

Influencia de la Edad y Rendimiento Matemático Sobre el Sesgo de Equiprobabilidad

*M. Jesús Cañizares, Carmen Batanero, J. J. Ortiz y L. Serrano**

RESUMEN: En este trabajo estudiamos la estabilidad del sesgo de equiprobabilidad en dos muestras de niños de edades comprendidas entre 10 y 14 años ($n_1=251$ y $n_2=143$), a partir de sus respuestas a dos ítems tomados de Green en los que no es necesario diferenciar el orden de los sucesos. Nuestros resultados sugieren que este sesgo se presenta en niños que no han tenido instrucción formal en probabilidad y parece estable con la edad, lo que coincide con las investigaciones previas. Al clasificar a los alumnos respecto a su rendimiento en matemáticas, no observamos diferencias en la proporción de chicos que muestran el sesgo de equiprobabilidad entre los estudiantes que mostraron un rendimiento matemático bajo o medio aunque sí entre los anteriores y los que mostraron un alto rendimiento en matemáticas.

PALABRAS CLAVE: Evaluación, Concepciones, Sesgo de equiprobabilidad, Rendimiento matemático, Desarrollo cognitivo.

Influence of Age and Mathematical Achievement on Equiprobability Bias

ABSTRACT: In this paper we study the equiprobability bias in two samples of 10 to 14 years-old children ($n_1=251$ y $n_2=143$) from their responses to two items taken from Green. Our results show that children without formal training in probability also show this bias which is stable with age, in agreement with previous studies. When we classified the students according to their mathematical achievement, we found no difference in the proportion of children showing the equiprobability bias between students with low or medium mathematical achievement and better results in students with high mathematical achievement.

KEYWORDS: Assesment, Conceptions, Equiprobability bias, Mathematical achievement, Cognitive development.

* Docentes da Universidad de Granada

Introducción

Recientemente la probabilidad se ha incorporado, en forma generalizada al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria en España y otros países, lo que contrasta con los anteriores planes de estudio, donde la enseñanza de este tema era mucho más restringida. Las razones por las que un tema cualquiera debe ser incluido en la educación obligatoria pueden sintetizarse en las siguientes, que ya indicamos en Godino, Batanero y Cañizares (1987):

- Que sea una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos;
- Que sea útil para la vida posterior, bien para el trabajo o para el tiempo libre;
- Ayude al desarrollo personal, fomentando la capacidad crítica y el desarrollo de formas de razonamiento;
- Ayude a comprender los restantes temas del curriculum, tanto de la educación obligatoria como posterior;
- Constituya la base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados.

Estas cinco razones son ampliamente cubiertas por las nociones probabilísticas. Además, la probabilidad puede ser aplicada a la realidad tan directamente como la aritmética elemental, no siendo preciso el conocimiento de teorías físicas ni de técnicas matemáticas complicadas. Por sus muchas aplicaciones, proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes la utilidad de la matemática para resolver problemas reales. En consecuencia, la enseñanza de la probabilidad puede ser llevada a cabo mediante una metodología heurística y activa, a través del planteamiento de problemas concretos y la realización de experimentos reales o simulados.

Otro aspecto señalado por Fischbein (1975) es el carácter exclusivamente determinista de los currículos actuales, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: *En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una*

interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico (p. 131).

Creemos que las razones expuestas son suficientes para comprender las nuevas tendencias en los currículos de educación primaria y secundaria en los países desarrollados, que incorporan objetivos referentes al razonamiento estocástico a partir de estos niveles educativos. Un punto importante, no obstante, será conocer si las capacidades reales de los alumnos permiten esta enseñanza. La investigación didáctica contribuye a este conocimiento explorando las concepciones previas de los alumnos y experimentando métodos de enseñanza.

En este trabajo queremos contribuir a este estudio, analizando la estabilidad del sesgo de equiprobabilidad en niños de edades comprendidas entre 10 y 13 años. En lo que sigue analizamos las investigaciones previas sobre el tema y presentamos un resumen de nuestra investigación.

Investigaciones Previas

Las investigaciones más importantes en relación al razonamiento probabilístico en el campo de la psicología se refieren al uso de heurísticas en ese razonamiento. En la psicología de la decisión, la investigación se ha centrado en la descripción y explicación de las discrepancias entre las predicciones sobre la conducta que debieran tener los sujetos, si razonasen de acuerdo con los modelos normativos, y los juicios y decisiones realizados en la práctica.

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) y los autores que han continuado su línea de trabajo han descrito sesgos sistemáticos en las decisiones que toman los sujetos al enfrentarse a un problema de decisión bajo incertidumbre. La enseñanza de la probabilidad parece no ser suficiente para superar estos sesgos, que pueden impedir la adquisición correcta de los conceptos estadísticos por parte de los estudiantes.

