$). Dans un premier temps, ces grandeurs sont tracées en fonction de l'angle par unité de longueur, comme dans le chapitre précédent. Sur les deux courbes, on retrouve une forte croissance puis un maximum aux faibles angles. Sur la courbe de \bar{W}_1 , le point d'inflexion identifié précédemment à $\tau = 0,025 \text{ rad. mm}^{-1}$ sur

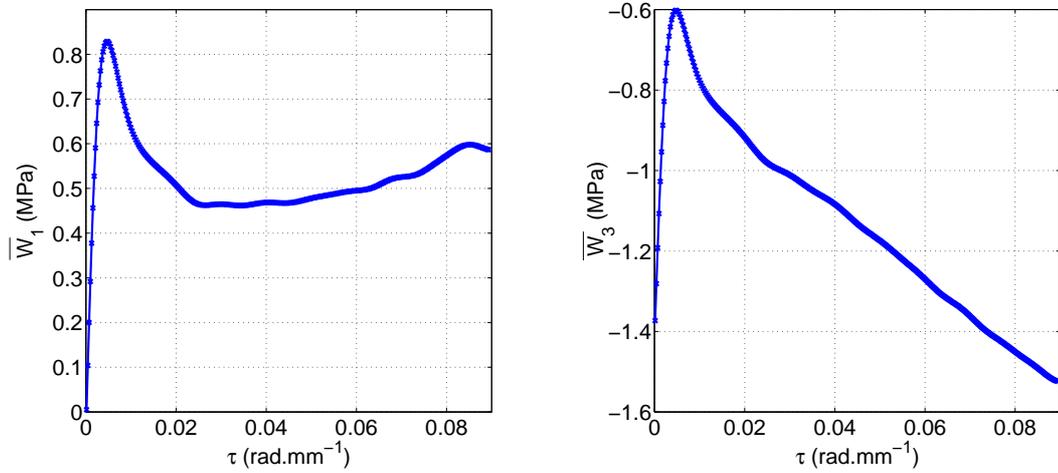


FIGURE II.3.18 : Pré-extension en compression à $\lambda = 0,67$ suivie par de la torsion : dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction de l'angle par unité de longueur

la courbe d'effort est observé. Après le maximum, \bar{W}_3 décroît quasi-linéairement avec l'angle. La figure II.3.19 montre l'évolution des deux dérivées de l'énergie de déformation en fonction des extensions principales. Sur ces deux courbes, la variation au début de

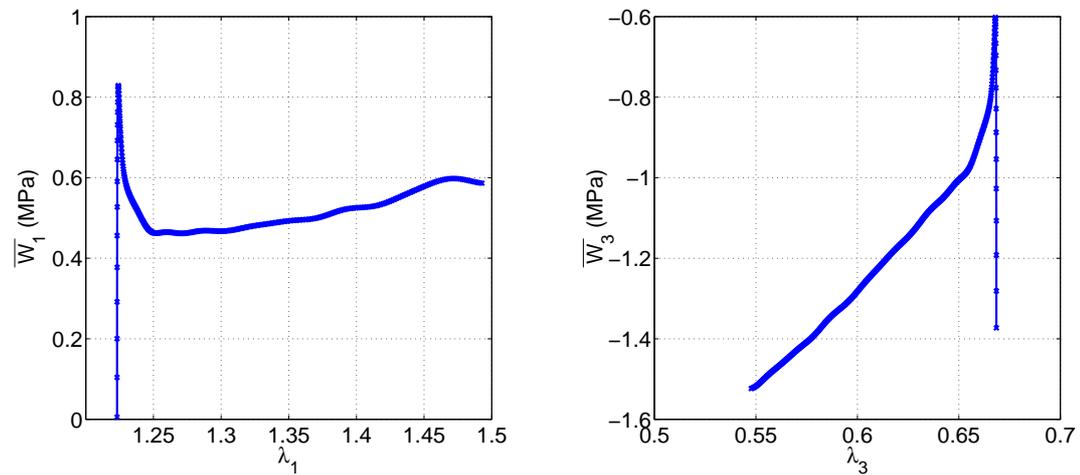


FIGURE II.3.19 : Pré-extension en compression à $\lambda = 0,67$ suivie par de la torsion : dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction des extensions principales

l'essai apparaît plus nettement. Ensuite, \bar{W}_1 décroît puis croît lorsque λ_1 augmente, et

\bar{W}_3 décroît lorsque λ_3 diminue. Clairement, l'effet de la torsion n'est pas le même à l'échelle locale, c'est-à-dire sur les contraintes et énergies de déformation, et à l'échelle globale, c'est-à-dire sur les efforts et couples. Les courbes de contraintes et d'énergies de déformation obtenues ici ont des formes similaires à celles qui peuvent être obtenues sur des graphes de Mooney (*Mooney plot*). Sur ces graphes sont représentés la contrainte réduite, en fonction de l'inverse de l'extension. En traction ou compression uniaxiale, cela revient à tracer $N/(2\pi(\lambda - 1/\lambda^2)A^2)$ en fonction de $1/\lambda$ (voir par exemple [Boyce et Arruda \(2000\)](#)). De manière analogue, ce type de graphe peut également être tracé pour d'autres types de transformation, comme la traction biaxiale (voir par exemple [Fukahori et Seki \(1991\)](#)). Ce type de graphe apporte des informations supplémentaires lorsqu'il s'agit de comparer des modèles aux données expérimentales, puisqu'il permet de visualiser la divergence des modèles par rapport aux essais beaucoup plus nettement que les graphes de contrainte/déformation (voir par exemple [Han et al. \(1999\)](#)). De plus, il permet de juger directement si des lois de comportement simples telles qu'une loi néo-Hookéenne ou de Mooney-Rivlin sont en adéquation avec les essais, puisque sur ce graphe, elles sont représentées par des droites (de pente nulle dans le cas néo-Hookéen). Il peut être intéressant de généraliser ce type de graphe au cas de la traction-torsion. Pour cela, rappelons d'abord que, dans le cas de la traction uniaxiale, la grandeur étudiée est égale à (voir équation [\(II.1.32\)](#))

$$\frac{N}{2\pi\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)A^2} = W_1 + \frac{1}{\lambda}W_2. \quad (\text{II.3.10})$$

De manière analogue à ce cas de traction uniaxiale, mais aussi à la définition de la contrainte réduite pour des transformations biaxiales, nous définissons la contrainte réduite dans la direction e_3 , notée σ_3^* par la relation

$$\sigma_3^* = \frac{\bar{W}_3}{2\left(\lambda_3 - \frac{1}{\lambda_3\lambda}\right)} = W_1 + \lambda_1^2 W_2, \quad (\text{II.3.11})$$

et cette grandeur sera tracée en fonction de λ_1^2 . Pour rappel, dans le cas de la traction-torsion, les contraintes et énergies de déformation ne sont calculables qu'au rayon extérieur du cylindre. Toutes les grandeurs mentionnées ne concernent donc que le comportement au rayon extérieur. La figure [II.3.20](#) montre l'évolution de la contrainte réduite dans la direction e_3 pour les cas de la traction uniaxiale, de la compression uniaxiale, de la torsion pure et de la torsion après des pré-extensions à $\lambda = 0,67$; $1,75$ et $2,5$. Tout d'abord, il est à noter que les tendances globales classiques de l'évolution de la contrainte réduite dans le cas de la traction uniaxiale sont retrouvées ici : la contrainte réduite décroît d'abord très fortement pour les faibles extensions (λ_1^2 proche de 1), la décroissance devient moins importante pour les déformations intermédiaires, et enfin un changement de variation puisque la contrainte réduite devient croissante. Ce changement de variation apparaît pour les grandes déformations, et correspond au raidissement observé sur les courbes classiques de contrainte/déformation. Il est intéressant de noter que, pour les valeurs de λ_1^2 très proches de 1 (petites déformations), l'évolution de la contrainte

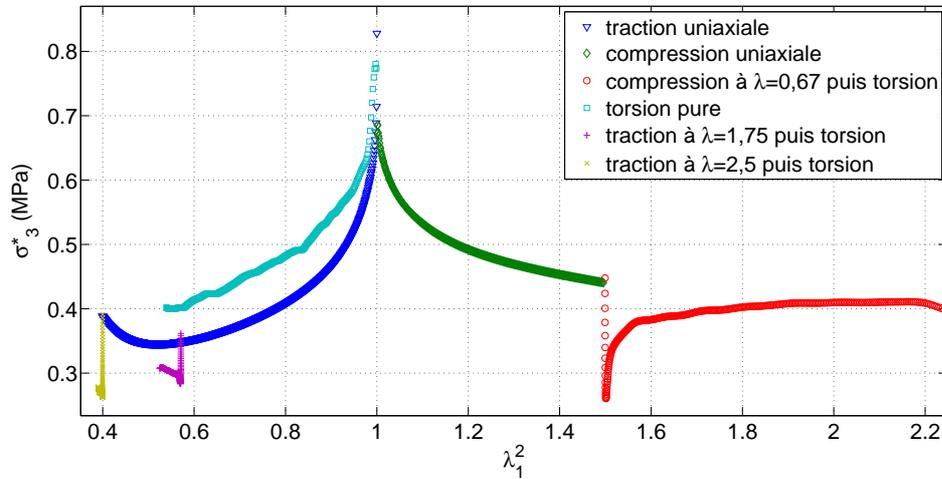


FIGURE II.3.20 : Évolution de la contrainte réduite dans la direction principale e_3 par rapport à λ_1^2 pour les cas de la traction uniaxiale, de la compression uniaxiale, de la torsion pure et de la torsion après des pré-extensions à $\lambda = 0,67$; $1,75$ et $2,5$

réduite dans le cas de la torsion pure est similaire à celle observée dans le cas de la traction uniaxiale, mais le changement de pente apparaît plus tôt. Pour les déformations intermédiaires, les deux courbes sont quasiment parallèles.

Concernant les essais combinés, il est tout d'abord vérifié que la contrainte réduite au début de l'essai est égale à la contrainte réduite obtenue pour l'extension concernée en traction uniaxiale. Ensuite, dans les trois cas, il apparaît que la contrainte réduite décroît très fortement (la pente semble infinie) au début de l'essai, puis présente un minimum, croît ensuite fortement, et enfin subit un dernier changement de pente après lequel elle est presque constante. La forte décroissance observée au début des essais de torsion superposée à une extension fait écho à celle observée au début des essais de traction et compression uniaxiale et de torsion pure, la différence principale étant que pour ces derniers, cette décroissance apparaît à partir d'un état non déformé, alors que pour la traction-torsion, il s'agit d'un état déjà déformé. Ainsi, le comportement du matériau sollicité en petites déformations à partir de l'état non déformé et à partir d'un état déformé, mais dans une autre direction est assez proche. Il apparaît ensuite pour les déformations plus grandes que la contrainte réduite dépend de la pré-déformation. Cette figure permet de montrer que la traction-torsion est un chargement complexe à modéliser. Par exemple, il apparaît clairement qu'une loi de type Mooney-Rivlin, qui serait représentée par une droite, ne pourrait pas du tout modéliser les différents cas de chargement représentés ici, de même qu'elle échoue à modéliser les pentes aux très petites déformations et aux grandes déformations en traction uniaxiale.

Finalement, nous disposons d'un ensemble de courbes fiables de couple, d'effort, de contrainte et de dérivée de l'énergie de déformation qui pourront être directement comparées avec les modèles hyperélastiques incompressibles existants. Ensuite, le modèle

choisi grâce à ces comparaisons servira de base pour étudier la linéarisation de modèles viscoélastiques. Pour cela, il est d'abord nécessaire de caractériser le comportement du matériau soumis à des oscillations dynamiques autour d'une précharge quasi-statique.

3.3 Essais cycliques autour d'une précharge

3.3.1 Base de données et incertitudes

Des courbes de contrainte équivalente σ_{eq} en fonction de la déformation axiale ϵ et de contrainte équivalente en cisaillement T en fonction de la variation d'angle par unité de longueur $\Delta\tau$ sont présentées dans l'annexe B de ce manuscrit, dans l'ordre suivant :

- Section B.1 : Oscillations en traction/compression uniaxiale ;
- Section B.2 : Oscillations en torsion pure.

Comme pour le comportement quasi-statique, les résultats les plus classiques sont d'abord présentés, à savoir

1. L'évolution des modules de conservation E' et de perte E'' en traction, et leurs homologues en cisaillement, G' et G'' en fonction de l'amplitude et de la fréquence ;
2. L'évolution de ces modules en fonction de la précharge lorsque celle-ci est en traction ou compression uniaxiale ;
3. L'évolution de ces grandeurs rapportées à la raideur statique.

Les essais cycliques n'ont pas été répétés sur des éprouvettes différentes. Cependant, dix cycles ont été réalisés pour chaque fréquence et chaque amplitude fixes, et les modules de conservation et de perte sont issues de la moyenne des données sur les neuf derniers cycles. Afin d'estimer la dispersion des données, le maximum de l'écart relatif entre la valeur moyenne de E' et E'' et leurs valeurs pour chaque cycle a été calculé pour chaque ensemble de précharge, fréquence et amplitude fixes. À partir de ces données, décision a été prise de ne pas prendre en compte certains ensembles, pour lesquels l'erreur est très élevée (particulièrement sur les modules de perte). Ainsi, toutes les oscillations en traction/compression uniaxiale dont l'amplitude de déformation est inférieure à $\epsilon = 0,14$ % ne sont pas prises en compte. Les valeurs du module de perte en traction ne seront pas présentées pour la fréquence 30 Hz, car elles sont trop bruitées. Concernant les oscillations en torsion pure, les oscillations pour lesquelles $\Delta\tau < 2,75 \cdot 10^{-4}$ rad.mm⁻¹, ainsi que toutes les oscillations à 30 Hz ne sont pas prises en compte. Enfin, les modules de conservation et de perte en cisaillement obtenus en superposant des oscillations en traction/compression uniaxiale à des précharges en traction-torsion ne sont pas présentés, car ils sont également trop bruités. Le tableau II.3.6 montre le maximum et la moyenne des écarts relatifs sur le module de conservation et le module de perte en traction pour chaque précharge après avoir écarté les données qui viennent d'être mentionnées, alors que le tableau II.3.7 concerne les modules en cisaillement. Notons enfin que dans la suite, les précharges intermédiaires 2, 3, 5, 7 seront uniquement utilisées pour l'étude de l'influence de la précharge, ce qui permet de réduire le nombre de courbes à présenter pour l'étude de l'influence de la fréquence et de l'amplitude. Les maximums d'écart

Précharge	Erreur sur E' (%)		Erreur sur E'' (%)	
	Maximum	Moyenne	Maximum	Moyenne
1	19	13	30	4
2	29	14	27	7
3	35	17	12	3
4	35	20	10	2
5	23	13	19	4
6	23	14	21	4
7	31	17	22	5
8	23	15	20	4

TABLEAU II.3.6 : Maximum et moyenne des écarts relatifs entre les modules calculés sur un cycle et les modules moyennés sur tous les cycles pour des oscillations en traction/compression uniaxiale

Précharge	Erreur sur G' (%)		Erreur sur G'' (%)	
	Maximum	Moyenne	Maximum	Moyenne
1	22	12	97	30
2	17	8	79	23
3	19	13	41	8
4	23	15	29	7
5	19	12	30	8
6	21	13	16	6
7	14	11	17	7
8	17	10	147	30

TABLEAU II.3.7 : Maximum et moyenne des écarts relatifs entre les modules calculés sur un cycle et les modules moyennés sur tous les cycles pour des oscillations en torsion pure

sont en majorité atteints pour $f = 30$ Hz. L'écart relatif pour les modules en traction et les modules de conservation en cisaillement ne dépasse pas 35 %, leurs moyennes sont inférieures à 20 %. Les écarts relatifs pour les modules de perte en cisaillement sont plus élevés, ce qui est dû aux faibles valeurs de couple mesurées par rapport à la pleine échelle du capteur. Notamment, les écarts sont très élevés pour les précharges 1 ($\lambda = 2,5$) et 8 ($\lambda = 1,375$, $\tau = 0,09$ rad.mm⁻¹). Pour la précharge 1, le maximum est atteint lors

d'oscillations à $f = 10$ Hz et $\epsilon = 0,09$ %, alors que pour la précharge 8, le maximum est atteint lors d'oscillations à $f = 10$ Hz et $\epsilon = 0,2$ %. Ces cas sont conservés dans la base de données, tout en gardant à l'esprit l'écart important qu'ils présentent.

3.3.2 Comportement dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude

Dans un premier temps, le comportement dynamique en traction est étudié, ce qui correspond aux oscillations en traction/compression uniaxiale superposées à tous les types de précharge.

A) Évolution de E'

La figure II.3.21 montre l'évolution du module de conservation E' en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'oscillations, pour la précharge 1 en traction uniaxiale à $\lambda = 2, 5$ (le graphe de la précharge 4 à $\lambda = 0,67$ ayant été présenté dans le chapitre précédent). De même, la figure II.3.22 montre l'évolution du module de conservation

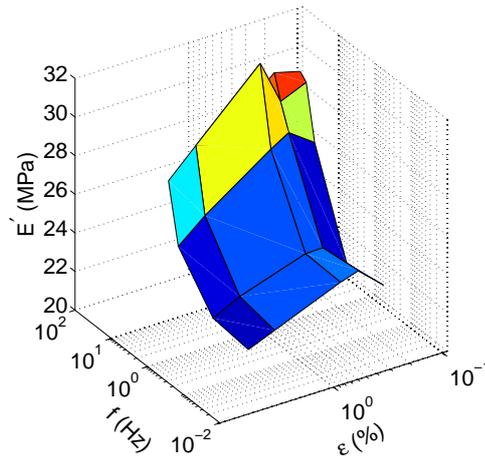


FIGURE II.3.21 : Évolution du module de conservation en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'oscillations ; précharge 1 en traction uniaxiale à $\lambda = 2, 5$

E' en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'oscillations, pour les précharges 6 et 8, respectivement en torsion pure et en traction-torsion combinées. Sur ces deux ensembles de figures, il apparaît que le module de conservation E' augmente lorsque la fréquence augmente. Globalement, le module de conservation décroît lorsque l'amplitude des oscillations augmente.

Ces tendances correspondent à celles observées dans la littérature, notamment par Payne (1962a,b), Luo *et al.* (2010), Rendek et Lion (2010) et Höfer et Lion (2009) pour des oscillations sans précharge, et Dutta et Tripathy (1990), Kim et Youn (2001), Cho et Youn (2006), Rendek et Lion (2010) et Wollscheid et Lion (2013) pour des oscillations

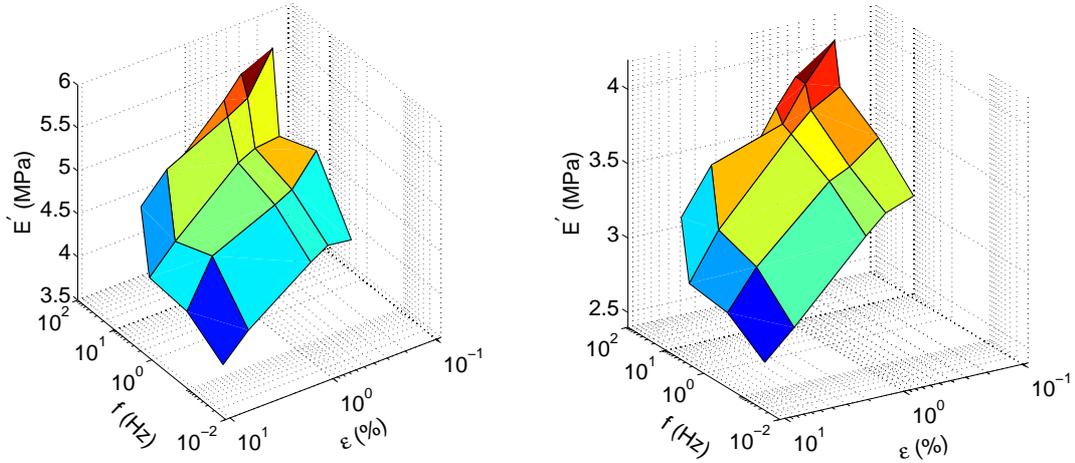


FIGURE II.3.22 : Évolution du module de conservation en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'oscillations ; précharge 8 en traction-torsion à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09$ rad. mm^{-1} (à gauche) et 6 en torsion pure à $\tau = 0,09$ rad. mm^{-1} (à droite)

avec précharge. On notera cependant que pour les faibles amplitudes croissantes, E' augmente dans certains cas. Il est probable que ce comportement soit dû au bruit de mesure, important aux faibles amplitudes. Ce changement d'évolution de E' à faible amplitude est retrouvé sur certaines courbes de [Cho et Youn \(2006\)](#) et de [Rendek et Lion \(2010\)](#) (oscillations avec précharge).

B) Évolution de E''

Dans cette sous-section, l'évolution de E'' en fonction de l'amplitude est présentée pour les précharges 1, 4, 6 et 8 (cf. tableau II.3.2), pour des fréquences fixées comprises entre 0,1 et 20 Hz. La figure II.3.23 montre l'évolution du module de perte pour les deux précharges en traction et compression uniaxiale. De même, la figure II.3.24 montre l'évolution du module de perte pour les deux précharges en traction-torsion combinées et en torsion pure. Il est assez difficile de décrire une tendance précise de l'évolution du module de perte en fonction de l'amplitude, puisque les données sont bruitées et que peu d'amplitudes sont étudiées. Alors que pour les précharges 4, 6 et 8, les quatre courbes correspondant aux quatre fréquences imposées suivent globalement la même évolution, ce n'est pas le cas pour la précharge 1. Notons que l'erreur maximale sur le calcul de E'' est atteint pour cette précharge (cf. tableau II.3.6). Pour cette précharge 1, le module de perte aux fréquences 0,1 et 1 Hz diminue lorsque l'amplitude augmente, alors qu'il augmente pour $f = 10$ Hz, et est plus variable pour $f = 20$ Hz. Pour les trois autres précharges et pour toutes les fréquences, lorsque l'amplitude augmente, le module de perte augmente dans un premier temps, atteint un maximum puis diminue ou atteint une valeur quasi-constante. Enfin, il n'est pas possible d'établir une tendance nette quant à l'évolution du module de perte par rapport à la fréquence. Etant donné le faible nombre

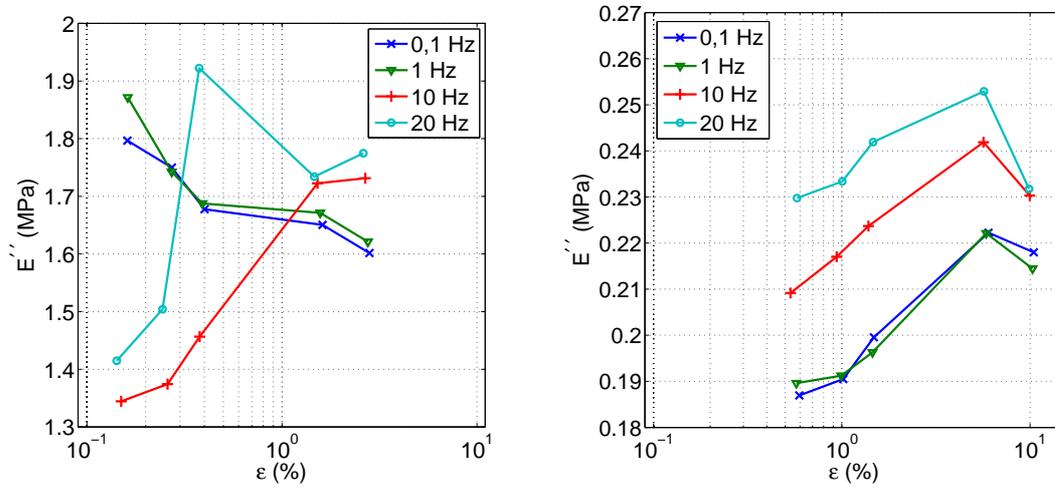


FIGURE II.3.23 : Évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillations ; précharge 1 en traction uniaxiale à $\lambda = 2, 5$ (à gauche) et 4 en compression uniaxiale à $\lambda = 0, 67$ (à droite)

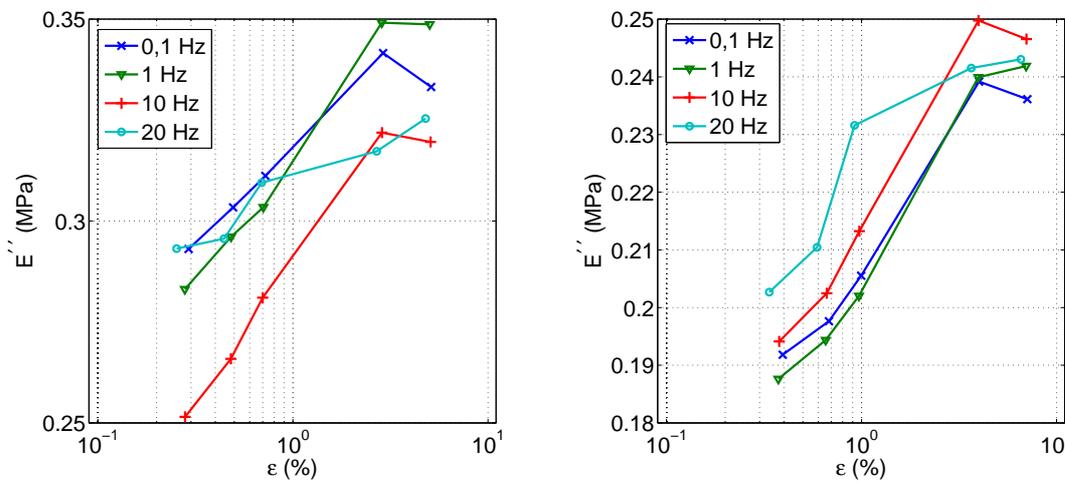


FIGURE II.3.24 : Évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillations ; précharge 8 en traction-torsion à $\lambda = 1, 375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$ (à gauche) et 6 en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$ (à droite)

de points d'amplitude, il n'est pas possible de donner la valeur d'amplitude exacte pour laquelle le maximum du module de perte est atteint. Il est seulement possible de donner un intervalle dans lequel se situe cette valeur d'amplitude pour chacune des précharges 4, 6 et 8 :

- Précharge en compression uniaxiale : entre 2 et 8 % ;
- Précharge en traction-torsion : entre 1 et 4 % ;
- Précharge en torsion pure : entre 1 et 6 % ;

Ces observations sont à mettre en parallèle avec celles de la littérature. Les références déjà citées concernant le comportement dynamique sans précharge sont unanimes sur l'observation d'une augmentation du module de perte à faible amplitude, suivie d'une diminution de celui-ci (lorsque l'amplitude augmente). Ce phénomène, couplé à la décroissance du module de conservation lorsque l'amplitude augmente, est appelé effet Payne ou effet Fletcher-Gent. Ainsi [Cho et Youn \(2006\)](#), [Lion *et al.* \(2009\)](#), [Höfer et Lion \(2009\)](#), [Luo *et al.* \(2010\)](#), [Rendek et Lion \(2010\)](#), mettent en valeur un maximum du module de perte pour une valeur d'amplitude comprise entre 0,8 et 3 % . Très peu d'auteurs étudient l'évolution du module de perte en fonction de l'amplitude sous précharge. Dans le cas d'oscillations en traction uniaxiale, [Rendek et Lion \(2010\)](#) montrent que le maximum du module de perte est atteint pour une amplitude qui dépend de l'extension de la précharge (rappelons que l'extension étudiée par [Rendek et Lion \(2010\)](#) est comprise entre 1,4 et 2), et qui est comprise entre 1 et 2 % . [Wollscheid et Lion \(2013\)](#) présente une courbe d'évolution du module de perte en fonction de l'amplitude pour une précharge uniaxiale d'extension $\lambda = 1,1$. L'amplitude est comprise entre 0,01 % et 10 % pour une fréquence de 10 Hz, et le module de perte est quasiment constant : aucun effet Payne n'est constaté. Toutes ces données sont difficilement comparables, puisque la dépendance des deux modules à l'amplitude dépend fortement de la composition de l'élastomère ([Payne et Whittaker \(1971\)](#)).

Étudions maintenant le comportement dynamique du matériau en cisaillement.

C) Évolution de G'

Les modules en cisaillement sont calculés à partir des essais avec oscillations en torsion pure superposées à tout type de précharge. La figure [II.3.25](#) montre l'évolution de G' pour les précharges 1 en traction et 4 en compression uniaxiale, alors que la figure [II.3.26](#) concerne les précharges 8 en traction-torsion et 6 en torsion pure. Ici, seules les données à 0,1 et 1 Hz sont représentées, car le nombre d'amplitudes exploitables à partir de 10 Hz est trop faible. Sur toutes ces figures, on retrouve la même évolution globale que pour le module de conservation en traction E' , à savoir une diminution du module lorsque l'amplitude des oscillations augmente. Par contre, il est difficile de conclure quant à l'évolution du module en fonction de la fréquence.

D) Évolution de G''

Les figures [II.3.27](#) et [II.3.28](#) montrent l'évolution du module de perte en cisaillement pour des oscillations en torsion pure superposées respectivement à des précharges en traction ou compression uniaxiale et à des précharges en traction-torsion ou torsion pure. De nouveau, les courbes sont plus difficiles à analyser que pour le comportement en traction. Cependant, pour tous les cas de précharges, excepté celui de la traction uniaxiale, on peut distinguer la présence d'un plateau pour les amplitudes intermédiaires,

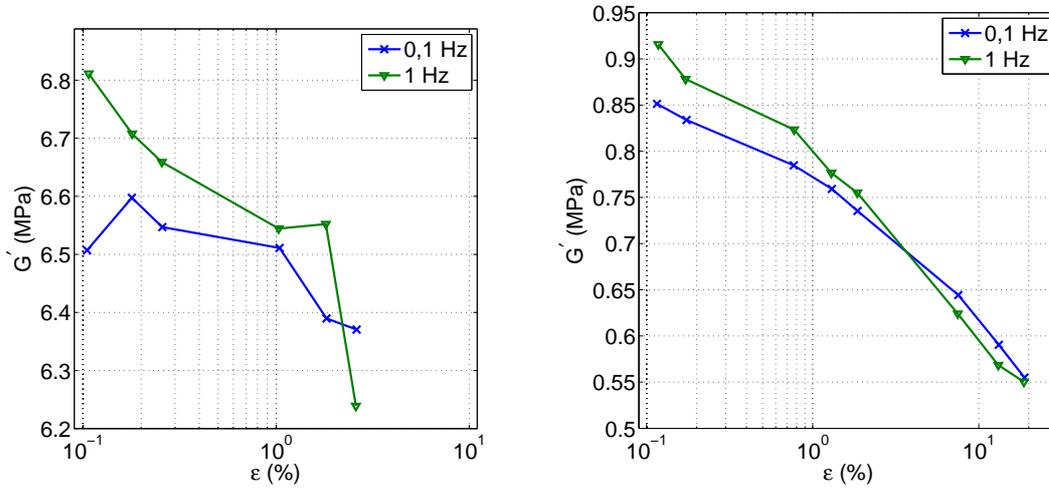


FIGURE II.3.25 : Évolution du module de conservation en cisaillement en fonction de l'amplitude d'oscillations; précharge 1 en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$ (à gauche) et 4 en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$ (à droite)

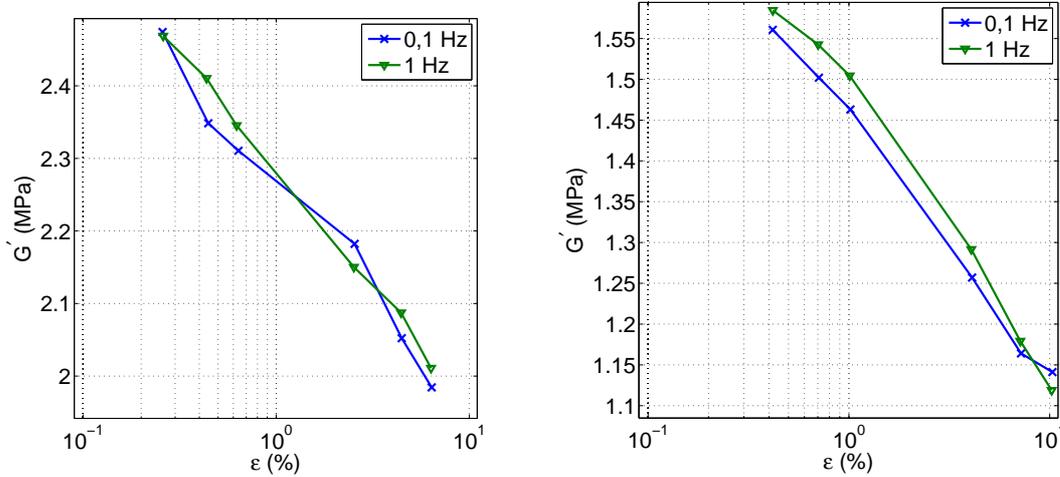


FIGURE II.3.26 : Évolution du module de conservation en cisaillement en fonction de l'amplitude d'oscillations; précharge 8 en traction-torsion à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09$ rad. mm^{-1} (à gauche) et 6 en torsion pure à $\tau = 0,09$ rad. mm^{-1} (à droite)

suivi d'une décroissance du module de perte pour les amplitudes plus élevées, ce qui se rapporte aux observations classiques de l'effet Payne.

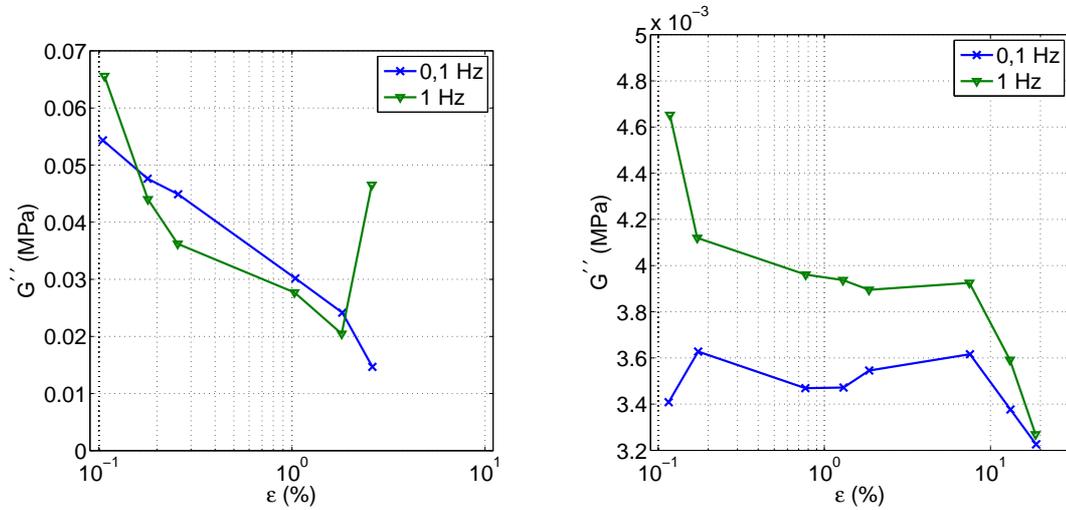


FIGURE II.3.27 : Évolution du module de perte en cisaillement en fonction de l'amplitude d'oscillations ; précharge 1 en traction uniaxiale à $\lambda = 2, 5$ (à gauche) et 4 en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$ (à droite)

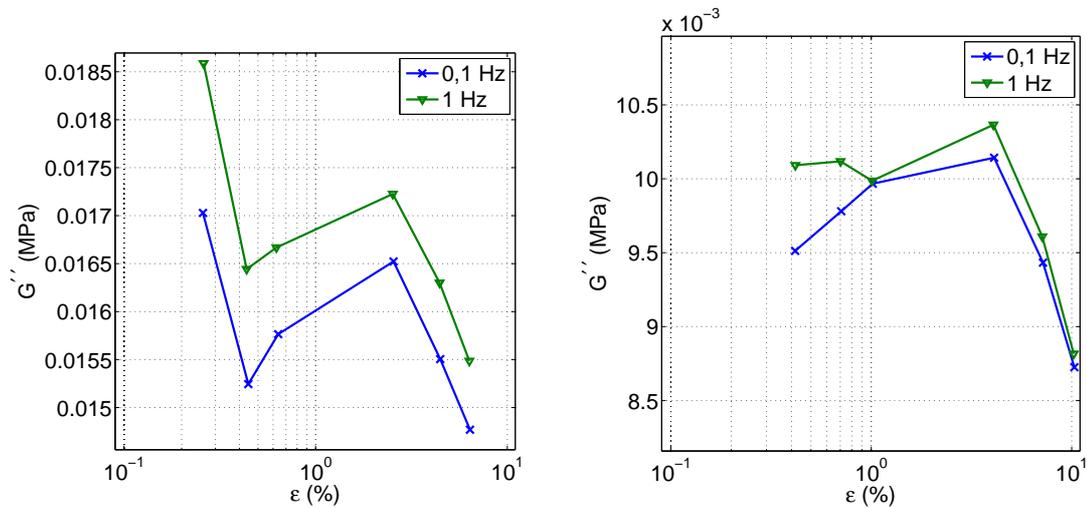


FIGURE II.3.28 : Évolution du module de perte en cisaillement en fonction de l'amplitude d'oscillations ; précharge 8 en traction-torsion à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$ (à gauche) et 6 en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad. mm}^{-1}$ (à droite)

E) Bilan

Finalement, l'évolution du module de conservation et du module de perte après précharge suit globalement les tendances classiques liées à l'effet Payne, à savoir une

décroissance du module de conservation et la présence d'un maximum pour le module de perte lorsque l'amplitude augmente. Cependant, nos données ne sont pas assez précises pour localiser précisément l'amplitude à laquelle correspond ce maximum, et donc étudier si l'application d'une précharge influence cette valeur. Concernant la dépendance à la fréquence, il a été vu que le module de conservation augmente lorsque la fréquence augmente. Pour les autres modules, il n'a pas été possible d'établir de tendances, puisque les données sont soit trop bruitées, soit trop peu nombreuses. Tous ces résultats sont classiques et ont déjà été largement étudiés.

L'étude du comportement dynamique autour d'une précharge l'est moins, or il apparaît clairement sur tous les graphes présentés que l'intervalle de chacune des valeurs calculées est différent suivant la précharge considérée. Alors que l'étude de l'influence d'une précharge en traction ou compression uniaxiale sur le comportement dynamique est assez directe (il suffit de tracer chacune des grandeurs en fonction de l'extension de la précharge), ce qui sera présenté dans un premier temps, il a été vu dans le chapitre précédent que la comparaison de l'influence de précharges imposées dans différentes directions n'était pas évidente, le tracé de courbes en fonction par exemple de K_2 et K_3 ne conduisant pas à des résultats probants. En fait, ce résultat est plutôt compréhensible. En effet, il est facilement concevable que la raideur dynamique est fortement influencée par la raideur statique. Or, l'évolution de la raideur statique pour des chargements dans diverses directions pour plusieurs amplitudes est rarement représentée par une seule et même courbe. par exemple, les essais de référence de [Treloar \(1944b\)](#), en traction uniaxiale, biaxiale et équibiaxiale et en cisaillement pur sont tous tracés sur le même graphe en fonction de l'extension, mais sont représentés par plusieurs courbes (une courbe correspond à un mode de déformation). La même stratégie pourrait être envisagée ici, à savoir tracer des courbes à mode de déformation fixé mais pour des amplitudes différentes (ce qui revient à fixer K_3 et faire évoluer K_2). Cependant, cela nécessiterait de nombreux essais. La méthode adoptée ici, et expliquée dans le chapitre précédent consiste à postuler que l'évolution de la raideur statique en fonction de la déformation est déjà maîtrisée via l'étude expérimentale et la modélisation du comportement quasi-statique du matériau, et qu'il est plus facile d'étudier l'évolution de la raideur dynamique en fonction de la raideur statique.

3.3.3 Comportement dynamique en fonction de la précharge

Dans un premier temps, l'évolution des modules de conservation et de perte est tracée en fonction de l'extension, pour des précharges en traction ou compression uniaxiale, et comparée avec les données existantes dans la littérature.

A) Oscillations en traction/compression uniaxiale

La figure [II.3.29](#) montre l'évolution du module de conservation en fonction de l'extension de la précharge. Sur cette figure, il apparaît que le module de conservation augmente avec l'extension de précharge, et cette augmentation semble plus marquée à partir d'une certaine extension. Cette différence, déjà rapportée par les auteurs qui étudient ce type

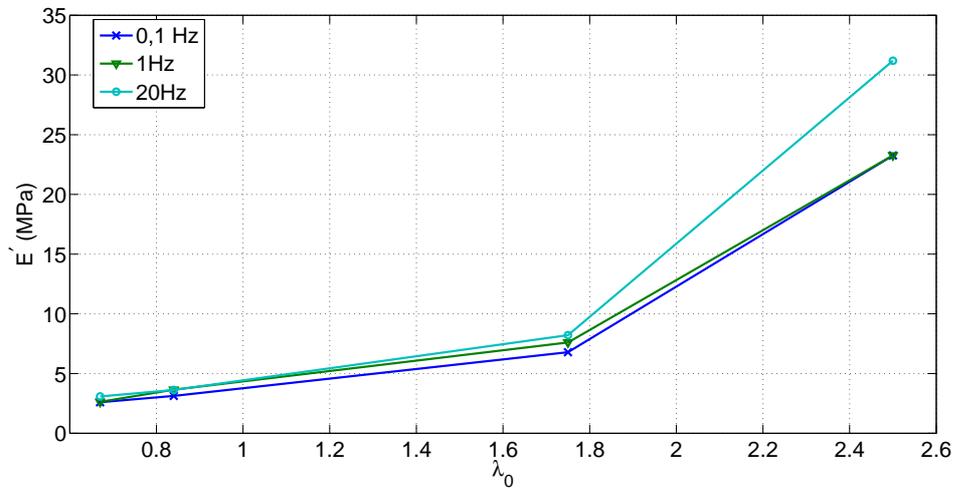


FIGURE II.3.29 : Évolution du module de conservation en traction en fonction de l'extension de la précharge (en traction et compression uniaxiale), oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 %

de chargement, est difficile à situer sur nos données d'essais puisque seules quatre précharges ont été étudiées. Cependant, la décroissance du module de conservation aux faibles extensions rapportée par Dutta et Tripathy (1990), Kim et Youn (2001), Cho et Youn (2006), ce qui est probablement dû à la composition de l'élastomère, comme cela a été montré par Meinecke et Maksin (1980). Le tableau II.3.8 montre les compositions des mélanges étudiés dans les différentes publications citées.

	Meinecke et Maksin (1980)	Dutta et Tripathy (1990)	Kim et Youn (2001)	Cho et Youn (2006)	Rendek et Lion (2010)	Wollscheid et Lion (2013)	présente thèse
Matrice	SBR	BIIR (bromo butyl rubber)	NR	NR	SBR	SBR	NR/SBR
Noir de carbone (pce)	[0; 50]	[0; 100]	0-50-70	50	50	20	30

TABLEAU II.3.8 : Composition des mélanges étudiés dans les publications citées

De plus, Rendek et Lion (2010) n'observe pas cette décroissance. Enfin, Wollscheid et Lion (2013) observe un module de conservation décroissant avec l'extension, ce qui

s'explique probablement par le type de matériau, le changement de variation du module devant intervenir pour des extensions plus élevées que celles qui ont été étudiées. La figure II.3.30 montre l'évolution du module de perte en fonction de l'extension. Bien que ce ne soit pas les mêmes échelles, la même évolution que celle du module de conservation est observée, conformément aux résultats de Rendek et Lion (2010), Kim et Youn (2001), Dutta et Tripathy (1990), et Meinecke et Maksin (1980). La différence de variation avec Wollscheid et Lion (2013) et Cho et Youn (2006) est probablement attribuable à la différence de composition du matériau.

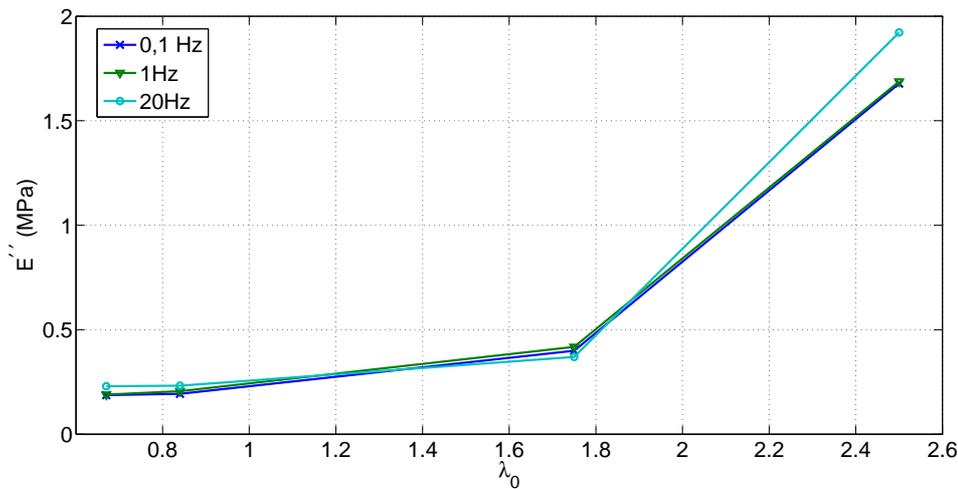


FIGURE II.3.30 : Évolution du module de perte en traction en fonction de l'extension de la précharge (en traction et compression uniaxiale), oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 %

De la même façon, il est possible de tracer les modules en cisaillement obtenus par des oscillations en torsion pure superposées à des précharges en traction ou compression uniaxiale.

B) Oscillations en torsion pure

La figure II.3.31 montre l'évolution du module de conservation en cisaillement en fonction de l'extension de précharge, et la figure II.3.32 montre l'évolution du module de perte en cisaillement. Sur ces deux figures, la même évolution est observée que pour le comportement en traction.

C) Les modules rapportés à la raideur statique

Finalement, les quatre grandeurs E' , E'' , G' et G'' sont rapportées à la raideur statique. Dans le chapitre précédent, il a été vu qu'une courbe quasi-linéaire est obtenue lorsque le ratio $E'/E_{statique}^2$ est représenté en fonction de $E_{statique}$ dans un diagramme

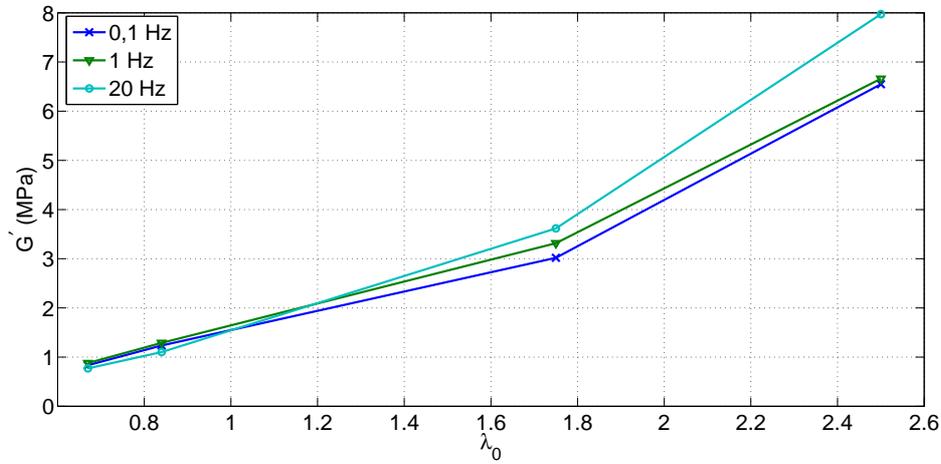


FIGURE II.3.31 : Évolution du module de conservation en cisaillement en fonction de l'extension de la précharge (en traction et compression uniaxiale), oscillations en torsion pure d'amplitude 0,4 %

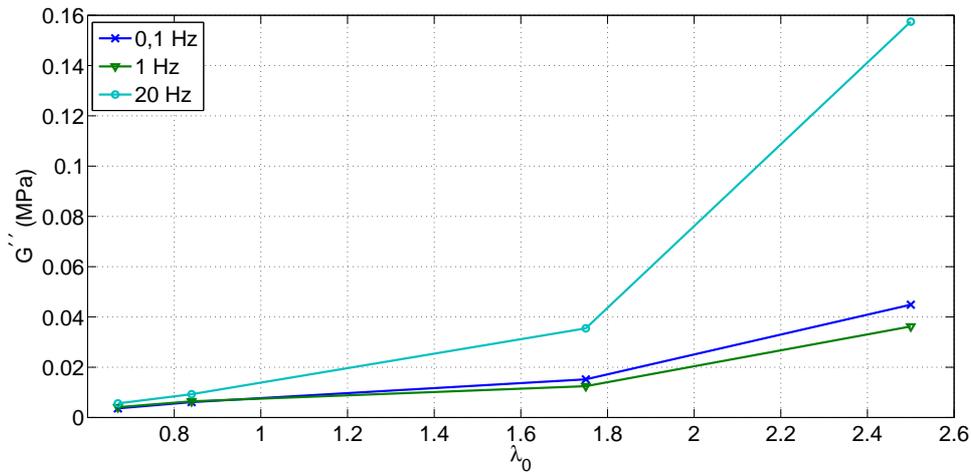


FIGURE II.3.32 : Évolution du module de perte en cisaillement en fonction de l'extension de la précharge (en traction et compression uniaxiale), oscillations en torsion pure d'amplitude 0,4 %

log/log. Ce graphe est tracé pour plusieurs fréquences sur la figure II.3.33. Les cinq courbes ont toutes des formes proches d'une droite. De plus, elles sont proches les unes des autres, et il est difficile de voir l'influence de la fréquence sur cette droite. En effectuant une régression linéaire, comme décrit dans le chapitre précédent par l'équation (II.2.68), les coefficients α et β sont calculés. Ils représentent respectivement le coef-

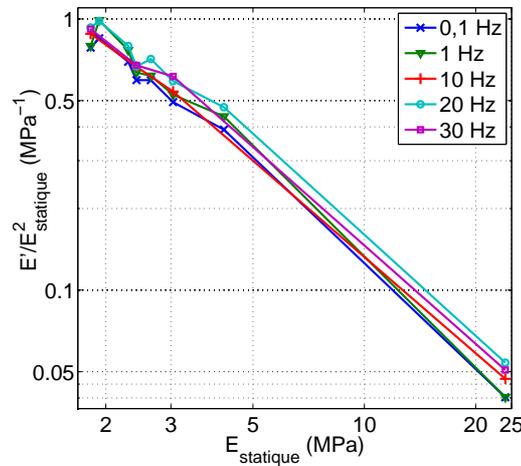


FIGURE II.3.33 : Évolution du ratio $E'/E_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, toutes précharges, oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 %

ficient de proportionnalité et la puissance de $E_{statique}$ permettant de calculer E' . La figure II.3.34 montre l'évolution de ces deux coefficients en fonction de la fréquence. Premièrement, l'intervalle de valeurs pour les deux coefficients est assez restreint. Deuxièmement,

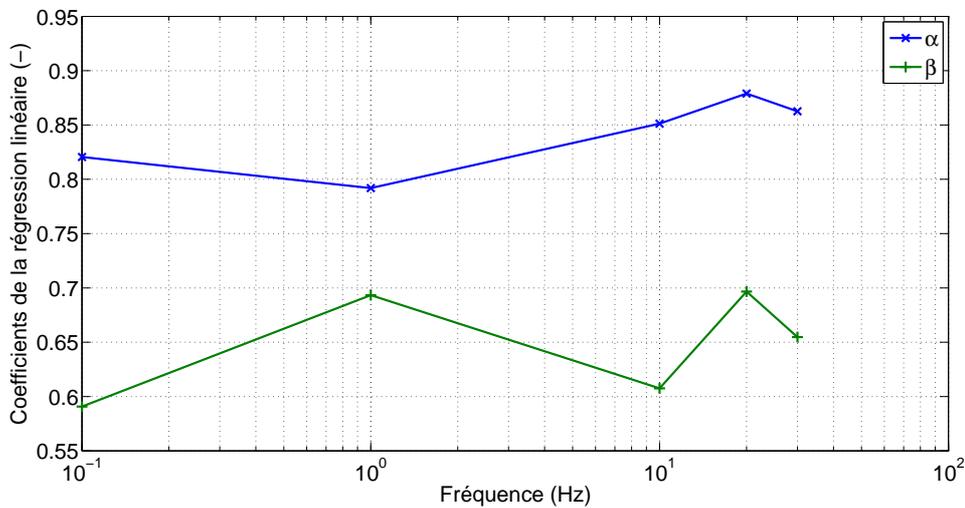


FIGURE II.3.34 : Évolution des paramètres reliant E' et $E_{statique}$ en fonction de la fréquence

mement, α semble augmenter légèrement lorsque la fréquence augmente. Enfin, il n'y a pas de tendance nette concernant β .

De la même manière, l'évolution du ratio $E''/E_{statique}^2$ est tracé en fonction de

$E_{statique}$ sur la figure II.3.35. De nouveau, des courbes proches de droites sont trouvées

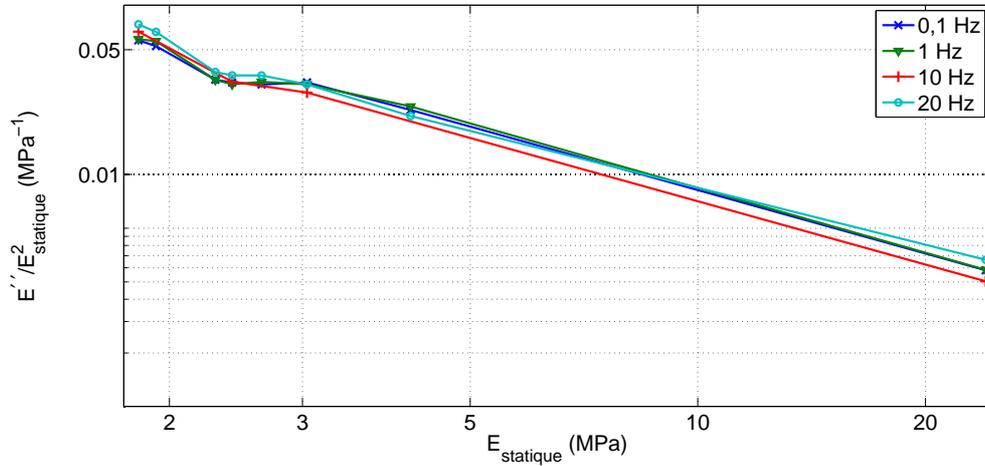


FIGURE II.3.35 : Évolution du ratio $E''/E_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, toutes précharges, oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 %

pour toutes les fréquences. Comme pour le module de conservation, on peut effectuer une régression linéaire, dont l'évolution des paramètres avec la fréquence est représentée sur la figure II.3.36. Ces valeurs sont quasiment constantes.

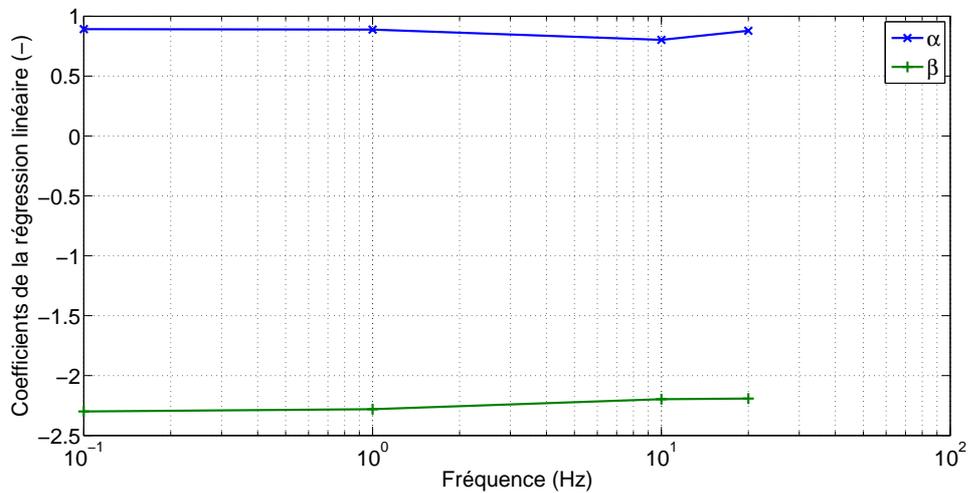


FIGURE II.3.36 : Évolution des paramètres reliant E'' et $E_{statique}$ en fonction de la fréquence

Enfin, le même type de démarche peut être appliquée aux modules en cisaillement. Les figures II.3.37 et II.3.38 montrent respectivement l'évolution des ratios $G''/G_{statique}^2$ et $G''/G_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique.

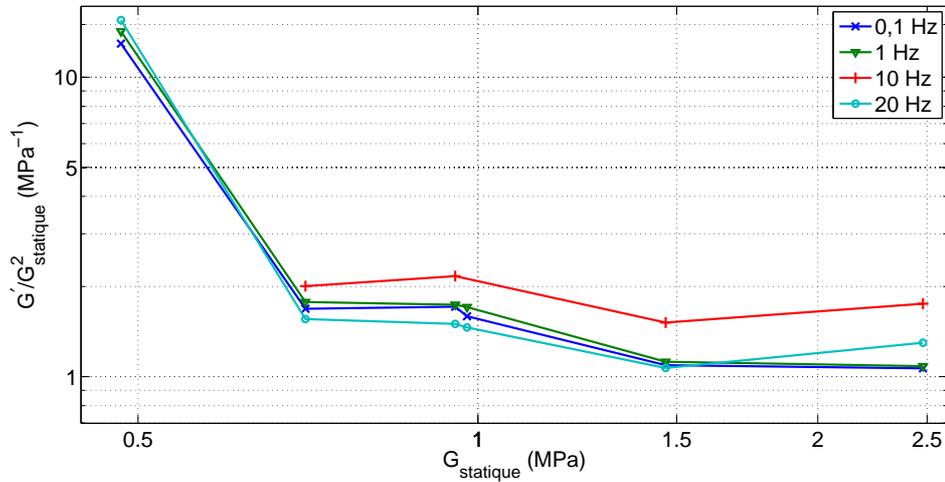


FIGURE II.3.37 : Évolution du ratio $G'/G_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, toutes précharges, oscillations en torsion pure d'amplitude 0,4 %

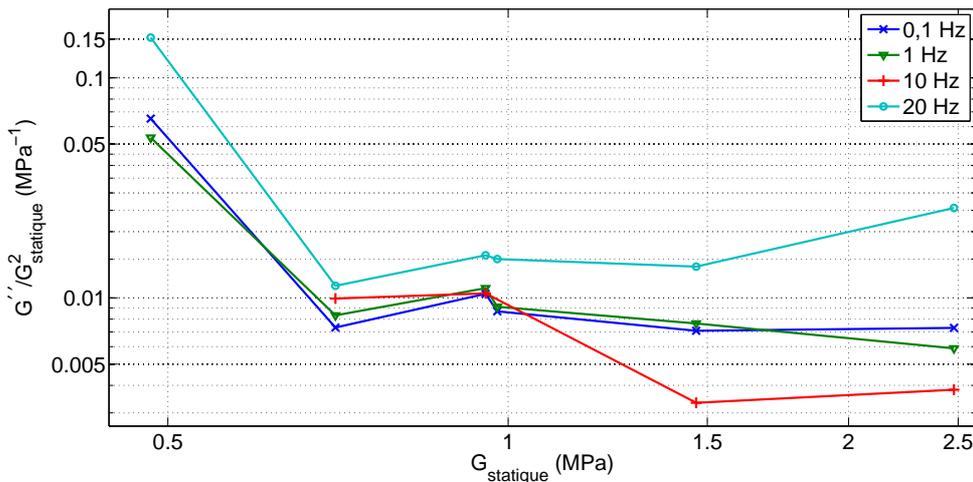


FIGURE II.3.38 : Évolution du ratio $G''/G_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, toutes précharges, oscillations en torsion pure d'amplitude 0,4 %

Dans les deux cas, une nette différence est trouvée entre la raideur statique la plus faible et les autres valeurs : les deux ratios sont plus élevés pour la raideur statique la plus faible. Cette fois-ci, les courbes ne se rapprochent pas de droites. Cependant, notons que ces résultats sont moins fiables que ceux en traction, puisque les données (couples) à partir desquels ils sont calculées sont plus bruitées.

Finalement, tous ces résultats, notamment les dernières courbes, montrent que parmi les paramètres étudiés, celui qui influence le plus le comportement dynamique, et donc

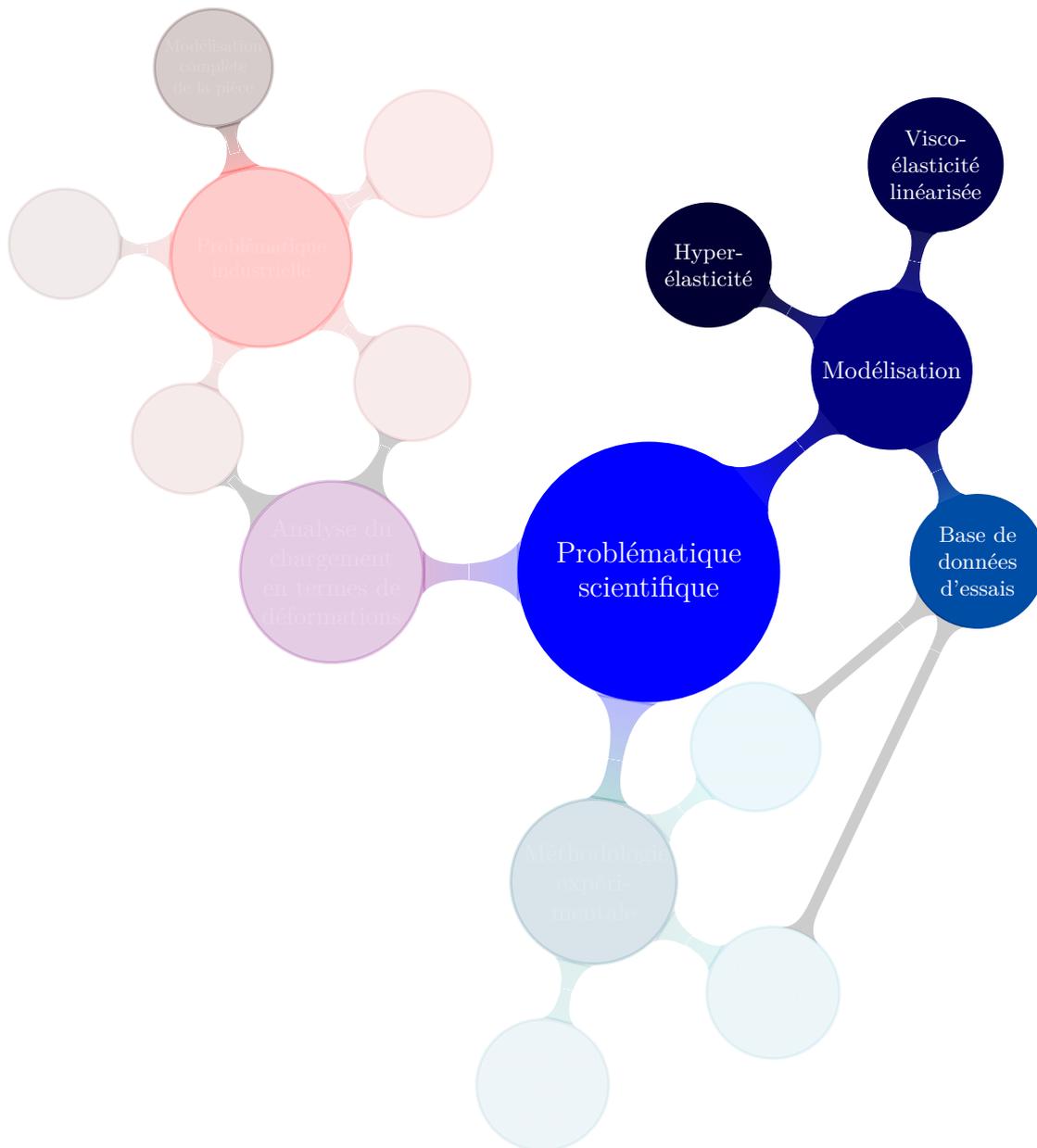
les modules de conservation et de perte, est la précharge, via le changement de raideur statique. Les différents modules ont été tracés à précharge fixe, et il a été vu qu'ils dépendent également de la fréquence et de l'amplitude, mais de façon beaucoup moins marquées.

Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats d'essais ont été présentés. Dans un premier temps, les deux campagnes d'essais ont été décrites précisément. Ensuite, les résultats concernant la campagne d'essais quasi-statiques ont été exposés, en commençant par les résultats classiques de la traction-torsion. Il a notamment été établi qu'un modèle hyperélastique où l'énergie de déformation ne dépend pas du deuxième invariant des tenseurs de Cauchy-Green ne permettrait pas de prédire correctement le comportement quasi-statique du matériau. Dans un deuxième temps, il a été montré que le chemin de chargement suivi avait peu d'influence sur la réponse du matériau, puis des courbes de contraintes et d'énergie de déformation calculées au rayon extérieur du cylindre ont été tracées, s'ajoutant aux courbes déjà présentées dans le chapitre précédent. Ces courbes seront utilisées dans la partie suivante pour choisir la loi de comportement hyperélastique. Enfin, les résultats concernant la campagne d'essais cycliques ont été présentés, via l'évolution des modules de conservation et de perte. Il a été établi que ces modules sont fortement conditionnés par la raideur statique de la précharge, et dans une moindre mesure, par la fréquence et l'amplitude des oscillations. Il a été vu que l'évolution par rapport à ces deux paramètres suit les résultats classiques déjà rapportés par d'autres auteurs.

Troisième partie

Modélisation



Chapitre 1

Modélisation du comportement quasi-statique en traction-torsion

Sommaire

1.1 Les modèles hyperélastiques	152
1.1.1 Les modèles physiques	152
1.1.2 Les modèles phénoménologiques	153
1.1.3 Bilan	154
1.2 Méthode d'identification des paramètres des trois modèles hyperélastiques sélectionnés	155
1.2.1 Choix du nombre de paramètres	155
1.2.2 Procédure d'identification	156
1.3 Résultats	160
1.3.1 Résultats sur la base de données d'identification	160
1.3.2 Résultats sur les autres essais en traction-torsion simultanées	165

Introduction

Les modèles de comportement hyperélastiques, isotropes incompressibles adaptés aux grandes déformations sont considérés ici. L'hyperélasticité est définie par l'existence d'une énergie de déformation dont dérive la contrainte. Choisir une loi revient donc à choisir une forme d'énergie de déformation. Le formalisme de l'hyperélasticité incompressible a été introduit dans le chapitre 1 de la partie II (équations (II.1.16-II.1.18)), et pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [Holzapfel \(2000\)](#). L'objectif ici n'est pas de proposer une synthèse des nombreux modèles hyperélastiques existants. Les principales approches seront d'abord présentées en se basant sur [Boyce et Arruda \(2000\)](#), [Verron \(2003\)](#) et [Marckmann et Verron \(2006\)](#). Ensuite, trois modèles seront sélectionnés : le modèle du tube étendu, le modèle de Mooney-Rivlin généralisé et le modèle d'Ogden. Le modèle du tube étendu et le modèle d'Ogden sont choisis car ils font partie de ceux qui

permettent de prédire le plus précisément des essais dans différentes directions, comme l'ont montré [Marckmann et Verron \(2006\)](#) en les comparant avec les données d'essais de [Treloar \(1944b\)](#) et [Kawabata *et al.* \(1981\)](#), en traction uniaxiale, biaxiale, équi-biaxiale et en cisaillement pur. Le modèle de Mooney-Rivlin généralisé est également sélectionné pour son formalisme simple en puissances de I_1 et I_2 , et son adaptabilité induite par la présence de séries. De plus, [Hartmann \(2001a,b\)](#) a montré qu'il était possible d'obtenir avec ce modèle des résultats satisfaisants sur les essais de traction-torsion. Alors qu'il a été vu que l'étude des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants I_1 et I_2 est peu pertinente, il ne faut pas exclure les modèles qui proposent d'exprimer l'énergie de déformation comme une fonction de ces invariants, puisqu'il est aisé de calculer des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à d'autres grandeurs, comme les extensions principales à partir des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à I_1 et I_2 . Après avoir présenté ces trois modèles, la procédure d'identification de leurs paramètres matériau sera exposée. Enfin, les résultats issus des modèles et des essais seront comparés.

1.1 Les modèles hyperélastiques

On distingue les modèles physiques des modèles phénoménologiques.

1.1.1 Les modèles physiques

Les modèles physiques sont basés sur des théories statistiques du réseau moléculaire. Deux étapes sont nécessaires au développement de ce type de modèle. D'abord, il faut décrire le comportement d'une chaîne polymère, une chaîne étant définie comme la partie de molécule entre deux points de jonctions successifs (réticulation, enchevêtrement). Pour cela, on considère que la chaîne est constituée de N segments, un segment correspondant à un monomère inextensible, de longueur a . Chaque segment de la chaîne étant considéré comme inextensible, l'élasticité de la chaîne est uniquement due au dépliement de la chaîne. Ainsi, l'élasticité de la chaîne est directement liée à la position relative de ses segments c'est-à-dire à ses différentes conformations, qui peuvent être décrites par une densité de probabilité. L'hypothèse la plus simple est de considérer une distribution gaussienne ([Guth et Mark \(1934\)](#)), mais cette approche ne permet pas de prendre en compte le comportement de chaînes très étirées puisque l'hypothèse est faite qu'une chaîne ne s'approche jamais de sa configuration entièrement étirée. Une nouvelle distribution qui ne présente pas cette limitation, est alors proposée par [Kuhn et Grün \(1942\)](#), reliant force de rétractation et distance entre les extrémités de la chaîne par une fonction de Langevin. La formulation adoptée permet alors de prendre en compte le cas de chaînes complètement étirées.

Une fois que le comportement statistique d'une chaîne a été établi, il faut l'intégrer au comportement du réseau de chaînes, c'est-à-dire déterminer comment les chaînes se meuvent les unes par rapport aux autres, et donc, comment les points de jonction se déplacent. [Kuhn et Grün \(1942\)](#) commencent par émettre l'hypothèse d'une déformation

affine. Pour expliquer cette théorie, il faut d'abord préciser qu'on distingue la position moyenne de chaque point de jonction (c'est-à-dire la plus probable), et leur position instantanée. On dit que les points de jonction fluctuent si leur position instantanée est différente de leur position moyenne. Une fluctuation est en fait causée par l'agitation thermique de chaque chaîne. Plus les chaînes sont liées entre elles, plus le réseau peut-être considéré comme rigide, et donc plus la flexibilité due à l'agitation thermique des chaînes est négligeable. Par conséquent, [Kuhn et Gr \$\ddot{u}\$ n \(1942\)](#) font l'hypothèse que les fluctuations sont négligeables. Alors, positions moyennes et instantanées sont confondues. La deuxième hypothèse fondamentale consiste à considérer que chaque point de jonction fait partie du milieu continu. Ainsi la déformation en chaque point de jonction est proportionnelle à la déformation macroscopique d'où le nom de déformation affine. Par la suite, [James et Guth \(1947\)](#) choisissent de ne plus négliger les fluctuations. Pour cela, ils établissent la notion de « réseau fantôme » : les chaînes peuvent s'interpénétrer librement, elles n'ont pas d'autre propriété que de transmettre les efforts aux points de jonction. Cette hypothèse permet de réintroduire les fluctuations propres à chaque chaîne. Cette fois-ci, seule la position moyenne des points de jonction suit le milieu continu, et donc subit une déformation affine. La position instantanée est influencée par les fluctuations, qui sont elles considérées comme indépendantes de la déformation. Une fois que ces considérations sont faites, la question se pose de savoir comment passer de l'énergie de déformation d'une chaîne à celle du réseau. On peut considérer que les chaînes sont distribuées aléatoirement dans une sphère, et l'énergie de déformation totale est trouvée en intégrant la réponse contrainte/déformation de chaque chaîne ([Treloar et Riding, 1979](#); [Wu et Van der Giessen, 1993](#)). Cependant, ce calcul est numériquement très coûteux, et peut-être aisément simplifié en considérant un certain nombre de chaînes dont des points de jonction sont inscrits dans une cellule élémentaire (un cube, un tétraèdre). Ainsi, le modèle 3-chaînes ([James et Guth, 1943](#); [Wang et Guth, 1952](#)) considère trois chaînes orientées selon trois arêtes qui partagent le même sommet du cube, le modèle 4-chaînes ([Flory et Rehner Jr, 1943](#); [Treloar, 1946](#)) considère quatre chaînes reliées entre elles au centre d'un tétraèdre, chacune d'entre elles étant attachée à l'un des sommets du tétraèdre. Le modèle 8-chaînes ([Boyce et Arruda, 2000](#)), considère huit chaînes reliées entre elles au centre d'un cube, et chacune est reliée à l'un des sommets du cube. Enfin, d'autres modèles moléculaires sont basés sur la théorie des tubes : l'ensemble des positions que peut prendre une chaîne est définie par un tube virtuel autour de celle-ci. On citera par exemple [Edwards et Vilgis \(1988\)](#), [Doi et See \(1996\)](#) et [Heinrich et Kaliske \(1997\)](#). Ces modèles ont ensuite été étendus pour prendre en compte la limite d'extensibilité des chaînes, et ainsi améliorer le comportement en grandes déformations par [Kaliske et Heinrich \(1999\)](#).

1.1.2 Les modèles phénoménologiques

[Treloar \(1975\)](#) définit ces modèles comme « des approches ayant l'objectif plus limité [que celui des approches moléculaires] de décrire les propriétés mécaniques du caoutchouc à l'aide d'un cadre mathématique bien défini sans se soucier des interprétations moléculaires ». Ces modèles se focalisent donc sur le comportement macroscopique du

matériau. De nombreux modèles existent, et les deux approches les plus utilisées sont présentées ici.

Parmi ces modèles, on distingue d'abord ceux qui exprime l'énergie de déformation comme un développement en série de $I_1 - 3$ et $I_2 - 3$ (Rivlin, 1948):

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j. \quad (\text{III.1.1})$$

Plusieurs troncatures de ce développement peuvent être considérées, englobées par le nom de modèle de Mooney-Rivlin (certains cas font l'objet d'une appellation particulière, qui ne sera pas considérée ici, à part le modèle de Mooney (1940) qui ne considère que la première puissance en I_1 et I_2). Évidemment, un compromis est à faire pour fixer le nombre de termes dans la somme, puisqu'augmenter le nombre de termes permet de générer un modèle plus proche des données d'essais sur lesquelles les paramètres sont identifiés, mais diminue également la robustesse du modèle : plus il y a de paramètres, plus il est probable que le modèle ne soit pas fiable en dehors de la plage de déformations considérées pour l'identification. D'autres auteurs ont développé des modèles phénoménologiques en invariants des tenseurs de Cauchy-Green (Gent et Thomas, 1958; Hart-Smith, 1966; Gent, 1996; Yeoh et Fleming, 1997), avec des exponentielles ou des logarithmes.

D'autres auteurs préfèrent exprimer l'énergie de déformation comme une fonction des trois extensions principales (deux dans le cas incompressible). Ce formalisme a été introduit par Valanis et Landel (1967), qui proposent une forme séparable :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3). \quad (\text{III.1.2})$$

Parmi ces modèles, le plus utilisé est incontestablement le modèle de Ogden (1972), qui propose d'écrire l'énergie de déformation comme un développement en séries des puissances de λ_i . L'auteur montre qu'avec $N = 3$ (6 paramètres), le modèle peut prédire de manière précise le comportement en grandes déformations.

1.1.3 Bilan

Comme il a été expliqué dans l'introduction, il a été choisi de comparer trois modèles aux essais quasi-statiques, l'un étant issu de l'approche moléculaire et les deux autres de l'approche phénoménologique :

- Le modèle du tube étendu ;
- Le modèle de Mooney-Rivlin ;
- Le modèle d'Ogden.

Parmi ces modèles, deux sont écrits sous forme de séries. Avant d'identifier les paramètres matériau, il faut d'abord choisir combien de termes sont à prendre en compte, et donc combien de paramètres sont à déterminer. L'objectif est d'utiliser le moins de paramètres possible pour assurer la robustesse du modèle. Ensuite, la procédure d'identification à proprement parler peut être mise en place.

1.2 Méthode d'identification des paramètres des trois modèles hyperélastiques sélectionnés

1.2.1 Choix du nombre de paramètres

Dans le modèle du tube étendu, l'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{G_c}{2} \left[\frac{(1 - \delta^2)(I_1 - 3)}{1 - \delta^2(I_1 - 3)} + \ln [1 - \delta^2(I_1 - 3)] \right] + 2 \frac{G_e}{\beta^2} (\lambda_1^{-\beta} + \lambda_2^{-\beta} + \lambda_3^{-\beta} - 3). \quad (\text{III.1.3})$$

Le nombre de paramètres à identifier est fixe et égal à 4 : les deux raideurs G_c et G_e , β qui pilote la déformation de tube, et δ qui traduit l'inextensibilité des chaînes. Les deux autres modèles sont écrits sous forme de séries, et il faut donc choisir la troncature à effectuer et ainsi fixer le nombre de paramètres du modèle. Pour le modèle d'Ogden, il est courant d'utiliser une somme à trois termes :

$$W = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3). \quad (\text{III.1.4})$$

Cette forme fournit de bons résultats, et c'est celle que nous adoptons ici. Il y a donc 6 paramètres à identifier : $(\mu_i, \alpha_i)_{i=1,2,3}$. Le nombre de termes à utiliser dans le modèle de Mooney-Rivlin est plus sujet à discussion. Comme indiqué par [Hartmann \(2001b\)](#), il est nécessaire de choisir les deux premiers termes en I_1 et I_2 , avec les paramètres C_{10} et C_{01} pour prédire la pente initiale de la courbe effort/déplacement et de la courbe couple/angle. L'ajout de termes d'ordres supérieurs permet de reproduire le raidissement de la courbe effort/déplacement pour les grands déplacements, ainsi que la non linéarité de la courbe effort/angle pour un essai de torsion pure. Afin de vérifier ces phénomènes, nous commençons par identifier les paramètres d'un modèle à un terme (C_{10}), à deux termes (C_{10}, C_{01}), à trois termes (C_{10}, C_{01} et C_{20}) et à quatre termes (C_{10}, C_{01}, C_{20} et C_{02}) sur un essai de traction uniaxiale. La figure [III.1.1](#) montre l'évolution de l'effort en fonction de l'extension pour ses quatre modèles et l'essai. Il apparaît que le modèle à un paramètre (néo-hookéen) ne convient que pour les très petites déformations ($\lambda < 1,0005$), le modèle à deux paramètres (modèle de Mooney) convient jusqu'au déformations intermédiaires (jusqu'à environ $\lambda < 1,9$), c'est-à-dire il ne prend pas en compte le raidissement aux grandes déformations alors que les deux autres modèles conviennent sur toute la plage de déformation considérée ($1 < \lambda < 2,5$). De plus, il apparaît que les deux autres modèles conduisent à des résultats quasiment identiques, nous concluons donc que pour modéliser correctement la traction uniaxiale, il est nécessaire de prendre en compte les termes en C_{10} et C_{01} ainsi qu'un terme en C_{i0} avec $i \geq 2$: les termes en C_{0j} avec $j \geq 2$ n'apporte pas d'amélioration significative, et il est alors inutile, voire néfaste d'augmenter le nombre de paramètres. Sur la figure, il a été vu que l'ajout du paramètre C_{20} permet de prendre en compte le raidissement aux grandes déformations. En remplaçant le terme lié au paramètre C_{20} par un terme d'ordre supérieur, il est

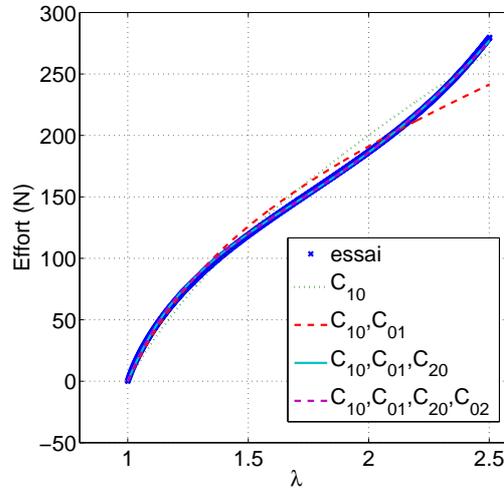


FIGURE III.1.1 : Comparaison de l'effort mesuré en fonction de l'extension avec l'effort calculé pour quatre modèles de Mooney-Rivlin ; essai de traction uniaxiale

possible d'améliorer encore la prédiction du modèle, tout en gardant le même nombre de paramètres. Afin de savoir lequel de ces paramètres adopter, quatre modèles sont considérés. Ils prennent tous en compte les coefficients C_{10} et C_{01} , et en possèdent un supplémentaire : C_{20} , C_{30} , C_{40} ou C_{50} . Ces paramètres sont identifiés sur les courbes d'effort et de couple pour un essai de traction uniaxiale et un essai de traction-torsion. La courbe la plus discriminante, à savoir la courbe couple/angle par unité de longueur pour l'essai de traction-torsion est présentée en figure III.1.2. Il apparaît en effet que le couple évolue non linéairement avec l'angle par unité de longueur, et que les modèles peinent à prédire le couple pour les angles les plus élevés. Même si les modèles s'éloignent de l'essai pour les forts angles, il apparaît que plus le degré du plus haut terme est élevé, plus la courbe du modèle a la même forme que l'essai. Nous choisissons donc de retenir le terme de plus haut degré considéré ici. Il correspond aussi au plus haut terme considéré par Hartmann (2001b). Finalement le modèle de Mooney-Rivlin considéré ici à la forme suivante :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{50} (I_1 - 3)^5. \quad (\text{III.1.5})$$

Ce modèle a notamment été utilisé par Lion (1997), et seulement trois paramètres sont à identifier.

1.2.2 Procédure d'identification

L'optimisation des paramètres se fait par un script développé via le logiciel Matlab, basé sur la minimisation sous contraintes de l'erreur au sens des moindres carrés. Pour cela, la fonction *fmincon* de Matlab est utilisée. Cette fonction prend en argument l'erreur entre essai et modèle, et cherche les paramètres qui permettent de minimiser cette erreur.

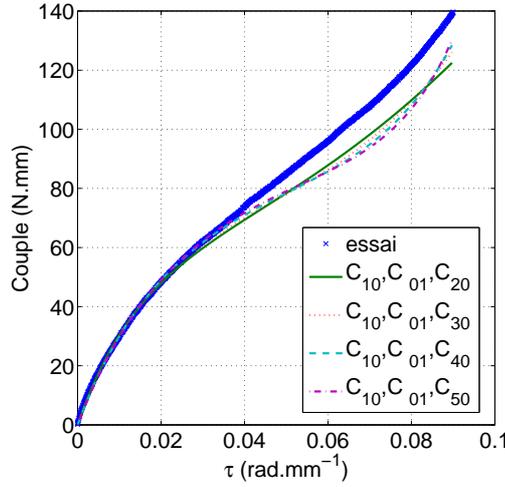


FIGURE III.1.2 : Comparaison du couple mesuré en fonction de l'angle par unité de longueur avec le couple calculé pour quatre modèles de Mooney-Rivlin ; essai de traction-torsion à $\lambda_{max} = 2,5$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$

Elle permet aussi d'intégrer des contraintes sur les paramètres. En effet, il existe des restrictions sur les valeurs que les paramètres peuvent prendre. Dans un premier temps, ces restrictions sont développées pour chacun des modèles. Ensuite, la manière de calculer l'erreur sera explicitée. Enfin, la base de données d'identification sera présentée.

A) Restrictions sur les valeurs des paramètres

La résolution d'un problème mécanique hyperélastique passe par la minimisation d'une fonctionnelle qui fait intervenir l'énergie de déformation et la puissance des efforts extérieurs. Il faut donc s'assurer que la loi de comportement hyperélastique choisie assure l'existence d'un minimum. Pour vérifier cela, plusieurs restrictions sur la forme de l'énergie de déformation ont été proposées. En effet, s'il est choisi d'imposer que l'énergie de déformation est convexe par rapport au gradient de la transformation, l'existence du minimum est vérifiée. Or [Coleman et Noll \(1959\)](#) montre que la condition de convexité est incompatible avec la condition d'objectivité (l'énergie de déformation est invariante lors d'un changement de configuration). La convexité est donc une hypothèse trop forte. [Morrey et al. \(1952\)](#) propose de la dégrader en introduisant la notion de quasi-convexité, qui est assez complexe à manipuler. [Ball \(1976\)](#) utilise la notion de polyconvexité (qui est aussi une condition de convexité dégradée, et qui induit la quasi-convexité), qui a l'avantage d'avoir une forme locale. Une énergie de déformation W est polyconvexe si et seulement s'il existe une fonction W^* telle que :

$$W(\mathbf{F}) = W^*(\mathbf{F}, \text{adj}\mathbf{F}, \det\mathbf{F}), \quad (\text{III.1.6})$$

avec W^* convexe. Notamment, si $W(\mathbf{F}) = W_a(\mathbf{F}) + W_b(\text{adj}\mathbf{F}) + W_c(\det\mathbf{F})$ et que les fonctions $W_{a,b,c}$ sont toutes convexes par rapport à leurs arguments respectifs, alors W est polyconvexe. Ici, $\text{adj}\mathbf{F} = (\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}$. Pour plus de détails sur la polyconvexité on pourra notamment se référer à [Ciarlet et Kesavan \(1983\)](#) et [Hartmann et Neff \(2003\)](#).

Il est possible de réécrire le modèle de Mooney-Rivlin sous la forme suivante :

$$W = C_{10} \left(\|\mathbf{F}\|^2 - 3 \right) + C_{01} \left(\|\text{adj}\mathbf{F}\|^2 - 3 \right) + C_{50} \left(\|\mathbf{F}\|^2 - 3 \right)^5, \quad (\text{III.1.7})$$

où $\|\mathbf{A}\| = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$. Ainsi si les deux fonctions W_a et W_b définies par

$$W_a(\mathbf{F}) = C_{10} \left(\|\mathbf{F}\|^2 - 3 \right) + C_{50} \left(\|\mathbf{F}\|^2 - 3 \right)^5, \quad (\text{III.1.8})$$

$$W_b(\mathbf{F}) = C_{01} \left(\|\text{adj}\mathbf{F}\|^2 - 3 \right) \quad (\text{III.1.9})$$

sont convexes respectivement par rapport à \mathbf{F} et $\text{adj}\mathbf{F}$, alors W sera polyconvexe. Comme $\|\cdot\|^2$ est une fonction convexe, il faut que $C_{01} \geq 0$. W_a est la composée de la fonction $f(x) = C_{10}(x - 3) + C_{50}(x - 3)^5$ et de $g(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|^2$. La composée d'une fonction convexe croissante avec une fonction convexe étant convexe, il suffit de montrer que f est croissante convexe pour montrer que W_a est convexe. Pour assurer la croissance et la convexité de f , on impose que ses dérivées première et seconde sont positives, ce qui se traduit par :

$$C_{50} \geq 0 \quad (\text{III.1.10})$$

$$C_{10} \geq 0 \quad (\text{III.1.11})$$

Finalement, pour vérifier que l'énergie de déformation du modèle de Mooney-Rivlin à trois paramètres est polyconvexe, il suffit d'imposer que tous les paramètres sont positifs. Notons que le raisonnement précédent n'est pas une équivalence, et que des coefficients négatifs pourraient aboutir à une loi polyconvexe. Cependant cette restriction semble raisonnable pour assurer la stabilité du modèle. C'est aussi la restriction choisie par [Hartmann \(2001b\)](#).

Concernant le modèle d'Ogden, la restriction pour les paramètres est plus compliquée. En effet, [Ogden \(1972\)](#) choisit de donner une restriction sur les paramètres de son modèle, afin que celui-ci vérifie non pas la condition de polyconvexité, mais l'inégalité de [Hill \(1970\)](#). Cette inégalité, comme celles de [Baker et Ericksen \(1954\)](#) et celle de [Coleman et Noll \(1959\)](#), fait partie des premières conditions qui ont été formulées et que doivent vérifier la loi de comportement, mais ne garantissent pas un problème bien posé ([Hartmann, 2001b](#)). Pour vérifier cette inégalité, [Ogden \(1972\)](#) montre qu'il suffit que $\mu_i \alpha_i > 0, \forall i$. Cette condition est suffisante dans tous les cas, et n'est nécessaire que si le modèle ne comporte qu'un ou deux termes. [Ciarlet et Kesavan \(1983\)](#) ont montré que si $\mu_i > 0$ et $\alpha_i \geq 1$, alors le modèle d'Ogden est polyconvexe. Cependant, ce type de valeurs est rarement prises pour tous les paramètres du modèle considérés dans la littérature. Il serait trop restrictif de considérer ces conditions, et il est choisi de n'imposer que $\mu_i \alpha_i > 0, \forall i$.

Enfin, les restrictions du modèle du tube étendu sont basées sur des considérations physiques (Kaliske et Heinrich, 1999). Les auteurs imposent alors $0 \leq \beta \leq 1$, $G_c \geq 0$, $G_e \geq 0$, ce que nous considérerons pour l'identification.

B) Calcul de l'erreur

L'erreur à minimiser est basée sur la différence entre les résultats d'essais et les résultats des modèles. Or, il faut comparer à la fois les efforts et les couples, qui ne sont pas forcément du même ordre de grandeur. Afin de s'assurer d'une minimisation équivalente pour l'erreur commise sur l'effort et sur le couple, Hartmann (2001a) propose de pondérer la différence entre l'effort mesuré et l'effort calculé par le maximum d'effort mesuré lors de l'essai, et la différence entre le couple mesuré et le couple calculé par le maximum de couple mesuré lors de l'essai. Cependant, cela tend à accentuer la différence entre, par exemple les faibles efforts et les efforts élevés. Nous choisissons donc calculer l'erreur comme un écart relatif entre les efforts mesurés et les efforts calculés, et les couples mesurés et les couples calculés. Alors,

$$err = \left[\frac{N_{exp}(1) - N_{mod}(1)}{N_{mod}(1)}; \dots; \frac{N_{exp}(end) - N_{mod}(end)}{N_{mod}(end)}; \right. \\ \left. \frac{M_{exp}(1) - M_{mod}(1)}{M_{mod}(1)}; \dots; \frac{M_{exp}(end) - M_{mod}(end)}{M_{mod}(end)} \right], \quad (III.1.12)$$

où err est le vecteur d'erreur, $N_{exp}(1)$ le premier effort mesuré, $N_{mod}(1)$ l'effort correspondant calculé, et de même pour les couples. Enfin, la minimisation s'effectue sur cette erreur prise au sens des moindres carrés :

$$err_{ls} = \frac{1}{2} \|err\|_2^2. \quad (III.1.13)$$

C) Difficultés d'identification

Alors que le modèle de Mooney-Rivlin ne pose pas de problèmes en termes d'identification, les paramètres du modèle d'Ogden peuvent difficilement être identifiés directement, car il existe plusieurs optimums qui dépendent des valeurs initiales renseignées (voir notamment Ogden *et al.* (2004)). Pour choisir parmi ces paramètres, il a été décidé de générer aléatoirement des valeurs initiales sur α_1 et α_2 , puis de retenir l'ensemble de paramètres présentant l'erreur la plus faible. Le même type de problème est rencontré avec le modèle du tube étendu. Il a été choisi de procéder à la minimisation des paramètres G_c , G_e et δ pour plusieurs valeurs de β fixées. La valeur de β qui conduit à l'erreur la plus faible est retenue. Ensuite, on effectue la même procédure en fixant G_c à plusieurs valeurs, et en optimisant les deux autres paramètres. Là encore, la valeur de G_c qui permet d'obtenir l'erreur la plus faible est retenue. Une fois que ces deux paramètres β et G_c sont fixés, l'optimisation des deux autres paramètres ne dépend plus des valeurs initiales. Notons finalement que le formalisme en extensions principales

des modèles d'Ogden et du tube étendu est plus compliqué que celui des invariants de Cauchy-Green. Les équations permettant d'aboutir aux efforts et couples à partir des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales sont présentées dans [Ogden et Chadwick \(1972\)](#). La dernière remarque concerne la précision des paramètres : il est vérifié que la troncature effectuée à quelques décimales n'altère pas significativement la réponse des modèles.

D) Base de données d'identification

Comme expliqué précédemment, il a été choisi d'identifier les modèles sur l'erreur commise sur l'effort et le couple. Il aurait aussi pu être choisi d'identifier les paramètres sur l'erreur commise dans la prédiction des contraintes et dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions. Cependant, il ne paraît pas cohérent d'identifier les paramètres uniquement sur ces données, car elles ne sont valables qu'au rayon extérieur du cylindre. Il faudrait donc les combiner aux valeurs d'efforts et couples. Or, il a également été constaté que le saut observé sur toutes les courbes de contraintes ou dérivées de l'énergie de déformation est difficilement reproduit par les modèles. Finalement, il est décidé d'identifier les paramètres uniquement sur les valeurs d'effort et de couple. Afin de pouvoir juger de l'efficacité du modèle en dehors des modes de déformation sur lesquelles les paramètres ont été identifiés, il est choisi de ne considérer que trois essais dans la base d'identification :

- Traction uniaxiale à $\lambda_{max} = 2,5$;
- Torsion pure à $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$;
- traction-torsion à $\lambda_{max} = 2,5$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$.

Les paramètres de chacun des modèles vont être identifiés sur cette base d'essais.

1.3 Résultats

Dans cette section, les résultats sont présentés, en commençant par les valeurs de paramètres et la comparaison des résultats d'essais de la base d'identification avec ceux des modèles. Ensuite, les modèles sont appliqués à tous les autres cas de chargement en chemin direct, et les efforts et couples mesurés et calculés sont confrontés. Enfin, les dérivées de l'énergie de déformation au rayon extérieur sont calculées avec les trois modèles, et comparées aux données expérimentales. Cette stratégie permet de juger à la fois de la réponse globale des modèles, avec la comparaison sur les efforts et couples et à la fois sur leur réponse locale, avec la comparaison sur les dérivées de l'énergie de déformations au rayon extérieur.

1.3.1 Résultats sur la base de données d'identification

A) Paramètres identifiés

Les paramètres des modèles d'Ogden, du tube étendu et de Mooney-Rivlin sont respectivement présentés dans les tableaux [III.1.1](#), [III.1.2](#) et [III.1.3](#). Notons ici que le

paramètre C_{50} est très faible par rapport aux deux autres paramètres, et pourtant il n'est absolument pas négligeable car sans lui, le modèle de Mooney-Rivlin ne peut prédire le fort raidissement aux grandes déformations.

α_1	α_2	α_3	μ_1 (MPa)	μ_2 (MPa)	μ_3 (MPa)
-11,5312	1,2165	-1,9862	-0,005	1,4311	-0,0025

TABLEAU III.1.1 : Paramètres du modèle d'Ogden

G_c (MPa)	G_e (MPa)	β	δ
0,277	0,695	0,006	0,281

TABLEAU III.1.2 : Paramètres du modèle de tube étendu

C_{10} (MPa)	C_{01} (MPa)	C_{50} (MPa)
0,3243	0,1144	4,6E ⁻⁵

TABLEAU III.1.3 : Paramètres du modèle de Mooney-Rivlin

À présent, les courbes d'effort et de couple mesurés et calculés par les trois modèles sont présentées pour les trois essais de la base d'identification, à savoir la traction uniaxiale, la torsion pure et la traction-torsion à extension et angle maximaux. Ensuite, un tableau récapitulatif des erreurs relatives maximale et moyenne pour chacun des modèles et pour l'effort et le couple de chaque essai est présenté.

B) Traction uniaxiale

La figure III.1.3 montre l'évolution de l'effort en fonction de l'extension, mesuré et calculé par les trois modèles pour l'essai de traction uniaxiale à $\lambda_{max} = 2,5$. Sur cette figure, il apparaît que les trois modèles prédisent correctement l'effort jusqu'à une extension d'environ $\lambda = 1,4$. Ensuite, les trois modèles surestiment l'effort. Les trois modèles sont très proches jusqu'à $\lambda = 2,2$, puis les modèles de Mooney-Rivlin et du tube étendu présentent un raidissement semblable à celui de l'effort mesuré, alors que le modèle d'Ogden conserve à peu près la même pente.

C) Torsion pure

La figure III.1.4 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de torsion pure à $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$ (158 degrés). Pour cet essai, clairement, le modèle de Mooney-Rivlin est celui qui prédit le mieux l'effort. En effet, jusqu'à $\tau = 0,05 \text{ rad.mm}^{-1}$ (ce qui correspond à un angle de 88 °), l'effort calculé par ce modèle est très proche de l'effort mesuré. Pour des angles plus élevés, le modèle surestime légèrement l'effort

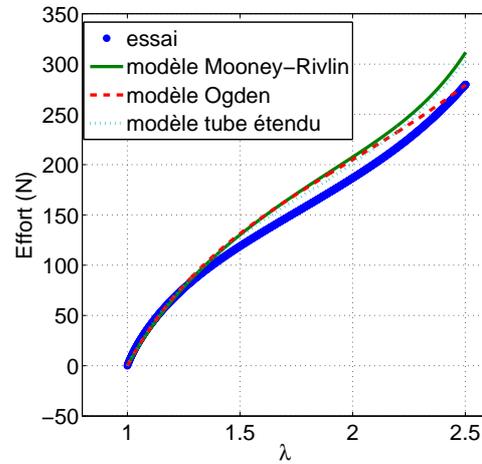


FIGURE III.1.3 : Comparaison entre les efforts mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d’Ogden et du tube étendu en fonction de l’extension ; cas de la traction uniaxiale

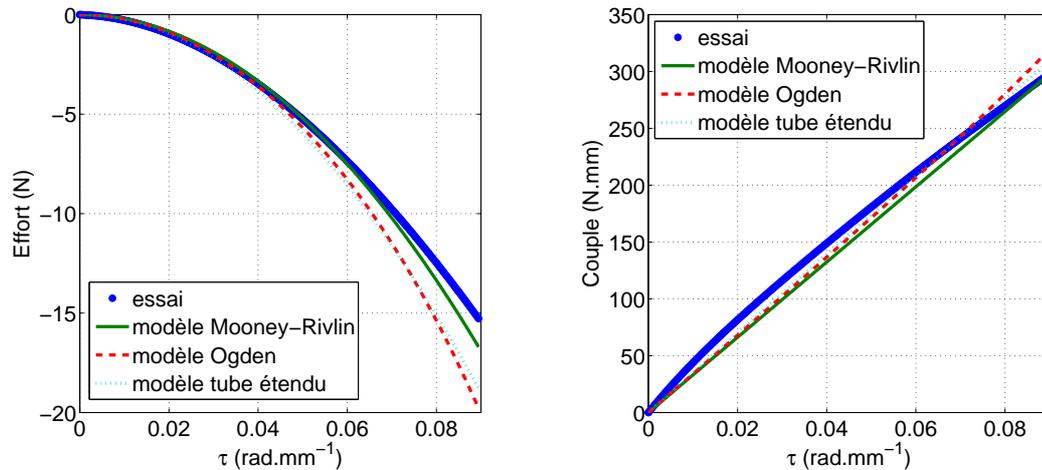


FIGURE III.1.4 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d’Ogden et du tube étendu en fonction de l’extension ; cas de la torsion pure

en valeur absolue. Les modèles du tube étendu et d’Ogden prédisent une évolution de l’effort assez similaire, plutôt proche de l’essai jusqu’à $\tau = 0,03 \text{ rad.mm}^{-1}$ (53°), puis surestiment l’effort plus fortement que le modèle de Mooney-Rivlin, le modèle d’Ogden s’éloignant un peu plus que les deux autres modèles de la courbe d’essai. Les trois modèles prédisent une évolution linéaire du couple en fonction de l’angle par unité de longueur,

alors qu'expérimentalement, cette évolution ne l'est pas.

D) traction-torsion combinées

La figure III.1.5 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 2,5$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$. Rappelons ici que l'extension et l'angle par unité de longueur sont imposés de façon proportionnelle. Sur cette figure,

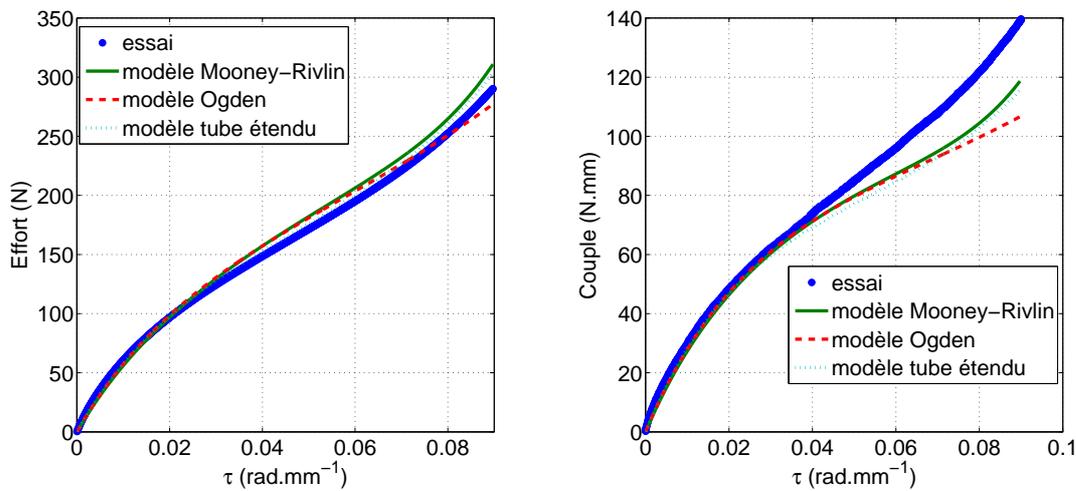


FIGURE III.1.5 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; cas de la traction-torsion (point de chargement V)

il est d'abord remarqué que les quatre courbes d'effort suivent la même évolution que dans le cas de la traction uniaxiale, à savoir que les courbes des modèles sont proches de l'effort mesuré jusqu'au quart du chargement maximum, puis le surestiment, le modèle de Mooney-Rivlin et du tube étendu présentant un raidissement semblable à celui observé expérimentalement, le modèle d'Ogden conservant la même pente. Le même type de tendance est observée pour le couple, qui présente aussi un raidissement dans le cas expérimental et pour les modèles de Mooney-Rivlin et du tube étendu, mais pas pour le modèle d'Ogden. Cette fois-ci, les modèles sous-estiment considérablement les valeurs de couple mesurées.

E) Bilan

Le tableau III.1.4 présente les erreurs relatives maximales pour les trois modèles et les trois essais, sur l'effort et le couple. Le tableau III.1.5 présente les erreurs relatives moyennes pour les trois modèles et les trois essais, sur l'effort et le couple. En orange sont repérées les valeurs minimales pour chacun des essais, pour l'effort et pour le couple. Par

Essai	Erreur sur l'effort (%)			Erreur sur le couple (%)		
	Ogden	Tube étendu	Mooney-Rivlin	Ogden	Tube étendu	Mooney-Rivlin
TU	45,5	43,9	47,0	-	-	-
TOR	99,7	99,6	99,8	30,2	27,7	31,8
TU/TOR	31,1	29	32,9	35,4	33,6	37,1

TABLEAU III.1.4 : Maximum des erreurs relatives. TU : traction uniaxiale ; TOR : torsion pure ; TU/TOR : traction-torsion

Essai	Erreur sur l'effort (%)			Erreur sur le couple (%)		
	Ogden	Tube étendu	Mooney-Rivlin	Ogden	Tube étendu	Mooney-Rivlin
TU	8,3	7,7	9,9	-	-	-
TOR	16,2	16,4	11,9	9,9	8,1	11,7
TU/TOR	4,9	3,8	6,2	8,8	9,2	8,3

TABLEAU III.1.5 : Moyenne des erreurs relatives. TU : traction uniaxiale ; TOR : torsion pure ; TU/TOR : traction-torsion

l'étude de ces deux tableaux, il est constaté qu'il n'existe pas une très grande différence entre les trois modèles, qui permettrait de conclure que l'un des modèles est nettement plus prédictif sur les trois essais considérés que les deux autres modèles. L'erreur maximale est très élevée sur la prédiction de l'effort par les trois modèles de l'essai en torsion pure. Cette erreur est atteinte en tout début d'essai. L'erreur diminue ensuite jusqu'à ce que les courbes d'effort mesuré et d'effort calculé par les modèles se croisent, point à partir duquel l'erreur ré-augmente, mais reste nettement inférieure à celle du début de l'essai. Cette évolution de l'erreur est retrouvée pour le cas de traction uniaxiale et de la traction-torsion. La difficulté à diminuer l'écart entre modèle et données d'essai a déjà été soulignée, par exemple par [Ogden *et al.* \(2004\)](#) pour le modèle d'Ogden. Pour les trois essais, aussi bien sur l'effort que sur le couple, le modèle de tube étendu présente le maximum d'erreur le plus faible. La moyenne des erreurs se trouve globalement autour de 10%. De nouveau, la prédiction de l'effort en torsion pure est source des erreurs moyennes les plus élevées. Le modèle du tube étendu conduit à l'erreur moyenne la plus

faible pour l'effort en traction uniaxiale et en traction-torsion, ainsi que pour le couple en torsion pure, alors que le modèle de Mooney-Rivlin présente l'erreur moyenne la plus faible pour l'effort en torsion pure et le couple en traction-torsion.

À partir de ces résultats, il est choisi de sélectionner le modèle de Mooney-Rivlin, car celui-ci présente une erreur moyenne moindre sur l'essai le plus critique (c'est-à-dire la prédiction de l'effort pour la torsion pure), prend en compte le raidissement de l'effort et du couple aux grandes déformations et parce que l'identification de ces paramètres est plus robuste que ceux des deux autres modèles (moins de paramètres et pas de dépendance de l'optimum aux valeurs initiales). Ce choix est à valider en comparant les prédictions des trois modèles avec les essais qui ne font pas partie de la base d'identification.

1.3.2 Résultats sur les autres essais en traction-torsion simultanées

Dans cette sous-section, les efforts et couples prédits par les trois modèles sont comparés avec les essais hors base d'identification, en suivant l'ordre des points de chargement illustré par la figure II.3.2.

A) Essais à $\lambda_{max} = 2,5$, τ_{max} varie

La figure III.1.6 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 2,5$ et $\tau_{max} = 0,023 \text{ rad.mm}^{-1}$ (environ 40°), c'est-à-dire le point de chargement II. La figure III.1.7 montre l'évolution de l'effort et du couple

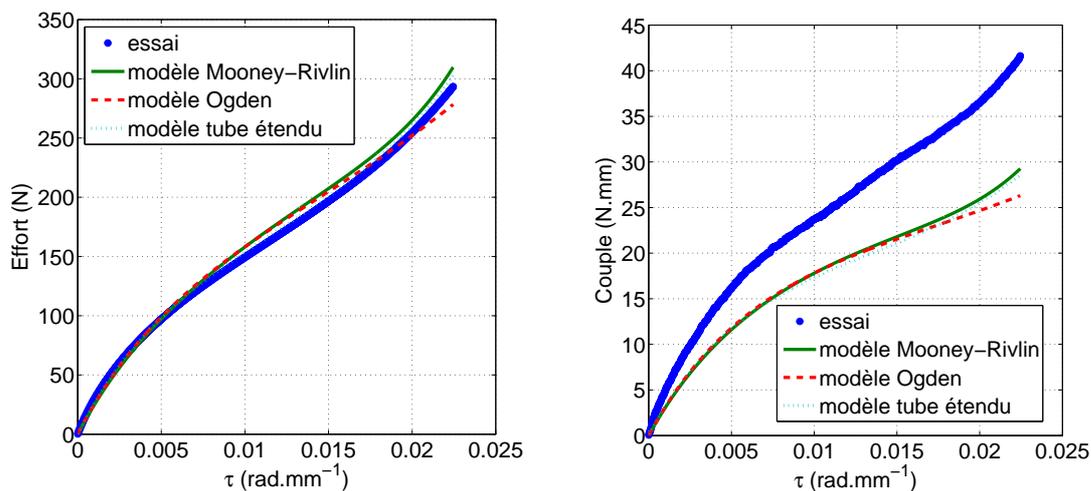


FIGURE III.1.6 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point II

en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 2,5$ et $\tau_{max} = 0,045 \text{ rad.mm}^{-1}$ (79°), c'est-à-dire le point de chargement III. Ces deux figures sont à rapprocher de la fi-

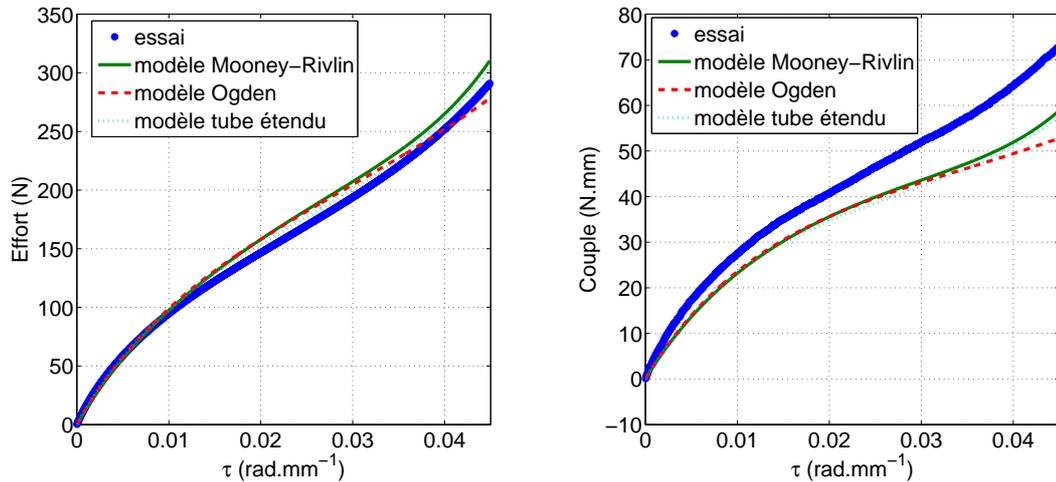


FIGURE III.1.7 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point III

gure III.1.5, qui correspond au point de chargement V. Pour ces trois cas de chargement, les mêmes observations sont faites. L'effort est légèrement surestimé aux grandes déformations, le couple est sous-estimé, les modèles de Mooney-Rivlin et du tube étendu permettent de prédire le raidissement à la fois de l'effort et du couple, mais pas le modèle d'Ogden. Soulignons ici qu'il est connu que le modèle d'Ogden est capable de prédire le raidissement en traction uniaxiale, mais que ce sont les paramètres identifiés ici qui ne le permettent pas. Enfin, il est noté que l'erreur est la plus importante pour le point de chargement II et la moins pour le point de chargement V. Ainsi, à extension constante, plus l'angle final est faible, plus la prédiction est mauvaise.

B) Essais à $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, λ_{max} varie

La figure III.1.8 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 2,125$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, c'est-à-dire le point de chargement VI. La figure III.1.9 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 1,75$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, c'est-à-dire le point de chargement VII. La figure III.1.10 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles

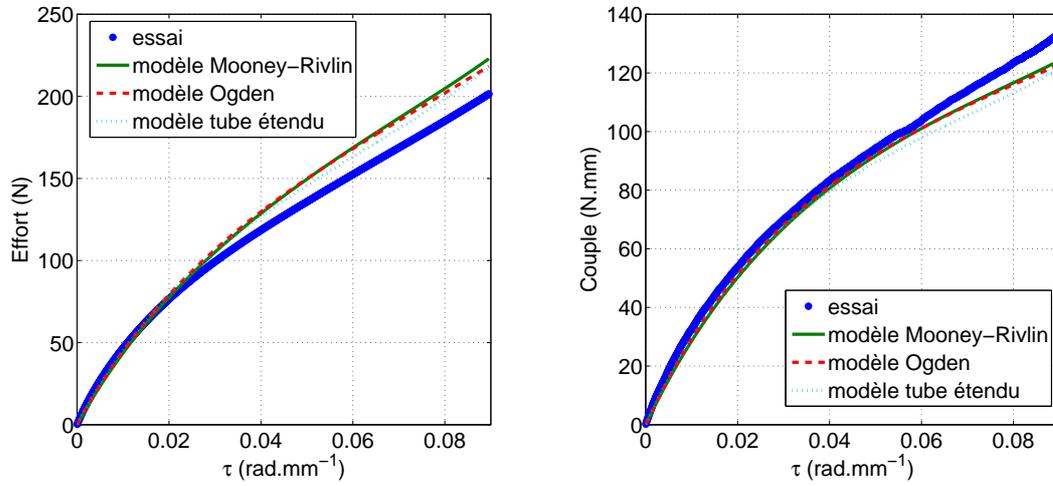


FIGURE III.1.8 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point VI

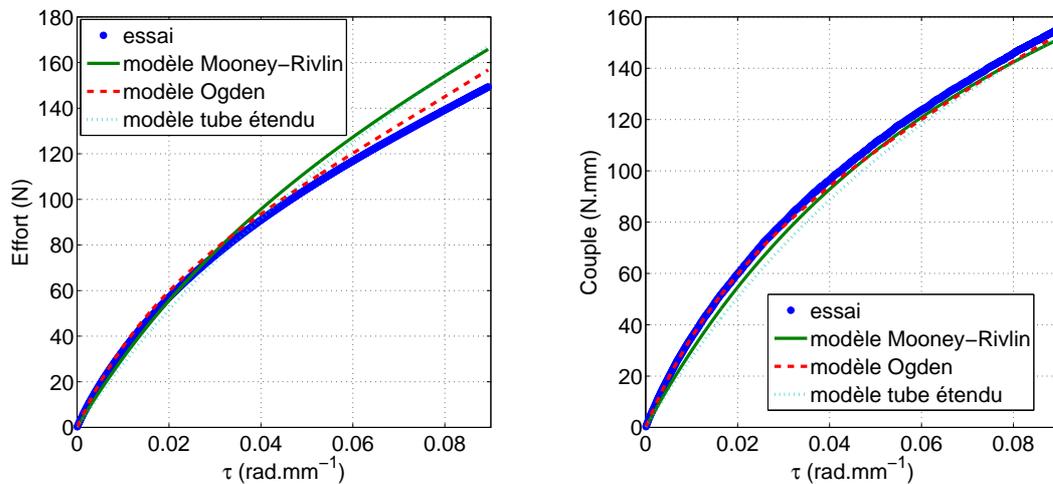


FIGURE III.1.9 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point VII

pour l'essai de traction-torsion simultanées $\lambda_{max} = 1,375$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, c'est-à-dire le point de chargement VIII.

Pour ces trois essais, les modèles prédisent des résultats très proches à la fois sur l'effort et le couple. Les trois modèles sous-estiment l'effort jusqu'aux déformations in-

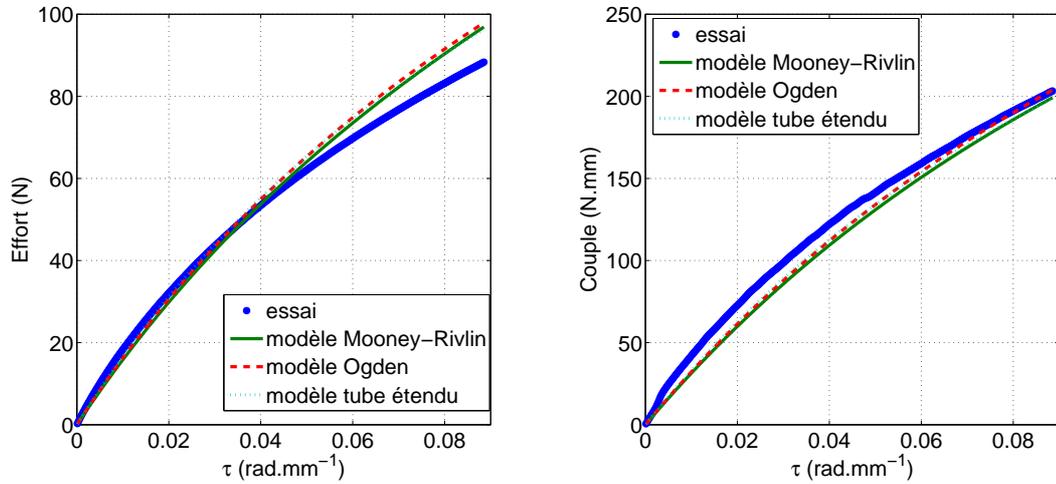


FIGURE III.1.10 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point VIII

termédiaires, puis le surestiment, alors que le couple est toujours sous-estimé. Les valeurs prédites par les modèles restent quand même assez proches des essais. Enfin, il est à noter qu'à angle fixe, plus l'extension est faible, plus le changement de pente observé sur l'effort et le couple mesurés aux déformations intermédiaires est mal approché par les modèles ; le cas le plus critique étant pour le point de chargement VIII (à rapprocher avec le cas de la torsion pure sur la figure III.1.4) : les courbes sont de plus en plus linéaires. Il peut donc être établi que les modèles utilisés avec les paramètres identifiés plus haut parviennent relativement bien à prédire les efforts et couples lorsqu'une extension élevée est imposée, mais que la qualité de la prédiction se dégrade lorsque cette extension diminue. Les modèles peinent donc à prendre en compte correctement l'effet de la torsion, défaut qui s'efface lorsqu'une extension élevée est imposée.

C) Essais à $\lambda_{min} = 0,67$ (compression), τ_{max} varie

La figure III.1.11 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de compression-torsion simultanées $\lambda_{min} = 0,67$ et $\tau_{max} = 0,09$ rad.mm⁻¹, c'est-à-dire le point de chargement X. La figure III.1.12 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de compression-torsion simultanées $\lambda_{min} = 0,67$ et $\tau_{max} = 0,067$ rad.mm⁻¹, c'est-à-dire le point de chargement XI. La figure III.1.13 montre l'évolution de l'effort et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de compression-torsion simultanées $\lambda_{min} = 0,67$ et $\tau_{max} = 0,045$ rad.mm⁻¹, c'est-à-dire le point de chargement XII. La figure III.1.14 montre l'évolution de l'effort

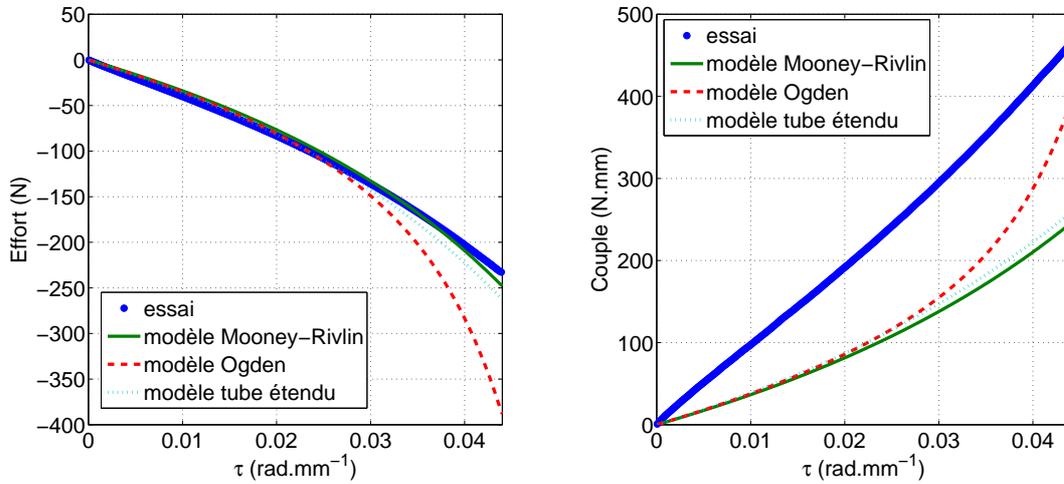


FIGURE III.1.11 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point X

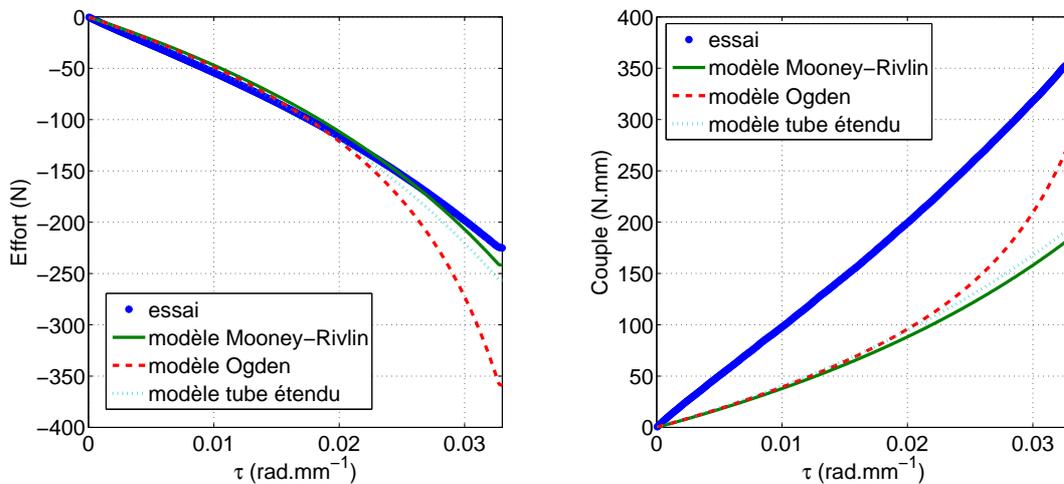


FIGURE III.1.12 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point XI

et du couple en fonction de l'angle par unité de longueur, mesurés et calculés pour les trois modèles pour l'essai de compression-torsion simultanées $\lambda_{min} = 0,67$ et $\tau_{max} = 0,023$ rad.mm⁻¹, c'est-à-dire le point de chargement XIII.

Les quatre figures présentent la même tendance. Les courbes d'effort présentent à

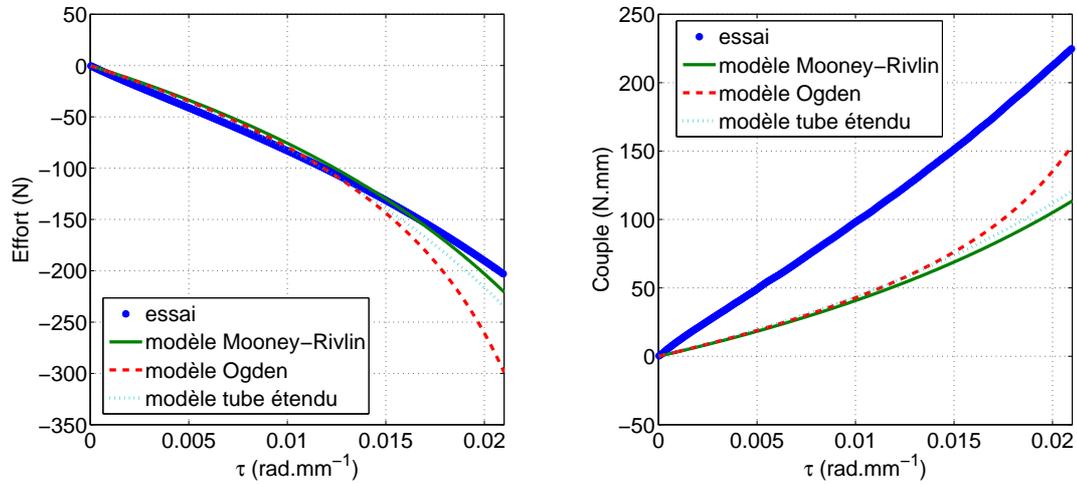


FIGURE III.1.13 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point XII

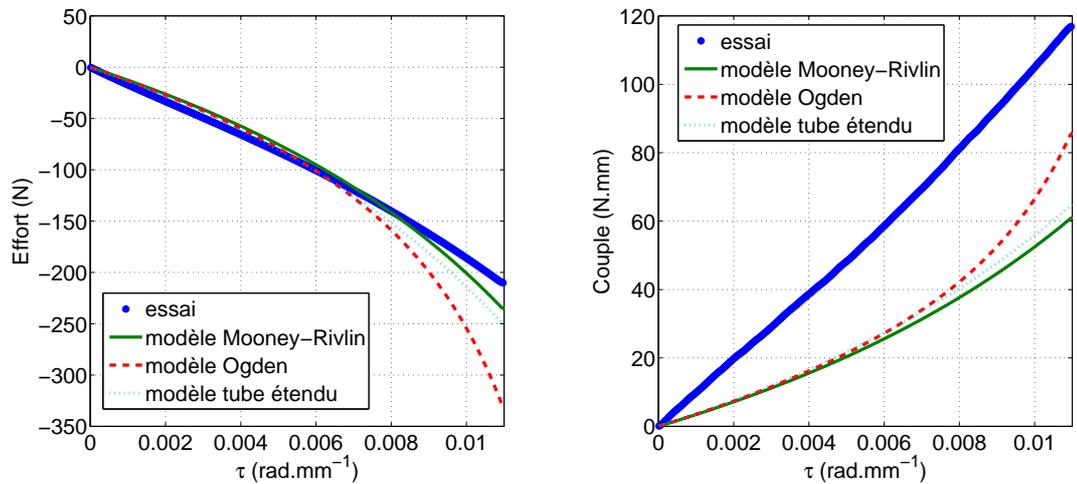


FIGURE III.1.14 : Comparaison entre les efforts et couples mesurés et ceux calculés avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu en fonction de l'angle par unité de longueur ; point XIII

peu près la même évolution que dans le cas de la torsion pure, à savoir que le modèle de Mooney-Rivlin est plus proche de l'effort mesuré que les deux autres modèles, le surestimant en valeur absolue légèrement pour les déformations les plus élevées. Le modèle du tube étendu montre la même évolution pour l'effort, mais le surestime un peu plus

aux grandes déformations. Le modèle d'Ogden s'éloigne de la courbe expérimentale à peu près pour la moitié du chargement maximum, et surestime alors largement l'effort en valeur absolue. Enfin, le couple est mal prédit par les modèles : alors qu'expérimentalement, il évolue quasi-linéairement avec l'angle par unité de longueur, les trois modèles le sous-estime et ne prédisent pas un couple linéaire avec l'angle, puisqu'un raidissement est observé environ à la moitié du chargement.

