

RESUME

Les difficultés systématiques de compréhension que soulève l'enseignement des mathématiques conduisent à se poser la question du type de fonctionnement cognitif qu'exige l'activité mathématique. La manière de penser et de voir qui est requise pour pouvoir comprendre en mathématiques est-elle celle qu'on pratique spontanément dans les autres disciplines, ou en est elle profondément différente ? En mathématiques, l'activité intellectuelle dépend entièrement de représentations sémiotiques. La mobilisation de représentations sémiotiques y est l'unique moyen d'accès possible aux objets mathématiques, comme le montre le paradoxe cognitif des mathématiques. Et toute pratique d'une activité mathématique avec ou sur des objets consiste en la transformation de représentations sémiotiques. Elle se déroule dans des registres de représentation qui rendent ces transformations possibles et leur ouvrent un champ illimité. Pour le montrer, nous prendrons deux exemples. Le premier est celui de la représentation des nombres naturels. L'accès à ces nombres mobilise un début d'articulation entre deux types de représentations et que les opérations que l'on peut faire dépendent du type de représentation choisi. Le deuxième exemple est une activité de dénombrement avec des configurations polygonales d'éléments. L'activité mathématique exige deux types de transformations qui sont cognitivement irréductibles : la conversion des représentations d'un registre à un autre et les opérations de transformation spécifiques à chaque registre. Les difficultés de compréhension ne viennent pas d'abord de la complexité épistémologique des concepts mais de ces deux types de transformation qui sont le moteur semiot-cognitif des démarches de pensée. Ils requièrent un apprentissage qui vise explicitement leur développement, en raison de l'inaccessibilité perceptive et instrumentale des objets mathématiques. Cela nous renvoie à la complexité des phénomènes et des choix pour l'enseignement des mathématiques. Pour organiser cet enseignement, peut-on s'en tenir au seul point de vue mathématique ou faut-il prendre aussi en compte le point de vue cognitif ? Et quel rapport entre ces deux points de vue pour décomposer les connaissances mathématiques à enseigner ?

Mots-clés: Accès aux objets - Algorithme d'une opération - Compréhension - Congruence, Non congruence - Conversion - Décomposition (en éléments de base) - Marque-unité (proto-signé) - Nombre naturel - Nombre figural - Objectif de formation - Paradoxe cognitif - Registre - Représentation sémiotique - Système sémiotique - Traitement - Transformation.

ABSTRACT

¹ Professor Emérito da Universidade de Dunquerque, França.

The systematic difficulties of comprehension that arise in mathematics education leads to the question of the kind of cognitive functioning which mathematical activity requires. The mathematical way of thinking and seeing is the one we practice spontaneously in other disciplines, or is it quite different ? In mathematics, the intellectual activity depends entirely on semiotic representations. The mobilization of semiotic representations is the only possible way to get to mathematical objects. Hence the cognitive paradox of mathematical knowledge. And the practice of any mathematical activity consists in transformation of semiotic representations. It is necessarily performed within registers, each opening a specific field of possible transformations. We shall take two examples to show it. First, the representation of natural numbers. Getting to these numbers requires a beginning joint between two types of representations and operations with numbers depends on the type of representation chosen. Then an activity of counting elements of polygonal configurations. Here, mathematical activity requires two types of transformations that are cognitively irreducible : conversion of representations from one register to another and processing operations specific to each register. Troubles of understanding does not come first from the epistemological complexity of concepts, but from these two kinds of transformations which are the semio-cognitive motor of mathematical thinking. They require a long learning process focused on their development in student's mind, because of the perceptual and intramental inaccessibility of mathematical objects. This fact highlights the complexity of phenomena to take into account for mathematic teaching. In order to organize it, can we stick to the single mathematical point of view or should it also take into account the cognitive point of view? And what interaction between these two approaches for decomposing the mathematical knowledge to be taught ?

Keywords:

Les relations existant entre la pensée humaine, la sémiotique et le développement de l'activité mathématique touchent à la question cognitive qui est cruciale pour l'enseignement des mathématiques. Étant donné les difficultés de compréhension auxquelles beaucoup d'élèves se heurtent systématiquement, comprendre en mathématiques, est-ce un acte qui dépendrait des processus cognitifs communs, c'est à dire uniquement de ceux qui sont mobilisés dans les autres domaines du savoir, comme la botanique, la géologie, la chimie ou, plus simplement, la vie quotidienne ? Ou, au contraire, est-ce un acte qui exige le développement d'autres systèmes de fonctionnement de la pensée que ceux habituellement mobilisés en dehors des mathématiques ? La réponse, explicite ou implicite, qu'on donne à cette question commande la manière d'organiser l'enseignement des mathématiques et les situations d'apprentissage.

Cette question cognitive peut paraître paradoxale, car elle oriente dans deux directions de recherche et vers deux types de modélisation cognitive complètement opposés. Tout d'abord, la première alternative de la question semble s'imposer. Étant donné que des formes d'activité mathématique sont présentes dans toutes les cultures, que la découverte des premiers nombres par les jeunes enfants est précoce et que tous les hommes ont les mêmes capacités intellectuelles fondamentales, on ne voit pas pourquoi comprendre les mathématiques exigerait un type de fonctionnement cognitif spécifique pour cette discipline « universelle ». Et pourtant, c'est cette deuxième direction qui s'impose quand vous êtes vraiment dans les classes et que vous voyez une grande majorité d'élèves qui se trouvent confrontés non pas à des difficultés normales dans tout apprentissage, et souvent stimulantes

pour la réflexion, mais à des difficultés qu'ils ne rencontrent pas dans les autres disciplines et qui créent un blocage, une inhibition entraînant, à la longue, un rejet des mathématiques.

On peut formaliser cela en disant que l'enseignement des mathématiques présente deux types de difficultés qui lui sont spécifiques. Il y a, d'une part, celles qui sont propres à chaque nouveau « concept » introduit (nombres relatifs, décimaux, fonction, etc..) et qui sont plus ou moins transitoires. Et il y a, d'autre part, celles qui sont transversales aux concepts mathématiques enseignés et qui demeurent récurrentes tout au long du curriculum. Ce deuxième type de difficulté concerne la manière de penser, de visualiser, de justifier, et d'organiser des informations qui est étrangement particulière aux mathématiques, c'est-à-dire tout ce sans quoi un élève ne peut jamais prendre par lui-même des initiatives pour résoudre des problèmes, ni « avoir une idée », ni contrôler la pertinence et la validité de ses essais de résolution. Il lui faut toujours recourir à l'aide de quelqu'un d'autre.