Pérez Echeverría (1990) indica que los trabajos recientes sobre las tomas de decisiones se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La utilización de heurísticas es característica de este modelo y describe las heurísticas como "*mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce*

nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales" (p. 51). Es decir, son estrategias generales que reducen tareas complejas a otras más simples. Por ejemplo, si en un problema de probabilidad condicional, que debe ser resuelto por la fórmula de Bayes, hacemos una estimación aproximada de la probabilidad utilizando sólo la fórmula de probabilidades compuestas, hemos simplificado el problema, aunque puede ser que la solución no sea demasiado aproximada a la correcta.

En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurística) sería un procedimiento que nos llevaría en forma inmediata a la solución del problema. Se diferencian de los algoritmos en que son generalmente automáticas y se aplican de forma no reflexiva sin considerar su adecuación al juicio a realizar, contrariamente al algoritmo que propone criterios concretos para su uso.

Uno de tales mecanismos es el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1985, 1992; Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre y Cordier, 1990) o creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. En sus investigaciones, estos autores plantean un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. A pesar de variar el contexto y el formato de la pregunta, los resultados siempre coinciden y sugieren que la creencia en que los dos resultados son equiprobables es muy extendida entre los estudiantes universitarios. Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar". Los alumnos a los que se les pasó la prueba consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

Desde el punto de vista didáctico, una pregunta de interés es si estas heurísticas se forman en la infancia o son consecuencia de una pobre instrucción en probabilidad. Fischbein y Schnarch (1997) estudiaron esta evolución con 20 estudiantes en cada uno de los grupos de edad de 10-11, 12-13, 14-15, 16-17 y 20 estudiantes universitarios (18 años o más), tratando de probar la hipótesis de que el impacto de los imperativos lógicos sobre las intuiciones debe mejorar con la edad.

Una de las preguntas en su investigación se refirió al papel que tiene para los alumnos el orden en que se generan los diversos resultados que conforman un mismo

suceso. Repitieron los cuestionarios de Lecoutre (si es más probable un doble 6 o un 5 y un 6 al lanzar dos dados). Muy pocos sujetos respondieron correctamente que las probabilidades son distintas, y el número de respuestas correctas, no sólo decrece con la edad, sino también con la instrucción (obteniendo un porcentaje de respuesta correcta que baja del 29% a los 10-11 años hasta el 11% en los estudiantes universitarios y un porcentaje de sesgo de equiprobabilidad bastante estable (alrededor del 70% en todos los grupos). La explicación de los autores es que no existe una intuición natural para evaluar la probabilidad de un suceso compuesto. Los autores concluyen que lo que resulta intuitivamente difícil es el tipo especial de suceso compuesto en el que hay que considerar los diferentes órdenes posibles del conjunto de resultados elementales, y que los alumnos no definen correctamente el espacio muestral.

La pregunta sobre si es más probable un doble seis o un cinco y un seis al lanzar dos dados es incluida en un trabajo de replicación del anterior hecho en Francia (Lecoutre y Fischbein, 1998), con sujetos de los mismos grupos de edad y una muestra de mayor tamaño, la mayor parte de los cuales había recibido instrucción en probabilidad. En esta muestra de mayor tamaño se observa una constancia, tanto de la respuesta correcta (alrededor del 15%) como del sesgo de equiprobabilidad (alrededor del 70%).

Puesto que los estudios de Lecoutre han sido hechos con estudiantes que en su mayoría ya habían recibido instrucción previa en estadística, nos preguntamos si es posible que en una proporción de los alumnos que lo manifiestan haya sido inducido por la instrucción recibida. Esta es con frecuencia excesivamente formalizada, y los problemas que se presentan a los alumnos se suelen referir a sucesos equiprobables, ya que son los adecuados para que los alumnos apliquen la combinatoria, tema que suele anteceder al de la probabilidad. Por otro lado, la muestra de niños de 10-11 y 12-13 años en la investigación de Fischbein y Schnarch (1997) fue muy reducida (sólo 20 niños en cada uno de los dos grupos de edad) y no hay coincidencia entre sus resultados y los de Fischbein y Lecoutre (1998), por lo que pensamos merece la pena profundizar más sobre los razonamientos de los niños en este periodo de edad.

