Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PENSAMENTO ALGÉBRICO: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Algebraic Thinking: An Analysis Of Textbooks From The Final Years Of Elementary School

Flávia Pereira **RIGHI**
Universidade Franciscana, Santa Maria/RS, Brasil
flaviarighi87@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5106-7331

Leonardo Dalla **PORTA**
Universidade Franciscana, Santa Maria/RS, Brasil
leodallaporta@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3104-288X

Greice **SCREMIN**
Universidade Franciscana, Santa Maria/RS, Brasil
greicescremin@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-5686-9392

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Dada a publicação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC para o Ensino Fundamental em dezembro de 2017, a finalidade do ensino de álgebra passou a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico. Diante disso, este trabalho teve por objetivo investigar se problemas propostos sobre sequências recursivas, que configura um dos conteúdos que compõem a unidade de Álgebra, estão sendo explorados em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental de modo a contribuir com o desenvolvimento desse modo de pensar. Fundamentada nas características do pensamento algébrico de Almeida e Câmara (2017) e nos elementos essenciais de um problema segundo Malaspina (2017), entende-se este estudo como sendo de abordagem qualitativa e de cunho documental, em que se adotou a abordagem interpretativa de análise. A partir do estudo realizado verificou-se que há indícios de uma reorientação dos livros didáticos do Ensino Fundamental no sentido de uma educação algébrica que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme orienta a BNCC.

Palavras-chave: Educação algébrica, Base Nacional Comum Curricular, Materiais didáticos, Análise interpretativa

ABSTRACT

With the publication of the National Common Curricular Base - BNCC for Elementary School in December 2017, the purpose of teaching algebra became the development of algebraic thinking. In view of this, this work aimed to investigate whether problems proposed about recursive sequences, which configure one of the contents that make up the Algebra unit, are being explored in textbooks of the final years of Elementary School in order to contribute to the development of algebraic thinking. Based on the characteristics of the algebraic thinking of Almeida and Câmara (2017) and on the essential elements of a problem according to Malaspina (2017), this study is understood to be of a qualitative approach and of documentary nature, in which the interpretative analysis approach was adopted. From the study carried out it was found that there is evidence of a reorientation of textbooks of Elementary School towards an algebraic education that aims at the development of algebraic thinking, as directed by the BNCC.

Keywords: Algebraic education, Common National Curriculum Base, Teaching materials, Interpretative analysis

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, no contexto escolar, assume como sua finalidade fundamental dotar os estudantes de competências matemáticas que lhes permitam enfrentar as demandas de seus ambientes social e cultural. Dentre essas competências estão aquelas relacionadas ao eixo da Álgebra a qual, ao longo das últimas décadas, veio ganhando destaque nos documentos oficiais que regem a Educação Básica no Brasil e, consequentemente, conquistou seu espaço nos currículos escolares.

Nesse contexto, a própria concepção de educação algébrica também evoluiu, dando ênfase atualmente ao desenvolvimento do pensamento algébrico e sua significação, e não mais apenas a técnicas de simplificação de expressões algébricas como tradicionalmente era tratada (Brasil, 2017; Fiorentini, Miguel & Miorin, 1993). Segundo a BNCC, o pensamento algébrico "é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2017, p. 270).

Dentre os conteúdos algébricos, o tema de sequências está previsto para o 8º ano do Ensino Fundamental e possibilita aos alunos desenvolver o pensamento algébrico uma vez que explora as noções de padrões, generalizações e modelagem, as quais representam algumas características do pensamento algébrico, conforme propõe Almeida e Câmara (2017).

Diante disso, este estudo teve por objetivo investigar se problemas propostos sobre sequências recursivas, o qual configura um dos conteúdos algébricos que compõem a unidade, estão sendo explorados em livros didáticos de modo a contribuir com o desenvolvimento desse modo de pensar.

Por tratar-se de uma pesquisa qualitativa, adotou-se a abordagem interpretativa de análise como postura teórico-metodológica, em que as principais características são a imersão do pesquisador no contexto de pesquisa e a perspectiva interpretativa de condução da pesquisa (Kaplan & Duchon, 1988).

2 DEFININDO E CARACTERIZANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Alguns autores, como Radford (2006), explicam que a complexidade em se caracterizar o pensamento algébrico ocorre, talvez, pelo extenso campo que é a álgebra, devido ao grande número de objetos de estudos (equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, etc.) e processos algébricos, bem como as diferentes possibilidades de se conceber um pensamento.

O autor afirma que o pensamento algébrico não se desenvolve de maneira natural, mas "é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual" (Radford, 2011, p. 319, tradução nossa[1]). Nesse sentido, adota-se como uma definição para esse modo de pensar aquela proposta por Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução nossa[2]), em que a consideram como um "processo pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade".

Almeida e Câmara (2017, p. 35) salientam a importância de uma caracterização do pensamento algébrico, pois isto "poderá ajudar professores que ensinam matemática na educação básica a planejarem suas aulas com o intuito de desenvolver essa forma de pensar" em seus alunos.

Diante disso, e apoiados nas pesquisas e contribuições de Kaput (2008) e de Radford (2006, 2009), Almeida e Câmara (2017) buscaram uma definição de pensamento algébrico que pudesse ser adotada por professores e pesquisadores da área de matemática. Para isso, realizaram uma pesquisa, em âmbito de doutorado, buscando compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da modelagem de problemas de partilha.

Em seus estudos, Almeida e Câmara (2017, p. 53) identificaram que "o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: estabelecer relações; generalizar; modelar; operar com o desconhecido; e construir significado". Além disso, os autores afirmam que no "centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras", conforme Figura 1.

