Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE : UNE ÉPINE DANS L´ENSEIGNEMENT ET L´APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES - UNE ÉTUDE DE CAS AU MALI

Demonstração por absurdo: um espinho no ensino e aprendizagem da matemática - um estudo de caso em Mali

Aboubacar **BAMBA**
École Normale Supérieure de Bamako, Mali.
bambaboucar@yahoo.fr
https://orcid.org/0000-0001-6079-754X

Saddo Ag **ALMOULOUD**
Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil
saddoag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RÉSUMÉ

Le présent travail a comme thème « Une épine dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : Une étude de cas au Mali . Pour le réaliser nous avons fait une revue de la littérature ayant porté sur des travaux a**utour** du **raisonnement** par l'**absurde et** l'étude institutionnelle de la démonstration par l'absurde. La problématique est relative au rôle que la démonstration par l'absurde joue dans les pratiques de classe et dans les manuels scolaires et son absence dans les programmes. Les questions de recherche sont libellées comme suit : Au Mali la démonstration par l'absurde est-elle considérée comme étant au-dessus des capacités de l'élève du secondaire ? Au regard d'un énoncé, le futur enseignant reconnait-il la nécessité d'une démonstration par l'absurde ou alors peut-il le transformer de manière qu'une démonstration par l'absurde s'impose ? L'étude mathématique de la démonstration par l'absurde, nous a permis d'analyser cette méthode de démonstration comme savoir de référence et de faire son interprétation logique. La classification des problèmes faite par le premier auteur dans sa thèse, nous a permis de faire le choix des variables didactiques. La partie expérimentale comporte le choix et l'analyse a priori de trois problèmes proposés à des élèves-professeurs de l'École Normale Supérieure de Bamako, la passation des items en une séance, l'analyse à postériori des productions. Les élèves-professeurs ont été mis dans une situation de résolution de problèmes par la méthode de démonstration par l'absurde pour éventuellement connaitre leur rapport à la démonstration par l'absurde. L'analyse a postériori nous a permis de constater la confirmation du fait que la démonstration par l'absurde pose des difficultés aux professeurs de l'enseignement secondaire.

Mots-clés : Démonstration, Absurde, Enseignement Apprentissage

RESUMO

O presente trabalho tem como tema "Demonstração pelo absurdo: um espinho no ensino e aprendizagem da matemática: um estudo de caso em Mali". Para tanto, realizamos uma revisão da literatura com foco no trabalho em torno do raciocínio pelo absurdo e no estudo institucional da demonstração pelo absurdo. O problema diz respeito ao papel que a demonstração pelo absurdo desempenha nas práticas de sala de aula e nos livros didáticos e sua ausência nos currículos. As questões de pesquisa é a seguinte: Em Mali, a demonstração pelo absurdo está além das capacidades do aluno do ensino médio? No que diz respeito a uma afirmação, o futuro professor reconhece a necessidade de uma demonstração pelo absurdo ou pode transformá-la de tal forma que uma demonstração pelo absurdo seja necessária? O estudo matemático da demonstração pelo absurdo, permitiu-nos analisar este método de demonstração como conhecimento de referência e fazer a sua interpretação lógica. A classificação dos problemas feita pelo primeiro autor em sua tese, permitiu-nos escolher as variáveis didáticas. A parte experimental inclui a escolha e análise a priori de três problemas propostos aos alunos-professores da École Normale Supérieure de Bamako, a aplicação das tarefas escolhidas numa sessão, a análise a posteriori das produções dos sujeitos da pesquisa. Os alunos-professores foram colocados em uma situação de resolução de problemas pelo método da demonstração pelo absurdo para eventualmente conhecer sua relação com a demonstração pelo absurdo. A análise a posteriori permitiu constatar que a demonstração pelo absurdo é uma dificuldade para os professores do ensino médio.

Palavras-chave: Demonstração, Absurdo, Ensino/aprendizagem

1 INTRODUCTION

Dans ce travail nous essayerons de voir comment la démonstration par l'absurde vie dans l'enseignement au Mali et en particulier dans l'enseignement secondaire. Pour cela nous nous intéresserons au rapport des futurs enseignants de l'enseignement secondaire à la démonstration par l'absurde.

Notre problématique est la suivante: « Dans les activités mathématiques la démonstration occupe une place importante. Si certaines méthodes de démonstration font l'objet d'un enseignement, ce n'est pas le cas pour la démonstration par l'absurde. En effet, que ce soit dans les documents officiels (programmes et savoir-faire) ou les manuels scolaires, la démonstration par l'absurde ne fait pas l'objet d'une étude théorique au niveau de l'enseignement secondaire au Mali. Elle n'est pas en général définie. Cependant elle est utilisée dans les classes et dans les manuels scolaires pour la résolution de problèmes. Si dans certains problèmes son utilisation n'est pas nécessaire, dans d'autre elle est incontournable ».

Nous nous posons alors les questions suivantes: Au Mali la démonstration par l'absurde est-elle considérée comme étant au- dessus des capacités de l'élève du secondaire ? Au regard d'un énoncé, le futur enseignant reconnait-il la nécessité d'une démonstration par l'absurde ou alors peut-il le transformer de manière qu'une démonstration par l'absurde s'impose ?

Notre hypothèse est que la démonstration par l'absurde pose des difficultés aux enseignants dans son utilisation et se confond souvent à la démonstration par contraposée.

Nous ferons une revue de la littérature axés sur quelques travaux existant sur la démonstration par l'absurde afin d'établir les liens éventuels avec notre travail. Nous proposerons à des professeurs évoluant sur le terrain de l'enseignement secondaire une tâche relative à la négation qui constitue la base de la démonstration par l'absurde. Cette tâche constituera pour nous une pré-expérimentation.

Nous terminerons par une expérimentation adressée aux élèves-professeurs de l'École Normale Supérieure (ENSup) de Bamako en leurs proposant une tâche composée de trois problèmes les mettant dans une situation de résolution de problèmes à l'aide de la démonstration par l'absurde en vue de savoir s'ils reconnaissent la nécessité d'une démonstration par l'absurde ou s'ils peuvent transformer un problème de manière qu'une démonstration par l'absurde s'impose.

Ces problèmes sont choisis sur la base des variables didactiques définies suivant le registre, la formulation des questions et la présence des quantificateurs et de l'implication dans les énoncés que nous avons tiré de de la thèse de Doctorat de Aboubacar BAMBA (2019). À l'issu de cette expérimentation nous essayerons de donner des réponses à nos questions de recherche.

Il faut noter que l'École Normale Supérieure de Bamako (République du Mali) est une institution d'enseignement supérieur chargée de la formation initiale des professeurs d'enseignement secondaire général, des professeurs d'enseignement normal, des inspecteurs d'enseignement fondamental, des administrateurs scolaires, des conseillers pédagogiques et de la formation continue des enseignants.

2 ÉTAT DES LIEUX

Dans cette partie, nous ferons une analyse de certains travaux existant sur la démonstration par l'absurde. Il s'agira d'identifier les aspects de la démonstration par l'absurde développés par les auteurs de ces travaux afin de dégager les liens éventuels avec le nôtre.

2.1. Analyse de quelques travaux existants sur la démonstration par l'absurde

Cette analyse portera sur quatre travaux, à savoir, le travail d'étude et de recherche (TER) de Anne Scholl (**1998), le travail d'étude et de recherche (TER) de Anne Bachellet (1999), le travail d'étud**e et de recherche (TER) de Olivier Tavan (1999), le Mémoire de DEA de Viviane Cambresy- tant, Dominique Cambresy et Stéphane Carpentier (1998).

Dans son TER, portant sur les caractéristiques mathématiques du raisonnement par l'absurde et sa place dans l'enseignement, Anne Scholl étudie neuf livres de 1ère année du

1^er cycle universitaire (18-19 ans). De cette étude il ressort trois types de définitions, à savoir:

- les définitions ayant un rapport à l'absurde explicite. Dans ces définitions les termes « contradiction », « absurdité » ou « impossibilité apparaissent de façon explicite.
- les définitions dont le rapport à l'absurde est confus. Ce sont les définitions dans lesquelles les termes cités ci-dessus n'apparaissent pas de façon explicite.
- les définitions ne définissant pas le raisonnement par l'absurde. Ces définitions sont plutôt relatives à la démonstration par contraposée au lieu de la démonstration par l'absurde.

À ce niveau le raisonnement par l'absurde est considéré comme un outil très puissant. Cependant elle signale l'absence du raisonnement par l'absurde dans les programmes et manuels du secondaire.

Pour conclure son travail, Anne Scholl (1998) signale que dans cinq cas sur les neufs qu'elle a étudiés, le raisonnement par l'absurde est introduit dans le chapitre traitant la théorie des ensembles. Elle se pose alors la question de savoir pourquoi le raisonnement par l'absurde est le plus souvent introduit dans ce contexte.

Dans son TER Anne Bachelet (1999) s'intéresse au raisonnement par l'absurde dans l'enseignement de spécialité en terminale S. Elle signale que le raisonnement par l'absurde n'est pas explicitement au programme du secondaire. Mais elle établit les liens logiques enseignés en terminale S (15-16 ans) qui permettent d'introduire le raisonnement par contraposé associé dans la pratique au raisonnement par l'absurde. C'est ainsi que Anne Bachelet considère que l'absurde est beaucoup plus formateur que le raisonnement par contraposé à cause de son rôle didactique.

De son étude portant sur deux livres de terminale S (15-16 ans), il ressort que le raisonnement par l'absurde est présenté comme une méthode pour démontrer une implication au lieu de méthode pour démontrer une proposition P quelconque.