La recherche didactique ne s'est vraiment intéressée qu'au premier type de difficulté, estimant que le second n'est que le symptôme d'une acquisition insuffisante des concepts mathématiques à utiliser (« *misconception* »). Ce qui revient à postuler d'emblée comme évidentes la première des deux directions de recherche ainsi que l'idée que comprendre en mathématiques ne présupposerait aucun développement d'un fonctionnement cognitif particulier. La deuxième direction de recherche renverse en quelque sorte cet ordre de priorité. C'est le second type de difficulté, celui que les élèves ne rencontrent pas dans les autres disciplines, qui devrait retenir toute l'attention des chercheurs et des enseignants. Il est fondamental car qui influe sur les processus de conceptualisation en mathématiques, processus si étrangement autres que ceux mis en œuvre dans les autres domaines de connaissance. Il nous conduit à se poser la véritable question, « quel fonctionnement de pensée exige le fait de comprendre en mathématiques ? », et à découvrir que la *sémiosis* est intrinsèque à l'activité mathématique et à l'exercice même de la pensée (*noésis*).

Nous commencerons par montrer les raisons qui imposent l'analyse sémiocognitive de l'activité mathématique, puis nous donnerons une description, globale et rapide, du modèle de fonctionnement de la pensée en termes de registres de représentation sémiotique. Dans une troisième partie, nous donnerons un exemple d'analyse sémiocognitive d'une activité mathématique. Enfin, nous aborderons la question importante pour la formation des enseignants, celle de la place de cette approche sémiocognitive qui se trouve prise en sandwich entre les deux points de vue considérés comme primordiaux, le point de vue mathématique sur ce que requiert le fait de comprendre et le point de vue didactique sur l'organisation de situations d'apprentissage en classe, sans écarter d'autres points de vue possibles

I. Pourquoi les représentations sémiotiques sont-elles primordiales en mathématiques ?

Personne ne met en doute, car c'est trivial, l'importance des représentations sémiotiques pour les mathématiques. Il suffit de rappeler le développement de l'algèbre, de l'analyse, de la logique mathématique. Là, le développement de moyens spécifiques de représentation sémiotique a été de pair avec l'ouverture de nouveaux domaines de connaissance mathématique. Mais cela n'est qu'une observation en surface et ne permet pas de saisir ce qui caractérise la connaissance mathématique par rapport aux autres types de connaissance développés dans les autres disciplines scientifiques.

Pour saisir la spécificité des mathématiques, il faut considérer ce que je vais appeler les modes d'accès aux objets de connaissance (Duval 2008), c'est-à-dire, en mathématiques, les nombres, les fonctions, les propriétés topologique, affines, etc. On peut alors voir la situation épistémologique singulière, atypique, des mathématiques.

Dans tous les domaines du savoir, sauf en mathématiques, il y a deux modes d'accès aux objets de connaissance :

— Un accès sensoriel, direct (la perception) ou instrumental (pour tout ce qui est au-delà de nos capacités de discrimination sensorielle et de notre champ perceptif). Rappelons que le développement des sciences a véritablement commencé avec l'utilisation des lunettes astronomiques et des microscopes.

— Un accès sémiotique, par l'utilisation de *systèmes qui produisent des représentations, indépendamment de toute conservation de données sensorielles comme de toute contrainte physique*. Le premier de ces systèmes est le langage, mais il y a aussi les productions graphiques, allant des croquis aux figures géométriques.

En mathématiques, au contraire, il n'y a pas d'accès sensoriel aux objets de connaissance. L'accès passe par des représentations sémiotiques. Par exemple, l'accès aux nombres passe par des représentations sémiotiques qui peuvent être très rudimentaires ou, au contraire, complexes. Mais, dans cette production, il y a toujours l'exigence épistémologique fondamentale *de ne jamais confondre les objets de connaissance et les représentations qu'on en construit ou qu'on utilise*. Or cette absence d'un double accès aux objets mathématiques crée ce que j'ai appelé le « **paradoxe cognitif** » des mathématiques. On peut en donner deux formulations.

(Q.1) Comment ne pas confondre un OBJET et sa REPRÉSENTATION *si on n'a pas accès à cet objet en dehors de la représentation par laquelle cet objet est présenté ?*

Cette première formulation renvoie évidemment à l'exigence épistémologique fondamentale, avec laquelle commence toute connaissance scientifique.

(Q.2) Etant donné qu'il y a de multiples représentations sémiotiques possibles d'un même objet, comment ne pas penser que les CONTENUS différents des différentes représentations possibles renvoient à des OBJETS différents, et non pas à ce seul et même objet ?

Cette deuxième formulation est plus intéressante pour le problème de compréhension des mathématiques qui nous intéresse ici : comment les élèves peuvent-ils reconnaître le même objet (le même nombre) dans des représentations différentes (dans des écritures ou dans des configurations spatiales différentes) ? En dehors des mathématiques, cela ne pose pas aucun problème puisque, j'ai toujours la possibilité d'avoir un accès aux objets représentés en dehors de leurs représentations sémiotiques. Mais en mathématiques c'est là le problème et, comme nous allons le voir, la première source de difficulté pour les élèves : comment reconnaître un même objet dans des représentations différentes ?

Le paradoxe cognitif des mathématiques montre que la sémiologie est au cœur du fonctionnement de la pensée en mathématiques. Dire cela n'est évidemment pas une explication. Mais cela permet de préciser la question pertinente pour la recherche des conditions cognitives de la compréhension en mathématiques. Comment décrire les processus de la sémiologie au cœur du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématiques ? Commençons par regarder la variété des registres de représentation sémiotique utilisés dans les activités mathématiques.

II. LA VARIÉTÉ DES REGISTRES SÉMIOTIQUES ET LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

Un registre est un système sémiotique. On pourrait donc aussi bien parler de système sémiotique. Cependant, tous les systèmes sémiotiques ont pour fonction de permettre la communication, c'est-à-dire la transmission d'informations. En ce sens, tous les systèmes sémiotiques, y compris les langues, sont des codes. Mais ce n'est pas cela qui est intéressant et utile pour l'activité mathématique et pour le développement de la pensée humaine. Ce qui est intéressant, c'est *que certains systèmes sémiotiques remplissent d'autres fonction que celle de communication*. Par exemple, la langue qui permet de remplir une fonction d'objectivation : ainsi la parole peut être essentielle pour celui qui parle et non pas pour celui qui écoute, car elle permet à « l'émetteur » lui-même de prendre conscience de qu'il ne réalisait pas avant. Mais il y a une autre fonction, plus essentielle pour l'activité mathématique : celle qui permet de transformer une représentation sémiotique en autre représentation sémiotique soit du même système soit d'un autre système. Les registres désignent les systèmes sémiotiques qui remplissent cette fonction essentielle et/ou la fonction d'objectivation. D'où la définition (non mathématique) de ce que nous appelons la *sémiosis* et qui va nous permettre de décrire et d'analyser toutes les formes de l'activité mathématique :

“ Sémiosis ” désigne **la mobilisation**, implicite ou explicite, d'**au moins DEUX registres** pour **PRODUIRE**, *extérieurement ou mentalement*, **des représentations sémiotiques d'un objet**, et pour pouvoir les **TRANSFORMER**.