[1] Algebraic thinking is a very sophisticated cultural type of reflection and action, a way of thinking that was refined again and again through centuries before it reached its actual form.
[2] We take algebraic reasoning to be a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways.

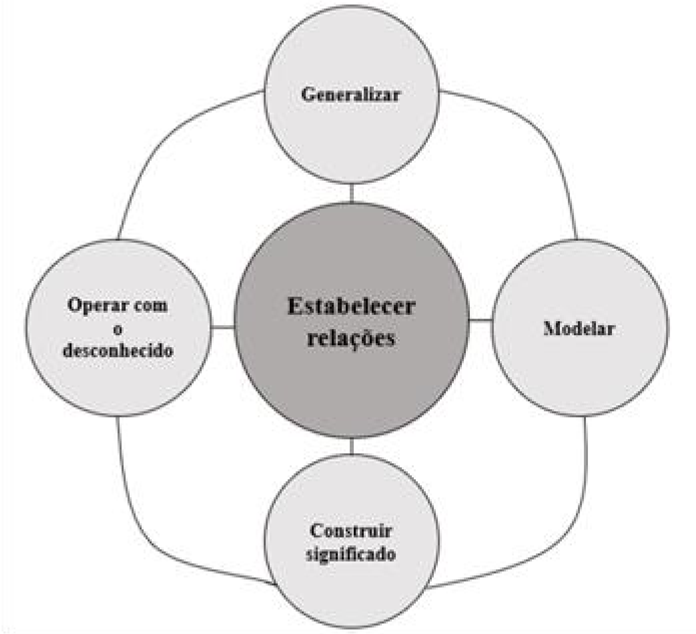


Figura 1: Características do pensamento algébrico segundo Almeida e Câmara (2017)
Fonte: Adaptado de Almeida e Câmara (2017, p. 54)

Almeida e Câmara (2017) ressaltam que as características mobilizadas pelo pensamento algébrico não são reveladas pelo sujeito segundo uma ordem, pelo contrário, consideram que elas surgem e se desenvolvem de maneira conjunta, em que o desenvolvimento de uma promove o desenvolvimento das outras.

2.1 Sequências recursivas e o desenvolvimento do pensamento algébrico

De acordo com a BNCC, o conteúdo de Sequências (objeto de conhecimento) está previsto para o 8º ano do Ensino Fundamental, dentro da unidade temática de Álgebra. Entretanto, o próprio documento orienta que pode ser trabalhado desde a Educação Infantil e séries iniciais, explorando as ideias de padrão e regularidade.

Segundo Chimoni, Pitta-Pantazi e Christou (2019), a introdução de álgebra nos anos iniciais não significa mover os conteúdos algébricos dos anos finais do Ensino Fundamental para os anos da etapa inicial. Em vez disso, significa estabelecer o terreno para os alunos de modo a desenvolver maneiras de pensar que possam apoiar o aprendizado posterior de álgebra.

As sequências podem ser recursivas ou não recursivas. As não recursivas referem-se à sequências aleatórias, casuais, nas quais seus termos não são determinados por uma regra, como por exemplo a sequência dos números primos. Uma sequência é dita recursiva quando determinado termo pode ser obtido em função de termos antecessores, ou seja, é possível obter qualquer de seus elementos ou termos recorrendo à posição que ele ocupa na sequência e/ou a uma regra ou lei de formação (Bianchini, 2018).

De acordo com a BNCC, o ensino de sequências tem por objetivo desenvolver a habilidade de “identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes” (Brasil, 2017, p. 313).

Segundo Iezzi (2004), a busca pelos elementos ou termos de uma sequência recursiva pode se dar de três maneiras:

• por fórmula de recorrência, onde são dadas duas regras, uma para identificar o primeiro termo e outra para calcular cada termo a partir do antecedente;

• expressando cada termo em função de sua posição, ou seja, a fórmula relaciona o termo a sua posição específica;

• ou ainda, por uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Pode-se perceber, portanto, que o estudo de sequências possibilita ao aluno explorar as noções de padrões, generalizações e modelagem, as quais representam algumas características do pensamento algébrico, conforme propõe Almeida e Câmara (2017). As habilidades de operar com o desconhecido e construir significado podem ser exploradas através de diferentes metodologias de ensino, como por exemplo, resolução de problemas ou investigação matemática, e portanto, dependem mais da maneira como o conteúdo é trabalhado do que do próprio conteúdo de sequências.

3 A CRIAÇÃO/ADAPTAÇÃO DE PROBLEMAS DE ULDARICO MALASPINA

É quase que inconcebível o ensino de matemática sem o uso de problemas, ou melhor, resolução de problemas. Nesse sentido, Malaspina (2016) coloca o seguinte questionamento: *Por que nosso ensino e aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas deve ser restrito a problemas criados por outras pessoas?*

É fato que existem diversos problemas criados por matemáticos e educadores matemáticos considerados eficientes no processo de ensino e aprendizagem, entretanto, o autor pontua que cada sala de aula e cada conjunto de alunos possuem suas próprias particularidades, motivações e dificuldades, assim como seu próprio entorno sociocultural e seu conjunto de experiências e saberes prévios. Todas essas diferentes características exigem do professor uma atenção particular e, evidentemente, o uso de problemas adequados para cada conjunto de alunos.

Dessa maneira, Malaspina (2016) sugere a criação de problemas como instrumento de formação pedagógica e abordagem metodológica, isto é, tanto do ponto de vista da formação de professores quanto recurso de ensino e aprendizagem a estudantes de todos os níveis educacionais.