Anne Bachelet dans sa conclusion signale une présence significative du raisonnement par l'absurde dans la spécialité de terminale S au niveau des chapitres : «Divisibilité » et « Nombres premiers » malgré qu'il ne soit pas clairement au programme.

Dans son TER Olivier Tavan (1999) s'intéresse au raisonnement par l'absurde dans la topologie du 19^e siècle. Il constate que dans les ouvrages universitaires traitant la topologie, le raisonnement par l'absurde est fréquemment utilisé. Son étude a porté sur trois théorèmes de la topologie à savoir :

- le théorème de Bolzano-Weistrass : « Un espace métrique M est compact si et seulement si, toute suite infinie de points de M admet une valeur d'adhérence »
- le théorème de Heine-Borel-Lebesgues : « Soit I = [a, b] un intervalle fermé borné de IR. De toute famille d'ouverts recouvrant I, il est possible d'extraire une sous famille finie qui recouvre encore I. On dit que I est compact ».
- -le théorème de la continuité uniforme sur un compact : « Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un autre espace métrique F est uniformément continue »

Dans la conclusion de son travail, Olivier Tavan (1999) affirme qu'il a manipulé des démonstrations de théorèmes de topologie dans le seul but de savoir pourquoi de tels théorèmes étaient démontrés par l'absurde. Il ne s'est jamais préoccupé de l'utilité d'un théorème, de son importance et de son application dans le domaine de la topologie.

Il note qu'à travers son étude, plusieurs qualités propres au raisonnement par l'absurde se sont montrées. Ces qualités portent sur trois niveaux.

- Le premier niveau est celui de la syntaxe c'est-à-dire du vocabulaire propre au raisonnement par l'absurde.
- Le deuxième niveau est celui de la structure de la démonstration. À ce niveau, le mémoire donne quelques réponses. Comme exemple, il prend le théorème de Heine-Borel-Lebesgues dans lequel l'utilisation du raisonnement par l'absurde permettait l'explicitation de la démarche de la démonstration et du résultat, avant que celui-ci soit démontré.
- Le troisième niveau est celui de la sémantique. À ce niveau, l´auteur a essayé de voir comment l'utilisation du raisonnement par l'absurde permet de préciser le champ d'étude en posant une hypothèse supplémentaire à la démonstration (non B) et de voir comment le raisonnement par l'absurde s'intéresse davantage à l'objet étudié en l'isolant des autres et en regardant ce qui se passe si on lui enlève une de ses propriétés.

Dans leur document les auteurs Vinciane Cambresy-Tant, Dominique Cambresy et Stéphane Carpentie (1998) évoquent la contradiction due au fait que le raisonnement par l'absurde semble indispensable dans l'enseignement de certains chapitres (en géométrie par exemple) et son absence dans les textes officiels du secondaire. D'où l'interrogation : «

le raisonnement par l'absurde est-il si naturel qu'on puisse le passer sous silence dans les programmes ou bien veut-on épargner aux élèves une réflexion à son sujet, qui poserait des problèmes auxquels il serait plutôt difficile de répondre entièrement ? »

Comme réponse à la question : qu'est- ce qu'un raisonnement par l'absurde, les auteurs à travers deux exercices, l'un de la vie courante et l'autre de l'analyse arrivent à la conclusion que le raisonnement par l'absurde est une démonstration établie sur la base du principe du tiers-exclu. Nous présentons les exemples cités par les auteurs ci-après :

Exercice de la vie courante : Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit : "Je passerai peut-être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres." Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi. En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres... "Pierre est-il passé chez moi ce lundi après- midi?"

Exercice de l'analyse : Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\frac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

S'agissant des critiques, les auteurs font cas de celle de Port-Royal et du paradoxe de Russell. La critique de Port-Royal porte sur le fait que le raisonnement par l'absurde est considéré comme une démonstration qui permet de convaincre qu'une propriété est vraie mais ne permet pas d'expliquer pourquoi elle est vraie. À ce sujet une question s'impose : sachant expliquer pourquoi la négation d'une propriété P est fausse peut-on expliquer pourquoi cette propriété est vraie ?

Contrairement à Port-Royal, les auteurs soutiennent que le raisonnement par l'absurde est non seulement éclairant mais aussi naturel. Ils mettent l'aspect éclairant en évidence à travers trois exemples donnés ci-dessous : la réciproque du théorème de Thalès, la proposition VI du livre I des éléments d'Euclide et un théorème de géométrie dans l'espace. Pour la réciproque du théorème de Thalès, nous avons l´énoncé suivant : Soit un triangle ABC et deux points D et E situés sur [AB] et [AC]. Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

La proposition VI du livre I des éléments d'Euclide est énoncée sous la forme suivante : « Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux entre eux ». Dans la géométrie de l'espace, le théorème s´énonce de la façon suivante : « Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan ».

Pratiquement, nous allons enlever le cas évident où la droite en question est confondue à une droite du plan. L'énoncé devient alors : Si une droite (d) est strictement parallèle à une droite (δ) d'un plan (P) non incluse dans (P), alors elle est strictement parallèle à ce plan.

S'agissant du coté naturel les auteurs s'appuient sur les deux exercices cités plus haut pour conclure que le raisonnement par l'absurde est assez naturel, même pour les personnes qui n'ont aucune connaissance particulière en logique.

Russell (1903) et son paradoxe ont remis en cause le principe fondamental du raisonnement par l'absurde à savoir : le principe du tiers-exclu qui permet d'accepter l'hypothèse si « a et non-b » entraine une contradiction, alors « a implique b » sans se préoccuper de la validité de b. Pour les auteurs la critique de Russell se situe au cœur de la logique et découvre l'impasse dans laquelle se trouve les mathématiques à savoir : une certaine propriété peut se révéler impossible en même temps que sa négation.

2.2. Position de ces travaux par rapport au notre.

L'analyse des quatre travaux existants sur la démonstration par l'absurde nous a permis de constater que les différents auteurs se sont intéressés à la démonstration par l'absurde du point de vue mathématique, épistémologue et institutionnel. Il ressort de l'analyse de ces travaux que tous les auteurs ont fait une étude sur la dimension institutionnelle de la démonstration par l'absurde. Ces travaux ont donc un lien avec notre travail , notamment l'analyse des manuels scolaires et universitaires, l'analyse des documents officiels (programmes et savoir-faire), la place de la démonstration par l'absurde dans l'enseignement/apprentissage des Mathématiques et l'étude mathématique de la démonstration par l'absurde.

3 PROBLÉMATIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Dans cet article, notre travail portera sur les résultats d'un teste que nous avons proposé aux professeurs d'enseignement secondaire en activité sur la négation. Ce travail constitue pour nous une pré-expérimentation dont les résultats, alliés aux résultats de l´état des lieux, nous permettront de définir notre hypothèse, notre problématique et nos questions de recherche.

3.1. Pré-expérimentation

L'objectif général de la pré-expérimentation est de connaître le rapport des professeurs de mathématiques du secondaire à la démonstration par l'absurde.

Le rapport au savoir peut être défini comme un rapport à des processus (l'acte d'apprendre), à des situations d'apprentissage et à des produits (les savoirs comme compétences acquises et comme objets institutionnels, culturels et sociaux. (E. Bautier, J-Y. Rochex, 1998, p. 33-34). Il dépend du sens que l'élève ou l´enseignant confère au savoir scolaire. Les difficultés scolaires des élèves ont un lien avec le sens qu'ils attribuent à l'école et aux activités scolaires. (TOURE Krouélé, 2018)

L´analyse en termes de rapport au savoir est instanciée en termes de rapport personnel et de rapport institutionnel au savoir mathématique. La notion de rapport personnel d'un individu *x* à un objet de savoir *o* est définie comme l'ensemble des interactions que *x* a avec l'objet *o*, précisant « la manière dont *x* connaît *o* » (CHEVALLARD, 2003).

Le rapport institutionnel à l'objet *o* est défini par la manière dont l'institution « connaît » *o*. ce rapport institutionnel varie selon les institutions et selon la position *p* que l'individu occupe dans l'institution. Le rapport personnel d'un individu émerge à partir d'une variété de rapports institutionnels auxquels l'individu est assujetti : « d'une manière générale, nos rapports « personnels » sont ainsi le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents » (CHEVALLARD, 2003, p. 83).

Les objectifs spécifiques de la pré-expérimentation sont entre autres : obtenir les opinions des professeurs de l'enseignement secondaire sur la négation qui est la base de la démonstration par l´absurde ; utiliser ces opinions pour réfléchir sur les problèmes liés à la démonstration par l'absurde.

Nous avons proposé le problème suivant :

Nous considérons ici cinq propositions dont voici les énoncés.

P_1 : « si n est un entier naturel strictement positif alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ».

P_2 : « Quel que soit n entier naturel non nul, $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ».

P_3 : « Il existe au moins un entier naturel n, $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel ».

P_4 : « Quel que soit n entier naturel, si n^2 est pair alors n est pair ».

P_5 : « $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0, |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$ ».

Tâche : *Donner la négation de chacune des propositions ci-dessus. Justifier vos réponses*.

Ce problème pouvait être répondu de façon anonyme, mais s'ils le souhaitent, les enseignants pouvaient indiquer leur nom sur la feuille qui contiendra leurs réponses.

Il faut noter que ces enseignants sont des produits de l'École Normale Supérieure, titulaire une maîtrise. Ils ont eu une semaine pour répondre aux questions.

3.1.1. Analyse a priori des propositions

Proposition P_1

La proposition P_1 est de la forme « P implique Q » avec : P la proposition : « n est un entier strictement positif » et Q la proposition : « $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ». Dans la détermination de la négation de P_1, on peut s'attendre à des réponses erronées telles que :

R_1 : n n'est pas un entier naturel strictement positif et $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel.