D) Dérivées de l'énergie de déformation

Afin de compléter la comparaison essais/modèles, il est proposé de tracer les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales évaluées au rayon extérieur dans le cas de la torsion pure, du point de chargement VII (traction puis torsion) et du point de chargement X (compression puis torsion).

La figure III.1.15 montre l'évolution des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction des extensions principales respectives, mesurées et calculées pour les trois modèles pour l'essai de torsion pure à $\tau_{max} = 0,09$ rad.mm⁻¹. Ici, il apparaît que les trois modèles sont assez proches de la courbe de \bar{W}_1

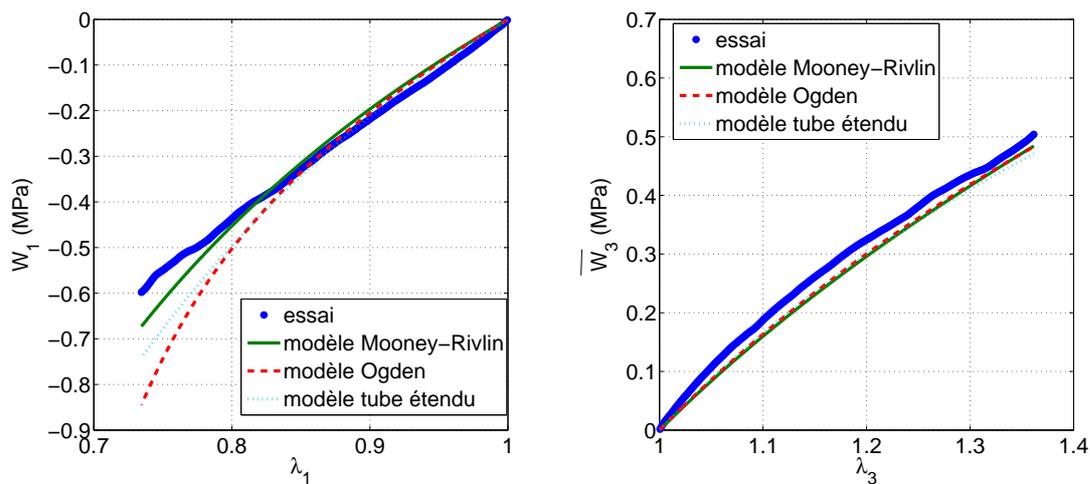


FIGURE III.1.15 : Comparaison entre les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales mesurées et calculées avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu ; cas de la torsion pure

jusqu'à la moitié de l'extension principale maximum, puis surestime la mesure en valeur absolue. Le modèle de Mooney-Rivlin reste le plus proche de la courbe, celui d'Ogden le plus éloigné. De plus, les trois modèles prédisent une évolution quasi-linéaire de \bar{W}_3 en fonction de λ_3 , alors qu'expérimentalement, elle ne l'est pas, mais les valeurs prédites restent assez proches des valeurs expérimentales. Ces observations locales sont cohérentes avec les observations globales sur l'effort et le couple, et n'apportent pas vraiment de supplément d'informations.

La figure III.1.16 montre l'évolution des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction des extensions principales respectives, mesurées et calculées pour les trois modèles pour l'essai en chemin bas de traction-torsion à $\lambda = 1,75$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$. La figure III.1.17 montre l'évolution des

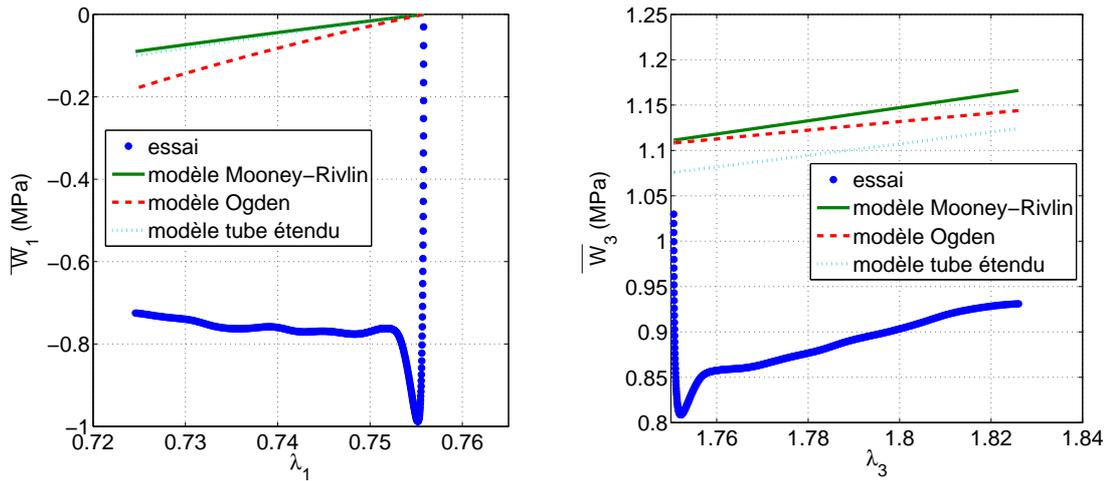


FIGURE III.1.16 : Comparaison entre les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales mesurées et calculées avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu ; cas de la traction-torsion en chemin bas, point VII

dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction des extensions principales respectives, mesurées et calculées pour les trois modèles pour l'essai en chemin bas de compression-torsion à $\lambda = 0,67$ et $\tau_{max} = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$. Sur ces deux figures, il apparaît que les trois modèles sont très éloignés des valeurs expérimentales. En effet, les modèles prédisent à peu près la même valeur de départ que les essais (valeur qui correspond à l'état de traction uniaxiale), mais ensuite, ils ne présentent pas le pic suivi de la stabilisation observés expérimentalement. Cela pourrait expliquer l'incapacité des modèles à prédire précisément le comportement en torsion, notamment sur le couple.

Conclusion

Finalement, en comparant tous les résultats expérimentaux avec les trois modèles, il apparaît que ceux-ci fournissent des résultats plutôt satisfaisants sur l'effort, le modèle d'Ogden étant plus éloigné des courbes d'essais que les deux autres modèles, et le modèle de Mooney-Rivlin en étant légèrement plus proche. Les résultats sont plus mitigés sur le couple. En effet, si on ne considère que l'erreur moyenne sur un essai il apparaît que le couple est le mieux prédit pour le point VII ($\lambda_{max}=1,75$). Cependant, si l'on considère maintenant la forme des courbes, c'est-à-dire principalement les changements de pentes,

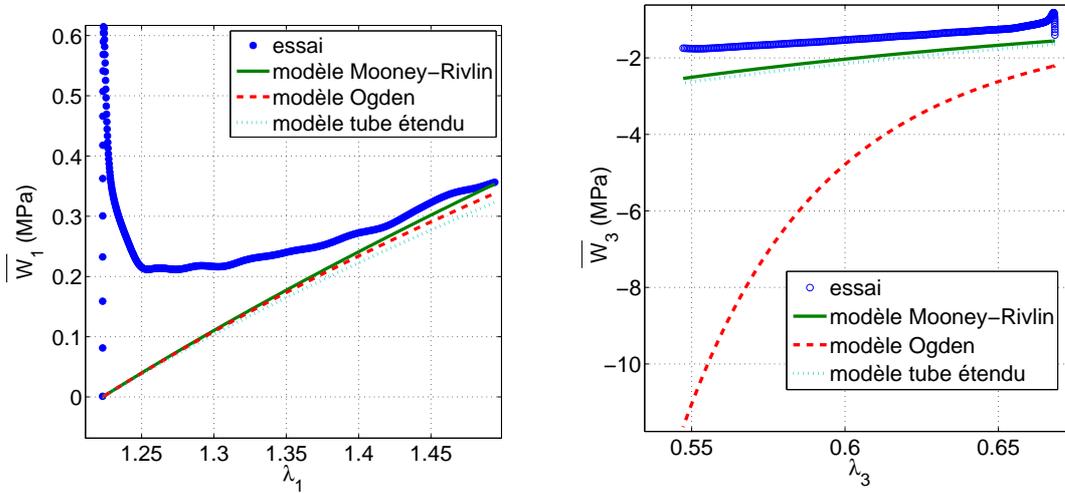


FIGURE III.1.17 : Comparaison entre les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales mesurées et calculées avec les modèles de Mooney-Rivlin, d'Ogden et du tube étendu; cas de la compression-torsion en chemin bas, point X

il apparaît que plus l'extension superposée à la torsion est faible, plus les courbes expérimentales et modélisées ont des formes différentes, les cas les plus critiques étant atteints en compression. Ainsi, globalement, les modèles peinent à prédire le couple (sauf pour certaines extensions intermédiaires) et les pentes sont de moins en moins bien suivies lorsque l'extension diminue. Cette difficulté à prédire le comportement en torsion est vérifiée à l'échelle locale, puisque la forme des courbes de dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales résultant des modèles sont éloignées de celles obtenues expérimentalement. De plus, il m'a été impossible de retrouver cette forme de courbe en identifiant les paramètres uniquement sur les courbes de dérivées de l'énergie de déformation. Cette forme de courbe a pourtant déjà été observée pour le tracé de la pression en fonction de l'extension circonférentielle lors du gonflement d'un ballon. Or, ce type de courbe est bien prédit par les modèles, notamment celui d'Ogden (Holzapfel, 2000). Il a également été vérifié que le modèle d'Ogden parvient à approcher de manière satisfaisante les courbes de contrainte réduite en traction uniaxiale et en torsion pure, montrées dans le chapitre 3 de la partie II, courbes qui présentent également une forte décroissance au début de l'essai. La différence ici, qui est peut-être à l'origine de l'impossibilité de retrouver cette forme de courbe, est que la forte décroissance apparaît non pas pour des extensions proches de 1 (ce qui correspond à la configuration non déformée), mais pour des valeurs variées de pré-extension et lorsque l'angle par unité de longueur tend vers 0. Il faudrait privilégier des modèles directionnels qui prennent en compte l'anisotropie induite par une pré-déformation. Ce type de modèle existe, mais principalement pour la prédiction de l'effet Mullins, causant un adoucissement de la contrainte lorsque le matériau est sollicité dans une direction différente de

celle dans laquelle il a été accommodé (voir par exemple [Diani *et al.* \(2004\)](#) et [Merckel *et al.* \(2012\)](#)). Ici, il semble peu probable que l'effet Mullins soit à l'origine du phénomène observé puisque l'accommodation a été réalisée en traction-torsion combinée. Pour le prouver rigoureusement, il faudrait effectuer l'accommodation en suivant exactement le même chemin de chargement, puis observer si les mêmes courbes sont obtenues. Nous sommes plutôt enclins à penser que le même comportement sera obtenu. Pour conclure, il est choisi de retenir le modèle de Mooney-Rivlin, car celui-ci est le plus proche des valeurs expérimentales dans les cas les plus critiques, alors qu'il s'agit du modèle possédant le moins de paramètres. Dans la suite, le comportement viscoélastique linéarisé est considéré.

Chapitre 2

Modélisation du comportement sous chargement cyclique superposé à une précharge statique

Sommaire

2.1 Les modèles viscoélastiques	176
2.1.1 L'approche intégrale	177
2.1.2 L'approche par variables internes	177
2.1.3 Une caractéristique commune entre certains modèles des deux approches	178
2.2 Les modèles de Zener et de Poynting-Thomson en grandes déformations	180
2.2.1 Décomposition multiplicative des deux modèles	180
2.2.2 Relation contrainte/déformation pour le modèle de Zener . . .	183
2.2.3 Relation contrainte/déformation pour le modèle de Poynting- Thomson	186
2.3 Linéarisation de modèles viscoélastiques	188
2.3.1 Méthode de linéarisation	188
2.3.2 Linéarisation du modèle de Zener	191
2.3.3 Linéarisation du modèle de Poynting-Thomson	193
2.3.4 Bilan	196
2.4 Identification des paramètres des modèles	198
2.4.1 Les paramètres du modèle de Zener	198
2.4.2 Les paramètres du modèle de Poynting-Thomson	200
2.5 Résultats	201
2.5.1 Prédiction des efforts et couples de la précharge	201
2.5.2 Prédiction des efforts et couples des oscillations	202

Introduction

Après avoir modélisé le comportement statique du matériau avec une loi de comportement hyperélastique à trois paramètres dans le chapitre précédent, l'objectif de ce chapitre est de modéliser le comportement dynamique du matériau lors de petites oscillations autour d'une précharge statique, grâce à une loi de comportement viscoélastique linéarisée. Pour cela, il est d'abord nécessaire d'écrire une loi de comportement viscoélastique dans le cadre général des grandes transformations. Ensuite, cette loi sera linéarisée. La dernière étape consiste à prendre en compte la staticité de la précharge. Afin de mettre en place cette méthode, les deux approches classiques de la viscoélasticité seront d'abord présentées. Ensuite, il sera montré que la plupart des auteurs choisissent de linéariser des modèles qui décomposent la contrainte totale en une partie à l'équilibre et une partie hors équilibre. Nous verrons alors qu'il est possible de choisir une approche plus originale qui n'est pas basée sur cette décomposition. Afin d'étudier les deux méthodes, la linéarisation des modèles de Zener (approche classique) et de Poynting-Thomson (approche originale) sera effectuée. Il sera alors établi que la linéarisation du modèle de Poynting-Thomson permet de prendre en compte une influence de la précharge sur toute la contrainte, alors que la linéarisation du modèle de Zener avec une loi d'évolution simple résulte en une contrainte hors équilibre indépendante de la précharge. Ensuite, les paramètres des deux modèles seront identifiés, ce qui permettra enfin de comparer les modèles avec les résultats d'essais.

2.1 Les modèles viscoélastiques

Le terme de viscoélasticité renvoie au comportement d'un matériau qui, comme son nom l'indique, se situe entre les deux cas parfaits d'un solide élastique et d'un fluide visqueux. L'élasticité se définit par la réversibilité de toute transformation : le matériau retrouve son état initial après avoir été chargé puis déchargé en suivant le même chemin. La viscosité est quant à elle une mesure de la résistance à l'écoulement. Elle induit un retard dans la réponse du matériau, et donc une dépendance du comportement à l'histoire des sollicitations, et plus précisément à la vitesse de déformation. Cette propriété se traduit par de la dissipation : de l'énergie est perdue au cours du temps. Ainsi un matériau au comportement viscoélastique dissipe de l'énergie, le chemin suivi au cours de la charge et de la décharge n'est pas le même, mais il revient à son état initial. Il existe deux approches pour modéliser la viscoélasticité. Ces deux approches diffèrent par le choix des grandeurs suffisantes pour décrire l'état du matériau déformé. L'objectif ici n'est pas d'être exhaustif sur la bibliographie concernant la viscoélasticité générale et plus d'informations peuvent être trouvées dans des ouvrages comme ceux de [Haddad \(1988\)](#), [Hassani \(1997\)](#), [Wineman et Rajagopal \(2000\)](#) et [Verron \(2003\)](#), mais de présenter le principe de chacune de ces approches, à savoir l'approche intégrale et l'approche par variables internes. Pour plus de clarté, plaçons nous dans le cadre des petites déformations pour des transformations purement mécaniques (pas d'effets de température).

2.1.1 L'approche intégrale

La première approche consiste à considérer la contrainte directement comme une fonction de l'histoire des déformations, c'est-à-dire qu'à tout instant t , on peut l'écrire comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\{\boldsymbol{\epsilon}(t-s)\}, \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t. \quad (\text{III.2.1})$$

où \mathcal{F} est une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction qui prend en argument une fonction. Si on suppose de plus que la contribution de chaque incrément de chargement à l'état de déformation final est indépendante des autres, on peut alors sommer chaque contribution pour obtenir cette déformation finale. Il s'agit en fait du principe de superposition de Boltzmann (voir par exemple Ward (1983)). C'est cette théorie qu'ont cherché à généraliser Green et Rivlin (1957) et Coleman et Noll (1961) pour les grandes déformations. La principale différence entre leurs deux développements est que les premiers font intervenir des fonctions de relaxation qui ne dépendent que du temps, alors que pour les seconds, elles dépendent également du niveau actuel de déformation. Cette approche est appelée formulation fonctionnelle, ou encore formulation intégrale car il a été montré que la fonctionnelle pouvait être approchée par une série d'intégrales. Plusieurs modèles ont vu le jour plus tard en ce basant sur cette approche avec la généralisation de l'hyperélasticité à la viscoélasticité par Christensen (1980), ou encore les approches solides et fluides du modèle K-BKZ (Bernstein *et al.*, 1963; Kaye, 1962).

2.1.2 L'approche par variables internes

La seconde approche stipule que ce n'est pas la contrainte proprement dite qui dépend de l'histoire des déformations, mais des variables d'état, à savoir la déformation, connue (imposée ou mesurable) et des variables internes, a priori non observables, par exemple la déformation visqueuse ou la déformation élastique instantanée. Dans ce cas, la contrainte est une fonction de la déformation et de ces variables d'état :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \boldsymbol{\chi}). \quad (\text{III.2.2})$$

où $\boldsymbol{\chi}$ désigne l'ensemble des variables internes. Ces variables internes sont déterminées à chaque instant t par une équation différentielle, aussi appelée loi d'évolution :

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \dot{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \boldsymbol{\chi}). \quad (\text{III.2.3})$$

Cette approche est connue sous le nom de formulation par variables d'état ou formulation différentielle. Les modèles de cette approche peuvent être représentés par des schémas associant des ressorts, pour l'élasticité ou l'hyperélasticité, et des amortisseurs pour la viscosité. Les deux modèles les plus simples sont composés d'un ressort et d'un amortisseur. Lorsqu'ils sont disposés en série, on parle du modèle fluide de Maxwell. Disposés en parallèle, on parle alors du modèle solide de Kelvin-Voigt. Ces modèles sont très simples. Le premier ne permet pas de prendre en compte les phénomènes de fluage, alors que le second ne prend pas en compte le phénomène de relaxation (à déformation

constante l'amortisseur n'est pas activé, la contrainte reste constante). Rajouter un troisième élément permet de modéliser correctement un solide viscoélastique (Wineman et Rajagopal, 2000), avec par exemple le modèle de Zener qui ajoute une branche à ressort en parallèle au modèle de Maxwell, et le modèle de Poynting-Thomson qui lui ajoute une branche à ressort en série au modèle de Kelvin-Voigt. Les quatre modèles sus-cités sont représentés par les schémas de la figure III.2.1. Ce type d'approche, d'abord déve-

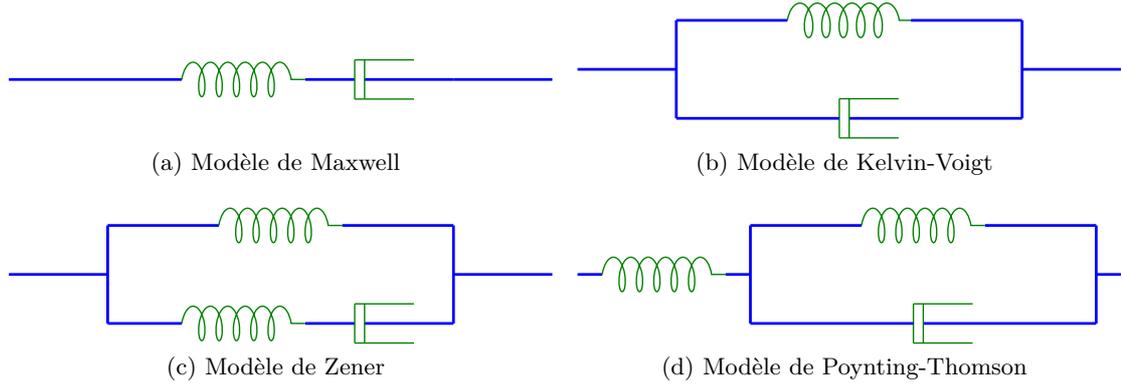


FIGURE III.2.1 : Modèles rhéologiques simples

loppé pour des chargements uniaxiaux en petites déformations a ensuite été généralisé au cas tridimensionnel par Green et Tobolsky (1946), puis plus tard par Lubliner (1985), en introduisant une variable interne tensorielle dont le rôle est de modéliser les effets hors équilibre. Sidoroff (1974) choisit quant à lui d'introduire une variable interne via la notion de configuration intermédiaire, adaptant l'approche différentielle aux grandes déformations. La configuration intermédiaire correspond à un état relâché après avoir subi une transformation inélastique \mathbf{F}_i et avant de subir une transformation élastique \mathbf{F}_e . La transformation totale peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i \quad (\text{III.2.4})$$

2.1.3 Une caractéristique commune entre certains modèles des deux approches

Certains modèles de l'approche intégrale et de l'approche par variables internes ont une caractéristique commune, à savoir que la contrainte totale s'écrit comme la somme d'une partie à l'équilibre et d'une partie hors équilibre. En fait, tous les modèles pour les solides viscoélastiques de l'approche intégrale font partie de ce groupe. Par exemple, le modèle de Coleman et Noll (1961) est basé sur le postulat que la contrainte peut être décomposée de manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_\infty + \int_0^\infty \boldsymbol{\Gamma}(s, \mathbf{B}) \{ \mathbf{E}_t(s) \} \partial s, \quad (\text{III.2.5})$$

avec :

- $\boldsymbol{\sigma}_\infty$ est la contrainte à l'équilibre, dans un état relaxé.
- \mathbf{E}_t est le tenseur des déformations de Green-Lagrange où la configuration de référence est la configuration actuelle. Notons $x_i(t)$ les coordonnées d'un point dans un état déformé à l'instant t :

$$\mathbf{E}_t(s) = \frac{\mathbf{C}_t(t-s) - \mathbf{I}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m(t-s)}{\partial x_i(t)} \frac{\partial x_m(t-s)}{\partial x_j(t)} - \mathbf{I} \right), \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad (\text{III.2.6})$$

$$\mathbf{E}_t(s) = \frac{\mathbf{C}_t(t-s) - \mathbf{I}}{2} = \mathbf{0}, \quad \forall t \leq s \leq \infty. \quad (\text{III.2.7})$$

- $\boldsymbol{\Gamma}$ est une fonctionnelle qui dépend à la fois de l'histoire de la déformation et de la déformation actuelle.

Tous les modèles classiques pour les solides viscoélastiques de l'approche intégrale considèrent donc que la contrainte s'écrit comme une partie à l'équilibre, et une partie hors équilibre qui dépend de l'histoire de la déformation. Certains modèles de l'approche par variables internes sont basés sur le même type de décomposition. Considérons par exemple le modèle de Zener. Comme représenté par son schéma rhéologique (figure III.2.1-c), la contrainte s'écrit comme la somme de la contrainte à l'équilibre $\boldsymbol{\sigma}_\infty$, représentée par la branche du haut, et de la contrainte hors équilibre $\boldsymbol{\sigma}_{oe}$, représentée par la branche du bas, qui dépend de la vitesse de déformation via une loi d'évolution :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_\infty + \boldsymbol{\sigma}_{oe}(t). \quad (\text{III.2.8})$$

Lorsque le système est sollicité infiniment lentement, seul le ressort de la branche du haut est activé. D'autres modèles de l'approche par variables internes ne suivent pas cette décomposition. C'est le cas notamment du modèle de Poynting-Thomson. Grâce à son schéma rhéologique (figure III.2.1-d), on comprend que lorsque le système est sollicité infiniment lentement, il y a égalité entre la contrainte totale (branche de gauche), et la contrainte de la branche du haut. La raideur à l'équilibre n'est donc plus représenté par un mais par deux ressorts. De plus, la contrainte totale dans le cas général ne peut pas s'écrire comme la somme d'un terme à l'équilibre et d'un autre terme.

La distinction entre ces deux approches est primordiale pour la linéarisation. La première approche est celle qui est toujours adoptée pour la linéarisation. Parmi les auteurs qui étudient la linéarisation d'un modèle viscoélastique autour d'une précharge en grandes déformations, on peut par exemple citer Pipkin (1964); Lianis (1965); Morman et Nagtegaal (1983); Häusler (1983); Kim et Youn (2001); Haupt et Lion (2002); Lejeunes *et al.* (2012); Wollscheid et Lion (2013). Cependant, contrairement à ce qu'avance Kim et Youn (2001), d'autres types de linéarisations sont possibles. Dans la suite, il sera montré que la linéarisation d'un modèle basé sur la contrainte à l'équilibre ou non n'aboutit pas au même résultat, la différence majeure étant la dépendance à la précharge. Pour cela, il est choisi de comparer le modèle de Zener, représentant des modèles basés sur la contrainte à l'équilibre, et le modèle de Poynting-Thomson. Afin de comprendre l'origine de cette différence, il faut d'abord définir ces modèles en grandes déformations. Ensuite, ils seront linéarisés. Notons que la présentation générale des deux modèles en grandes déformations est basée sur l'article d'Huber et Tsakmakis (2000b).

2.2 Les modèles de Zener et de Poynting-Thomson en grandes déformations

Les deux modèles sont basés sur trois hypothèses principales :

1. La décomposition multiplicative du gradient de la transformation (équation (III.2.4)). Cette hypothèse est liée au choix des variables internes qui décrivent le problème, et, comme nous le verrons plus loin, à la définition de la configuration intermédiaire ;
2. La décomposition additive de l'énergie de déformation en deux énergies de déformation. Sur les schémas rhéologiques, une énergie de déformation est associée à chacun des ressorts : elle permet de définir la relation non linéaire entre la contrainte et la déformation ;
3. Le choix d'une loi d'évolution avec laquelle le second principe de la thermodynamique est respecté.

La différence entre les deux modèles découle de la première hypothèse. Le développement de cette hypothèse va pour cette raison être conjointement exposé pour les deux modèles. Ensuite, les équations liant contrainte et déformation seront écrites pour chacun des modèles.

2.2.1 Décomposition multiplicative des deux modèles

Pour chacun des modèles, le choix des variables internes est associé à leur schéma rhéologique. La figure III.2.2 reprend les deux schémas en indiquant la décomposition du gradient de la transformation associée à chacun d'eux. Ces décompositions permettent de

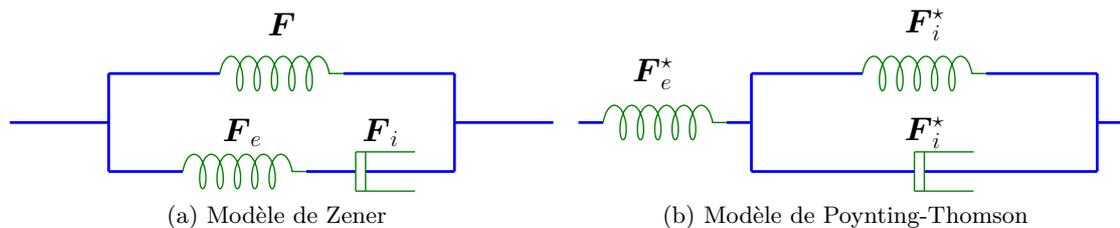


FIGURE III.2.2 : Décomposition multiplicative des modèles de Zener et de Poynting-Thomson

définir une configuration intermédiaire qui n'a pas le même sens pour les deux modèles. Elles sont représentées par la figure III.2.3. Pour comprendre l'état des deux contraintes intermédiaires, rappelons qu'un amortisseur infiniment rapidement sollicité est complètement rigide. Si le matériau est déchargé du point de vue de la deuxième transformation définie par F_e et F_e^* , et ce infiniment rapidement, il apparaît que dans le cas du modèle de Zener, la configuration intermédiaire (\mathcal{C}_1) est une configuration d'équilibre, alors que

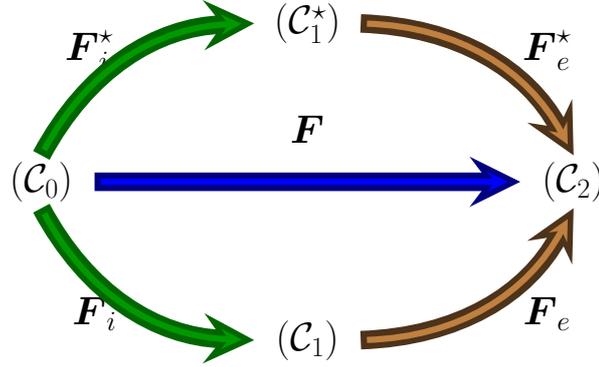


FIGURE III.2.3 : Configurations intermédiaires des modèles de Zener et de Poynting-Thomson

dans le cas du modèle de Poynting-Thomson, la configuration intermédiaire (\mathcal{C}_1^*) est une configuration où la contrainte est nulle.

Maintenant que les différentes configurations ont été présentées, les différents tenseurs des déformations sont introduits dans chacune des configurations. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange totales est défini dans la configuration non déformée (\mathcal{C}_0) , identique pour les deux modèles :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{I}}{2} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}}{2}, \quad (\text{III.2.9})$$

où \mathbf{C} est le tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit totales. De la même manière, on définit le tenseur des déformations de Green-Lagrange correspondant à la première transformation pour chacun des modèles. Ils appartiennent également à la configuration non déformée (\mathcal{C}_0) :

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{C}_i - \mathbf{I}}{2} = \frac{\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - \mathbf{I}}{2}, \quad (\text{III.2.10})$$

$$\mathbf{E}_i^* = \frac{\mathbf{C}_i^* - \mathbf{I}}{2} = \frac{\mathbf{F}_i^{*T} \mathbf{F}_i^* - \mathbf{I}}{2}, \quad (\text{III.2.11})$$

Dans la configuration intermédiaire (\mathcal{C}_1) du modèle de Zener, sont définis le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E}_e correspondant à la deuxième transformation et le tenseur des déformations d'Euler-Almansi \mathbf{e}_i correspondant à la première transformation :

$$\mathbf{E}_e = \frac{\mathbf{C}_e - \mathbf{I}}{2} = \frac{\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{I}}{2}, \quad (\text{III.2.12})$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{B}_i^{-1}}{2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{F}_i^{-1}}{2}, \quad (\text{III.2.13})$$

À partir de ces deux tenseurs est défini le tenseur des déformations totales dans la configuration intermédiaire :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}_e + \mathbf{e}_i. \quad (\text{III.2.14})$$

De la même manière, les tenseurs \mathbf{E}_e^* , \mathbf{e}_i^* et $\mathbf{\Gamma}^*$ sont définis dans la configuration intermédiaire du modèle de Poynting-Thomson. Enfin, dans la configuration finale (\mathcal{C}_2) sont définis les tenseurs des déformations d'Euler-Almansi de la deuxième transformation pour chacun des modèles et le tenseur des déformations totales d'Euler-Almansi, respectivement notés \mathbf{e}_e , \mathbf{e}_e^* et \mathbf{e} :

$$\mathbf{e}_e = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{B}_e^{-1}}{2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{F}_e^{-T} \mathbf{F}_e^{-1}}{2}, \quad (\text{III.2.15})$$

$$\mathbf{e}_e^* = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{B}_e^{*-1}}{2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{F}_e^{*-T} \mathbf{F}_e^{*-1}}{2}, \quad (\text{III.2.16})$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}}{2} = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}}{2}. \quad (\text{III.2.17})$$

Concernant la définition des contraintes, sont définis le tenseur des contraintes totales de Piola-Kirchhoff II, noté \mathbf{S} dans la configuration initiale (\mathcal{C}_0), les tenseur des contraintes totales intermédiaires, notés $\hat{\mathbf{S}}$ dans la configuration (\mathcal{C}_1) et $\hat{\mathbf{S}}^*$ dans la configuration (\mathcal{C}_1^*), et le tenseur des contraintes totales de Cauchy, noté $\boldsymbol{\sigma}$ dans la configuration finale (\mathcal{C}_2). Les tenseurs des contraintes intermédiaires sont reliés au tenseur des contraintes de Cauchy par la relation :

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{F}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}_e^{-T}, \quad (\text{III.2.18})$$

$$\hat{\mathbf{S}}^* = \mathbf{F}_e^{*-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}_e^{*-T}. \quad (\text{III.2.19})$$

Le tableau III.2.4 reprend les grandeurs introduites dans chacune des configurations pour le modèle de Zener. Le tableau III.2.5 reprend les grandeurs introduites dans chacune

(\mathcal{C}_0)	(\mathcal{C}_1)	(\mathcal{C}_2)
\mathbf{E}	$\mathbf{\Gamma}$	\mathbf{e}
\mathbf{E}_i	\mathbf{e}_i	
\mathbf{E}_e	\mathbf{E}_e	\mathbf{e}_e
\mathbf{S}	$\hat{\mathbf{S}}$	$\boldsymbol{\sigma}$

FIGURE III.2.4 : Tableau des configurations et grandeurs associées utilisées dans le modèle de Zener

des configurations pour le modèle de Poynting-Thomson.

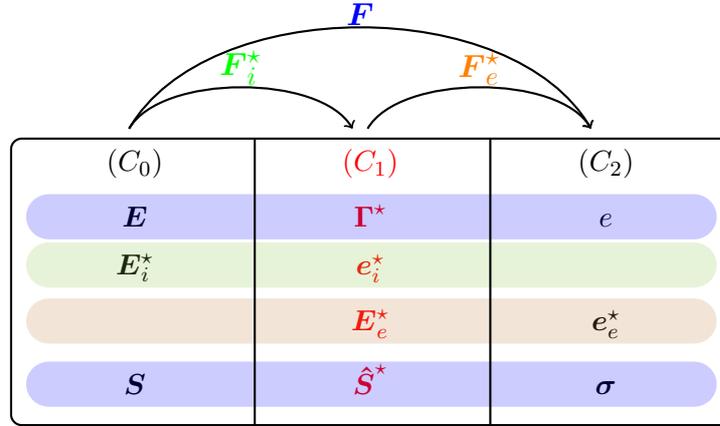


FIGURE III.2.5 : Tableau des configurations et grandeurs associées utilisées dans le modèle de Poynting-Thomson

2.2.2 Relation contrainte/déformation pour le modèle de Zener

Comme énoncé précédemment, la deuxième hypothèse principale consiste en la décomposition de l'énergie de déformation totale W en deux énergies de déformation. Pour le modèle de Zener, il s'agit de W_1 , qui dépend de \mathbf{E} , et de W_2 , qui dépend de \mathbf{E}_e :

$$W = W_1(\mathbf{E}) + W_2(\mathbf{E}_e). \quad (\text{III.2.20})$$

L'objectif est de trouver la relation contrainte/déformation correspondant à ce modèle. Pour cela, le second principe de la thermodynamique est appliqué via l'inégalité de Clausius-Duhem en prenant en compte la condition d'incompressibilité $J = \det \mathbf{F} = 1$ (voir par exemple [Holzapfel \(2000\)](#)), dans la configuration intermédiaire :

$$\hat{\mathbf{S}} : \mathbf{F}_e^T \mathbf{D} \mathbf{F}_e - \dot{W} \geq 0, \quad \forall \dot{\mathbf{E}}/J^2 = 2\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (\text{III.2.21})$$

où \mathbf{D} est le tenseur taux de déformation, que l'on exprime en fonction de \mathbf{F} via \mathbf{L} , le tenseur gradient des vitesses de déplacement :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \text{avec } \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{III.2.22})$$

Le second principe fait intervenir la dérivée temporelle de l'énergie de déformation, qui, au vu de la décomposition choisie, se développe comme suit :

$$\dot{W} = \mathbf{F}_i \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}_i^T : \mathbf{F}_e^T \mathbf{D} \mathbf{F}_e + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} : \mathbf{F}_e^T \mathbf{D} \mathbf{F}_e - \mathbf{C}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} : \mathbf{D}_i \quad (\text{III.2.23})$$

De plus, la condition d'incompressibilité $\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} = 0$ est intégrée dans l'inégalité via l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange p . Alors, l'équation (III.2.21) devient :

$$\left(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{F}_i \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}_i^T - \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} + p \mathbf{C}_e^{-1} \right) : \mathbf{F}_e^T \mathbf{D} \mathbf{F}_e + \mathbf{C}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} : \mathbf{D}_i \geq 0, \quad (\text{III.2.24})$$

d'où l'on peut déduire, d'après la procédure de [Coleman et Noll \(1963\)](#), les deux relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{F}_i \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}_i^T + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} - p \mathbf{C}_e^{-1}, \quad (\text{III.2.25})$$

$$\mathbf{C}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} : \mathbf{D}_i \geq 0. \quad (\text{III.2.26})$$

Il est rappelé que ces équations font intervenir des grandeurs de la configuration intermédiaire. L'expression de $\hat{\mathbf{S}}$ faisant apparaître deux dérivées d'énergie de déformation par rapport à des tenseurs des déformations de Green-Lagrange, [Huber et Tsakmakis \(2000b\)](#) identifient deux tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff II dans l'expression de $\hat{\mathbf{S}}$. Le premier tenseur est celui des contraintes à l'équilibre. Il est noté \mathbf{S}_E dans la configuration initiale, et s'exprime en fonction de l'énergie de déformation W_1 et du tenseur des déformations \mathbf{E} :

$$\mathbf{S}_E = -p_E \mathbf{C}^{-1} + \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}}, \quad (\text{III.2.27})$$

avec p_E la pression hydrostatique à l'équilibre. Une opération de *push-forward* permet d'exprimer ce tenseur dans la configuration intermédiaire. Il est alors noté $\hat{\mathbf{S}}_E$:

$$\hat{\mathbf{S}}_E = \mathbf{F}_i \mathbf{S}_E \mathbf{F}_i^T = -p_E \mathbf{C}_e^{-1} + \mathbf{F}_i \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}_i^T. \quad (\text{III.2.28})$$

Le second tenseur identifié est le tenseur des contraintes hors équilibre. Il est noté \mathbf{S}_{OE} dans la configuration intermédiaire, et s'exprime en fonction de l'énergie de déformation W_2 et du tenseur des déformations \mathbf{E}_e :

$$\mathbf{S}_{OE} = \hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}_E = -(p - p_E) \mathbf{C}_e^{-1} + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e}. \quad (\text{III.2.29})$$

Toujours dans l'objectif de déterminer la relation contrainte-déformation totales, la prochaine étape est de choisir une forme de W_2 qui satisfasse l'inégalité [\(III.2.26\)](#). La forme la plus simple choisie par de nombreux auteurs, dont [Huber et Tsakmakis \(2000b\)](#), est :

$$\left(\mathbf{C}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} \right)^D = \eta \mathbf{D}_i, \quad (\text{III.2.30})$$

où l'exposant D désigne l'opérateur déviatorique : $\bullet^D = \bullet - \frac{1}{3} \text{trace}(\bullet) \mathbf{I}$, η est un paramètre positif, homogène à une viscosité. Cela revient à choisir un pseudo-potential de dissipation quadratique avec \mathbf{D}_i . Le fait de prendre la partie déviatorique du tenseur permet d'assurer une cohérence avec la condition d'incompressibilité qui induit $\text{trace}(\mathbf{D}_i) = 0$, et la forme quadratique assure la positivité de l'expression. Afin de préparer la linéarisation, les équations sont réécrites dans la configuration finale. L'expression des trois tenseurs des contraintes a été donnée dans la configuration intermédiaire. Une opération

de *push-forward* permet de les écrire dans la configuration finale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{S}} \mathbf{F}_e^T = -p\mathbf{I} + \mathbf{F} \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{F}_e^T = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}} + 2\mathbf{B}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{B}_e}, \quad (\text{III.2.31})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_E = -p_E \mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}}, \quad (\text{III.2.32})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{OE} = -(p - p_E) \mathbf{I} + 2\mathbf{B}_e \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}_e}. \quad (\text{III.2.33})$$

L'équation (III.2.30) s'écrit, dans la configuration finale :

$$\mathbf{F}_e \mathbf{D}_i \mathbf{F}_e^T = \frac{1}{\eta} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}_{OE})^D \quad (\text{III.2.34})$$

De la même manière que ce qui a été réalisé dans le tableau III.2.4, le tableau III.2.6 remplace les tenseurs des contraintes utilisés dans leurs configurations respectives.

(C ₀)	(C ₁)	(C ₂)
\mathbf{S}_E	$\hat{\mathbf{S}}_E$	$\boldsymbol{\sigma}_E$
\mathbf{S}	$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{OE} + \hat{\mathbf{S}}_E$	$\boldsymbol{\sigma}$

FIGURE III.2.6 : Tableau des configurations et contraintes associées utilisées dans le modèle de Zener

La dernière étape consiste à écrire la loi d'évolution en terme d'une seule variable interne, à savoir ici \mathbf{B}_e . Pour cela, il faut d'abord exprimer sa dérivée temporelle :

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}_e^T + \mathbf{L}_e \mathbf{B}_e \quad (\text{III.2.35})$$

Ensuite, on cherche à exprimer \mathbf{L}_e en fonction de \mathbf{L} en partant des équations (III.2.4) et (III.2.22) :

$$\mathbf{L} = (\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_i) \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e \mathbf{L}_i \mathbf{F}_e^{-1} \quad (\text{III.2.36})$$

L'équation (III.2.35) devient alors :

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - \mathbf{F}_e \mathbf{L}_i^T \mathbf{F}_e^T - \mathbf{F}_e \mathbf{L}_i \mathbf{F}_e^T \quad (\text{III.2.37})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = -2\mathbf{F}_e \mathbf{D}_i \mathbf{F}_e^T + \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e \quad (\text{III.2.38})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{2}{\eta} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}_{OE})^D + \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e \quad (\text{III.2.39})$$

Finalement, les équations du système sont résumées ci-après :

Modèle de Zener en grandes déformations

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_E + \boldsymbol{\sigma}_{OE} \\ \boldsymbol{\sigma}_E = -p_E\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{OE} = -(p - p_E)\mathbf{I} + 2\mathbf{B}_e \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{B}_e} \\ \dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{2}{\eta} \mathbf{B}_e (\boldsymbol{\sigma}_{OE})^D + \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e \end{array} \right. \quad (\text{III.2.40})$$

2.2.3 Relation contrainte/déformation pour le modèle de Poynting-Thomson

De même que pour le modèle de Zener, nous écrivons d'abord la décomposition de l'énergie de déformation :

$$W = W_a(\mathbf{E}_e^*) + W_b(\mathbf{E}_i^*), \quad (\text{III.2.41})$$

ce qui permet de développer la dérivée temporelle de l'énergie de déformation :

$$\dot{W} = \mathbf{F}_i^* \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{E}_i^*} \mathbf{F}_i^{*T} : \mathbf{D}_i^* + \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} : \mathbf{F}_e^{*T} \mathbf{D} \mathbf{F}_e^* - \mathbf{C}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} : \mathbf{D}_i^*. \quad (\text{III.2.42})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem est alors écrite dans la configuration intermédiaire :

$$\left(\hat{\mathbf{S}}^* - \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} + p \mathbf{C}_e^{*-1} \right) : \mathbf{F}_e^{*T} \mathbf{D} \mathbf{F}_e^* + \left(\mathbf{C}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} - \mathbf{F}_i^* \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{E}_i^*} \mathbf{F}_i^{*T} \right) : \mathbf{D}_i^* \geq 0. \quad (\text{III.2.43})$$

En appliquant la procédure de Coleman et Noll (1963), deux relations sont obtenues :

$$\hat{\mathbf{S}}^* = \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} - p \mathbf{C}_e^{*-1} \quad (\text{III.2.44})$$

$$\left(\mathbf{C}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{E}_e^*} - \mathbf{F}_i^* \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{E}_i^*} \mathbf{F}_i^{*T} \right) : \mathbf{D}_i^* \geq 0 \quad (\text{III.2.45})$$

Le tenseur des contraintes totales exprimé dans la configuration intermédiaire, $\hat{\mathbf{S}}^*$, est donc défini en fonction de \mathbf{E}_e^* . L'inégalité (III.2.45) fait apparaître un autre tenseur homogène à une contrainte. Ce tenseur \mathbf{S}_S est défini dans la configuration initiale et est appelé tenseur des contraintes statiques :

$$\mathbf{S}_S = -p_s \mathbf{C}_i^{*-1} + 2 \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{E}_i^*}. \quad (\text{III.2.46})$$

Son expression dans la configuration intermédiaire s'écrit :

$$\hat{\mathbf{S}}_S = -p_s \mathbf{I} + 2 \mathbf{F}_i^* \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{E}_i^*} \mathbf{F}_i^{*T} = -p_s \mathbf{I} + 2 \mathbf{B}_i^* \frac{\partial W_b}{\partial \mathbf{B}_i^*}. \quad (\text{III.2.47})$$

Pour satisfaire l'inégalité (III.2.45), une relation simple est choisie, similaire à la relation appliquée pour le modèle de Zener :

$$\left(\mathbf{C}_e^* \hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}_S\right)^D = \eta^* \mathbf{D}_i^* \quad (\text{III.2.48})$$

$$\left(\mathbf{F}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{F}_e^{*-T} - \hat{\mathbf{S}}_S^D\right) = \eta^* \mathbf{D}_i^* \quad (\text{III.2.49})$$

$$\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} = \frac{1}{\eta^*} \left(\mathbf{B}_e^* \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^*\right) \quad (\text{III.2.50})$$

avec $\eta^* > 0$.

Finalement, la solution peut s'écrire à l'aide des 3 équations suivantes :

Modèle de Poynting-Thomson en grandes déformations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}_e^* \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}_e^*} \\ \dot{\mathbf{B}}_e^* = -2\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} + \mathbf{B}_e^* \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e^* \\ \mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} = \frac{1}{\eta^*} \left(\mathbf{B}_e^* \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T}\right) \end{cases} \quad (\text{III.2.51})$$

À ce stade, la démarche pour obtenir les relations contrainte/déformation a été présentée. Pour résoudre les deux systèmes d'équation, il faut d'abord choisir une expression pour les énergies de déformation : W_1 et W_2 pour le modèle de Zener, W_a et W_b pour le modèle de Poynting-Thomson. Dans le modèle de Zener, la contrainte totale est la somme de la contrainte à l'équilibre, fonction de la déformation totale, et de la contrainte hors équilibre, fonction de \mathbf{B}_e . Une fois W_1 fixée, la contrainte à l'équilibre est facilement déterminée, puisque la déformation totale \mathbf{B} est connue. En revanche, \mathbf{B}_e est une variable interne qu'il faut déterminer grâce à la loi d'évolution. Dans le modèle de Poynting-Thomson, la contrainte totale n'est pas décomposée. Elle est directement exprimée comme une fonction de \mathbf{B}_e^* , qui doit être déterminée par la loi d'évolution. Cette loi d'évolution fait apparaître la contrainte statique, qui dépend de \mathbf{B}_i^* . Ici, il apparaît clairement que le modèle de Poynting-Thomson est plus complexe à appréhender et à résoudre que le modèle de Zener. La résolution de ce dernier est en effet plus directe, puisque l'une des parties de la contrainte (la contrainte à l'équilibre) dépend directement de la déformation totale. De plus, le formalisme du modèle de Zener présente un intérêt certain dans notre application de linéarisation d'un modèle viscoélastique autour d'une précharge statique. En effet, cette application va nécessiter d'écrire les équations du modèle dans le cas statique, ce qui se fait trivialement pour le modèle de Zener : la contrainte totale est alors égale à la contrainte à l'équilibre. L'écriture du modèle de Poynting-Thomson dans le cas statique est plus complexe. Cependant, dans la suite, il va être montré que la décomposition en contrainte à l'équilibre et contrainte hors équilibre du modèle de Zener ne présente pas que des avantages dans le contexte de la linéarisation.

2.3 Linéarisation de modèles viscoélastiques

Dans cette section, la linéarisation des deux systèmes d'équation va être présentée. La linéarisation du modèle de Zener est plutôt classique. Par exemple, les travaux suivants sont basés sur la linéarisation de ce type de modèle, plus ou moins enrichi : [Lion \(1998\)](#), [Haupt et al. \(2000\)](#), [Lejeunes et al. \(2012\)](#). La linéarisation du modèle de Poynting-Thomson est plus originale.

Avant de linéariser les deux systèmes, la méthode de linéarisation générale est présentée, en s'attachant d'abord à linéariser les différents tenseurs des déformations, puis les tenseurs des contraintes. Ensuite, la linéarisation est appliquée aux modèles de Zener et de Poynting-Thomson. La première étape consiste à linéariser les systèmes dans le cas général, et ainsi obtenir les relations contrainte/déformation lors de petites oscillations dynamiques autour d'une précharge dynamique, c'est-à-dire le comportement du matériau est viscoélastique pour la précharge et pour les oscillations. Ensuite, l'hypothèse d'une précharge statique est introduite, en faisant tendre la vitesse de déformation de la précharge vers zéro.

2.3.1 Méthode de linéarisation

Une partie des grandeurs présentées ici ont déjà été introduites dans le chapitre 2 de la partie II, car elles sont utilisées dans le post-traitement des données expérimentales. Elles sont néanmoins reprises ici pour plus de clarté. La méthode de linéarisation est basée sur les travaux de [Lianis \(1965\)](#), étudiés notamment par [Saad \(2003\)](#), et sur ceux de [Holzapfel \(2000\)](#).

La linéarisation de tenseurs fait intervenir la notion de dérivée directionnelle. Soient E et F des espaces vectoriels normés, et la fonction $f : E \rightarrow F$, la dérivée directionnelle de f au point $x \in E$ dans la direction $u \in E$ est définie comme :

$$D_u f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}. \quad (\text{III.2.52})$$

A) Linéarisation des tenseurs des déformations

Soient \mathbf{F}_0 le gradient de la transformation statique, $\Delta \mathbf{u}$ un incrément de déplacement et \mathbf{F} le gradient de la transformation totale. Au premier ordre, nous confondrons les petites variations définies par l'opérateur Δ et la dérivée directionnelle dans la direction $\Delta \mathbf{u}$, définie par l'opérateur de Gâteaux $D_{\Delta \mathbf{u}}$. La dérivée directionnelle de \mathbf{F} s'écrit ([Holzapfel \(2000\)](#) p.375) :

$$\Delta \mathbf{F} = D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{F} = \mathbf{Grad}(\Delta \mathbf{u}), \quad (\text{III.2.53})$$

où \mathbf{Grad} est l'opérateur gradient défini par rapport à la configuration non déformée. La composition des différentielles permet d'écrire :

$$\mathbf{Grad}(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{grad}(\Delta \mathbf{u}) \mathbf{F}_0, \quad (\text{III.2.54})$$

où \mathbf{grad} est l'opérateur gradient défini par rapport à la configuration préchargée. Dans la suite, $\mathbf{grad}(\Delta\mathbf{u})$ sera noté \mathbf{h} . Finalement, le gradient de la transformation totale s'écrit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_0, \quad (\text{III.2.55})$$

$$= (\mathbf{I} + \mathbf{h}) \mathbf{F}_0, \quad (\text{III.2.56})$$

$$= \mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F}, \quad (\text{III.2.57})$$

où \mathbf{F}_1 est le gradient de la transformation dû aux petits déplacements. On linéarise aussi le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\Delta\mathbf{F}^T \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^T \Delta\mathbf{F} \right), \quad (\text{III.2.58})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{F}_0^T \mathbf{Grad}(\Delta\mathbf{u}) \right]^T + \mathbf{F}_0^T \mathbf{Grad}(\Delta\mathbf{u}) \right), \quad (\text{III.2.59})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{F}_0^T \mathbf{h} \mathbf{F}_0 \right]^T + \mathbf{F}_0^T \mathbf{h} \mathbf{F}_0 \right), \quad (\text{III.2.60})$$

$$= \mathbf{F}_0^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}_0, \quad (\text{III.2.61})$$

où $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$ est le tenseur des déformations infinitésimales. On introduit également la partie antisymétrique de \mathbf{h} :

$$\begin{cases} \mathbf{h} &= \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} (\mathbf{h} - \mathbf{h}^T). \end{cases} \quad (\text{III.2.62})$$

Enfin, on linéarise le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche, son carré et son inverse :

$$\Delta\mathbf{B} = \Delta\mathbf{F} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_0 \Delta\mathbf{F} = \mathbf{h} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \mathbf{h}^T. \quad (\text{III.2.63})$$

$$\Delta\mathbf{B}^2 = \Delta\mathbf{B} \mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_0 \Delta\mathbf{B} = \mathbf{h} \mathbf{B}_0^2 + \mathbf{B}_0^2 \mathbf{h}^T + 2\mathbf{B}_0 \Delta\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{B}_0. \quad (\text{III.2.64})$$

$$\Delta\mathbf{B}^{-1} = -\mathbf{B}_0^{-1} \Delta\mathbf{B} \mathbf{B}_0^{-1} = -\mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \mathbf{B}_0^{-1}. \quad (\text{III.2.65})$$

B) Linéarisation des tenseurs des contraintes

Le premier tenseur à linéariser est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II \mathbf{S} , qui s'exprime en fonction de l'énergie de déformation W de la manière suivante :

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{S}_W, \text{ avec } \mathbf{S}_W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}. \quad (\text{III.2.66})$$

La dérivée directionnelle, ainsi que la composition de dérivées tensorielles permettent d'écrire une petite variation de \mathbf{S}_W (cf. [Holzapfel \(2000\)](#) p.396) :

$$\Delta \mathbf{S}_W = D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{S}_W(\mathbf{E}), \quad (\text{III.2.67})$$

$$= \frac{\partial \mathbf{S}_W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}, \quad (\text{III.2.68})$$

$$= \overset{4}{\mathbf{C}} : \Delta \mathbf{E}, \quad (\text{III.2.69})$$

où $\overset{4}{\mathbf{C}} = 4 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}_0^2}$ est le tenseur tangent de la transformation \mathbf{F}_0 en configuration lagrangienne (voir [Holzapfel \(2000\)](#) p.262 pour l'expression en fonction des dérivées de l'énergie de déformation). Finalement, \mathbf{S} s'écrit :

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{S}_{W0} + \Delta \mathbf{S}_W, \quad (\text{III.2.70})$$

où \mathbf{S}_{W0} correspond à la précharge. À partir de l'expression du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II, il est possible de linéariser le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad (\text{III.2.71})$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + \mathbf{F}_0 \Delta \mathbf{S}_W \mathbf{F}_0^T + \Delta \mathbf{F} \mathbf{S}_{W0} \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_0 \mathbf{S}_{W0} \Delta \mathbf{F}_0^T. \quad (\text{III.2.72})$$

En appliquant l'équation [\(III.2.69\)](#), le deuxième terme de la somme peut être simplement exprimé en fonction du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\mathbf{F}_0 \Delta \mathbf{S}_W \mathbf{F}_0^T = \mathbf{F}_0 \left(\overset{4}{\mathbf{C}} : \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{F}_0^T \mathbf{h} \mathbf{F}_0 \right]^T + \mathbf{F}_0^T \mathbf{h} \mathbf{F}_0 \right) \right) \mathbf{F}_0^T \quad (\text{III.2.73})$$

$$= \mathbf{F}_0 \left(\overset{4}{\mathbf{C}} : \left(\mathbf{F}_0^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}_0 \right) \right) \mathbf{F}_0^T \quad (\text{III.2.74})$$

$$= \left(\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{F}_0 \right)^{\overset{23}{T}} : \left(\overset{4}{\mathbf{C}} : \left(\mathbf{F}_0^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}_0 \right) \right) \quad (\text{III.2.75})$$

$$= \left(\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{F}_0 \right)^{\overset{23}{T}} : \left(\overset{4}{\mathbf{C}} : \left(\mathbf{F}_0^T \otimes \mathbf{F}_0^T \right)^{\overset{23}{T}} : \boldsymbol{\epsilon} \right) \quad (\text{III.2.76})$$

$$= \overset{4}{\mathbf{c}} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{III.2.77})$$

où $\overset{4}{\mathbf{c}}$ est le tenseur tangent défini dans la configuration préchargée (eulérien). L'opérateur de transposition $\overset{23}{T}$ s'applique aux tenseurs d'ordre quatre, et est défini par la transposition des deuxième et troisième index :

$$\overset{23}{\mathbb{A}}^T = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (\text{III.2.78})$$

En utilisant les équations [\(III.2.54\)](#) et [\(III.2.77\)](#), l'équation [\(III.2.72\)](#) devient :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + \overset{4}{\mathbf{c}} : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{h} \boldsymbol{\sigma}_{W0} + \boldsymbol{\sigma}_{W0} \mathbf{h}^T. \quad (\text{III.2.79})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy totales s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{III.2.80})$$

$$= \boldsymbol{\sigma}_0 - \Delta p \mathbf{I} + \mathbf{h}\boldsymbol{\sigma}_{W0} + \boldsymbol{\sigma}_{W0}\mathbf{h}^T + \overset{4}{\mathcal{C}} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{III.2.81})$$

2.3.2 Linéarisation du modèle de Zener

A) Autour d'une précharge viscoélastique

Tout d'abord, il faut résoudre le système (III.2.40) pour la précharge, dans le cas général. Après avoir choisi les formes des dérivées de l'énergie de déformation, les trois tenseurs des contraintes totales, à l'équilibre et hors équilibre sont déterminés, à savoir respectivement :

- $\boldsymbol{\sigma}$;
- $\boldsymbol{\sigma}_E = -p_E \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{WE}$;
- $\boldsymbol{\sigma}_{OE} = -(p - p_E) \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{WOE}$.

À présent, le système d'équations (III.2.40) est linéarisé, en utilisant les différentes grandeurs linéarisées définies précédemment. Ce système d'équations permet d'écrire les relations entre l'incrément de contrainte de Cauchy lors des oscillations, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de l'incrément de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ et de la vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Afin de distinguer les grandeurs connues, c'est-à-dire celles qui s'appliquent à la précharge ainsi que $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, et les grandeurs inconnues, c'est-à-dire les autres grandeurs qui s'appliquent aux petites oscillations, ces dernières sont écrites en rouge.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_E + \Delta\boldsymbol{\sigma}_{OE} \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_E = -\Delta p_E \mathbf{I} + \overset{4}{\mathcal{C}} : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{h}\boldsymbol{\sigma}_{WE} + \boldsymbol{\sigma}_{WE}\mathbf{h}^T \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{OE} = -(\Delta p - \Delta p_E) \mathbf{I} + 4\mathbf{B}_e \frac{\partial^2 W_2}{\partial \mathbf{B}_e^2} \mathbf{B}_e : \boldsymbol{\epsilon}_e + \mathbf{h}_e \boldsymbol{\sigma}_{WOE} + \boldsymbol{\sigma}_{WOE} \mathbf{h}_e^T \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e = -\frac{1}{\eta} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{OE}^D + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{array} \right. \quad (\text{III.2.82})$$

Logiquement, il apparaît ici que le tenseur des contraintes à l'équilibre linéarisé, $\Delta\boldsymbol{\sigma}_E$, est directement calculé à partir de la déformation totale linéarisée, $\boldsymbol{\epsilon}$ et des grandeurs de la précharge. Ensuite, pour déterminer le tenseur des contraintes hors équilibre linéarisé, $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{OE}$, il faut résoudre la loi d'évolution sur $\boldsymbol{\epsilon}_e$. Le point important ici est que les trois tenseurs des contraintes linéarisés dépendent de la précharge. Afin d'illustrer cette dépendance, la figure III.2.7 montre le schéma rhéologique du modèle de Zener après déformation dans le cas général (vitesse non nulle), accompagné de courbes théoriques de contrainte de Cauchy en fonction de l'extension pour des oscillations viscoélastiques autour d'une précharge viscoélastique en traction uniaxiale. La prochaine étape consiste à considérer le cas d'une précharge statique.

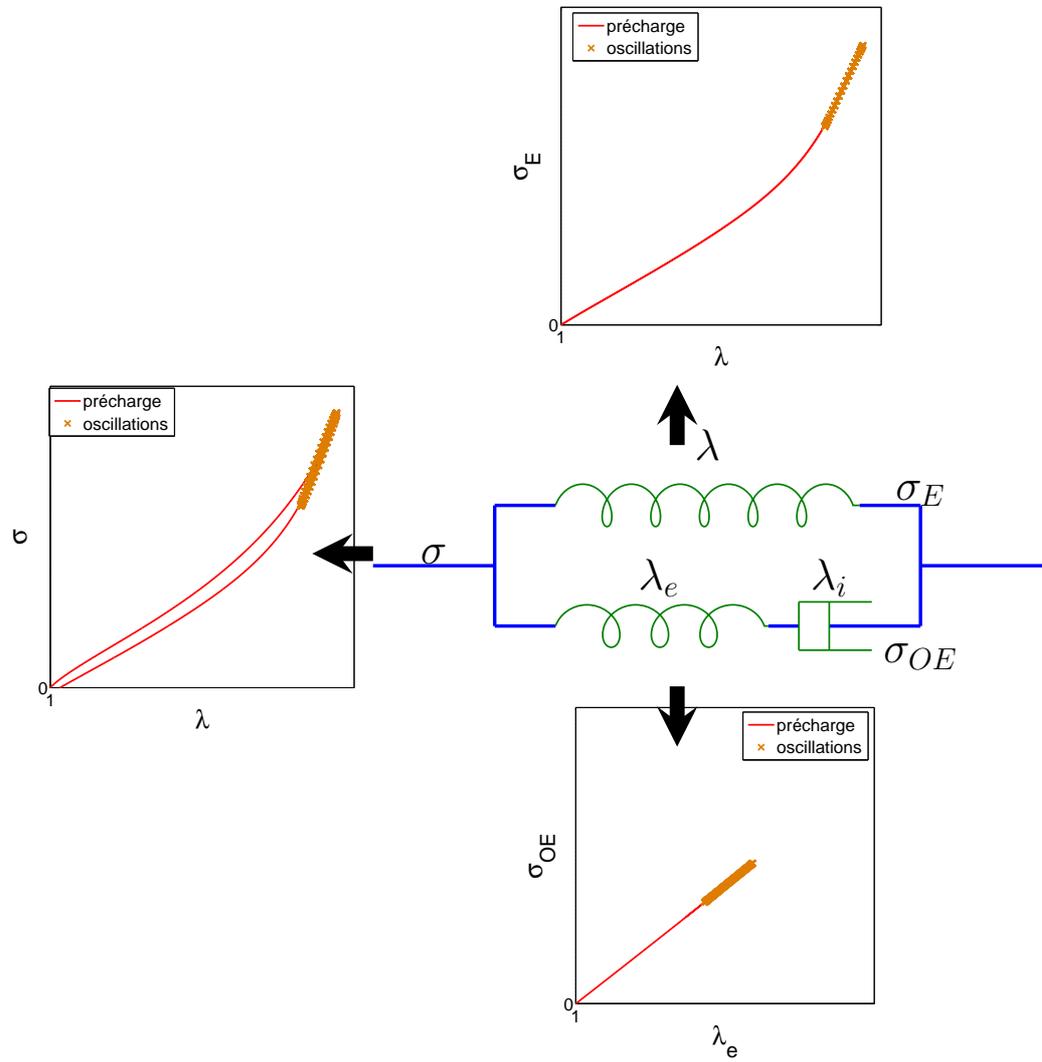


FIGURE III.2.7 : Schéma rhéologique du modèle de Zener après une transformation à vitesse non nulle

B) Autour d'une précharge statique

Dans le cas d'une précharge statique, toutes les dérivées temporelles associées à la précharge sont nulles. Le système d'équation (III.2.40) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_E \\ \boldsymbol{\sigma}_E = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B} \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{B}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{OE} = 0 \\ \mathbf{B}_e = \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (\text{III.2.83})$$

En intégrant ces nouvelles relations, le système linéarisé (III.2.82) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_E + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{OE} \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}_E = -\Delta p_E \mathbf{I} + 4c : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{h} \boldsymbol{\sigma}_W + \boldsymbol{\sigma}_W \mathbf{h}^T \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}_{OE} = -(\Delta p - \Delta p_E) \mathbf{I} + 4 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \mathbf{B}_e^2} (\mathbf{I}) : \boldsymbol{\epsilon}_e \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e = -\frac{1}{\eta} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{OE}^D + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{array} \right. \quad (\text{III.2.84})$$

Dans le cas d'une précharge statique, il apparaît que le tenseur des contraintes à l'équilibre linéarisé dépend de la précharge. En revanche, le tenseur des contraintes hors équilibre linéarisé n'en dépend pas, puisque le tenseur tangent qui apparaît est exprimé en \mathbf{I} . Autrement formulé, lorsque la précharge est statique, la partie hors équilibre de la contrainte générée lors de petites oscillations ne peut pas dépendre de la précharge avec le modèle de Zener. Afin d'illustrer ce phénomène, la figure III.2.8 montre le schéma rhéologique du modèle de Zener après une précharge statique, accompagné de courbes théoriques de contrainte de Cauchy en fonction de l'extension pour des oscillations viscoélastiques autour d'une précharge statique en traction uniaxiale. Lors d'une précharge statique, la vitesse est nulle. L'amortisseur est alors équivalent à un circuit ouvert, ce qui induit que le ressort de la branche du bas ne se déforme pas. La contrainte hors équilibre est nulle. Alors, la partie hors équilibre de la contrainte est obligatoirement linéarisée autour d'un état non déformé, et ne peut donc pas dépendre de la précharge. Dans la suite, le modèle de Poynting-Thomson est linéarisé.