Segundo Malaspina (2018), a base fundamental da criação de problemas é a criatividade e os conhecimentos matemáticos. De acordo com o autor, dada a reconhecida importância da criação de problemas no ensino e aprendizagem de matemática em todos os níveis, se faz necessário desenvolver estratégias para criação de problemas para professores em formação e em exercício. Dentre essas estratégias, Malaspina (2017) considera fundamental que para criar problemas se observe os seguintes elementos, conforme Quadro 1.

Quadro 1: Elementos essenciais de um problema, segundo Malaspina (2017)

Elementos	O que é?
Informação	dados quantitativos, figurais ou relacionais dados no problema
Requerimento	aquilo que se questiona, encontre, examine ou conclua, que pode ser quantitativo ou qualitativo, incluindo gráfico e demonstrações
Contexto	- intra-matemático: puramente matemático - extra-matemático: o contexto influencia no processo de resolução
Entorno matemático	estrutura matemática global na qual estão localizados os conceitos matemáticos que intervêm ou podem intervir para resolver o problema, por exemplo, funções lineares, teoria dos números, geometria analítica, etc.

Fonte: Adaptado de Malaspina (2017)

A criação de problemas de matemática é, segundo Malaspina (2017), um processo mediante o qual se obtém um novo problema, a partir de duas formas distintas:

- Por *variação* de um problema dado, modificando um ou mais de seus quatro elementos essenciais; ou
- Por *elaboração livre*, a partir de uma situação dada ou configurada, ou ainda por um pedido específico (com ênfase matemática ou didática).

Nesse sentido, pode-se entender a criação de problemas na perspectiva da *variação* de um problema dado como meio para adequá-lo tanto ao conjunto de alunos e suas particularidades como ao objetivo de ensino para o qual ele se propõe, ou seja, criar problemas a partir de outros (por exemplo, problemas de livros didáticos) de modo que atendam a proposta pedagógica.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A análise realizada nos livros didáticos teve por interesse investigar de que modo os problemas sobre sequências recursivas estão sendo propostos nestes materiais, uma vez que a finalidade do ensino de álgebra passou a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, segundo a BNCC.

Sendo assim, por tratar-se de um estudo de abordagem qualitativa e de cunho documental, adotou-se a abordagem interpretativa para análise dos problemas contidos nesses materiais. Segundo Kaplan e Duchon (1988), a abordagem interpretativa utiliza os próprios dados para propor e resolver as questões de pesquisa.

Para tal, foram investigados os livros do 8º ano do Ensino Fundamental das coleções de Edwaldo Bianchini, *Matemática - Bianchini: manual do professor*, e de Gelson Iezzi, *Matemática e Realidade*, publicadas em 2018 e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD/2020. A escolha por esses materiais se deu pelo fato de estarem presentes na rede municipal de Santa Maria – RS e estadual do Rio Grande do Sul.

Os problemas foram analisados a partir de dois indicadores prévios, oriundos da fundamentação teórica: as características do pensamento algébrico de Almeida e Câmara (2017); e os elementos essenciais que um problema deve ter, conforme Malaspina (2017). No Quadro 2, sintetiza-se os critérios para classificação qualitativa dos problemas mapeados.

Quadro 2: Indicadores prévios e categorias de análise dos problemas

Indicadores prévios	Categorias dos indicadores prévios	Critérios para classificação qualitativa do problema
Características do pensamento algébrico (Almeida & Câmara, 2017)	1 – Estabelecer relações; 2 – Generalizar; 3 – Modelar; 4 – Operar com o desconhecido; 5 – Construir significado.	Atende totalmente: apresenta 5 categorias Atende suficientemente: apresenta 4 categorias Atende parcialmente: apresenta 3 categorias Não atende parcialmente: apresenta 2 categorias Não atende minimamente: apresenta 1 categoria Não atende: não apresenta nenhuma categoria
Elementos essenciais de um problema (Malaspina, 2017)	1 – Informação; 2- Requerimentos; 3 – Contexto; 4 – Entorno matemático	Problema ótimo: possui 4 elementos Problema bom: possui 3 elementos Problema razoável: possui 2 elementos Problema deficiente: possui 1 elemento Problema ruim: não possui nenhum elemento

Fonte: Elaborado pelos autores

O tratamento dos resultados consistiu na retomada dos marcos teóricos que viabilizaram a condensação e o destaque das informações para análise, contribuindo com as interpretações inferenciais, apresentadas a seguir.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme já mencionado, o conteúdo de sequências recursivas possibilita ao aluno explorar as noções de padrões, generalizações e modelagem, as quais representam algumas características do pensamento algébrico. Nesta investigação, observou-se que o conteúdo de sequências recursivas nem sempre estava contemplado em um capítulo específico dos livros didáticos, mas sim explorado ao longo dos capítulos que tratavam acerca de conteúdos algébricos.

Apesar da quantidade de problemas sobre este tema não ser expressiva, aqueles encontrados, de modo geral, se mostraram interessantes e pertinentes, como observa-se no problema abaixo, na Figura 2.

O cano de alimentação de um tanque despeja água no ritmo que mostra o quadro ao lado.

Tempo	Volume de água despejada
1º minuto	1 ℓ
2º minuto	2 ℓ
3º minuto	4 ℓ
4º minuto	8 ℓ

Considerando que inicialmente o tanque está vazio, responda às questões.

a) Quantos litros de água o cano de alimentação despeja no tanque no 5º minuto? E no 6º? No 7º? No 8º?

b) Após 8 minutos, esse tanque fica com água até a metade. Quantos litros de água ele contém nesse momento?

c) Após 8 minutos, aproximadamente quantos minutos ainda serão necessários para o tanque ficar cheio?