Cette réponse donne comme négation de « P implique Q » : « non P et non Q ».

R_2 : n n'est pas un entier naturel strictement positif ou $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel. Cette réponse donne comme négation de « p implique Q » : « non P ou non Q ».

R_3 : n n'est pas un entier naturel strictement positif ou $n^2 + 1$ n'est pas est le carré d'un entier naturel. Cette réponse donne comme négation de « P implique Q » : « non P ou Q ».

De plus, la proposition P_1 est un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle, dont la question est fermée et contient l'implication seulement.

La négation de « P implique Q » étant « P et non Q », la négation de la proposition P1 est : « *n est un entier naturel strictement positif et $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel »*.

Comme le montre Deloustal-Jorrand (2000), le *concept mathématique d'implication est* une *modélisation* de l'implication dans la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est conforme à la logique naturelle sous certains aspects et ne l'est pas sous d'autres.

L´auteure affirme que lorsqu´une implication est vraie, il est naturel de se demander si c'est une équivalence. On peut alors envisager deux méthodes : on peut montrer que la conclusion est fausse lorsque la prémisse est fausse, où montrer que la réciproque de cette implication est vraie.

Les erreurs qui peuvent être commises peuvent être liées au fait de considérer « les liens de cause à effet au sens strict, cette propriété-en-acte se traduit alors parle fait que la prémisse et la conclusion doivent être reliées entre elles » (Deloustal-Jorrand, 2000, p. 38), c'est-à-dire qu'il doit exister une « explication », un cheminement sémantique pour passer de l'une à l'autre.

Deloustal-Jorrand (2000, p. 38) affirme que

> Cette propriété-en-acte de causalité peut amener à répondre que :
> - on ne peut pas parler d'implication entre deux propositions des lors qu'elles n'ont pas de lien de cause à effet visible (ou qu'il n'y a pas de cheminement menant de l'une à l'autre).
> - l'implication « A=>B » est fausse lorsque A n'est pas la« cause» de B (ou qu'il n'y a pas de cheminement sémantique menant de A à B).

Deloustal-Jorrand (2000, p. 39) nous dit que « cette propriété-en-acte, peut être renforcée par les expressions langagières associées à l'implication », comme « A implique B », « A entraine B », «A donne B »... qui peuvent nous entrainer à penser qu'il y a bien un lien de cause à effet entre l'hypothèse et la conclusion d'une implication.

Proposition P_2

La proposition P_2 est de la forme « Quel que soit n, P(n) ». Dans la détermination de la négation de P_2, on peut s'attendre à des réponses erronées telles que : *R_1: Quel que soit n entier naturel non nul, $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel.* Cette réponse donne comme négation de « quel que soit n, P(n) » : « quel que soit n, non P(n) », alors que la réponse correcte est plutôt « il existe n, non P(n)».

R_2: Il existe au moins un entier naturel non nul n, $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel. Cette réponse donne comme négation de « quel que soit n, P(n) » : « il existe au moins n, P(n) ». De plus la proposition P_2 est un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle, dont la question est fermée et qui contient le quantificateur universel seulement.

La négation de « Quel que soit n, P(n) » étant « il existe au moins n, non P(n) » ; la négation de la proposition P_2 est : « Il existe au moins un entier naturel non nul n, $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel ».

Proposition P_3

La proposition P_3 est de la forme « Il existe au moins n, P(n) ». Dans la détermination de la négation de P_3, on peut s'attendre à des réponses erronées telles que : *R_1 : Il existe au moins un entier naturel n, $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.* Cette réponse donne comme négation de « il existe au moins n, P(n) »: « il existe au moins n, non P(n) ». *R_2: Quel que soit n entier naturel, $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel.* Cette réponse donne comme négation de « il existe au moins n, P(n) » : « quel que soit n, P(n) ».

De plus la proposition P_3 est un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle, dont la question est fermée et qui contient le quantificateur existentiel seulement.

La négation de « il existe au moins n, P(n) », étant, « quel que soit n, non P(n) » ; la négation de la proposition P_3 est : « quel que soit n entier naturel, $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel ».

Proposition P_4

La proposition P_4 est de la forme « quel que soit n, P(n) implique Q(n) ». Dans la détermination de la négation de P_4, on peut s'attendre à des réponses erronées telles que : *R_1 : Il existe au moins un entier naturel n, n^2 n'est pas pair et n n'est pas pair.*

Cette réponse donne comme négation de « Quel que soit n, P(n) implique Q(n) », « il existe au moins n, non P(n) et non Q(n) ».

R_2 : Il existe au moins un entier naturel n, n^2 n'est pas pair ou n n'est pas pair. Cette réponse donne comme négation de « quel que soit n, P(n) implique Q(n) » : « il existe au moins n, non P(n) ou non Q(n) ». *R_3 : Il existe au moins un entier naturel n, n^2 n'est pas pair ou n est pair.*

Cette réponse donne comme négation de « quel que soit n, P(n) implique Q(n) » : « il existe au moins n, non P(n) ou Q(n) ».

De plus la proposition P_4 est un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle dont la question est fermée et qui contient le quantificateur universel et l'implication. La négation de « Quel que soit n, P(n) implique Q(n) » étant « Il existe au moins n, P(n) et non Q(n) » ; la négation de P_4 est : « Il existe au moins un entier naturel n, n^2 est pair et n n'est pas pair ».

Pour **Njomgang Ngansop** (2013, p. 83)

> Un fait marquant en logique est que la négation d'un énoncé conditionnel est une conjonction. L'antécédent n'est pas modifié et on prend la négation du conséquent. Ainsi, pour un énoncé conditionnel, la construction de la négation respecte une syntaxe qui n'est donnée ni par la forme négative, ni par la syntaxe à l'œuvre dans la construction de la négation des énoncés quantifiés. Par exemple, la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge (\neg Q)$. Pour les énoncés complexes, la construction de la négation est récursive, c'est par exemple le cas de l'énoncé formel : $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x))$ dont la négation est $\exists x, (p(x) \wedge (\neg q(x)))$.

L´auteure montre que ces trois types d'énoncés renvoient l'étude de la négation à des types de tâches bien distincts : nier des énoncés singuliers, nier une propriété, nier une relation, nier des énoncés conditionnels, nier des énoncés quantifiés, ou encore nier des énoncés plus complexes où se combinent à la fois plusieurs connecteurs logiques et la quantification.

Proposition P_5

La proposition P_5 est de la forme « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) ». Dans la détermination de la négation de P_5, on peut s'attendre à des réponses erronées telles que : $R_1 : \exists \varepsilon > 0\ \forall \propto > 0, |x-x0| \geq \propto$ *et* $|f(x)-l| \geq \varepsilon$. Cette réponse donne comme négation de « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) », « il existe au moins x quel que soit y non P(y) et non Q(x) ».

$R_2 : \exists \varepsilon > 0\ \forall \propto > 0, |x-x0| \geq \propto$ *ou* $|f(x)-l| \geq \varepsilon$. Cette réponse donne comme négation de « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) », « il existe au moins x quel que soit y, non P(y) ou non Q(x) ».

$R_3 : \exists \varepsilon > 0\ \forall \propto > 0, |x-x_0| < \propto$ *ou* $|f(x)-l| \geq \varepsilon$. Cette réponse donne comme négation de « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) », « il existe au moins x quel que soit y, P(y) ou non Q(x) ». De plus la proposition P_5 est un énoncé formulé dans le registre des symboles dont la question est fermée et qui contient le quantificateur universel, le quantificateur existentiel et l'implication. La négation de « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) », étant, « il existe au moins x quel que soit y, P(y) et non Q(x) » ; la négation de la proposition P_5 est : « $\exists \varepsilon > 0\ \forall \propto > 0, |x-x_0| < \propto$ *et* $|f(x)-l| \geq \varepsilon$ **»**.

Nous pouvons conclure que **l**es propositions P_2 et P_3 constituent une opposition de contradiction comme définie par Aristote (1989). En effet P_2 et P_3 échangent leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire dans tous les cas où P_2 est vraie P_3 est fausse et vis- versa. On peut donc dire que P_2 est la négation de P_3 et Vis- versa.

3.1.2. Analyse a posteriori des productions des enseignants

Nous avons recueilli 20 fiches de réponses numérotées de F_1 à F_{20}. Après analyse de ces fiches de réponse, il ressort les constats suivants :

Pour la proposition P_1 :

Il y a deux types de réponses pour la négation de « P(n) implique Q(n) » à savoir :

- Un type de réponses à laquelle nous avons pu donner une interprétation logique que nous avons appelé type de réponse logique notée TRL
- Un type de réponses à laquelle nous n'avons pas pu donner une interprétation logique que nous avons appelé type de réponse non logique noté TRNL

Type de réponses logiques :

TRL1 : «non P(n) implique non Q(n) », (F_1-F_5-F_8-F_{10}-F_{17}-F_{18}-F_{19})

TRL2 : « il existe n, non Q(n) », (F_2),

TRL3 : « non Q(n) », (F_3),

TRL4 : « non q(n) implique non P(n) », (F_4-F_6-F_{13}),

TRL5 : « P(n) et non Q(n) » (F_7-F_{14}-F_{15}-F_{16}),

TRL6 : «quel que soit n, non Q(n) », (F_9)

TRL7 : «P(n) implique non Q(n) », (F_{20})

Type de réponse non logique :

TRNL1 : F_{11}

TRNL2 : F_{12}

Sur les vingt fiches de réponses, quatre seulement donnent la réponse correcte.