2.3.3 Linéarisation du modèle de Poynting-Thomson

A) Autour d'une précharge viscoélastique

Comme précédemment, le système (III.2.51) est linéarisé dans le cadre général, c'est-à-dire le comportement du matériau est viscoélastique pendant la précharge et pendant

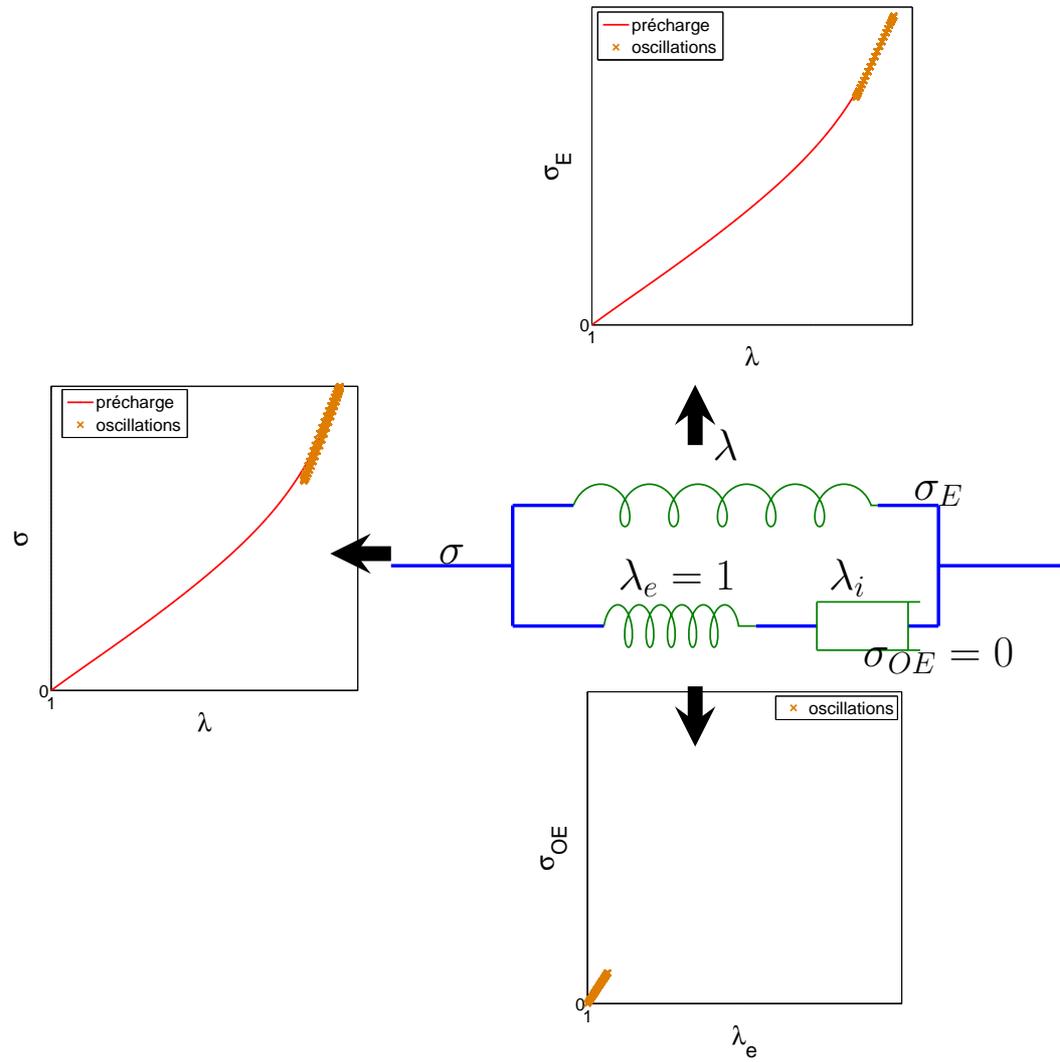


FIGURE III.2.8 : Schéma rhéologique du modèle de Zener après une transformation statique

les oscillations. Après avoir choisi la forme des dérivées de l'énergie de déformation, le système (III.2.51) est résolu pour la précharge. Toutes les grandeurs sont alors déterminées. Dans le système linéarisé, de nouveau, les grandeurs inconnues sont indiquées en

rouge :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + 2\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{B}_e^*} + 2 \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{B}_e^*} \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} + 4\mathbf{B}_e^* \frac{\partial^2 W_a}{\partial \mathbf{B}_e^{*2}} \mathbf{B}_e^* : \boldsymbol{\epsilon}_e^* \\ 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e^* = \left(\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* + \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} \right) \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \left(\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* + \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} \right) \\ + \mathbf{B}_e^* \left(\dot{\mathbf{h}}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{L}^T \right) + \left(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{L} \mathbf{h} + \mathbf{h} \mathbf{L} \right) \mathbf{B}_e^* - 2\Delta \left(\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} \right) \\ \Delta \left(\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} \right) = \frac{1}{\eta} \left(\left(\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* + \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} \right) \boldsymbol{\sigma}^D + \mathbf{B}_e^* \Delta \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{h}_e^* \mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T} \right) \\ - \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T} \mathbf{h}_e^{*T} + \mathbf{F}_e^* \left(\mathbf{h}_i^* \hat{\mathbf{S}}_S + \hat{\mathbf{S}}_S \mathbf{h}_i^{*T} + c_2 : \boldsymbol{\epsilon}_i^* \right)^D \mathbf{F}_e^{*T} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.2.85})$$

B) Autour d'une précharge statique

Considérons maintenant le cas d'une précharge statique. Les dérivées temporelles des grandeurs décrivant la précharge sont nulles, et le système (III.2.51) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mathbf{B}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{B}_e^*} \\ \mathbf{B}_e^* \boldsymbol{\sigma}^D = \mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T} \end{array} \right. \quad (\text{III.2.86})$$

Contrairement au modèle de Zener, on vérifie ici qu'aucune des variables internes ne s'annule dans le cas d'un chargement statique. C'est un avantage puisque nous cherchons à obtenir une influence naturelle de la précharge sur la contrainte hors équilibre. C'est aussi un inconvénient car la deuxième équation est beaucoup moins facile à résoudre. Cette équation signifie que dans le cas statique, la contrainte totale est égale à la contrainte statique (d'où le nom de contrainte statique). Ce qui est moins évident, c'est la détermination de \mathbf{B}_e via cette équation. Une fois que les lois de comportement ont été choisies pour W_1 et W_2 , il faut résoudre le système d'équation, qui peut ne pas être simple, et qui permet de trouver les composantes de \mathbf{B}_e . Une fois que \mathbf{B}_e et donc $\boldsymbol{\sigma}$ ont été déterminés, il est possible de résoudre le système d'équation (III.2.85), qui se simplifie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \mathbf{I} + 2\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{B}_e^*} + 2 \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{B}_e^*} \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} + 4\mathbf{B}_e^* \frac{\partial^2 W_a}{\partial \mathbf{B}_e^{*2}} \mathbf{B}_e^* : \boldsymbol{\epsilon}_e^* \\ 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e^* = \mathbf{B}_e^* \dot{\mathbf{h}}^T + \dot{\mathbf{h}} \mathbf{B}_e^* - 2\Delta \left(\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} \right) \\ \Delta \left(\mathbf{F}_e^* \mathbf{D}_i^* \mathbf{F}_e^{*T} \right) = \frac{1}{\eta} \left(\left(\mathbf{h}_e^* \mathbf{B}_e^* + \mathbf{B}_e^* \mathbf{h}_e^{*T} \right) \boldsymbol{\sigma}^D + \mathbf{B}_e^* \Delta \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{h}_e^* \mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T} \right) \\ - \frac{1}{\eta} \left(\mathbf{F}_e^* \hat{\mathbf{S}}_S^D \mathbf{F}_e^{*T} \mathbf{h}_e^{*T} + \mathbf{F}_e^* \left(\mathbf{h}_i^* \hat{\mathbf{S}}_S + \hat{\mathbf{S}}_S \mathbf{h}_i^{*T} + c_2 : \boldsymbol{\epsilon}_i^* \right)^D \mathbf{F}_e^{*T} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.2.87})$$

2.3.4 Bilan

La figure III.2.9 montre les schémas rhéologiques des deux modèles après précharge statique. Pour le modèle de Zener, seul le comportement du ressort du bas dépend de la vitesse de déformation. Or, celui-ci étant associé en série avec un amortisseur, il n'est pas déformé dans le cas statique. C'est pourquoi la contrainte hors équilibre d'oscillations autour d'une précharge statique est linéarisée autour d'un état non déformé pour le modèle de Zener. Pour le modèle de Poynting-Thomson, le comportement des deux ressorts dépend de la vitesse de déformation, et dans le cas d'une précharge statique, les deux ressorts sont déformés. C'est pourquoi chacune des contraintes linéarisées de ce modèle dépend à la fois de la vitesse de déformation et de la précharge. Il a été montré

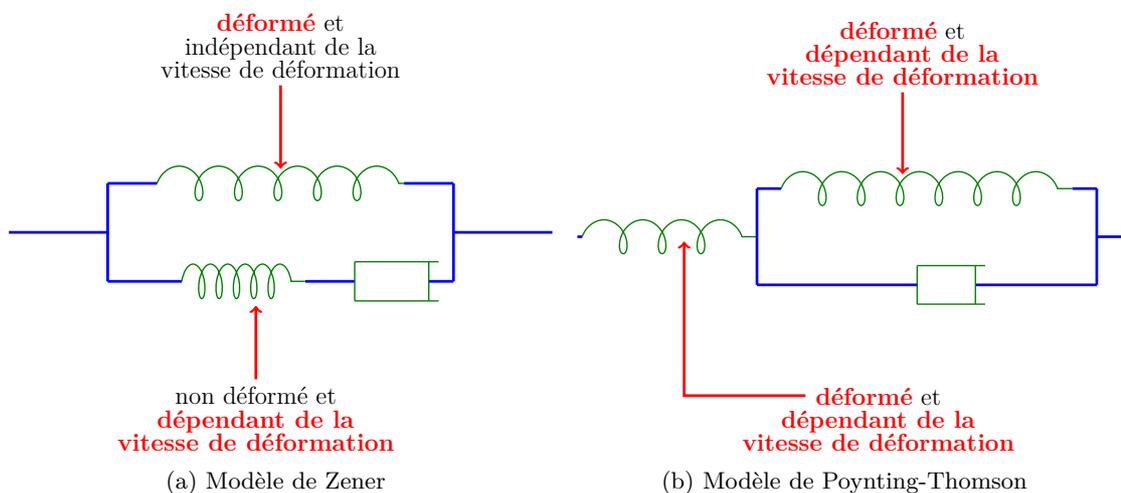


FIGURE III.2.9 : Comparaison de l'état de chacun des éléments des schémas rhéologiques des modèles de Zener et de Poynting-Thomson après une transformation statique

que le modèle de Poynting-Thomson permet d'induire une influence de la précharge sur la contrainte totale linéarisée. Étant donné que tout le système dépend à la fois de la précharge et de la vitesse de déformation, il est probable que la contrainte à l'équilibre et la contrainte hors équilibre linéarisées dépendent toutes deux de la précharge. Pour le prouver, il faudrait être capable d'établir une équivalence entre les modèles de Zener et de Poynting-Thomson. Or, en grandes déformations, la tâche semble très complexe, d'autant plus que Huber et Tsakmakis (2000b) ont montré que les modèles ne sont pas équivalents en grandes déformations, alors que les énergies de déformation ont été choisies pour qu'ils le soient en petites déformations.

Considérons à présent un cas uniaxial, en petites déformations. Alors, les configurations se confondent, la relation contrainte/déformation est linéaire, et les tenseurs tangents deviennent des scalaires, constants. Ce sont simplement les raideurs des ressorts,

qui vont être notées :

$$E = \frac{\partial^2 W_a}{\partial \epsilon_e^{*2}}, \quad (\text{III.2.88})$$

$$E_{PT} = \frac{\partial^2 W_b}{\partial \epsilon_i^{*2}}, \quad (\text{III.2.89})$$

$$E_{Z1} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \epsilon^2}, \quad (\text{III.2.90})$$

$$E_{Z2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial e_e^2}. \quad (\text{III.2.91})$$

Huber et Tsakmakis (2000b) montrent qu'il est possible d'établir une équivalence entre les deux modèles si les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{E_{PT}}{E} = \frac{E_{Z1}}{E_{Z2}}, \quad (\text{III.2.92})$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{E^2}{E_{Z2}^2} \frac{1}{\eta^*}. \quad (\text{III.2.93})$$

Si ce type de relation est appliqué en grandes déformations, les raideurs deviennent non linéaires, elles dépendent de la déformation :

- E représente une raideur non linéaire dans le modèle de Poynting-Thomson, dépendante de \mathbf{E}_e^* , qui, dans le cas d'une précharge statique, est non nulle ;
- E_{Z2} représente une raideur non linéaire dans le modèle de Zener, dépendante de \mathbf{E}_e , qui, dans le cas d'une précharge statique, est nulle. Il s'agit donc d'une raideur autour d'une position non déformée ;

Supposons maintenant que les systèmes d'équations du modèle de Poynting-Thomson pour la précharge statique et pour les oscillations aient été résolus. Alors, pour trouver un équivalent au modèle de Zener, il faut qu'une relation du type de (III.2.93) soit respectée. Étant donné que η^* est une constante, cela implique que η , Δe_e et donc $\Delta \sigma_{OE}$ dépendent toutes de la précharge, et plus précisément de \mathbf{E}_e^* via E . Ainsi, le modèle de Poynting-Thomson permet de générer une dépendance de la précharge à la fois sur la contrainte à l'équilibre et hors équilibre des oscillations en utilisant une loi d'évolution très simple, et ce indépendamment du fait que la contrainte hors équilibre de la précharge soit nulle. Pour obtenir le même phénomène avec le modèle de Zener, il faudrait modifier la loi d'évolution et introduire une viscosité dépendante de la déformation. C'est ce que certains auteurs, comme Holzapfel (1996); Reese et Govindjee (1998); Miehe et Keck (2000); Haupt et Sedlan (2001); Amin *et al.* (2006), proposent de faire. De ce point de vue, il paraît néanmoins pertinent de privilégier le modèle de Poynting-Thomson, puisque la dépendance à la précharge y est plus naturelle : il n'est alors pas nécessaire de postuler une forme de viscosité dépendante de la déformation.

Les équations des modèles de Poynting-Thomson et de Zener ont été présentées dans le cas général, puis linéarisées et enfin appliquées au cas d'une précharge statique. Alors que, grâce à la décomposition en contrainte à l'équilibre/contrainte hors équilibre, le

modèle de Zener est plus simple à appliquer dans le cadre de la linéarisation autour d'une précharge statique, il ne permet pas de prendre en compte l'influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre avec une loi d'évolution simple. Au contraire, le modèle de Poynting-Thomson est plus complexe à appliquer dans le cadre statique, mais il induit une dépendance de la précharge sur toutes les contraintes du système, et ce avec une viscosité constante. Dans la suite, les paramètres des modèles vont être identifiés puis les deux modèles vont être confrontés aux résultats expérimentaux.

2.4 Identification des paramètres des modèles

2.4.1 Les paramètres du modèle de Zener

L'avantage principal du modèle de Zener est de pouvoir utiliser la loi hyperélastique identifiée dans le chapitre précédent pour l'énergie de déformation W_1 caractérisant le comportement de la partie à l'équilibre (ressort de la branche du haut). Il reste à pourvoir les deux éléments de la branche du bas d'une loi. Pour l'amortisseur, la loi a déjà été choisie avec la viscosité η . Pour le ressort, un modèle néo-Hookéen est choisi pour sa simplicité :

$$W_2 = G_{oe}(I_{1e} - 3), \quad (\text{III.2.94})$$

où I_{1e} est le premier invariant du tenseur de Cauchy-Green \mathbf{B}_e . La partie à l'équilibre de la variation de contrainte étant déjà déterminée par le choix de la loi de comportement hyperélastique pour la précharge, il n'y a plus que deux paramètres à identifier pour la partie hors équilibre : la raideur hors équilibre G_{oe} et la viscosité η . Notons qu'un troisième paramètre τ_r , le temps de relaxation, peut être défini à partir des deux précédents :

$$\tau_r = \frac{\eta}{4G_{oe}}. \quad (\text{III.2.95})$$

L'identification a lieu en deux temps et est réalisée avec Matlab. Concernant le choix des essais sur lesquels les paramètres sont identifiés, deux essais ont d'abord été retenus, à savoir l'essai en précharge et oscillations en traction uniaxiale, et l'essai en précharge multiaxiale et oscillations en traction uniaxiale, les deux essais ayant été effectués à une fréquence de 1 Hz. Puis, deux autres essais d'oscillations en traction uniaxiale, pour lesquels la prédiction des deux modèles n'était pas satisfaisante, ont été intégrés dans la base d'identification, à savoir l'essai de précharge en torsion pure à 0,1 Hz et l'essai de précharge en compression uniaxiale à 0,1 Hz.

A) Valeurs initiales

Tout d'abord, un intervalle de temps cohérent par rapport aux phénomènes observés expérimentalement et aux durées des essais est fixé. Cet intervalle est discrétisé avec un pas grossier, et pour chaque valeur de temps de relaxation, la valeur optimale de raideur G_{oe} est calculée en minimisant l'erreur sur les valeurs de raideurs E' et des aires des boucles contraintes (équivalentes)/déformations. L'erreur commise est tracée

en fonction du temps de relaxation, et le temps de relaxation pour lequel l'erreur est la plus faible est sélectionné, avec sa raideur optimisée associée. Cette étape est nécessaire pour pouvoir renseigner des valeurs initiales cohérentes dans la boucle d'optimisation suivante. En effet, une identification directe de deux des paramètres parmi la raideur, la viscosité et le temps de relaxation mène à des minima différents selon les valeurs initiales renseignées. Nous imposons que le temps de relaxation doit se trouver dans l'intervalle suivant :

$$0,1 \text{ s} \leq \tau_r \leq 1,5 \text{ s}. \quad (\text{III.2.96})$$

Cet intervalle est balayé avec un pas de 0,1 s. La figure III.2.10 montre l'évolution de l'erreur (prise au sens des moindres carrés) en fonction du temps de relaxation. Il apparaît qu'un minimum de l'erreur est atteint pour un temps de relaxation $\tau_r = 0,3 \text{ s}$, ce qui correspond à une raideur hors équilibre $G_{oe} = 0,1421 \text{ MPa}$ et une viscosité $\eta = 0,1705 \text{ MPa.s}$.

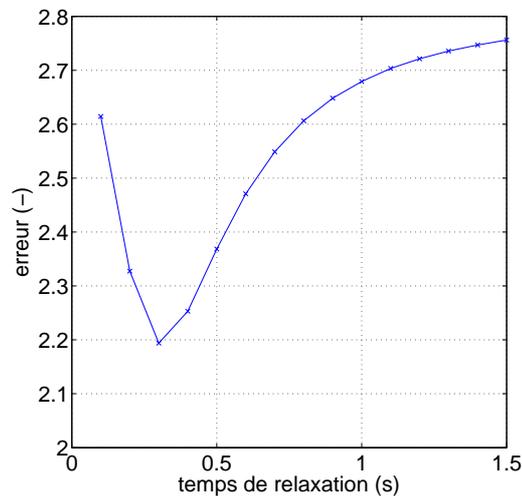


FIGURE III.2.10 : Évolution de l'erreur d'identification lors de l'optimisation grossière de la raideur G_{oe} en fonction du temps de relaxation imposé

B) Optimisation

L'objectif de cette étape est de raffiner les valeurs obtenues dans la première étape. Ces valeurs constituent les valeurs initiales de l'optimisation. Cette fois-ci les deux paramètres G_{oe} et η sont identifiés en même temps en calculant l'erreur au sens des moindres carrés de toute la boucle contraintes (équivalentes) /déformations. Le couple optimal suivant est ainsi obtenu :

$$G_{oe} = 0,3028 \text{ MPa} \text{ et } \eta = 0,4278 \text{ MPa.s}, \quad (\text{III.2.97})$$

ce qui correspond à un temps de relaxation $\tau_r = 0,3532 \text{ s}$.

2.4.2 Les paramètres du modèle de Poynting-Thomson

L'identification des paramètres du modèle de Poynting-Thomson est plus lourde, puisque la loi de comportement hyperélastique identifiée précédemment ne peut être utilisée ici. En effet, celle-ci décrit la relation entre la contrainte totale σ et la déformation totale \mathbf{B} lors de la précharge, alors que le modèle de Poynting-Thomson requiert de fixer la relation entre la contrainte totale σ et la déformation \mathbf{B}_e d'une part, et la relation entre la contrainte $\hat{\mathbf{S}}_S$ et la déformation \mathbf{B}_i d'autre part. Il faut donc choisir une forme pour W_a et W_b , identifier leurs paramètres ainsi que la viscosité η^* . La même loi que la loi hyperélastique à trois paramètres de type Mooney-Rivlin identifiée dans le chapitre précédent est choisie pour les deux énergies de déformation :

$$W_1 = C_{10} (I_{1e} - 3) + C_{01} (I_{2e} - 3) + C_{50} (I_{1e} - 3)^5 \quad (\text{III.2.98})$$

$$W_2 = C_{10}^s (I_{1i} - 3) + C_{01}^s (I_{2i} - 3) + C_{50}^s (I_{1i} - 3)^5. \quad (\text{III.2.99})$$

Il y a donc 7 paramètres à identifier. Ici, il faut donc choisir les précharges et les oscillations sur lesquelles les paramètres seront identifiés. Après plusieurs tentatives, le jeu qui semble donner les meilleurs résultats a été obtenu en effectuant une première identification pour l'ensemble des paramètres sur la précharge en traction uniaxiale, puis en corrigeant les paramètres de W_b ainsi que la viscosité avec une seconde identification basée sur l'essai de précharge et oscillations en traction uniaxiale à 0,1 Hz. L'erreur calculée au sens des moindres carrés prend en compte l'ensemble des points de la boucle contrainte/déformation auquel est ajoutée la différence relative de taille de la boucle à déformation nulle, ce qui permet d'obtenir un résultat plus satisfaisant sur la réponse aux oscillations. Le tableau III.2.1 contient la valeur des paramètres identifiés sur la précharge et le tableau III.2.2 contient la valeur des paramètres corrigés avec l'identification sur la précharge et les oscillations.

C_{10} (MPa)	C_{01} (MPa)	C_{50} (MPa)	C_{10}^s (MPa)	C_{01}^s (MPa)	C_{50}^s (MPa)	η^* (MPa.s)
0,5447	0,0994	0,1832	1,1712	0,0169	0,0946	198,0579

TABLEAU III.2.1 : Paramètres identifiés sur la précharge en traction uniaxiale

C_{10} (MPa)	C_{01} (MPa)	C_{50} (MPa)	C_{10}^s (MPa)	C_{01}^s (MPa)	C_{50}^s (MPa)	η^* (MPa.s)
0,5447	0,0994	0,1832	0,7333	0,1046	0,0525	199,2802

TABLEAU III.2.2 : Paramètres identifiés sur la précharge en traction uniaxiale, puis corrigés avec l'essai de précharge et oscillations en traction uniaxiale à 0,1 Hz

2.5 Résultats

2.5.1 Prédiction des efforts et couples de la précharge

Dans le cas statique, le modèle de Zener est équivalent au modèle de Mooney-Rivlin, dont les résultats ont déjà été comparés aux essais statiques dans le chapitre précédent. Ce n'est pas le cas du modèle de Poynting-Thomson. Dans cette sous-section, les deux modèles sont comparés aux données expérimentales pour quatre précharges statiques :

- Traction uniaxiale à $\lambda_{max} = 2,5$;
- Compression uniaxiale à $\lambda_{min} = 0,67$;
- Torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$;
- traction-torsion simultanées à $\lambda_{max} = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$.

La figure III.2.11 montre l'évolution de la seule composante du tenseur des contraintes de Cauchy non nulle, σ_{zz} pour le cas de la traction et de la compression uniaxiale, résultant des essais, du modèle de Poynting-Thomson avec le jeu de paramètres final, et le modèle de Mooney-Rivlin. Dans les deux cas de traction et compression uniaxiale, le modèle

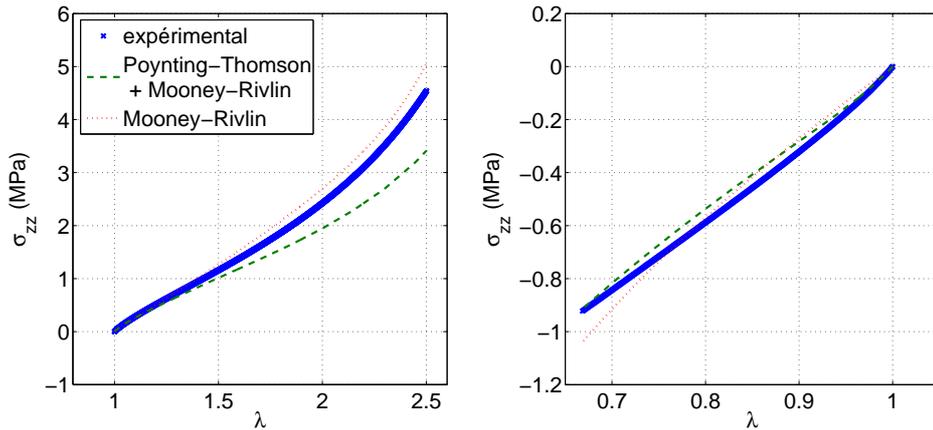


FIGURE III.2.11 : Évolution de la contrainte de Cauchy en fonction de l'extension dans le cas d'un chargement quasi-statique en traction uniaxiale (à gauche) et en compression uniaxiale (à droite), pour les essais, le modèle de Poynting-Thomson et le modèle de Mooney-Rivlin

de Poynting-Thomson est plus proche de l'essai que le modèle de Mooney-Rivlin pour les petites déformations, puis sous-estime la contrainte en valeur absolue et est moins prédictif que le modèle de Mooney-Rivlin.

La figure III.2.12 montre l'évolution de l'effort et du couple pour le cas de la torsion pure résultant des essais, du modèle de Poynting-Thomson avec le jeu de paramètres final, et le modèle de Mooney-Rivlin. L'effort prédit par le modèle de Poynting-Thomson est plus faible en valeur absolue que l'effort mesuré, et en est plus éloigné que le modèle de

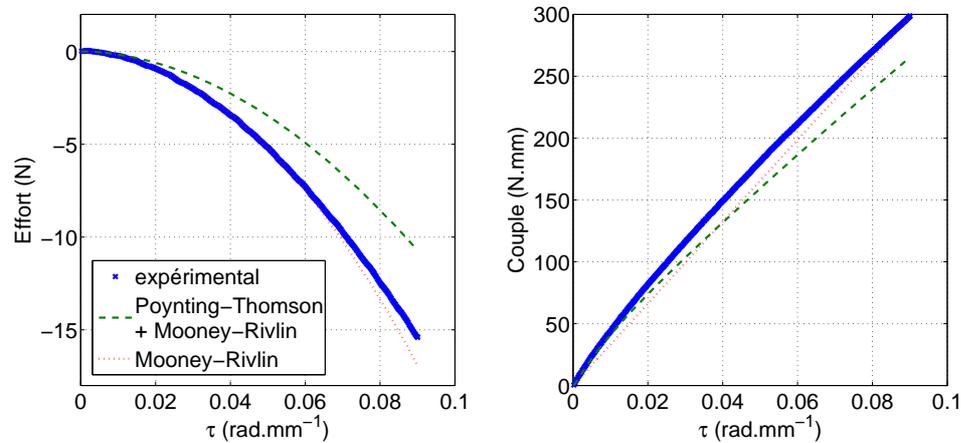


FIGURE III.2.12 : Évolution de l’effort (à gauche) et du couple (à droite) en fonction de l’angle par unité de longueur dans le cas d’un chargement quasi-statique en torsion pure, pour les essais, le modèle de Poynting-Thomson et le modèle de Mooney-Rivlin

Mooney-Rivlin. Pour le couple, le modèle de Poynting-Thomson est très proche de l’essai pour les faibles angles, puis le sous-estime. À partir de $\tau = 0,04 \text{ rad.mm}^{-1}$, le modèle de Mooney-Rivlin est plus proche de l’essai, mais la forme de la courbe est mieux respectée par le modèle de Poynting-Thomson.

La figure III.2.13 montre l’évolution de l’effort et du couple pour le cas de la traction-torsion résultant des essais, du modèle de Poynting-Thomson avec le jeu de paramètres final, et le modèle de Mooney-Rivlin. Pour cet essai, l’effort et le couple prédits par le modèle de Poynting-Thomson sont très proches de l’effort et du couple mesurés pour les petites déformations. Ensuite le modèle sous-estime légèrement l’effort tout en restant plus proche de l’essai que le modèle de Mooney-Rivlin. La prédiction du couple est moins satisfaisante que celle du modèle de Mooney-Rivlin. Finalement, le modèle de Poynting-Thomson a plus de paramètres que le modèle de Mooney-Rivlin, mais n’est globalement pas plus prédictif que celui-ci. Il est important de noter que le modèle donne de meilleurs résultats avec le jeu de paramètres identifié uniquement sur la précharge quasi-statique, et que les résultats sur la précharge sont dégradés par l’introduction d’essais en fréquence dans la base d’identification.

2.5.2 Prédiction des efforts et couples des oscillations

Dans cette sous-section, les résultats des modèles et des essais vont être comparés en suivant le même plan que celui qui a été suivi dans le chapitre 3 de la partie II. Dans un premier temps la dépendance à la fréquence et à l’amplitude du comportement du matériau est étudiée, d’abord pour des oscillations en traction/compression, puis pour des oscillations en torsion pure.

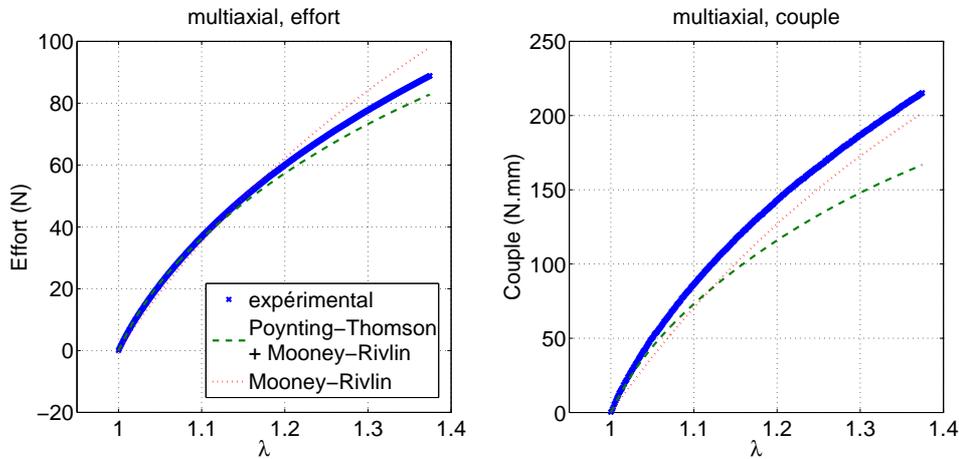


FIGURE III.2.13 : Évolution de l'effort (à gauche) et du couple (à droite) en fonction de l'angle par unité de longueur dans le cas d'un chargement quasi-statique en traction-torsion simultanées, pour les essais, le modèle de Poynting-Thomson et le modèle de Mooney-Rivlin

A) Dépendance à la fréquence et à l'amplitude

L'objectif ici n'est pas de mener une comparaison détaillée entre les résultats expérimentaux et les deux modèles à propos de l'influence de la fréquence et de l'amplitude, mais plutôt à propos de l'influence de la précharge. En effet, il a été vu lors de la présentation des résultats expérimentaux (chapitre 3 de la partie II), que les données sont bruitées et que le nombre de points à iso-fréquence ou iso-amplitude est faible, de sorte que les tracés de courbes sont peu précis. De plus, ces deux modèles ont déjà été étudiés par d'autres auteurs sans précharge. Dans la littérature, un nombre de branches élevé est très souvent adopté pour obtenir une prédiction satisfaisante de l'influence de la fréquence (voir par exemple Rendek et Lion (2010)), et la loi d'évolution complexifiée pour modéliser l'effet Payne (voir par exemple Lion (1996)). Sachant qu'il existe des méthodes pour améliorer la prédiction de la dépendance à la fréquence et à l'amplitude, nous choisissons ici de nous concentrer sur la dépendance à la précharge. Ainsi, dans les paragraphes suivants, des courbes de modules de conservation et de perte en traction et en cisaillement en fonction de la fréquence et de l'amplitude vont être présentées. À partir de ces courbes, les tendances globales seront comparées, et nous verrons s'il est possible d'établir que l'un des modèles offre une meilleure prédiction de l'influence de la précharge et de l'amplitude et/ou est plus proche des données d'essais, tout en gardant à l'esprit qu'il sera possible d'améliorer les modèles ultérieurement.

a) **Oscillations en traction/compression** Pour rappel, le comportement dynamique en traction est caractérisé par les grandeurs E' et E'' . Les résultats obtenus en

superposant des oscillations en traction/compression uniaxiale à quatre des précharges sont présentés ici. Les précharges sont les suivantes :

- Traction uniaxiale à $\lambda_{max} = 2,5$;
- Compression uniaxiale à $\lambda_{min} = 0,67$;
- Torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$;
- traction-torsion simultanées à $\lambda_{max} = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$.

Dans un premier temps, le module de conservation est tracé en fonction de l'amplitude des oscillations, pour une fréquence fixe à 0,1 Hz sur la figure III.2.14. Tout d'abord,

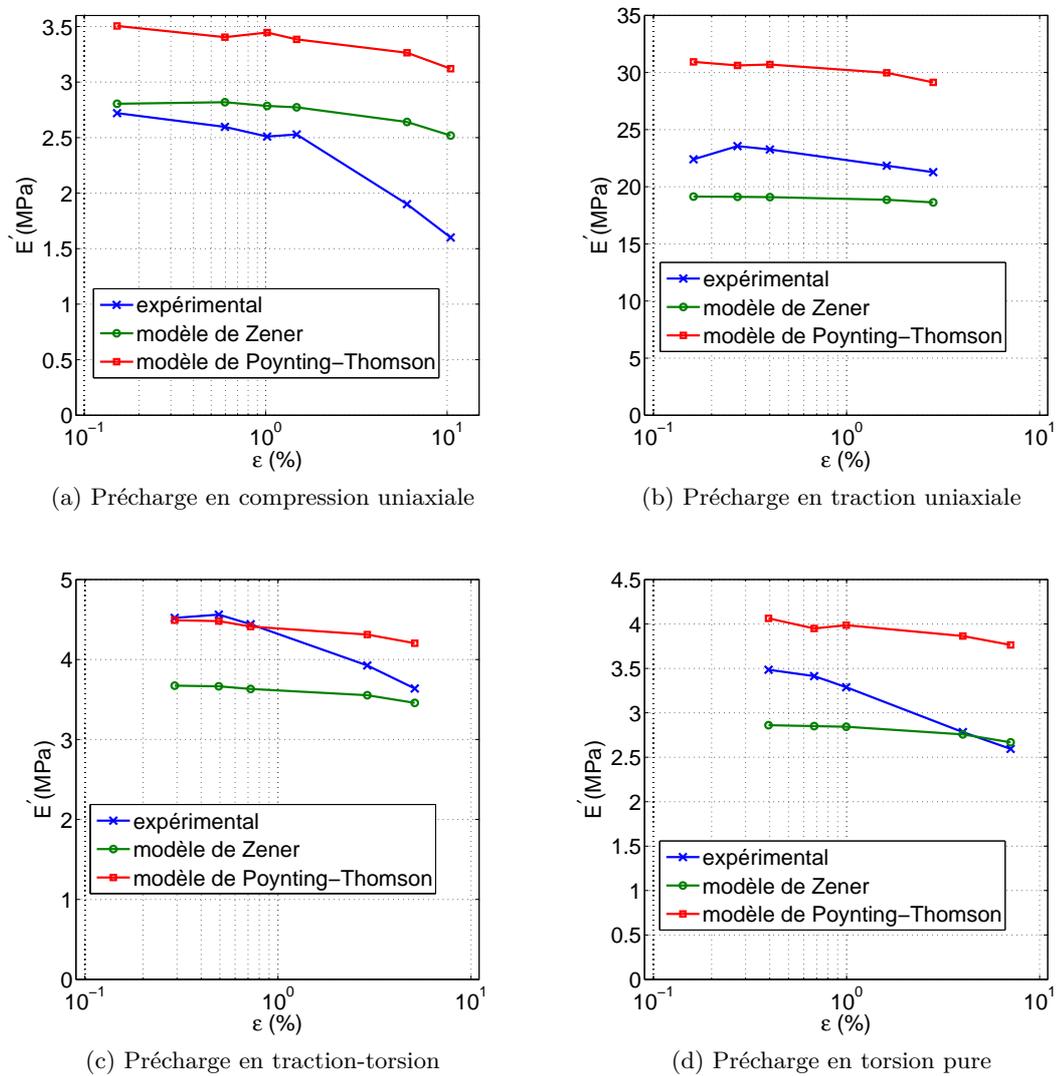


FIGURE III.2.14 : Évolution du module de conservation en fonction de l'amplitude d'oscillations, à $f = 0,1 \text{ Hz}$, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale

il apparaît que les modules de conservation obtenus avec les deux modèles varient moins que le module de conservation issu des données expérimentales. Pour les deux modèles, il décroît plus ou moins selon les cas de précharge. De plus, le modèle de Zener est globalement plus proche des données d'essais que le modèle de Poynting-Thomson dans le cas de la précharge en compression, en traction et en torsion pure. Pour la précharge en traction-torsion, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données d'essais.

La figure III.2.15 montre l'évolution du module de conservation en fonction de la fréquence pour les quatre cas de précharge, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 %. Le module de conservation du modèle de Zener augmente toujours avec la fréquence. À part pour la précharge en traction uniaxiale, cette augmentation est plus forte que ce qui est observé expérimentalement. La variation du module de conservation pour le modèle de Poynting-Thomson est plus faible. En moyenne, le modèle de Zener est plus proche des données d'essais dans le cas multiaxial et le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données d'essais dans le cas de la compression uniaxiale. Pour les deux autres cas de précharge, l'écart entre les deux modèles et les données d'essais est du même ordre.

À présent, l'évolution du module de perte, E'' , est étudiée. La figure III.2.16 montre l'évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillation à $f = 0,1$ Hz pour les quatre cas de précharge. Les deux modèles fournissent un module de perte quasi-constant alors que l'amplitude varie, et ce pour les quatre cas de précharge. Expérimentalement, le module de perte varie peu, bien qu'une légère augmentation suivie d'une décroissance, liées à l'effet Payne (voir chapitre 3 de la partie II) soient observées. Enfin, il apparaît que les deux modèles encadrent les données expérimentales : le modèle de Zener surestime le module de perte alors que le modèle de Poynting-Thomson le sous-estime, sauf dans le cas de la traction uniaxiale où l'ordre est inversé. Le modèle de Zener est plus proche des données d'essais pour les précharges en traction uniaxiale, en traction-torsion et en torsion pure, alors que le modèle de Poynting-Thomson en est plus proche pour la précharge en compression uniaxiale.

La figure III.2.17 montre l'évolution du module de perte en fonction de la fréquence. Pour les quatre cas de précharge, le module de perte obtenu avec le modèle de Zener croît, présente un maximum entre $f = 0,1$ et $f = 10$ Hz, puis décroît alors que la fréquence augmente. Le module de perte obtenu avec le modèle de Poynting-Thomson décroît lorsque la fréquence augmente. Enfin, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données expérimentales dans tous les cas, excepté en traction uniaxiale, où le modèle de Zener en est plus proche.

b) Oscillations en torsion pure L'évolution du comportement dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude en cisaillement est étudiée ici. Dans un premier temps, le module de conservation en cisaillement, G' , est tracé en fonction de l'amplitude des oscillations en torsion pure, pour une fréquence fixe à 0,1 Hz et pour les quatre précharges listées précédemment, sur la figure III.2.18. Tout d'abord, il apparaît que les deux modèles prédisent un module de conservation en cisaillement quasi-constant alors que l'amplitude d'oscillations varie, et que le module de conservation expérimental dé-

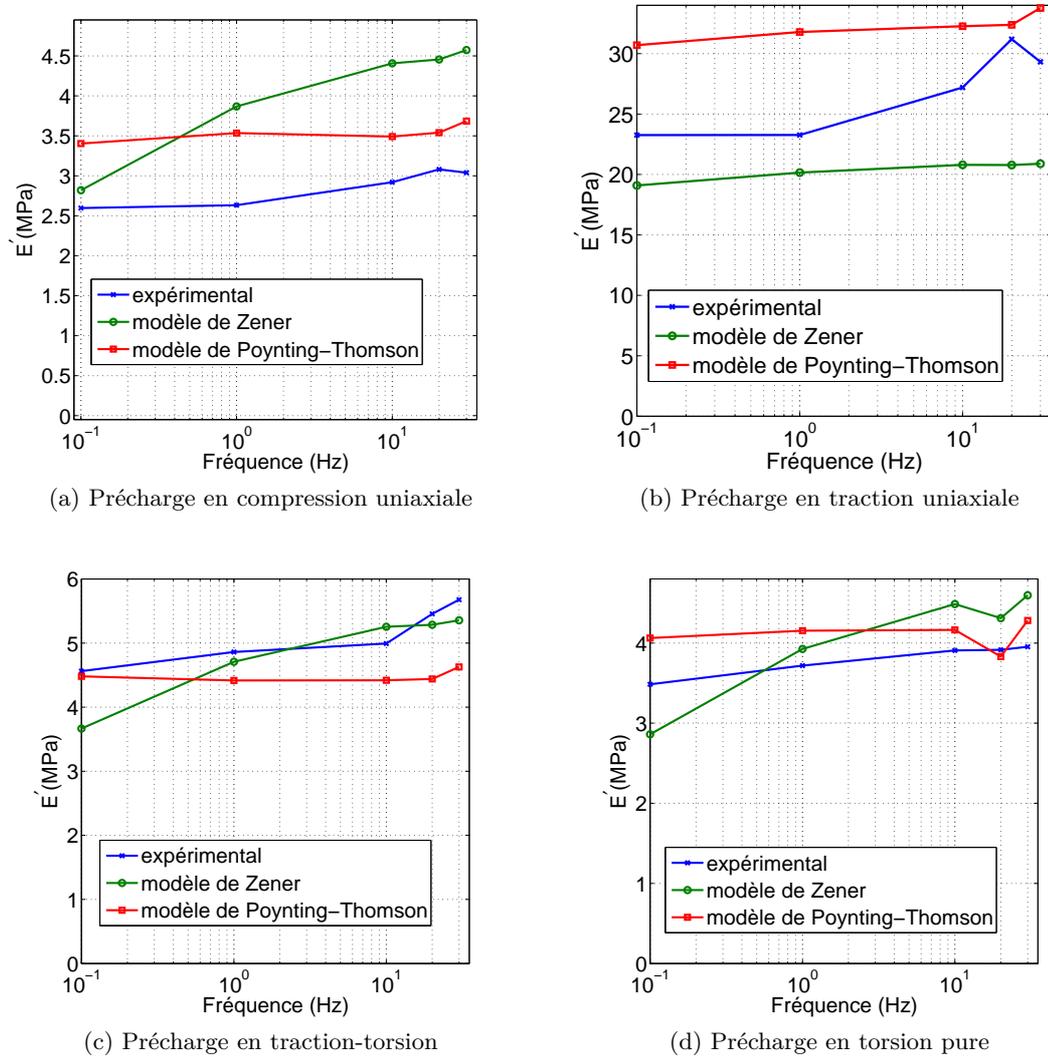


FIGURE III.2.15 : Évolution du module de conservation en fonction de la fréquence, à $\epsilon = 0,4\%$, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale

croît. De plus, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données d'essais pour toutes les précharges.

La figure III.2.19 montre l'évolution du module de conservation en fonction de la fréquence pour les quatre cas de précharge, pour des oscillations en torsion pure d'amplitude $0,4\%$. Le modèle de Poynting-Thomson prédit une évolution quasiment constante de module de conservation en cisaillement lorsque la fréquence varie, alors que le modèle de Zener prédit une augmentation globale de celui-ci lorsque la fréquence augmente. Expérimentalement, le module est quasiment constant entre $0,1$ et 1 Hz, présente un

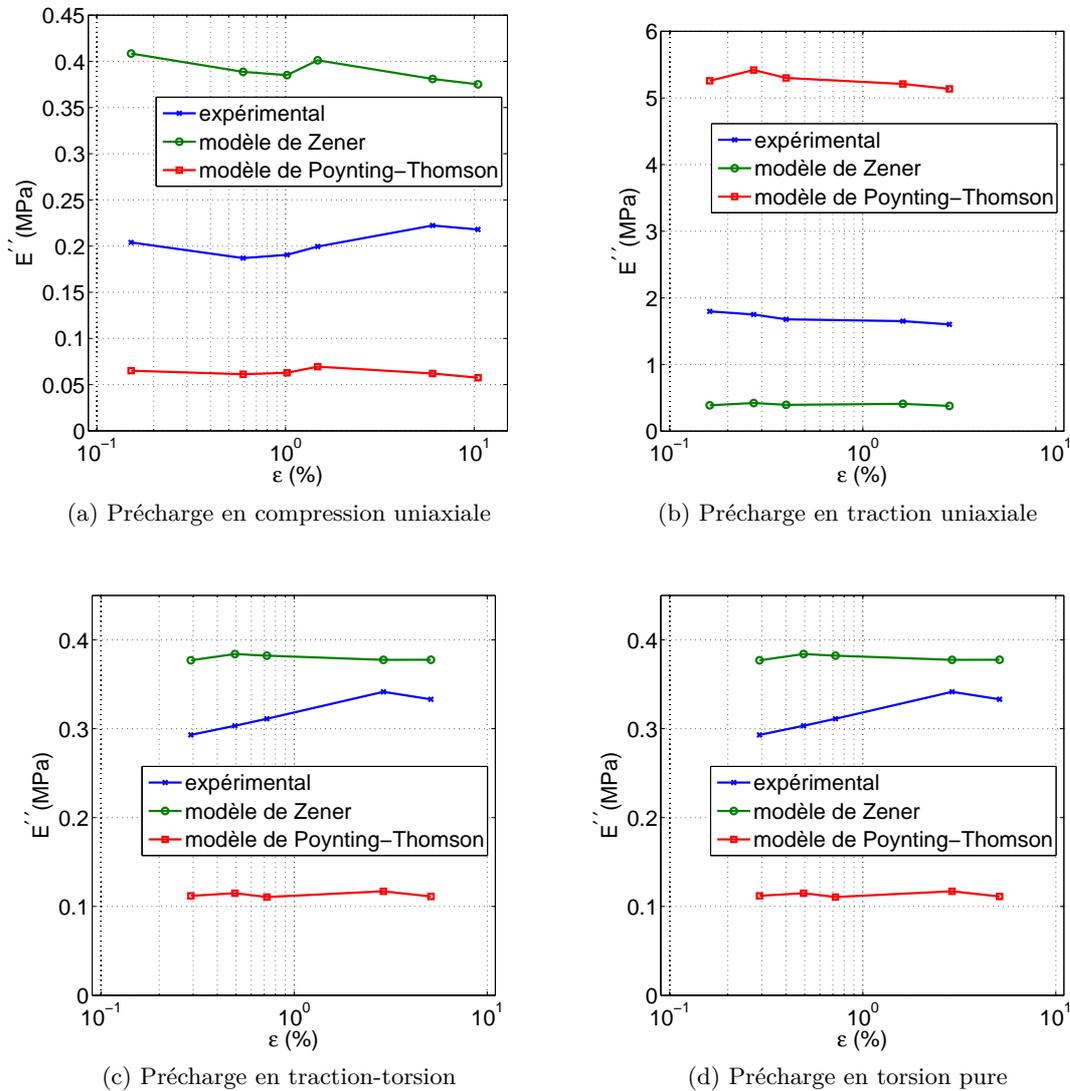


FIGURE III.2.16 : Évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillations, à $f = 0,1$ Hz, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale

maximum autour de 10 Hz, puis diminue. En moyenne, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données d'essais dans le cas de la compression, de la traction et de la torsion pure. Le modèle de Zener est plus proche des données d'essais dans le cas de la traction-torsion.

À présent, l'évolution du module de perte en cisaillement, G'' , est étudiée. La figure III.2.20 montre l'évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillations en torsion pure à $f = 0,1$ Hz pour les quatre cas de précharge. Ici, il apparaît clairement que le modèle de Zener surestime le module de perte en cisaillement. Le module calculé par

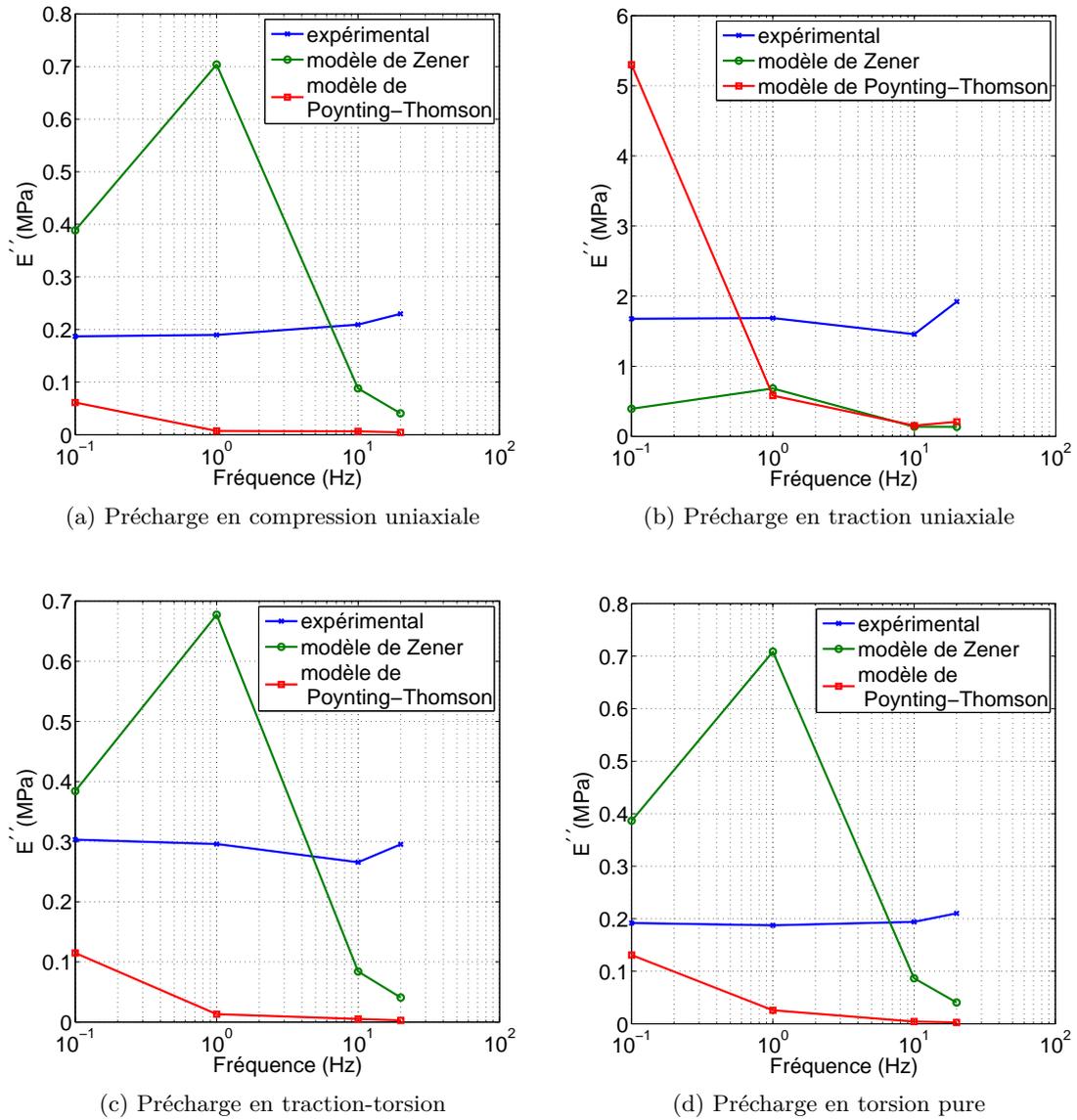
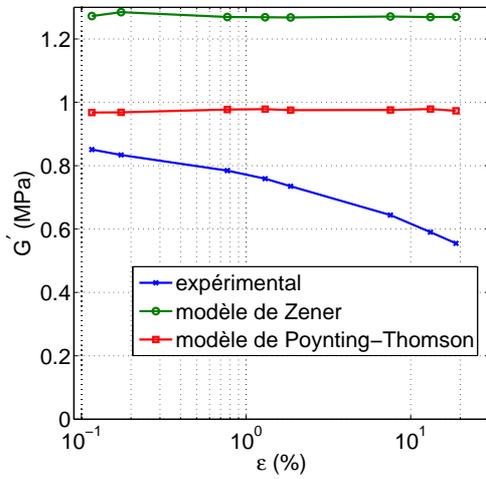


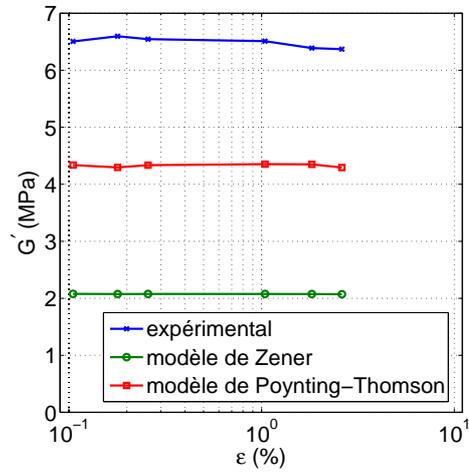
FIGURE III.2.17 : Évolution du module de perte en fonction de la fréquence, à $\epsilon = 0,4\%$, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale

le modèle de Poynting-Thomson est plus proche du module obtenu expérimentalement, et le sous-estime. Enfin, remarquons que le module de perte en cisaillement prédit par les deux modèles est quasiment constant alors que l'amplitude varie.

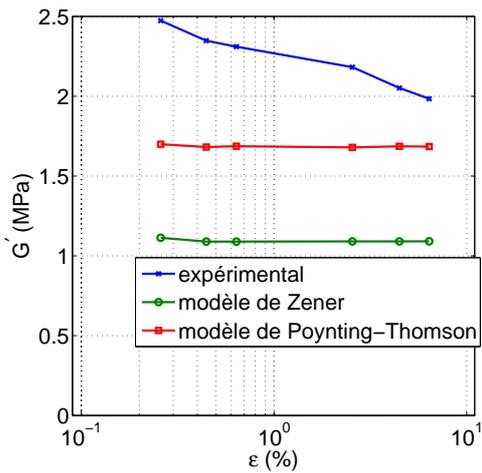
La figure III.2.21 montre l'évolution du module de perte en cisaillement en fonction de la fréquence. Ici, le même type de phénomène que pour le module de perte en traction est observé : le modèle de Zener surestime largement le module de perte, présente un



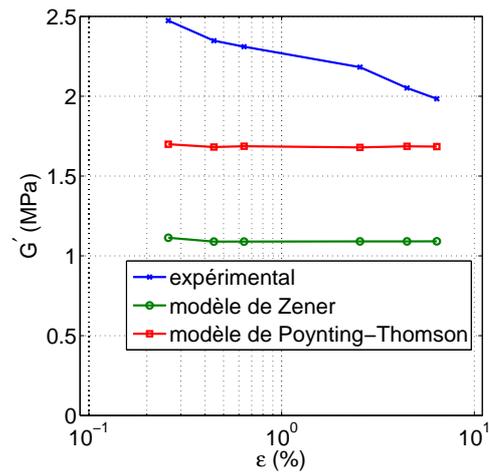
(a) Précharge en compression uniaxiale



(b) Précharge en traction uniaxiale



(c) Précharge en traction-torsion



(d) Précharge en torsion pure

FIGURE III.2.18 : Évolution du module de conservation en fonction de l'amplitude d'oscillations, à $f = 0,1$ Hz, pour des oscillations en torsion pure

maximum entre 0,1 et 10 Hz, puis diminue alors que la fréquence augmente. Le module de perte calculé à l'aide du modèle de Poynting-Thomson est plus proche du module expérimental, et décroît alors que la fréquence augmente.

Finalement, en moyenne, le modèle de Poynting-Thomson permet de mieux approcher les valeurs expérimentales des différents modules.

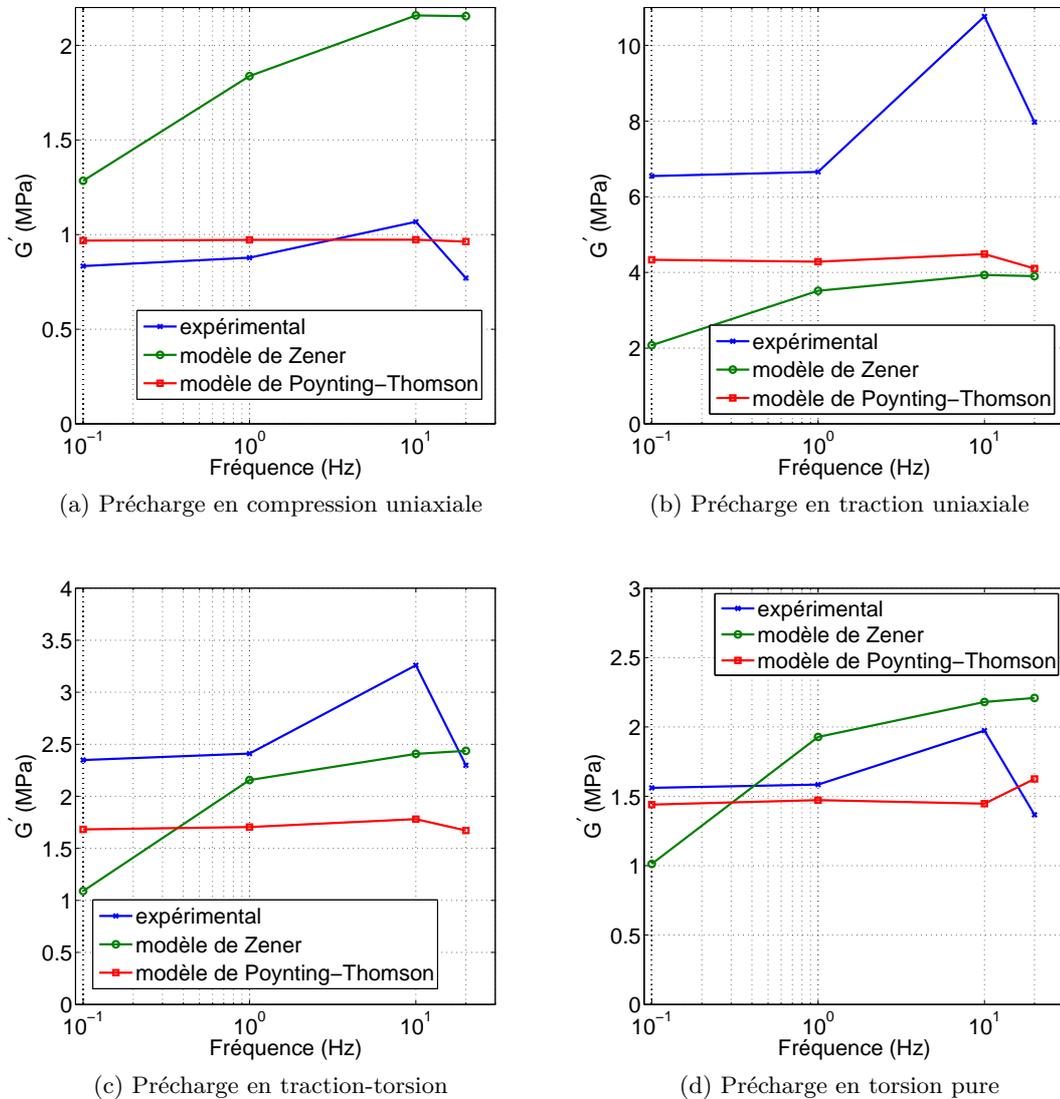


FIGURE III.2.19 : Évolution du module de conservation en fonction de la fréquence, à $\epsilon = 0,4\%$, pour des oscillations en torsion pure

B) Influence de la précharge

À présent, l'influence de la précharge sur le comportement dynamique est étudiée. Dans un premier temps, l'évolution des modules de conservation et de perte, en traction et en cisaillement, est tracée en fonction de l'extension de précharge, lorsque de la traction ou de la compression uniaxiale a été imposée lors de celle-ci. Ensuite, ces modules sont tracés en fonction de la raideur statique.

