A INFLUÊNCIA DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS E PROBLEMAS DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

André Tenório[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro / Universidade Federal Fluminense
Marcia Eliane Furtado de Oliveira[2]
Secretaria de Educação do Estado de Rio de Janeiro / Universidade Federal Fluminense
Thaís Tenório[3]
Universidade Federal Fluminense

RESUMO

Os efeitos de empregar o Geogebra na resolução de exercícios e problemas de funções polinomiais do 1° grau foram investigados. A pesquisa envolveu 59 alunos de duas turmas de 1ª série do ensino médio de escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro. Os instrumentos de coleta de dados foram pré-teste, pós-teste, lista de questões, registro de relatos das atividades com o software e questionários. De início, ambas as turmas receberam aulas tradicionais similares, mas, entre o pré-teste e o pós-teste, passaram por reforços pedagógicos diferentes. Uma turma foi ensinada a usar o Geogebra no laboratório de informática e pôde manipulá-lo livremente na resolução de exercícios e problemas durante o reforço. A outra turma não teve contato com o software. Nas duas houve aumento significativo entre as médias do pré-teste e do pós-teste, com melhora de desempenho tanto em exercícios quanto em problemas. Alunos de ambas manifestaram as mesmas dificuldades de interpretação de enunciados e elaboração de estratégias próprias. As principais dúvidas ocorreram em tentativas de encontrar o valor de abscissa dado $f(x)$ e expressar as leis de formação das funções. Deficiências em conteúdos antecedentes, como porcentagem, equações do 1º grau e sistemas de equações, prejudicaram a compreensão e o rendimento. Não obstante, segundo os alunos da turma levada ao laboratório, o uso do Geogebra

[1] tenorioifrj@gmail.com
[2] marciaelaine@gmail.com
[3] tenoriocalc@gmail.com

facilitou a aprendizagem (96%) e a resolução de questões (93%). Os alunos nunca haviam utilizado um software educativo de matemática, mas, após a experiência, relataram desejar que outros conteúdos fossem lecionados com recursos semelhantes (100%).

Palavras-Chave: Ensino de Matemática. Função polinomial. Geogebra.

ABSTRACT

The effects of using Geogebra for solving exercises and problems of first-degree polynomial functions were investigated. Perceptions of fifty-nine students from two High School classes of public schools in Rio de Janeiro were considered. The data collection instruments were pre-test, post-test, list of exercises and problems, record of activity reports with the software and questionnaires. Initially, both classes received similar traditional lectures, but between pre-test and post-test, different pedagogical methods was used. One class was taught to use Geogebra in the computer lab. The students could handle it freely for solving exercises and problems. The other class had no contact with the software. A significant increase between pre-test and post-test averages was perceived in both classes. Students had better academic performance in exercises and problems. The most common difficulties were understanding statements and prepare strategies for resolutions. Doubts generally involved find x value given $f(x)$ and express formation laws of functions. Difficulties in other contents as percentage, first-degree equations and equation systems undermined understanding and academic performance. Students who handled Geogebra pointed out the positive effects of the software for learning (96%) and solving exercises and problems (93%). Students had never used educational mathematics software, but, after experience, they reported want employed it for learning other contents (100%).

Keywords: Mathematics teaching. Polynomial function. Geogebra.

INTRODUÇÃO

Para Dubinsky (1991), Gravina e Santarosa (1998) e Coll e Solé (2009), o professor deveria tentar desenvolver situações onde fosse possível reconhecer dificuldades de aprendizagem para, assim, ser capaz de elaborar estratégias para promover a construção do conhecimento priorizando a iniciativa e a autonomia do aluno. No entanto, o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, por vezes, não conduz à reflexão ou à descoberta, mas, sim, ao uso de fórmulas, regras e definições ministradas em aula (RICHARDS, 1991; PIRES, 2009; ROMANATTO, 2012), principalmente, quando a estratégia de ensino aplicada é assentada na resolução de exercícios.

Exercícios envolvem a aplicação de um determinado algoritmo, ou seja, a utilização de fórmulas ou de um desenvolvimento treinado em sala de aula (KARAM; PIETROCOLA, 2009; ROMANATTO, 2012). As vantagens de exercícios seriam os alunos compreendê-los com facilidade e o professor avalia-los com rapidez. Já as desvantagens seriam limitar e restringir o pensamento matemático por mecanizar as resoluções, reduzir o caráter significativo dos conteúdos, não estimular o entendimento em longo prazo, não promover a criatividade e auxiliar pouco a aprendizagem matemática (DANTE, 1989; KARAM; PIETROCOLA, 2009; ROMANATTO, 2012).

Segundo Dante (1989) e Barros (2008), ensinar Matemática a partir da resolução de problemas em vez de exercícios é mais eficiente. Problemas poderiam oferecer ao aluno a oportunidade de utilizar e criar seus próprios argumentos matemáticos em uma situação espelhada na realidade, o que estimularia o raciocínio e a assimilação da matemática como algo importante ao cotidiano. Isso poderia até ser mais relevante para o desenvolvimento da estrutura mental do aluno que aulas expositivas (BARROS, 2008).

> O objetivo da resolução de problemas não é somente o de aprender Matemática, mas também, um meio de fazer Matemática. Os estudantes devem ter muitas oportunidades de formular, de saber movimentar-se dentro deles e resolver problemas complexos que requerem um esforço que os levem a refletir sobre seu próprio pensar (BARROS, 2008, p. 85).

Problemas demandam conhecimento e interpretação matemática de situações, ou seja, organizar e expressar matematicamente informações fornecidas pelo enunciado, propor estratégias de desenvolvimento, formular hipóteses ou criar ideias para obter a solução (ALLEVATO, 2005; ALLEVATO; ONUCHIC, 2011; BARROS, 2008; ROMANATTO, 2012) As vantagens de resolver problemas seriam motivar o aluno a estudar, estimular a curiosidade e a criatividade, e desenvolver o raciocínio, a lógica e a interpretação de conceitos (LUPINACCI; BOTIN, 2004; KARAM; PIETROCOLA, 2009; ROMANATTO, 2012). As desvantagens englobariam maior tempo para resolução pelo aluno e explicação pelo professor (LUPINACCI; BOTIN, 2004; KARAM; PIETROCOLA, 2009).

Diversos estudos debateram a resolução de problemas em Matemática (POLYA, 1978; D'AMBROSIO, 1989; REZENDE, 2000; CAGLIARI, 2003; BARROS, 2008; PIRES, 2009).

De acordo com Polya (1978), resolver problemas é uma habilidade prática basicamente desenvolvida por treino como tocar um instrumento ou realizar uma atividade esportiva, "[...] se você quer aprender a nadar, você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom "resolvedor de problemas", tem que resolver problemas" (POLYA, 1978, p. 65).

Para D'Ambrósio (1989), a resolução de problemas é uma forma de estimular o aluno a tomar parte do processo lento e trabalhoso de construção do conhecimento matemático. O objetivo ao aplicá-los seria fazer o aluno elaborar estratégias, buscar regularidades e generalizações de padrões e desenvolver a capacidade de argumentação. Elementos básicos para o processo de formalização do conhecimento e desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e à interpretação da realidade (D'AMBRÓSIO, 1989). Cagliari (2003) também mencionou a influência de fatores diversos para a compreensão de problemas como a estrutura e a linguagem utilizadas em enunciados.

Rezende (2000), Barros (2008) e Pires (2009) destacaram estratégias de ensino fundamentadas na resolução de problemas como formas de motivar o aluno a encontrar novas interpretações e diferentes formas de aplicar o conhecimento matemático.

Recursos tecnológicos podem ser usados como alternativa para ajudar a tornar aulas de resolução de exercícios e problemas mais estimulantes, dinâmicas e interativas. Como afirma Gómez (1997), aproveitar a tecnologia é uma maneira de possibilitar ao aluno a manipulação de objetos matemáticos, o que de forma tradicional não seria possível.

> Mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em um agente catalisador do processo de mudança na educação matemática. Graças às possibilidades que oferece para manejar dinamicamente os objetos matemáticos em múltiplos sistemas de representação dentro de esquemas interativos, a tecnologia abre espaço para que os estudantes possam viver novas experiências matemáticas (difíceis de conseguir com recursos tradicionais como o lápis e o papel), visto que pode manipular diretamente os objetos matemáticos dentro de um ambiente de exploração (GÓMEZ, 1997, p. 93).

Pesquisas (SANTOS FILHO, 2003; ALLEVATO, 2005; VALENTE, 2005; STOJANOVSKA; STOJANOVSKI, 2009; BÚRIGO, 2012; COSTA; TENÓRIO; TENÓRIO, 2014) sinalizaram que utilizar tecnologias facilitaria a construção do conhecimento por motivar o aluno, promover a autonomia e induzir a interação. Além de desenvolver o raciocínio, a capacidade de expressão, a busca por soluções e a iniciativa na tomada de decisões (BORBA, 1999; BORBA, 2004; TENÓRIO; LEITE; TENÓRIO, 2014).

O computador pode contribuir para a construção do conhecimento quando há oportunidade de manipulação pelo aluno por haver a perspectiva dele criar atividades próprias, de modo que o professor assuma um papel de mediador da aprendizagem (BORBA; PENTEADO, 2001; SOUZA, 2006).

> O comportamento dos estudantes que usam essa tecnologia de informática os conduz a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Tais pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção do conhecimento como rede de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros (ALLEVATO, 2005, p. 73).

O aluno utilizar o computador em aulas favorece o desenvolvimento de competências e proporciona atitudes positivas em relação à disciplina, além de uma visão mais completa da natureza da Matemática (VALENTE, 2005; XAVIER, TENÓRIO; TENÓRIO, 2014).

Estratégias com uso de tecnologias podem ser adotadas no ensino-aprendizagem de conteúdos diversos. Vários exemplos de programas computacionais educativos gratuitos existem na internet: Graphmatica (www.graphmatica.com), Geogebra (www.geogebra.org), Graph.tk (http://graph.tk/) e WinPlot (http://winplot.softonic.com.br/).

Nesse contexto, o estudo de funções pode ser enriquecido por tecnologias como softwares educativos e jogos digitais (ALLEVATO, 2005). Funções constituem um dos principais conteúdos matemáticos do Ensino Médio (BRASIL, 2002; RIO DE JANEIRO, 2012). Seu entendimento é necessário a outras áreas de conhecimento como a Biologia, a Física e a Química (BRASIL, 2002). Em diversas situações é preciso entender dependência entre variáveis, interpretar gráficos e analisar ou prever acontecimentos. Apesar da importância, dificuldades de aprendizagem nesse conteúdo são comuns (STOJANOVSKA; STOJANOVSKI, 2009).

De Paula (2011) e Soares (2012) apontaram softwares de geometria dinâmica como recursos facilitadores para o ensino de funções. Entre eles, o Geogebra é uma alternativa (HOHENWATER *et al*., 2008; CARTER; FERRUCCI, 2009; STOJANOVSKA; STOJANOVSKI, 2009).

Esse programa pode favorecer a compreensão de função do 1º grau por integrar a parte gráfica e a algébrica (DE PAULA, 2011; SOARES, 2012). Isso daria a oportunidade do aluno perceber e explorar uma noção completa do significado dos termos da função ao perceber em um mesmo espaço duas representações (algébrica e geométrica), o que o faria perceber suas dificuldades, particularmente, em interpretação de gráficos (DE PAULA, 2011). Para Soares (2012), o uso do Geogebra contribuiria para melhorar a aprendizagem por possibilitar um novo olhar aos conceitos matemáticos, aprimorar a compreensão das propriedades das funções estudadas e aprimorar a interpretação e o entendimento de gráficos.

Pesquisas (NEMIROVSKY; TIERNEY; WRIGHT, 1998; LIMA, 2009; DE PAULA, 2011; SOARES, 2012; TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2014) mostraram que ferramentas computacionais como softwares capazes de gerar gráficos são aliados importantes na tarefa de ajudar os alunos a compreender a noção de função. Os parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002) também ressaltaram o valor de associar tecnologias ao ensino da Matemática, principalmente, no estudo das funções.

O software matemático educativo Geogebra é um recurso por meio do qual o aluno pode testar hipóteses, identificar gráficos traçados a partir de funções distintas, e comparar semelhanças e diferenças (DIAS, 2012). Assim, habilidades relativas à investigação e à exploração seriam estimuladas, o que aperfeiçoaria o aprendizado do aluno (LIMA, 2009). Essas potencialidades podem fazê-lo um bom recurso para explorar exercícios e problemas.

O papel do Geogebra na resolução de problemas foi debatido por autores como Assis e Bezerra (2011), Bortolossi (2012) e Dias (2012).

Assis e Bezerra (2011) apontaram benefícios em empregar o software em geometria plana do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Bortolossi (2012) sinalizou a possiblidade de usá-lo em problemas com números irracionais. Dias (2012) verificou os efeitos do programa na resolução de problemas geométricos.

Usar o Geogebra modifica a forma tradicional de resolver exercícios e problemas. Mas o papel dessa ferramenta na proficiência acadêmica e análises comparativas sobre sua eficácia para resolução de exercícios e problemas são pouco discutidos.

Neste trabalho foi comparado como o Geogebra influenciaria o desempenho na resolução de exercícios e problemas de função do 1º grau. Além disso, as percepções de alunos sobre o emprego do software foram analisadas.

METODOLOGIA

A resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o uso software educativo GeoGebra foi analisada. Comparou-se a proficiência dos alunos na resolução de exercícios sem e com o software, na resolução de problemas sem e com o software, na resolução de exercícios e problemas sem o software e na resolução de exercícios e problemas com o software. Identificaram-se ainda as percepções dos alunos sobre o uso do Geogebra. Averiguou-se a hipótese de o GeoGebra facilitar o entendimento do conteúdo e a resolução de questões.

O conteúdo de função do 1º grau foi abordado com o intuito de desenvolver as seguintes competências e habilidades:

> - Identificar uma função polinomial do 1º grau.
> - Utilizar a função polinomial do 1º grau para resolver problemas significativos.
> - Identificar a função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
> - Representar graficamente uma função do 1º grau.
> - Compreender o significado dos coeficientes de uma função do 1º grau.
> - Identificar uma função do 1º grau descrita através do seu gráfico cartesiano (RIO DE JANEIRO, 2012, p. 15)

A proposta foi testada no primeiro semestre de 2014 com 59 alunos de duas turmas de 1ª série do ensino médio de escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro. Uma turma foi chamada controle por não ter manipulado o software. A outra, considerada alvo, teve aulas no laboratório de informática com o uso do GeogGebra. As etapas de aplicação da pesquisa, realizadas em sala de aula ou no laboratório de informática, foram:

1º) Aulas expositivas e resolução de questões de fixação em ambas as turmas (duração de 300 minutos);

2º) Pré-teste individual (com três exercícios e três problemas) idêntico para as duas turmas (duração de 100 minutos);

3º) Lista com seis exercícios e seis problemas (duração de 200 minutos). Os alunos da turma controle resolveram as questões de forma tradicional em sala de aula, sem uso do Geogebra. A turma alvo, com os alunos organizados em duplas ou em trios, empregou o software para resolver as questões no laboratório de informática;

4º) Pós-teste individual (com três exercícios e três problemas) idêntico para ambas às turmas (duração de 100 minutos), similar em nível de dificuldade ao pré-teste.