La diversité des registres de représentation sémiotique est donc essentielle pour la *sémiosis*, puisqu'elle requiert la mobilisation de deux registres au moins. Les registres peuvent être mobilisés tous les deux extérieurement ou, au contraire, un seul l'est extérieurement et l'autre « mentalement ». On peut alors dégager les deux premiers principes d'analyse cognitive des processus la *sémiosis* au coeur du fonctionnement de la pensée

(P. 1) Tout objet donne lieu à une multiplicité possible de représentations différentes

(P. 2) Il y a **AUTANT DE TYPES de représentations différents** (sémiotiques et non sémiotiques) **D'UN MÊME OBJET QUE DE SYSTÈMES** (sémiotiques et non sémiotiques) *permettant d'en produire des représentations*

Le premier principe a déjà été évoqué avec la deuxième formulation du paradoxe cognitif de la pensée (Q.2). Le deuxième principe est plus important. Il donne le critère de classification de toutes les représentations possibles d'un objet. Et ce critère est radicalement différent des deux critères de classification utilisés par Peirce. Il permet, par exemple, de bien distinguer les représentations sémiotiques et les représentations non sémiotiques. Ainsi on ne range plus dans la même classe les photographies, qui sont produites automatiquement par un système non sémiotique, ou les images obtenues avec un télescope ou un microscope, et les croquis ou les schémas, les dessins en perspective, qui sont produits intentionnellement en suivant des codes graphiques de représentation. Mais il permet aussi de bien distinguer les différents types de représentation sémiotique entre elles. Ainsi, on ne rangera pas dans la même classe les expressions symboliques, comme les équations ou les formules, et les énoncés en langue naturelle. Ou, encore, les schémas, les croquis et les figures géométriques.

II.1 L'incontournable diversité des représentations sémiotiques pour l'accès aux objets mathématiques : le cas élémentaire.

Prenons un exemple de la diversité de représentations possibles d'un même objet : un des premiers nombres naturels (*infra*, Figure 1). Les représentations se partagent en deux grandes classes. D'une part, les représentations obtenues par l'organisation spatiale de collection d'items qui peuvent être aussi bien des cailloux, des pions, des allumettes ou des traits dessinés. Les items ne valent ici que par leur valeur de marque. Ce sont des pseudo-objets qui servent de marques-unités et qui sont comme des proto-signes. Il y a, d'autre part, les représentations produites par un système sémiotique. Dans un système sémiotique, les signes n'existent pas isolément et par eux-mêmes. Un système sémiotique se caractérise par une organisation interne selon deux axes d'opposition permettant de distinguer à l'intérieur de ce système, ce qui fonctionne comme signe et la signification qu'il prend. Signification différente de l'objet auquel son emploi réfère. Les systèmes d'écriture binaire ou décimale des nombres en sont l'exemple le plus pur, à une différence près par rapport aux langues naturelles : la signification et l'objet désignés tendent à se confondre. Ainsi la valeur de nombre des chiffres est définie à la fois par la base choisie et par leur position. Enfin, il y a les noms de nombres dont le sens dépend d'abord de leur place dans la suite d'une dénomination.

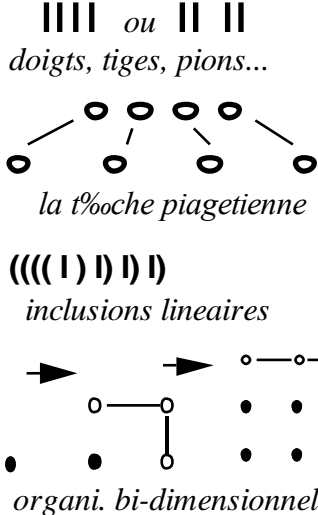
<p>I. marques unités Organisables en configurations spatiales</p>	<p>II. systèmes sémiotiques Double organisation interne : la position et la base <i>Les chiffres ne signifient rien par eux-mêmes</i></p>	
<p>Items matériels ou dessinés</p>	<p>PRODUCTION GRAPHIQUE d'une expression</p>	<p>PRODUCTION ORALE (MENTALE) de mots</p>
<p>  <i>doigts, tiges, pions...</i> <i>la t%oche piagetienne</i> <i>inclusions lineaires</i> <i>organi. bi-dimensionnell</i> </p>	<p>double valeur des symboles</p> <p>- d'opposition selon la base :</p> <p>décimale (4), binaire (10), etc.</p> <p>- de position dans une juxtaposition linéaire de signes (EXPRESSION)</p> <p>et recours à un signe (0) pour marquer une place vide</p> <p><i>Expansion à l'écriture fractionnaire : 8/2, 52/13,</i></p>	<p>En français : « quatre »</p> <p>Mais <i>le sens du mot « quatre » vient plus de sa place dans la suite de dénomination des autres nombres (un, deux, trois..., cinq) que de son association à une configuration de marques unités.</i></p>

Figure 1. Différentes représentations possible d'un même nombre.

Cette première classification des différentes représentations sémiotiques d'un même nombre permet deux faire deux remarques importantes :

— Parmi ces différentes représentations, y en a-t-il une qui représenterait mieux le nombre « quatre » que les autres, ou mieux, qui serait le nombre lui-même, les autres n'en étant que des représentations ?

Cette question peut paraître naïve et peu pertinente. Mais rappelons, contre l'oubli d'un passé encore récent, que, pendant plus d'une quinzaine d'années, la configuration spatiale de mise en correspondance de pions, utilisée par Piaget, a été, mise au dessus des autres comme étant la représentation clé, comme celle qui devait permettre d'affirmer que les enfants auraient, ou n'auraient pas, « construit le concept du nombre » ! Et la dénonciation didactique du rôle du langage dans l'apprentissage des mathématiques se fondait entre autres sur ce point .

— La découverte des premiers nombres par les très jeunes enfants se fait lorsqu'ils commencent à coordonner l'une des différentes représentations de type marques-unités avec l'emploi stable des noms de nombre que la langue maternelle leur offre. Autrement dit, le premier accès aux nombres pour l'enfant se fait quand il commence à mobiliser au moins deux types de représentation différents. Pour interpréter les processus cognitifs de compréhension et leur développement, il ne s'agit donc pas de privilégier a priori l'un ou l'autre type de représentations, mais de regarder la manière dont celui qui est utilisé commence à s'articuler avec un autre.

II. 2 La fonction centrale des registres de représentation sémiotique pour l'activité et la pensée mathématiques.

Ce serait une erreur de limiter le rôle des représentations sémiotiques à la seule fonction de d'évocation des objets non immédiatement accessibles, les signes tenant seulement la place des objets absents ! Et, pourtant, c'est le plus souvent à cette fonction d'évocation ou de substitut que l'on réduit souvent l'utilité des signes et des systèmes sémiotiques dans l'enseignement des mathématiques. Il y a, par exemple, cette idée effarante que l'on trouve dans toutes les pédagogies qui mettent l'accent sur l'action (concrète) : il n'y aurait pas besoin de langage lorsqu'on a les objets devant soi, sous la main. C'est méconnaître que les mots sont alors aussi nécessaires qu'en l'absence des objets, ne serait-ce que pour prendre une distance par rapport au contexte immédiat, et acquérir la liberté et la maîtrise de sa pensée.