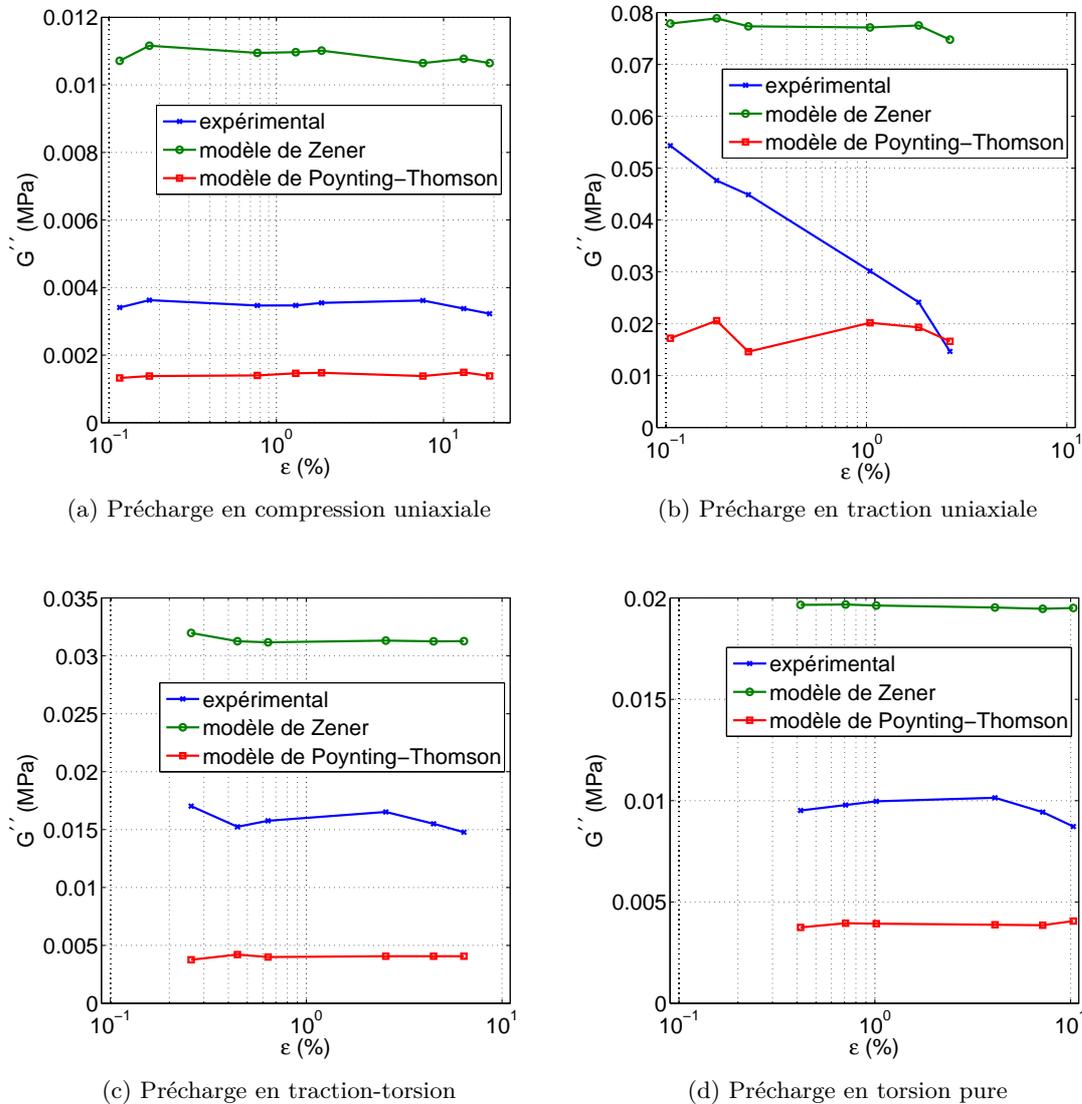


FIGURE III.2.20 : Évolution du module de perte en fonction de l'amplitude d'oscillations, à $f = 0,1$ Hz, pour des oscillations en torsion pure

a) Précharges en traction ou en compression uniaxiales La figure III.2.22 montre l'évolution du module de conservation et du module de perte en traction en fonction de l'extension de précharge, pour des oscillations en traction/compression uniaxiales d'amplitude 0,4 % à $f = 0,1$ Hz. L'évolution du module de conservation est d'abord décrite. Pour de faibles extensions, c'est-à-dire entre les deux premières valeurs d'extension, le module de conservation calculé par le modèle de Zener décroît, alors qu'il croît dans le cas du modèle de Poynting-Thomson, ainsi qu'expérimentalement. Ensuite,

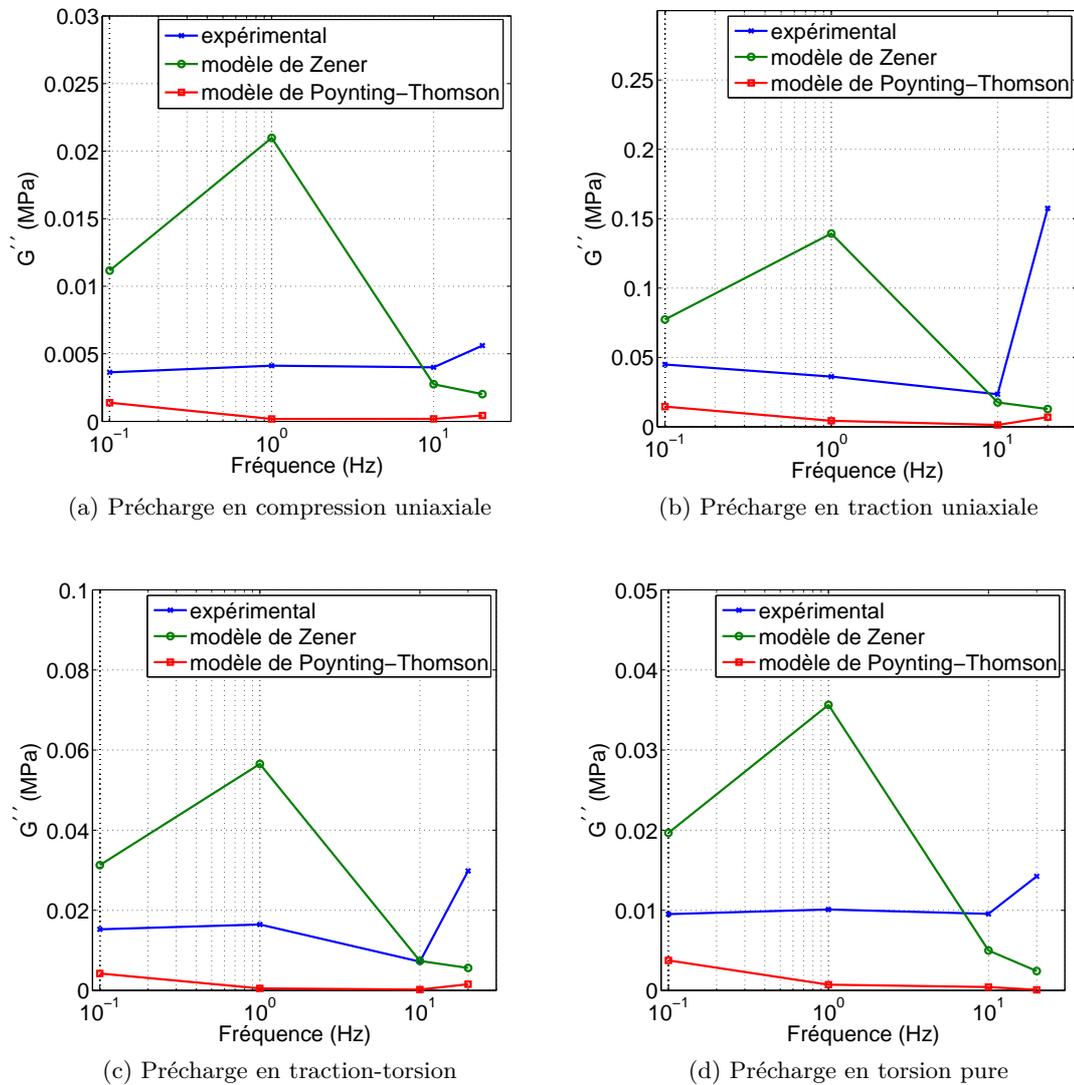


FIGURE III.2.21 : Évolution du module de perte en fonction de la fréquence, à $\epsilon = 0,4\%$, pour des oscillations en torsion pure

dans les trois cas, le module de conservation augmente avec l'extension, et l'augmentation est plus marquée pour les grandes extensions. Quantitativement, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données expérimentales jusqu'à $\lambda_0 = 1,75$, mais surestime ensuite le module expérimental alors que le modèle de Zener le sous-estime mais en est plus proche. Ensuite, l'évolution du module de perte est décrite. Tout d'abord, il apparaît que le module de perte calculé par le modèle de Zener est constant. Rappelons que le module de perte est lié à l'aire de la boucle d'hystérésis de la courbe contrainte/déformation.

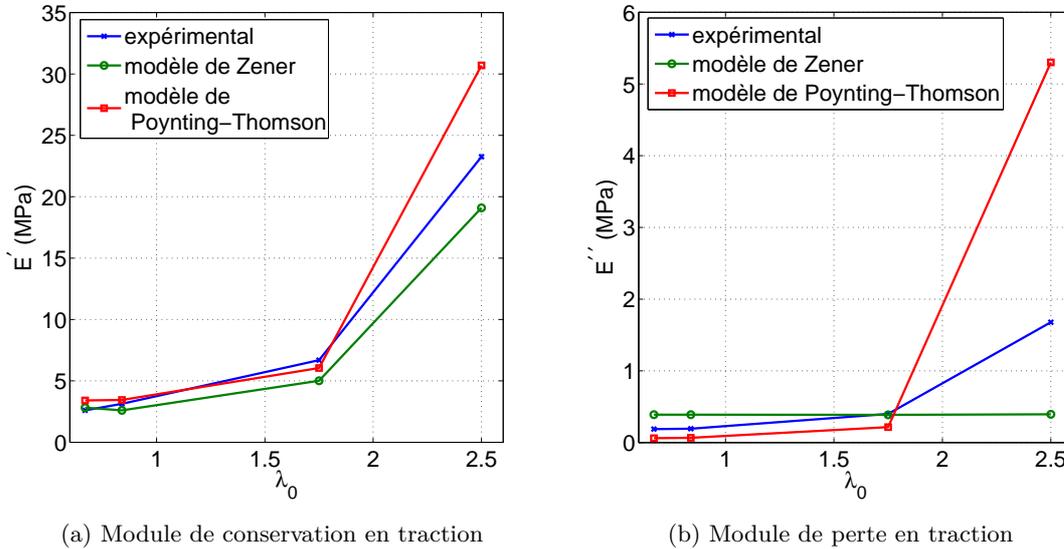


FIGURE III.2.22 : Évolution du module de conservation (à gauche) et du module de perte (à droite) en fonction de l'extension de précharge en traction ou compression uniaxiale, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

Avec le modèle de Zener, la partie de la contrainte hors phase avec la déformation est la contrainte hors équilibre. Or, il a été vu que ce modèle ne permettait pas de prendre en compte une influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre. Donc, il est logique que le module de perte ne dépende pas de la précharge. Le module de perte calculé par le modèle de Poynting-Thomson évolue clairement avec l'extension de précharge. De la même manière que ce qui est observé expérimentalement, il croît avec l'extension. Cependant, l'augmentation du module pour les grandes déformations, c'est-à-dire entre $\lambda_0 = 1,75$ et 2,5, est bien plus forte que l'augmentation mesurée.

À présent, l'évolution des modules de conservation et de perte en cisaillement est étudiée, en considérant les oscillations en torsion pure autour de précharges en traction ou compression uniaxiale. La figure III.2.23 montre l'évolution de ces deux modules en fonction de l'amplitude de précharge, pour des oscillation en torsion pure d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz. De même que le module de conservation en traction, le module de conservation en cisaillement prédit par le modèle de Zener décroît d'abord pour les faibles extensions, puis croît, alors que les modules calculés par le modèle de Poynting-Thomson et mesurés expérimentalement croissent. Quantitativement, le modèle de Poynting-Thomson est plus proche des données expérimentales. Enfin, l'évolution du module de perte en cisaillement en fonction de la précharge est qualitativement plutôt la même dans les trois cas, et le modèle de Poynting-Thomson est encore une fois plus proche des données expérimentales. Notons ici que le module de perte n'est pas constant pour le modèle de Zener parce que l'expression de la contrainte de cisaillement hors équilibre et de la

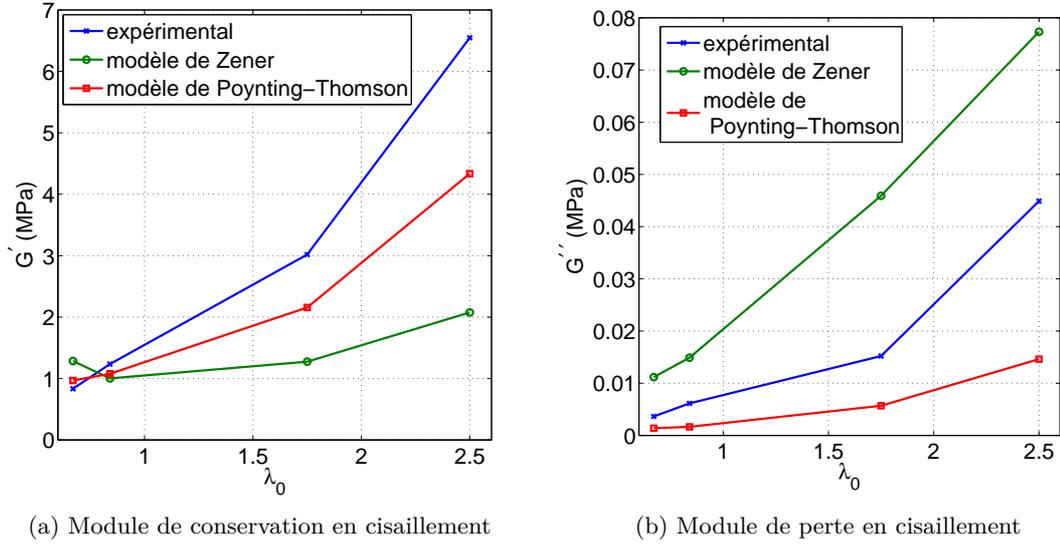


FIGURE III.2.23 : Évolution du module de conservation (à gauche) et du module de perte (à droite) en fonction de l’extension de précharge en traction ou compression uniaxiale, pour des oscillations en torsion pure d’amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

déformation dépend de la précharge.

b) Comportement dynamique en fonction de la raideur statique Dans un premier temps, l’évolution de E' est tracée en fonction de la raideur statique pour tous les cas de précharge, avec des oscillations en traction/compression uniaxiale d’amplitude 0,4 % à 0,1 Hz. C’est ce que montre la figure III.2.24. Sur cette figure, il apparaît que le module de conservation en traction est linéaire avec la raideur statique pour le modèle de Zener, alors que pour le modèle de Poynting-Thomson, il n’est pas possible de décrire une tendance nette du module de conservation en fonction de la raideur statique. Ensuite, nous nous intéressons au module de conservation normalisé, $E'/E_{statique}$. Pour rappel, partant de l’observation que le module de conservation est du même ordre de grandeur que la raideur statique pour chacune des précharges, il peut être intéressant d’observer l’évolution du rapport de ces deux grandeurs. La figure III.2.25 montre l’évolution de $E'/E_{statique}$ en fonction de $E_{statique}$ pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d’amplitude 0,4 % à 0,1 Hz. Sur cette figure, il apparaît qu’il n’est pas possible de décrire de façon simple l’évolution du rapport $E'/E_{statique}$ en fonction de la raideur statique, et ce aussi bien pour les deux modèles que pour les données expérimentales.

Cependant, il a été vu dans le chapitre 2 de la partie II qu’il est possible d’obtenir une courbe monotone en traçant $E'/E_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, pour les données expérimentales. Nous allons donc observer si ce type de courbe est également obtenu pour les deux modèles. La figure III.2.26 montre l’évolution de $E'/E_{statique}^2$ en

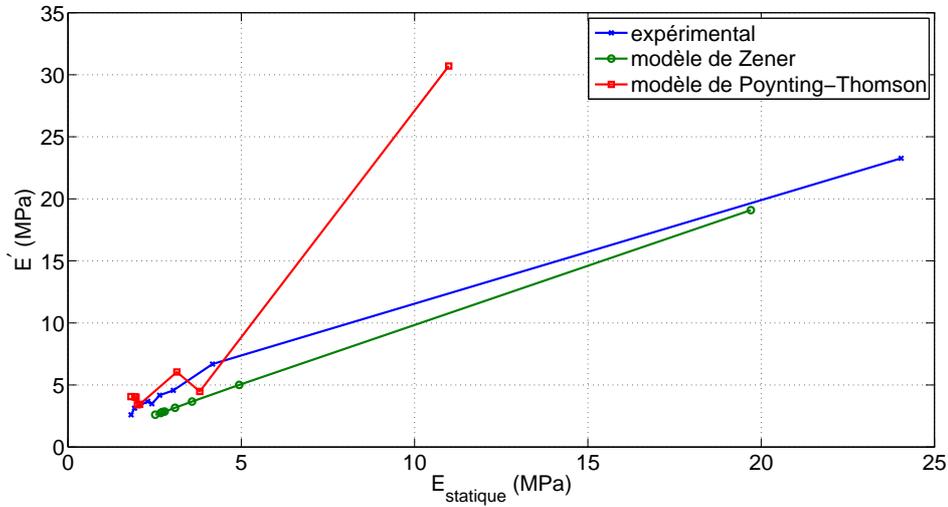


FIGURE III.2.24 : Évolution du module de conservation en traction en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

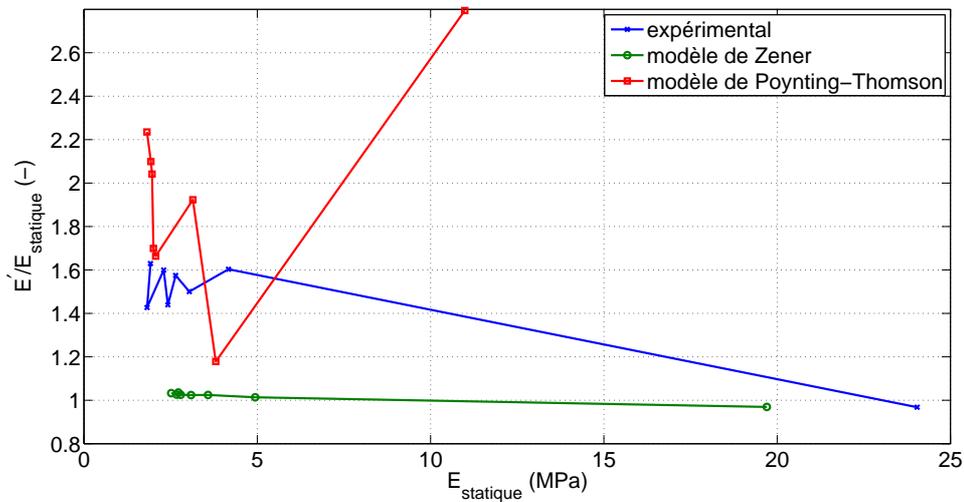


FIGURE III.2.25 : Évolution du module de conservation normalisé en traction en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

fonction de E_{statique} pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz. Pour chaque cas, des courbes monotones décroissantes sont obtenues. La figure III.2.27 présente les mêmes courbes mais sur un graphe logarithmique. Alors que les courbes expérimentale et du modèle de Zener sont proches d'une droite, celle du modèle

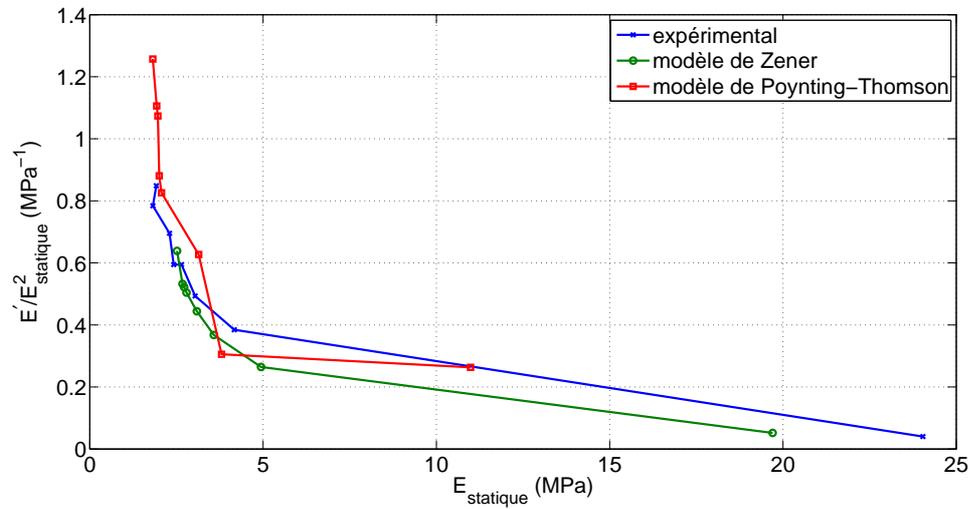


FIGURE III.2.26 : Évolution du rapport $E'/E_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

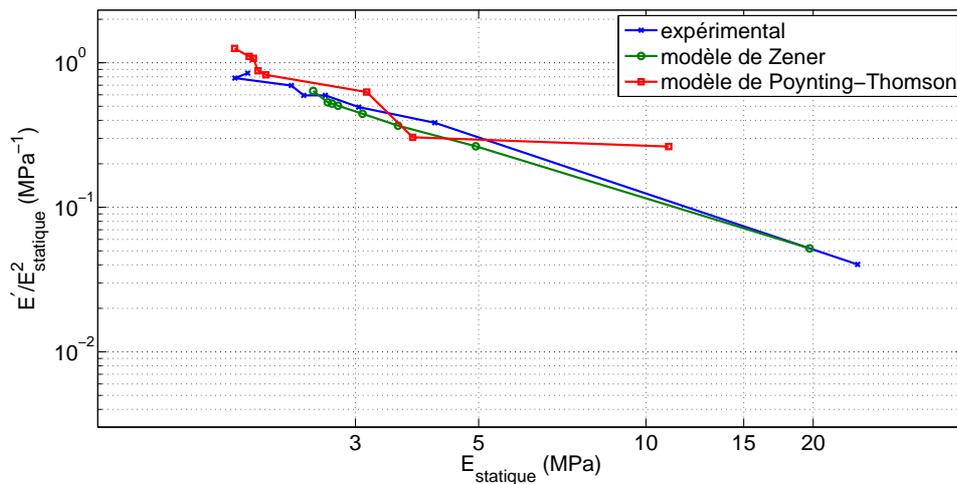


FIGURE III.2.27 : Évolution du rapport $E'/E_{statique}^2$ en fonction de la raideur statique, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale d'amplitude 0,4 % à 0,1 Hz

de Poynting-Thomson ne l'est pas. Ici, il est intéressant de noter que, sur les quatre courbes tracées (figures III.2.24, III.2.25, III.2.26 et III.2.27), seule la figure III.2.26 montre une évolution nette de la grandeur tracée en fonction de la raideur statique pour les trois cas. Cependant, à notre connaissance, cette grandeur $E'/E_{statique}^2$ n'a pas de sens physique évident, et l'interprétation de cette courbe suscite des interrogations. C'est pourquoi la discussion à ce sujet reste ouverte.

Conclusion

Une grande majorité des auteurs qui linéarisent des modèles viscoélastiques utilisent des modèles dans lesquels la contrainte est décomposée en une partie à l'équilibre et une partie hors équilibre. Or, dans ce chapitre, il a été établi, en prenant l'exemple du modèle de Zener, que la linéarisation de ce type de modèle ne permet pas de prendre en compte une influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre si une loi d'évolution simple, avec une viscosité constante est choisie. Une deuxième approche, plus originale, a été présentée avec la linéarisation du modèle de Poynting-Thomson. Dans ce cas, il a été montré que toutes les parties de la contrainte dépendent de la précharge. Afin de pouvoir comparer rigoureusement les deux modèles, il faudrait trouver les énergies de déformations et viscosités qui permettent d'établir une équivalence entre eux. Or, en grandes déformations, cette tâche est très complexe. Cependant, en menant un raisonnement simple à partir des relations d'équivalence en petites déformations, il a été montré que le modèle de Poynting-Thomson permet certainement de prendre en compte une influence de la précharge sur la contrainte à l'équilibre.

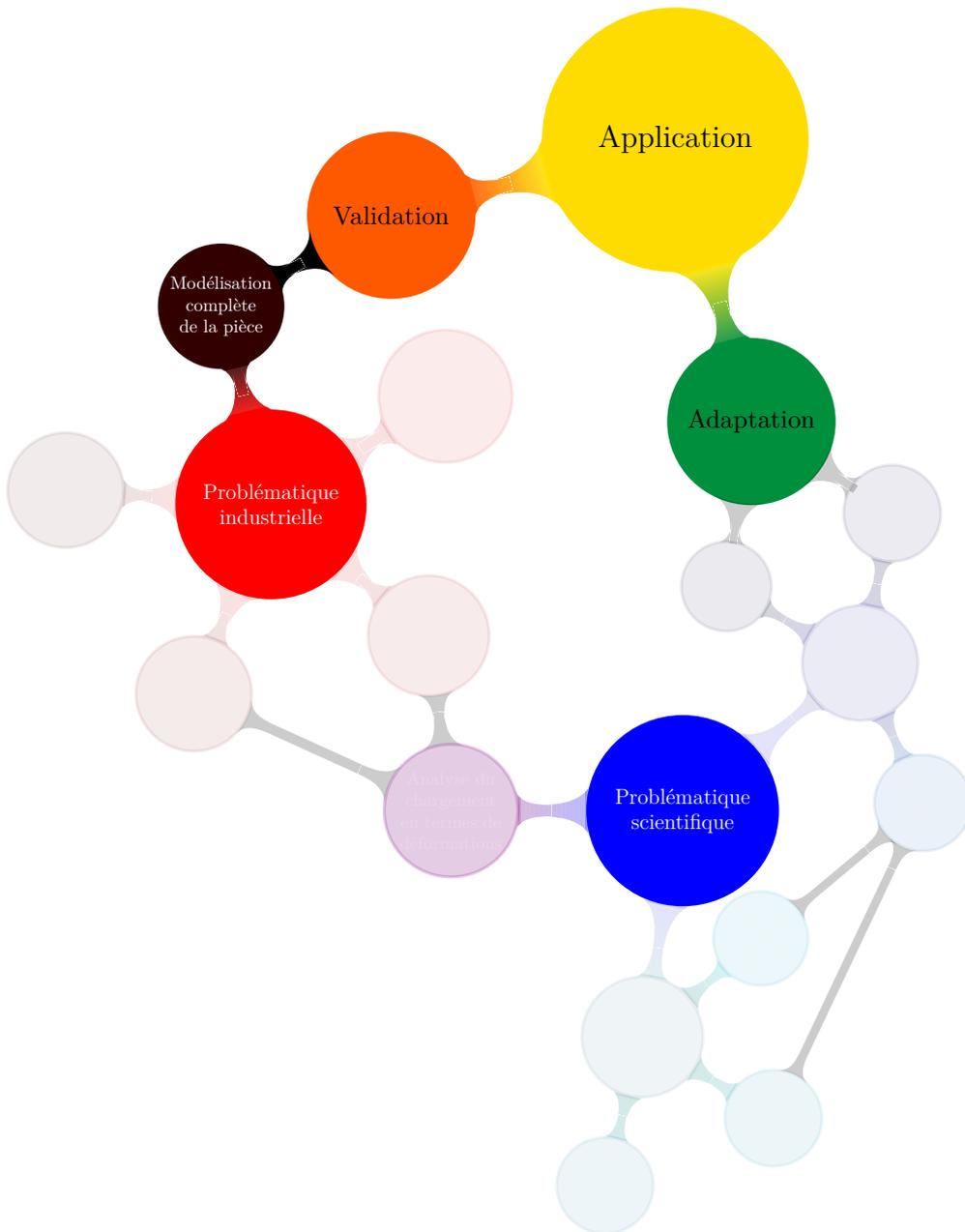
Dans un deuxième temps, l'identification des paramètres pour les deux modèles a été présentée. Dans ce cadre, le modèle de Poynting-Thomson présente un inconvénient majeur, à savoir qu'il n'est pas possible d'utiliser la loi hyperélastique identifiée dans le chapitre précédent. Il faut alors effectuer une première identification afin de s'assurer que le modèle soit prédictif pour les précharges quasi-statiques, puis corriger les paramètres pour prendre en compte le comportement dynamique lors des oscillations. Comme les deux énergies de déformation du modèle sont actives lors d'un chargement statique en grandes déformations, il est impératif de choisir des énergies de déformation à 3 paramètres. Finalement, le modèle de Poynting-Thomson linéarisé possède 7 paramètres. Le modèle de Zener n'en fait intervenir que cinq, et la loi de comportement hyperélastique identifiée précédemment peut être réutilisée. Il n'y a donc que deux paramètres supplémentaires à identifier pour prendre en compte le comportement dynamique linéarisé.

Enfin, les résultats d'oscillations autour d'une précharge ont été comparés dans le cas expérimental et pour les deux modèles. De manière générale, il semble que les modèles nécessitent d'être enrichis pour pouvoir prédire l'influence de la fréquence et de l'amplitude sur les modules de conservation et de perte de manière plus satisfaisante. Enfin, le modèle de Poynting-Thomson est globalement un peu plus proche des données expérimentales que le modèle de Zener.

Pour conclure, le modèle de Poynting-Thomson présente des avantages certains, puisqu'il permet de prédire une influence de la précharge sur toute la contrainte de manière plus naturelle que le modèle de Zener, et qu'il est plus proche des données expérimentales. Cependant, il possède plus de paramètres que le modèle de Zener, et son application au cas hyperélastique est assez complexe, notamment parce qu'on ne peut pas réutiliser une loi de comportement hyperélastique identifiée sur des données de contraintes et de déformations totales. Ainsi, dans la suite, pour des raisons de simplicité, nous choisissons de sélectionner le modèle de Zener pour l'application industrielle.

Quatrième partie

Validation du modèle



Chapitre 1

Adaptation de la modélisation pour l'application numérique

Sommaire

1.1	Méthode d'adaptation	222
1.1.1	Les modèles existants dans Abaqus	222
1.1.2	Définition de la loi viscoélastique	224
1.1.3	Analyse de la loi de comportement adaptée à l'utilisation d'Abaqus avec précharge	229
1.2	Résultats sur éprouvette	234
1.2.1	En statique	234
1.2.2	En cyclique	238

Introduction

Afin de prendre en compte le comportement dépendant du temps du matériau étudié, un modèle de Zener simple a été sélectionné. Il a été montré que ce type de modèle ne permet pas de prédire une influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre. Un enrichissement du modèle pourrait être envisagé, se traduisant par l'introduction artificielle de la dépendance à la précharge, par exemple, de la viscosité. Cependant, ce type de loi n'existe pas dans les logiciels commerciaux de calcul éléments finis. Par souci de simplicité d'utilisation du modèle éléments finis dans l'application industrielle, mais aussi par manque de temps, il a été choisi de ne pas implanter de nouvelle loi, et donc d'utiliser les modèles disponibles dans le logiciel Abaqus.

Dans la première section de ce chapitre, la méthode d'adaptation aux modèles disponibles dans Abaqus des lois de comportement choisies et des paramètres matériaux identifiés pour le cas des chargements combinant une grande précharge statique suivie de petites oscillations cycliques sera présentée. Ensuite, cette méthode sera appliquée pour

des simulations de chargement de l'éprouvette, d'abord uniquement en statique, puis en considérant les oscillations cycliques superposées.

1.1 Méthode d'adaptation

L'objectif est de parvenir à utiliser la caractérisation et la modélisation de l'élastomère étudié dans une simulation éléments finis. Pour cela, nous distinguerons deux étapes de chargement, à savoir :

1. L'application d'une précharge statique en grandes déformations, qui sera modélisée par la loi de comportement hyperélastique sélectionnée dans le chapitre 1 de la partie III, en utilisant les paramètres matériaux identifiés sur la campagne d'essais multiaxiale quasi-statique sur éprouvette. Rappelons que dans le cadre de l'étude du comportement d'une suspension moteur, cette étape correspond à la précharge due au placement de la partie caoutchouc dans l'étrier et au poids du moteur ;
2. Dans un deuxième temps, l'application de petites oscillations cycliques autour de la précharge. Le comportement du matériau sous ces sollicitations sera modélisé par la loi viscoélastique sélectionnée dans le chapitre 2 de la partie III, avec les paramètres identifiés grâce à la campagne d'essais cycliques sur éprouvette. Cette étape correspond à certaines sollicitations dues aux conditions de route que peut subir une suspension moteur.

1.1.1 Les modèles existants dans Abaqus

La prise en compte de la première étape dans une simulation éléments finis via le logiciel Abaqus ne pose pas de problème particulier. En effet, la loi de comportement hyperélastique sélectionnée, à savoir une loi polynomiale en I_1 et I_2 de degré 5 y est déjà implantée. En choisissant un calcul statique implicite prenant en compte les grandes déformations (option *Nlgeom*) et l'incompressibilité du matériau (maillage avec des éléments hybrides), il est aisé d'appliquer le modèle choisi à la simulation.

La modélisation viscoélastique sous chargement cyclique est également possible dans Abaqus, via deux approches. Il existe plusieurs façons de renseigner la loi de comportement pour chacune de ces approches, et le manuel d'Abaqus est assez succinct sur leur utilisation. C'est pourquoi un résumé du principe et de la mise en application de ces approches est proposé ici.

La première approche consiste à effectuer le calcul dans le domaine fréquentiel. Il est nécessaire de renseigner l'évolution du module de cisaillement complexe en fonction de la fréquence, soit via une loi puissance, soit en donnant les parties réelles et imaginaires du module complexe pour plusieurs fréquences, soit en entrant des données d'essais de fluage ou de relaxation à partir desquelles sera calculée la relation module complexe/fréquence. Cette approche va de pair avec la définition d'un calcul de perturbation linéaire, qui requiert la définition d'une densité pour chaque matériau de l'analyse. Dans le cas d'un comportement viscoélastique où les effets d'inertie sont négligés, une densité faible est

renseignée. Le calcul fréquentiel est très avantageux. D'une part, il est plus rapide qu'un calcul temporel, puisque là où il faut au moins dix points par cycle et deux cycles dans le calcul temporel pour obtenir l'amplitude et le déphasage de la contrainte à une fréquence fixée, il n'en faut qu'un en fréquentiel. D'autre part, l'étape de post-traitement est également plus rapide : pour l'analyse temporelle, un calcul simple est nécessaire pour déterminer l'amplitude et le déphasage à partir des données en chaque point du cycle, alors qu'en fréquentiel, l'amplitude et le déphasage sont les sorties brutes de l'analyse. Enfin, il est possible de prendre en compte une dépendance du module de perte et du module de conservation à la précharge, en renseignant dans un tableau des valeurs de ces modules pour plusieurs fréquences et plusieurs déformations. Cependant, cette voie n'a pas été explorée, d'une part parce que la précharge ne peut être qu'uniaxiale, et d'autre part parce qu'il n'apparaît pas clairement dans le manuel quelle est la mesure de déformation à considérer : est-ce le premier invariant des tenseurs des dilatations de Cauchy-Green ou la déformation de l'ingénieur dans la direction de chargement ou encore une autre mesure de déformation ? L'approche fréquentielle présente deux désavantages. Le premier concerne l'hypothèse de linéarité de la réponse du matériau. Cette hypothèse est en adéquation avec la linéarisation du modèle de Zener effectuée dans le chapitre 2 de la partie III. Cependant, si l'étude est étendue à de plus grandes amplitudes (la pièce de suspension moteur n'est pas soumise qu'à de petites oscillations), l'approche fréquentielle n'est plus applicable, alors que l'approche temporelle l'est. Le second désavantage majeur est que l'approche fréquentielle est incompatible avec les éléments axisymétriques incluant la rotation, ce qui est pour nous rédhibitoire puisque ces éléments sont utilisés dans le modèle éléments finis de l'éprouvette.

La seconde approche consiste à effectuer le calcul dans le domaine temporel. Dans ce cas, la loi de comportement peut être renseignée sous forme de séries de Prony, de données d'essais de fluage ou de relaxation, ou encore en entrant des parties réelles et imaginaires du module dynamique complexe en fonction de la fréquence. Dans tous les cas, des séries de Prony sont calculées à partir des données renseignées. Outre la définition de la loi de comportement, cette approche se définit par un mode de calcul temporel, appelé *visco* dans Abaqus, qui prend en compte la dépendance au temps de la réponse mécanique du matériau tout en négligeant les effets d'inertie. En fonction de la loi de comportement associée, la formulation choisie peut être implicite ou explicite. Dans le cas d'une loi viscoélastique, une formulation implicite est toujours utilisée. Une attention particulière est requise lorsqu'il s'agit de combiner les lois hyperélastique et viscoélastique au travers d'une étape statique suivie d'une étape *visco*. Dans ce cas, la partie dépendante du temps, modélisée par la loi viscoélastique n'est pas prise en compte dans l'étape statique. Par défaut, seule la réponse instantanée, c'est-à-dire la réponse obtenue pour un chargement infiniment rapide est calculée dans cette étape. Pour obtenir la réponse à l'équilibre, c'est-à-dire la réponse obtenue pour un chargement infiniment lent, entièrement relaxé, il faut le spécifier en activant l'option correspondante.

À ce stade, la structure du calcul, en deux étapes, a été définie. L'objectif est ensuite de déterminer si la linéarisation du modèle de Zener accompagnée des paramètres identifiés est utilisable telle quelle dans Abaqus.

1.1.2 Définition de la loi viscoélastique

Dans Abaqus, la viscoélasticité couplée à une analyse temporelle est basée sur les séries de Prony. Dans cette section, ces séries seront d'abord définies dans le cas général, sans précharge. Ensuite, leur formulation sera comparée avec celle du modèle de Zener linéarisé sans précharge, avant de considérer le cas d'une précharge modélisée par de l'hyperélasticité. Une attention particulière sera portée à la relation entre les paramètres à renseigner dans Abaqus et les paramètres qui ont été identifiés à partir des essais.

A) Les séries de Prony : définition

Le modèle de Zener a été présenté dans la partie III. Ce modèle a été sélectionné pour sa simplicité, bien qu'il ne permette pas de prendre en compte naturellement une influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre. On notera cependant que cette influence peut être forcée via l'introduction d'un paramètre de raideur hors équilibre qui dépend de la précharge. Dans le cadre général de la viscoélasticité, le modèle est rarement utilisé en l'état. En effet, une généralisation peut être effectuée simplement, en ajoutant des branches ressort/amortisseur en parallèle aux deux branches existantes. Les modèles de Zener généralisés aussi appelés Maxwell généralisés, sont représentés par le schéma de la figure IV.1.1.

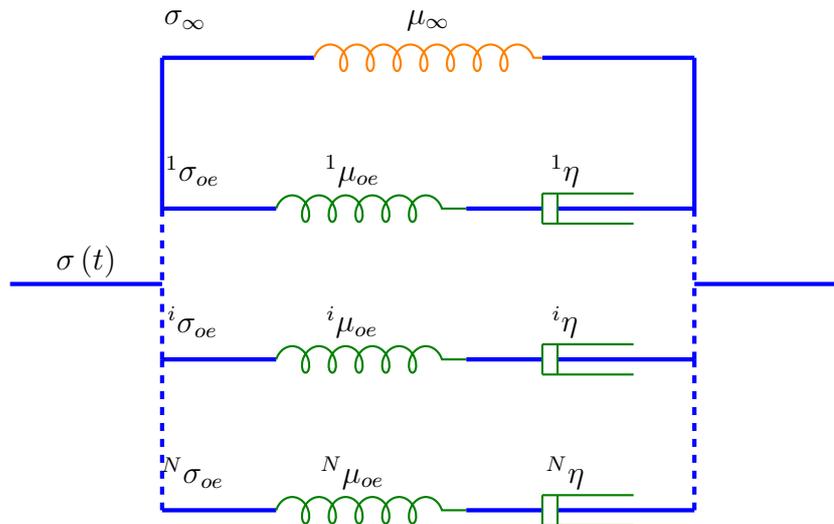


FIGURE IV.1.1 : Représentation rhéologique d'un modèle de Zener généralisé à N branches

L'ajout de plusieurs branches permet d'améliorer la prédiction du comportement dynamique en fonction de la fréquence. Plus la plage de fréquence prise en compte est étendue, plus le nombre de branches à ajouter pour obtenir une bonne prédiction du comportement du matériau est élevé. La généralisation du modèle de Zener revient à introduire non plus un état intermédiaire (pour rappel, c'est un état d'équilibre), mais

N états intermédiaires. Parmi les auteurs utilisant ce type de modèle figurent [Holzapfel \(1996\)](#), [Kaliske et Rothert \(1997\)](#), [Lion \(1998\)](#), [Bonet \(2001\)](#) pour n'en citer que quelques uns.

En petites déformations, cela se traduit par le fait que la contrainte totale est la somme des contraintes, chaque branche apportant sa contribution :

$$\sigma(t) = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N {}^i\sigma_{oe}(t). \quad (\text{IV.1.1})$$

Considérons une loi élastique linéaire pour la partie hors équilibre, avec ${}^i\mu_{oe}$ le module de cisaillement hors équilibre de la branche i . Chacune des contraintes hors équilibre s'écrit :

$${}^i\sigma_{oe}(t) = 3^i\mu_{oe}^i\epsilon_e, \text{ et } {}^i\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon} - \frac{{}^i\epsilon_e}{{}^i\tau}, \quad \forall i \in [1; N], \quad (\text{IV.1.2})$$

où ${}^i\tau$ est le temps de relaxation de la branche i . Le spectre de relaxation est ainsi discrétisé. On notera que certains auteurs proposent une alternative à cette forme via une approche continue du spectre de relaxation. Cela a notamment l'avantage de faire intervenir beaucoup moins de paramètres matériaux, mais une implantation plus complexe. L'approche par dérivées fractionnaires (voir par exemple [Haupt et al. \(2000\)](#)) et l'approche statistique ([Martinez et al. \(2011\)](#)) en font partie et constituent deux alternatives intéressantes. L'équation (IV.1.2) peut également être écrite sous forme intégrale. Pour cela, il faut d'abord noter que cette équation est équivalente à :

$$e^{-\frac{t}{{}^i\tau}} \frac{d}{dt} e^{\frac{t}{{}^i\tau}} {}^i\epsilon_e = \dot{\epsilon}, \quad (\text{IV.1.3})$$

$$\frac{d}{dt} e^{\frac{t}{{}^i\tau}} {}^i\epsilon_e = e^{\frac{t}{{}^i\tau}} \dot{\epsilon}, \quad \forall i \in [1; N]. \quad (\text{IV.1.4})$$

Intégrons alors l'équation (IV.1.4) entre 0 et t :

$$\int_0^t e^{\frac{s}{{}^i\tau}} {}^i\epsilon_e ds = \int_0^t e^{\frac{s}{{}^i\tau}} \dot{\epsilon} ds, \quad \forall i \in [1; N]. \quad (\text{IV.1.5})$$

$t = 0$ représente ici l'état non déformé, donc ${}^i\epsilon_e(0) = 0$. Alors,

$${}^i\epsilon_e(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-s}{{}^i\tau}} \dot{\epsilon} ds, \quad \forall i \in [1; N]. \quad (\text{IV.1.6})$$

En effectuant le changement de variable $u = t - s$, l'équation (IV.1.6) devient :

$${}^i\epsilon_e(t) = \int_0^t e^{-\frac{u}{{}^i\tau}} \dot{\epsilon}(t-u) du, \quad \forall i \in [1; N]. \quad (\text{IV.1.7})$$

Si l'on considère également une loi élastique linéaire pour la partie à l'équilibre, caractérisée par son module de cisaillement μ_∞ , et en injectant les équations (IV.1.2) et (IV.1.7)

dans l'équation (IV.1.1), il vient :

$$\sigma(t) = 3\mu_\infty \epsilon + 3 \sum_{i=1}^N \mu_{oe}^i \int_0^t e^{-\frac{u}{\tau^i}} \dot{\epsilon}(t-u) du, \quad (\text{IV.1.8})$$

$$\sigma(t) = 3 \int_0^t \mu_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{oe}^i}{\mu_\infty} e^{-\frac{u}{\tau^i}} \right) \dot{\epsilon}(t-u) du. \quad (\text{IV.1.9})$$

On peut alors introduire un module de relaxation μ , homogène à une raideur, dépendant du temps, défini par la relation :

$$\mu(u) = \mu_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{oe}^i}{\mu_\infty} e^{-\frac{u}{\tau^i}} \right). \quad (\text{IV.1.10})$$

C'est cette écriture qui est appelée série de Prony. On remarquera qu'en injectant l'équation (IV.1.10) dans l'équation (IV.1.9), on retrouve une relation contrainte/déformation appartenant à l'approche intégrale du type formulation de Coleman et Noll (1961) en petites déformations :

$$\sigma(t) = 3 \int_0^t \mu(u) \dot{\epsilon}(t-u) du. \quad (\text{IV.1.11})$$

B) Les séries de Prony : équivalence avec le modèle de Zener linéarisé sans précharge

Notons que dans Abaqus, c'est cette loi qui est utilisée pour la viscolélasticité. Il semble qu'il soit possible de prendre en compte autant de branches que désiré. Pour chaque branche, il faut renseigner le temps de relaxation τ^i . L'autre paramètre à renseigner pour chaque branche est le rapport du module de cisaillement hors équilibre sur le module de cisaillement instantané. Le module de cisaillement instantané μ_0 est la raideur obtenue en cisaillement simple (toujours en petites déformations), pour un chargement infiniment rapide. Il est relié au module de cisaillement à l'équilibre et au module de cisaillement hors équilibre de chaque branche par :

$$\mu_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^N \mu_{oe}^i. \quad (\text{IV.1.12})$$

Le paramètre à renseigner pour la branche i , en sus du temps de relaxation, est noté ${}^i g$. Il est adimensionnel et s'écrit :

$${}^i g = \frac{\mu_{oe}^i}{\mu_0} = \frac{\mu_{oe}^i}{\mu_\infty + \sum_{i=1}^N \mu_{oe}^i}. \quad (\text{IV.1.13})$$

Au vu de cette expression, le paramètre ${}^i g$ représente la contribution de la branche i en termes de raideur hors équilibre par rapport à la raideur totale instantanée.

Le modèle de Zener simple sélectionné dans la partie III ne comporte qu'une branche hors équilibre. Ainsi, dans le cas des petites déformations, sans précharge, il est complètement équivalent aux équations qui viennent d'être présentées, mais la somme ne comporte alors qu'un terme. En particulier, le module de relaxation s'écrit :

$$\mu(u) = \mu_{\infty} \left(1 + \frac{\mu_{oe}}{\mu_{\infty}} e^{-\frac{u}{\tau}} \right). \quad (\text{IV.1.14})$$

Rappelons que pour la partie à l'équilibre, une loi de type Mooney-Rivlin généralisé avait été sélectionnée, avec 3 paramètres C_{10} , C_{01} et C_{50} , avec

$$C_{10} + C_{01} = \frac{\mu_{\infty}}{2}, \quad (\text{IV.1.15})$$

et pour la partie hors équilibre, c'est une loi néo-Hookéenne qui avait été retenue, avec un paramètre G_{oe} relié au module de cisaillement hors équilibre par la relation :

$$G_{oe} = \frac{\mu_{oe}}{2}. \quad (\text{IV.1.16})$$

Dans Abaqus, il faut renseigner le temps de relaxation τ et le module de cisaillement hors équilibre adimensionnalisé g , avec

$$g = \frac{\mu_{oe}}{\mu_0} = \frac{\mu_{oe}}{\mu_{\infty} + \mu_{oe}} = \frac{G_{oe}}{C_{10} + C_{01} + G_{oe}}. \quad (\text{IV.1.17})$$

Ainsi, dans le cas simple de petites déformations sans précharge, une attention particulière est à porter sur le paramètre de raideur à renseigner dans Abaqus, notamment parce que la réponse instantanée et non la réponse à l'équilibre est, par défaut, la configuration de référence, mais les deux lois de comportement (série de Prony à deux termes et modèle de Zener linéarisé sans précharge) sont équivalentes.

C) Les séries de Prony : équivalence avec le modèle de Zener linéarisé avec précharge

Il a été vu qu'avec le modèle de Zener linéarisé, la précharge n'a pas d'influence sur la contrainte hors équilibre des oscillations. Cette partie de la contrainte est donc identique avec ou sans précharge. Au contraire, la partie à l'équilibre est influencée par la précharge. Dans un premier, le cas d'une précharge et d'oscillations en traction/compression uniaxiale est considéré. Lors de l'étape de précharge, la contrainte s'exprime en fonction de l'extension λ par (voir l'équation (II.1.30)):

$$\sigma = 2 \left(C_{10} + 5C_{50} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^4 \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - 2C_{01} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) \quad (\text{IV.1.18})$$

En linéarisant cette expression, il apparaît que la contrainte à l'équilibre dépend de l'extension de la précharge λ et de la déformation ϵ par la relation :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{\infty} &= 2\epsilon \left(20C_{50} \left(2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right)^3 (\lambda^3 - 1) + \left(C_{10} + 5C_{50} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^4 \right) \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \right) \\ &\quad + 2\epsilon C_{01} \left(\frac{2}{\lambda^2} + \lambda \right) = 3\mu_{\infty}(\lambda) \epsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.19})$$

Il apparaît ici que la raideur à l'équilibre est maintenant dépendante de l'extension imposée pendant la précharge, λ , mais toujours indépendante du temps. Une seconde difficulté apparaît : à cause de l'anisotropie induite par la précharge, il n'y a plus de relation simple entre raideur en traction et raideur en cisaillement. Prenons l'exemple très simple d'une loi néo-Hookéenne définie par un paramètre unique C_1 . La raideur en traction vaut :

$$E(\lambda) = \frac{\Delta\sigma}{\epsilon} = 2C_1 (2\lambda^2 + \lambda^{-1}), \quad (\text{IV.1.20})$$

et la raideur en cisaillement vaudra :

$$G = \frac{\Delta\sigma}{\gamma} = 2C_1. \quad (\text{IV.1.21})$$

On vérifie bien que dans le cadre des petites déformations, la solution tend vers celle de l'élasticité linéaire, où l'incompressibilité se traduit par un coefficient de Poisson $\nu = 0,5$, et $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3}$. Cependant, cette relation n'est valable que pour des petites déformations lors de la précharge, ce qui n'est pas le cas des précharges imposées ici. Par analogie au cas sans précharge, l'équation (IV.1.9) est maintenant appliquée au modèle de Zener (une seule branche). En y injectant l'équation (IV.1.16), il vient :

$$\sigma(t) = 3 \int_0^t \mu_\infty(\lambda) \left(1 + \frac{2G_{oe}}{\mu_\infty(\lambda)} e^{-\frac{u}{\tau}} \right) \dot{\epsilon}(t-u) du. \quad (\text{IV.1.22})$$

Le module de relaxation devient :

$$K(u, \lambda) = \mu_\infty(\lambda) \left(1 + \frac{2G_{oe}}{\mu_\infty(\lambda)} e^{-\frac{u}{\tau}} \right), \quad (\text{IV.1.23})$$

et le module hors équilibre adimensionnalisé s'écrit :

$$g(\lambda) = \frac{2G_{oe}}{\mu_\infty(\lambda) + 2G_{oe}}. \quad (\text{IV.1.24})$$

Dans cet exemple de précharge et oscillations en traction/compression uniaxiale, il apparaît donc que le module hors équilibre adimensionnalisé dépend de l'amplitude de déformation lors de la précharge. Il dépend également de la direction de la précharge par rapport à la direction des oscillations. Alors que dans le cas sans précharge, ou avec précharge en petites déformations, il y a égalité entre le module de cisaillement et le module de traction adimensionnalisés (les modules de traction à l'équilibre et hors équilibre valent trois fois les modules de cisaillement), ce n'est plus le cas pour des précharges en grandes déformations (de l'anisotropie est alors induite, et les modules en traction et en cisaillement à l'équilibre ne sont plus liés par une relation simple). Or, c'est précisément ce paramètre qui doit être renseigné dans Abaqus, mais sa dépendance à la précharge n'y est pas prévue. Alors que pour certaines lois de comportement, il est possible de définir un paramètre comme dépendant de l'état de déformation en un point via une routine USDFLD, ce n'est pas le cas des lois viscoélastiques. Étant donné l'hétérogénéité du

champ de déformation aussi bien dans l'éprouvette que dans la pièce de suspension moteur, mais aussi le nombre de cas de chargement à prendre en compte, la prise en compte de la dépendance de g à l'état de précharge dans Abaqus via les séries de Prony n'est pas envisageable. À ce stade, deux solutions existent. Une nouvelle loi de comportement correspondant au modèle de Zener linéarisé peut être implantée sur Abaqus, via l'écriture d'une routine UMAT. La seule différence entre celle-ci et la loi de comportement existante proviendrait de la définition du module hors équilibre, qui dans le cas de la nouvelle loi, ne serait pas adimensionnalisé et donc ne dépendrait pas de la précharge. La seconde solution consiste à fixer le module hors équilibre adimensionnalisé à une valeur constante. Ce choix revient à forcer la dépendance de la raideur hors équilibre G_{oe} à la précharge. Notre choix se porte sur cette deuxième solution pour trois raisons :

- Par souci de simplicité d'utilisation en vue de l'application industrielle ;
- La différence avec la loi existante ne provenant que d'une définition de paramètre adimensionnalisé ou pas, le travail requis pour l'implantation d'une nouvelle UMAT ne semble pas justifié ;
- Il peut être intéressant de comparer les résultats induits par une dépendance de la raideur hors équilibre à l'état de précharge.

1.1.3 Analyse de la loi de comportement adaptée à l'utilisation d'Abaqus avec précharge

A) Nouvelle loi d'évolution

Dans le modèle de Zener linéarisé proposé en partie III, cinq paramètres sont fixés constants :

- Les paramètres de la loi hyperélastique pour l'état d'équilibre C_{10} , C_{01} , C_{50} .
- La viscosité η ;
- Le paramètre de raideur hors équilibre G_{oe} .

Le temps de relaxation τ est proportionnel au rapport η/G_{oe} et est donc également constant. Par contre, comme il a été vu dans le paragraphe précédent, le module de cisaillement adimensionnalisé est le rapport du module de cisaillement hors équilibre (constant) avec la raideur instantanée (non constante, dépendant de la précharge). L'adaptation de la loi pour l'utilisation dans Abaqus revient cette fois à fixer un ensemble différent de 5 autres paramètres constants :

- Les paramètres de la loi hyperélastique pour l'état d'équilibre C_{10} , C_{01} , C_{50} ;
- Le temps de relaxation τ ;
- Le module de cisaillement adimensionnalisé g .

Alors, le paramètre de raideur hors équilibre devient dépendant de la précharge, proportionnellement au module de cisaillement à l'équilibre :

$$G_{oe}(K_2, K_3) = \frac{g}{2(1-g)} \mu_{\infty}(K_2, K_3), \quad (\text{IV.1.25})$$

où K_2 et K_3 sont les invariants du tenseur de Hencky lors de la précharge, introduits précédemment. Quant à la viscosité, elle devient aussi dépendante de l'état de précharge

puisqu'elle est reliée aux autres paramètres par la relation :

$$\eta(K_2, K_3) = 4G_{oe}(K_2, K_3)\tau = 2\frac{g\tau}{(1-g)}\mu_\infty(K_2, K_3). \quad (\text{IV.1.26})$$

Comme $0 < g < 1$ et $\mu_\infty(K_2, K_3) > 0 \forall K_2, K_3$, si les coefficients C_{10} , C_{01} et C_{50} ont été déterminés de telle manière que l'énergie de déformation soit polyconvexe (ce qui assure la positivité de la dérivée seconde), $G_{oe}(K_2, K_3) > 0 \forall K_2, K_3$. De plus $\tau > 0$, donc la condition de stricte positivité de la viscosité énoncée en partie III est respectée, et l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée. Finalement, choisir de fixer g constant revient à modifier la loi d'évolution en ne choisissant plus la forme de viscosité la plus simple possible, mais en introduisant une dépendance à la précharge. Ce type de loi a déjà été exploré, par exemple par [Amin et al. \(2006\)](#), avec une dépendance de la viscosité à la précharge basée sur des observations expérimentales. Alors que les conséquences du choix d'un module de cisaillement adimensionnalisé constant ont été mises en avant en termes de loi d'évolution, les résultats émanant de cette hypothèse sont comparés avec les données expérimentales.

B) Comparaison avec les données d'essais

L'objectif ici est de fixer le paramètre g à partir des données expérimentales. Pour cela, deux grandeurs sont nécessaires, à savoir :

- La raideur totale lors des oscillations ;
- La raideur à l'équilibre, ou raideur statique lors des oscillations.

a) Raideur en traction Considérons d'abord le cas d'oscillations en traction/compression uniaxiale. La raideur statique a déjà été calculée dans les chapitres 2 et 3 de la partie II. Comme mesure de la raideur totale, nous choisissons $|E^*|$, le module du module complexe, qui, pour rappel, est lié aux modules de conservation E' et de perte E'' par la relation

$$|E^*| = \sqrt{E'^2 + E''^2}. \quad (\text{IV.1.27})$$

La courbe contrainte/déformation étant représentée par une ellipse, $|E^*|$ est en fait la pente du grand axe de l'ellipse. Alors, le module en traction hors équilibre adimensionnalisé est calculé par la relation suivante :

$$g = \frac{|E^*| - E_{statique}}{|E^*|}. \quad (\text{IV.1.28})$$

La figure IV.1.2 montre l'évolution de g en fonction de la fréquence des oscillations en traction/compression uniaxiale, pour quatre précharges en traction uniaxiale ($\lambda=2,5$), compression uniaxiale ($\lambda=0,67$), torsion pure ($\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$) et traction-torsion combinées ($\lambda=1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$). Il apparaît que le module g n'est pas constant. Pour une même précharge, le module évolue avec la fréquence (il augmente avec celle-ci dans quasiment tous les cas). Le plus grand écart pour une même précharge est obtenu en traction uniaxiale, où un écart relatif de 94% est atteint entre 0,1 Hz et 30

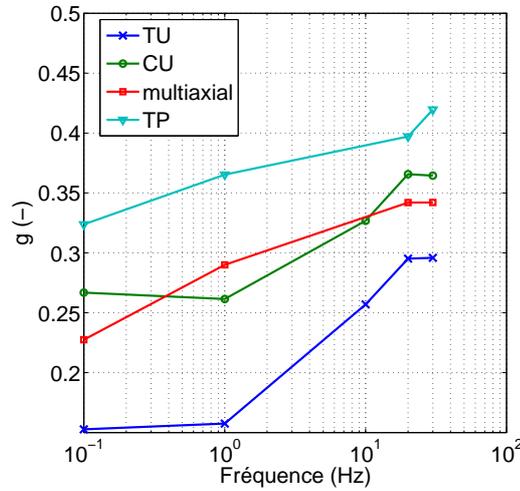


FIGURE IV.1.2 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de la fréquence, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale superposée à des précharges en traction (TU) ou compression (CU) uniaxiale, torsion pure (TP) ou traction-torsion combinées

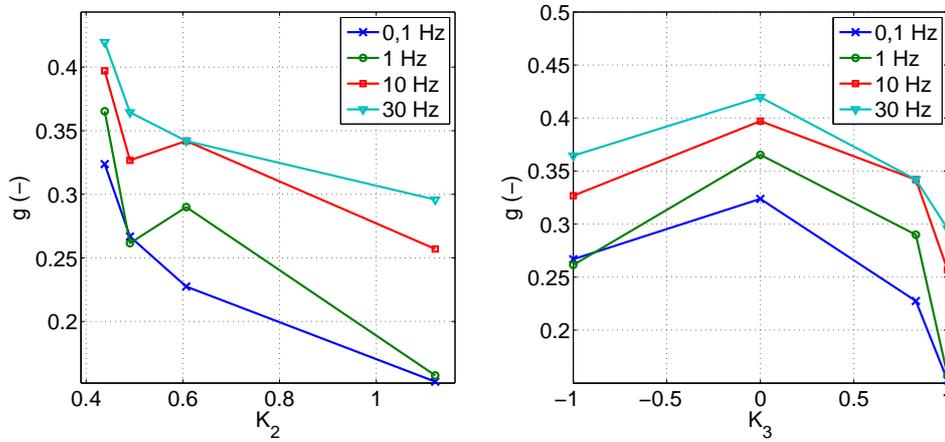


FIGURE IV.1.3 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de l'amplitude de déformation K_2 (à gauche) et du mode de déformation K_3 (à droite), pour des oscillations en traction/compression uniaxiale superposées à des précharges en traction ou compression uniaxiale, torsion pure ou traction-torsion combinées à des fréquences comprises entre 0,1 et 30 Hz

Hz. Clairement, la valeur de g dépend aussi de la précharge. Afin de mieux visualiser cette dépendance, son évolution en fonction de K_2 et K_3 est présentée sur la figure IV.1.3. En

fonction de K_2 , g a plutôt tendance à décroître alors que K_2 augmente, alors que pour K_3 , g commence par croître jusqu'à $K_3 = 0$ (torsion pure équivalente à du cisaillement pur), puis décroît. Il est cependant important de noter que ces observations ne sont basées que sur quatre points de précharge, et si une analyse rigoureuse de l'évolution de g est souhaitée, il faudrait ajouter d'autres points de précharge, aussi bien en amplitude qu'en mode de déformation. Ici, nous cherchons simplement à déterminer les limitations de l'hypothèse qui consiste à considérer g comme constant.

b) Raideur en cisaillement Les oscillations en torsion pure sont maintenant considérées. Les mêmes définitions que dans le cas de la raideur en traction sont adoptées, avec la raideur statique en cisaillement $G_{statique}$ et la raideur totale en cisaillement $|G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2}$. La figure IV.1.4 montre l'évolution de g en fonction de la fréquence des oscillations en torsion pure, pour les quatre mêmes précharges que précédemment en traction uniaxiale, compression uniaxiale, torsion pure et traction-torsion combinées. Là encore le module g n'est pas constant : il croît avec la fréquence. Une dépendance à

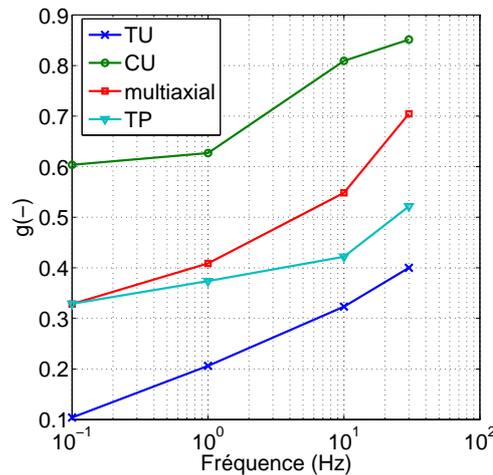


FIGURE IV.1.4 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de la fréquence, pour des oscillations en torsion pure superposée à des précharges en traction (TU) ou compression (CU) uniaxiale, torsion pure (TP) ou traction-torsion combinées

la précharge apparaît également, dépendance mise en valeur sur la figure IV.1.5. Pour chaque fréquence, les courbes ont la même allure : en fonction de K_2 , g décroît puis croît, alors qu'il a un comportement monotone croissant avec K_3 .