Figura 2: Bianchini, 2018, 8º ano, p. 264
Fonte: Bianchini (2018, p. 264)

Neste problema, a característica de estabelecer relação, característica inicial do pensamento algébrico conforme Almeida e Câmara (2017), tempo x volume de água despejada é evidenciada pela tabela que contém os dados do problema, ou seja, a informação é quantitativa e relacional de acordo com Malaspina (2017), e explicita a relação entre as grandezas. Como o problema traz essas variáveis já relacionadas na tabela, fica mais evidente para o aluno estabelecer essa relação, mas ainda assim, o problema possibilita a mobilização dessa característica.

Além disso, verificam-se as características de generalização e de modelar, pois para responder o requerimento a do problema, é necessário que o aluno identifique a regularidade existente na sequência numérica da variável volume de água despejada, a qual é construída conforme o algoritmo 2.(n-1), ou seja, o dobro do elemento anterior, e neste processo de descobrir quantos litros serão despejados no tanque no 5º, 6º, 7º e 8º minuto, o problema suscita a mobilização da característica de operar com o desconhecido.

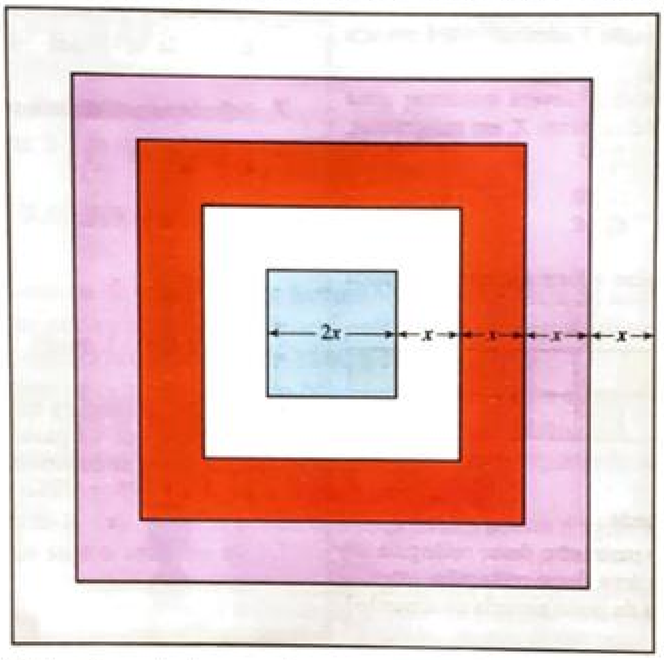
A característica de construir significado é evidenciada nos requerimentos b e c, pois o estudante precisa compreender que após 8 minutos o tanque conterá a soma dos volumes despejados de água desde o primeiro minuto, bem como perceber que se após 8 minutos o tanque já atingiu a metade de sua capacidade, e com o passar dos minutos o volume de água despejada é duplicado, então em apenas mais um minuto o tanque estará cheio.

Além disso, classifica-se este problema como sendo de contexto extra-matemático, no qual, segundo Malaspina (2017) é necessário interpretação do contexto para possível resolução do mesmo. No que se refere ao entorno matemático, identifica-se conceitos como razão e proporção, multiplicação, ou ainda noção de volume de líquidos, permitindo a relação entre esses conceitos e tornando o problema mais interessante. Percebe-se, portanto, que este problema atende totalmente as características do pensamento algébrico bem como possui todos os elementos essenciais que um problema deve conter, sendo entendido como um problema ótimo para o objetivo que se propõe.

Em outro problema, a característica de estabelecer relação se deu entre as variáveis lado e área de um quadrado. Essa relação é bastante comum na matemática e contextualiza diversos problemas matemáticos, contudo, neste especificamente, esta relação foi abordada de maneira diferente, conforme Figura 3.

Pode-se perceber neste problema que, apesar da relação clássica lado x área de um quadrado, o mesmo propõe explorar áreas de molduras, o que implica numa subtração de áreas. Além disso, o problema não trabalha com valores absolutos para a medida dos lados, e sim com o conceito de monômios e suas manipulações algébricas, revelando a criatividade e originalidade do problema ao apresentar suas informações em variáveis.

Nesta composição de quadrados, o quadrado central foi contornado com uma moldura branca, formando um segundo quadrado. O novo quadrado foi contornado com uma moldura vermelha, chegando-se a um terceiro quadrado, e assim por diante, até se obter o quadrado com a moldura cinza.



a) Forme, a partir da área do quadrado central, a sequência recursiva dos monômios que representam as áreas das molduras.

b) Uma dessas molduras tem a mesma área de um dos quadrados construídos. Qual é o monômio que representa essa área?

c) Qual é o valor numérico do monômio obtido no item **b** para $x = 2{,}4$ cm?

d) Considerando a sequência de resultados obtidos no item **a**, faça uma extrapolação e estime a área da próxima moldura a ser formada.

Figura 3: Bianchini, 2018, 8º ano, p. 105
Fonte: Bianchini (2018, p. 105)

Com relação às características de generalizar e modelar, o problema as explora no requerimento a, quando solicita ao aluno que forme a sequência recursiva dos monômios que representam as áreas das molduras. Destaca-se o nível de complexidade com que o problema trabalha o conceito de área, o qual algumas vezes é considerado um conceito simples. Veja que na imagem das molduras é dado o monômio que representa o lado do quadrado menor, e para as molduras a imagem informa apenas a medida de acréscimo de uma lateral, o que pode levar o aluno ao engano, caso ele não considere a medida da outra lateral da moldura.