En mathématiques, une représentation sémiotique n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation sémiotique DU MEME REGISTRE. Cette transformation est une OPÉRATION sémio-cognitive. Par exemple, les opérations arithmétiques s'effectuent par des opérations sémio-cognitives. Il n'y a pas d'opération mathématique qui ne mobilise pas à une opération sémio-cognitive. Sinon il ne se passe rien pour le sujet qui est censé accomplir effectuer lui-même un traitement, en comprenant bien sûr ce qu'il fait. Là, nous touchons à l'intérêt majeur de la diversité des registres sémiotiques, ce qui nous permet d'énoncer le troisième principe d'analyse cognitive des processus la sémiózis au coeur du fonctionnement de la pensée

(P.3) La capacité d'une représentation sémiotique à être ainsi transformée en autre représentation du même registre *dépend du registre dans lequel la représentation de départ a été produite.*

Cela veut dire que chaque registre permet d'effectuer des transformations spécifiques , c'est-à-dire des opérations sémio-cognitives, que les autres registres ne permettent pas de faire ou de façon trop vite coûteuse : calculer, raisonner, visualiser, etc. Ainsi les registres des figures géométriques, celui des représentations graphiques, celui évidemment des écritures symboliques, et aussi celui de la langue naturelle, sans lequel il ne pourrait pas y avoir

d'énoncé, jouent-ils des rôles essentiels et complémentaires dans les démarches mathématiques. Et ces rôles peuvent varier selon les domaines et les problèmes.

Mais revenons au tableau précédent des différentes représentations possibles d'un même nombre. Nous pouvons le compléter en indiquant le type de transformation spécifique auquel chaque type de représentation se prête naturellement, si l'on ose dire. En d'autres termes, chaque type de représentation des nombres a une dynamique propre de transformation interne. C'est dans la dynamique de ces opérations sémio-cognitives que les opérations arithmétiques peuvent être réellement effectuées par quelqu'un, que ce soit un « expert » ou un « apprenant ».

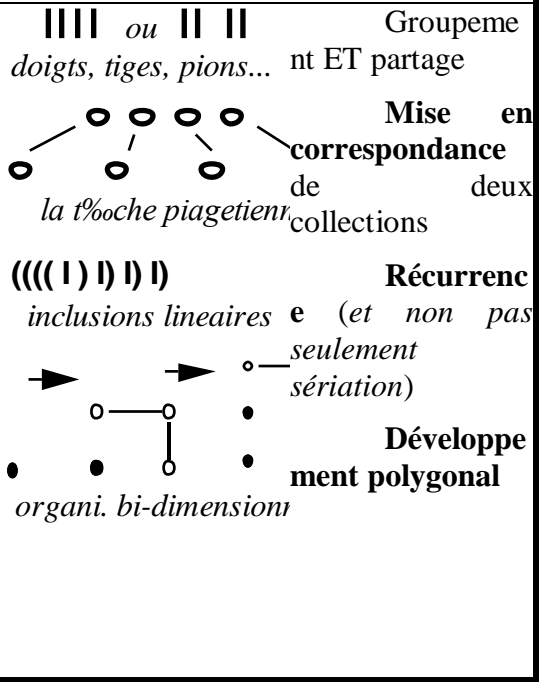
I. MARQUES UNITÉS	Transformations possibles	II. SYSTÈMES SÉMIOTIQUES	Transformations possibles
Organisation spatiale de marques unités	OPÉRATIONS de (RÉ)ARRANGEMENT SPATIAL	Double organisation (paradigmatique et syntagmatique)	OPÉRATIONS de SUBSTITUTION de SIGNES
		double valeur des symboles - d'opposition selon la base : décimale (4), binaire (10), etc. - de position dans une juxtaposition linéaire de signes (expression) et recours à un signe (0) pour marquer une place vide Expansion à l'écriture fractionnaire : 32/8	DES SYMBOLES POUR LES OPÉRATIONS DE SUBSTITUTION : — expressions de calcul intégrant des symboles d'opérations arithmétiques — algorithmes de calcul dépendant du système choisi (binaire, décimal, fractionnaire)
III. A quelle représentation (marques unités ou système sémiotique) les mots d'une LANGUE utilisés ORALEMENT (ou mentalement) — à la fois pour COMPTER les éléments d'une collection et pour DÉSIGNER des nombres — correspondent-ils ?			

Figure 2 Transformations de représentations propres à chaque système de représentation

On voit que les représentations par des marques unités, les proto-signes, se prêtent à quatre opérations sémio-cognitives d'arrangement et de réarrangement d'une disposition spatiale. Le recours à ces représentations présente un avantage immédiat, en vertu duquel on leur reconnaît une caractéristique « intuitif »: elles n'ont aucune contrainte interne d'organisation,

puisqu'elles mobilisent les lois d'organisation perceptive qui nous permettent de reconnaître immédiatement, au sein un ensemble de stimuli donnés, des « groupements » et des « configurations », des « formes ». Mais cela entraîne souvent une confusion. On croit que ces opérations sont « concrètes ». Ce qui est concret, c'est le geste que l'on fait si l'on utilise, par exemple, des pions comme support pour effectuer les opérations de réarrangement. Mais l'opération n'est pas dans le geste, *elle est dans la transformation de l'organisation* de la représentation dont on part. Les opérations de réarrangement spatial restent extérieures aux représentations ainsi transformées. En d'autres termes, il ne suffit pas d'effectuer certaines manipulations de collections de pions ou d'autres objets matériels, pour effectuer ces opérations sémio-cognitives, c'est-à-dire pour en prendre conscience. Enfin, on peut remarquer l'illusion de toute référence globale à un matériel concret : il y a de telles différences cognitives entre ces quatre opérations de réarrangement spatial qu'ici nous sommes en présence de quatre types de représentations « intuitives » ou « concrètes », et non pas d'un seul.

Avec les systèmes sémiotiques de représentation des nombres, nous changeons presque d'univers. Non pas parce que nous nous éloignerions des objets mais parce que la nature des transformations de représentation change. Elles consistent, ici, *en opérations de substitution d'expressions les unes aux autres, opérations qui sont la base même du calcul*. Ces opérations ne sont plus extérieures aux représentations comme pour les marques unités. Elles doivent se faire selon des règles syntaxiques qui résultent de la double organisation du système de représentation, et selon des règles de priorité déterminées par la nature des opérations arithmétiques. *Les algorithmes de calcul sont alors indissociables du fonctionnement du système sémiotique choisi*. Soulignons, enfin, que ces opérations relèvent exclusivement de l'écriture car elles sont purement graphiques. Il n'y a pas d'oralisation possible, à moins d'épeller la suite des signes formant les expressions.