Os alunos da turma alvo responderam ainda a dois questionários, um antes de manipular o software e outro depois. Cada um foi respondido em torno de 30 minutos. A partir desses dados foi possível conhecer as percepções dos alunos sobre as aulas tradicionais e o uso do Geogebra.

Na terceira etapa da pesquisa, cada aluno da turma controle recebeu impressa a lista de questões. Foi dada liberdade para resolverem-na em duplas, porém, eles preferiram tentar solucionar as questões individualmente pelas avaliações também serem assim. Alguns, todavia, consultaram colegas sentados próximos em caso de dúvidas ou para comparar resoluções.

Os alunos da turma alvo, contudo, foram organizados em duplas ou em trios, mas todos manipularam o Geogebra. Foi necessário ainda dividir a turma em dois grupos, um com 12, outro com 16 alunos. Esse arranjo foi adotado por haver apenas 6 computadores em funcionamento no laboratório de informática.

Uma turma trabalhar individualmente e a outra em grupo pode ter influenciado o desempenho acadêmico dos alunos. Na turma controle, apesar da resolução da lista de questões ser individual, não houve impedimentos à interação entre os alunos. Mas, na turma alvo, as atividades serem realizadas coletivamente, apesar do estímulo a troca de experiência, acarretou menos tempo para cada aluno explorar e criar situações matemáticas com o software. O ideal seria os alunos da turma alvo também organizarem-se individualmente, todavia, escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem uma infraestrutura escolar condizente com tal proposta.

O plano de aula com o Geogebra visou explorar o dinamismo do programa. De início, os recursos do software foram apresentados aos alunos com auxílio do datashow. Depois, eles realizaram atividade livres. Em seguida, algumas tarefas básicas foram pedidas com o intuito de fazer o aluno conhecer melhor os comandos que seriam necessários para a resolução de exercícios e problemas: marcar pontos no plano cartesiano, traçar segmentos de reta, traçar retas, inserir funções do 1º grau do tipo $f(x) = ax$ e $f(x) = ax + b$ e usar o comando controle deslizante para mudar os parâmetros *a* e *b* de uma função. Cada aluno de um mesmo grupo criou atividades individuais por usarem valores próprios. Essas tarefas estimularam os alunos a elaborarem conjecturas sobre quais seriam os efeitos na expressão algébrica e na representação geométrica devido ao uso de diferentes valores, de modo que diferentes representações foram exploradas e foi possível analisar padrões. Após essas atividades iniciais, cada grupo recebeu impressa a lista de questões a ser resolvida.

A análise de dados da pesquisa foi quantitativa e qualitativa. As notas obtidas pelos alunos das duas turmas em exercícios e em problemas no pré-teste e no pós-teste serviram como base para a análise quantitativa. A análise qualitativa considerou o desenvolvimento das listas de questões, registros de atividades com o software e percepções colhidas com os questionários.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Descrição das etapas da pesquisa

Em ambas as turmas, o estudo de funções foi iniciado com o debate de uma situação problema (Quadro 1). Os alunos foram incentivados a discuti-la e fornecer ideias de resolução. Entretanto, a maioria teve pressa em apresentar um valor para o custo da viagem e não tentou interpretar matematicamente a situação como seria esperado em um problema conforme apontado por Allevato (2005), Allevato a Onuchic (2011), Barros (2008) e Romanatto (2012). Só uma aluna questionou quantos dias o casal ficaria em São Paulo. A partir da pergunta, a dependência entre variáveis foi discutida.

Outros exemplos foram apresentados, mas os alunos foram mais cuidadosos e procuraram semelhanças com o primeiro (Quadro 1).

Um casal resolve realizar uma viagem a São Paulo. Para isso, separa os valores referentes ao combustível e ao pedágio (ida e volta), o que representa R$ 80,00. A hospedagem, com diária completa, sai por R$ 180,00 o casal. Quanto custará a viagem? Queremos discutir nesse momento o que é fixo e o que pode variar. Por que e como variar? Depende de quê o valor final dessa viagem?

Quadro 1 – Um exemplo abordado em sala de aula.

Segundo a percepção do docente, iniciar a aula com uma situação problema foi uma boa forma de introduzir o estudo de funções polinomiais do 1º grau, por ter incentivado o aluno a participar do processo de ensino-aprendizagem. Vantagem destacada também por D'Ambrósio (1989).

Em seguida, o conteúdo de função foi introduzido. Discutiu-se as características de uma função polinomial do 1º grau, os coeficientes angular e linear, a relação dos coeficientes com o gráfico de função, a construção de gráficos e a classificação da função em crescente ou decrescente.

Algumas questões de fixação foram resolvidas com o intuito de tentar identificar possíveis dificuldades de aprendizagem. Um dos principais erros dos alunos ocorreu ao montar a lei de formação de funções. O obstáculo foi distinguir a variável dependente da independente.

1. Classifique as funções em crescentes ou decrescentes, justificando. a) $f(x) = 2x+5$ b) $f(\text{x}) = -x+1$ c) $y = -x-5$
9. Um vendedor de sorvetes deseja organizar uma tabela para facilitar o seu trabalho. Sabendo que o picolé custa R\$ 3,00 a unidade, como ele poderia fazer essa tabela relacionando quantidade de picolés (x) com preço (y)? A partir dessa tabela pode-se concluir alguma fórmula para facilitar a vida do sorveteiro? Descreva sua estratégia para resolver a questão.

Quadro 2 – Questões de fixação mais fáceis segundo os alunos.

O exercício 1 e o problema 9 foram reputados fáceis (Quadro 2). Os alunos exibiram desenvoltura em classificar uma função polinomial em crescente ou decrescente, o que os ajudou a resolver o exercício. Iniciar a resolução do problema com a construção de uma tabela propiciou o reconhecimento da função e permitiu a criação de uma estratégia de resolução.

3. Determine a função $f(x) = ax + b$, sabendo que $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$. 4. Determine a função sabendo que os pontos (1,1) e (0,5) pertencem a ela.	11. Um comerciante gastou R\$ 120,00 na compra de um lote de peras. Como cada pera será vendida a R\$ 1,00, ele deseja saber quantas peras devem ser vendidas para que haja lucro no final da venda. a) Quais são as variáveis (incógnitas) do problema? b) Qual variável é dependente? c) Qual variável é independente? d) Quantas peras ele precisa vender para obter lucro? e) Quantas peras ele precisa vender para não ter prejuízo?

Quadro 3 – Questões de fixação mais difíceis segundo os alunos.

Para os alunos, os exercícios 3 e 4 foram complicados (Quadro 3) devido à dificuldade em montar e solucionar os sistemas de equações por ser preciso fazer contas; um reclamou “[...] que isso só pra achar *a* e *b*, eu gasto uma folha inteira de caderno com tanta conta.”. O docente apresentou então a fórmula para calcular o coeficiente angular, como encontrar a variação de ordenada pela variação de abscissa e como usar os pontos obtidos para encontrar o coeficiente linear. Os alunos preferiram tal método de resolução por ser mais rápido.

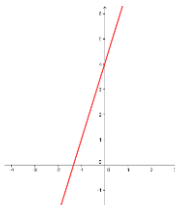
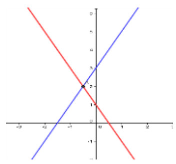
Ninguém soube iniciar o problema 11 (Quadro 3) e houve críticas pelo fato dele ser diferente. Aproveitou-se o momento para discutir a necessidade de entender e interpretar um problema qualquer e tentar criar uma estratégia própria de resolução.

Terminada a primeira etapa da pesquisa, o pré-teste foi aplicado. A tabela 1 traz as médias das notas nos exercícios e nos problemas do pré-teste para as turmas controle e alvo. A média total alcançada pela turma controle foi 2,48 de 10 pontos enquanto a da turma alvo foi 3,18 de 10. Ambas aquém do desejado.