Além disso, ainda no requerimento a do problema, a característica de construir significado é evidenciada quando a sequência que está sendo solicitada é a das áreas das molduras, e não as áreas dos quadrados, o que pode levar o aluno a outro engano, caso ele não interprete corretamente o que está sendo solicitado. As mesmas características mobilizadas no requerimento a do problema, são encontradas no requerimento d, quando é solicitado ao aluno que forneça a área da próxima moldura, ou seja, ele precisará generalizar, modelar e construir significado para o problema como um todo.

A característica de operar com o desconhecido é explícita no requerimento c do problema, quando lhe é solicitado o valor numérico da área da moldura cinza quando x = 2,4 cm. Acredita-se que esta característica também fora mobilizada nas demais questões do problema, pois quando o aluno precisa calcular as áreas dos quadrados, ele opera com $(2x)^2 = 4x^2$, e nesse caso, 2x é a medida do lado, ainda que em forma de variável.

Com relação ao contexto, identifica-se que o problema também é extra-matemático uma vez que o contexto configura parte essencial do problema para sua resolução e mobiliza em seu entorno matemático conceitos como área, monômios e variável. Portanto, é possível observar que este problema também atende totalmente as características do pensamento algébrico e possui todos os elementos essenciais propostos por Malaspina (2017), fornecendo indícios de um possível redirecionamento do livros didáticos para o desenvolvimento do pensamento algébrico, além de qualidades como criatividade e originalidade sendo empregadas em conceitos bastante usuais da matemática.

O problema a seguir explora a ideia de sequências de modo diferente dos anteriores, pois o caráter visual ou geométrico da sequência não é evidenciado, ou seja, as informações contidas no problema são apresentadas de modo textual, em linguagem natural. O objetivo do problema é traduzir para linguagem algébrica o que se propõe, configurando uma maneira a mais de trabalhar e desenvolver o pensamento algébrico.

As idades de dois irmãos são números ímpares consecutivos. Somando a idade do mais novo, João, ao triplo da idade do mais velho, Alcides, resulta exatamente 90 anos.

a) Quantos anos Alcides tem a mais que João?

b) A idade de Alcides, somada ao seu triplo, dá quantos anos?

c) Essa soma é quantas vezes a idade de Alcides?

d) Qual é a idade de Alcides?

e) E qual é a idade de João?

Verifique se as respostas dos itens *d* e *e* estão corretas de acordo com as informações dadas.

Figura 4: Iezzi, 2018, 8º ano, p. 73
Fonte: Iezzi (2018, p. 73)

Nesta outra proposta, observa-se a característica de estabelecer relação entre as idades dos dois irmãos, sabendo que são números ímpares consecutivos, e portanto, podem ser generalizados algebricamente como x é a idade do irmão mais novo e y é a idade do irmão mais velho, sendo assim, $y = x + 2$.

Além disso, o problema traz a seguinte informação: "Somando a idade do mais novo, João, ao triplo da idade do mais velho, Alcides, resulta exatamente 90 anos". Com isso, percebe-se a característica de modelar, na qual se espera que os alunos escrevam em linguagem algébrica que $x + 3.(x + 2) = 90$. A partir disso, é mobilizada a característica de operar com o desconhecido, encontrando as idades 21 e 23 anos para o irmão mais novo e para o irmão mais velho, respectivamente.

Salienta-se que estes resultados encontrados respondem os requerimentos d e e do problema, e os demais itens a, b e c, exploram a característica de construir significado, uma vez que é retomada a informação de sequência de números ímpares, bem como a ideia de que $x + 3x = 4x$ por meio da investigação matemática, e não apenas algebricamente. Com relação ao contexto considera-se como sendo extra-matemático, pois sem sua devida interpretação a tradução do problema em linguagem algébrica não seria possível. Entretanto, no que se refere ao entorno matemático entende-se que o problema explorou a linguagem algébrica, a representação de um número ímpar e as operações aritméticas e algébricas, o que implica na viabilidade de seu uso em sala de aula. Portanto, identifica-se neste problema, que o mesmo atende totalmente as características do pensamento algébrico e os elementos essenciais de Malaspina (2017), porém, exploradas de modo diferente. Com isso, entende-se que este problema cumpre suas finalidade didáticas frente ao objetivo que se propõe.

Até aqui, foi possível observar que, dadas as orientações da BNCC para o Ensino Fundamental e o PNLD/2020 alinhado com essas orientações, os livros didáticos estão apresentando problemas de acordo com o que está sendo preconizado para o ensino de álgebra, e consequentemente, há indícios de um redirecionamento da concepção de educação algébrica para o desenvolvimento desse modo de pensar.

Destaca-se que, alguns problemas encontrados nos livros podem ser adaptados para que desempenhem um papel mais eficiente no processo de ensino e aprendizagem de álgebra. Assim como pontua Malaspina (2017), alguns problemas podem ser criados a partir da variação de uma situação dada, ou seja, o professor de matemática, ao se deparar com problemas que configuram uma aprendizagem superficial, pode criar outros a partir destes, incluindo novos requerimentos ou outra situação similar, de modo que o objetivo de ensino seja alcançado.

Nos problemas mapeados, foi possível observar essa necessidade de adaptação, como no caso do problema da Figura 5, no qual sugere-se explorar as características do pensamento algébrico de modo diferente, mas ainda aproveitando a situação inicial dada no livro didático, ou seja, criando um problema através da variação do problema original, segundo Malaspina (2017).