Il y a, en troisième lieu, la langue naturelle et son vocabulaire pour désigner des nombres et des opérations. Bien qu'elle soit un système sémiotique, elle ne semble pas avoir la même importance parce qu'elle ne permet d'effectuer aucune transformation en ce qui concerne la représentation des nombres. Et cela d'autant plus que la production dans ce domaine est d'abord orale et non pas écrite. Alors faut-il l'éliminer, comme cela a été le mot d'ordre didactique entre les années 1965-1980 ? Ce serait une grande naïveté et une grande illusion. *Car les mots désignant des nombres, oralement d'abord et « dans la tête » ensuite — le mental est en grande partie sémiotique ! — servent à compter les éléments d'une collection de marques- unités*. On a déjà vu que le premier accès aux nombres se fait lorsqu'une suite stable de noms est articulée avec le pointage des éléments d'une telle collection (II. 1). Mais au delà de cette première émergence, les noms de nombres permettent des opérations de désignation des nombres. Et cela va être extrêmement important pour permettre des coordinations entre des représentations de type marques unités et des représentations relevant d'un registre (classiquement l'écriture décimale).

Face à un spectre aussi étendu de représentations des nombres, les types de représentations les plus intéressants, d'un point de vue mathématique, ceux qui techniquement et culturellement se sont imposés, sont les systèmes sémiotiques, décimaux et binaire. Et cela pour deux raisons illustrant parfaitement les deux aspects qui obligent à placer la sémosis au cœur du fonctionnement de la pensée mathématique : l'unique accessibilité sémiotique aux objets mathématiques et la dynamique de transformation interne propre aux différents registres. Tout d'abord, ces deux systèmes sémiotiques d'écriture des nombres offrent une puissance illimitée pour accéder à tous les nombres que l'on veut, alors que les représentations de type marques unités nous restreignent aux « petits » nombres dits « naturels » et sans le zéro ! Mais, surtout, dès que l'on veut effectuer des opérations de type

multiplicatif, et non plus seulement additif, cela devient très vite soit impossible soit incontrôlable avec les représentations de type marques unités.

II. 3 La distinction fondamentale pour l'analyse de l'activité et des productions en mathématiques.




Faisons maintenant un pas de plus dans la description du fonctionnement cognitif de la pensée qui est nécessaire pour le développement d'une activité mathématique. Nous venons de voir que la mobilisation d'au moins deux registres était la toute première condition. Or ce qui est décisif ce n'est pas la variété des registres disponibles, mais les deux types de transformation de représentation sémiotique qu'ils permettent. Ici, je dois avouer que je suis toujours surpris de voir que, lorsqu'on se réfère aux « registres » dans les travaux de recherche, on passe souvent silence les deux types de transformations qui constituent comme la dynamique de la pensée mathématique « en acte », c'est-à-dire à l'œuvre. Pourtant c'est là que commence véritablement l'analyse des processus cognitifs sous-jacent à toute démarche mathématique.

La diversité des registres rend possible deux types de transformation de représentations :

— Celles qui se font *en restant dans le même registre*, comme nous venons de le voir : un TRAITEMENT (*le calcul*)

— Celles qui changent la représentation d'un objet produite dans un registre de départ *en une représentation référentiellement équivalente* d'un registre d'arrivée : une CONVERSION. Le paradoxe cognitif des mathématiques est directement lié à ce deuxième type de transformation.

En voici deux exemples ultra élémentaires, qui permettent de voir que les conversions et leur complexité cognitive dépendent du couple { Registre de départ, registre d'arrivée } et que la nature des traitements change avec le registre : substitution d'expressions littérales dans un registre symbolique ou reconfiguration dans un registre de figures (un des processus heuristiques !). Les conversions sont représentées par des flèches en pointillés et les traitements par des flèches pleines.

CONVERSION Changer de registre <i>sans changer la référence aux objets représentés</i>	TRAITEMENT En restant dans le même registre
Jean a 3 ans de plus que Pierre. Ensemble, ils ont 23 ans. Quel est l'âge de chacun ? <div style="text-align: center;">  </div> $x + (x + 3) = 23$	$x + (x + 3) = 23$ <div style="text-align: center;">  </div> $2x + 3 = 23$ <div style="text-align: center;">  </div> $2x = 23 - 3, \text{ etc.}$

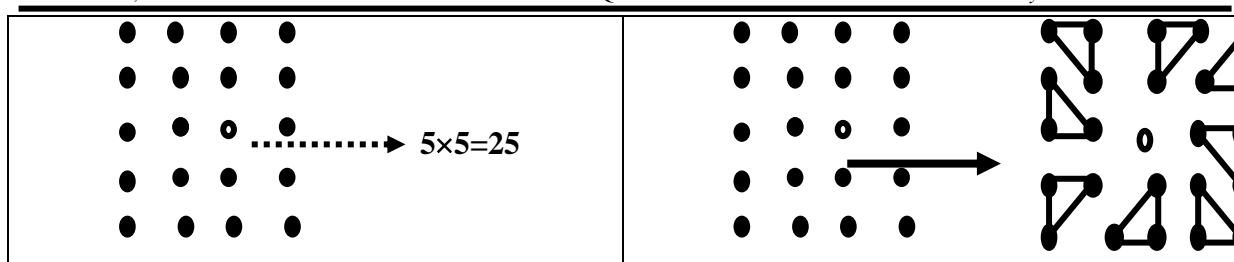


Figure 3 Les deux types de transformation d'une représentation sémiotique en une autre

Il faut donc que l'élève soit déjà capable, comme le mathématicien, soit *d'anticiper lui même une conversion à faire*, soit de *reconnaître le même objet dans deux représentations*, et cela assez rapidement. Sinon, il va être arrêté, rester bloqué, et devoir attendre, à chaque nouveau problème, que quelqu'un d'autre vienne lui suggérer quoi faire pour pouvoir résoudre.

III. NÉCESSITÉ D'UNE ARTICULATION COGNITIVE DES DEUX TYPES DE TRANSFORMATIONS SÉMIOTIQUES, POUR POUVOIR DÉVELOPPER PAR SOI-MÊME UNE ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

La distinction entre les conversions et les traitements est la distinction fondamentale pour analyser les processus cognitifs de compréhension et les causes profondes d'incompréhension en mathématiques. Elle permet de déterminer des facteurs essentiels pour l'apprentissage des mathématiques. Cependant, elle suscite souvent une résistance qui trahit souvent un postulat cognitif implicite : quel intérêt du point de vue mathématique, c'est à dire pour l'acquisition des concepts mathématiques ? Plaçons nous donc du point de vue mathématique. Qu'est-ce qui est important le traitement ou la conversion, ou la conversion et le traitement ? La réponse dépend de l'orientation de l'activité en cours.