En un trabajo previo hemos comparado el razonamiento probabilístico en chicos, con 130 alumnos 14-15 y 147 alumnos 16-17 años (Batanero, Serrano y Garfield, 1996) que son las edades en que en España se ha iniciado y finalizado, en el anterior

currículo la enseñanza de la probabilidad. Este tema se introducía en el primer curso del antiguo Bachillerato (alumnos de 14-15 años) durante aproximadamente un mes, y se completaba en el tercer curso (16-17) durante un tiempo similar. En el estudio citado observamos diferentes sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos. En particular, y usando los ítems de Lecoutre (1985; 1992) encontramos que el sesgo de equiprobabilidad no parecía mejorar con la edad e instrucción. Más concretamente encontramos un porcentaje de respuestas correctas del 28.7% y un porcentaje de sesgo de equiprobabilidad del 46.4% en los chicos de 14 años que no habían tenido instrucción en probabilidad. En los chicos de 17 años que ya habían tenido instrucción de probabilidad estos porcentajes fueron muy similares (30.8 % y 45.1 %). Aunque estos resultados también mostraban la estabilidad del sesgo de equiprobabilidad, la frecuencia era bastante menor que la encontrada en otras investigaciones.

Por otro lado, los ítems empleados en todas estas investigaciones, incluida la nuestra anterior, son variantes de una misma tarea en que requiere que el alumno diferencie las situaciones combinatorias en que sea necesario distinguir el orden de los objetos y las que no. Pensamos por tanto que el razonamiento combinatorio del alumno puede interferir en su respuesta y que una falta de razonamiento combinatorio podría atribuirse al sesgo de equiprobabilidad.

Como consecuencia hemos querido analizar la estabilidad del sesgo de equiprobabilidad en alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años para comprobar si la misma tendencia de estabilidad con la edad que encontramos en nuestro estudio anterior (Batanero, Serrano y Garfield, 1996) se aprecia también en este tramo de edad. Queremos también estudiar si el sesgo se sigue produciendo en ítems en los que no sea necesario al alumno diferenciar el orden de los sucesos que intervienen.

A continuación presentamos un resumen de la investigación y discutimos los resultados obtenidos.

Resumen de la Investigación

Los resultados que presentamos son parte de un proyecto más amplio destinado a evaluar el razonamiento probabilístico de los niños en el cual comparamos dos instrumentos clásicos de evaluación sobre una misma muestra de alumnos y analizamos tanto el razonamiento proporcional, como el combinatorio y el probabilístico (Cañizares, 1997; Cañizares y cols., 1997).

La finalidad de dicha evaluación fue proporcionar información a los profesores sobre los alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años, puesto que en los nuevos currículos de matemática españoles se sugiere iniciar la enseñanza de la probabilidad a partir de los 10 años.

Población y muestra

La población objeto de estudio es la de los escolares de estas edades en Andalucía y participaron en el estudio un total de 394 alumnos, elegidos de forma intencional, aunque tratando de representar las características socio-económicas de la población de niños andaluces. Somos conscientes, sin embargo, de las implicaciones de elegir una muestra en forma intencional. Por ello no realizaremos contrastes de hipótesis formales en este estudio, sino que nos limitamos a un estudio descriptivo de los datos, que tiene carácter exploratorio.

La muestra de alumnos participantes se tomó en dos fases: En una primera muestra ($n_1=251$) participaron niños de tres colegios diferentes de la ciudad de Jaén, uno de ellos privado, donde asistían niños de clase social media-alta y los otros dos públicos, con alumnos de clase social media y media-baja. Dos de los centros eran mixtos y el otro un colegio masculino, lo que hizo que la proporción total de niños (63%) fuera algo superior a la de niñas en esta muestra. Las edades de los niños variaron entre 11 y 13 años.

Posteriormente se decidió ampliar el estudio con una segunda muestra en la que participaran también niños de 10 años y de la que se tomarían algunos alumnos que manifestasen el sesgo de equiprobabilidad en la repuesta al cuestionario, para hacerles entrevistas que nos permitiesen obtener una descripción más completa de sus modos de razonamiento. Esta muestra se tomó de un centro privado de la ciudad de Granada, con

alumnos de clase social media ($n=143$) y con un porcentaje aproximadamente igual de niños y niñas.

Ninguno de los niños participantes había tenido instrucción en probabilidad, por lo que podemos considerar que el estudio se refiere a sus intuiciones probabilísticas primarias en el sentido de Fischbein (1975).

Cuestionario

Los niños de la primera muestra participante respondieron por escrito al cuestionario de Green (1982) y al de Fischbein y Gazit (1988). Analizamos las respuestas a estos dos cuestionarios desde diferentes puntos de vista, tales como la influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y creencias subjetivas sobre sus respuestas (Cañizares, 1997; Cañizares, Batanero, Serrano Y Ortiz, 1997). A partir de estos resultados seleccionamos un número reducido de ítems de los dos cuestionarios relacionados con el uso de heurísticas. La segunda muestra de niños sólo respondió a esta versión reducida, puesto que nuestro fin principal en la segunda muestra era identificar los niños que manifestasen diferentes sesgos y heurísticas y seleccionar de ellos aquellos a los que se les harían las entrevistas.