Pour la proposition P2 :

Il y a deux types de réponses pour la négation de « Quel que soit n P(n) » à savoir :

- Un type de réponses ayant une interprétation logique (ou type de réponses logique) noté TRL
- Un type de réponses n'ayant pas une interprétation logique (ou type de réponses non logiques) noté TRNL

Pour le type de réponses logique, nous avons identifié les réponses suivantes :

- TRL1 : « Il existe au moins n, non P(n) », (F_1- F_2-F_3-F_4-F_5-F_6-F_7-F_8-F_9-F_{10}-F_{11}-F_{14}-F_{15}-F_{16}-F_{17}),
- TRL2 : «Quel que soit n, non P(n) », (F_{19}-F_{20}),

Pour le type de réponse non logique, nous avions identifié les réponses suivantes : TRNL1 : F_{13} e TRNL2 :F_{12}

Nous constatons que sur les vingt fiches de réponses, seulement quatre ne donnent pas une réponse correcte.

Para rapport à la proposition P3, nous identifions deux types de réponses pour la négation de « Il existe au moins n P(n) ». Le premier type de réponses est celui ayant une interprétation logique (ou type de réponses logique) noté TRL. Il s´agit des réponses suivantes :

- TRL1 : «il n'existe pas n, P(n) », (F13-F19),
- TRL2 : « quel que soit n, non P(n) », (F_1-F_3-F_4-F_5-F_6-F_7-F_8-F_9-F_{10}-F_{14}-F_{15}-F_{16}-F_{20})
- TRL3 : «P(n) implique Q(n) » (F_2),
- TRL4 : « [il n'existe pas n, non P(n)] ou [il existe un seul n, non P(n)] », (F_{17}-F_{18}),

Le deuxième type de réponse non logique est celui n'ayant pas une interprétation logique (ou type de réponses non logiques) noté TRNL. En ce qui concerne ce type de réponse, nous identifions TRNL1 (F_{11}) et TRNL2 (F_{12}). Sur l´ensemble des fiches de réponse, sept ne donnent pas une réponse correcte.

Pour la proposition P4, il y a deux types de réponses pour la négation de « Quel que soit n p(n) implique Q(n) » à savoir, un type de réponses ayant une interprétation logique (ou type de réponses logique) noté TRL, et un type de réponses n'ayant pas une interprétation logique (ou type de réponses non logiques) noté TRNL

-Types de réponse logique:

- TRL1: «il existe n, non P(n) implique non q(n) », (F_1-F_2-F_3-F_4-F_5-F_{17}),
- TRL2: «non Q(n) implique il existe n, P(n) », (F_6),
- TRL3 : «il existe n, P(n) et non Q(n) », (F_7-F_{10}-F_{14}-F_{15}-F_{16}-),
- TRL4: «il existe n, P(n) implique non q(n) », (F_8),
- TRL5 : «il existe un seul n, P(n) implique non Q(n) », (F_9),
- TRL6 : «il existe n, non Q(n) et P(n) », (F_{11}),
- TRL7 : «quel que soit n, non q(n) implique non p(n) », (F_{13}-F_{19}-F_{20}),
- TRL8 : «il existe n, non q(n) implique non P(n) », (F_{18}),

Type de réponse non logique : TRNL (F_{12})

Sur les vingt fiches de réponses cinq seulement donnent une réponse correcte.

Pour la proposition P5, Il y a deux types de réponses pour la négation de « Quel que soit x il existe au moins y, P(y) implique Q(x) » à savoir : Un type de réponses ayant une interprétation logique (ou type de réponses logique) noté TRL, et un type de réponses n'ayant pas une interprétation logique (ou type de réponses non logiques) noté TRNL

Types de réponse logique :
TRL1 : « $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists \propto > 0, |f(x)\text{-}l| > \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow |x - x0| > \propto$ », (F_{13}-F_{19}),
TRL2 : « $\exists \propto > 0, |x\text{-}x_0| < \propto$ et $|f(x)\text{-}l| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_{11}),
TRL3 : « $\exists\ \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0, |x\text{-}x_0| < \propto$ et $|f(x)\text{-}l| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_7-F_{10}-F_{14}-F_{15}-F_{16})

TRL4 : « $\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0, |x-x_0| < \propto \ \Rightarrow |f(x)-l| > \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_8-F_9)
TRL5 : « $|f(x)-l| > \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0, |x-x_0| > \propto$ », (F_6),
TRL6 : «$\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0, |x-x_0| > \propto \ \Rightarrow |f(x)-l| > \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_4-F_5)
TRL7 : «$\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0\ |f(x) - l| < \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow |x-x_0| < \propto$ », (F_2-F_3)
TRL8 : « $\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0\ \forall \propto \leq 0, |x-x_0| \geq \propto \ \Rightarrow |f(x)-l| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_1-F_{17}),
TRL9: « $\exists\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0\ , |x-x_0| < \propto \Rightarrow |f(x)-l| < \boldsymbol{\varepsilon}$ », (F_{20}),
Type de réponses non logique :
TRNL1 : F_{12}
TRNL2 : F_{18}

Sur les vingt fiches de réponses cinq seulement donnent une réponse correcte. Il faut noter que conformément au libellé de la tâche seuls deux professeurs se sont identifiés. Un seul a donné la réponse correcte à toutes les questions. Contrairement à beaucoup d'autres, il a bénéficié d'un enseignement de la logique au secondaire. Il a également enseigné la logique en classe de 10e année. Ce qui pose la problématique de l'enseignement de la logique dans le système éducatif malien. Le programme actuel interdit un cours théorique sur la logique. Il demande l'introduction progressive des notions de logique chaque fois que le besoin se présente.

Nous supposons que les réponses non logiques sont une conséquence du déficit de logique dans le cursus scolaire des acteurs et cela influencera certainement son rapport au savoir « raisonnement par l´absurde ». Cela nous rapproche de Blanchard-Laville (2013, p. 136), quand elle affirme que

> En situation didactique, ce que nous allons apercevoir, ce n'est pas ce que le professeur *sait mais ce qu'il fait de ce qu'il sait*, ce jour-là, à cette heure-là, avec ce groupe-là. Ce qui apparaît dans une séance d'enseignement est la résultante de plusieurs dimensions : les modalités personnelles de son rapport au savoir soumises aux contraintes de la situation d'enseignement, lesquelles renvoient à la fois aux contraintes didactiques à strictement parler, aux contraintes institutionnelles, aux contraintes relationnelles et à ses propres « contraintes intérieures » de sujet, au sens de sujet de l'inconscient.

L´auteure a montré qu'à l'intérieur d´une situation d'enseignement, l'enseignant est amené à mettre en scène son propre rapport au savoir, au travers du discours qu'il déroule lorsqu'il s'agit d'un cours ou au travers des activités qu'il propose et des paroles qu'il ne peut manquer de prononcer pour initier ces activités, pour en effectuer « la dévolution » aux élèves, pour catalyser leur travail, ou encore animer le groupe et éventuellement pour institutionnaliser les éléments de savoir qui émergeront de la séquence. L'Institution d'enseignement lui impose d'accompagner les élèves à entrer en rapport avec le savoir en jeu.

Certaines recherches, comme celle de Héléna Siwek (1973), montrent que l'introduction de notions fondamentales de logique et la présentation de quelques lois logiques n´influencent pas nécessairement le raisonnement des élèves.

3.2. Analyse institutionnelle de la démonstration par l'absurde.

Dans un article publié en 2020, les auteurs décrivent les différents niveaux de l´enseignement de base. Ainsi, ils montrent que l'enseignement fondamental 2ème Cycle au Mali comporte trois classes : 7ème, 8ème, 9ème. Aucun des programmes de ces classes ne parle de la démonstration par l'absurde. Cependant l'utilisation est rencontrée dans les pratiques. L'enseignement secondaire général au Mali comporte trois niveaux à savoir :10ème, 11ème et terminale. Le niveau 10ème comporte une seule série (10ème commune) et le niveau 11ème comporte trois séries : 11ème science, 11ème lettre, 11ème science économique et sociale. Le niveau terminal comporte six séries : terminale science exacte, terminale science expérimentale, terminale science économique, terminale science humaine, terminale lettre et langue, terminale art et lettre. Aucun des programmes de ces différentes séries ne fait cas de la démonstration par l'absurde ni comme objet d'enseignement ni comme outil d'enseignement. Cependant la démonstration par l'absurde est souvent utilisée comme outil pour la résolution de certains problèmes dans cet ordre d'enseignement. On peut donc conclure que dans le système éducatif malien la démonstration par l'absurde n'est pas un élément de programme avant l'Enseignement Supérieur.

Les auteurs montrent aussi dans le même article, les résultats de l´analyse des manuels scolaires maliens de ce niveau d´enseignement. Par rapport aux manuels scolaires, l´analyse a porté sur deux collections dont un au niveau de l'enseignement fondamental 2ème cycle et un au niveau de l'enseignement secondaire général. Il s'agit de la collection Institut Pédagogique National Bamako (I.P.N Bamako) pour l'enseignement fondamental 2ème cycle et la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) pour l'enseignement secondaire général. Ce choix se justifie par le fait que ces deux collections constituent les outils de base pour les deux ordres d'enseignement au Mali.

La collection Institut Pédagogique National Bamako (IPN Bamako) du niveau fondamental 2ème cycle comporte trois livres (7ème année, 8ème année et 9ème année). C'est dans le livre de 8ème année que la démonstration par l'absurde est utilisée. Cette utilisation est explicite dans certains cas et implicite dans d'autres. Quant à la collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) du niveau secondaire général, nous observons qu'elle comporte huit livres à savoir : 2ème S, 2ème lettre, 1ère SM, 1ère SE, 1ère lettre, Terminale SM, Terminale SE, Terminale lettre. C'est dans le livre de 2ème S que la démonstration par l'absurde est utilisée de façon explicite dans la démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de 2. Son principe est défini dans le livre et son utilisation est demandée dans la résolution de certains exercices.