L'orientation vers la recherche de justification ou de preuve conduit à privilégier un registre de représentation, celui où les traitements seront effectués de manière contrôlable et économique. La conversion n'intervient alors que de façon transitoire pour choisir le registre, ou pour voir intuitivement les propriétés à utiliser (en géométrie).

L'orientation vers la recherche de conjectures, ou vers un travail d'exploration exige le travail en parallèle dans deux registres, c'est à dire l'articulation des deux types de transformation en une même démarche mathématique.

Pour illustrer cette deuxième situation, prenons un exemple très élémentaire : la recherche d'une formule générale permettant d'obtenir le nombre d'éléments à chaque pas d'une suite répondant à une règle de progression (*infra* Figures 4). On entoure un pion de manière à obtenir une configuration carrée. Puis on réitère chaque fois cette procédure de « demi encerclement ». On voit que cette activité mobilise deux registres.

A. Une procédure de transformation d'une représentation donnée, par un « demi encerclement »	
B.1 Description de chaque représentation obtenue.	
B.2 Description de l'augmentation produite par la procédure de transformation.	

Figure 4. Une activité d'exploration congruente

Les deux registres ne remplissent la même fonction. L'activité de traitement se fait d'abord dans le registre non discursif des figures et la conversion apparaît comme une description numérique. *On voit qu'il y a deux descriptions numériques possibles* mais qu'une seule des deux est mathématiquement intéressante, parce qu'elle va permettre d'établir une formule générale qui aura un statut théorique de conjecture. Cet exemple paraît extrêmement simple et il est difficile d'y voir ce qu'une analyse en termes de registres et de la distinction entre conversion et traitement apporte réellement. Modifions donc, très légèrement, cette procédure de transformation en faisant un « encerclement complet » comme dans la figure ci-dessous (Figures 5). C'est une variante de la même tâche, sans aucune différence « conceptuelle ». Mais tout change. *Il faut, cette fois, discerner le partage de la configuration carrée en huit triangles de taille croissante pour pouvoir voir comment décrire numériquement la progression !* Les traitements figuraux à faire avant la conversion sont représentés par des flèches pleines et, par des flèches en pointillés, la conversion permettant de dégager un invariant descriptif, « $(... \times 8) + 1$ »²

1. Une procédure de transformation d'une configuration par « encerclement »	
3 Description de la procédure de transformation.	

² On m'a expliqué, après coup, la raison mathématique de cet invariant descriptif :

$$(2n + 1)2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 8n(n + 1)/2 + 1$$

La quatrième écriture est justifiée par le fait que n ou $n + 1$ est pair. De plus $n(n + 1)/2$ est la somme des n premiers entiers et peut donc être vu comme une disposition en triangle. On remarquera que cette explication implique le choix d'un autre registre que ceux dans lesquels l'activité d'exploration a été conduite. On remarquera également que cette activité est une activité de description et non pas de raisonnement. Or cette démarche préalable de description peut être menée et contrôlée sans le recours à aucune connaissance ou traitement mathématiques. Elle est essentielle pour apprendre à comprendre en mathématiques, c'est-à-dire à prendre des initiatives et les contrôler soi-même, en dehors toute assistance. Et elle est la condition nécessaire pour devenir capable d'appliquer des connaissances mathématiques dans des situations réelles.

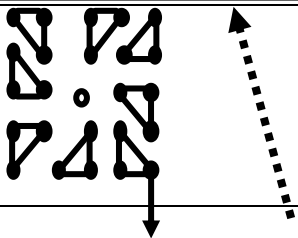
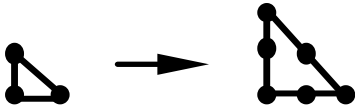
<p>2.1. Sous reconfigurations triangulaires à discerner pour la conversion en une description numérique.</p>	
<p>2.2. Transformation des sous reconfigurations triangulaires à chaque nouvel « encerclement »</p>	

Figure 5. Une variante non congruente de l'activité précédente

D'un point de vue mathématique, ces deux activités peuvent paraître sans intérêt. Mais changeons simplement la contrainte « une configuration carrée » en la contrainte « une configuration hexagonale », alors la procédure d'encerclement permet de trouver la formule du dénombrement du pavage d'un disque par des hexagones réguliers (Duval 2006b).

Cet exemple permet de voir comment une analyse fondée sur la séparation des conversions et des traitements peut révéler la complexité cognitive qui est souvent cachée sous des activités mathématiquement simples ou triviales. Or si l'on revient maintenant aux problèmes de compréhension que beaucoup d'élèves rencontrent en mathématiques et qu'ils ne rencontrent pas ailleurs, les recherches mettent en évidence l'existence de deux sources d'incompréhension et de blocage en mathématiques. Elles correspondent respectivement aux deux types de transformation des représentations sémiotiques (Duval 2006a)

1. Il y a les difficultés intrinsèquement liées à la conversion. Mais on ne les voit pas ou on refuse d'en voir l'importance car elles sont souvent masquées pour deux raisons :

— soit l'enseignement s'en tient aux *cas de congruence* (la correspondance entre les unités de la représentation de départ et celles de la représentation d'arrivée semble si immédiate qu'elle ressemble à un codage), alors qu'une légère variation dans la représentation de départ peut rendre la conversion *non congruente*, et créer ainsi un blocage.

— soit les conversions sont toujours sollicitées dans le même sens, mais il suffit d'*inverser le sens de conversion* pour qu'il n'y ait plus aucune reconnaissance par l'élève. L'exemple maintenant classique est le passage des représentations graphiques aux écritures algébriques d'une relation.

De toute façon, ces difficultés qui touchent au paradoxe cognitif des mathématiques, elles réapparaissent massivement lors de la résolution de problèmes.

2. Il y a les difficultés intrinsèquement liées aux traitements dans les deux registres communs que sont la langue naturelle et le domaine des figures. A la différence des registres spécifiques aux mathématiques, développés pour remplir la seule fonction de traitement (calcul), les deux registres communs, qui sont au contraire à la base toute production culturelle et cognitive, remplissent les fonctions de communication, d'objectivation et de traitement...Et en mathématiques, on les utilise pour remplir à tour de rôle ces trois fonctions, sans prendre garde qu'on ne mobilise pas implicitement les mêmes opérations discursives.

Ainsi le langage est omniprésent dans l'enseignement des mathématiques (production orale pour les consignes, les interactions entre les élèves, pour la production d'énoncés de

problème, de définition, de théorème etc.). Or, loin d'être « transparents », les traitements faits dans la langue naturelle soulèvent des difficultés spécifiques (Duval 1995). Et il en va de même dans le domaine des figures (formes visuelles) où l'on dit « ça se voit sur la figure », alors que la manière mathématique de voir les figures géométriques est à contresens de la manière spontanée (Duval 2005).

L'équivoque didactique des traitements faits dans ces deux registres communs vient du fait que *ce ne sont pas les mêmes ressources de la langue naturelle qu'on utilise en mathématiques et en dehors des mathématiques.*

IV QUELS POINTS DE VUE POUR ETUDIER LES PROBLEMES DE LA FORMATION DES ELEVES EN MATHÉMATIQUES ET QUELLE PLACE POUR CE POINT DE VUE SEMIO-COGNITIF ?