En este trabajo analizaremos las respuestas dadas a dos ítems que fueron completados por los niños de las dos muestras y en los cuales queremos evaluar el sesgo de equiprobabilidad. Más concretamente los ítems han sido tomados de Green (1982), quien no analizó estos ítems desde el punto de vista de dicho sesgo ni pidió justificación de las respuestas. Queremos también evaluar el efecto del rendimiento matemático sobre el sesgo de equiprobabilidad, aspecto que no ha sido analizado en las investigaciones previas. En nuestro trabajo hemos analizado esta variable teniendo en cuenta la calificación media de los niños en matemáticas en el curso anterior al que había sido realizado el estudio. Atendiendo a dicha calificación se dividió a los niños de cada muestra en tres grupos aproximadamente de igual tamaño, ordenados según su calificación media en tres niveles.

A continuación analizamos los ítems planteados.

ÍTEM 1. Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña
(D) No lo sé

¿Por qué?.....

En este ítem los niños tienen que comparar las probabilidades de dos sucesos elementales en un mismo experimento, donde los sucesos no son equiprobables. No se requiere razonamiento proporcional para resolverlo, ya que los niños pueden simplemente comparar los casos favorables. Tampoco existe el problema de orden que exige razonamiento de tipo combinatorio, como en el caso de los ítems usados en anteriores investigaciones. Por ello creemos que el ítem es potencialmente útil para valorar el sesgo de equiprobabilidad.

Para que la respuesta sea aceptada como correcta, además de hacer la elección adecuada (opción B), el alumno debe dar una justificación correcta (que hay más niñas que niños). Consideraremos que el alumno presenta el sesgo de equiprobabilidad si, además de elegir la opción C indica que los sucesos son igualmente equiprobables por ser un resultado aleatorio o algún otro razonamiento en que el sesgo quede claramente manifestado.

ÍTEM 2. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores.

¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad
(B) (B) El azul tiene mayor probabilidad
(C) El verde tiene mayor probabilidad
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad
(E) No lo sé

¿Por qué?.....

Este ítem tampoco requiere razonamiento combinatorio ni proporcional, aunque aquí hay que determinar la composición de la urna, después de haber efectuado el

primer experimento, ya que la primera extracción cambia la composición de la urna y, por tanto, modifica las probabilidades iniciales. Puesto que los números son sencillos, el alumno puede determinar fácilmente la composición después de la primera extracción (2 rojas, tres azules y una verde).

Consideraremos que la respuesta es correcta si, además de la opción B el alumno da un argumento correcto, indicando que en la urna quedan más bolas azules que de los otros colores. Consideraremos que el alumno presenta el sesgo de equiprobabilidad si, además de elegir la opción D nos indica este sesgo en su argumentación.

A continuación presentamos nuestros resultados.

Resultados y Discusión

En las tablas 1 y 2 mostramos los porcentajes de respuestas correctas y sesgo de equiprobabilidad en cada ítem y muestra, en función de la edad de los niños participantes.

Tabla 1: Porcentajes de respuestas según edad

Item	Respuesta		Edad				Total
			10	11	12	13	
1	Correcta	Muestra 1	---	63.7	75.9	68.5	69.3
		Muestra 2	55.6	62.2	65.8	71.9	63.6
	Equiprobabilidad	Muestra1	---	26.4	20.7	28.8	25.1
		Muestra 2	30.6	29.7	29.0	25.0	28.7
2	Correcta	Muestra 1	47.3	65.5	65.8	59.0
		Muestra 2	50	51.4	68.4	71.9	60.1
	Equiprobabilidad	Muestra 1	---	29.7	21.8	26.0	25.9
		Muestra 2	25.0	32.4	28.9	18.8	26.6

Como puede verse en la tabla 1 los porcentajes de respuestas correctas en el ítem 1 se incrementan con la edad, aunque no en forma homogénea a lo largo de todos los cursos, aunque sin llegar a las tres cuartas partes de los alumnos en el último curso. Esto es debido a una fuerte influencia del distractor C, que es el que afirma que los sucesos son equiprobables, es decir que sugiere el sesgo de equiprobabilidad, que se confirma en las justificaciones de los niños.