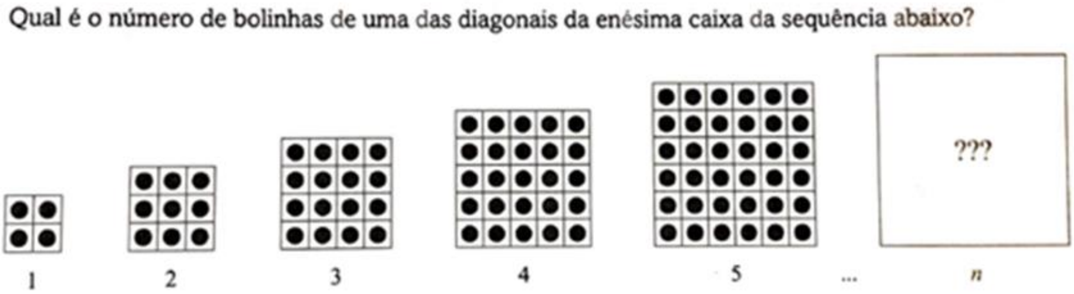


Figura 5: Bianchini, 2018, 8º ano, p. 157
Fonte: Bianchini (2018, p. 157)

É proposto explorar a quantidade de bolinhas de uma das diagonais da sequência de caixas ilustradas, e é solicitado ao aluno que encontre o número de bolinhas de uma das diagonais da enésima caixa. O problema propõe mobilizar a característica de estabelecer relação entre o número da caixa na sequência e o número de bolinhas de uma de suas diagonais, ou seja, na caixa 1 temos 2 bolinhas na diagonal, na caixa 2 temos 3 bolinhas na diagonal, na caixa 3 temos 4 bolinhas na diagonal, e assim, sucessivamente.

Fica evidente a relação entre essas variáveis e possibilita ao aluno mobilizar a característica de generalizar e modelar, concluindo que para a enésima caixa o número de bolinhas em uma de suas diagonais será $n + 1$. Entretanto, as características de operar com o desconhecido e construir significado são pouco exploradas tendo em vista que o problema não traz diferentes questionamentos sobre a sequência proposta, o que o leva a atender parcialmente as características do pensamento algébrico, segundo Almeida e Câmara (2017). Caberia aqui, portanto, incluir outros requerimentos que contribuam com a exploração dessas e das outras características do pensamento algébrico, buscando atingir o potencial didático que o problema pode proporcionar, como por exemplo:

a) O que você observa entre o número de bolinhas da diagonal e o número de bolinhas de um dos lados da caixa?

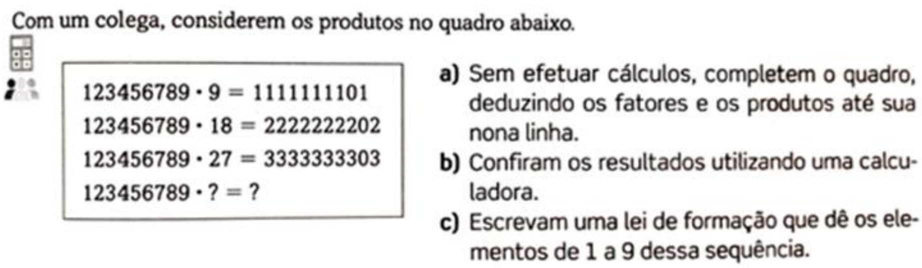
b) Qual a relação entre o número de bolinhas de uma das diagonais com a quantidade total de bolinhas dentro da caixa?

c) Quantas bolinhas tem dentro da caixa 12? E da caixa com 16 bolinhas na diagonal? Quantas bolinhas tem dentro da enésima caixa?

Outros questionamentos também podem ser explorados neste problema ao incluir-se diferentes cores às bolinhas ou dividindo os quadrados das caixas em dois triângulos e buscando novas associações.

Destaca-se que neste problema, as informações são visuais (figurais) e existe apenas um requerimento, encontrar o número de bolinhas de uma das diagonais da enésima caixa. Entende-se, portanto, que se trata de um problema de contexto intra-matemático, uma vez que a resolução do problema não depende da interpretação do contexto, e sim da percepção da relação existente entre as grandezas número da caixa e número de bolinhas de uma de suas diagonais, o que, consequentemente, tende a limitar o entorno matemático do problema ao próprio conceito de diagonal. Se adaptado, este problema poderia explorar conceitos como a sequência de quadrados perfeitos, por exemplo. Considera-se, portanto, que neste caso, os elementos essenciais do problema estão deficientes, necessitando de uma intervenção do professor a fim de melhorar o potencial didático do mesmo para uso com seus alunos.

Neste outro problema sobre sequências, no qual a proposta de resolução se assemelha a uma investigação matemática, conforme Figura 6, também é possível criar outro problema incluindo novos requerimentos.


Com um colega, considerem os produtos no quadro abaixo.

$123456789 \cdot 9 = 1111111101$
$123456789 \cdot 18 = 2222222202$
$123456789 \cdot 27 = 3333333303$
$123456789 \cdot ? = ?$

a) Sem efetuar cálculos, completem o quadro, deduzindo os fatores e os produtos até sua nona linha.
b) Confiram os resultados utilizando uma calculadora.
c) Escrevam uma lei de formação que dê os elementos de 1 a 9 dessa sequência.

Figura 6: Bianchini, 2018, 8º ano, p. 79
Fonte: Bianchini (2018, p. 79)

Pode-se observar que no requerimento a, o problema solicita que o quadro seja preenchido por dedução lógica, sinalizando ao aluno uma possível existência de relação entre os termos das equações. Ou seja, o aluno irá estabelecer relação entre o segundo termo da multiplicação e o resultado do produto, observando as equações anteriores. Destaca-se a criatividade e originalidade do problema ao tratar de sequência recursiva dentro de uma sequência de equações, sendo estas, as informações que o problema dispõe e, portanto, são quantitativas. Nesse sentido, considera-se o problema como sendo de contexto intra-matemático, uma vez que as informações são puramente matemáticas, e a resolução do problema depende da observação e lógica do aluno.