Il ressort de l'analyse institutionnelle que contrairement aux programmes, les manuels scolaires font cas de la démonstration par l'absurde. Si la collection IPN passe sous silence une définition de la démonstration par l'absurde, la collection CIAM définit son principe et demande son utilisation dans des exercices. Il faut tout de même signaler que la démonstration commence dans le système éducatif malien à partir de la 8ème année.

3.3. Problématique et question de recherche

Dans les activités mathématiques, la démonstration occupe une place importante. Si certaines méthodes de démonstration font l'objet d'un enseignement, ce n'est pas le cas pour la démonstration par l'absurde. En effet, que ce soit dans les documents officiels (programmes et savoir-faire) ou les manuels scolaires, la démonstration par l'absurde ne fait pas l'objet d'une étude théorique au niveau de l'enseignement secondaire au Mali. Elle n'est pas en général définie. Cependant, elle est utilisée dans les classes et dans les manuels scolaires pour la résolution de problèmes. Si dans certains problèmes son utilisation n'est pas nécessaire, dans d'autre elle est incontournable.

Nous nous posons alors les questions suivantes : Au Mali la démonstration par l'absurde est-elle considérée comme étant au-dessus des capacités d'un élève du secondaire ? Au regard d'un énoncé mathématiques, le futur enseignant reconnait-il la nécessité d'une démonstration par l'absurde ou alors peut-il le transformer de manière qu'une démonstration par l'absurde s'impose ?

Nous faisons alors l'hypothèse suivante : La démonstration par l'absurde pose des difficultés aux enseignants dans son utilisation et se confond souvent à la démonstration par contraposée.

4 ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

Dans ce chapitre, nous analysons la démonstration par l´absurde du point de vue mathématique et logique.

4.1. Analyse de la démonstration par l'absurde comme savoir de référence

Nous considérons la définition donnée par Jean Louis Gardies dans son ouvrage intitulé : « le raisonnement par l'absurde » (presse universitaire de France-paris, 1991) comme définition de référence. L´auteur appelle

> […] raisonnement par l'absurde ou raisonnement apagogique, le raisonnement qui, pour établir une thèse θ démontre que la négation de θ entraîne, au terme d'un certain nombre d'inférences, soit deux conséquences α et (non α) contradictoires l'une de l'autre soit deux conséquences α et β dont on connaît l'incompatibilité logique ». (GARDIES, 1991, p. 10)

Le même auteur désigne par « raisonnement ostensif » ou «raisonnement direct », en opposition au « raisonnement apagogique », un raisonnement composé d'une succession d'inférences aboutissant à la thèse θ à démontrer. Cependant, il faut remarquer que toute démonstration aboutissant à une contradiction n'est pas nécessairement un raisonnement par l'absurde comme défini par Jean Louis.

4.2. Interprétation logique de la démonstration par l'absurde

Le principe de la démonstration par l'absurde repose sur la négation. C'est pourquoi nous donnons dans les tableaux ci-dessous la négation des principales propositions que l'on peut rencontrer dans une démonstration par l'absurde, à savoir, les propriétés de la forme p, (non p), p ou q, p et q, il existe au moins x tel que p(x), quel que soit x, p(x) et la proposition si p alors q.

Notation:

$\neg$ P désigne « la négation de p »

P$\wedge$q désigne « p et q »

P$\vee$q désigne « p ou q »

($\exists$x) p(x) désigne « il existe au moins x tel que p(x) »

($\forall$ x) p(x) désigne « quel que soit x p(x) »

p$\Rightarrow$q désigne « si p alors q »

V désigne « vrai »

F désigne « faux »

Les cadres suivants donnent respectivement les propositions, leurs négations et l'interprétation du raisonnement par l'absurde

Cadre : tableau de valeur

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	F

Source : les auteurs

Cadre : Tableau de valeur des connecteurs

Propositions	Négations
p	$\neg p$
$\neg p$	p
$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$
$(\exists x)\ p(x)$	$(\forall x) \neg p(x)$
$(\forall x)\ p(x)$	$(\exists x) \neg p(x)$
$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$

Source : les auteurs

On remarque qu'il est impossible d'avoir p et $\neg p$ vrais en même temps, $P \vee q$ et $\neg p \wedge \neg q$ vrais en même temps, $P \wedge q$ et $\neg p \vee \neg q$ vrais en même temps, e $P \Rightarrow q$ et $p \wedge \neg q$ vrais en même temps.

4.3. Critères de reconnaissance et caractéristiques d'un texte de démonstration par l'absurde

Dans la résolution d'un problème, la démonstration par l'absurde est sous-entendue dans l'expression « car si non + conditionnel » et explicite dans les expressions «d'où contradiction... », « or impossible donc... », « ce qui est absurde… ».

Un texte de démonstration par l'absurde est caractérisé par des phrases articulées entre elles par des mots et expressions tels que «sinon »; « dans le cas contraire » ; «supposons que» pour commencer, puis «contradiction»; « ce qui est absurde»; «ce qui est impossible» pour finir.

Nous admettons la structuration faite par Anne Scholl(1998) à savoir qu'un texte de démonstration par l'absurde est composé de trois étapes. La première étape (ou démarche principale), qui constitue l'étape clé d'une démonstration par l'absurde car c'est à ce niveau que l'on ajoute aux hypothèses la négation du but pour aboutir à la contradiction. La deuxième étape dans laquelle on utilise des résultats extérieurs (outils) (théorèmes, définitions, propriétés…). Cette étape se présente sous deux formes :

- une première forme où on a une suite d'inférences linéaire: $H_0 \Rightarrow H_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow H_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow H_n$ c'est-à-dire une suite d'implications entre des hypothèses.
- une deuxième forme où on a une suite d'inférences non linéaire: $H_i \wedge T_i \Rightarrow H_{i+1}$ pour $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ c'est à dire qu'il faut ajouter une tautologie à un moment de la démonstration pour continuer où H_i désigne une hypothèse et T_i une tautologie.

La troisième étape dans laquelle on obtient la contradiction c'est à dire une proposition et sa négation ou une proposition logique fausse. Cette étape permet de conclure la démonstration.

En synthétisant cette étude, nous pouvons dire que cette étude nous a permis de voir comment la démonstration par l'absurde est perçue en mathématique et en logique. Du point de vue mathématique, elle nous fait comprendre que la démonstration par l'absurde est un processus qui se termine par une contradiction, mais que la réciproque, c'est-à-dire un processus qui se termine par une contradiction, n'est pas forcément une démonstration par l'absurde.

De plus on constate que la démonstration par l'absurde n'est pas un processus global, mais un processus qui se déroule en trois phases, à savoir :

- la démarche principale où l'on ajoute la négation de ce qui est à démontrer aux hypothèses,
- la suite d'inférences qui constitue le corps de la démonstration,
- la contradiction qui permet de conclure.

Du point de vue logique, elle nous a permis de faire les liens entre les différentes propositions et leurs négations et le cas particulier de l'implication dont la négation utilise les connecteurs logiques au lieu de l'implication.

5 PHASE EXPÉRIMENTALE

Dans cette partie, nous avons procédé au choix des problèmes, à l'analyse a priori de ces problèmes, à la passation des items et à l'analyse a postériori des productions des élèves-professeurs.

5.1. Public cible et organisation didactique

Notre étude expérimentale s'adresse à des élèves- professeurs en Master à l'École Normale Supérieure de Bamako. Ces étudiants sont titulaires d'une licence de mathématiques à la faculté des sciences et technique (FST) de l'université des sciences des techniques et des technologies de Bamako (USTTB). Ils ont reçu un enseignement de la démonstration par l'absurde à la faculté dans le cadre de l'algèbre et à l'ENSup dans le cadre de la logique. Nous justifions ce choix par le fait que ce sont des futurs enseignants qui seront en contact avec la problématique de l'absurde dans l'enseignement secondaire général.

Le travail proposé aux Élèves Professeurs a été réalisé en une séance. La première phase est le travail individuel (environ 30 mn). Dans cette phase chaque élève professeur s'approprie le problème en vue de préparer la deuxième phase. La deuxième phase est le travail en groupes (3 Elèves- Professeurs par groupe) formés par les étudiants eux-mêmes pour environ (1h30mn). Dans cette phase chaque groupe désigne un rapporteur qui rédige la production du groupe.

Nous mettons les Élèves Professeurs dans une situation de résolution de problèmes par la méthode de démonstration par l'absurde.

Il s'agit de la résolution de trois problèmes dont, deux de géométrie et un de l'analyse.

Le travail se fait dans le contexte papier- crayon. Pour la phase de groupe, chaque groupe présente une production qui contient les solutions du groupe. Il faut noter la présence d'observateurs à chaque séance. La consigne donnée à chaque observateur est de ne pas intervenir dans les questions de fond (recherche) mais de régler les questions de forme (formulation de l'énoncé, formulation de questions etc…).

Nous proposons aux Élèves Professeurs trois tâches relatives à nos variables didactiques liées aux trois problèmes proposés. La première tâche (problème 1) est relative aux valeurs des variables $V_{1\text{-}1}$, $V_{2\text{-}1}$ et $V_{3\text{-}1}$. La deuxième tâche (problème 2) est relative aux valeurs $V_{1\text{-}1}$, $V_{2\text{-}1}$ et $V_{3\text{-}2}$. La troisième tâche (problème 3) est relative aux valeurs $V_{1\text{-}1}$, $V_{2\text{-}2}$ et $V_{3.8}$.