Dado que en esta cuestión no había que comparar fracciones, ni se requería

razonamiento combinatorio, sino que bastaba con una simple comparación absoluta del número de niñas y el de niños, podemos afirmar que la alta incidencia de este tipo de respuesta (C) está causada por una indebida asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad. Ello hace que algunos alumnos sostengan que el hecho de que un resultado sea impredecible equivale a que todos los sucesos implicados tengan la misma probabilidad de ocurrencia. Así lo manifiestan los alumnos en sus respuestas, como por ejemplo Ricardo (12 años; 1 mes) quien, después de elegir la opción C, argumenta: *Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña*. Los datos recogidos en la primera muestra no son muy concluyentes respecto al factor edad y aunque en la segunda muestra el sesgo mejora ligeramente con la edad, globalmente la extensión del sesgo parece bastante estable.

En el ítem 2 los porcentajes de respuestas correctas aumentan con la edad en las dos muestras aunque, al igual que ocurría con el ítem 1, ni siquiera en el último curso las respuestas correctas llegan a las tres cuartas partes de los alumnos, lo que nos lleva de nuevo a considerar el factor de equiprobabilidad. Este sesgo vuelve a repetirse con una frecuencia aproximada a la del ítem 1 en la primera muestra y desciende un poco en la segunda, aunque manteniendo un valor global parecido al del primer ítem.

Estos resultados son, sin embargo, mucho mejores que los que encontramos en nuestro estudio anterior (Cañizares, 1997; Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997) con alumnos de 14-15 y 16-17 años y usando los ítems de Lecoutre. En aquel caso sólo el 28,7% de los alumnos de 14-15 años y el 30,8% de los de 16-17 dio la respuesta correcta. Observamos también una disminución notable del sesgo de equiprobabilidad que en aquella investigación fue respectivamente el 46,4% para los alumnos de 14-15 años y el 45,1% para los de 16-17. En consecuencia, creemos que estos resultados apoyan nuestra idea de que parte de las respuestas erróneas en las investigaciones de Lecoutre son debidas más bien a falta de razonamiento combinatorio que al sesgo de equiprobabilidad y los mejores resultados en este nuevo trabajo con alumnos de menor edad y que no han recibido instrucción apuntan a la necesidad de seguir investigando si los sesgos sobre el razonamiento probabilístico descritos por diferentes autores se conservan al variar el enunciado de los ítems utilizados en estas investigaciones.

En nuestro caso, en los dos ítems utilizados se presenta un porcentaje muy similar de sesgo de equiprobabilidad, con ligeras variaciones que pueden explicarse

simplemente por la variabilidad inherente a todo proceso de muestreo y no se observa un cambio importante de porcentajes en función de la edad. En todas las investigaciones citadas se describe la estabilidad del sesgo de equiprobabilidad con la edad, aunque la mayor parte de estos trabajos usan estudiantes de mayor edad a los que han participado en este estudio. Nuestros resultados creemos que corroboran los datos anteriores sobre estabilidad del sesgo de equiprobabilidad en una proporción significativa de alumnos (alrededor de la cuarta parte en nuestro estudio) cuando se encuentran ante situaciones aleatorias. Sin embargo esta proporción es mucho menor que la sugerida en los estudios de Lecoutre.

Entre los razonamientos utilizados para explicar la elección realizada hemos detectado un 8,4 % de alumnos que utilizan, para apoyar la equiprobabilidad, el argumento de que la diferencia entre las cantidades de bolas es muy pequeña, y por tanto no influye significativamente en la comparación de probabilidades. Así nos lo expone Alejandro (11 años; 7 meses) después de elegir la opción D (opción de equiprobabilidad): *Porque por una bola tiene que ser muy raro que salga o Javier* (11 años; 9 meses) que también elige la opción D aduciendo: *Porque hay el mismo número de bolas menos la azul.*

En cuanto a la influencia del rendimiento matemático en las respuestas a estos dos ítems, los datos, que aparecen en la tabla 2, muestran que en ambos ítems hay un mayor porcentaje de respuestas correctas entre los alumnos de rendimiento alto (situados sobre el percentil del 70 % de su clase, cuando se ordena a los alumnos en función de sus calificaciones medias en matemáticas), a la vez que disminuye algo el sesgo de equiprobabilidad de los alumnos de rendimiento bajo a los de rendimiento alto, en el ítem 1, y, menos significativamente, en el ítem 2. No hay una diferencia muy apreciable entre los alumnos de los dos primeros grupos (por debajo del percentil del 30% y situados entre el 30 y el 70%).