As características de generalizar e de operar com o desconhecido também são mobilizadas no requerimento a do problema quando o aluno ao estabelecer a relação entre um dos fatores e o produto, sem o uso da calculadora, consegue completar o quadro até a nona linha. Como já dito anteriormente, a resolução deste item se dá por dedução lógica, tendo em vista que o cálculo não será realizado mentalmente e nem mecanicamente, portanto, o aluno estará generalizando e operando com o desconhecido.

O requerimento c do problema possibilita a mobilização da característica de modelar, ou seja, encontrar uma lei de formação que represente a construção de todos os elementos da sequência. Entretanto, para a característica de construir significado acredita-se que a mesma poderia ter sido explorada por meio de outros requerimentos, como por exemplo:

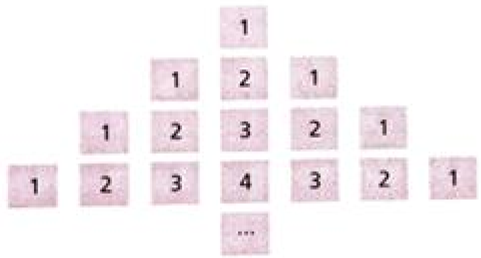
a) Por que essa sequência somente é válida para n natural de 1 a 9?

b) A partir dessa sequência, crie outra e escreva a sua lei de formação.

Nesse sentido, o problema atende suficientemente as características do pensamento algébrico, pois ainda é possível explorar melhor essa característica e, com isso, expandir o entorno matemático do problema através do conceito de número natural e suas propriedades. Salienta-se que, ao considerar que uma das características do pensamento algébrico foi pouco explorada e os elementos essenciais do problema são limitados, o problema torna-se razoável do ponto de vista didático, e portanto, é necessário buscar torná-lo um problema mais investigativo e desafiador, incluindo-se, por exemplo, questionamentos com perguntas abertas, que segundo Malaspina (2016) estimula o raciocínio lógico-dedutivo dos alunos bem como oferece oportunidade para revisar e melhorar aspectos de redação e argumentação. Além disso, segundo o autor, proporcionar aos alunos momentos de criação e investigação matemática podem se constituir em espaços de aprendizagem, de criatividade, de autoconhecimento, de superação e de autoconfiança.

Por fim, apresenta-se o problema da Figura 7, onde a ideia de padrão é explorada por meio de uma ilustração, na qual a soma dos números em cada linha retrata a sequência dos números quadrados perfeitos. Nesse caso, pode-se observar que as informações, textual e figural, do problema dependem da identificação desta relação. O problema, portanto, induz o aluno a estabelecer relação entre a soma dos números de cada linha e a sequência de números quadrados perfeitos, a fim de que perceba que para a enésima linha, a soma de seus números pode ser representada por n^2. Dessa forma, o aluno é conduzido ao processo de generalização e modelação, configurando as três primeiras características do pensamento algébrico conforme Almeida e Câmara (2017).

Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, ele organizou etiquetas numeradas em linhas seguindo o padrão mostrado no esquema a seguir.



Qual é a soma dos números das etiquetas que Ronaldo colocou na linha seguinte (a 5ª linha)?

a) 25 b) 26 c) 28 d) 30

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha?

a) 9 b) 45 c) 64 d) 81

Figura 7: Iezzi, 2018, 8º ano, p. 70
Fonte: Iezzi (2018, p. 70)

Nos requerimentos, a característica de operar com o desconhecido é explorada de modo direto, uma vez que o aluno já tenha generalizado a sequência basta que ele substitua o que se pede nesta generalização. Entretanto, essa mesma habilidade poderia ser trabalhada por meio de uma investigação, como por exemplo, incluir mais um requerimento:

a) Sabendo que as somas dos números das etiquetas que Ronaldo colocou em cada linha formam uma sequência, descubra o que acontece ao subtrairmos cada termo dessa sequência pelo seu anterior.

A partir deste requerimento, o aluno pode operar com o desconhecido através de uma investigação e descobrir que a diferença entre os termos da sequência dos números quadrados é a sequência dos números ímpares.

Já a habilidade de construir significado foi trabalhada de modo superficial, cabendo outros requerimentos que suscitem ao aluno uma extrapolação de ideias, como indagar se ele poderia expressar os números quadrados perfeitos de outro modo, geometricamente, por exemplo, ou ainda, se o aluno poderia criar uma sequência diferente a partir desta contida no problema. Com isso, observa-se que o problema atende parcialmente as características do pensamento algébrico uma vez que mobiliza superficialmente alguma delas.

Além disso, entende-se que o contexto do problema é extra-matemático uma vez que a sua resolução depende da interpretação de seu contexto, o que se pode evidenciar no segundo requerimento, quando o problema indica para a existência de uma propriedade no padrão estabelecido por Ronaldo mas não o determina, cabendo ao aluno essa investigação. Com relação ao entorno matemático, identifica-se que o problema não possibilita explorar outros conceitos matemáticos além do próprio tema de sequências e sequência dos quadrados perfeitos, e diante disso, percebe-se que apesar do problema se mostrar bom nos demais elementos essenciais que deve ter, a criação de problemas por adaptação permite elevar o potencial didático do problema. Segundo Malaspina (2015) existe uma estreita relação entre a resolução e a construção de problemas, onde a segunda nos permite explorar aspectos como flexibilidade, fluidez e originalidade dos alunos, desenvolvendo e apurando suas estruturas cognitivas.