C) Comparaison avec le modèle de Zener linéarisé

Les raideurs sont calculées avec le modèle de Zener linéarisé. Les figures IV.1.6 et IV.1.7 montrent l'évolution du module hors équilibre adimensionnalisé à partir du modèle, respectivement pour des oscillations en traction/compression uniaxiale et pour des oscillations en torsion pure.

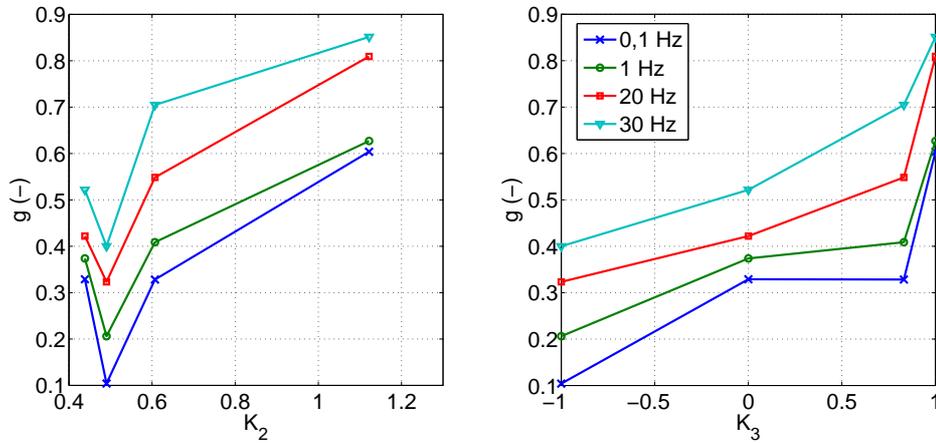


FIGURE IV.1.5 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de l'amplitude de déformation K_2 (à gauche) et du mode de déformation K_3 (à droite), pour des oscillations en torsion pure superposées à des précharges en traction ou compression uniaxiale, torsion pure ou traction-torsion combinées à des fréquences comprises entre 0,1 et 30 Hz

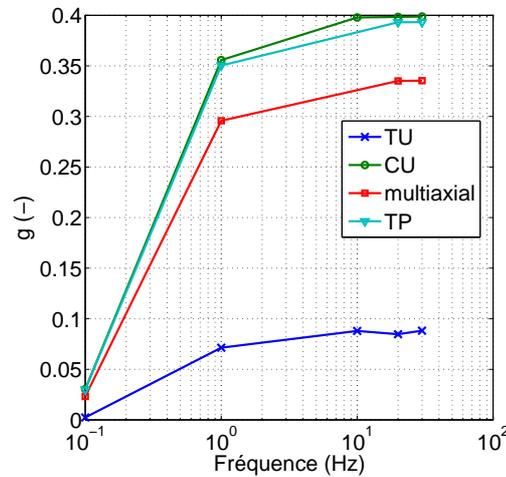


FIGURE IV.1.6 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de la fréquence, pour des oscillations en traction/compression uniaxiale superposées à des précharges en traction (TU) ou compression (CU) uniaxiale, torsion pure (TP) ou traction-torsion combinées calculée avec le modèle de Zener linéarisé

Dans les deux cas, g dépend à la fois de la précharge et de la fréquence, avec notamment une forte augmentation lorsque la fréquence passe de 0,1 à 1 Hz.

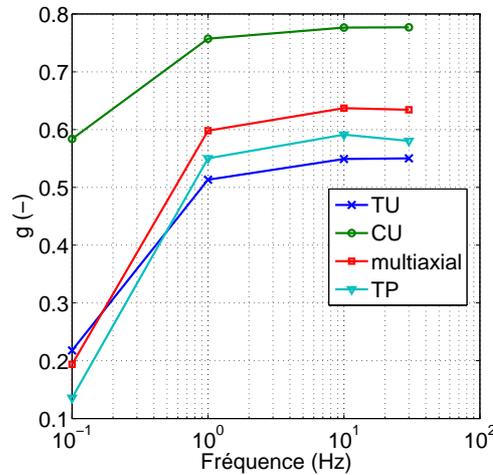


FIGURE IV.1.7 : Évolution du module hors équilibre adimensionnalisé g en fonction de la fréquence, pour des oscillations en torsion pure superposées à des précharges en traction (TU) ou compression (CU) uniaxiale, torsion pure (TP) ou traction-torsion combinées calculée avec le modèle de Zener linéarisé

Finalement, aussi bien dans le cas des essais que pour le modèle de Zener linéarisé, trois tendances ont été observées :

- g dépend de K_2 et de K_3 , c'est-à-dire de l'amplitude et de la multiaxialité de la déformation de la précharge ;
- g dépend de la fréquence ;
- g_{TU} et g_{TP} ne sont pas égaux, c'est-à-dire qu'à même précharge, le ratio raideur dynamique / raideur totale n'est pas le même en traction et en cisaillement.

Ainsi, au vu des résultats d'essais et du modèle, l'hypothèse d'un g constant pour tous les cas de chargements induite par le choix des séries de Prony dans Abaqus est très simplificatrice. Pour des raisons de simplicité d'utilisation, cette hypothèse est maintenue et une valeur moyenne de $g = 0,4$ est conservée, tout en gardant à l'esprit ses limitations.

1.2 Résultats sur éprouvette

Le modèle de Zener linéarisé a été adapté afin qu'il soit possible d'utiliser les séries de Prony existantes dans le logiciel Abaqus. Le modèle éléments finis est donc désormais complet, et une première étape de validation est effectuée en comparant le modèle éléments finis de l'éprouvette avec les résultats expérimentaux.

1.2.1 En statique

Dans un premier temps, les résultats d'essais quasi-statiques sont comparés aux résultats de simulation éléments finis statique de l'éprouvette, où la loi utilisée est la loi

hyperélastique à 3 paramètres identifiée dans le chapitre 1 de la partie III. Le modèle éléments finis présenté dans le chapitre 1 de la partie II est utilisé. Les essais ont déjà été comparés avec la solution analytique du cylindre parfait avec cette même loi, qui sera rappelée sur les courbes de comparaison.

A) Traction/compression uniaxiale

Le premier cas étudié est celui de la traction/compression uniaxiale. Le chargement est appliqué en rampe jusqu'à une extension $\lambda = 2,5$ en traction et $\lambda = 0,67$ en compression, ce qui correspond à des déplacements maximaux respectifs de 38,5 mm et -8,5 mm. La figure IV.1.8 montre l'évolution de l'effort en fonction du déplacement. Les ré-

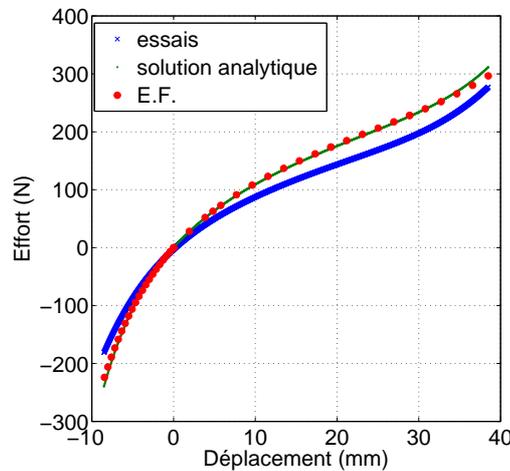


FIGURE IV.1.8 : Effort en fonction du déplacement pour de la traction/compression uniaxiale quasi-statique, mesuré lors d'un essai, calculé par la solution analytique du cylindre parfait et par éléments finis sur le modèle de l'éprouvette

sultats obtenus par éléments finis sur le modèle de l'éprouvette et grâce à la solution analytique du cylindre parfait sont très proches. Un léger écart est noté aux chargements les plus extrêmes. Ainsi, comme il a été vu dans la partie III, ils surestiment l'effort en traction/compression uniaxiale.

B) Compression-torsion combinées

La figure IV.1.9 montre l'évolution de l'effort et du couple pour un essai de compression-torsion combinées, consistant en une rampe jusqu'à une extension $\lambda = 0,84$ et un angle par unité de longueur non déformée $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$ (soit un angle global de 158°). Concernant l'effort, les trois courbes sont très proches. L'effort issu du calcul éléments finis ainsi que celui de la solution analytique surestime légèrement les données d'essais pour les chargements extrêmes, la solution analytique restant plus proche. Concernant

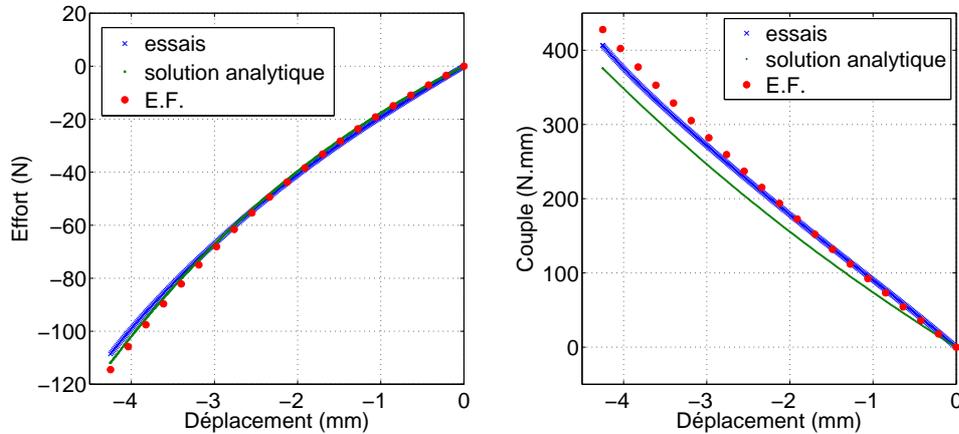


FIGURE IV.1.9 : Effort (à gauche) et couple (à droite) en fonction du déplacement pour de la compression-torsion quasi-statique, mesurés lors d'un essai, calculés par la solution analytique du cylindre parfait et par éléments finis sur le modèle de l'éprouvette

le couple mesuré, il apparaît que la solution analytique le sous-estime, alors que le calcul éléments finis en est très proche jusqu'à la moitié du chargement, puis le surestime légèrement.

C) Traction-torsion combinées

Les résultats obtenus en termes d'effort et de couple pour un essai de traction-torsion combinées, sont présentés sur la figure IV.1.10. Le chargement consiste en une rampe jusqu'à une extension $\lambda = 1,375$ et un angle par unité de longueur non déformée simultanés $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$. De nouveau, les efforts issus du calcul éléments finis de l'éprouvette et de la solution analytique du cylindre parfait sont en adéquation. Ils sont très proches des efforts mesurés expérimentalement jusqu'à 4 mm ($\lambda = 1,16$), puis les surestiment légèrement. Il est à noter que les efforts issus du calcul éléments finis deviennent très légèrement plus faibles que ceux de la solution analytique, ce qui les rend plus proches des données expérimentales. Concernant le couple, le calcul éléments finis surestime assez fortement la solution analytique. Pour des déplacements et angles faibles (jusqu'à 1,8 mm), le calcul éléments finis est très proche du couple mesuré alors que la solution analytique le sous-estime légèrement. Ensuite, les deux calculs encadrent le résultat d'essais, mais la solution analytique en est plus proche.

D) Discussion

Les réponses en traction calculées par éléments finis et par la solution analytique sont très proches sur les trois exemples présentés. La prédiction est très satisfaisante pour les cas combinés, un peu moins pour la traction-compression uniaxiale. Les réponses

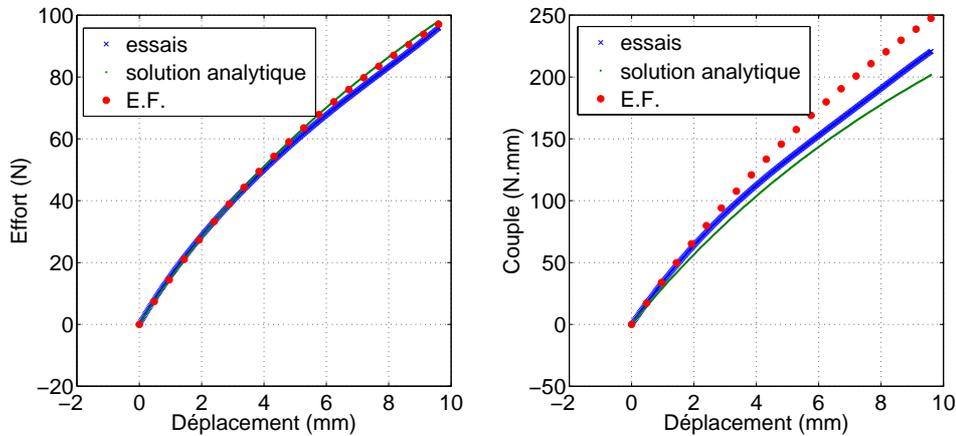


FIGURE IV.1.10 : Effort (à gauche) et couple (à droite) en fonction du déplacement pour de la traction-torsion quasi-statique, mesurés lors d'un essai (moyenne charge/décharge), calculés par la solution analytique du cylindre parfait et par éléments finis sur le modèle de l'éprouvette

en torsion calculées par les deux méthodes sont également proches des essais, mais le fait que le résultat issu du calcul éléments finis et celui de la solution analytique ne soient pas proches l'un de l'autre amène des interrogations. Dans un premier temps, l'argument peut être avancé que ce phénomène est dû à la non linéarité induite par la géométrie de l'éprouvette, c'est-à-dire au fait qu'elle ne soit pas un cylindre parfait. Or la campagne de stéréo-corrélation d'images présentée dans le chapitre 1 de la partie II a permis de montrer qu'il existe une zone de l'éprouvette qui subit la même déformation qu'un cylindre parfait en traction-torsion. Donc, il devrait être possible de trouver la même relation contrainte/déformation près du centre de l'éprouvette et dans le cas du cylindre parfait. Afin d'éprouver cette hypothèse, le cas le plus critique est considéré, à savoir la traction-torsion combinée. Les extensions et contraintes de Cauchy principales sont relevées sur le rayon extérieur de l'éprouvette, en $Z = 0$ (centre de l'éprouvette). Les déformations vraies principales sont calculées, puis ces valeurs sont comparées avec celles données par la solution analytique en figure IV.1.11. Alors que les deux méthodes donnent des résultats proches pour la plus grande contrainte principale, σ_3 , elle s'en éloigne pour les deux autres. Les valeurs propres ne sont pas égales non plus. De plus, un calcul éléments finis sur un modèle 2D axisymétrique d'un cylindre parfait montre qu'un écart de 6 % avec la solution analytique subsiste pour l'évaluation du couple maximal dans le cas de la traction-torsion combinée. Ainsi, il n'y a pas similitude entre la solution analytique et la solution du modèle éléments finis prise au centre de l'éprouvette, contrairement à ce qui a été montré expérimentalement. La différence entre le couple calculé par éléments finis et par la solution analytique ne peut donc pas uniquement s'expliquer par la non linéarité géométrique due à la forme de l'éprouvette, mais par une

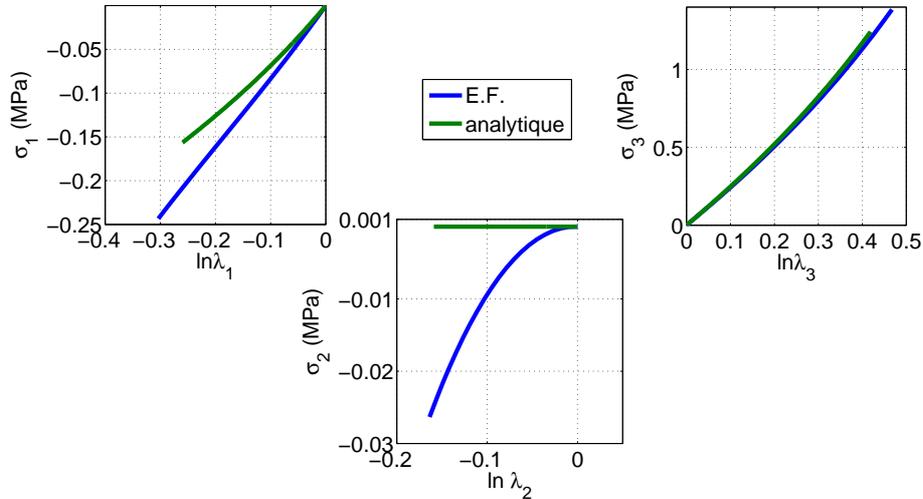


FIGURE IV.1.11 : Comparaison de l'évolution des trois contraintes de Cauchy principales en fonction des déformations vraies principales, dans le cas de la traction-torsion combinée, calculée par éléments finis et par solution analytique

erreur d'estimation de la déformation en torsion dans le calcul éléments finis, malgré l'utilisation d'éléments incluant les effets de rotation. Cette conclusion est par ailleurs appuyée par l'étude menée dans le chapitre 1 de la partie II, où il a été montré qu'à angle global imposé, le modèle éléments finis surestime l'angle par unité de longueur analogue à la déformation d'un cylindre parfait, et ce quelle que soit la loi de comportement sélectionnée (la surestimation dépend également de la loi choisie). Or, le couple est directement relié à l'angle par unité de longueur (voir la relation couple/angle par unité de longueur du chap I partie II). Ainsi, la divergence du modèle éléments finis par rapport à la solution analytique du cylindre parfait n'est pas surprenante. Cet argument pourrait conduire à s'interroger à propos de l'effort, puisque celui-ci dépend également de l'angle par unité de longueur : une diminution d'effort accompagne l'accroissement d'angle (effet Poynting). En fait, cet effet n'est pas prépondérant par rapport à l'effort généré par l'extension. Il pourrait être à l'origine du faible écart entre efforts issus du calcul éléments finis et de la solution analytique évoqué plus haut, comme pourrait l'être la non linéarité induite par la géométrie de l'éprouvette. Étant donné que ce faible écart a également été observé dans le cas de la traction uniaxiale, il est plus probable que la non linéarité géométrique en soit la cause, plutôt qu'une mauvaise évaluation de l'angle par unité de longueur ou plus précisément de la déformation en torsion.

1.2.2 En cyclique

Comme expliqué précédemment, l'analyse fréquentielle est incompatible avec l'utilisation d'éléments axisymétrique en torsion. Il faut donc mener une analyse temporelle, avec une première étape statique pour l'application de la précharge, suivie d'une étape

visco pour l'application des oscillations. Les conditions aux limites sont semblables à celles appliquées dans le chapitre 1 de la partie II. Les oscillations sont définies par leur incrément d'amplitude, leur pulsation $\omega = 2\pi f$, avec f la fréquence, et leur amplitude initiale. Deux cas sont étudiés ici : une précharge statique en traction-torsion combinées et une précharge statique en compression uniaxiale, suivie d'oscillations en traction/compression uniaxiale à $f = 0,1 ; 1 ; 10 ; 20 ; 30$ Hz. Pour chaque cas, seulement deux cycles sont simulés, ce qui est suffisant pour atteindre un état stable, c'est-à-dire la boucle d'hystérésis de la courbe contrainte/déformation est la même après deux cycles.

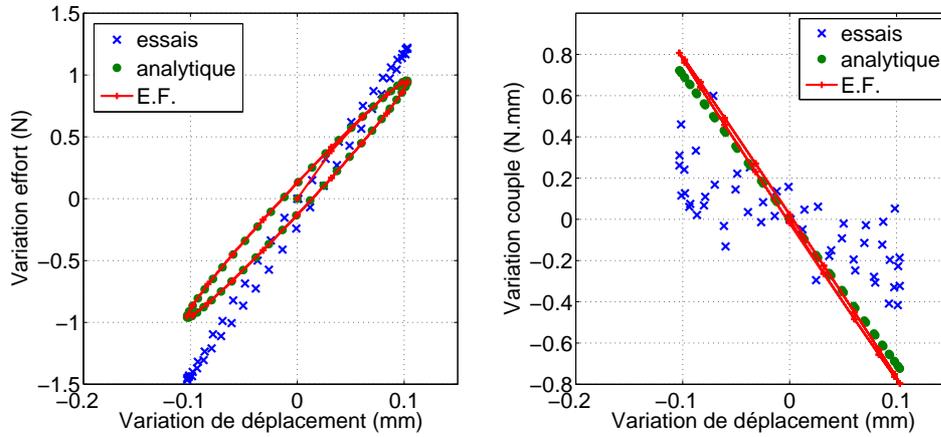
A) Précharge en traction-torsion combinées, oscillations en traction/compression uniaxiale

Les figures IV.1.12 et IV.1.13 montrent les résultats pour une précharge de chargement maximal $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, avec des oscillations d'amplitude $D = 0,1 \text{ mm}$. La colonne de gauche concerne l'évolution de l'incrément d'effort en fonction du déplacement, celle de droite concerne l'incrément de couple en fonction du déplacement. Les deux premières sous-figures montrent les résultats à $f = 0,1 \text{ Hz}$, les deux suivantes à $f = 1 \text{ Hz}$, et ainsi de suite jusqu'à 30 Hz . La courbe de couple à 30 Hz n'est pas montrée, car pour rappel, le signal y est trop bruité. De plus, les données de couple sont bruitées car la variation de couple est très faible par rapport à la pleine échelle du capteur : par exemple ici, on observe une variation de couple maximale autour de $3 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}$, alors que la pleine échelle vaut 25 N.m .

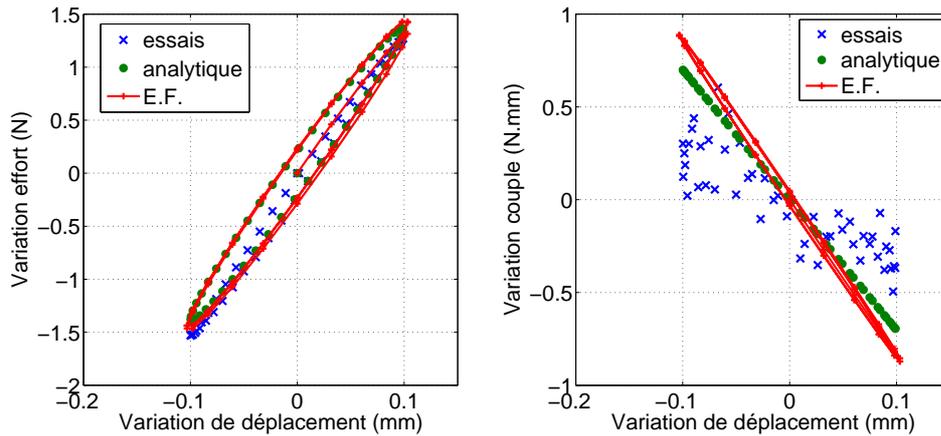
Comme en statique, toutes les courbes d'effort sont très proches dans le cas du calcul éléments finis et dans le cas de la solution analytique. Ainsi, le choix des paramètres viscoélastiques à fixer, discuté dans la section précédente, a finalement peu d'influence : alors que pour le calcul éléments finis, le module adimensionnalisé et le temps de relaxation sont constants, pour la solution analytique, ce sont la raideur hors équilibre et la viscosité qui le sont, et malgré cette différence, les courbes d'efforts dans les deux cas sont superposées. De ce fait, on se rapportera à la partie III pour la discussion sur la corrélation essais/modèle ; il est juste souligné ici que le modèle conduit à des résultats satisfaisants en termes d'efforts. Concernant le couple, le calcul éléments finis conduit à des résultats pour lesquels la raideur est un peu plus élevée que pour la solution analytique, et la dissipation y est plus importante à $0,1$ et 1 Hz . Cet écart peut être expliqué aussi bien par l'adaptation du modèle via le choix de paramètres constants différents, par la non linéarité de l'éprouvette et par l'erreur commise dans le calcul éléments finis lors de la gestion de cette non linéarité. À la lumière des résultats et discussions en statique, mais aussi sur ces essais cycliques concernant l'effort, il est plus probable que le dernier argument, à savoir l'erreur de calcul de la déformation en torsion est prépondérant.

B) Précharge en compression uniaxiale, oscillations en traction/compression uniaxiale

Les figures IV.1.14 et IV.1.15 montrent l'évolution de la variation d'effort et de couple en fonction du déplacement lors d'oscillations en traction/compression uniaxiale après



(a) À 0,1 Hz

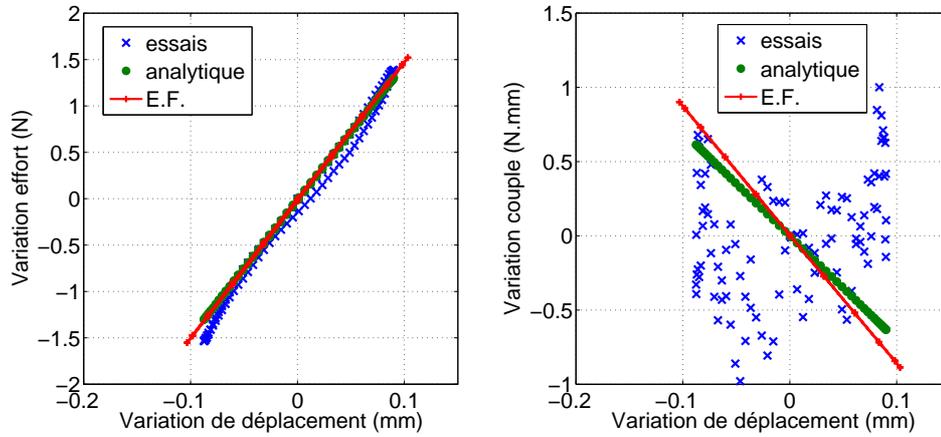


(b) À 1 Hz

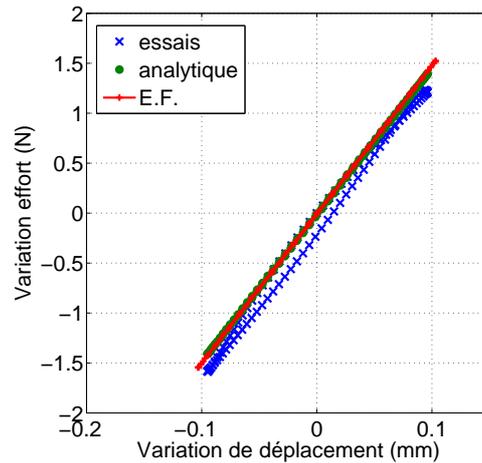
FIGURE IV.1.12 : Évolution des incréments d'efforts et couples en fonction de la variation de déplacement dans le cas d'une précharge en traction-torsion combinées suivie d'oscillations en traction uniaxiale, avec $f = 0,1$ et 1 Hz

précharge en compression uniaxiale jusqu'à une extension $\lambda = 0,67$.

Pour ce cas de précharge, toutes les courbes d'effort prédit par le calcul éléments finis et par la solution analytique sont très proches, sauf pour la fréquence 0,1 Hz pour laquelle le calcul éléments finis donne une réponse légèrement moins raide, ce qui, au vu des autres résultats pour cette précharge doit être causé par la différence de paramètres dans le modèle viscoélastique. Comme précédemment, le lecteur est invité à se rapporter à la discussion du chapitre 2 de la partie III pour la comparaison essais/modèle. Il est



(a) À 20 Hz



(b) À 30 Hz

FIGURE IV.1.13 : Évolution des incréments d'efforts et couples en fonction de la variation de déplacement dans le cas d'une précharge en traction-torsion combinées suivie d'oscillations en traction uniaxiale, avec $f = 20$ et 30 Hz

juste souligné de nouveau que la prédiction de l'effort est très satisfaisante à $0,1$ Hz, alors que pour les autres fréquences, la raideur est surestimée et la dissipation est surestimée à 1 Hz et sous-estimée à 20 et 30 Hz.

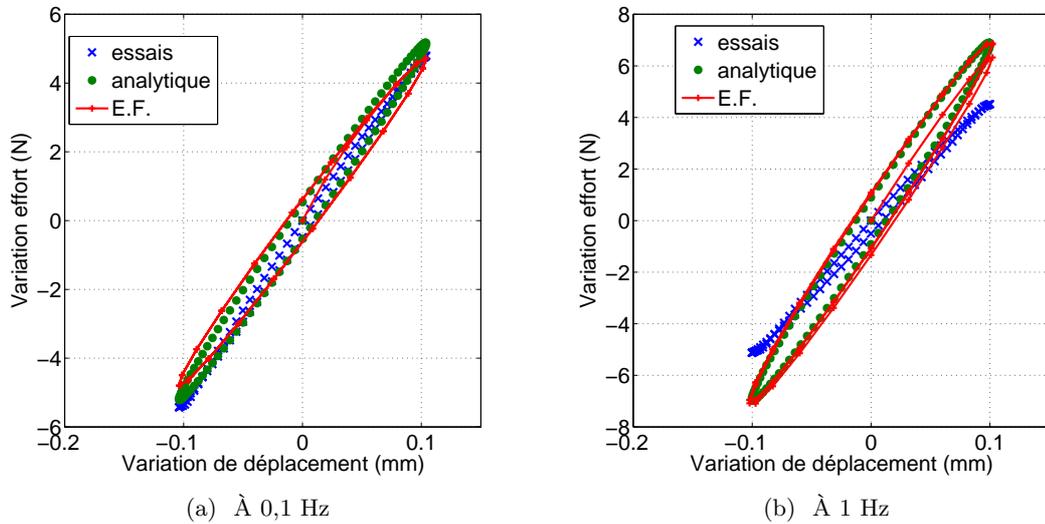


FIGURE IV.1.14 : Évolution des incréments d'efforts en fonction de la variation de déplacement dans le cas d'une précharge en compression uniaxiale suivie d'oscillations en traction uniaxiale, avec $f = 0,1$ et 1 Hz

Conclusion

Dans ce chapitre, la modélisation présentée en partie III a été adaptée en vue de son utilisation dans un code de calcul éléments finis. Dans un premier temps, les options disponibles dans Abaqus pour mener un calcul de précharge statique en grandes déformations suivie par de petites oscillations ont été étudiées, ce qui a conduit au choix d'une analyse temporelle via la définition de séries de Prony pour la partie viscoélastique. Ensuite, le lien entre ces séries de Prony et le modèle de Zener linéarisé a été exposé. Il a été montré que ces deux modèles peuvent être complètement équivalents. Cependant, l'utilisation des séries de Prony dans Abaqus requiert de fixer un module de raideur adimensionnalisé comme constant, alors qu'il dépend de l'état de la précharge dans le modèle de Zener linéarisé. Ce module a été calculé à partir de données expérimentales ainsi qu'à partir du modèle de Zener linéarisé, et sa dépendance à la fréquence et à l'état de précharge a été mise en évidence dans les deux cas. Malgré cela, il a été choisi pour des raisons de simplicité de fixer ce paramètre constant à une valeur moyenne, tout en gardant à l'esprit les limitations d'une telle hypothèse. Une première étape de validation a ensuite été effectuée, en comparant les résultats expérimentaux sur éprouvette avec son modèle éléments finis et la solution analytique du cylindre parfait, d'abord en statique, puis en cyclique. Les résultats statiques et dynamiques en effort du calcul éléments finis s'avèrent très proches de la solution analytique, aussi bien en statique qu'en cyclique. Pour le couple, les résultats sont plus éloignés, et l'origine de cette erreur a été discutée et mise en relation avec les résultats obtenus dans le chapitre 1 de la partie II, particuliè-

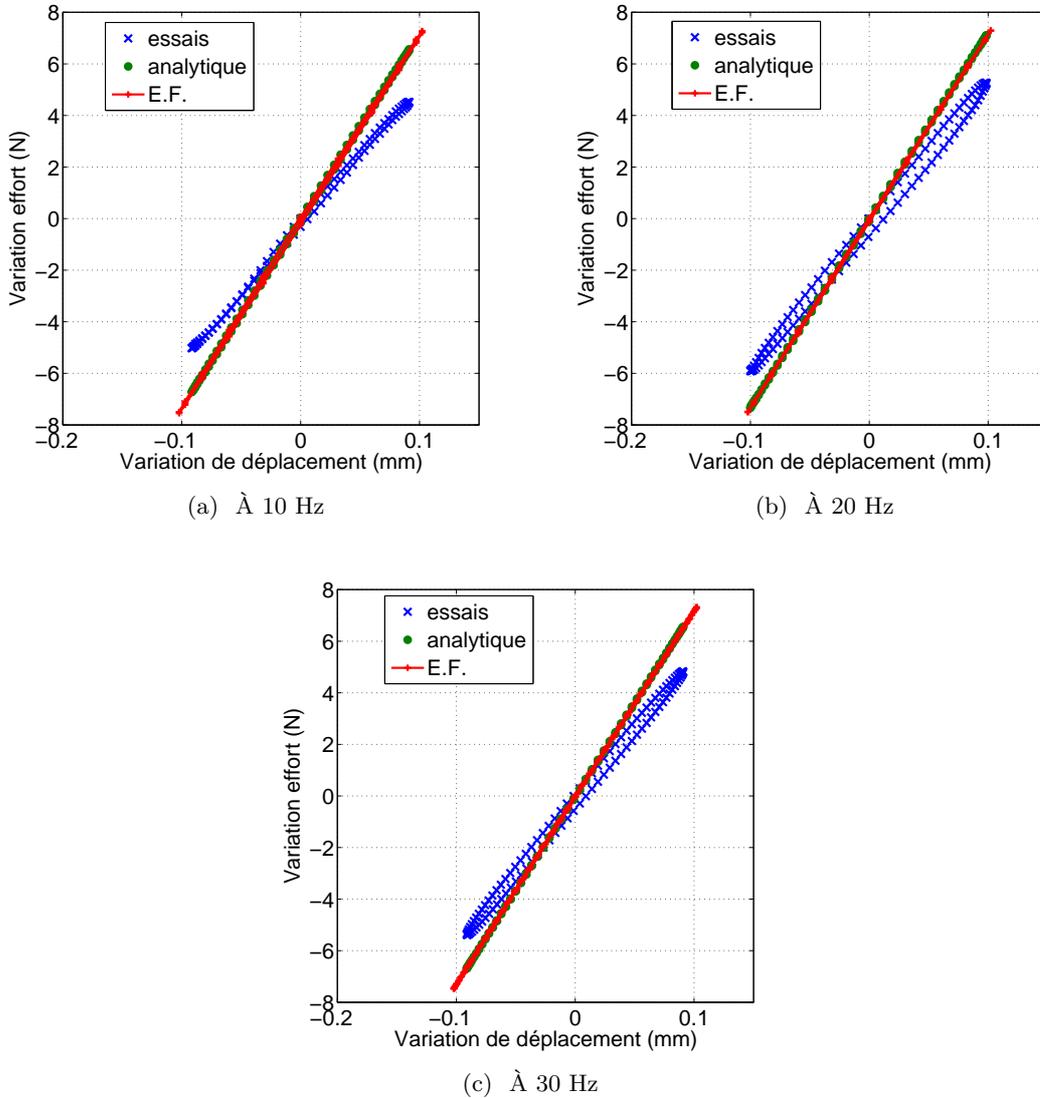


FIGURE IV.1.15 : Évolution des incréments d'efforts en fonction de la variation de déplacement dans le cas d'une précharge en compression uniaxiale suivie d'oscillations en traction uniaxiale, avec f compris entre 10 et 30 Hz

rement avec les conclusions des essais de stéréo-corrélation d'images. L'écart entre calcul éléments finis et solution analytique ne dégrade pas pour autant la prédiction des essais puisqu'en statique, sur les deux exemples étudiés, les résultats du calcul éléments finis sont plutôt plus proches des essais que ne le sont ceux issus de la solution analytique, et en dynamique, ils sont légèrement moins bons. La prédiction du comportement du matériau reste améliorable mais satisfaisante, et peut être appliquée au modèle éléments

finis de la pièce de suspension moteur pour comparaison avec des essais sur pièce.

Chapitre 2

Validation du modèle éléments finis de la pièce de suspension moteur

Sommaire

2.1 En statique	246
2.1.1 Déplacement en Z	246
2.1.2 Déplacement en X	253
2.1.3 Bilan	255
2.2 En cyclique	257
2.2.1 Oscillations en Z autour de la précharge	257
2.2.2 Oscillations en X autour de la précharge	258
2.2.3 Sollicitations cyclique des butées X seules	258
2.2.4 Bilan	260

Introduction

Dans le chapitre précédent, la méthode d'adaptation et d'intégration des lois de comportement dans le logiciel Abaqus a été exposée. Une première étape de validation de la simulation éléments finis a été effectuée en comparant les essais statiques et cycliques sur éprouvette avec les résultats du modèle éléments finis de celle-ci. Les résultats statiques obtenus sont satisfaisants, alors que les résultats en cyclique le sont moins, ce qui est lié au fait qu'un modèle viscoélastique très simple a été sélectionné, en sachant qu'il sera possible de le complexifier ensuite. Le présent chapitre a pour objectif d'intégrer les lois de comportement identifiées dans la partie **III** à partir des essais de la partie **II** dans le modèle éléments finis de la pièce, construit dans la partie **I**, et de comparer les résultats obtenus avec des données d'essais sur pièce. Ces essais sur pièce ont notamment été réalisés par Christophe Le Guyader au Technocentre Renault.

Dans un premier temps, la comparaison du modèle avec des essais quasi-statiques est présentée au travers de deux cas de validation. Ensuite, le modèle est comparé avec des essais cycliques avec trois cas de validation.

2.1 En statique

Tous les essais quasi-statiques ont été réalisés sur la pièce caoutchouc insérée dans l'étrier en aluminium, puis préchargée en Z à $D_Z = -5,75$ mm, ce qui correspond à la précharge moteur.

2.1.1 Déplacement en Z

Le premier cas de validation consiste à appliquer un déplacement dans la direction $-Z$ à partir de la précharge et jusqu'à $D_Z = -17$ mm, puis un déplacement en $+Z$ jusqu'à $D_Z = 4,5$ mm. Ces conditions aux limites sont imposées dans Abaqus, et une analyse statique est effectuée. Les chargements en $-Z$ et $+Z$ sont effectués dans deux calculs distincts. Le calcul ne converge pas jusqu'aux chargements maximaux, les éléments devenant trop distordus.

A) Chargement en $+Z$

La figure IV.2.1 montre l'évolution de l'effort en Z en fonction du déplacement pour l'essai et pour le modèle éléments finis. Les graphes ont été translatés afin que le point à déplacement et effort nul corresponde à la position initiale de précharge dans l'étrier (les butées Z sont en réalité déjà comprimées). Alors que la prédiction de l'effort est

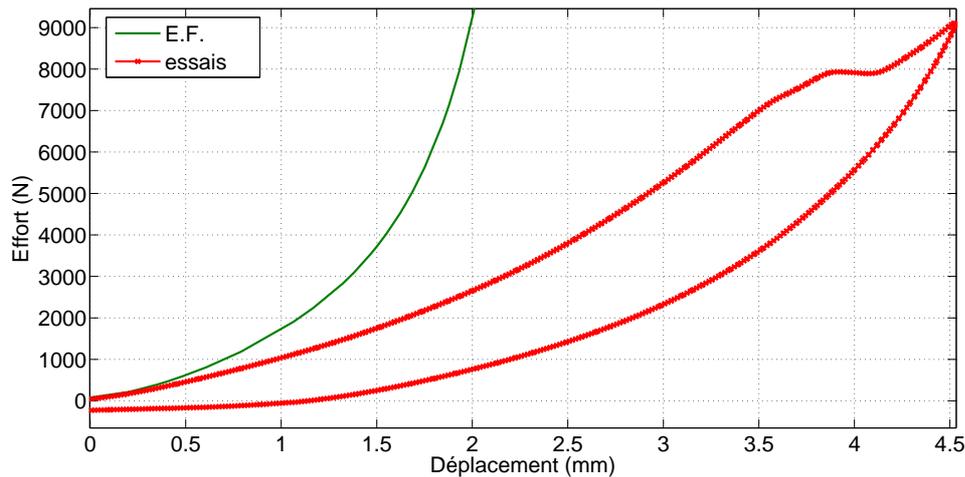


FIGURE IV.2.1 : Effort en fonction du déplacement lors d'une traction en Z , comparaison entre données expérimentales et modèle éléments finis

satisfaisante jusqu'à environ 0,3 mm, le calcul éléments finis le surestime largement ensuite, pour fournir une solution beaucoup trop raide à partir de 1,15 mm. Afin de mettre en évidence les raisons de ce raidissement extrême, il est d'abord proposé une représentation du maillage avant (c'est-à-dire après la précharge étrier) et après (au chargement maximum supporté par le calcul) déformation, respectivement sur les figures IV.2.2 et IV.2.3.

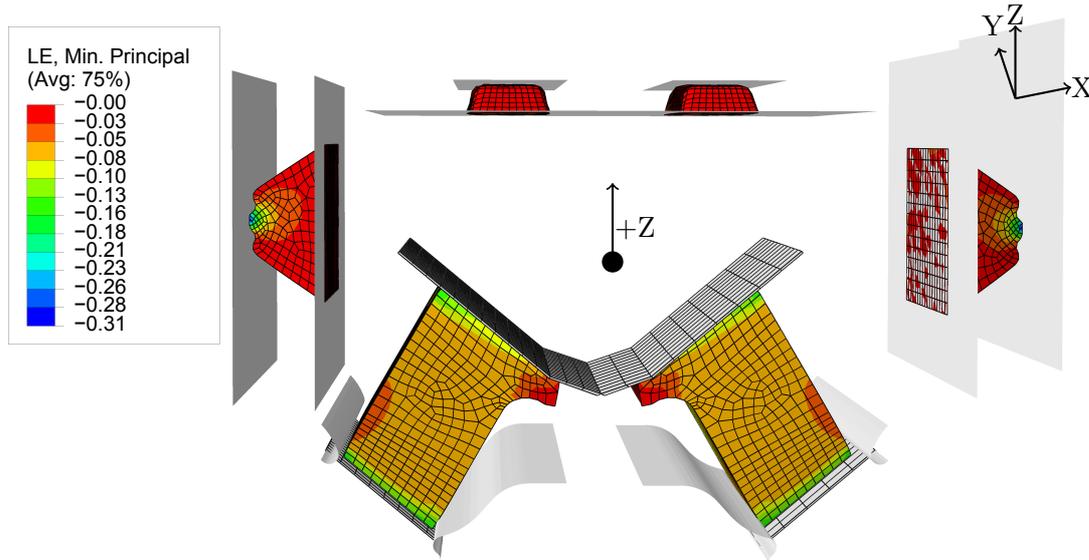


FIGURE IV.2.2 : Modèle éléments finis du tampon moteur après la précharge étrier

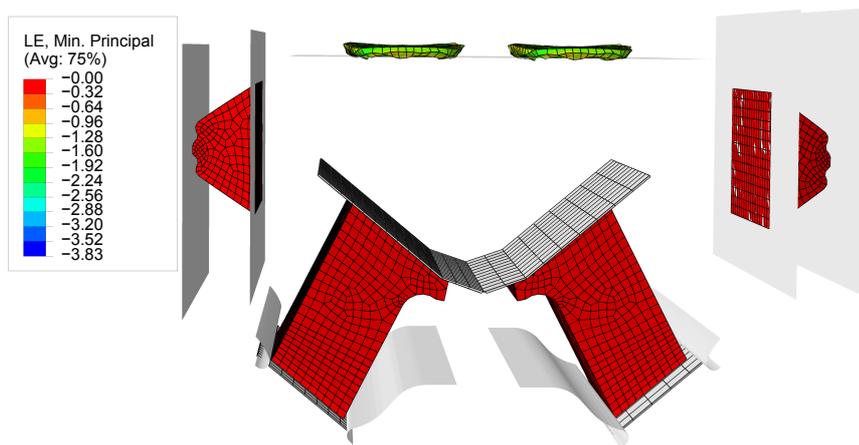


FIGURE IV.2.3 : Modèle éléments finis du tampon moteur après traction en Z

Clairement, les butées Z sont complètement écrasées contre l'étrier. Afin de juger de la sévérité des déformations, les extensions principales sont relevées au cœur des bras

et des butées Z . La figure IV.2.4 montre l'évolution des trois extensions principales au cœur des bras en fonction du déplacement global en Z . Jusqu'à 2,5 mm, les bras sont

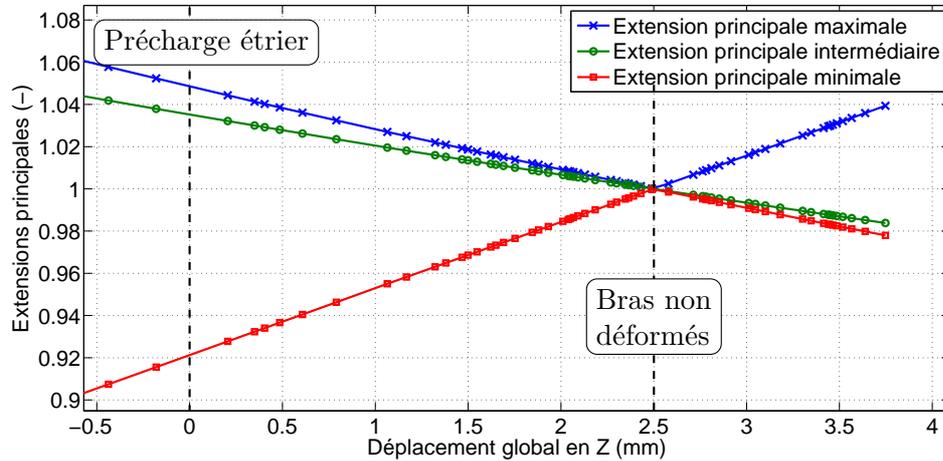


FIGURE IV.2.4 : Évolution des trois extensions principales au cœur des bras en fonction du déplacement global en Z

en compression-cisaillement. Pour des déplacements plus élevés, ils sont en traction-cisaillement. De plus, les déformations à cœur des bras sont plutôt faibles. Il est donc très peu probable que les déformations dans les bras soient à l'origine du raidissement extrême du calcul éléments finis. À présent, les déformations dans les butées Z sont étudiées. La figure IV.2.5 montre l'évolution des trois extensions principales à cœur d'une butée Z , en fonction du déplacement global Z . La première observation concerne les niveaux de déformation : jusqu'à environ 1,5 mm, on peut assimiler la transformation à du cisaillement pur, puisque $\lambda_{mid} \approx 1$, $\lambda_{max} \approx \lambda_{min}$, et pour ce déplacement global, $\lambda_{min} = 0,6$, soit une contrainte de l'ingénieur de -40%. De très grandes déformations sont donc atteintes dès ce stade. Au vu de la déformée des butées Z après le chargement maximal, du mode de sollicitation en cisaillement pur, et du raidissement extrême de la réponse effort/déplacement, des doutes peuvent être émis quand à l'hypothèse d'incompressibilité sur laquelle est basée le modèle éléments finis. En effet, il est probable qu'à partir d'un certain degré d'écrasement, le matériau soit à ce point confiné que le volume ne puisse rester constant. Afin d'aller plus loin sur cette piste, le déterminant de la transformation au cœur d'une butée Z est tracé en fonction du déplacement global en Z sur la figure IV.2.6, simplement calculé par la relation :

$$\det(\mathbf{F}) = \lambda_{max}\lambda_{mid}\lambda_{min}. \quad (\text{IV.2.1})$$

À titre de comparaison, l'évolution du déterminant de la transformation à cœur d'un bras est aussi tracée. Alors que dans le cas incompressible, le déterminant de la transformation doit être égal à 1, il apparaît que plus le déplacement en Z est important, c'est-à-dire plus la butée Z est comprimée, plus le déterminant diverge de cette valeur 1. En fait, en

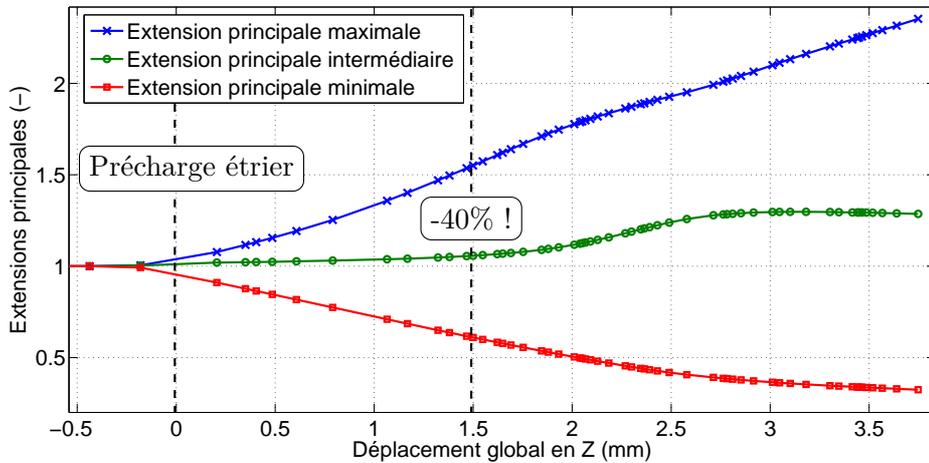


FIGURE IV.2.5 : Évolution des trois extensions principales au cœur d'une butée Z en fonction du déplacement global en Z

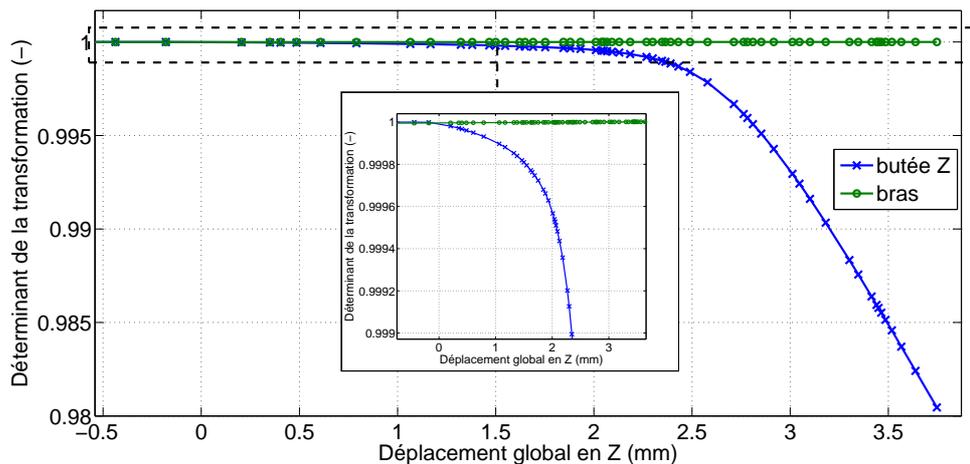


FIGURE IV.2.6 : Évolution du déterminant de la transformation au cœur d'une butée Z et au cœur d'un bras en fonction du déplacement global en Z

resserrant l'échelle, il apparaît que dès que la butée Z est comprimée plus que ça n'est le cas pour la précharge étrier (correspondant à un déplacement global en Z de 0 mm sur le graphe), le déterminant de la transformation commence à diverger. Cette divergence est visible parce que le modèle éléments finis n'est pas parfaitement incompressible. Cependant, l'utilisation des éléments hybrides d'une part, et de la loi de comportement de type Mooney-Rivlin généralisé avec un paramètre de compressibilité D_1 très faible rend le modèle éléments finis tel quel tout à fait inexploitable dans le cadre de la compressibilité. Ainsi, le modèle éléments finis est capable d'évaluer correctement l'effort global subi

par la pièce lors d'une traction en $+Z$ jusqu'à un déplacement relativement faible, ce qui s'explique par le fait que ce modèle, aussi bien par ces éléments que par sa loi de comportement, n'est pas adapté au cas extrême où l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valide.

B) Chargement en $-Z$

La figure IV.2.7 montre l'évolution de l'effort en Z en fonction du déplacement pour l'essai et pour le modèle éléments finis. Les graphes ont également été traduits afin que le point à déplacement et effort nul corresponde à la position initiale de précharge dans l'étrier.

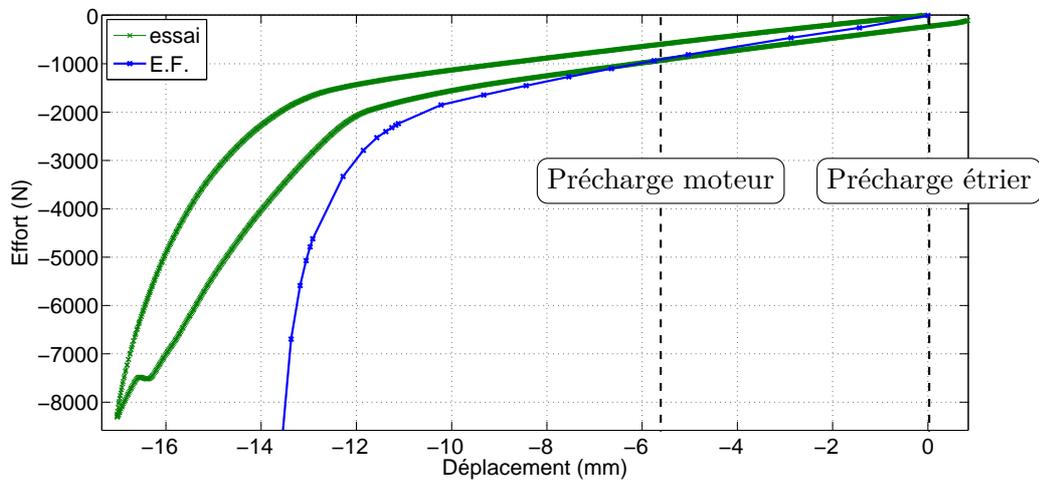


FIGURE IV.2.7 : Effort en fonction du déplacement lors d'une compression en Z , comparaison entre données expérimentales et modèle éléments finis

Sur cette figure, il apparaît que l'effort prédit par le modèle éléments finis est proche de l'effort mesuré jusqu'à la précharge moteur, soit $-5,75$ mm, puis le surestime en valeur absolue. Un fort raidissement est observé dans les deux cas, mais celui-ci apparaît vers -13 mm pour les essais et -11 mm pour le modèle éléments finis. Afin de comprendre pourquoi le modèle échoue à prédire l'effort au delà d'un certain déplacement alors que la loi hyperélastique a été validée en grandes déformations, des vues du maillage déformé après application de la précharge moteur puis du chargement maximal sont proposées respectivement sur les figures IV.2.8 et IV.2.9. En comparant les deux vues, il est clair que les déformations subies par les deux bras sont très importantes, ceux-ci étant comprimés entre les plateaux de la partie centrale pour leurs surfaces supérieures et par l'étrier pour leurs surfaces inférieures et latérales. Un effet « tonneau » est observé, et des doutes peuvent être émis sur la stabilité d'une telle transformation. Comme précédemment, les extensions principales au cœur de l'un des bras sont relevées et tracées sur la figure IV.2.10. Pour ce chargement, les bras sont en compression-cisaillement. Afin de donner

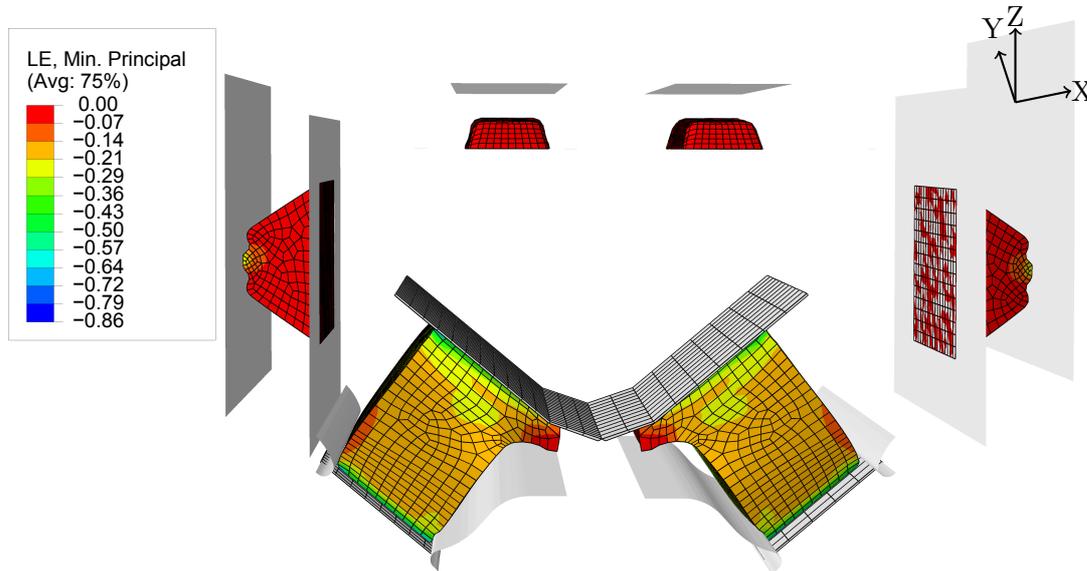


FIGURE IV.2.8 : Modèle éléments finis du tampon moteur après application de la précharge moteur

une estimation grossière de la déformation, la transformation est considérée comme étant de la compression uniaxiale, caractérisée par l'extension principale minimale. Alors, il apparaît qu'au chargement correspondant à la précharge moteur, l'extension minimale au cœur du bras est déjà à 0,66, soit -34% de déformation de l'ingénieur, les -40% étant atteints à -7,3 mm. Rappelons que la compression maximale appliquée sur l'éprouvette était de $\lambda = 0,67$, compression au delà de laquelle l'effet tonneau n'était plus négligeable et donc l'homogénéité de la transformation non garantie. Pour ce chargement, les bras sont donc rapidement soumis à des chargements en très grandes déformations. Comme il a été vu que l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valable dans le cas de la traction globale en Z , cette question est abordée pour le cas de la compression globale en Z . Pour cela, le déterminant de la transformation au cœur du bras est tracé en fonction du déplacement global sur la figure IV.2.11. De nouveau, plus le déplacement global est important, plus le déterminant s'éloigne de la valeur correspondant au cas incompressible, à savoir 1. La diminution du déterminant est moins marquée que dans le cas de la traction globale, ce qui est probablement dû au fait que le bras est une partie plus massive que la butée Z , et donc le cœur du bras est moins confiné que le cœur de la butée Z . Cependant, comme il a été vu sur le grossissement de la figure IV.2.9, une partie du bras est pincée entre le plateau supérieur et l'étrier. Les figures IV.2.12 et IV.2.13 montrent respectivement l'évolution des 3 extensions principales et du déterminant de la transformation pris en un point de cette partie pincée, en fonction du déplacement global en Z . Jusqu'à -8 mm, cette zone du bras subit, dans les directions principales, une compression relativement faible. Puis, à partir de -8 mm, la compression augmente très rapidement. Cette augmentation de la déformation s'accompagne d'une chute du

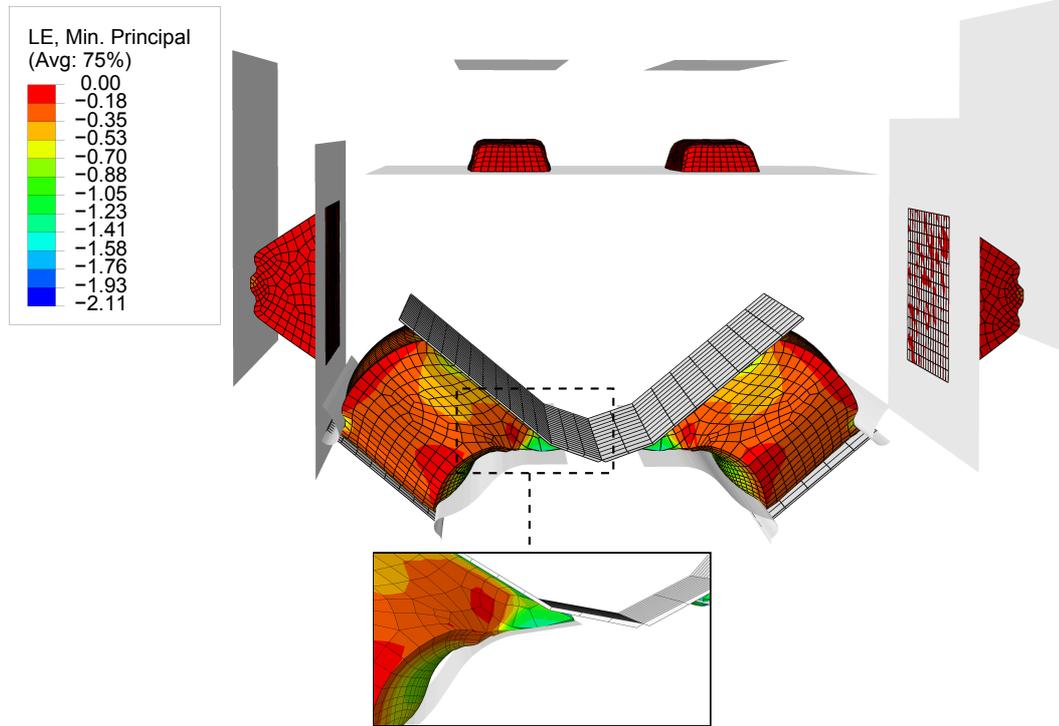


FIGURE IV.2.9 : Modèle éléments finis du tampon moteur après compression en Z

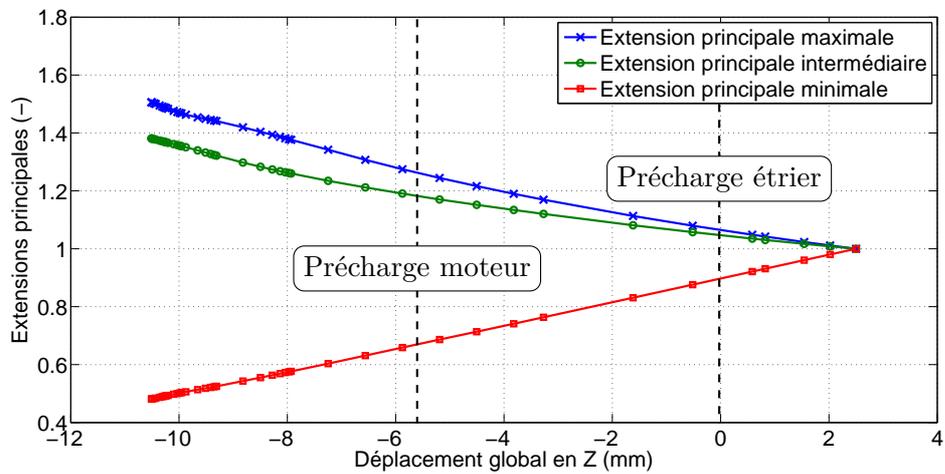


FIGURE IV.2.10 : Évolution des trois extensions principales au cœur d'un bras en fonction du déplacement global en Z

déterminant de la transformation. Ainsi, lors de ce chargement de compression globale en Z , les bras sont globalement soumis à de très grandes déformations, et certaines de

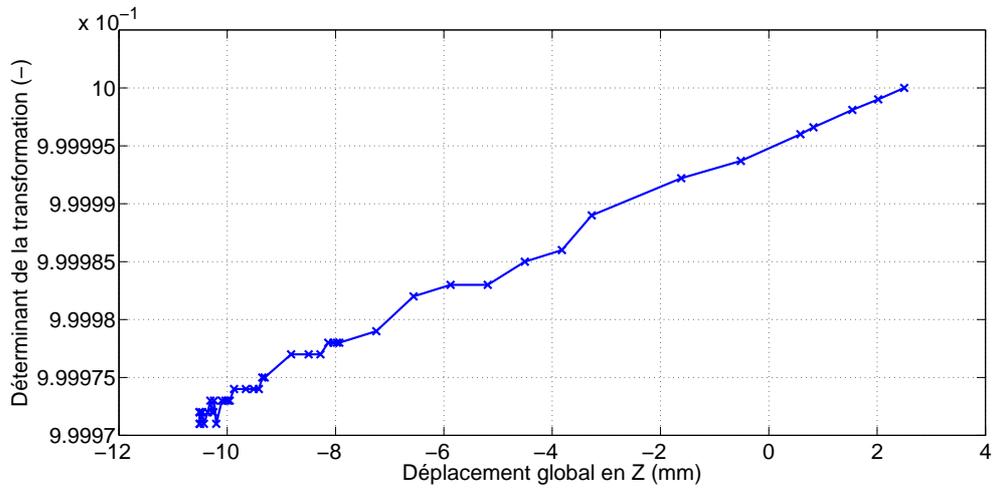


FIGURE IV.2.11 : Évolution du déterminant de la transformation au cœur d'un bras en fonction du déplacement global en Z , cas de la compression

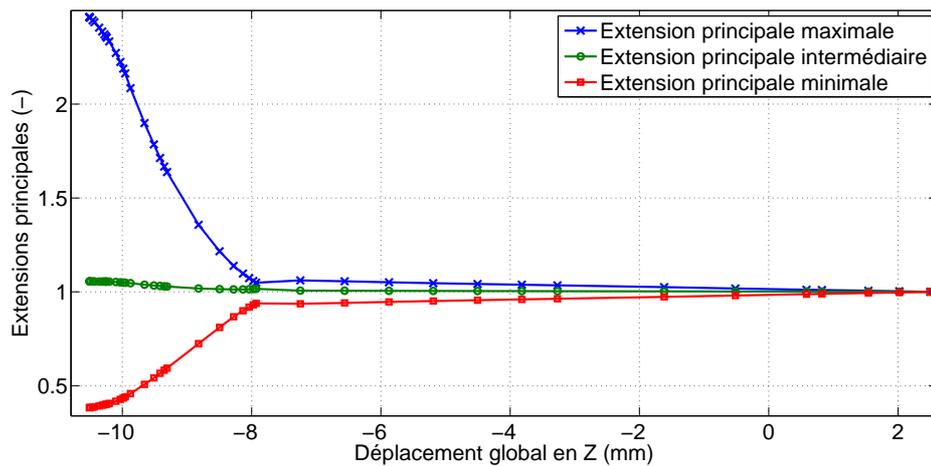


FIGURE IV.2.12 : Évolution des trois extensions principales dans la zone pincée du bras en fonction du déplacement global en Z

leurs zones sont extrêmement confinées, à tel point que l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valide. Il est probable que les zones inférieures du bras pincées entre deux parties de l'étrier connaissent le même phénomène.