Igualmente parece ocurrir con el sesgo de equiprobabilidad en que la diferencia sólo se produce en el nivel más alto de rendimiento matemático, permaneciendo prácticamente estable en los otros dos niveles. Creemos que estos datos apuntan la dificultad del razonamiento probabilístico, en ítems incluso tan sencillos como los planteados, pues, aunque los resultados son en general bastante buenos en todos los grupos, todavía los niños toman en ocasiones en cuenta sus creencias subjetivas sobre

lo aleatorio, que se manifiestan en forma de sesgos. Es importante destacar que, incluso en los niños de nivel matemático alto continúa más de un 20% del sesgo de equiprobabilidad.

Tabla 2: Porcentaje de respuestas según rendimiento matemático

Item	Respuesta		Nivel			Total
			Bajo	Medio	Alto	
1	Correcta	Muestra 1	64.3	62.6	77.8	69.3
		Muestra 2	58,1	58.6	73.8	62.9
	Equiprobabilidad	Muestra 1	32.1	27.8	20.3	25.1
		Muestra 2	32.6	32.8	21.4	29.4
2	Correcta	Muestra 1	53.6	52.2	67.7	59.0
		Muestra 2	53.5	58.6	69.0	60.1
	Equiprobabilidad	Muestra 1	27.9	30.4	23.1	26.0
		Muestra 2	25.6	29.3	23.8	26.6

Análisis de entrevistas

Finalmente completamos el estudio de los datos del cuestionario con entrevistas a algunos alumnos. La finalidad de realizar entrevistas fue profundizar en las estrategias de los niños, analizando sus razonamientos para confirmar el sesgo de equiprobabilidad, o ver si sus respuestas podrían explicarse por algún otro tipo de razonamiento. Incluso, aunque se pidió a los niños que argumentaran por escritos sus respuestas, pensamos que éstas no proporcionan toda la riqueza de una entrevista no estructurada.

Una vez completados los cuestionarios en la segunda muestra elegimos dos alumnos de cada una de las edades (10-11, 11-12, 12-13 y 13-14 años). En cada uno de estos grupos elegimos un niño que en sus respuestas presentase el uso de sesgos, como la equiprobabilidad, o la heurística de representatividad y otro que no la presentase.

A estos niños les preguntamos sobre sus respuestas en el cuestionario y también les propusimos otras tareas complementarias para evaluar su razonamiento proporcional y combinatorio. Comentaremos sólo la entrevista a dos de los niños que presentaron el sesgo de equiprobabilidad. Veremos que el sesgo de equiprobabilidad se presenta en los alumnos entrevistados y les lleva a errores sistemáticos en la asignación de probabilidades, como mostramos a continuación:

Alejandro

Es un alumno de 10 años, al que sus respuestas en tareas de comparación de probabilidades permite situar en el nivel de razonamiento proporcional IA (es decir, es capaz sólo de comparar fracciones que tengan el mismo denominador). Manifiesta creencia en la "suerte" al resolver problemas de probabilidades y su capacidad combinatoria está empezando a desarrollar.

En su respuesta escrita al ítem 1 el alumno indica que es más probable una niña. Sin embargo el argumento contradice esta respuesta porque señala que cualquiera de los dos casos podría ocurrir. En la entrevista tratamos de clarificar si tiene o no el sesgo de equiprobabilidad:

E: Lee el ítem 1 y su respuesta: "Tú me dices que es más probable que el nombre sea de niña que de niño, pero luego razones que da igual que sea niña, que sea niño, o que sea niña"

A: Es que da lo mismo.

E: ¿Entonces, por qué me has dicho al principio que es más probable que sea de niña?

A: ¡Ah!, Es que me he equivocado. Porque hay más niñas. Pero puede salir un niño por suerte.

Aunque el alumno diferenciaba claramente los sucesos favorables y desfavorables en el experimento, y había respondido inicialmente que era más probable obtener una niña, durante la entrevista corrige su respuesta e indica que son igualmente probables los dos casos debido a "la suerte". Este es el razonamiento típico del sesgo de equiprobabilidad.

En el ítem 2, en que hay implicados mayor número de sucesos simples, Alejandro manifiesta el sesgo de equiprobabilidad, en su respuesta. Sin embargo es capaz de enumerar correctamente las cantidades de bolas que quedan dentro de la caja, después de realizado el primer experimento. Esto sugiere que el alumno comienza a desarrollar su capacidad combinatoria y puede diferenciar los sucesos favorables y desfavorables en el experimento.

E: Lee el ítem 2 y su respuesta: "Dices que todos los colores tienen la misma probabilidad, porque da igual un color que otro".

A: Sí, porque todos son iguales. Da igual un color que otro

E: Pero, al sacar dos rojos y 1 azul, ¿Qué queda dentro?