L'enseignement des mathématiques se trouve confronté à un défi éducatif redoutable, s'il veut s'adresser à *tous les élèves*, et si l'on veut donner aux mathématiques *une place essentielle dans la formation de base des individus*. Ce défi est sans cesse présent, ne serait-ce qu'à travers deux questions qui reviennent de manière récurrente, soit comme une réaction des élèves et des parents, soit comme une réaction des autres enseignants qui ne sont pas des enseignants de mathématiques ou de sciences dites « dures ».

— Q 1. *A quoi ça sert d'apprendre des math à l'école, si l'on ne veut pas être professeur de mathématique ou ingénieur ?*

— Q. 2 *Qu'est-ce que les mathématiques apportent à la formation générale de la pensée et que les autres disciplines n'apporteraient pas ?*

Or dès que l'on s'éloigne du cercle des mathématiciens et des chercheurs en didactique, les réponses à ces questions cessent d'être perceptibles ou convaincantes ! C'est pourquoi, dès les années 1960, début de ce que l'on appelé « l'enseignement de masse » au niveau du secondaire, la prise en compte d'autres points de vue que le seul point de vue mathématique est apparue nécessaire :

— *le point de vue pédagogique* qui est centré sur les élèves en tant qu'enfants ou adolescents, c'est à dire sur leurs intérêts, leurs problèmes, la confiance qu'ils prennent, ou non, en eux-mêmes et dans leurs capacités, etc.

— *le point de vue des enseignants* qui centré sur la « gestion » d'une classe, c'est-à-dire sur le choix et l'organisation de séquences d'activités à des fins d'« acquisition de connaissances », sur l'exploitation des interactions entre élèves dans un travail en groupes,

— *le point de vue institutionnel* qui est centré sur l'organisation des systèmes éducatifs : les curriculums, les programmes d'enseignement, les manuels, les évaluations à l'échelle d'une population, etc.

— *le point de vue historico-épistémologique* qui est centré sur les questions mathématiques ou physiques qui ont motivé le développement des notions mathématiques, sur les différents seuils qui ont du être franchis au cours de ce développement, etc.

Selon que l'on privilégie l'un ou l'autre de ces points de vue, on ne va prendre en compte les mêmes variables, on ne va pas s'appuyer sur le même type d'observables et de données, on ne va pas avoir les mêmes critères d'interprétation. Mais, globalement, il n'y a aucune divergence entre ces différents points de vue. On peut les juxtaposer ou les faire

converger au service de l'organisation d'activités mathématiques, qui seront alors uniquement envisagées en fonction du point de vue mathématique. C'est de cette manière que la didactique, en France, s'est développée. Elle a cherché à intégrer dans un même discours global le point de vue centré sur la classe, le point de vue institutionnel et aussi le point de vue historico-épistémologique. Ces points de vue présentent l'avantage de rester neutres par rapport au point de vue mathématique, et donc de pouvoir lui être facilement associés.

Pouvoi, alors le point de vue cognitif concernant les problèmes de compréhension, du moins celui dont j'ai essayé de vous donner une rapide approche intuitive, suscite-t-il une certaine résistance ? Eh bien, il est perçu comme incompatible avec le point de vue mathématique sur ce que c'est que comprendre les mathématiques. En outre, à la différence des autres points de vue, il ne semble pas offrir une réponse pratique et prête à l'emploi, tout de suite, dans les classes. Ce qui est la première demande des enseignants quand ils viennent en formation ! Arrêtons nous sur les raisons d'une apparente incompatibilité entre le point de vue sémio-cognitif et le point de vue mathématique concernant l'enseignement des mathématiques.

Tout d'abord, trois choses doivent être prises en compte quand on veut analyser le fonctionnement d'un enseignement :

— (1) Les objectifs de formation d'un système éducatif. Ils relèvent d'une politique d'éducation et reflètent, plus ou moins bien, les attentes et les besoins réels d'une société.

— (2) *La décomposition, ou le découpage, en « éléments de base » qu'un programme a fait des connaissances ou des savoirs à acquérir.* Cela relève, évidemment, du point de vue d'experts mathématiciens. Car, non seulement, ce sont des connaissances et des techniques mathématiques qui doivent être enseignées, mais *il y a un ordre mathématique d'acquisition pour les contenus mathématique choisis.* C'est ce que traduit la notion de « prérequis » qui renvoie à un savoir mathématique préalable à l'enseignement du nouveau contenu que l'on veut introduire. Ces contraintes d'un ordre d'acquisition sont intrinsèques à la connaissance mathématique et sont donc ici beaucoup plus fortes que dans les autres disciplines.

— (3) La progression organisée sur une heure de classe ou sur un année scolaire, *pour l'acquisition de chacun des éléments de base.* L'organisation de cette progression, sur le terrain, se fait dans le cadre d'un programme qui fixe à la fois le découpage en « éléments de base » et leur ordre mathématique d'introduction. C'est, bien sûr, pour les choix à faire dans la manière d'organiser pour les élèves cette progression que l'on fait appel à d'autres points de vue que le point de vue mathématique. Ainsi, durant les décennies 1960-1980, on a cru que la théorie psycho-épistémologique et « constructiviste » de Piaget expliquait les processus de l'acquisition des « concepts » par l'enfant, et on en a fait le modèle normatif, et alors invoqué comme scientifiquement incontestable, pour l'organisation des activités en classe. Et c'est en référence à ce modèle que la didactique des mathématiques a commencé à se développer, en essayant de compenser le manque propre à cette théorie : l'ignorance du point de vue des enseignants face à leur classe.

La particularité de l'analyse sémio-cognitive que je viens de présenter est qu'elle concerne d'abord la décomposition de la connaissance mathématique en éléments de base, laquelle relève de la compétence des experts mathématiciens (2), avant de porter sur l'organisation de situations d'apprentissage (3). Et c'est là que semble surgir une incompatibilité entre le point de vue mathématique et le point de vue cognitif.

D'un point de vue mathématique, la décomposition en éléments de base de la connaissance mathématique est essentiellement faite en termes d'objets mathématiques,

souvent assimilés à des « concepts » mathématiques. Et, finalement, sur un cycle d'enseignement, cela en fait beaucoup !