Tabela 1 – Médias das notas por questão do pré-teste para as turmas controle e alvo.

Turmas	**Média de pontos (pt) por questão**						Nota Total
	Exercício 1 (1,67 pt)	Exercício 2 (1,65 pt)	Exercício 3 (1,67 pt)	Problema 4 (1,67 pt)	Problema 5 (1,67 pt)	Problema 6 (1,67 pt)	
Controle	0,81	0,64	0	0,14	0,28	0,60	2,48
Alvo	0,90	0,87	0,08	0,41	0,27	0,64	3,18

Os alunos foram piores nos problemas que nos exercícios em ambas as turmas. De modo geral, as principais falhas no conteúdo ministrado foram expressar algebricamente a lei de formação de uma função, encontrar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano e construir e analisar gráficos. Segundo Stojanovska e Stojanovski (2009), é comum o aluno apresentar dúvidas em funções.

1. a) (0,28 pontos) Ao observar o gráfico abaixo, você pode dizer se ele representa uma função polinomial do 1º grau? b) (0,28 pontos) Quem é a raiz (ou zero) dessa função? c) (0,27 pontos) Ela é crescente ou decrescente? Por quê? d) (0,28 pontos) Podemos destacar o coeficiente linear? e) (0,28 pontos) E o angular? f) (0,28 pontos) Qual seria a lei de formação dessa função	
3. (1,67 pontos) Observando o gráfico de duas funções $f(x)= -2x+1$ e $g(x)=2x+3$. Percebe-se que o ponto A é a interseção dessas duas funções. Quem são as coordenadas desse ponto A?	

Quadro 4 – Alguns exercícios do pré-teste.

Nas duas, houve uma melhor pontuação no exercício 1 (Quadro 4) do pré-teste, apesar dos itens a, e e f terem tido um índice de erro razoável. O exercício 3 (Quadro 4) foi reputado difícil e apenas um aluno da turma alvo entendeu como localizar o ponto pertencente as duas funções. Contudo, após a correção da avaliação, acharam-no fácil, o que mostra ser um entrave para o aluno ter de elaborar estratégias próprias de resolução mesmo em exercícios.

Falhas na resolução do problema 4 (Quadro 5) referentes à construção e à análise do gráfico de uma função foram comuns. Empregar o conceito de porcentagem foi outro óbice, de modo que se revisou como calcular porcentagem após o pré-teste.

Muitos alunos, apesar de entenderem como a função da questão 5 era descrita, não solucionaram os itens a e b (Quadro 5). A razão foi não saber utilizar os 6 segundos mencionados no enunciado. Os itens a, b e c do problema 6 (Quadro 5) foram os mais acertados pelos alunos, mas houve erros em criar a lei de formação da função.

<table>
<tr>
<td>4. No mês de novembro, comprei em uma loja algumas camisetas. Estas estavam custando R$10,00 à vista e a prazo o preço pago de cada camiseta aumentava 10%.
a) (0,5 pontos) Qual é a fórmula dessa função se minha compra foi a prazo?
b) (0,67 pontos) Construa seu gráfico.
c) (0,5 pontos) O gráfico seria diferente se a compra fosse à vista?</td>
<td>5. Ao abastecer um carro de corrida, os mecânicos perceberam que o tanque continha 8 litros de combustível. A bomba injetava 3 litros de gasolina por segundo. O abastecimento durou 6 segundos. Com essas informações, construa:
a) (0,5 pontos) Uma tabela relacionando o tempo em segundos, t(s), e o volume de combustível em litros, V(l).
b) (0,5 pontos) Um gráfico relacionando o tempo t(s) e o volume de combustível V(l).
c) (0,67 pontos) Qual é a função que determina a relação entre tempo e volume.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">6. Um retângulo tem a altura de 10 cm. Nessas condições, calcule:
a) (0,3 pontos) O perímetro do retângulo se a largura for 2 cm.
b) (0,3 pontos) O perímetro do retângulo se a largura for 8 cm.
c) (0,2 pontos) Diga qual é a variável dependente.
d) (0,2 pontos) Diga qual é a variável independente.
e) (0,67 pontos) Determine a lei de formação da função relacionada ao perímetro do retângulo.</td>
</tr>
</table>

Quadro 5 – Problemas do pré-teste.

O pré-teste, no entanto, foi mais que um momento de avaliação, representou uma situação onde o professor identificou dificuldades de aprendizagem. Dubinsky (1991), Gravina e Santarosa (1998) e Coll e Solé (2009) afirmaram que elaborar estratégias para promover a construção do conhecimento demandaria conhecer as dificuldades dos alunos.

Depois do pré-teste, as duas turmas passaram por uma etapa de reforço pedagógico em que uma lista com seis exercícios e seis problemas foi resolvida. Esta estratégia de ensino foi adotada com intuito de induzir a iniciativa e a autonomia do aluno. A turma designada controle (31 alunos) não manipulou o Geogebra enquanto a turma alvo (28 alunos), sim.

Na turma controle, as questões foram apresentadas no quadro, além de dispostas em folhas impressas. Os alunos mostraram interesse em resolvê-las, mas recorreram continuamente ao docente parar tirar dúvidas. Especialmente, em problemas. Houve dificuldades básicas em cálculo de porcentagem e resolução de equações.

2- (Questão retirada na íntegra de COLÉGIO SALESIANO, 2012) Determine a lei da função cuja reta intersecta os eixos em (-8,0) e (0,4) e verifique: a) Se a função é crescente ou decrescente; b) A raiz da função; c) O gráfico da função; d) Calcule $f(-1)$.	5- (Questão retirada na íntegra de COLÉGIO SALESIANO, 2012) Considere a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 3$. a) Verifique se a função é crescente ou decrescente; b) O zero da função; c) O ponto onde a função intersecta o eixo y; d) O gráfico da função.

Quadro 6 – Exercícios considerados mais fáceis pelos alunos da turma controle.

Alguns exercícios (Quadro 6) foram considerados simples e a maioria os solucionou sem apoio do docente. Mas outros (Quadro 7) foram difíceis.

1-(Questão retirada na íntegra de FTD) Sendo $f(x) = -5x + m$, determine o valor de m de modo que a intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas seja o ponto de abscissa 3.	
3- (Questão retirada na íntegra de COLÉGIO SALESIANO, 2012) Dada a função $f(x) = 4x + 5$, determine x tal que $f(x) = 7$.	4- (Questão retirada na íntegra de COLÉGIO SALESIANO, 2012) Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que: a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$ b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$ c) $f(1) = 5$ e $f(-2) = -4$

Quadro 7 – Exercícios considerados mais difíceis pelos alunos da turma controle.

No exercício 1, os alunos identificaram a raiz da função, mas não souberam usar essa informação para resolver a questão. No exercício 3 houve dificuldade em encontrar o valor de abscissa dado $f(x)$, apesar de haver facilidade em descobrir $f(x)$ se x fosse conhecido. No exercício 4 foi preciso resolver o primeiro item no quadro e explicar como achar o coeficiente angular por um sistema de equações, mas houve obstáculos pelos alunos não lembrarem como resolvê-lo. A fórmula para encontrar o coeficiente angular foi exibida e os alunos optaram por empregá-la na resolução dos demais exercícios.

7- (Questão adaptada de JUNIOR, 2013) Um motorista de táxi cobra R$ 6,00 de bandeirada (valor fixo) mais R$ 2,00 por quilômetro rodado (valor variável). Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.	9- (Questão adaptada de COLÉGIO SALESIANO, 2012) O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 12% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$ 45.000, calcule o valor de seu salário.
11- (Questão retirada na íntegra de CARDY) Uma pessoa, pesando atualmente 70 kg, deseja voltar ao peso normal de 56 kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200 g por semana. Fazendo essa dieta, a pessoa alcançará seu objetivo ao fim de: a. 67 semanas b.68 semanas c. 69 semanas d. 70 semanas e. 71 semanas	

Quadro 8 – Problemas considerados fáceis pelos alunos da turma controle.