Les problèmes ont été choisis relativement aux variables didactiques V_1, V_2, V_3 où

V_1 est relatif au registre de formulation de l'énoncé du problème. Elle peut prendre deux valeurs à savoir :

$V_{1.1}$: l'énoncé est formulé dans le registre de la langue naturelle ;

$V_{1.2}$: l'énoncé est formulé dans le registre des symboles.

V_2 est relatif à la formulation des questions des problèmes. Elle peut prendre trois valeurs à savoir :

$V_{2.1}$: la question est fermée ;

$V_{2.2}$: la question est ouverte ;

$v_{2.3}$: la question est semi-ouverte/semi-fermée.

V_3 est relatif à la présence ou non de l'implication et des quantificateurs. Elle peut prendre huit valeurs à savoir :

$V_{3.1}$ -Enoncés ne contenant ni l'implication ni quantificateur

$V_{3.2}$-Enoncés contenant l'implication seulement

$V_{3.3}$-Enoncés contenant le quantificateur universel seulement

$V_{3.4}$-Enoncé contenant le quantificateur existentiel seulement

$V_{3.5}$-Enoncé contenant l'implication et le quantificateur universel

$V_{3.6}$-Enoncé contenant l'implication et le quantificateur existentiel

$V_{3.7}$-Enoncé contenant le quantificateur universel et le quantificateur existentiel

$V_{3.8}$-Enoncé contenant l'implication, le quantificateur universel et le quantificateur existentiel. (Bamba, 2019)

Dans ce qui suit, nous discutons nos choix et analysons les situations-problèmes que nous avions choisi.

5.2. Choix et analyse des situations-problèmes

Problème 1 : Démontrer par l'absurde que les médiatrices d'un triangle se coupent en un point (ou sont concourantes).

Problème 2 : Soit d, d_1 et d_2 trois droites distinctes deux à deux. Démontrer par l'absurde que si d_1 et d_2 sont parallèles à d, alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles.

Problème 3 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$. Démontrer par l'absurde la proposition suivante : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \propto > 0\ \forall x \in Df\ |x+2| < \propto \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$.

Dans ce qui suit nous parlerons de bonne interprétation de la démarche principale lorsque la négation de la proposition à démontrer est correcte et mauvaise interprétation de la démarche principale lorsque cette interprétation est incorrecte.

5.2.1. Problème 1 :

Le problème 1 est une affirmation. Il est construit sur la base des valeurs des variables didactiques $V_{1\text{-}1}$, $V_{2\text{-}1}$ et $V_{3\text{-}1}$, c'est-à-dire un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle, fermé, ne contenant ni quantificateur ni l'implication.

Dans la résolution de ce problème, on s'attend à moins de difficulté dans l'interprétation de la démarche principale. En effet le problème P_1 étant une affirmation il suffit de considérer l'affirmation contraire c'est-à-dire « les médiatrices d'un triangle ne se coupent pas en un point » ou encore « les médiatrices d'un triangle sont parallèles entre elles » ou «les médiatrices d'un triangle ne sont pas concourante ».

Cependant dans l'établissement de la suite d'inférence on peut s'attendre à plus de difficultés. En effet il y a deux cas possibles :

1^er^ cas : Considérer que deux des médiatrices se coupent en un point et que ce point n'appartient pas à la troisième pour aboutir à la contradiction.

2^e^ cas : Considérer que les trois médiatrices sont parallèles entre elles pour aboutir à la contradiction.

Comportements attendus :

On peut s'attendre à :

- Détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer) mais avec des difficultés dans l'utilisation des propriétés de la médiatrice.
- Détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer avec des difficultés dans l'identification de la contradiction pour conclure.
- Détermination incorrecte de la négation de la proposition à démontrer).

Solutions du problème 1 :

Solution 1:

Cette solution que nous décrivons ci-dessous est relative au premier cas.

Soit ABC un triangle. D_1, D_2 et D_3 les médiatrices respectives des côtés [AB], [BC] et [CA]. Supposons que D_1 et D_2 se coupent en un point O et que O n'appartient pas à D_3.

O existe car D_1et D_2 étant respectivement perpendiculaires à [AB] et [BC], elles sont sécantes. Puisque O appartient à D_1 et à D_2, OA=OB=OC. Ce qui signifie que OA=OC donc O appartient à la médiatrice de [CA] c'est à dire D_3. Cela contredit : « O n'appartient pas à D_3 ». Donc O appartient à D_3. Les médiatrices se coupent en un point.

Une particularité de cette solution est la transformation de l'affirmation en une implication à savoir : « si deux médiatrices d'un triangle se coupent en un point alors ce point appartient à la troisième médiatrice ».

Les connaissances mobilisées pour cette solution du problème 1 sont entre autres :

- La médiatrice d'un segment est perpendiculaire à ce segment.
- deux droites respectivement perpendiculaires à deux droites sécantes sont sécantes.
- -tout point situé sur la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment ;
- la transitivité de l'égalité ;

Solution 2:

Cette solution est relative au deuxième cas que nous décrivons ci-dessous.

Soit ABC un triangle ; D_1, D_2 et D_3 les médiatrices respectives des côtés [AB], [BC] et [CA]. Supposons que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles entre elles. D_1 et D_2 sont parallèles signifie que (AB) et (BC) sont parallèles car D_1 et D_2 sont respectivement perpendiculaires à [AB] et à [BC]. Cela est impossible car ABC est un triangle. Donc D_1 et D_2 se coupent en un point. Ce qui contredit l'hypothèse D_1 et D_2 parallèles entre elles et en général l'hypothèse D_1, D_2 et D_3 parallèles entre elles. Donc les médiatrices se coupent en un point.

Les connaissances mobilisées pour cette solution du problème 1 sont :

- la médiatrice d'un segment est perpendiculaire à ce segment ;
- si deux droites parallèles entre elles sont respectivement perpendiculaires à deux droites données alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

5.2.2. Problème 2:

Le problème 2 est construit sur la base des valeurs des variables didactiques $V_{1\text{-}1}$, $V_{2.1}$ et $V_{3.3}$ c'est-à-dire un énoncé formulé dans le registre de la langue naturelle, fermé, contenant l'implication seule sous forme implicite. Il est donc de la forme « P implique Q » avec P : « d_1 et d_2 sont parallèles à d » et Q : « d_1 et d_2 sont parallèles entre elles ». Dans la résolution du problème 2, on s'attend à plus de difficultés dans la démarche principale vu les fiches de réponses de la pré-expérimentation.

Comportements attendus :

- Détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer mais avec des difficultés dans l'utilisation des propriétés des droites parallèles.

- Détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer avec des difficultés dans l'identification de la contradiction pour conclure.

- Détermination incorrecte de la négation de la proposition à démontrer).

La solution suivante qui représente la démonstration par contraposée du problème 1. Supposons que d_1 et d_2 sont parallèles à d et que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles entre elles.

Soit O le point d'intersection de d_1 et d_2. Alors d_1 et d_2 sont deux droites distinctes passant par O ; d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à d.

Solution du problème 2 :

Soit d, d_1 et d_2 trois droites distinctes. Supposons que d_1 et d_2 sont parallèles à d et que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles entre elles.

d_1 et d_2 sont parallèles à d et d_1 et d_2 se coupent en point. Ce ci contredit le théorème « par un point donné il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée ». Donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes; elles sont parallèles.

Les connaissances mobilisées pour la résolution du problème 2 sont les suivantes :

-par un point donné on ne peut mener qu'une droite parallèle à une droite donnée,

-dans le plan, deux droites qui ne sont pas parallèles entre elles admettent un point d'intersection.

5.2.3- Problème 3:

Le problème 3 est construit sur la base des valeurs de variables didactiques $V_{1\text{-}2}$, $V_{2\text{-}1}$ et $V_{3\text{-}14}$ c'est-à-dire un énoncé formulé dans le registre des symboles, fermé contenant le quantificateur universel le quantificateur existentiel et l'implication sous forme explicite. Dans la résolution du problème 3, on s'attend à moins de difficulté dans la démarche principale vue la pré-expérimentation.

Comportements attendus :

-Une détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer avec des difficultés dans l'établissement de la suite d'inférences.

-Une détermination correcte de la négation de la proposition à démontrer avec des difficultés dans l'identification de la contradiction.

-Une détermination incorrecte de la négation de la proposition à démontrer.

Solution du problème 3:

Supposons que : $\exists \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \forall \propto > 0\ \exists x \in \mathrm{Df}\ |x+2| < \propto\ et\ |f(x)+4| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$

$| f(x)+4 | \geq \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{x^2-4}{x+2}+4| \geq \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow |\frac{x^2+4x+4}{x+2}| \geq \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow |x+2| \geq \boldsymbol{\varepsilon}$

En posant $\propto = \varepsilon$ on a : $|x+2| < \varepsilon$ et $| x + 2 | \geq \varepsilon$. Ce qui est absurde.

Donc $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists \propto > 0\ \forall x \in \mathrm{Df}\ |x+2| < \propto \Rightarrow |f(x)+4| < \boldsymbol{\varepsilon}$

Les Connaissances mobilisées pour la résolution du problème 3 sont :

-$(\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q))$

-la négation du quantificateur existentiel est le quantificateur universel et vis-versa

$-(\neg <) \Leftrightarrow (\geq)$.

-la proposition : «A est strictement inférieur B et A est supérieur ou égal à B» est fausse.

5.3. Analyse a posteriori

Par rapport au problème 1, il ressort de l'analyse des productions que cinq groupes sur sept ne présentent pas de difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde. Il s'agit des groupes G_1, G_2, G_3, G_4, G_7. Deux groupes présentent des difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde. Il s'agit des groupes G_5 et G_6. Nous pouvons donc dire que par sa construction le problème 1 a posé moins de difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde.