2.1.2 Déplacement en X

Le second cas de validation consiste à superposer à la précharge moteur un déplacement dans la direction $-X$. Là encore, le déplacement maximum imposé lors de d'essai

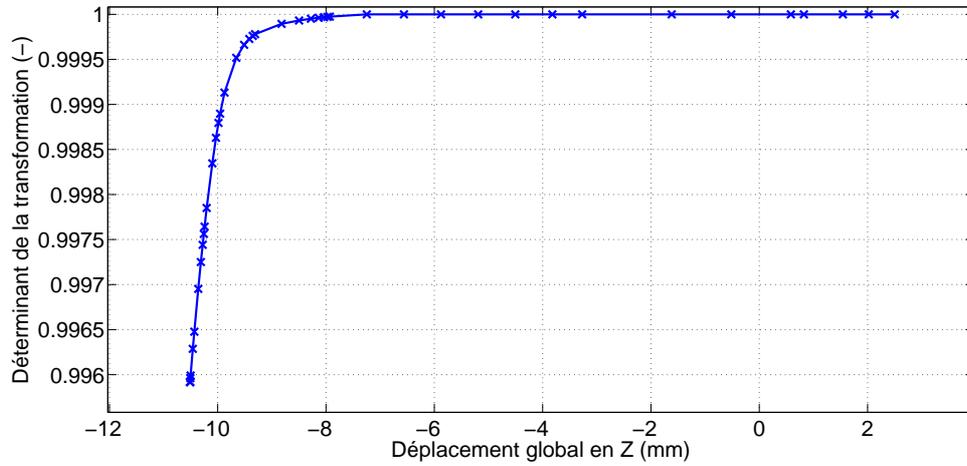


FIGURE IV.2.13 : Évolution du déterminant de la transformation dans la zone pincée du bras en fonction du déplacement global en Z

n'est pas atteint par le calcul. La figure IV.2.14 montre l'évolution de l'effort en X en fonction du déplacement global en X imposé au point de référence du centre de la pièce. Pour ce chargement, le point à effort et déplacement en X nuls correspond au chargement de la précharge moteur. Jusqu'à un déplacement X de 1,3 mm, la prédiction de

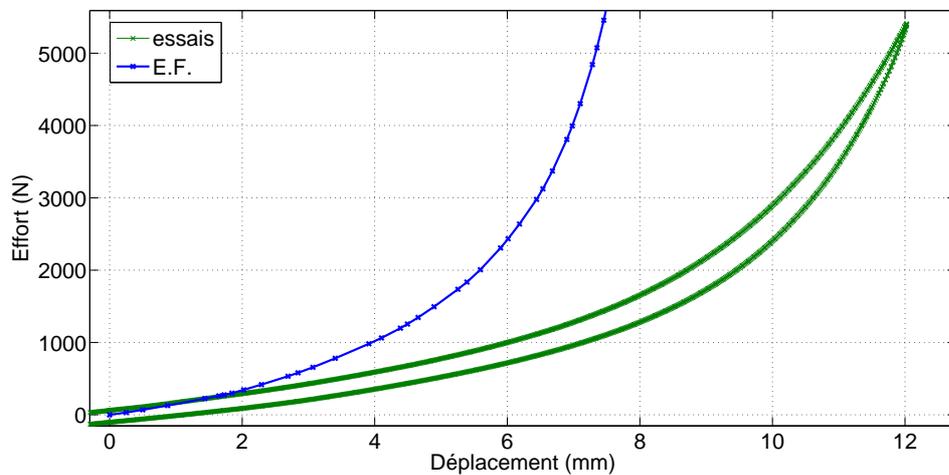


FIGURE IV.2.14 : Effort en fonction du déplacement lors d'un déplacement en X superposé à la précharge moteur, comparaison entre données expérimentales et modèle éléments finis

l'effort par le calcul éléments finis est satisfaisante. Pour des déplacements plus élevés, l'effort est surestimé. En particulier, le fort raidissement qui apparaît vers 6 mm dans

l'essai apparaît vers 4 mm dans le calcul éléments finis. La figure IV.2.15 montre la déformée du maillage après application du chargement maximum. Cette vue est à com-

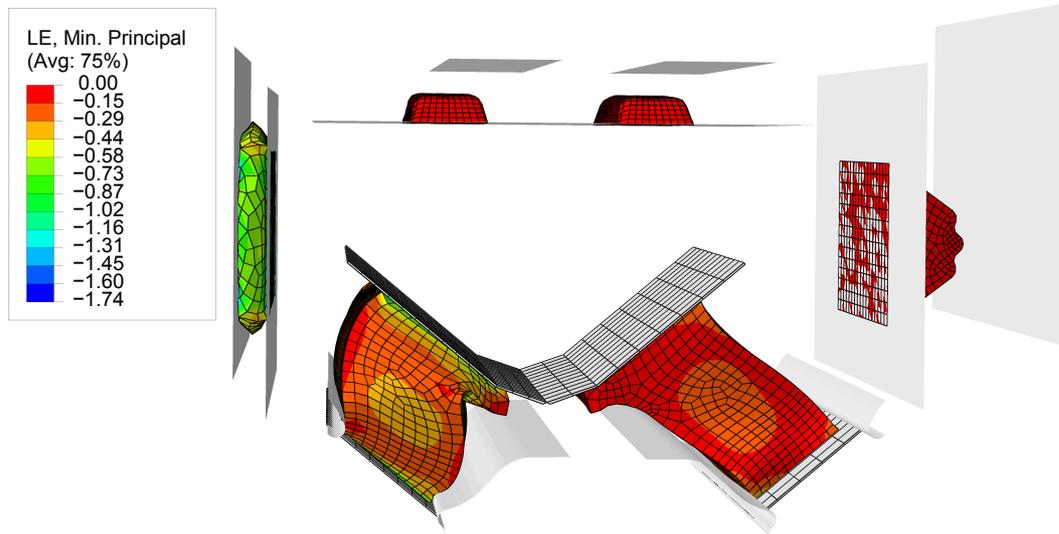


FIGURE IV.2.15 : Modèle éléments finis du tampon moteur après application d'un déplacement en X superposé à la précharge moteur

parer avec celle du maillage déformé après application de la précharge moteur (figure IV.2.8). Ici, trois parties de la pièce sont sollicitées, à savoir le bras droit en traction-cisaillement, le bras gauche en compression cisaillement et principalement la butée X en compression-cisaillement. La butée X est écrasée entre le plateau latéral et l'étrier, et il est fort probable que le même type de résultats que ceux concernant l'écrasement de la butée Z soient trouvés. Pour s'en assurer, les extensions principales au cœur de la butée X comprimée sont relevées, et tracées en fonction du déplacement global en X sur la figure IV.2.16, puis le déterminant de la transformation est calculé et tracé sur la figure IV.2.17. Ces figures confirment que de très grandes déformations sont atteintes rapidement, même au cœur de la butée X , et que celle-ci est trop confinée pour que le déterminant de la transformation reste à 1 et donc que l'hypothèse d'incompressibilité soit valable. Il est fort probable que l'erreur d'évaluation de l'effort global provienne de là. Les déformations au cœur des bras restent modérées. Par contre, une des zones du bras gauche se replie sur elle-même, ce qui fait qu'elle est fortement comprimée.

2.1.3 Bilan

Dans cette section, les résultats du modèle éléments finis du tampon moteur ont été comparés avec des résultats d'essais quasi-statiques sur pièce, correspondant à trois cas de validation. Dans le cas d'un chargement dans la direction $-Z$, les résultats sont satisfaisants jusqu'à environ la précharge moteur, correspondant environ à 1/3 du chargement total. Dans la direction X , les résultats sont satisfaisants jusqu'à environ 1/5

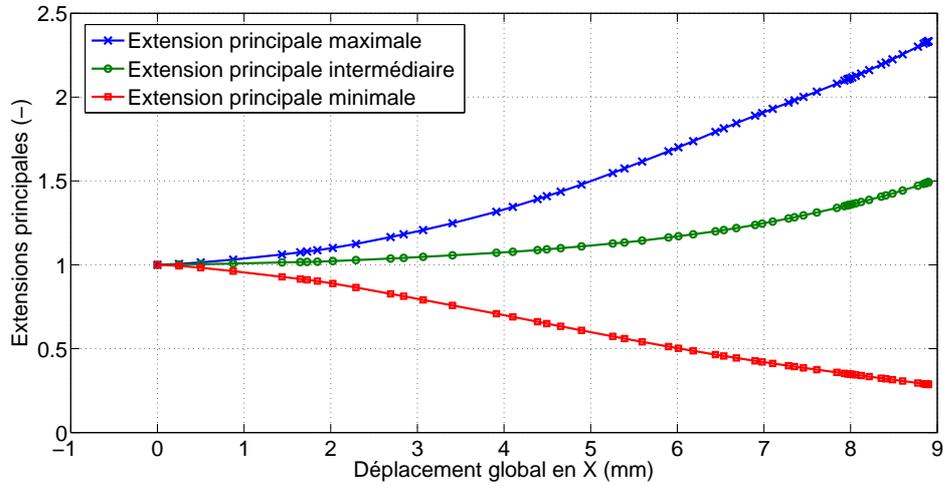


FIGURE IV.2.16 : Évolution des trois extensions principales au cœur de la butée X en fonction du déplacement global en X

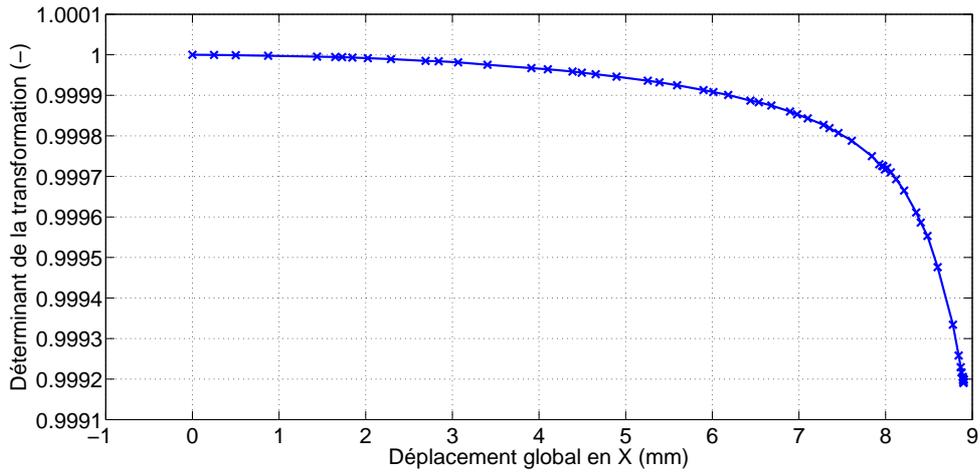


FIGURE IV.2.17 : Évolution du déterminant de la transformation au cœur de la butée X en fonction du déplacement global en X

du chargement maximal. Le cas le plus critique est celui d'un chargement dans la direction $+Z$, où les résultats de la simulation ne sont proches des résultats d'essais que jusqu'à 1/15 du chargement maximal. Il a été montré que, dans chaque cas, ces limites correspondent non seulement à des niveaux de déformation extrêmes, mais surtout à un confinement important pour au moins l'une des parties de la pièce. Enfin, il a été établi que l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valable lorsque ce confinement apparaît, le type d'éléments du maillage et la loi de comportement choisis n'étant alors plus adapté.

À présent, les résultats du modèle éléments finis sont comparés avec des essais cycliques sur pièce.

2.2 En cyclique

Trois cas de validation sont présentés ici :

- Oscillations en Z autour de la précharge moteur, d'amplitude 0,2 mm et 1 mm. Pour la première amplitude, un balayage en fréquence est effectué entre 10 et 40 Hz, alors que pour la seconde, celui-ci est effectué entre 5 et 25 Hz ;
- Oscillations en X autour de la précharge moteur. Les amplitudes et fréquences sont les mêmes que pour les oscillations en Z ;
- Écrasement de la butée X seule à 5, 10, 15 Hz pour des déplacements maximaux de 1, 2 et 3 mm.

Au total, 13 essais de validation ont été considérés.

2.2.1 Oscillations en Z autour de la précharge

La figure IV.2.18 montre l'évolution de la variation d'effort en Z en fonction de la fréquence pour les deux amplitudes d'oscillations en Z , 0,2 mm et 1 mm. Pour les

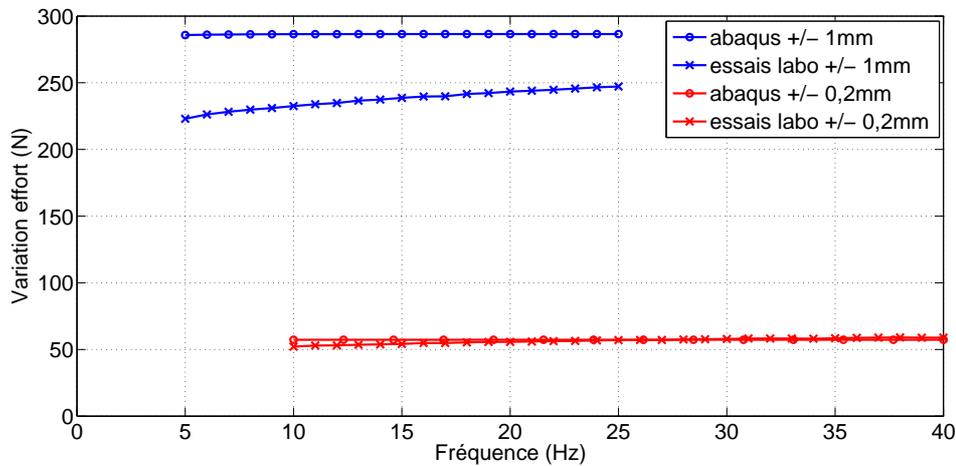


FIGURE IV.2.18 : Évolution de la variation d'effort en fonction de la fréquence lors d'oscillations en Z autour de la précharge moteur, données d'essais et résultats du calcul éléments finis

oscillations à 0,2 mm, les résultats sont satisfaisants. En effet, l'écart relatif entre l'essai et le calcul éléments finis varie entre 0,28 % et 9,84 %, l'écart maximum étant atteint à la fréquence 10 Hz. Pour les oscillations à 1 mm, l'écart entre les résultats d'essais et du calcul éléments finis est nettement plus élevé et varie entre 15,92 % et 28,15 %. Une autre différence, moins influente sur le résultat, apparaît entre les données d'essais

et le calcul éléments finis. En effet, alors que l'effort mesuré croît lorsque la fréquence augmente, l'effort prédit par le calcul éléments finis est quasi-constant. Ce phénomène est probablement dû au fait qu'il n'y a qu'un terme dans la série de Prony. La figure IV.2.19 montre l'évolution du déphasage entre le signal de déplacement et le signal d'effort. Celui-ci est indiqué en degrés. Sur cette figure, il apparaît d'une part que la

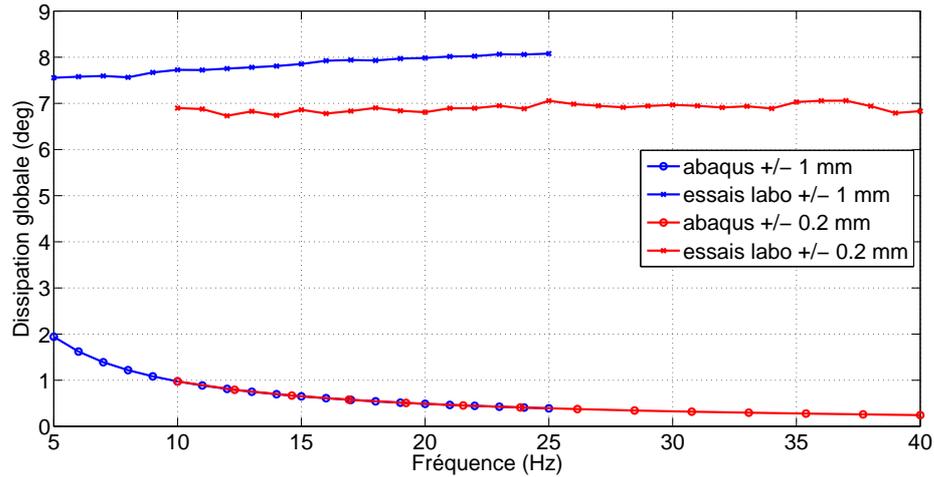


FIGURE IV.2.19 : Évolution du déphasage en fonction de la fréquence lors d'oscillations en Z autour de la précharge moteur, données d'essais et résultats du calcul éléments finis

dissipation est sous-estimée par le modèle. D'autre part, les données expérimentales montrent que la dissipation dépend de l'amplitude, alors qu'elle n'en dépend pas avec le modèle. L'ajout d'autres termes dans la série de Prony devrait permettre d'obtenir une meilleure prédiction de la dissipation.

2.2.2 Oscillations en X autour de la précharge

La figure IV.2.20 montre l'évolution de la variation d'effort en X en fonction de la fréquence, pour les deux amplitudes d'oscillation en X à savoir 0,2 et 1 mm. Les résultats sont très similaires à ceux obtenus avec les oscillations en Z : la variation d'effort prédite par le calcul éléments finis est très proche de la variation d'effort mesurée pour les oscillations à 0,2 mm, l'écart relatif variant entre 0,16 % et 6,25 %, alors qu'à 1 mm, l'écart est plus important et varie entre 35,13% et 44,92%, l'effort calculé surestimant l'effort mesuré. Concernant la dissipation, des résultats tout-à-fait similaires à ceux des oscillations en Z sont trouvés.

2.2.3 Sollicitations cyclique des butées X seules

Le dernier cas de validation ne concerne que la butée X. En effet, la pièce a d'abord été entièrement retirée de son étrier, avant d'être sollicitée en X, avec des oscillations

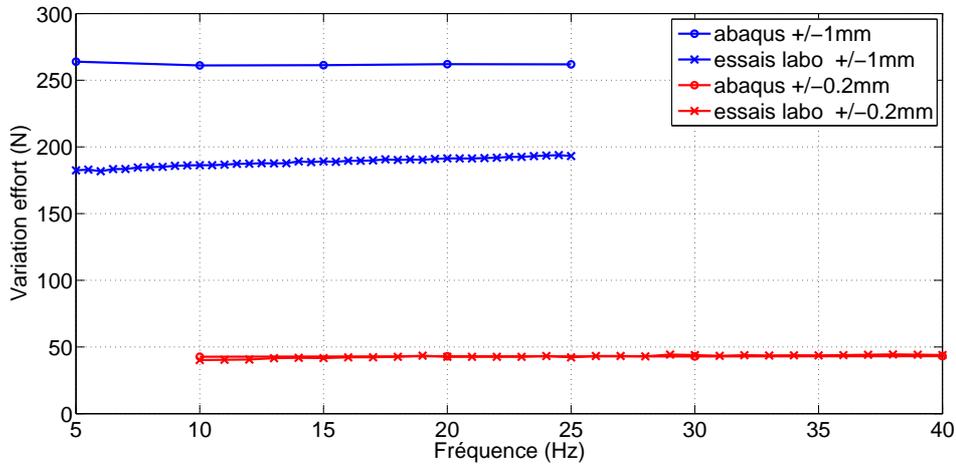


FIGURE IV.2.20 : Évolution de la variation d'effort en fonction de la fréquence lors d'oscillations en X autour de la précharge moteur, données d'essais et résultats du calcul éléments finis

d'amplitudes et de fréquences différentes. Attention cependant, la majeure partie des oscillations se font dans le vide (la pièce n'est pas sollicitée). Dans le modèle éléments finis, seules les parties où la butée est comprimée est prise en compte. La période où les oscillations sont faites à vide sera représentée par un maintien à la position initiale non déformée, tout en s'assurant que la durée est la même afin de ne pas négliger les effets de relaxation. La figure IV.2.21 en est un exemple et montre un extrait de la consigne en déplacement en fonction du temps pour un essai et pour une simulation.

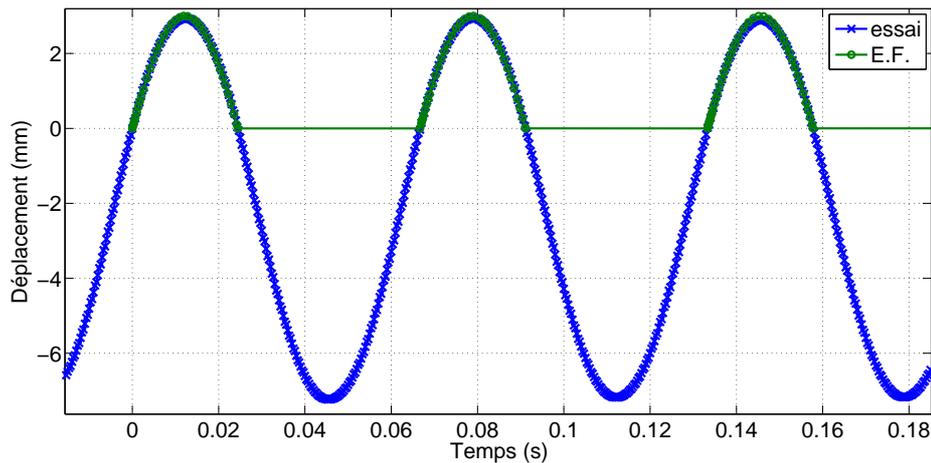


FIGURE IV.2.21 : Extrait de la consigne de déplacement en fonction du temps pour sollicitations d'une butée X seule à 15 Hz et 3 mm

Alors que de nombreux cycles sont effectués expérimentalement, 12 sont imposés pendant la simulation, plus précisément 12 oscillations entre 0 et l'amplitude maximum, et 11 plateaux de maintien à 0, soit 23 étapes de calcul. Il a été vérifié que la majeure partie de la relaxation a lieu pendant ces 12 cycles. Pour simuler ce cas de validation, seule la butée X est prise en compte, avec l'étrier et le plateau en contact avec celle-ci. L'étrier est encastré, alors que la consigne en déplacement est imposée par le plateau. La figure IV.2.22 montre une vue des trois parties prises en compte, sans chargement et au chargement maximum pour des oscillations à 15 Hz, avec écrasement de 3 mm.

Les essais ont été menés à trois fréquences différentes : 5, 10 et 15 Hz, le déplacement maximum imposé valant 1, 2 ou 3 mm. Ces 9 cas ont été simulés, et pour chaque simulation, les courbes d'effort en fonction du déplacement, d'effort en fonction du temps et de déplacement en fonction du temps pour l'essai et pour la simulation ont été tracées. Les figures IV.2.23 et IV.2.24 montrent ces courbes dans le cas d'un déplacement maximum de 2 mm à la fréquence 10 Hz, seul cas présenté ici dans un souci de synthèse. Sur la figure IV.2.23, il apparaît que le modèle sous-estime à la fois la raideur et la dissipation. Sur la figure IV.2.24, un phénomène de relaxation est observé pour le modèle et pour les essais. Il est moindre dans le cas du modèle, ce qui est lié au fait que le maximum d'effort subi lors du premier cycle est également moindre pour le modèle que pour l'essai. Dans un souci de synthèse, ces trois courbes ne sont pas présentées ici pour chacun des couples (fréquence, déplacement maximum), mais en annexe.

La figure IV.2.25 montre l'évolution du maximum d'effort en fonction du numéro de cycle, ce qui permet de comparer à la fois l'amplitude de l'effort et la relaxation pour chaque cas. Alors que la dépendance à la fréquence est plutôt faible aussi bien expérimentalement que par calcul, il est noté que le modèle sous-estime les données expérimentales pour des amplitudes de 1 et 2 mm, alors qu'elle le surestime à 3 mm. Cette différence est à relier avec la discussion sur la compressibilité du matériau, puisque certaines parties de la butée sont très confinées pour un déplacement de 3 mm (cf. figure IV.2.22).

2.2.4 Bilan

Dans cette section, les résultats du modèle éléments finis ont été comparés avec des résultats d'essais cycliques sur le tampon moteur. Concernant la dissipation, il a été vu que le modèle éléments finis sous-estime les valeurs obtenues expérimentalement. Ce résultat est à relier avec l'observation faite pour le modèle éléments finis de l'éprouvette dans le chapitre précédent, où il a été vu que l'aire de la boucle d'hystérésis diminue fortement avec la fréquence. Il est vérifié que pour des fréquences inférieures à 5 Hz, la dissipation obtenue est beaucoup plus proche des valeurs expérimentales, puis diminue fortement lorsque la fréquence augmente : à $f=1$ Hz, l'angle de déphasage vaut environ 8° , et à $f=2$ Hz, celui-ci ne vaut plus que $4,8^\circ$. Il a également été constaté, que, dans une moindre mesure, la dissipation dépend expérimentalement de l'amplitude des oscillations, alors qu'elle n'en dépend pas sur le modèle éléments finis. Ce phénomène est dû à l'utilisation de l'approche fréquentielle couplée à un mode de calcul de perturbation linéaire dans Abaqus, qui permet de diminuer le temps de calcul et de post-traitement,

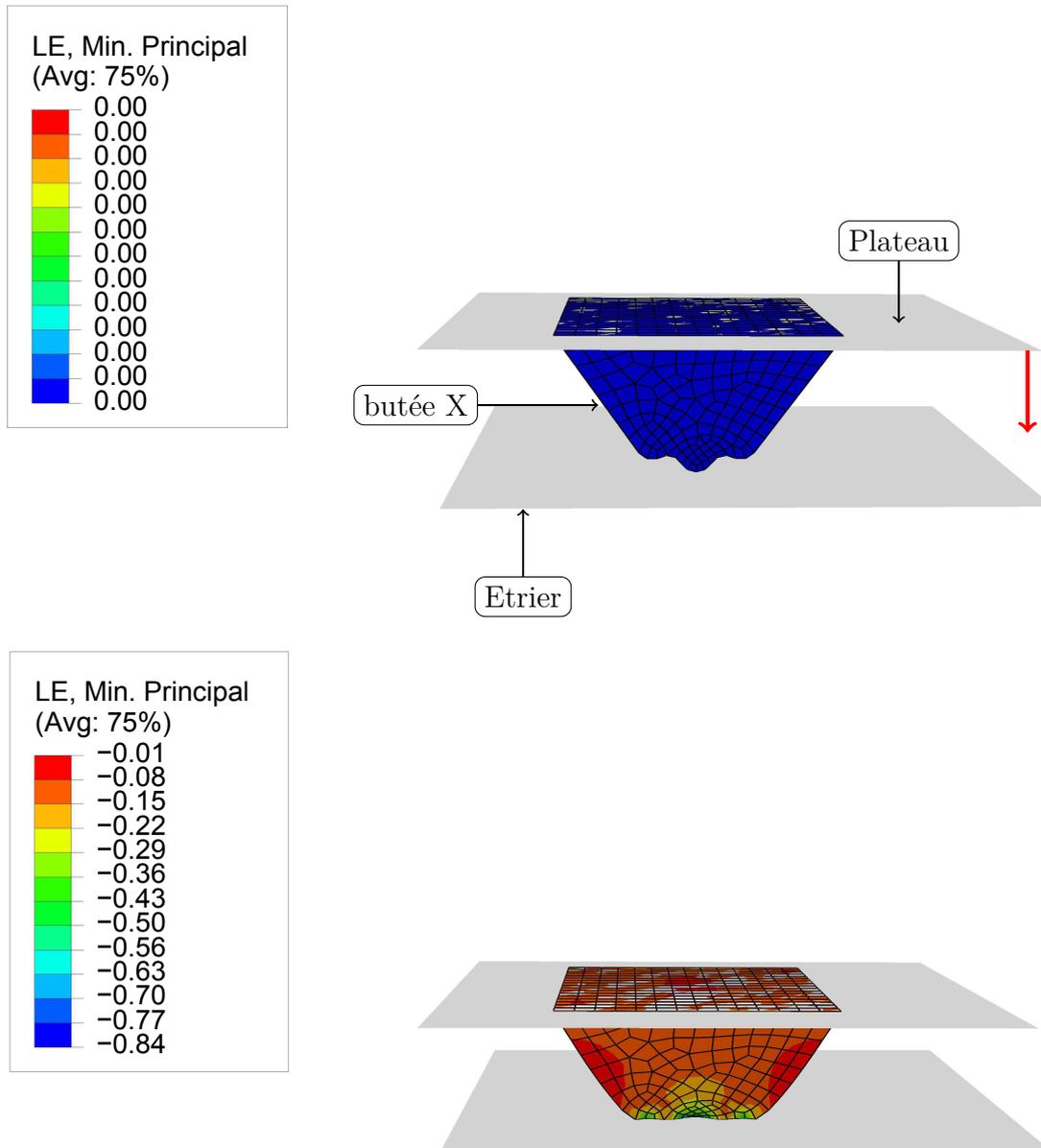


FIGURE IV.2.22 : Vue des trois parties prises en compte dans la simulation de la butée X sollicitée seule cycliquement, avant chargement (en haut) et au maximum de chargement à 15 Hz et 3 mm de déplacement (en bas)

mais n'est valable que dans le cas des petites déformations. Or, en considérant les extensions principales à -1 mm de la précharge moteur sur la figure IV.2.10, l'incrément de déformation est évalué à environ 6 %, ce qui ne correspond plus aux petites défor-

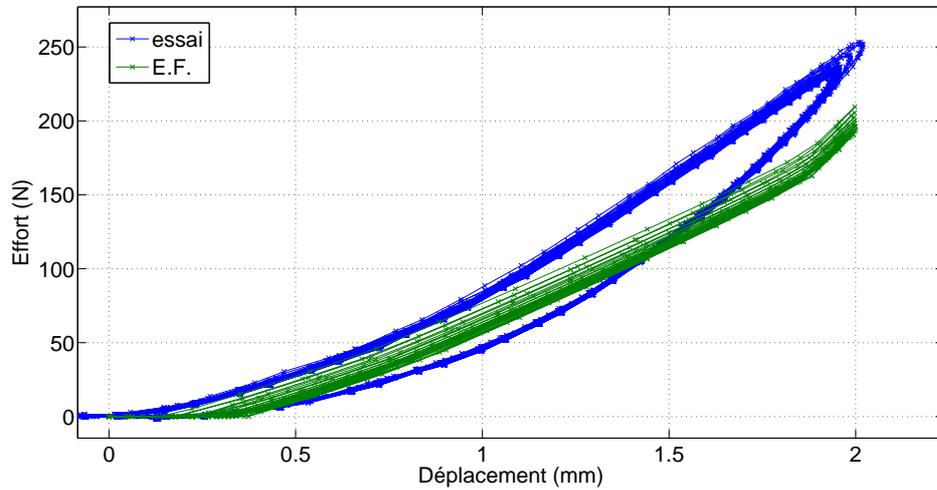


FIGURE IV.2.23 : Effort en fonction du déplacement lors d'oscillations imposées sur la butée X seule, données d'essais et résultats du calcul éléments finis.

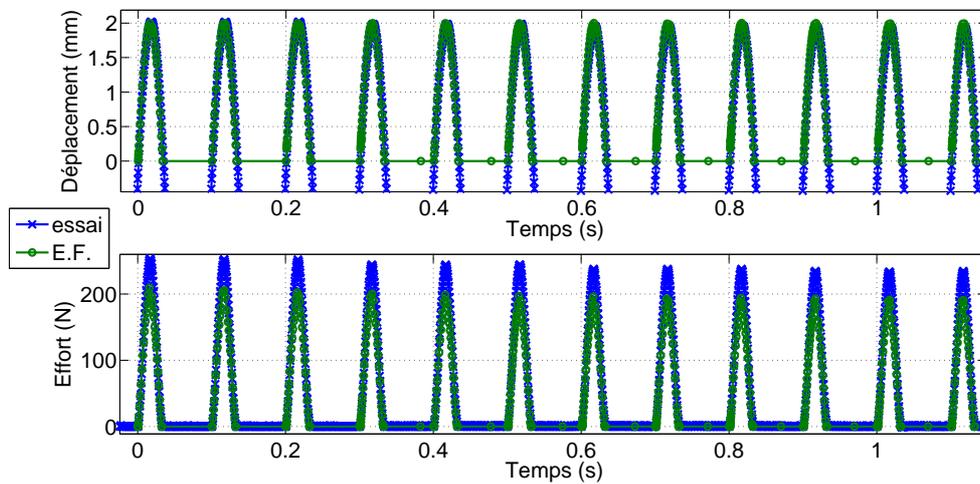


FIGURE IV.2.24 : Déplacement (en haut) et effort (en bas) en fonction du temps lors d'oscillations imposées sur la butée X seule, données d'essais et résultats du calcul éléments finis

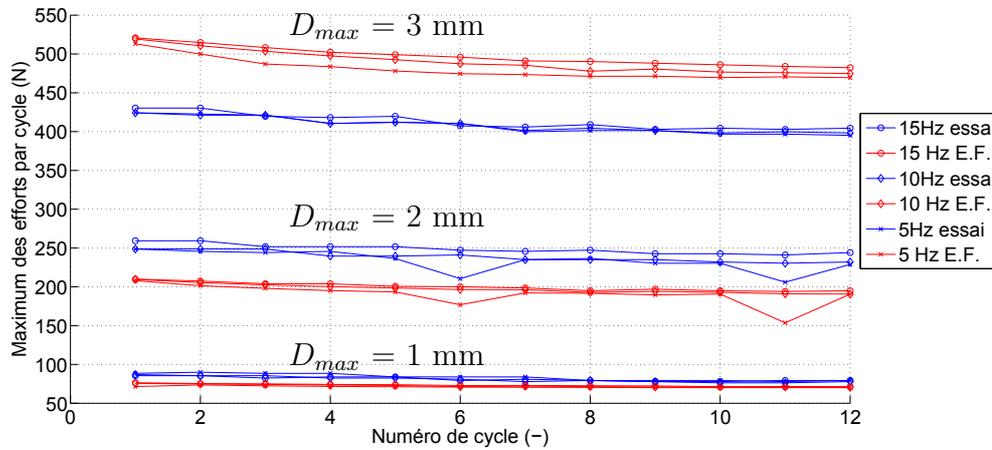


FIGURE IV.2.25 : Maximum de l'effort sur un cycle en fonction du numéro de cycle lors d'oscillations imposées sur la butée X seule, données d'essais et résultats du calcul éléments finis

mations. Effectuer le calcul avec l'approche temporelle couplée au mode de calcul *visco* permettrait de prendre en compte le comportement aux grandes déformations. Cependant, considérant les observations expérimentales à la fois sur éprouvette et sur pièce, il est probable que l'augmentation de la dissipation due à l'augmentation d'amplitude prédite par le modèle sera toujours plus faible que celle qui est observée expérimentalement. Si une modélisation plus fine est souhaitée, il faudrait alors complexifier le modèle en introduisant une dépendance supplémentaire à l'amplitude, par exemple à l'aide modèle de dérivées fractionnaires.

Concernant la prédiction des efforts maximaux, il a été montré que les résultats obtenus par le modèle dans le cas de faibles amplitudes sont satisfaisants. Ils le sont moins pour les plus grandes amplitudes. Considérons par exemple le cas de la compression en Z . Les résultats obtenus par le modèle pour une amplitude de 1 mm sont plutôt éloignés des données d'essais. Ici, deux sources d'erreurs sont à prendre en compte : l'erreur commise sur la partie à l'équilibre, et l'erreur commise sur la partie hors équilibre. L'erreur commise sur la partie à l'équilibre, majoritairement à l'origine de l'écart entre données expérimentales et issues du modèle, est héritée de l'erreur commise sur le calcul statique. En effet, à partir de la figure IV.2.7, il est possible de calculer la variation d'effort entre la précharge moteur et un point de chargement pour lequel un incrément de déplacement de 1 mm est imposé dans la direction - Z à partir de la précharge. La variation d'effort expérimentale vaut 130 N, alors que la variation d'effort obtenue via la simulation du cas statique vaut 183 N, soit un écart de 40,77% : même si, à ce niveau de chargement les valeurs prédites par le modèle et les valeurs mesurées sont encore proche, la pente de la courbe prédite par le modèle est déjà plus forte que la pente mesurée. Ainsi, une meilleure modélisation du cas statique, dont les principales améliorations ont été évoquées dans la section précédente, permettra d'améliorer notablement les résultats

cycliques. Enfin, l'erreur commise sur la partie hors équilibre se manifeste principalement par la différence de comportement en fonction de la fréquence : alors que le maximum d'effort mesuré augmente lorsque la fréquence augmente, le maximum d'effort prédit par le modèle éléments finis est quasiment constant. La prédiction de ce phénomène est améliorable en ajoutant des termes dans les séries de Prony.

Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs cas de validation auxquels correspondent des données expérimentales ont été simulés via le modèle éléments finis de la pièce, aussi bien en statique qu'en cyclique. En statique, il a été montré que le modèle est satisfaisant pour de petits déplacements, mais diverge rapidement des observations expérimentales, ce qui est dû aux déformations extrêmes et au confinement de certaines parties de la pièce. Concernant l'aspect viscoélastique, le modèle fournit des résultats satisfaisants mais améliorables. Notamment, la dissipation est sous-estimée et ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, et l'écart entre les efforts maximaux modélisés et mesurés augmente lorsque l'amplitude augmente. Pour améliorer la modélisation du comportement viscoélastique, deux solutions sont envisageables :

- Adopter un modèle de Zener généralisé, avec un certain nombre de branches, ce qui se traduit par un ajout de termes dans les séries de Prony. Cette option a l'avantage d'être simple d'utilisation puisque déjà existante dans Abaqus. Une attention particulière doit cependant être portée aux coefficients à identifier, comme il a été montré dans le chapitre précédent ;
- Implanter une loi inexistante dans Abaqus via une UMAT. Il pourrait s'agir d'un modèle de Zener généralisé où la dépendance de la partie hors équilibre est choisie à partir des essais réalisés ou d'un modèle de Poynting-Thomson. Sur le même principe que la généralisation du modèle de Zener, une généralisation du modèle de Poynting-Thomson pourrait aussi être envisagée. Cette dernière solution est intéressante, puisque le modèle de Poynting-Thomson inclut naturellement une dépendance de la totalité de la contrainte à la précharge, et l'ajout de branches permettrait de mieux prédire la dépendance à la fréquence.

Pour le cas statique, le modèle est limité par l'hypothèse d'incompressibilité sur laquelle il est basé. En effet, des parties de la pièce sont hautement comprimées et confinées pour chacun des cas de chargement :

- Les butées Z dans le cas d'un déplacement global en $+Z$;
- Une partie des bras dans le cas d'un déplacement global en $-Z$;
- Les butées X dans le cas d'un déplacement global en X .

Alors, la réponse simulée du matériau devient beaucoup plus raide qu'elle ne l'est réellement. Pour améliorer le modèle, il faudrait donc prendre en compte la compressibilité du matériau à partir d'un certain taux de déformation. Cette prise en compte est plutôt complexe sur plusieurs plans :

- Pour la modélisation, une loi de comportement compressible doit être sélectionnée ;

- Pour l'identification, une campagne expérimentale sur élastomère confiné est à mener, lors de laquelle il faudrait notamment gérer la question de l'homogénéité de la déformation ;
- Pour la simulation, la compressibilité requiert l'utilisation d'éléments non hybrides. La question se pose de savoir comment gérer la transition entre une loi incompressible avec éléments hybrides pour les petites et grandes déformations, et une loi compressible sans éléments hybrides pour les très grandes déformations avec confinement. De plus, il serait nécessaire de mailler beaucoup plus finement les zones extrêmement déformées, et ainsi limiter les discontinuités de la solution entre éléments. Or, le nombre d'éléments étant déjà élevé en l'état, il serait préférable d'être capable de remailler certaines zones pendant le calcul.

Naturellement, il serait également nécessaire d'adapter la loi de comportement viscoélastique pour prendre en compte la compressibilité lorsque le matériau est confiné.

Conclusion générale

La présente étude s'inscrit dans le cadre général de l'étude du comportement mécanique des élastomères, domaine qui fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1950. Plus précisément, l'objectif de cette thèse est de définir une méthodologie de modélisation d'une pièce élastomère issue d'un système de suspension moteur. Deux types de chargement sont considérés : les chargements quasi-statiques en grandes déformations, et les petites oscillations à une fréquence comprise entre 0,1 et 30 Hz superposée à une grande précharge quasi-statique. Notre méthodologie comporte quatre étapes, qui ont été traitées successivement dans les quatre parties de ce manuscrit.

En premier lieu, l'enveloppe des déformations subies par la pièce sous conditions d'usage a été déterminée. Pour cela, des essais sur véhicules ont permis de mesurer les déplacements de la pièce, puis un modèle éléments finis a été construit faisant intervenir une loi de comportement simple afin de calculer les déformations correspondantes. Comme l'étude concerne les grandes déformations, plusieurs mesures de la déformation existe, et il a été choisi d'utiliser deux invariants du tenseur des déformations de Hencky, dont l'avantage majeur est qu'ils permettent de quantifier l'amplitude de déformation et sa multiaxialité indépendamment l'une de l'autre. Cette première étape a fait apparaître clairement qu'il est primordial de prendre en compte les grandes déformations et la multiaxialité dans l'étude.

Ensuite, des essais de traction-torsion ont été mis en place pour caractériser le matériau. En effet, ces essais permettent d'imposer différents modes de déformation avec une unique géométrie d'éprouvette et une unique machine d'essais. De plus, une éprouvette a été spécialement conçue pour que les amplitudes de déformation imposées sur éprouvette soit de l'ordre de celles que subit la pièce. La géométrie de l'éprouvette n'étant pas parfaitement cylindrique, les relations entre les déplacements et angles imposés par la machine et l'état de déformation dans la zone cylindrique de l'éprouvette ont été déterminées grâce à des essais de stéréo-corrélation d'images. Grâce à ces relations, des essais à déformation imposée ont pu être menés, et les efforts et couples résultants ont été mesurés. La difficulté consiste alors à parvenir à calculer des grandeurs indépendantes de la géométrie de l'éprouvette, c'est-à-dire des contraintes ou des énergies de déformation à partir de ces efforts et couples. Pour plusieurs chargements quasi-statiques particuliers, ces grandeurs ont pu être calculées. Pour les chargements dynamiques, des grandeurs équivalentes ont été introduites, à partir desquelles des modules de conservation et de perte ont été calculés.

À partir de ces résultats d'essais, le comportement du matériau a été modélisé. Après avoir comparé plusieurs modèles, une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin à trois paramètres a été choisie, et ses paramètres identifiés à partir des résultats d'essais quasi-statiques. Pour modéliser le comportement du matériau soumis à de petites oscillations superposée à une grande précharge statique, deux modèles viscoélastiques ont été linéarisés. La première linéarisation, classique, ne peut prendre en compte l'influence de la précharge sur la contrainte hors équilibre sans qu'une loi d'évolution complexe soit choisie. La seconde linéarisation, plus originale, permet au contraire de prendre en compte l'influence de la précharge sur toute la contrainte, avec une loi d'évolution simple. Cependant, ce second modèle est plus complexe, comporte plus de paramètres et ne permet pas d'utiliser la loi de comportement hyperélastique identifiée précédemment.

Il est donc choisi d'utiliser la première solution dans le modèle éléments finis de la pièce. Ce modèle, combiné à la loi hyperélastique déjà identifiée n'existe pas tel quel dans le logiciel commercial utilisé, mais est très proche d'un modèle déjà implanté. Par soucis de simplicité, il a été choisi d'utiliser les modèles déjà existants, et donc d'adapter les paramètres du modèle. Finalement, des simulations avec le modèle éléments finis ainsi construit ont été comparées avec des essais sur pièce, aussi bien en statique qu'en dynamique.

Dans ce travail, les contributions industrielles majeures sont :

- **Une méthodologie de modélisation d'une pièce de suspension moteur.** Cette méthodologie est applicable à toutes les pièces de suspension moteur. La figure [IV.2.26](#) montre les différentes étapes de cette méthodologie. Alors que les essais de traction-torsion sur un matériau proche de celui utilisé pour la pièce permet de mener une caractérisation rigoureuse, il pourrait être envisagé de simplifier cette étape en effectuant seulement quelques essais sur des éprouvettes extraites de la pièce, ou encore d'identifier les paramètres directement à partir du modèle éléments finis, en comparant ces résultats avec des essais sur pièce en quasi-statique, puis en dynamique ;
- **Une meilleure compréhension de la pièce et de ses chargements.** Le post-traitement original des déformations en termes d'invariants du tenseur de Hencky permet de déterminer quelles sont les amplitudes et modes de déformation de chacune des parties de la pièce. Alors que le point de vue habituel est celui du système de suspension, pour lequel les chargements globaux sont toujours considérés, notre point de vue est centré sur le matériau, pour lequel les déformations sont considérées. Par exemple, pour le premier point de vue, l'application d'un chargement dans la direction $-Z$ du repère véhicule correspond à de la compression uniaxiale, alors que pour le second point de vue cela correspond à de la compression et du cisaillement, dans des proportions différentes selon la partie de la pièce considérée.

D'un point de vue scientifique, les contributions majeures sont :

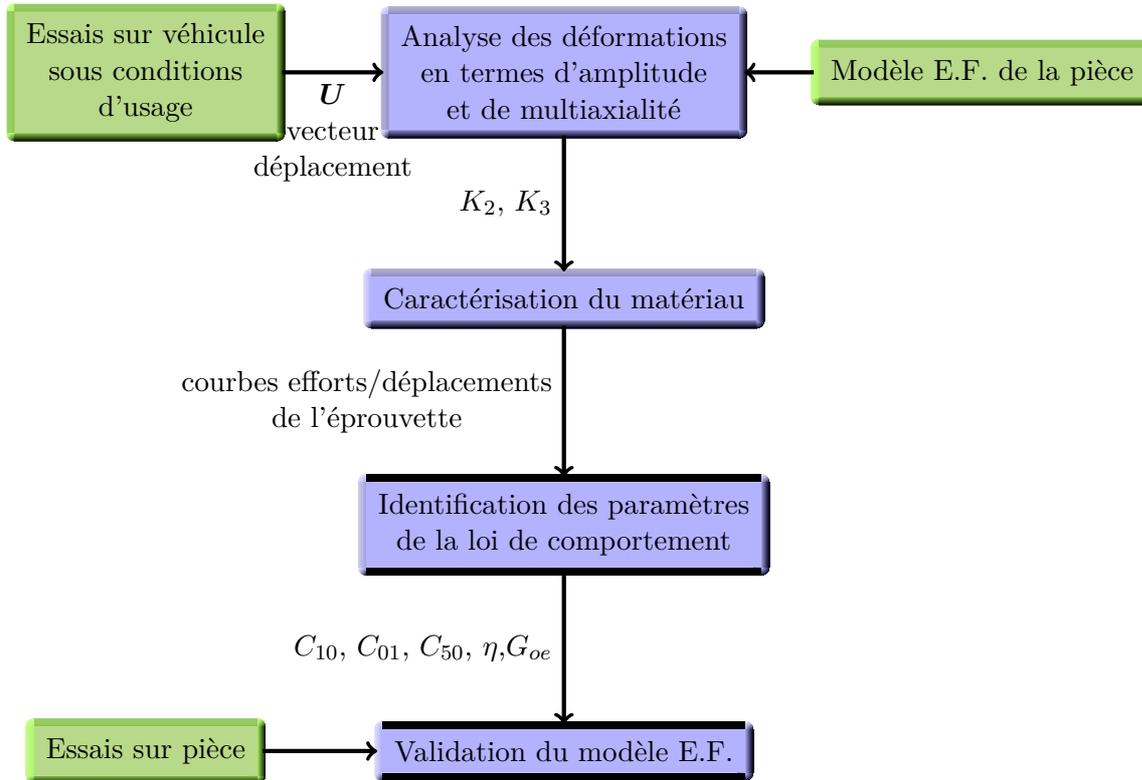


FIGURE IV.2.26 : Méthodologie de modélisation d'une pièce de suspension moteur

- **La comparaison de dérivées de l'énergie de déformations par rapport à plusieurs grandeurs mécaniques.** Grâce à la méthode de Penn et Kearsley (1976), des dérivées de l'énergie de déformation par rapport à plusieurs grandeurs mécaniques ont été calculées à partir des efforts et couples mesurés lors d'essais quasi-statiques de pré-extension suivie d'une torsion. Il a été montré que l'utilisation, pourtant courante, des invariants des tenseurs des dilatations de Cauchy-Green pour calculer ces dérivées n'est pas pertinente lorsque les déformations sont faibles, et que les extensions principales sont plus adaptées ;
- **Le tracé de contraintes expérimentales pour des essais de traction-torsion quasi-statiques.** Alors que le calcul de contraintes à partir d'efforts mesurés est direct pour certains chargements, comme la traction/compression uniaxiale ou biaxiale, dans le cas de la traction-torsion, cette tâche devient complexe due à la dépendance de la contrainte aux coordonnées du point considéré. À partir du calcul des dérivées de l'énergie de déformation, les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy ont été calculées au rayon extérieur du cylindre, dans le cas d'essais quasi-statiques de pré-extension suivie d'une torsion. À notre connaissance, les contraintes générées par des essais de traction-torsion en grandes déformations pour un matériau hyperélastique incompressible n'ont

- jamais été présentées auparavant ;
- **Une linéarisation originale de modèles viscoélastiques.** Alors que la plupart des auteurs qui s'intéressent à la linéarisation de modèles viscoléastiques optent pour des modèles basés sur la décomposition de la contrainte en une partie à l'équilibre et une partie hors équilibre, il a été choisi de linéariser un modèle différent, à savoir le modèle de Poynting-Thomson. Dans le cas de l'approche classique, pour obtenir une influence (artificielle) de la précharge sur la contrainte hors équilibre, il est nécessaire d'introduire une viscosité dépendante de la déformation. Avec la linéarisation proposée du modèle de Poynting-Thomson, la précharge a une influence naturelle sur l'ensemble de la contrainte, et ce avec un paramètre de viscosité constant ;
 - **Un post-traitement des essais dynamiques adapté au cas d'une précharge multiaxiale.** Dans ce cas, le calcul de contraintes est jugé trop complexe, et des grandeurs équivalentes sont calculées. À partir de ces grandeurs, des modules de conservation et de perte classiques sont calculés. L'objectif est d'étudier l'influence de la précharge sur ces grandeurs. Dans ce contexte, l'originalité de notre approche consiste à tracer ces grandeurs non pas en fonction des déformations induites par la précharge, mais en fonction de la raideur statique de la précharge. Dans un cadre de modélisation simple du comportement du matériau sous oscillations superposées à une précharge, il pourrait notamment être intéressant de pouvoir relier raideur statique et modules dynamiques simplement. Il a été observé que le tracé de la grandeur $E'/E_{statique}^2$ en fonction de $E_{statique}$ est représenté par une courbe monotone, pour laquelle il n'a pas été trouvé d'interprétation à ce jour.

À la lumière des travaux effectués, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. D'un point de vue industriel, comme évoqué dans la conclusion de la dernière partie, il serait d'abord nécessaire de prendre en compte la compressibilité du matériau lorsque celui-ci est fortement confiné et d'adapter le maillage, ainsi que d'augmenter le nombre de branches du modèle de Zener, et donc le nombre de termes dans les séries de Prony. Lorsque le modèle éléments finis aura été affiné, il sera alors possible d'extraire des courbes force/déplacement du modèle éléments finis de la pièce afin de pouvoir définir les raideurs globales de son macro-élément. En parallèle à la thèse, le matériau constituant les deux autres types de suspension moteur, à savoir le tampon boîte et la biellette de reprise de couple a été caractérisé dans le cadre d'un projet d'option à l'École Centrale de Nantes. Il reste donc à terminer d'appliquer la méthodologie décrite précédemment à ces deux pièces pour obtenir leurs raideurs globales et ainsi pouvoir compléter le modèle multicorps du système de suspension moteur.

D'un point de vue scientifique, il faudrait parvenir à interpréter les courbes de contraintes et de dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux extensions principales en fonction, par exemple, des extensions principales. Celles-ci présentent une pente élevée aux faibles déformations, puis un maximum et une décroissance. De plus, parvenir à modéliser ce phénomène observé localement au rayon extérieur du cylindre permet-

trait peut-être d'obtenir une meilleure modélisation du comportement global (efforts et couples). Ensuite, il serait intéressant d'exploiter pleinement le post-traitement des essais dynamiques, avec la relation entre E' et $E_{statique}$. Pour cela, il faudra obtenir des données d'essais dynamiques plus précises (par exemple en DMA), et observer si seule la courbe $\ln(E'/E_{statique}^2)$ en fonction de $\ln(E_{statique})$ est linéaire, ou bien si $\ln(E')$ en fonction de $\ln(E_{statique})$ l'est aussi. Dans le premier cas, il faudrait parvenir à déterminer à quoi correspond cette grandeur. Dans le second cas, on pourrait envisager de modéliser le comportement d'un élastomère soumis à des oscillations sous précharge statique par une loi de comportement hyperélastique et par une simple relation entre raideur statique et modules de conservation et de perte.