Alguns problemas (Quadro 8) foram resolvidos facilmente, apesar de ser necessário revisar o conteúdo de porcentagem. Mas outros (Quadro 9) foram postos de lado pelos alunos, por não saberem inicia-los sozinhos. Pareceu haver dificuldade de interpretação reforçada por dúvidas em porcentagem. D'Ambrósio (1989) e Cagliari (2003) também destacaram ser comum limitações na leitura e compreensão de enunciados de problemas.

10- (Questão retirada na íntegra de FTD, p. 28) Uma loja vai realizar uma promoção em que todos os produtos terão desconto de 7%. Nessa situação, o preço de promoção de cada produto é função do preço normal. Obtenha a sentença que permite calcular o preço de promoção P em função do preço normal *x*.

Quadro 9 – Problema considerado difícil pelos alunos da turma controle.

Dificuldades em porcentagem e equação do 1º grau foram percebidas em etapas anteriores da pesquisa. Mas, apesar das revisões constantes, os alunos continuaram a apresentar dúvidas. Perante o obstáculo, houve passividade, não esforço para superá-lo. Tolhidos de conhecimentos anteriores importantes, os alunos preferiram usar fórmulas ou tentar decorar resoluções. A falta de base em conteúdos anteriores foi prejudicial ao ensino com foco na reflexão e descoberta de formas de empregar a Matemática.

Empregar o Geogbra durante a resolução da lista foi o diferencial entre as duas turmas. Após o pré-teste, na turma alvo, as aulas com o software foram desenvolvidas no laboratório de informática, com os alunos organizados em duplas ou em trios.

Primeiramente, houve uma aula de apresentação do software pelo datashow por meio da qual os alunos conheceram as funcionalidades do programa e seus comandos. Em seguida, foi estimulada a manipulação livre do software para exploração desses recursos. Depois, os alunos fizeram tarefas básicas, como marcar pontos no plano cartesiano, traçar retas e inserir funções, e, então, resolveram uma lista semelhante à da turma controle (Figura 1).

As atividades desenvolvidas com o software foram prazerosas para os alunos. Eles gostaram do programa e acharam-no fácil de manipular. Similarmente ao observado na turma controle, houve interesse e participação durante a resolução da lista.

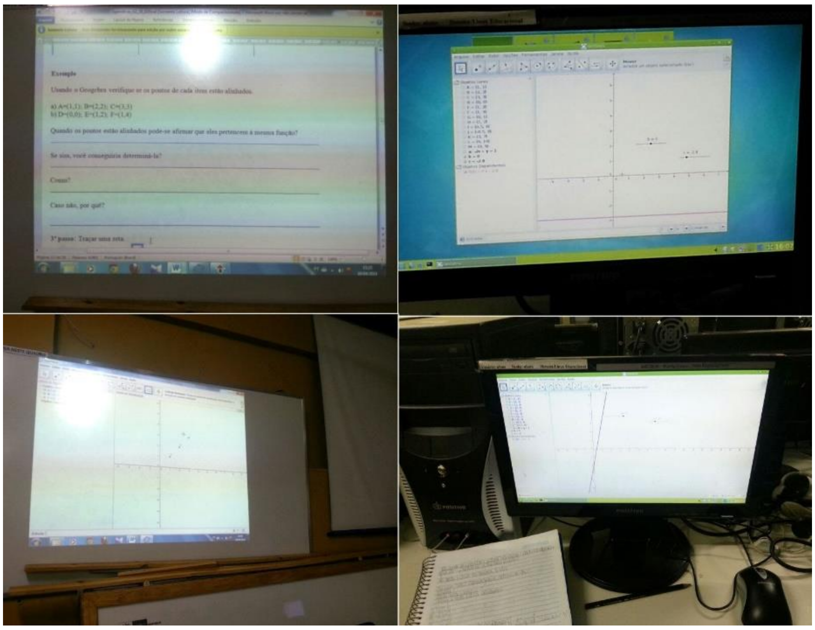


Figura 1 – Algumas atividades desenvolvidas durante as aulas com o uso do GeoGebra.

Figura 2 – Alunos da turma alvo em uma das aulas com o uso do GeoGebra.

Todos procuraram fazer as questões, tirar dúvidas e discutir com os colegas (Figura 2). Alguns comentários foram:

> Interessante. Eu aprendi mais e tirei mais dúvidas aqui no laboratório usando o Geogebra.
>
> Foi uma aula bem legal e diferente. Gostei muito, tirei várias dúvidas.
>
> Gostamos bastante da aula e deu para tirar várias dúvidas.

Empregar o software em aula estimulou a autoconfiança dos alunos, a criatividade, a socialização do conhecimento matemático e a aprendizagem colaborativa. Em caso de dúvidas, um perguntava ao outro e tentavam, então, buscar soluções para as dificuldades enfrentadas.

Ao contrário da turma controle, os alunos manifestaram mais iniciativa e autonomia com posturas investigativas e exploratórias, por exemplo, ao cometerem um erro, tentavam corrigi-lo sem auxílio. Borba (1999), Borba (2004), Valente (2005) e Búrigo (2012) destacaram benefícios semelhantes devido ao uso de recursos tecnológicos em aulas de Matemática.

Os alunos conseguiram usar o Geogebra para resolver tanto exercícios quanto problemas. Alguns, ao aproveitarem o dinamismo do software, reportaram a facilidade em visualizar mudanças em gráficos de funções do 1º grau ao alterar, por exemplo, coeficientes angular ou linear.

> Com o Geogebra é mais interessante. A gente pode mexer (no gráfico) e ver o que acontece ao mudar os coeficientes, se vê logo a mudança. Gostei.

De Paula (2011), Dias (2012) e Soares (2012) também destacaram o GeoGebra como um bom recurso para o processo de ensino-aprendizagem de funções. Mas, mesmo com o emprego do Geogebra, houve dificuldades. O exercício 3 foi considerado complicado enquanto os 1, 2 e 4 seriam fáceis (Quadro 10).

<table>
<tr><td colspan="3">1- (Questão adaptada de COLÉGIO SALESIANO) Utilizando o GeoGebra construa o gráfico da função $f(x) = 4x + 5$. Determine x tal que $f(x) = 7$ ao observar esse gráfico.</td></tr>
<tr><td>2- (Questão adaptada de COLÉGIO SALESIANO) Construa o gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 3$ pelo GeoGebra. A partir dele, responda as questões abaixo:
a) Verifique se a função é crescente ou decrescente.
b) O zero da função.
c) O ponto onde a função intersecta o eixo y.</td><td>3- (Questão adaptada de COLÉGIO SALESIANO) Construa no GeoGebra uma reta que intersecta os eixos em (-8,0) e (0,4). Determine em seu caderno a lei da função. Por meio de seus resultados e do gráfico construído, verifique:
a) Se a função é crescente ou decrescente.
b) A raiz da função.
c) Descubra $f(-1)$.</td><td>4- Utilizando o GeoGebra construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em crescente ou decrescente:
a) $y = 5x - 8$
b) $y = x + 2$
c) $y = -3 - x$
d) $y = 9 + 3x$
e) $y = -3$</td></tr>
</table>

Quadro 10 – Alguns exercícios da lista a ser resolvida com o GeoGebra.

No exercício 1, os alunos digitaram a lei de formação da função no Geogebra, mas foram estimulados a calcular o valor da abscissa no caderno e, depois, verificarem se o ponto pertencia à função dada (como notado na figura 3).