A: *Pues... 2 rojas, 3 azules y 2 verdes*
E: *Entonces, si hay más bolas azules que de las demás...*
A: *No importa, eso no influye, todas son iguales.*

En resumen Alejandro muestra claramente el sesgo de equiprobabilidad y lo aplica en situaciones en que claramente diferencia que hay más casos favorables respecto a un suceso que respecto a otro y en las que muestra un razonamiento combinatorio correcto.

Carolina:

Carolina es una niña de 13 años, aunque todavía se encuentra en el nivel de razonamiento proporcional IA. A lo largo del cuestionario resuelve todos los problemas de probabilidad comparando sólo casos favorables, porque sólo compara fracciones de igual denominador. No presenta creencias sobre la suerte y aparentemente tiene el sesgo de equiprobabilidad, pues había elegido como correcta la opción C en el ítem 1 y D en el ítem 2.

Al pedirle que nos explique su razonamiento del ítem 2, elige como correctas tanto la opción B (correcta) como la D (equiprobabilidad). La alumna no se decide a asignar más probabilidad al suceso salir azul, a pesar de ser consciente de que hay más bolas azules que de ningún otro tipo, porque considera que si saliera una ficha de otro color, entonces la afirmación "la azul es más probable" no sería correcta. Subordina, pues, la determinación del suceso más probable a lo que ocurra en la extracción. Estos son sus comentarios respecto al ítem 2:

E: Me has dado dos opciones: que el azul tiene más probabilidad (B) y que todos los colores tienen la misma probabilidad (D). ¿Puedes aclarar eso?

C: Es que, como de azul hay más, pues tiene más posibilidades, pero también es suerte, porque puede haber muchas azules y una amarilla y sacar la amarilla.

E: Pero tú dices que todas tienen igual de posibilidades, pero el azul tiene más posibilidad. ¿Cómo puede ser eso?

C: Porque lo más seguro es que saques la azul, pero a lo mejor puedes sacar otra.

E: Entonces, ¿que quiere decir "tener más posibilidades"?

C: Porque si hay más, es normal que saques de esa, pero a lo mejor puedes coger una amarilla, aunque sólo hay una.

Creemos que aquí se manifiesta el sesgo de "outcome approach" (Konold, 1989). Este tipo de razonamiento se presenta cuando un alumno confunde una pregunta

referida a la probabilidad de un suceso (cuál suceso es más probable) con otra referida a la predicción del suceso (cuál suceso ocurrirá). Este tipo de razonamiento podría explicar una parte de los resultados que en las investigaciones previas se atribuyen al sesgo de equiprobabilidad, por lo que consideramos necesario continuar la investigación sobre el sesgo de equiprobabilidad con nuevos tipos de tarea que logren diferenciar los razonamientos de los alumnos.

Conclusiones

Nuestros resultados sugieren que el sesgo de equiprobabilidad se presenta en niños incluso antes de haber tenido una instrucción formal en probabilidad y que parece estable con la edad, lo que coincide con las investigaciones anteriores a la nuestra. Este sesgo podría interferir con la enseñanza de la probabilidad, porque los alumnos que lo tienen tratarían todos los sucesos como equiprobables, incluso en aquellas situaciones en que para uno de los sucesos hay un mayor número de casos favorables. El estudio de la probabilidad perdería, entonces, su utilidad para estos alumnos, porque no permitiría hacer predicciones sobre la mayor o menor posibilidad de uno de los sucesos.

Una segunda consecuencia de nuestro trabajo es que al utilizar unos ítems sencillos en los que no intervenga el razonamiento combinatorio o proporcional, los porcentajes de aparición de este sesgo disminuyen notablemente, siendo bastante inferiores a los obtenidos en otras investigaciones, incluso con sujetos universitarios o con alumnos que han tenido instrucción. Pensamos por tanto que los resultados de investigaciones previas sobre el sesgo de equiprobabilidad son en parte explicados por las tareas utilizadas y la falta de razonamiento combinatorio de los sujetos, ya que el razonamiento combinatorio no se desarrolla hasta la etapa de las operaciones formales o incluso después. Creemos necesario, por tanto, continuar la investigación sobre este sesgo con nuevas tareas que permitan explicitar el tipo de razonamiento del alumno.

Otro resultado que complementa las investigaciones previas es el estudio del efecto del rendimiento matemático, que parece favorecer las respuestas correctas en las tareas y la disminución del sesgo de equiprobabilidad solo para el caso del nivel superior, no observándose diferencias en los otros dos niveles. Esto sugiere prestar una atención especial a la enseñanza de la probabilidad en alumnos de todas las capacidades, ya que

incluso en alumnos de nivel promedio en matemáticas, que aparentemente debieran superar las dificultades en el estudio de esta materia, la probabilidad continúa siendo un tema difícil.