Références bibliographiques

- AMIN, A., LION, A., SEKITA, S. et OKUI, Y. (2006). Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity*, 22(9):1610–1657. *cité page 197 et 230*
- AZOUG, A., THORIN, A., NEVIÈRE, R., PRADEILLES-DUVAL, R.-M. et CONSTANTINESCU, A. (2013). Influence of orthogonal prestrain on the viscoelastic behaviour of highly-filled elastomers. *Polymer Testing*, 32(2):375–384. *cité page 101*
- BAKER, M. et ERICKSEN, J. (1954). Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluids. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 44:33–35. *cité page 158*
- BALL, J. M. (1976). Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 63(4):337–403. *cité page 157*
- BECKER, G. W. (1967). On the phenomenological description of the nonlinear deformation of rubberlike high polymers. *Journal of Polymer Science*, C16:2893–2903. *cité page 73 et 87*
- BERNSTEIN, B., KEARSLEY, E. A. et ZAPAS, L. J. (1963). A study of stress relaxation with finite strain. *Transactions of The Society of Rheology*, 7(1):391–410. *cité page 177*
- BILLINGTON, E. W. (1986). The Poynting effect. *Acta Mechanica*, 58(1-2):19–31. *cité page 81 et 120*
- BLATZ, P. J. et KO, W. L. (1962). Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6(1):223–251. *cité page 35*
- BONET, J. (2001). Large strain viscoelastic constitutive models. *International Journal of Solids and Structures*, 38(17):2953–2968. *cité page 225*
- BOUASSE, H. et CARRIÈRE, Z. (1903). Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. In *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, volume 5, pages 257–283. Université Paul Sabatier. *cité page 110*

- BOYCE, M. C. et ARRUDA, E. M. (2000). Constitutive models of rubber elasticity: a review. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(3):504–523. cité page 73, 131, 151, et 153
- CHAGNON, G. (2003). *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. cité page 110
- CHEVALIER, L., CALLOCH, S., HILD, F. et MARCO, Y. (2001). Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20(2):169–187. cité page 56
- CHEVALIER, L. et MARCO, Y. (2002). Tools for multiaxial validation of behavior laws chosen for modeling hyper-elasticity of rubber-like materials. *Polymer Engineering and Science*, 42(2):280–298. cité page 73 et 87
- CHO, J.-H. et YOUN, S.-K. (2006). A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation considering the Payne effect. *Archive of Applied Mechanics*, 75(4-5):275–288. cité page 100, 135, 136, 138, 142, et 143
- CHRISTENSEN, R. M. (1980). A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers. *Journal of Applied Mechanics*, 47:762–768. cité page 177
- CIARLET, P. G. et KESAVAN, S. (1983). *Lectures on Three-Dimensional Elasticity*. Springer Berlin. cité page 158
- CLOUD, G. (1998). *Optical Methods of Engineering Analysis*. Cambridge University Press. cité page 56
- COLEMAN, B. D. et NOLL, W. (1959). On the thermostatics of continuous media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4(1):97–128. cité page 157 et 158
- COLEMAN, B. D. et NOLL, W. (1961). Foundations of linear viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*, 33(2):239–249. cité page 177, 178, et 226
- COLEMAN, B. D. et NOLL, W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13(1):167–178. cité page 184 et 186
- CRISCIONE, J. C. (2003). Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing. *Journal of Elasticity*, 70(1-3):129–147. cité page 73, 74, 86, 87, et 89
- CRISCIONE, J. C., HUMPHREY, J. D., DOUGLAS, A. S. et HUNTER, W. C. (2000). An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12):2445–2465. cité page 22, 76, et 77
- CRISFIELD, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers and Structures*, 13(1):55–62. cité page 16

- DE TOMMASI, D. et PUGLISI, G. (2007). Mullins effect for a cylinder subjected to combined extension and torsion. *Journal of Elasticity*, 86(1):85–99. *cité page 37*
- DIANI, J., BRIEU, M., VACHERAND, J.-M. et REZGUI, A. (2004). Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials. *Mechanics of Materials*, 36(4):313 – 321. *cité page 174*
- DIANI, J., FAYOLLE, B. et GILORMINI, P. (2009). A review on the Mullins effect. *European Polymer Journal*, 45(3):601–612. *cité page 110*
- DOI, M. et SEE, H. (1996). *Introduction to Polymer Physics*. Clarendon Press Oxford. *cité page 153*
- DUTTA, N. K. et TRIPATHY, D. (1990). Influence of large static deformations on the dynamic mechanical properties of bromobutyl rubber vulcanizates: Part I. Effect of carbon black loading. *Polymer Testing*, 9(1):3–13. *cité page 100, 135, 142, et 143*
- EDWARDS, S. et VILGIS, T. A. (1988). The tube model theory of rubber elasticity. *Reports on Progress in Physics*, 51(2):243. *cité page 153*
- FLORY, P. J. et REHNER JR, J. (1943). Statistical mechanics of cross-linked polymer networks I. Rubberlike elasticity. *Journal of Chemical Physics*, 11(11):512–520. *cité page 153*
- FUKAHORI, Y. et SEKI, W. (1991). Molecular behaviour of elastomeric materials under large deformation: 1. Re-evaluation of the Mooney-Rivlin plot. *Polymer*, 33(3):502–508. *cité page 73, 82, 87, et 131*
- GENT, A. (1996). A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 69(1):59–61. *cité page 154*
- GENT, A. et RIVLIN, R. (1952). Experiments on the mechanics of rubber II: the torsion, inflation and extension of a tube. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 65(7):487. *cité page 36*
- GENT, A. et THOMAS, A. (1958). Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *Journal of Polymer Science*, 28(118):625–628. *cité page 154*
- GREEN, A. E. et RIVLIN, R. S. (1957). The mechanics of non-linear materials with memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1):1–21. *cité page 177*
- GREEN, M. S. et TOBOLSKY, A. V. (1946). A new approach for the theory of relaxing polymeric media. *Journal of Chemical Physics*, 14:87–112. *cité page 178*
- GUTH, E. et MARK, H. (1934). Internal molecular statistics, especially in chain molecules. *Monatshefte für Chemie*, 65:93–121. *cité page 152*
- HADDAD, Y. M. (1988). On the theory of the viscoelastic solid. *Res Mechanica*, 25:225–259. *cité page 176*

- HAINES, D. et WILSON, W. (1979). Strain-energy density function for rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):345–360. cité page 73
- HAN, W. H., HORKA, F. et MCKENNA, G. B. (1999). Mechanical and swelling behaviors of rubber: a comparison of some molecular models with experiment. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4(2):139–167. cité page 73 et 131
- HART-SMITH, L. (1966). Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 17(5):608–626. cité page 154
- HARTMANN, S. (2001a). Numerical studies on the identification of the material parameters of Rivlin’s hyperelasticity using tension-torsion tests. *Acta Mechanica*, 148(1-4):129–155. cité page 37, 87, 152, et 159
- HARTMANN, S. (2001b). Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44):7999–8018. cité page 152, 155, 156, et 158
- HARTMANN, S. et NEFF, P. (2003). Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and Structures*, 40(11):2767–2791. cité page 158
- HASSANI, S. (1997). *Validation et formulation variationnelle d’une loi de comportement viscoélastique non linéaire en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. cité page 176
- HAUPT, P. et LION, a. (2002). On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials. *Acta Mechanica*, 159(1-4):87–124. cité page 179
- HAUPT, P., LION, A. et BACKHAUS, E. (2000). On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters. *International Journal of Solids and Structures*, 37(26):3633–3646. cité page 188 et 225
- HAUPT, P. et SEDLAN, K. (2001). Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modelling. *Archive of Applied Mechanics*, 71(2-3):89–109. cité page 36, 37, et 197
- HÄUSLER, K. (1983). On the viscoelastic properties of prestrained rubber. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 34(1):25–50. cité page 179
- HEINRICH, G. et KALISKE, M. (1997). Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. *Computational and Theoretical Polymer Science*, 7(3):227–241. cité page 153
- HILL, R. (1970). Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):457–472. cité page 158

- HÖFER, P. et LION, A. (2009). Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(3):500–520. *cité page 97, 99, 135, et 138*
- HOLZAPFEL, G. A. (1996). On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3903–3926. *cité page 197 et 225*
- HOLZAPFEL, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A continuum approach for engineering*. J. Wiley and Sons, Chichester. *cité page 21, 38, 39, 151, 173, 183, 188, et 190*
- HORGAN, C. O. et SACCOMANDI, G. (1999). Simple torsion of isotropic, hyperelastic, incompressible materials with limiting chain extensibility. *Journal of Elasticity*, 56(2):159–170. *cité page 122 et 123*
- HUBER, N. et TSAKMAKIS, C. (2000a). Discussion of finite deformation viscoelasticity laws with reference to torsion loading. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 12(5):303–323. *cité page 37*
- HUBER, N. et TSAKMAKIS, C. (2000b). Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials*, 32(1):1–18. *cité page 179, 184, 196, et 197*
- HUMPHREY, J. D., BARAZOTTO JR, R. L. et HUNTER, W. C. (1992). Finite extension and torsion of papillary muscles: a theoretical framework. *Journal of Biomechanics*, 25(5):541–547. *cité page 73*
- JAMES, H. M. et GUTH, E. (1943). Theory of the elastic properties of rubber. *Journal of Chemical Physics*, 11(10):455–481. *cité page 153*
- JAMES, H. M. et GUTH, E. (1947). Theory of the increase in rigidity of rubber during cure. *Journal of Chemical Physics*, 15(9):669–683. *cité page 153*
- JONES, D. F. et TRELOAR, L. R. G. (1975). The properties of rubber in pure homogeneous strain. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8:1285–1304. *cité page 73 et 87*
- KAKAVAS, P., GIANNOPOULOS, G. et VASSILOPOULOS, A. (2008). Prediction of the twisting moment and axial force in a circular rubber cylinder for combined extension and torsion based on the logarithmic strain approach. *Journal of Applied Polymer Science*, 110(2):1028–1033. *cité page 37*
- KALISKE, M. et HEINRICH, G. (1999). An extended tube-model for rubber elasticity: statistical-mechanical theory and finite element implementation. *Rubber Chemistry and Technology*, 72(4):602–632. *cité page 153 et 159*
- KALISKE, M. et ROTHERT, H. (1997). Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, 19(3):228–239. *cité page 225*

- KANNER, L. M. et HORGAN, C. O. (2008). On extension and torsion of strain-stiffening rubber-like elastic circular cylinders. *Journal of Elasticity*, 93(1):39–61. cité page 37
- KAWABATA, S. et KAWAI, H. (1977). Strain energy density functions of rubber vulcanizates from biaxial extension. In *Molecular Properties*, volume 24 de *Advances in Polymer Science*, pages 89–124. Springer Berlin Heidelberg. cité page 35, 73, et 87
- KAWABATA, S., MATSUDA, M., TEI, K. et KAWAI, H. (1981). Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate. *Macromolecules*, 14:154–162. cité page 72 et 152
- KAYE, A. (1962). Non-newtonian flow in incompressible fluids. College of Aeronautics, Cranford, U.K., Note No. 134. cité page 177
- KIM, B.-K. et YOUN, S.-K. (2001). A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation. *Archive of Applied Mechanics*, 71(11):748–763. cité page 100, 135, 142, 143, et 179
- KUHN, W. et GRÜN, F. (1942). Beziehungen zwischen elastischen konstanten und dehnungsdoppelbrechung hochelastischer stoffe. *Kolloid-Zeitschrift*, 101(3):248–271. cité page 152 et 153
- LAMBERT-DIANI, J. et REY, C. (1999). New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 18(6):1027–1043. cité page 73 et 87
- LECTEZ, A.-S., VERRON, E. et HUNEAU, B. (2014). How to identify a hyperelastic constitutive equation for rubber-like materials with multiaxial tension/torsion experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. cité page 72
- LEJEUNES, S., NGUYEN VAN, T., BOUKAMEL, A. et EYHERAMENDY, D. (2012). Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads. *Computers and Structures*, 96:46–53. cité page 179 et 188
- LIANIS, G. (1965). Application of irreversible thermodynamics in finite viscoelastic deformations. *Journal of Applied Mechanics*, 32:623–629. cité page 179 et 188
- LION, A. (1996). A constitutive model for carbon black filled rubber: experimental investigations and mathematical representation. *Continuum Mechanics and Thermo-dynamics*, 8(3):153–169. cité page 203
- LION, A. (1997). On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(11):1805–1834. cité page 156
- LION, A. (1998). Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: experiments and theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5):895–930. cité page 188 et 225

- LION, A., RETKA, J. et RENDEK, M. (2009). On the calculation of predeformation-dependent dynamic modulus tensors in finite nonlinear viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 36(6):653–658. *cité page 138*
- LUBLINER, J. (1985). A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 12:93–99. *cité page 178*
- LUO, W., HU, X., WANG, C. et LI, Q. (2010). Frequency-and strain-amplitude-dependent dynamical mechanical properties and hysteresis loss of cb-filled vulcanized natural rubber. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(2):168–174. *cité page 97, 135, et 138*
- MACHADO, G., FAVIER, D. et CHAGNON, G. (2012). Membrane curvatures and stress-strain full fields of axisymmetric bulge tests from 3D-DIC measurements. theory and validation on virtual and experimental results. *Experimental Mechanics*, 52(7):865–880. *cité page 36*
- MARCKMANN, G. et VERRON, E. (2006). Comparison of hyperelastic models for rubberlike materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79:835–858. *cité page 35, 87, 151, et 152*
- MARS, W. et FATEMI, A. (2004). A novel specimen for investigating the mechanical behavior of elastomers under multiaxial loading conditions. *Experimental Mechanics*, 44(2):136–146. *cité page 36 et 66*
- MARTINEZ, J.-M., BOUKAMEL, A., MÉO, S. et LEJEUNES, S. (2011). Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber: Experimental characterization and numerical modeling. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30(6):1028–1039. *cité page 225*
- MCKENNA, G. et ZAPAS, L. (1983). Experiments on the small-strain behaviour of crosslinked natural rubber: 1. Torsion. *Polymer*, 24(11):1495–1501. *cité page 36*
- MCKENNA, G. B. et ZAPAS, L. J. (1985). The time dependent strain potential function for a polymeric glass. *Polymer*, 26(4):543 – 550. *cité page 73 et 90*
- MCKENNA, G. B. et ZAPAS, L. J. (1986). On the small strain behavior of peroxide cross-linked natural rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 59(4):130–137. *cité page 87*
- MEINECKE, E. et MAKSIN, S. (1980). Influence of large static deformation on the dynamic properties of polymers. *Colloid and Polymer Science*, 258(5):556–563. *cité page 100, 142, et 143*
- MERCKEL, Y., BRIEU, M., DIANI, J. et CAILLARD, J. (2012). A mullins softening criterion for general loading conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(7):1257 – 1264. *cité page 174*

- MIEHE, C. et KECK, J. (2000). Superimposed finite elastic–viscoelastic–plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(2): 323–365. cité page 197
- MOONEY, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9):582–592. cité page 154
- MORMAN, K. N. et NAGTEGAAL, J. C. (1983). Finite element analysis of sinusoidal small-amplitude vibrations in deformed viscoelastic solids. part I: Theoretical development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(7):1079–1103. cité page 179
- MORREY, C. B. *et al.* (1952). Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific Journal of Mathematics*, 2(1):25–53. cité page 157
- MULLINS, L. (1948). Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 21(2):281–300. cité page 110
- OBATA, Y., KAWABATA, S. et KAWAI, H. (1970). Mechanical properties of natural rubber vulcanizates in finite deformation. *Journal of Polymer Science Part A-2: Polymer Physics*, 8(6):903–919. cité page 73, 82, et 87
- OGDEN, R. et CHADWICK, P. (1972). On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(2):77–90. cité page 160
- OGDEN, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326:565–584. cité page 75, 154, et 158
- OGDEN, R. W., SACCOMANDI, G. et SGURA, I. (2004). Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 34(6):484–502. cité page 22, 75, 159, et 164
- ORTEU, J.-J. (2009). 3-D computer vision in experimental mechanics. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(3):282–291. cité page 56
- PAYNE, A. et WHITTAKER, R. (1971). Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chemistry and Technology*, 44(2):440–478. cité page 138
- PAYNE, A. R. (1962a). The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates. part I. *Journal of Applied Polymer Science*, 6(19):57–63. cité page 97 et 135
- PAYNE, A. R. (1962b). The dynamic properties of carbon black loaded natural rubber vulcanizates. part II. *Journal of Applied Polymer Science*, 6(21):368–372. cité page 97 et 135

- PENN, R. W. et KEARSLEY, E. A. (1976). The scaling law for finite torsion of elastic cylinders. *Transactions of the Society of Rheology*, 20(2):227–238. *cité page 36, 73, 74, 82, 87, 89, 90, 123, 125, et 269*
- PIPKIN, A. C. (1964). Small finite deformations of viscoelastic solids. *Reviews of Modern Physics*, 36:1034–1041. *cité page 179*
- PLEŠEK, J. et KRUISOVÁ, A. (2006). Formulation, validation and numerical procedures for Hencky’s elasticity model. *Computers and Structures*, 84(17):1141–1150. *cité page 37*
- POYNTING, J. (1909). On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 82(557):546–559. *cité page 120*
- POYNTING, J. H. (1912). On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distortional waves in steel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 86(590):534–561. *cité page 120*
- REESE, S. et GOVINDJEE, S. (1998). A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 35(26):3455–3482. *cité page 197*
- RENDEK, M. et LION, A. (2010). Amplitude dependence of filler-reinforced rubber: Experiments, constitutive modelling and FEM–Implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 47(21):2918–2936. *cité page 97, 99, 100, 135, 136, 138, 142, 143, et 203*
- RIVLIN, R. (1948). Some topics in finite elasticity I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 240:459–490. *cité page 154*
- RIVLIN, R. S. et SAUNDERS, D. W. (1951). Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(865):251–288. *cité page 35, 36, 37, 73, 87, 122, 123, 124, et 125*
- SAAD, P. (2003). *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. *cité page 188*
- SASSO, M., PALMIERI, G., CHIAPPINI, G. et AMODIO, D. (2008). Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods. *Polymer Testing*, 27(8):995–1004. *cité page 36*
- SEDLAN, K. (2001). Viskoelastisches materialverhalten von elastomerverkstoffen: Experimentelle untersuchung und modellbildung. Institut für Mechanik, Kassel, Universität Gesamthochschule Kassel. Dr.-Ing. *cité page 121*

- SENDOVA, T. et WALTON, J. R. (2005). On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(2):195 – 212. *cité page 22 et 76*
- SIDOROFF, F. (1974). Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *Journal de Mécanique*, 13:679–713. *cité page 178*
- STEINMANN, P., HOSSAIN, M. et POSSART, G. (2012). Hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and suitability for Treloar’s data. *Archive of Applied Mechanics*, 82(9):1183–1217. *cité page 35*
- SUPHADON, N. (2010). *The viscoelastic properties of rubber under a complex loading*. Thèse de doctorat, University of London, Queen Mary. *cité page 101*
- SUPHADON, N., THOMAS, A. et BUSFIELD, J. (2010). The viscoelastic behaviour of rubber under a small simple shear oscillation superimposed on a large pure shear. *Polymer Testing*, 29(4):440–444. *cité page 101*
- SUTTON, M., YAN, J., TIWARI, V., SCHREIER, H. et ORTEU, J. (2008). The effect of out-of-plane motion on 2d and 3d digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10):746–757. *cité page 56*
- THORIN, A., AZOUG, A. et CONSTANTINESCU, A. (2012). Influence of prestrain on mechanical properties of highly-filled elastomers: Measurements and modeling. *Polymer Testing*, 31(8):978–986. *cité page 100*
- TRELOAR, L. (1946). The statistical length of long-chain molecules. *Transactions of the Faraday Society*, 42:77–82. *cité page 153*
- TRELOAR, L. et RIDING, G. (1979). A non-gaussian theory for rubber in biaxial strain. I. Mechanical properties. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 369(1737):261–280. *cité page 153*
- TRELOAR, L. R. G. (1944a). Strains in inflated rubber sheet, and the mechanism of bursting. *Transactions of the Institution of the Rubber Industry*, 19:201–212. *cité page 36*
- TRELOAR, L. R. G. (1944b). Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Transactions of the Faraday Society*, 40:59–70. *cité page 72, 141, et 152*
- TRELOAR, L. R. G. (1948). Stresses and birefringence in rubber subjected to general homogeneous strain. *Proceedings of the Physical Society*, 60(2):135. *cité page 35*
- TRELOAR, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford University Press, Oxford. *cité page 73, 87, et 153*
- TRUESDELL, C. et NOLL, W. (1965). The Non-Linear Field Theories of Mechanics III/3. *Handbuch der Physik*. *cité page 120*

- TSAKALAKOS, T. (1981). The bulge test: A comparison of the theory and experiment for isotropic and anisotropic films. *Thin Solid Films*, 75(3):293–305. *cité page 36*
- VALANIS, K. et LANDEL, R. (1967). The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38(7):2997–3002. *cité page 154*
- VAUTRIN, A., LEE, J. R., MOLIMARD, J. et SURREL, Y. (2002). Full-field optical techniques: Applications to strain measurement and mechanical identification. *In 10th European Conference on Composite Materials (ECCM10)*. *cité page 56*
- VERRON, E. (2003). Modélisation du comportement des structures et des matériaux elastomères. H.D.R.- Ecole Centrale de Nantes. *cité page 151 et 176*
- WANG, M. C. et GUTH, E. (1952). Statistical theory of networks of non-gaussian flexible chains. *Journal of Chemical Physics*, 20(7):1144–1157. *cité page 153*
- WARD, I. M. (1983). *Mechanical Properties of Solid Polymers*. John Wiley and Sons Ltd, 2nd édition. *cité page 96, 97, et 177*
- WINEMAN, A. (2005). Some results for generalized neo-Hookean elastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(2):271–279. *cité page 121 et 123*
- WINEMAN, A. S. et RAJAGOPAL, K. R. (2000). *Mechanical Response of Polymers. An introduction*. Cambridge University Press, Cambridge. *cité page 176 et 178*
- WOLLSCHIED, D. et LION, A. (2013). Predeformation-and frequency-dependent material behaviour of filler-reinforced rubber: Experiments, constitutive modelling and parameter identification. *International Journal of Solids and Structures*, 50(9):1217–1225. *cité page 100, 135, 138, 142, 143, et 179*
- WU, P. et Van der GIESSEN, E. (1993). On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(3):427–456. *cité page 153*
- XIAO, H., BRUHNS, O. et MEYERS, A. (2001). Large strain responses of elastic-perfect plasticity and kinematic hardening plasticity with the logarithmic rate: Swift effect in torsion. *International Journal of Plasticity*, 17(2):211–235. *cité page 37*
- YEOH, O. et FLEMING, P. (1997). A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. *Journal of Polymer Science-B-Polymer Physics Edition*, 35(12):1919–1932. *cité page 154*

Références bibliographiques

Annexe A

Résultats bruts des essais quasi-statiques en traction/torsion

A.1 Essais simultanés

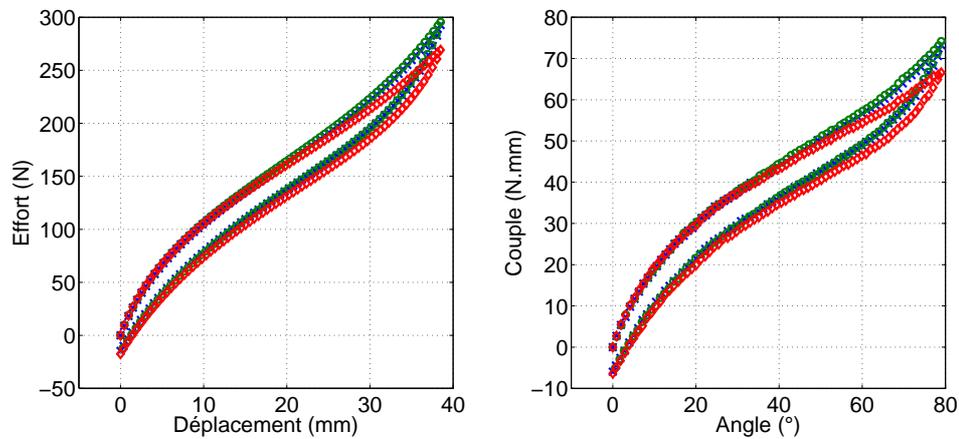


FIGURE IV.A.1 : Évolution de l'effort en fonction du déplacement et du couple en fonction de l'angle lors d'un essai quasi-statique de traction/torsion ; point de chargement III

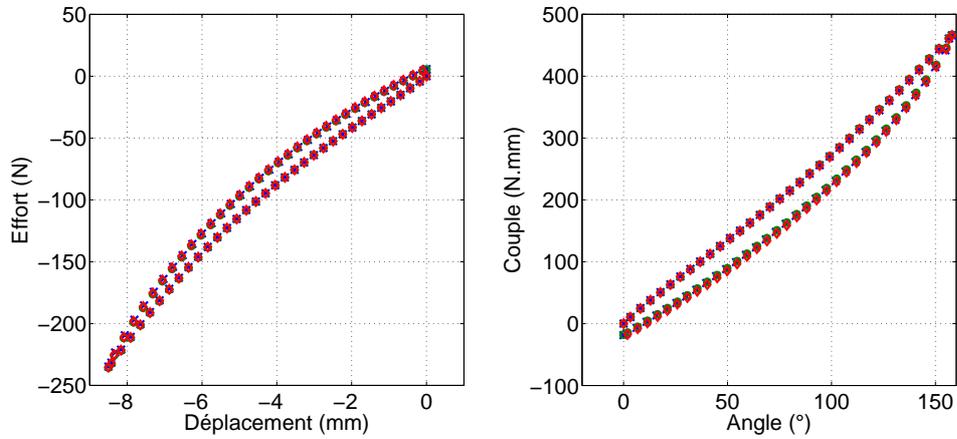


FIGURE IV.A.2 : Évolution de l'effort en fonction du déplacement et du couple en fonction de l'angle lors d'un essai quasi-statique de traction/torsion ; point de chargement X

A.2 Essais en chemin haut

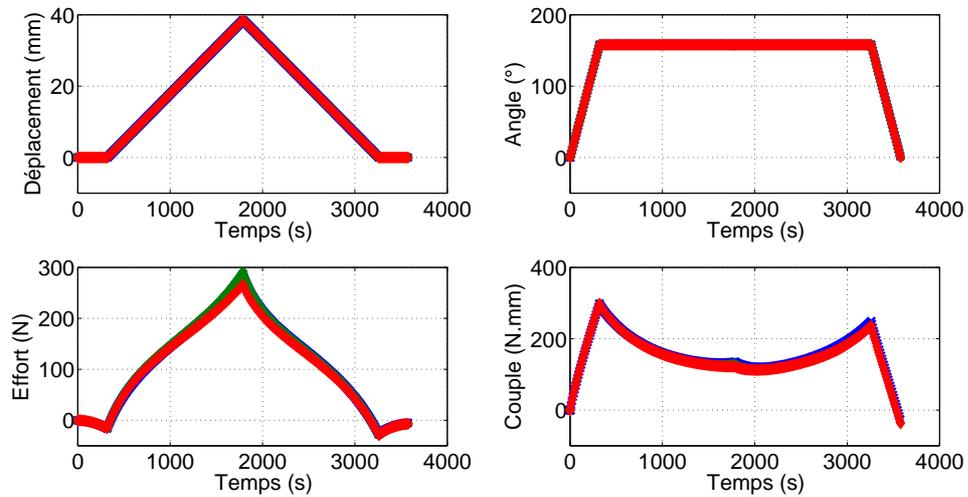


FIGURE IV.A.3 : Évolution du déplacement, de l'angle, de l'effort et du couple en fonction du temps lors d'un essai quasi-statique en chemin haut, point de chargement V

A.3 Essais en chemin bas

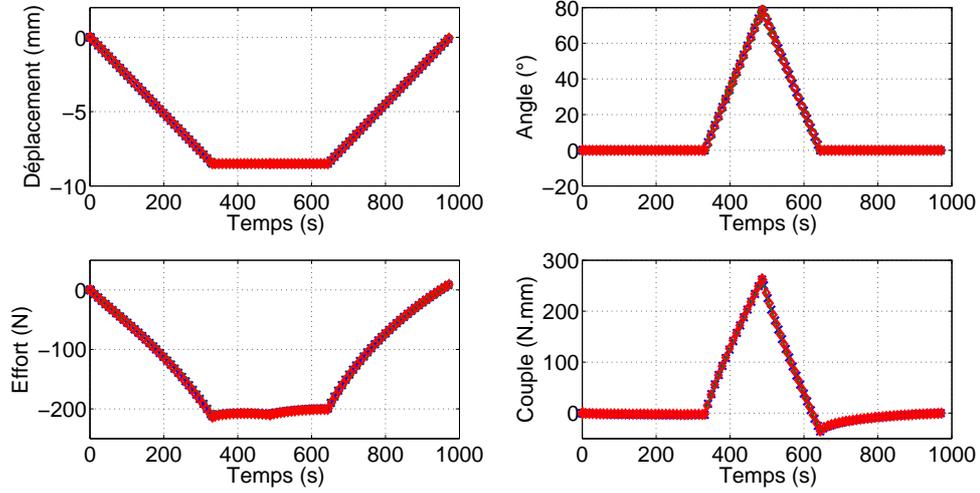


FIGURE IV.A.4 : Évolution du déplacement, de l'angle, de l'effort et du couple en fonction du temps lors d'un essai quasi-statique en chemin bas, point de chargement XII

Annexe B

Résultats d'essais d'oscillations autour d'un précharge quasi-statique en termes de contraintes équivalentes en fonction de la déformation

B.1 Oscillations en traction/compression uniaxiale

B.1.1 Précharges en traction uniaxiale

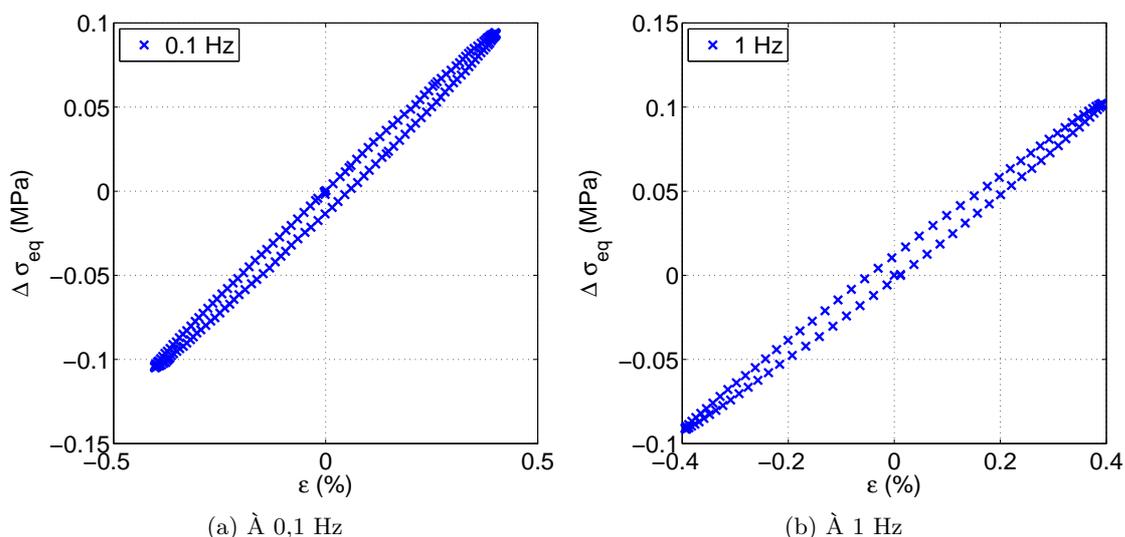


FIGURE IV.B.1 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$, $f = 0,1$ et 1 Hz

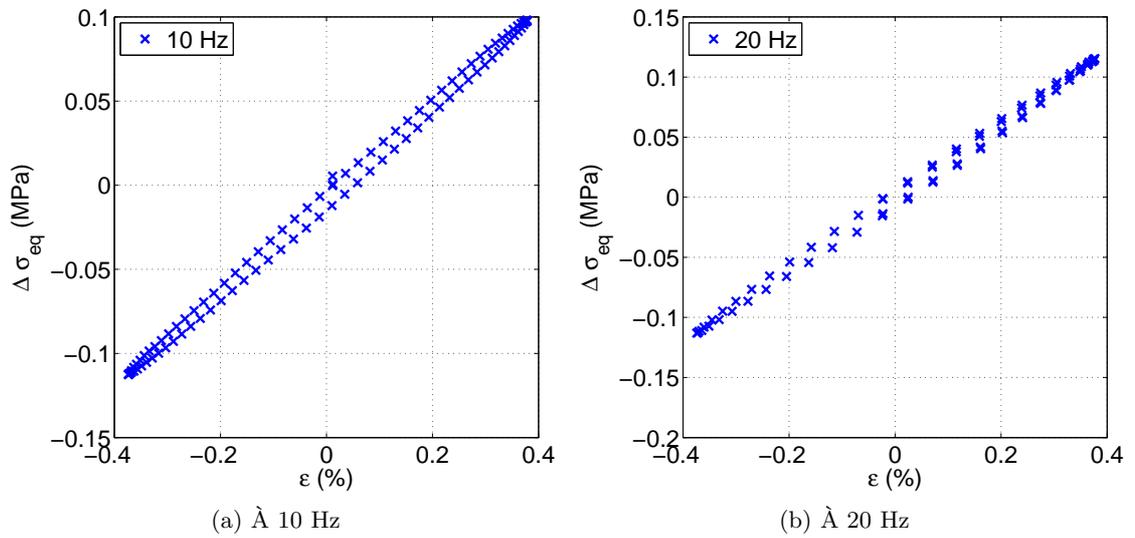


FIGURE IV.B.2 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$, $f = 10$ et 20 Hz

B.1.2 Précharges en compression uniaxiale

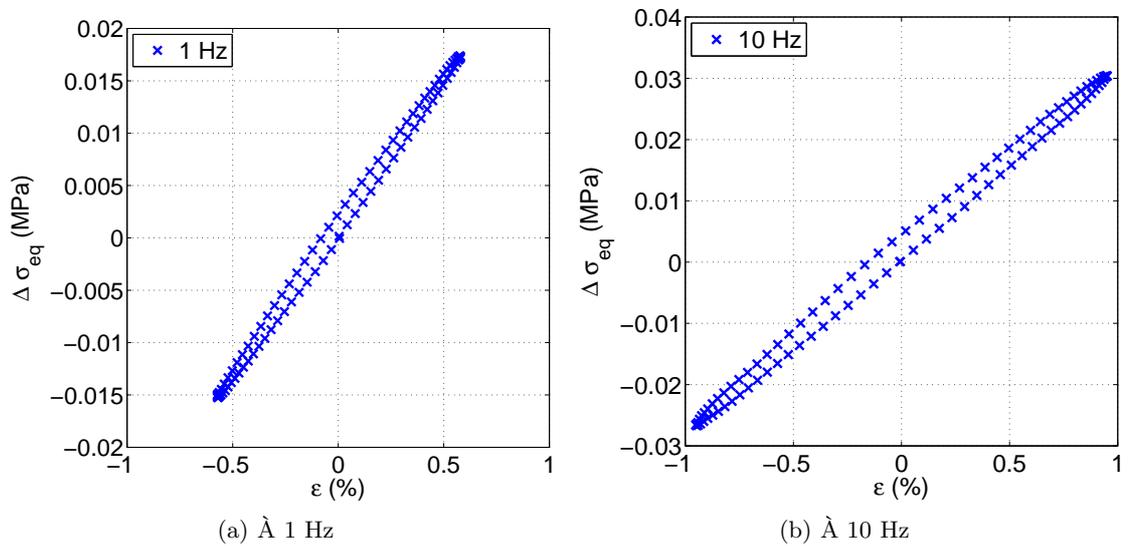


FIGURE IV.B.3 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$, $f = 1$ et 10 Hz

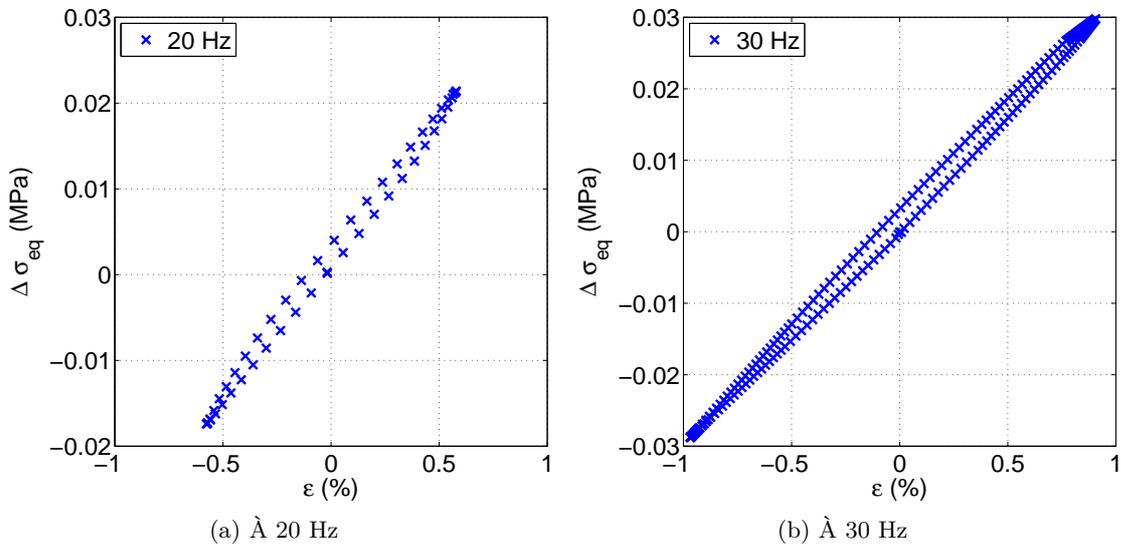


FIGURE IV.B.4 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$, $f = 20$ et 30 Hz

B.1.3 Précharges en torsion pure

A) Précharge à $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$

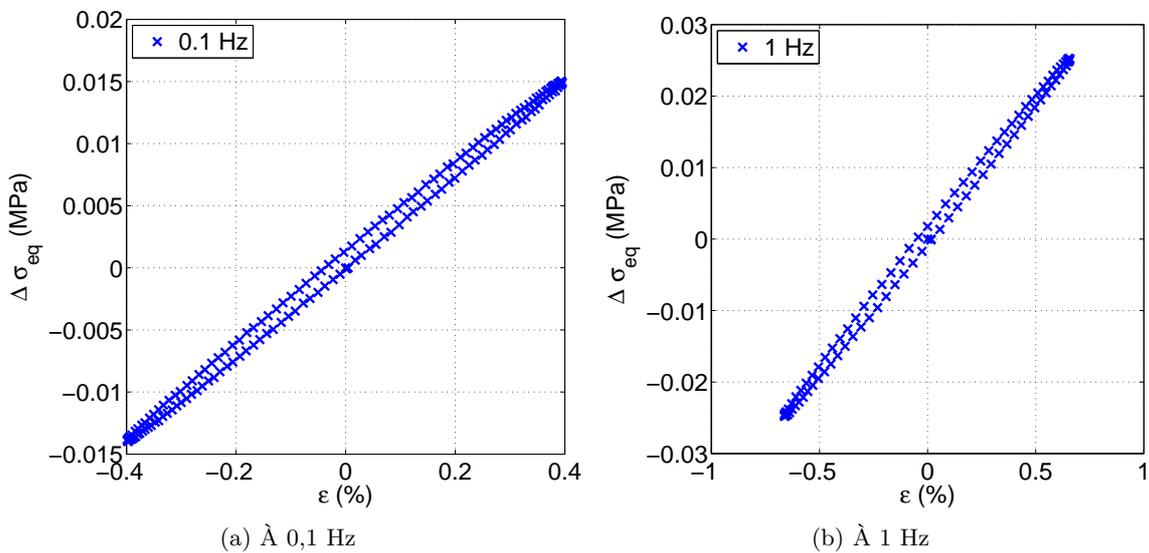


FIGURE IV.B.5 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, $f = 0,1$ et 1 Hz

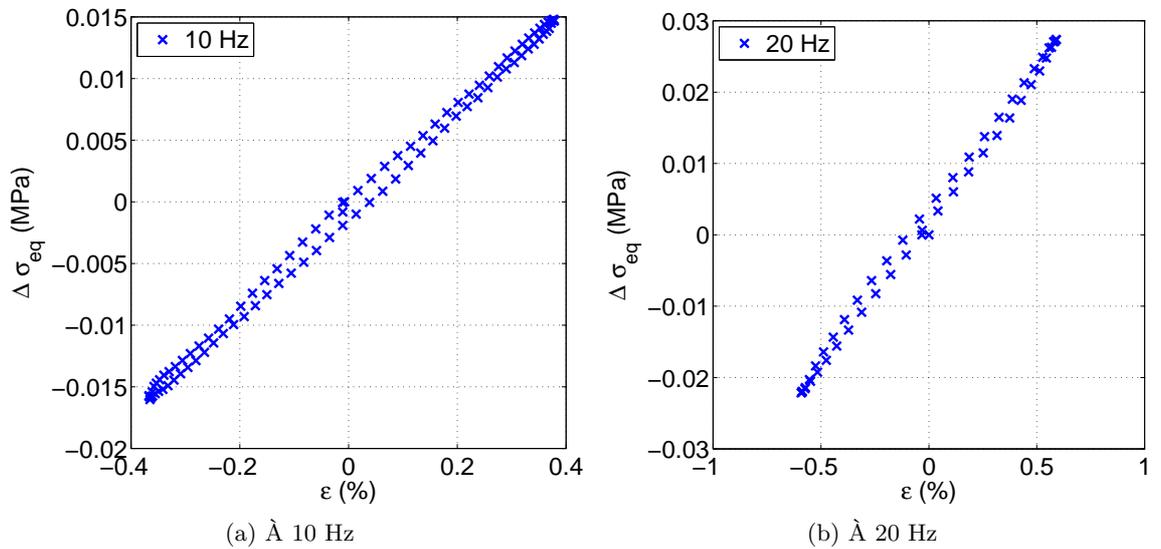


FIGURE IV.B.6 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, $f = 10$ et 20 Hz

B.1.4 Précharges en traction/torsion simultanées

A) Précharge à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$

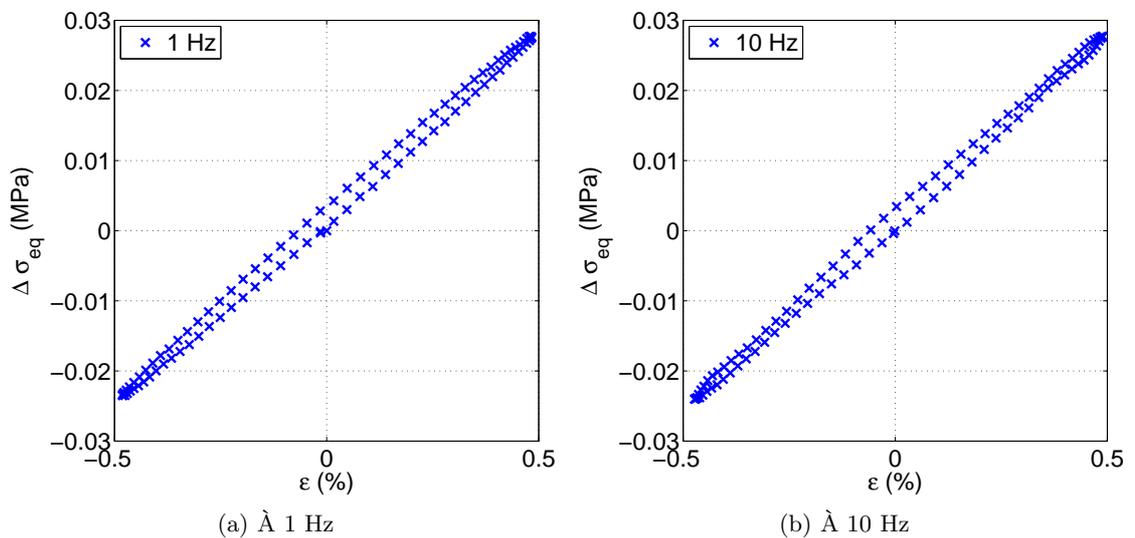


FIGURE IV.B.7 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en traction/torsion simultanées à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, $f = 1$ et 10 Hz

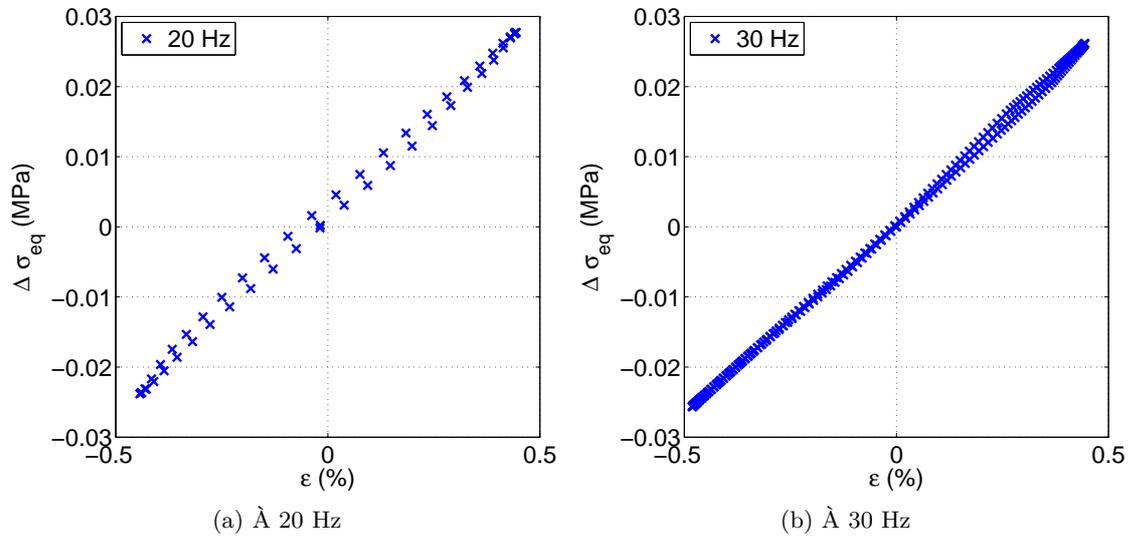


FIGURE IV.B.8 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation, précharge en traction/torsion simultanées à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, $f = 20$ et 30 Hz

B.2 Oscillations en torsion pure

B.2.1 Précharges en traction uniaxiale

A) Précharge à $\lambda = 2,5$

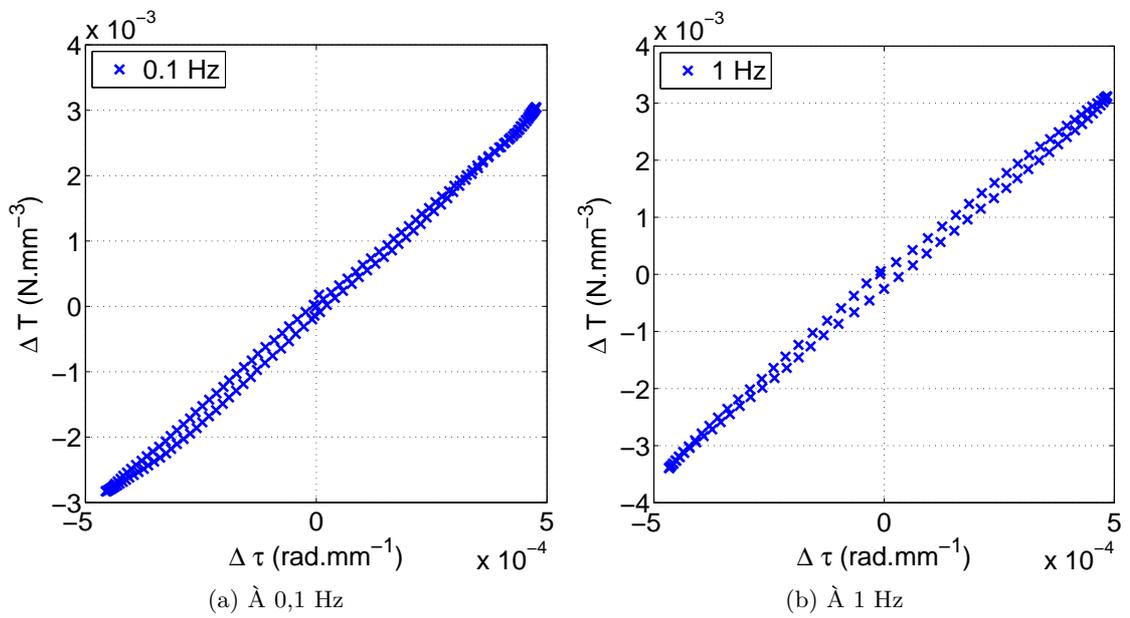


FIGURE IV.B.9 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$, oscillations en torsion pure, $f = 0,1$ et 1 Hz

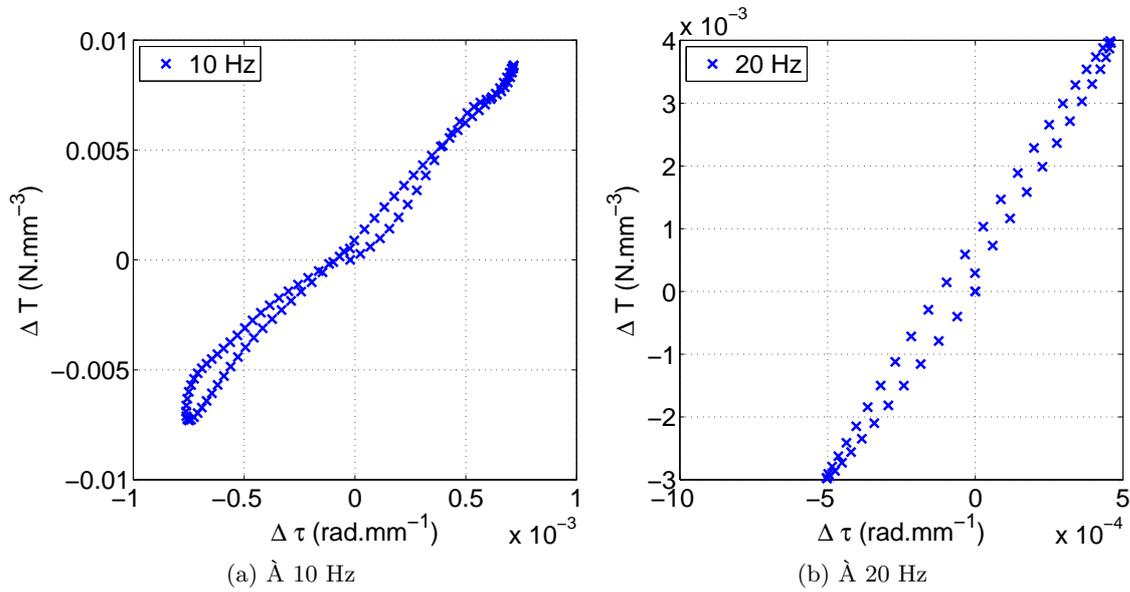


FIGURE IV.B.10 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en traction uniaxiale à $\lambda = 2,5$, oscillations en torsion pure, $f = 10$ et 20 Hz

B.2.2 Précharges en compression uniaxiale

A) Précharge à $\lambda = 0,67$

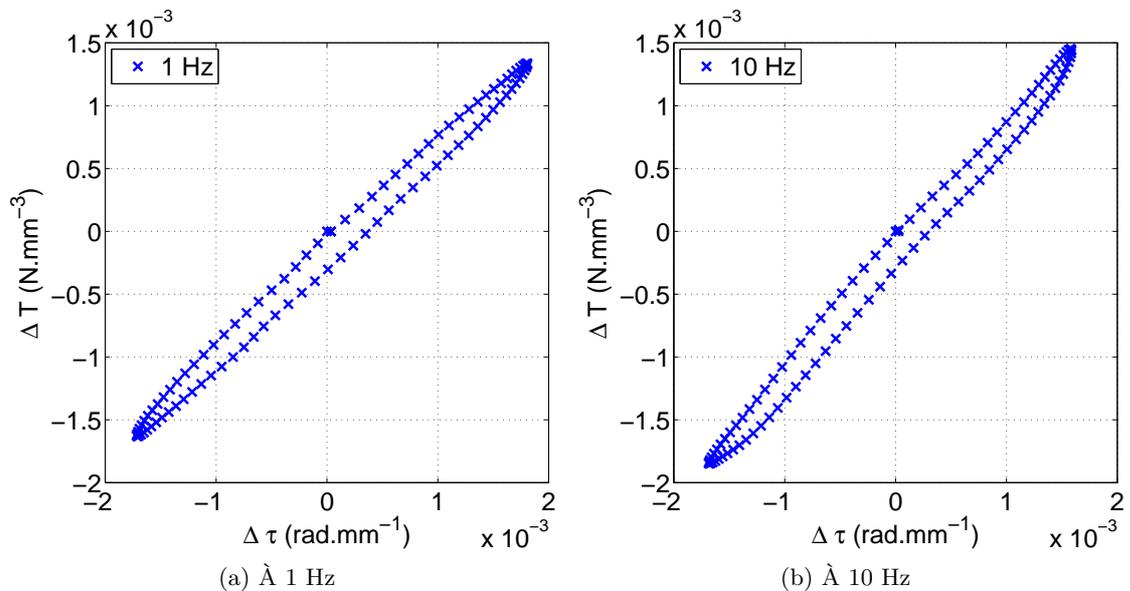


FIGURE IV.B.11 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$, oscillations en torsion pure, $f = 1$ et 10 Hz

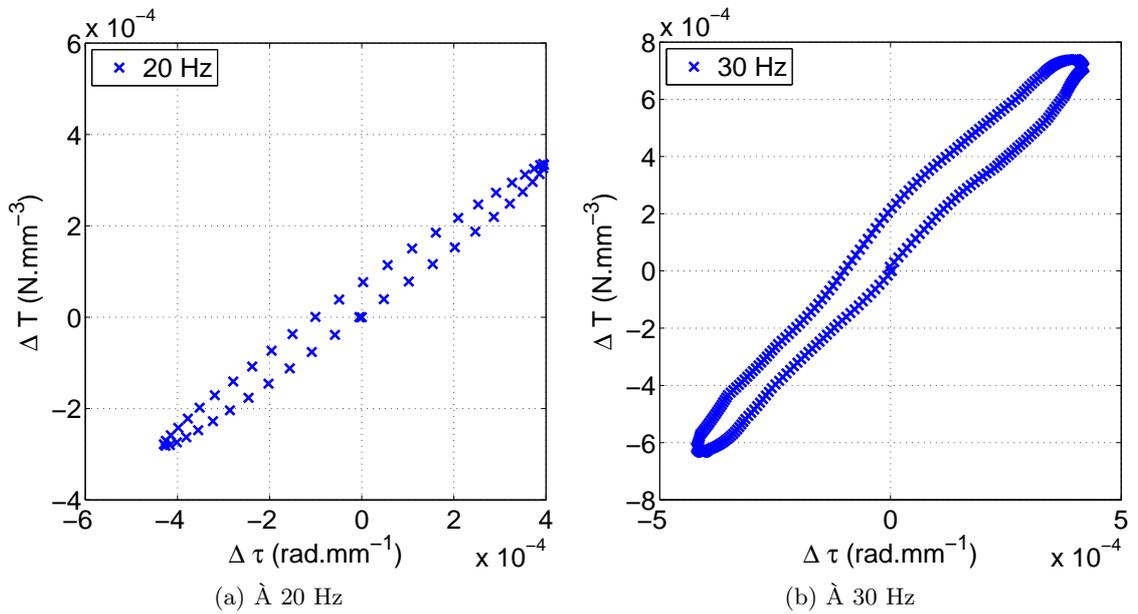


FIGURE IV.B.12 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en compression uniaxiale à $\lambda = 0,67$, oscillations en torsion pure, $f = 20$ et 30 Hz

B.2.3 Précharges en torsion pure

A) Précharge à $\tau = 0,09 \text{ rad}\cdot\text{mm}^{-1}$

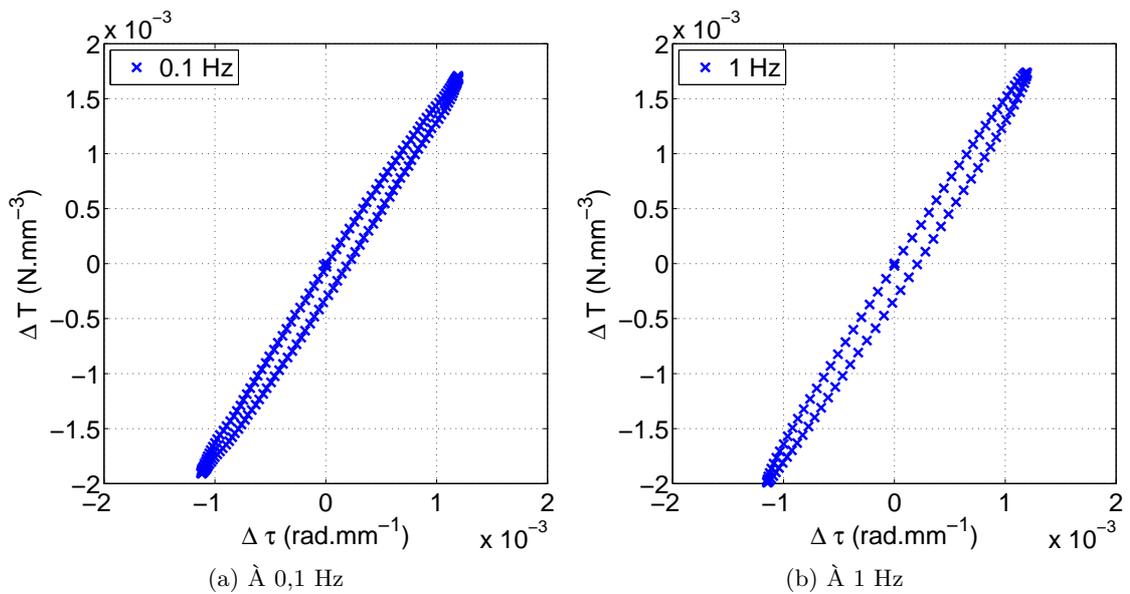


FIGURE IV.B.13 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad}\cdot\text{mm}^{-1}$, oscillations en torsion pure, $f = 0,1$ et 1 Hz

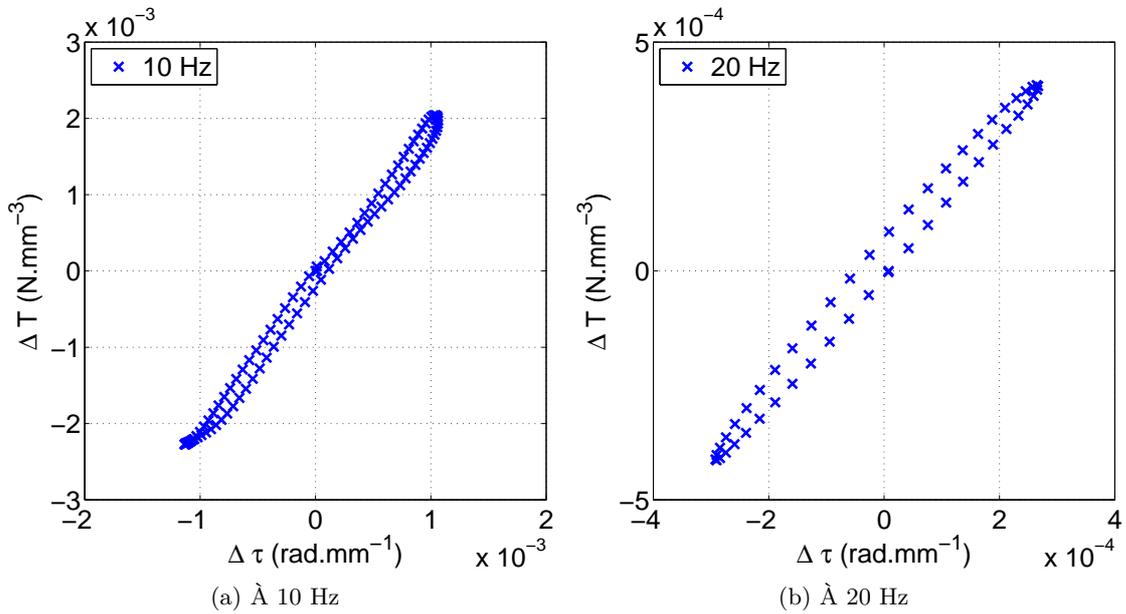


FIGURE IV.B.14 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en torsion pure à $\tau = 0,09 \text{ rad}\cdot\text{mm}^{-1}$, oscillations en torsion pure, $f = 10$ et 20 Hz

B.2.4 Précharge en traction/torsion simultanées

A) Précharge à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad}\cdot\text{mm}^{-1}$

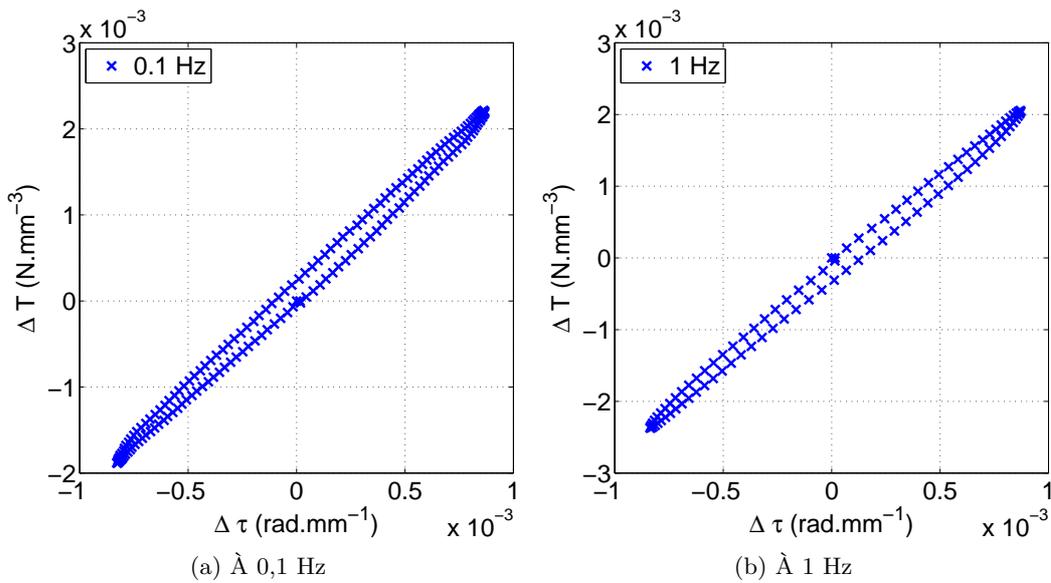


FIGURE IV.B.15 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en traction/torsion simultanées à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad}\cdot\text{mm}^{-1}$, oscillations en torsion pure, $f = 0,1$ et 1 Hz

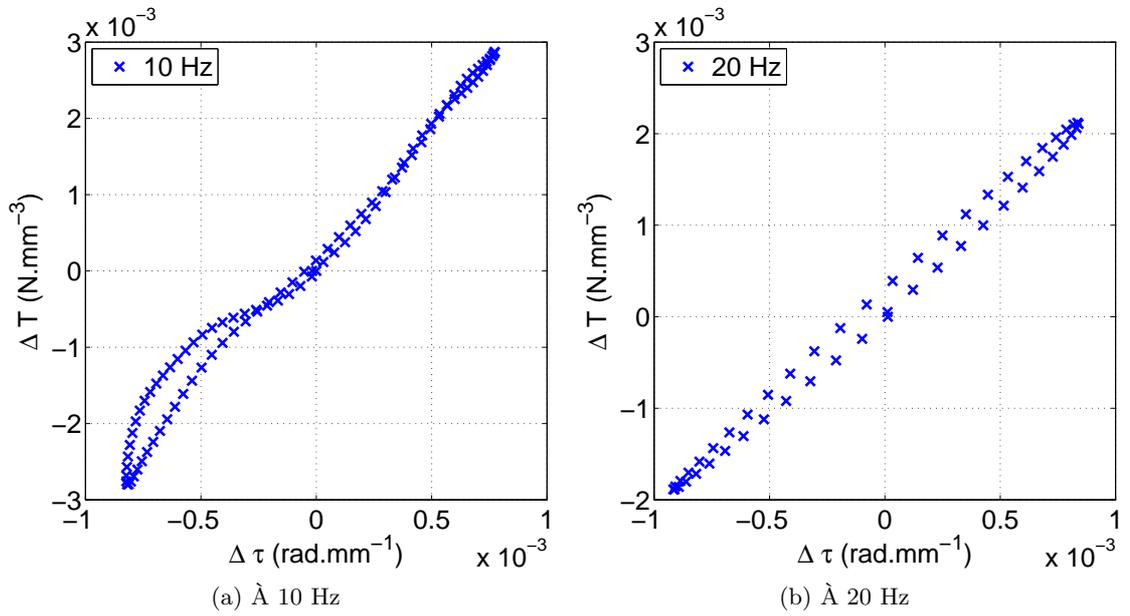


FIGURE IV.B.16 : Évolution de la contrainte équivalente en fonction de l'angle par unité de longueur, précharge en traction/torsion simultanées à $\lambda = 1,375$ et $\tau = 0,09 \text{ rad.mm}^{-1}$, oscillations en torsion pure, $f = 10$ et 20 Hz

Thèse de Doctorat

Anne-Sophie LECTEZ

Comportement multiaxial de pièces élastomères pré-contraintes – Application aux suspensions moteur

Multiaxial behavior of pre-stressed elastomeric parts – Application to engine mounts

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode de caractérisation et de modélisation du comportement de pièces de suspension moteur en élastomères. En service, les chargements que subissent ces pièces peuvent être décomposés en deux parties à savoir une grande précharge due au poids du moteur, considérée comme quasi-statique et des débattements dus aux conditions de route qui se superposent à la précharge précédente. Lors de ces deux étapes, la multiaxialité des sollicitations peut être importante. Dans ce but, les travaux suivants ont été mis en œuvre :

1. Détermination de l'enveloppe de déformations subies par une pièce de suspension par des essais sur véhicule. L'utilisation d'invariants originaux de la déformation permet de quantifier d'une part l'amplitude de la déformation et d'autre part sa multiaxialité ;
2. Mise en place d'une méthodologie expérimentale de traction-torsion sur élastomères. Une éprouvette quasi-cylindrique est spécialement conçue pour ce type d'essais. Des essais de stéréo-corrélation d'images permettent de relier les déplacements et angles imposés à l'éprouvette au champ de déformation ;
3. Modélisation hyperélastique identifiée sur des essais quasi-statiques en traction-torsion en grandes déformations. Une attention particulière est portée sur la méthodologie de post-traitement de ce type d'essais en étudiant la pertinence du calcul de certaines grandeurs mécaniques ;
4. Modélisation viscoélastique identifiée sur des essais de petites oscillations en traction ou torsion, superposée à une grande précharge statique en traction-torsion. L'influence de la précharge sur les propriétés dynamiques du matériau est considérée. La prise en compte ou non de cette influence par deux modèles viscoélastiques linéarisés est étudiée et discutée ;
5. Simulation du comportement d'une suspension moteur par éléments finis. Les résultats de cette simulation sont comparés avec des essais sur pièce.

Mots clés

élastomères, multiaxialité, grandes déformations, hyperélasticité, viscoélasticité, traction/torsion, modélisation, simulation éléments finis, campagne d'essais.

Abstract

The purpose of this thesis is to develop a method for characterizing and modelling the behavior of elastomeric engine mounts. Loading conditions undergone by these parts are decomposed in two steps, which are a large preload caused by the weight of the engine, considered as quasi-static, and some superimposed displacements caused by road conditions. During both steps, loading conditions are likely to be multiaxial. For this goal, following steps have been developed:

1. Determination of the range of strain undergone by an engine mount through experiments on vehicles. Using original strain invariants allows to quantify the strain amplitude as well as its multiaxiality;
2. Development of an experimental method of tension-torsion on elastomers. An almost cylindrical specimen is specially designed for this type of test. Thanks to stereo-digital image correlation tests, displacements and angles imposed on the specimen are linked to the strain field in its cylindrical zone;
3. Hyperelastic modelling based on tension-torsion large strain quasi-static tests. A specific attention is paid on the method of post-treating this kind of test, studying the relevance of calculating some mechanical quantities;
4. Viscoelastic modelling based on tests of small oscillations in tension or torsion superimposed on a large tension-torsion static preload. The influence of the preload on the dynamic properties is considered, and the ability of two linearized viscoelastic models to take into account this influence is studied and discussed;
5. Simulation of the behaviour of an engine mount through finite elements, using both hyperelastic and viscoelastic models previously identified. Results of this simulation are compared with experiments on the engine mount.

Key Words

elastomers, multiaxiality, large strains, hyperelasticity, viscoelasticity, tension/torsion, modelling, finite element analysis, experimental campaign