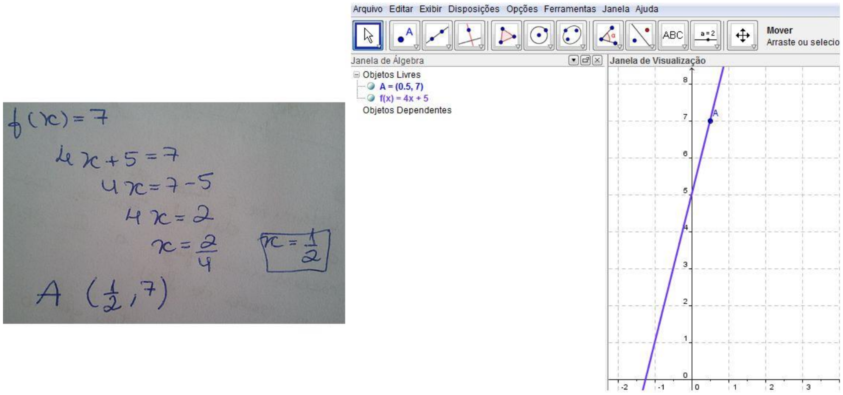


Figura 3 – Resolução do exercício 1 por uma aluna.

Nos exercício 2 e 4 (Quadro 10), não houve necessidade de usar o caderno. No 2, os alunos conseguiram analisar a função a partir do gráfico construído pelo Geogebra, marcaram o ponto que interceptava o eixo *x* e descobriram o valor da raiz. O mesmo foi feito para descobrir a interseção com o eixo *y* (Figura 4). No exercício 3 (Quadro 10), os alunos tiveram dificuldades em realizar os cálculos no caderno para encontrar a lei da função.

A questão 4 foi reputada a mais fácil, apenas ao observar o gráfico no Geogebra, os alunos classificavam as funções em crescente ou decrescente. Por conta própria, eles compararam as diferentes expressões algébricas, as inclinações dos gráficos e suas interseções com os eixos, o que os ajudou a reconhecerem a influência dos coeficientes angulares e lineares. A possibilidade de relacionar a expressão algébrica de uma função e sua representação geométrica foi positiva para a aprendizagem, conforme também descrito por De Paula (2011).

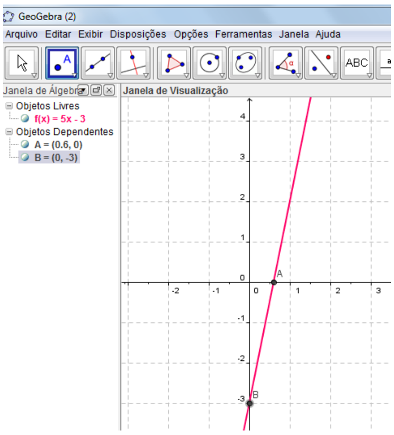


Figura 4 – Resolução do exercício 2 por um aluno.

Os alunos acharam o problema 11 o mais fácil da lista (Quadro 11), provavelmente, por terem resolvido alguns similares em aulas anteriores. No problema 9 (Quadro 11), considerado o mais complexo, eles apresentaram uma dificuldade ao empregar o Geogebra nas construções, sempre chamar uma função de $f(x)$, Foi preciso orientá-los a chamarem de $g(x)$, $h(x)$ e $f(x)$ por serem funções diferentes.

9- (UNICAMP) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo. Fazendo a análise dos planos e seus respectivos custos, qual seria o plano mais econômico para uma pessoa que tem em média um consumo de 25 minutos ao mês? Resolva em seu caderno e comprove os resultados construindo o gráfico com o Geogebra.

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	R$ 0,00	R$ 1,20

11- (Questão adaptada de JUNIOR, 2013) Um motorista de táxi cobra R$ 6,00 de bandeirada (valor fixo) mais R$2,00 por quilômetro rodado (valor variável). Descubra em seu caderno a lei dessa função. Depois construa seu gráfico com o uso do Geogebra e responda o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

Quadro 11 – Alguns problemas da lista a ser resolvida com o GeoGebra.

Os alunos gostaram do Geogebra e preferiram as aulas no laboratório. Empregá-lo influenciou-os positivamente. O uso do software possibilitou ao aluno conjecturar, investigar ideias, perceber relações entre representações e identificar padrões ao resolver exercícios e problemas de forma dinâmica, além de ajudar a manter a atenção nas atividades. Durante as tarefas, algumas conjecturas levantadas pelos alunos foram:

- Pontos alinhados em um plano cartesiano pertencem a uma mesma função do 1º grau;
- Uma reta pode ser definida a partir de dois pontos no plano cartesiano;

- A expressão algébrica de uma função prediz seus pares ordenados;
- Pares ordenados de uma função representam a dependência entre as variáveis *x* e *y*;
- Ao alterar o coeficiente angular ou o linear na expressão algébrica de uma função gera-se outra função;
- Ao deslocar com o cursor o gráfico de uma função, cria-se outra função, representada por outra expressão algébrica.

Todas as conjecturas foram discutidas em aula. Elas mostraram que os alunos perceberam as relações entre representações algébrica e geométrica.

A partir da reflexão e da investigação promovidas pelo manuseio do software, os alunos identificaram os seguintes padrões:

- Um par ordenado é representado por um ponto no plano cartesiano;
- Uma reta é constituída de infinitos pontos representados por pares ordenados;
- Uma função do 1º grau é sempre representada por uma reta;
- Uma função do 1º grau é sempre representada por uma expressão algébrica do tipo $y = ax + b$, com a e b pertencentes a IR.

O Geogebra ocasionou benefícios no entendimento de funções, além de propiciar as vantagens inerentes ao uso de recursos tecnológicos.

Finalizada a etapa de reforço pedagógico, as turmas fizeram o pós-teste. A tabela 2 mostra as médias das notas nos exercícios e nos problemas para as duas turmas.

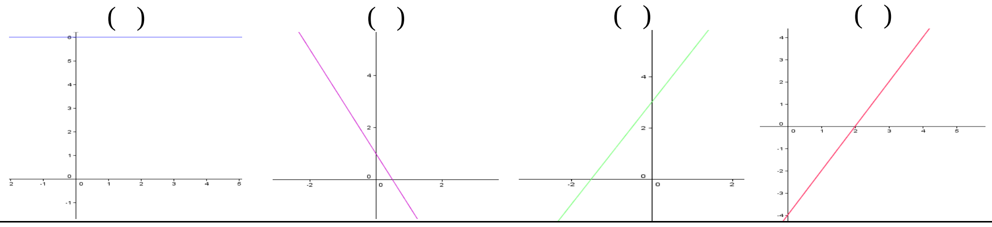
Tabela 2 – Médias das notas por questão do pós-teste para as turmas controle e alvo.

Turmas	Média de pontos (pt) por questão						Nota Total
	Exercício 1 (1,67 pt)	Exercício 2 (1,65 pt)	Exercício 3 (1,67 pt)	Problema 4 (1,67 pt)	Problema 5 (1,67 pt)	Problema 6 (1,67 pt)	
Controle	1,48	0,16	0,96	0,73	0,81	0,81	4,95
Alvo	1,40	0,06	1,13	1,11	0,89	0,99	5,59

Ambas as turmas relacionaram facilmente o gráfico de uma função à sua lei de formação (Quadro 12). Todavia, não perceberam ser necessário conhecer a lei de formação de uma função para calcular um valor de $f(x)$ (Quadro 13).

1. Associe as funções aos seus gráficos.
a) (0,42 pontos) $f(x) = 2x - 4$, b) (0,42 pontos) $f(x) = 6$,
c) (0,42 pontos) $f(x) = 1 - 2x$, d) (0,41 pontos) $f(x) = 3 + 2x$

( ) ( ) ( ) ( )



Quadro 12 – Exercício do pós-teste considerado mais fácil pelos alunos.

2. (1,65 pontos) Uma função *f* é dada por $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$, determine o valor de $f(3)$.

Quadro 13 – Exercício do pós-teste considerado mais difícil pelos alunos.