Il faut noter que les groupes qui ne présentent pas de difficulté liée au principe de la démonstration par l'absurde présentent des difficultés d'ordre mathématique. Le groupe 1 par exemple confond médiatrice et médiane comme on peut l´observer dans sa production représentée par la figure 1.

solution

Soit la proposition P : Les mediatrices d'un triangle se coupenten un point.
Soit 7P : Les mediatrice d'un triangle ne se coupent pas en un point
Montrons que 7P est fausse
Soit ABC ce triangle
d_1 : la droite passant par le sommet C et le milieu du segment [AB]
d_2 : la droite passant par le sommet B et le milieu du segment [AC]
d_3 : la droite passant par le sommet A et le milieu du segment [BC]
Forcement d_1, d_2 et d_3 sont secantes en un point. Ce qui est absurde. D'où les médiatrices d'un triangle se coupent en un point

Figure 1: Extrait de la production du groupe 1
Source : Bamba(2019, p. 106)

Concernant les groupes 2, 3 et 4 ils partent du fait que les médiatrices se coupent deux à deux pour conclure l'égalité entre les trois points d'intersection sans justification. Ce qui n'est pas évident (Figure 2) :

Supposons que les médiatrices d'un triangle ne sont pas concourantes.
- Soit ABC est un triangle quelconque, et d_1, d_2, d_3 les médiatrices respectives des segment [AB], [AC] et [BC].

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp [AB] \\ d_2 \perp [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \cap d_2 = I_1 \quad ①$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp [AB] \\ d_3 \perp [BC] \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \cap d_3 = I_2 \quad ②$$

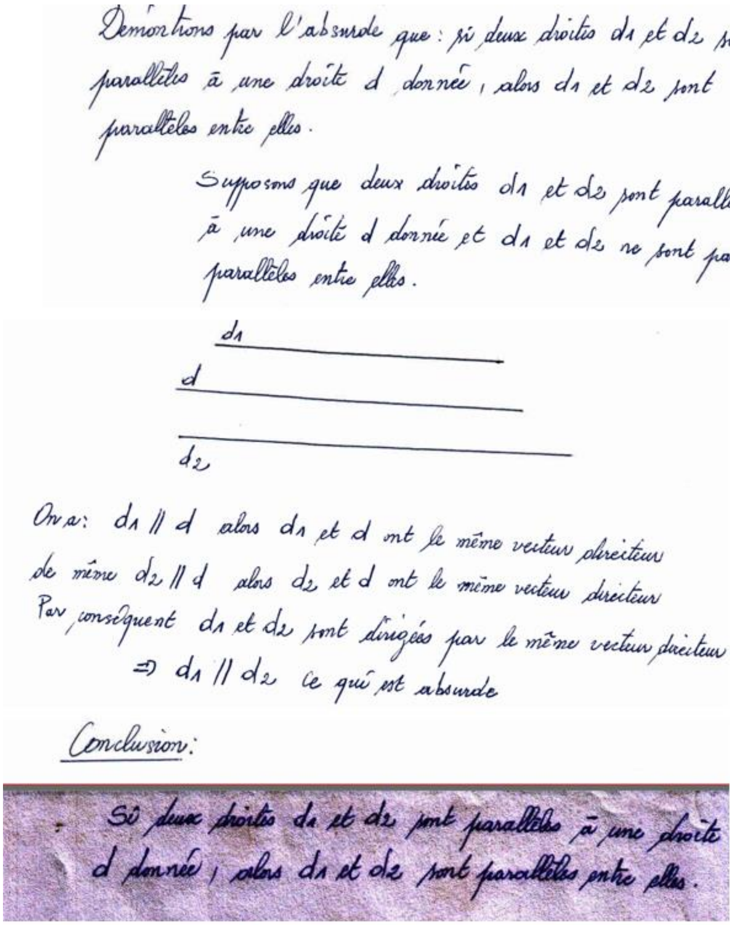
$$\left.\begin{array}{l} d_3 \perp [BC] \\ d_2 \perp [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow d_3 \perp d_2 = I \quad ③$$

De ①, ② et ③ on a : $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = I$ ce qui contredit l'hypothèse
D'où les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Figure 2: Extrait de la production du groupe 2
Source : Bamba (2019, p. 107)

Le groupe 7 change de contexte en considérant un triangle rectangle au lieu d'un triangle quelconque et se sert de la figure comme moyen de validation (voir production ci-dessous). Nous présentons ci-dessous les productions des groupes 5 et 6 qui présentent des difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde

En ce qui concerne le problème 2, l'analyse des productions trois groupes montre que les étudiants ne présentent pas de difficulté liée au principe de la démonstration par l'absurde. Il s'agit des groupes G_2, G_3, G_7. Quatre groupes présentent des difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde. Il s'agit des groupes G_1, G_4, G_5 et G_6. Par sa construction le problème 2 a posé plus de difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde.


Démontrons par l'absurde que : si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une droite d donnée, alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles.

Supposons que deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une droite d donné et d_1 et d_2 ne sont pas parallèles entre elles.

On a : $d_1 // d$ alors d_1 et d ont le même vecteur directeur
de même $d_2 // d$ alors d_2 et d ont le même vecteur directeur
Par conséquent d_1 et d_2 sont dirigés par le même vecteur directeur
$\Rightarrow d_1 // d_2$ ce qui est absurde

Conclusion :

Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une droite d donné, alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles.

Figure 3: Production du groupe 7
Source : Bamba (2019, p. 113)

Il faut noter que parmi les groupes qui ne présentent pas de difficulté liée au principe de la démonstration par l'absurde deux présentent des difficultés d'ordre mathématique. Il s'agit des groupes 2 et 3. Ces groupes réécrivent la proposition à démontrer pour conclure sans justification. (Voir les deux productions ci-dessous). Contrairement aux deux autres groupes cités ci-dessus, le groupe 7 ne présente pas de difficulté d'ordre mathématique (Figure 3).

Nous présentons ci-dessous un exemple de production qui présente des difficultés liées au principe de la démonstration par l'absurde

Le groupe 1 est dans la logique d'une démonstration par contraposé quand il suppose que la négation de la conclusion est vraie. Mais dans sa démarche il ne fait pas une contradiction relative à la contraposé. Le groupe présente donc des difficultés liées à la démonstration par l’absurde (Figure 4).

Demontrons par l'absurde que si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une droite d alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles

Par définition $d_1 // d \Leftrightarrow d_1 \cap d = \phi$

$d_2 // d \Leftrightarrow d_2 \cap d = \phi$

supposons que : $d_1 \cap d_2 \neq \phi$

$(d_1 \cap d) \cap (d_2 \cap d) = \phi$ alors $d \cap (d_1 \cap d_2) = \phi$ ~~et d~~

alors $(d_1 \cap d_2) = \phi$ ce qui contredit $d_1 \cap d_2 \neq \phi$

d'où d_1 et d_2 sont parallèles

Figure 4: Extrait de la production du groupe 1
Source : Bamba (2019, p. 114)

Par rapport au problème 3, il ressort de l’analyse des productions que tous les groupes présentent des difficultés liées au principe de la démonstration par l’absurde. En effet aucun groupe n’a pu interpréter la négation de la proposition à démontrer. On peut donc dire que le problème de type ($V_{1.2}$, $V_{2.1}$, $V_{3.8}$) a posé plus de difficulté aux élèves-professeurs contrairement aux enseignements en classe qui ont eu plus de réussite. Il faut noter que le groupe 5 n’a pas abordé le problème 3. Malheureusement faute d’interview la raison n’est pas connue. Concernant les difficultés d’ordre mathématique le constat est le suivant :

- Les groupes 1 et 6 présentent des difficultés liées à l’implication. En effet pour le groupe 1 la négation de « P implique Q » est « non P implique non Q ». Pour le groupe 6 la négation de « P implique q » est « P implique non Q »
- Les groupes 2, 3 et 7 présentent des difficultés liées aux quantificateurs. En effet ces groupes n’appliquent pas la négation aux quantificateurs
- Le groupe 4 présente des difficultés liées aux quantificateurs et à l’implication. En effet le groupe considère que la négation de « P implique Q » est « non P implique non q ». En prenant comme négation de « pour tout x élément de Df », « il existe au moins un x non élément de Df », il rend la proposition impossible.

5.4. Tableaux récapitulatifs de l'analyse

Nous synthétisons dans le tableau 1, les difficultés liées au problème 1, mises en évidence par l´analyse des productions de nos étudiants ayant participé à la phase expérimentale.

Tableau 1: Synthèse des résultats du problème 1

Problème 1 / **Groupes**	**Types de réponses**		
	Pas de difficulté liée au principe de l'absurde		**Difficultés liées au principe de l'absurde**
	Difficulté liée aux maths	**Pas de difficulté liée aux maths**	
G_1	X		
G_2	X		
G_3	X		
G_4	X		
G_5			x
G_6			x
G_7	X		
Total	0 5		02

Source : Bamba (2019, p. 124)

Le tableau 2 synthétise les difficultés liées au problème 2, mises en évidence par l´analyse des productions de nos étudiants ayant participé à la phase expérimentale.

Tableau 2: Synthèse des résultats du problème 2

Problème 2 / **Groupes**	**Types de réponses**		
	Pas de difficulté liée au principe de l'absurde		**Difficultés liées au principe de l'absurde**
	Difficulté liée aux math	**Pas de difficulté liée aux math**	
G_1			x
G_2	X		
G_3	X		
G_4			x
G_5			x
G_6			x
G_7		x	
Total	02	01	04

Source **:** Bamba (2019, p. 124)

Nous listons dans le tableau 3, les difficultés liées au problème 3, mises en évidence par l´analyse des productions de nos étudiants ayant participé à la phase expérimentale.