De modo geral, esta análise dos problemas contidos nos livros didáticos sobre o conteúdo de sequências recursivas, permite inferir uma possível reorientação desses materiais no sentido da concepção de educação algébrica para o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme preconiza a BNCC. Esta afirmação está na pautada no fato de que os problemas apresentados e discutidos aqui, em sua maioria, mobilizam as características desse modo de pensar, de acordo com a caracterização de Almeida e Câmara (2017). E em relação aos elementos essenciais de um problema, segundo Malaspina (2017), os problemas apresentam diferentes tipos de informações (quantitativas, relacionais, figurais, em linguagem natural ou esquematizadas), distintas propostas de requerimentos, conduzindo a resolução do problema por uma investigação matemática, ou seja, do caso particular à generalização, explorando a capacidade de observação e argumentação do aluno. Além disso, em sua maioria, apresentados em contextos extra-matemático, evidenciando a ênfase na didática e buscando trabalhar com a interpretação, linguagem algébrica e raciocínio matemático dos alunos, possibilitando diferentes entornos matemáticos (razão e proporção, multiplicação, volume de líquidos, área, monômios, variáveis, linguagem algébrica, números ímpares, operações aritméticas e algébricas, conceito de diagonal, equações, números quadrados, etc).

Reitera-se que existem muitos problemas criados por matemáticos e educadores matemáticos que são eficientes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e para aqueles em que o objetivo de ensino pode ser ampliado ou potencializado, Malaspina (2016) sugere a criação de problemas como recurso pedagógico que visa elevar o potencial didático do problema, e consequentemente, contribuir na aprendizagem dos alunos.

6 CONSIDERAÇÕES

Este estudo teve por objetivo investigar se problemas propostos em livros didáticos sobre sequências recursivas estão sendo explorados de modo a contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que este passou a ser a finalidade do ensino de álgebra. Por meio de uma análise interpretativa, observou-se que os problemas sobre sequências recursivas, nos livros de 8º ano do Ensino Fundamental, atendem e mobilizam as características do pensamento algébrico conforme proposto por Almeida e Câmara (2017). Essas evidências permitem inferir que a nova concepção algébrica proposta na BNCC reorientou o PNLD/20 que, por sua vez, produziu livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental dentro dessa nova perspectiva.

Além disso, identificou-se que os problemas estão diversificados, apresentando suas informações em diferentes linguagens e requerimentos em consonância com o desenvolvimento gradual do pensamento algébrico (Kaput, 2008), isto é, exploram os conceitos algébricos dentro de um processo de generalização. Nessa perspectiva, os livros didáticos apresentam problemas segundo um contexto extra-matemático (com ênfase na didática) e alcançam diferentes entornos matemáticos (Malaspina, 2017).

Destaca-se, neste trabalho, a criação de problemas por variação de Malaspina (2017) como recurso que pode elevar o potencial didático de um problema contido em livros didáticos, caso este esteja proposto aquém dos objetivos de ensino que se busca. E nesse sentido, entende-se que na profissão docente o planejamento é essencial, uma vez que possibilita personalizar o ensino e contribuir nos processos de ensino e aprendizagem da álgebra.

REFERÊNCIAS

Almeida, J. R. & Câmara, M. S. (2017). Pensamento algébrico: em busca de uma definição. *Revista Paranaense de Educação Matemática.* Recuperado de: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/1124

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36(5), 412-446.

Bianchini, E. (2018). *Matemática – Bianchini:* manual do professor. São Paulo: Moderna.

Brasil. (2017). *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2019, fevereiro). Investigating early algebraic thinking abilities: a path model. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02415996/document

Fiorentini, D., Miorin, A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um Repensar a Educação. Algébrica Elementar. *Pró-posições*, v. 4(1), 78-91.

Iezzi, G. & Hazzan, S. (2004). *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual Editora.

Iezzi, G., Dolce, O. & Machado, A. (2018). *Matemática e Realidade*. São Paulo: Atual Editora.

Kaplan, B., & Duchon, D. (1988). Combining qualitative and quantitative methods in information systems research: a case study. *MIS Quarterly*, v. 12(4), 571-586.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Malaspina, U. J. (2015). Los niños crean problemas de matemáticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42_Problema_12.pdf

Malaspina, U. J. (2016). Creación de problemas. Avances y desafíos en la Educación Matemática. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*. Recuperado de: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/61

Malaspina, U. J. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M.

Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Malaspina, U. J. (2018). ?Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas com professores em formación. *Unión Revista Ibero-americana de Educación Matemática.* Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/52/52_problema.pdf

Radford, L. (2006, janeiro). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: *North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* – PME. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/239933692_Algebraic_thinking_and_the_generalization_of_patterns_A_semiotic_perspective

Radford, L. (2009, janeiro). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: *Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Recuperado de: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.617.8010&rep=rep1&type=pdf

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). *A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Editora Springer.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Pensamento algébrico: uma análise de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental

Flávia Pereira Righi
Mestre
Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria/RS, Brasil
flaviarighi87@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5106-7331

Leonardo Dalla Porta
Doutor
Professor titular da Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria/RS, Brasil
leodallaporta@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3104-288X

Greice Scremin
Doutora
Professora titular da Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria/RS, Brasil
greicescremin@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-5686-9392

Endereço de correspondência do principal autor
SQS 209, Bloco K, apto 208, Brasília, DF, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: F. P. Righi, L. Dalla Porta, G. Scremin
Coleta de dados: F. P. Righi
Análise de dados: F. P. Righi
Discussão dos resultados: F. P. Righi, L. Dalla Porta, G. Scremin
Revisão e aprovação: L. Dalla Porta , G. Scremin

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 19-04-2021 – Aprovado em: 19-05-2021