Du point de vue sémio-cognitif, *la décomposition en éléments de base porte sur la manière de penser, de visualiser, de justifier, et d'organiser des informations, qui est si particulière aux mathématiques*, et dont la compréhension est cognitivement « prérequis » pour l'introduction de tous les concepts introduits et pour leur utilisation par les élèves. Elle se fait en « gestes intellectuels » qui ne sont pas naturels ou qui ne sont pas cultivés dans les autres domaines de connaissance. Le tableau suivant permet de comparer le type de décomposition de la connaissance mathématique en éléments de base auquel conduit chacun de ces deux points de vue :

Point de vue mathématique :	Point de vue cognitif :
1. Des « concepts » et/ou des objets mathématiques 2. Un ordre de « construction » mathématique pour l'acquisition de ces concepts. 3. Association de chaque « concept » à des procédures pour résoudre une catégorie de problèmes 4. L'acquisition de ces procédures est évaluable en termes de performances locales sur un problème « représentatif ». 5. La compréhension est dans la démonstration ou la justification mathématique.	1. Des « gestes intellectuels » qui ne sont pas naturels en raison du paradoxe cognitif des maths. 2. Identification de ces gestes à partir des différents couples de registres (Registre départ et registre d'arrivée) avec inversion du sens de conversion. 3. Prise de conscience de la manière dont on utilise les registres communs de la langue et de la visualisation par des figures dans les traitements. 4. L'acquisition s'évalue que sur une variation de tâches et sur plusieurs problèmes permettant de tester la capacité de « transferts ». 5. La compréhension est dans la coordination des registres et dans la capacité à prendre par soi-même des initiatives pour résoudre un problème et à les contrôler soi-même.

Figure 6. Comment décomposer les connaissances en vue de leur enseignement ?

Cette comparaison, très synthétique, aide à saisir l'incompatibilité des deux points de vue et le débat auquel elle donne lieu avec les enseignants de mathématiques comme avec les « didacticiens » des mathématiques.

On objecte que la prise en compte de la décomposition cognitive conduirait à ne plus « faire de mathématiques » en classe. Car s'occuper de faire prendre conscience aux élèves du jeu représentationnel sous-jacent aux conversions, de la manière totalement différente d'utiliser la langue naturelle — ce ne sont pas les mots qui sont différents, mais la manière de les utiliser pour désigner ou pour décrire des objets, et cela ce ne sont les définitions qui permettent d'en prendre conscience. D'ailleurs on ne définit pas de la même façon en mathématiques et dans les autres domaines de connaissance ! — détournerait des objets et des contenus mathématiques à enseigner.

Oui. Peut-être. Mais c'est transitoire. En revanche, vouloir s'en tenir d'emblée au point de vue mathématique, ou plus exactement à la seule décomposition « conceptuelle », c'est supposer que l'acquisition des concepts mathématiques *entraînerait presque naturellement l'acquisition des démarches de pensée, de visualisation et de justification qui*

sont propres aux mathématiques mais qui sont également prérequis pour « faire des mathématiques » ou, plus modestement, *pour apprendre à reconnaître comment les contenus appris en classe s'appliquent et s'utilisent pour résoudre des problèmes du monde réel*. En d'autres termes, on fait le choix implicite d'un fonctionnement cognitif de la pensée qui serait totalement le même en mathématiques et dans les autres domaines de connaissance ! Ce qui semble extrêmement éloigné de tout ce que l'on peut observer depuis des dizaines et des dizaines d'années.

En réalité, s'en tenir à ce point de vue décomposition « conceptuelle » des connaissances mathématiques revient à ne prendre en compte que les difficultés liées à chaque concept, et à relativiser les difficultés transversales récurrentes. Alors pourquoi s'étonner qu'on se retrouve toujours face aux mêmes doutes globaux d'une grande majorité d'élèves, et aussi d'enseignants d'autres disciplines, sur l'utilité et l'intérêt des mathématiques dans la formation, et que face à leurs questions les mathématiciens et les enseignants de mathématiques restent toujours aussi démunis ?

V. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous pouvons faire quelques remarques sur les recherches didactiques au regard du défi, auquel l'enseignement des mathématiques doit faire face,

Les recherches didactiques cherchent à accorder le point de vue mathématique sur la décomposition « conceptuelle » des connaissances avec l'un des points de vue non mathématique (gestion de classe, pédagogie, etc.) comme si le point de vue mathématique et ces autres points de vue étaient complémentaires, et comme si les problèmes d'enseignement des mathématiques étaient uniquement liés à la complexité spécifique à chaque concept enseigné, ou relevaient d'abord de facteurs externes indépendants de l'activité mathématique elle-même.

Evidemment, ces différents points de vue ne privilégient pas les mêmes aspects dans le champ de plus en plus complexe des phénomènes éducatifs et de la formation des individus. Et cela conduit à accumuler des variables hétérogènes, comme si par cette accumulation on allait mieux cerner les problèmes spécifiques de compréhension en mathématiques auxquels les élèves se heurtent.

A la différence du point de vue cognitif, ces différents points de vue présentent l'avantage immédiat d'être totalement neutres par rapport au point de vue mathématique et donc celui de pouvoir « faire des mathématiques » en classe comme s'il n'y avait pas de difficultés spécifiques de compréhension liées à la manière de penser, de voir, de travailler qui est propre aux mathématiques. Et cela conduit donc à maintenir séparés le point de vue spécifique des mathématiques et les points de vue plus généraux concernant le « métier d'enseignant », et l'observation, à la manière piagetienne, de « ce que les élèves font spontanément ».

Cette forme de dualisme permet de répondre à la demande immédiate des enseignants qui, pris dans le quotidien de leurs classes, attendent d'abord des moyens d'introduire tel ou tel « concept » mathématique, c'est-à-dire des « ingénieries didactiques ». Elle permet également d'orienter l'enseignement vers des applications qui paraissent utiles aux élèves, en évitant tout ce qui pourrait paraître incompréhensible et qu'on qualifie alors de « formel » ou de « théorique ». On en est ainsi venu à opposer des « mathématiques pratiques », qui seraient enseignables à tous, et des « mathématiques théoriques » réservées à quelques uns.

Mais, en réalité, on laisse à chaque élève la charge de découvrir par lui-même la manière, si atypique et parfois à « contresens », de penser, de visualiser, de justifier qui est propre aux mathématiques et sans laquelle on ne peut ni entrer dans la compréhension des « concepts » mathématiques, ni véritablement reconnaître les situations réelles dans lesquelles les mathématiques apprises peuvent s'appliquer. Et, dans les travaux de recherche en didactique, la prise en compte des problèmes de compréhension et d'incompréhension spécifiques au fonctionnement de la pensée en mathématiques reste toujours très marginale.

Comment alors pouvoir répondre non pas tant à la question de l'utilité des mathématiques, mais à celle de leur place et de leur apport dans la formation générale de l'individu, si l'on méconnaît ou, plus encore, si l'on dénie le divorce profond qui existe, pour les mathématiques, entre teaching et learning ?

RÉFÉRENCES

Duval, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang, 1995.

Duval, Raymond. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53, 2005.

Duval, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131, 2006a.

Duval, Raymond. Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In J-C. Rauscher (Ed.) *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM*. 67-89. Strasbourg : IREM, 2006b.

Duval, Raymond. « Objet »: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles ? (Ed. J. Baillé et Lima) *Du mot au concept. Objet 79-108*. Grenoble : Presses Universitaires, 2009.