O problema 4 (Quadro 14) foi o com maior índice de acertos para a turma alvo e com menor para a controle. Os itens a, b e c foram de mais fácil resolução, mas os alunos tiveram dificuldades em escrever a lei de formação da função e fazer o gráfico.

4. Um parque de diversões cobra R$ 10,00 a entrada e R$ 4,00 para andar em cada brinquedo. Luíza tem R$50,00.
a) (0,25 pontos) Em quantos brinquedos no máximo ela consegue brincar no parque?
b) (0,25 pontos) Se ela andasse em 3 brinquedos. Quanto gastaria?
c) (0,25 pontos) Gastando R$ 50,00, ela andou em quantos brinquedos?
d) (0,5 pontos) É possível generalizar, ou seja, criar uma relação entre o preço pago (y) com a quantidade de brinquedos (x)?
e) (0,42 pontos) É possível sintetizar essas informações em um gráfico?

6. Uma formiga se move sobre uma régua em linha reta na direção crescente dos centímetros com velocidade constante de 2 cm por segundo. Supondo que, quando começamos a observar a formiga, ela se encontra a 4 cm da origem.
a) (0,67 pontos) Nessas condições, organize os dados na tabela abaixo:
b) (0,5 pontos) Crie uma lei de formação da movimentação da formiga.
c) (0,5 pontos) Construa um gráfico mostrando a movimentação da formiga.

Tempo (segundos)	Posição (cm)
0	
1	
2	
3	
5	
10	
x	

5. Seu Joaquim está analisando duas propostas de planos de saúde:
Plano1: Inscrição R$ 100,00 e consulta R$ 50,00.
Plano 2: Inscrição R$ 160,00 e consulta R$ 40,00.
O gasto total (y) de cada plano é dado em função do número de consultas.
a) (0,3 pontos) O gasto total de cada plano depende de quê?
b) (0,3 pontos) É possível determinar uma lei de formação para cada plano?
c) (0,3 pontos) Qual é o valor gasto no final do 3º mês para cada plano?
d) (0,3 pontos) Qual é o valor gasto no final do 6º mês para cada plano?
e) (0,47 pontos) Em que condições é possível afirmar que:
(I) O plano 1 é mais econômico: (II) O plano 2 é mais econômico:

Quadro 14 – Problemas do pós-teste.

No problema 6 (Quadro 14), a maioria completou corretamente a tabela. Embora, muitos tenham errado ao ser necessário generalizar os resultados. No problema 5 (Quadro 14), o mais difícil para a turma alvo, a palavra “inscrição” usada no enunciado referente à filiação em um plano de saúde causou confusão. Eles não a perceberam como a parte fixa da função.

Percepções dos alunos sobre o uso do Geogebra em aula

Antes de manipular o software, a turma alvo respondeu um questionário sobre o emprego da tecnologia e a aprendizagem de Matemática. Treze meninos e quinze meninas com idades entre 14 e 16 anos responderam aos questionamentos. A tabela 3 apresenta os dados coletados.

Tabela 3 – Questionário aplicado à turma alvo antes da manipulação do software.

Perguntas do questionário	**Número de alunos**	
	Sim	Não
Você tem computador em casa?	26	2
Você utiliza o computador nas suas atividades escolares?	25	3
Você já teve aulas de matemática utilizando algum software?	0	28
Você gostaria de sempre ter aulas de matemática utilizando algum software?	24	4
Você acredita que atividades usando recursos tecnológicos representam uma forma diferente de aprender matemática?	26	2
Você já conhecia o Geogebra?	1	27

Quase todos tinham um computador e utilizavam-no em atividades escolares (90%). No entanto, nenhum tivera aulas de Matemática com softwares antes da pesquisa, embora a maioria acreditasse que a utilização de recursos tecnológicos fosse uma nova forma de aprender Matemática e quisesse ter aulas frequentes com seu uso. Um aluno conhecia o Geogebra, mas não sabia manipulá-lo.

O computador fazia parte da rotina dos alunos. Eles o aproveitavam para socializar e pesquisar, mas não entendiam a razão de não utilizá-lo para estudar e aprender na escola. Muitos, inclusive, assistiam aulas pelo *youtube* quando não entendiam um conteúdo.

Depois de usar o software, a turma alvo respondeu a outro questionário sobre a experiência de empregar recursos tecnológicos em aula.

Tabela 4 – Opiniões dos alunos sobre o uso do Geogebra em sala de aula.

O uso do Geogebra em sala de aula	**Alunos**	
Perguntas	**Sim**	**Não**
Você gostou de utilizar o Geogebra nas resoluções das questões?	26	2
Você acredita que o Geogebra auxiliou na construção de seu conhecimento?	27	1
Você gostaria de aprender outros conteúdos com o uso do computador?	28	0

Segundo as percepções dos alunos, utilizar o Geogebra no ensino-aprendizagem pela resolução de questões foi importante (Tabela 4). Eles se mostraram motivados a estudar ao usar o software e sentiram-se mais valorizados.

Doze classificaram as atividades com o Geogebra como excelentes, treze como boas e três como regulares. Contudo, todos prefeririam usar o Geogebra para resolver questões tanto em aula quanto em provas. Eles citaram a facilidade de visualização proporcionada pela ferramenta, como se percebeu pela justificativa de um aluno: “O uso do Geogebra no estudo das funções do 1º grau facilita a visualização no gráfico. Fica direitinho, bem retinho, passando certinho nos pontos. Não tem como errar”. Assis e Bezerra (2011), Bortolossi (2012) e Dias (2012) também descreveram a possibilidade de visualização como uma das maiores vantagens de softwares educativos, como o Geogebra. Os alunos queriam, inclusive, estudar conteúdos de trigonometria ou geometria com o Geogebra, por exemplo, o teorema de Pitágoras.

A influência do Geogebra no desempenho acadêmico em exercícios e em problemas

A Tabela 5 traz as médias de pontuação nos exercícios e nos problemas para as turmas controle e alvo, calculadas apenas com os alunos presentes ao pré-teste e ao pós-teste. Em ambas ocorreu um aumento da média tanto em exercícios quanto em problemas após o reforço pedagógico, possivelmente, porque dificuldades de aprendizagem identificadas durante as etapas iniciais da pesquisa (aulas expositivas, questões de fixação e pré-teste) foram discutidas a partir da resolução de questões.

Tabela 5 – Médias de pontuação das turmas controle e alvo nos exercícios e nos problemas.

Comparação	**Médias de pontuação**		
Turma controle	Exercícios	Problemas	Notas totais
Pré-teste	1,45	1,03	2,48
Pós-teste	2,61	2,35	4,96
Turma alvo	Exercícios	Problemas	Notas totais
Pré-teste	1,86	1,32	3,18
Pós-teste	2,59	2,99	5,59

Nos dois testes da turma controle, a pontuação média nos exercícios foi maior que a nos problemas, fato condizente com a dificuldade de alunos na resolução de problemas. Já, no pós-teste da turma alvo, a pontuação média nos problemas superou a nos exercícios. Uma possibilidade é que a manipulação do Geogebra no interstício entre os testes, ao tornar mais rápidos os cálculos e a construção de gráficos, tenha permitido aos alunos mais tempo para interpretarem enunciados e treinarem diferentes estratégias de resolução.

Tanto na turma controle quanto na turma alvo houve avanço entre a nota total média no pré-teste e no pós-teste. O maior tempo de discussão do conteúdo proporcionado pelo reforço pedagógico em cada turma deve ter sido o responsável pelo melhor rendimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Empregar tecnologias de informação e comunicação em aulas de Matemática pode ajudar o aluno na construção do conhecimento e no desenvolvimento de autoconfiança, iniciativa e autonomia. O Geogebra é um software educativo matemático conhecido devido à gratuidade e à versatilidade. Ele pode ser usado na resolução de exercícios e problemas de funções, conteúdo importante do Ensino Médio (BRASIL, 2002; RIO DE JANEIRO, 2012).