En la introducción hemos comentado una serie de razones para justificar la enseñanza de la probabilidad en la escuela, aunque también advertíamos de la necesidad de comprobar las capacidades de los alumnos antes de abordar esta enseñanza. Nuestros resultados son algo descorazonadores respecto al sesgo de equiprobabilidad, pues aparece en proporción apreciable en las muestras de alumnos y la edad y el rendimiento matemático solo tienen una influencia significativa para los sujetos del nivel superior.

Este resultado no implica un cambio en nuestra postura a favor de la educación estocástica en la escuela. Por el contrario, puesto que los niños de la muestra no habían tenido una instrucción organizada en este terreno, sus intuiciones erróneas podrían ser, en parte, explicada por la falta de experiencia con lo estocástico. Mientras que, desde su nacimiento, el niño vive en un mundo rico de experiencias geométricas o aritméticas que le llevan a desarrollar intuiciones correctas en muchos conceptos de estas ramas de las matemáticas, no existe una experiencia similar de lo aleatorio fuera de la escuela.

Aunque vivimos en un mundo rodeado de incertidumbre, la única forma de apreciar las leyes que rigen el cálculo de probabilidades es mediante la recogida de datos y el estudio de sus regularidades; puesto que la regularidad global de los fenómenos aleatorios solo surge como yuxtaposición de un gran número de resultados locales variables. Probabilidad no es más que orden global a partir del desorden individual y por ello las experiencias aleatorias aisladas no permiten adquirir una intuición correcta de lo estocástico. Como indica Espasandín (1999) tendremos también que tener en cuenta que la estocástica no es un tópico más a ser estudiado, puesto que el pensamiento probabilístico se desenvuelve a partir de una estrategia de resolución de problemas y análisis de los datos obtenidos. Los conceptos estadísticos deben estar insertados en situaciones cotidianas para el alumno, y la práctica pedagógica debe proponer actividades en las que los estudiantes observen y construyan los sucesos posibles a partir de la experimentación concreta.

Nuestras conclusiones son, por tanto, que las dificultades detectadas no pueden suponer un cambio hacia un currículo determinista ni privar a los niños de un desarrollo

guiado de su intuición probabilística. Sin embargo, se precisa mucha más investigación experimental sobre las capacidades cognitivas de los niños y experimentación de propuestas didácticas adaptadas a su edad y capacidades. Con nuestro trabajo mostrado en este artículo queremos poner una modesta contribución en esta interesante tarea.

Agradecimiento: Esta investigación ha sido financiada por el proyecto BSO2000-1507 (MEC, Madrid).

Referencias Bibliográficas

BATANERO, C., SERRANO, L. y GARFIELD, J. B. Heuristics and biases in secondary school students' reasoning about probability. En L. PUIG y A.

GUTIERREZ (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, p. 51-58). Universidad de Valencia, 1996.

CAÑIZARES, M. J. *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en la comparación de probabilidades*. Tesis Doctoral Universidad de Granada, 1997.

CAÑIZARES, M. J., BATANERO, C., SERRANO, L. y ORTIZ, J. J. Subjective elements in children's comparison of probabilities. En : PEHKONEN, E. (Ed.), *Proceedings of the XXI International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, p. 49-56). Universidad de Lahti, 1997.

ESPASANDÍN LÓPEZ, C. A. A probabilidade e a estatística no currículo de matemática do ensino fundamental brasileiro. *Conferencia Internacional Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística. Anais de artigos selecionados* (p. 157-174), 1999.

FISCHBEIN, E. *The intuitive sources of probability thinking in children* Dordrecht: Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15-1-24, 1988.

FISCHBEIN, E. y SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), p. 96-105, 1997.

- GREEN, D. R. *Probability concepts in schoolpupils aged 11-16 years*. Ph. Dissertation. Universidad de Loughborough, 1982.
- GREEN, D. R. A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 2-16 years. In D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). Universidad de Sheffield, 1983.
- KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- LECOUTRE, M. P. Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le jugements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.6, p.193-213, 1985.
- LECOUTRE, M. P. Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, v. 23, p. 557-568, 1992.
- LECOUTRE, M. P. y CORDIER, J. Effet du mode de présentation d'un problème aléatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, v. 372, p. 9-22, 1990.
- LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, v,19, p. 357- 368, 1988.
- LECOUTRE, M. P. y FISCHBEIN, E. Evolution avec l'âge de misconceptions des intuitions probabilistes en France et en Israël. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, p. 311-332, 1988.
- PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P. *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma, 1990.