Tableau 3: Synthèse des résultats du problème 3

Problème 3 / **Groupes**	**Types de réponses**		
	Difficultés liées au principe de l'absurde		Pas de difficulté liée au principe de l'absurde
	Difficulté liée à l'implication	**Difficulté liée aux quantificateurs**	
G_1	X		X
G_2		x	X
G_3		x	X
G_4	X	x	X
G_5			X
G_6	X		X
G_7		x	X

Source : Bamba (2019, p. 125)

Pour le problème 1, l´analyse des productions des étudiants révèle effectivement que cinq groupes sur sept ont pu interpréter de façon correcte la démarche principale de la démonstration par l´absurde. Quant aux comportements attendus, l'analyse des productions confirme les deux types de comportement, à savoir une interprétation correcte de la démarche principale avec des difficultés d'ordre mathématique (G1, G2, G3, G4, G7) et une interprétation incorrecte de la démarche principale (G5, G6).

Pour le problème 2, nous avons prévu plus de difficultés dans l'interprétation de la démarche principale. Cela a été confirmé par l'analyse des productions des étudiants, sujets de notre recherche. En effet, quatre groupes sur sept présentent des difficultés dans l'interprétation de la démarche principale, mais avec des difficultés d'ordre mathématique (G2, G3, G7) et une interprétation incorrecte de la démarche principale (G1, G4, G5, G6).

Quant au problème 3, l'analyse des productions montre contrairement à l'analyse a priori qu'aucun groupe n'a pu interpréter correctement la démarche principale. Ce qui fait qu'en termes de comportements attendus seule l'interprétation incorrecte de la démarche principale apparait dans les productions. On peut donc se poser la question : Pourquoi les professeurs en classe ont mieux réussi que les Élèves Professeurs dans l'interprétation de la démarche principale à ce niveau ?

6 CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail nous avons fait une revue de la littérature portant sur quelques travaux existants sur la démonstration par l'absurde. Cette revue nous a réconfortés dans la formulation de notre problématique, de nos questions de recherche et de notre hypothèse. Pour étudier la démonstration par l'absurde par rapport à l'enseignement, nous avons fait référence à l'analyse des documents officiels (programmes et savoirs - faire) au niveau de l'enseignement fondamental 2^{e} cycle et de l'enseignement secondaire au Mali d'une part et des manuels de deux collections dont l'un au niveau fondamental et l'autre au niveau secondaire, d'autre part (Bamba e Almouloud, 2020). Cette analyse nous a permis de constater qu'aucun des documents officiels des deux niveaux d'enseignement cités ci-dessus ne fait cas de la démonstration par l'absurde.

S'agissant des manuels scolaires le constat est le suivant :

- niveau fondamental : un seul manuel sur les trois de la collection utilise la démonstration par l'absurde dans les exercices et les activités sans pour autant le nommer.
- niveau secondaire : comme au niveau fondamental un manuel sur huit utilise la démonstration par l'absurde sans la nommer.

De plus elle a constitué un élément clé dans la formulation de notre problématique de recherche à savoir l'utilisation de la démonstration par l'absurde dans les manuels scolaires et les pratiques de classe malgré son absence dans les documents officiels.

Parlant de l'étude mathématique de la démonstration par l'absurde, nous avons fait :

- une analyse de la démonstration par l'absurde comme savoir de référence en considérant la définition donnée para Jean Louis Gardies dans son ouvrage intitulé : « le raisonnement par l'absurde » (presse universitaire de France-paris 1991) comme définition de référence.
- une interprétation logique de la démonstration par l'absurde en donnant la négation des principales propositions que l'on peut rencontrer dans une démonstration par l'absurde car la négation est la base de la démonstration par l'absurde.
- la structuration d'un texte de démonstration par l'absurde en trois étapes à savoir une première étape appelée démarche principale où l'on ajoute aux hypothèses la négation de ce qu'on veut démontrer, une deuxième étape appelée suite d'inférences où l'on utilise les résultats extérieurs (outils) (théorèmes, définitions, propriétés, …), une troisième étape où l'on obtient la contradiction Anne Scholl (1998)

Nous avons également fait référence à la classification des types de problèmes mettant en jeu la démonstration par l'absurde (Bamba, 2018). Ce qui nous a permis de faire le choix de nos variables didactiques pour la construction des problèmes de l'expérimentation.

Parlant de l'expérimentation, nous avons d'abord fait une pré-expérimentation à l'endroit des professeurs évoluant en classe au secondaire sur la négation. Cette pré-expérimentation a joué un rôle important dans la formulation de notre hypothèse, à savoir que la démonstration par l'absurde pose des difficultés aux enseignants dans son utilisation et se confond souvent à la démonstration par contraposée. Elle nous a permis également de constater que pour la formation des enseignants au Mali, il est nécessaire d'introduire un cours de logique dans les programmes afin de les préparer à la démonstration en général et la démonstration par l'absurde en particulier.

Pour répondre à nos questions de recherche nous avons proposé une expérimentation au Élèves Professeurs en master à l'École Normale Supérieure de Bamako. Ces étudiants ont été mis en situation de résolution de trois problèmes (deux de géométrie, un de l'analyse) par la méthode de démonstration par l'absurde.

L'analyse a postériori des productions nous a permis de constater que :

- les élèves-professeurs ont des difficultés à établir les trois étapes d'une démonstration par l'absurde.
- ils confondent la démonstration par l'absurde et la démonstration par contraposée.

Vu les résultats de la pré-expérimentation et de l'expérimentation, on peut affirmer que les enseignants au niveau de l'enseignement secondaire au Mali présentent des difficultés d'ordre logique en plus des difficultés d'ordre mathématique dans les démonstrations mettant en jeu le raisonnement par l´absurde. Dans le cas particulier de la démonstration par l'absurde, la première des difficultés se trouve au niveau de la négation qui est un élément de logique. Pour éventuellement remédier à ce déficit, il serait souhaitable d'introduire une étude théorique de la logique dans les programmes de l'enseignement secondaire et de préférence depuis la 10e année.

RÉFÉRENCES

Almouloud, Saddo Ag (2007). Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR.

Bachellet, A. (1999) : Travail d'Étude et de Recherche (TER) ; UJF

Bamba, A. La démonstration par l'absurde : étude épistémologique et didactique**.** Thèse de doctorat Université des Sciences des techniques et des technologies de Bamako, 2019.

Bamba, A., Almouloud, Saddo Ag.(2020). Étude épistémologique de la démonstration par l'absurde. REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 15, Fluxo Contínuo, p. 156-176

Blanchard-Laville Claudine (2013). Du rapport au savoir des enseignants, Presses Universitaires de France | « Journal de la psychanalyse de l'enfant », 2013/1 Vol. 3 | pages 123-154, in : https://www.cairn.info/revue-journal-de-la-psychanalyse-de-l-enfant-2013-1-page-123.htm

Brousseau Guy. (1997) : Théories des situations didactiques, Conférence de Montreal, http://math.unipa.it~grim brousseau_montreal_03.pdf

Brousseau, Guy. (1998). Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cambrésy-Tant, V. Cambrésy, D., Carpentier, S. (1998) : **Autour** du **raisonnement** par l'**absurde**. IUFM Nord - Pas de Calais. 2 bis, rue Parmentier - 59650 Villeneuve d'Ascq

Gardies J. L(1991). Le raisonnement par l'absurde » ; PUF, Paris.

Durand-Guerrier V, Njomgang-Ngansop J (2009). Questions de logique et de langage à la transition secondaire - supérieur. L'exemple de la négation). EMF 2009 – Groupe de travail 7 Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur (in *http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Durand_Ngansop.pdf, accès 30/10/2018)*

Njomgang Ngansop Judith (2013)**,** Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. *Une étude de cas au Cameroun.* Thèse De L'université de Lyon **délivrée par** L'Université Claude Bernard Lyon 1. In : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01127648/document

Scholl, A. (1998) : Travail d'Etude et de Recherche (TER) ; UJF

Siwek Héléna (1973). Logique formelle et raisonnement naturel des élèves dans l'enseignement de la mathématique: Un fragment d'expérience, Educational Studies in Mathematics, Vol. 5, No. 1 (Apr., 1973), pp. 23-37, Published By: Springer

Tavan, O. (1999). Travail d'Étude et de Recherche (TER). UJF.

Touré Krouélé (2018). Rapport au savoir mathématique chez les enseignants du primaire, Rev. ivoir. anthropol. sociol. KASA BYA KASA, *n° 38, 2018.*

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Démonstration par l’absurde: une épine dans l´enseignement et l´apprentissage des mathématiques - une étude de cas au Mali

Aboubacar Bamba
Doutorado em Didática da Matemática pela Université Des Sciences, Des Techniques Et Des Technologies De Bamako (USTTB) - Mali
Departamento de Matemática da École Normale Supérieure de Bamako, Mali.
bambaboucar@yahoo.fr
https://orcid.org/0000-0001-6079-754X

Saddo Ag Almouloud
Doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I - França
Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Brasil
saddoag@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo -SP, cep. 02464--050

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: A. Bamba, S. A. Almouloud
Coleta de dados: A. Bamba, S. A. Almouloud
Análise de dados: A. Bamba, S. A. Almouloud
Discussão dos resultados: A. Bamba, S. A. Almouloud
Revisão e aprovação: A. Bamba, S. A. Almouloud

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto dados é oriundo das fases experimentais feitas com professores de Matemática do Ensino Médio de Mali e de alunos-professores em master de Matemática da Escola Normal Superior de Bamako - Mali.

FINANCIAMENTO
Projeto Tokten Mali.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 25-12-2020 – Aprovado em: 10-02-2020