Neste estudo, os objetivos foram identificar as dificuldades de aprendizagem em funções do 1º grau, comparar o desempenho acadêmico na resolução de exercícios e problemas com e sem o Geogebra e identificar as percepções de alunos sobre o emprego do software. A pesquisa foi aplicada com duas turmas da 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro. Em uma, chamada controle, não houve manuseio do Geogebra. Em outra, denominada alvo, o software foi empregado no laboratório de informática durante o reforço pedagógico, entre o pré-teste e o pós-teste.

Dificuldades de aprendizagem em funções do 1º grau foram reconhecidas em todas as etapas da pesquisa. Algumas foram criar a lei de formação de funções, encontrar o valor da abscissa dado $f(x)$ e confundir a raiz da função com o coeficiente angular ao analisar gráficos.

Interpretar enunciados e elaborar estratégias próprias de desenvolvimento foram entraves durante a resolução de questões. A falta de base em pré-requisitos como porcentagem, equações do 1º grau e sistemas de equações foi um obstáculo ao estudo de funções difícil de ser superado.

As aulas no laboratório de informática e o programa foram úteis por despertarem o interesse do aluno. Além do fator motivacional, houve maior participação, interação, iniciativa, autoconfiança e autonomia, o que tornou a resolução de exercícios e problemas prazerosa. Empregar o Geogebra estimulou posturas investigativas e exploratórias por tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico.

Alguns de seus fatores positivos para a aprendizagem do conteúdo de funções foram: representar instantaneamente pares ordenados como pontos no plano cartesiano, relacionar a expressão algébrica de uma função à sua representação geométrica e vice-versa, e construir instantaneamente diferentes gráficos em uma mesma janela de exibição.

Segundo as percepções dos alunos, o Geogebra ajudou na aprendizagem de funções e na resolução de questões. Entre os benefícios do software, a possibilidade de visualização de gráficos seria a principal vantagem. Os alunos gostaram de usar recursos tecnológicos e declararam querer aulas de geometria e trigonometria com o Geogebra.

Uma turma foi ensinada a usar o GeoGebra no laboratório de informática e pôde manipulá-lo livremente na resolução de exercícios e problemas durante o reforço. A outra turma não teve contato com o software. Nas duas houve aumento significativo entre as médias do pré-teste e do pós-teste, com melhora de desempenho tanto em exercícios quanto em problemas. Na turma com uso do Geogebra, os alunos se mostraram mais motivados e interessados.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N.S.G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)– Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ALMEIDA, M.E.B. **Formação de educadores a distância e integração de mídias**. São Paulo: Avercamp, 2007.

ASSIS, C.F.C.; BEZERRA, M.C.A. Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no ensino Fundamental. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife: LEMATEC, 2011. p. 1-13. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1646.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2015.

BARROS, C.P.M. **Análise de atitudes de alunos na educação de jovens e adultos em situação de resolução de problemas.** 2008. 242 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)– Pontifica Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BORBA, M.C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização de pensamento. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 285-295.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. Coleção tendências em educação matemática. Belo Horizonte: editora Autêntica, 2001.

BORBA, M.C. Dimensões da educação matemática à distância. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 164-185.

BORTOLOSSI, H.J. Criando conteúdos educacionais digitais interativos em matemática e estatística com o uso integrado de tecnologias GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo,** São Paulo, vol. 1, p. 28-35, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio + Orientações Educacionais Complementares**: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2002.

BÚRIGO, E.Z. **A Matemática na escola:** novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. 304 p.

CAGLIARI, L.C. **Alfabetização & linguística.** São Paulo: Ed. Scipione, 2003.

CARDY. **Exercícios função de 1º grau.** Disponível em: <http://www.profcardy.com/exercicios/assunto.php?assunto=Fun%E7%E3o%20do%201%BA%20Grau>. Acesso em: 20 jan. 2015.

CARTER, J.A.; FERRUCCI, B.J. **An analysis of students' research on model lessons that integrate Geogebra into school mathematics.** Beijing: ATCM, 2009.

COLÉGIO SALESIANO SÃO GONÇALO. **Lista de Função Polinomial do 1º grau.** 2012. Disponível em: <http://www.cssg.g12.br/sitecssg/www.cssg.g12.br/images/stories/2012/pdfs/ListaAtivddeRecupMat1anoProfClaudia.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

COLL, C.; SOLÉ, I. **Os professores e a concepção construtivista in o construtivismo na sala de aula**. Schilling, C. (Trad.) São Paulo: Ática, 2009.

COSTA, B.J.F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. **Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, p. 1095-1116, 2014.

D’AMBRÓSIO, B.S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, Brasília, ano II, n. 2, 1989, p. 15-19.

DANTE, R.L. **Didática da resolução de problemas de matemática**: 1ª a 5ª série. 1. ed. São Paulo: editora Ática, 1989.

DE PAULA, A.F. **Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos de Geometria Analítica.** 2011. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Universidade Federal Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

DIAS, M.S.S. Resolução de problemas geométricos no GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 1, p. 1-15, 2012.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking.** Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 55-92.

FTD. **Função polinomial do 1º grau.** Disponível em: <http://www.csajaboticabal.org.br/imagens/userfiles/files/FTD%201%C2%BA%20ano/V1eV2/MatV228_46.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2015.

GÓMEZ, P. Tecnología y educación Matemática. **Revista de Informática Educativa**, UNIANDES - LIDIE, Colômbia, v. 10, n. 1. p. 93-111, 1997.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L.M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO REDE IBEROAMERICANA DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 4., 1998, Brasília. **Anais eletrônicos...** Brasília: Centro de Convenções Ulysses Guimarães, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2014.

HOHENWATER, M.; HOHENWATER, J.; KREIS, Y.; LAVICZA, Z. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In: TSG: RESEARCH

AND DEVELOPMENT IN THE TEACHING AND LEARNING OF CALCULUS, 16., 2008, Monterrey, México. **Anais...** México: Polivalente Auditorium - FIME, 2008. p. 1-9.

KARAM, R.A.S.; PIETROCOLA, M. Habilidades técnicas versus habilidades estruturantes: resolução de problemas e o papel da matemática como estruturante do pensamento físico. **Alexandria**, Santa Catarina, v. 2, p. 181-205, 2009.

JUNIOR, D. **Lista de exercícios de função de 1º grau**. 2013. Disponível em: <http://www.uff.br/prepopular/arquivo/Lista_de_exercicios_de_Funcao_do_Primeiro_Grau.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

LIMA, L.F. **Grupo de estudos de professores e a produção de atividades matemáticas sobre funções utilizando computadores.** 2009. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: UFPE, 2004. p. 1-5.

NEMIROVSKY, R.; TIMEY, C.E.; WRIGHT, T. Body Motion and Graphing. **Cognition and Instruction**, Massachusetts, Estados Unidos, v. 16, n. 2, p. 119-172, 1998.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n.1, p. 145-166, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REZENDE, E. **O livro das competências**. São Paulo: Qualimark, 2000.

RICHARDS, J. Mathematical Discussion. In: von Glaserfeld, E. (Ed.). **Radical constructivism in Mathematical Education.** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 13-51.

RIO DE JANEIRO. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo 2012 Matemática.** 2012. 23 p.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, Santa Catarina, v. 6, n. 1, p.299-311, mai. 2012.

SANTOS FILHO, C.V. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem utilizando-se o computador como recurso didático. 2003. 136 f. Dissertação (Mestrado em tecnologia)– Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, p. 1-15, mar. 2012.

SOUZA, P.R. Algumas considerações sobre as abordagens construtivistas para a utilização de tecnologias na educação. **Laboratório Interdisciplinar em Informação e Conhecimento em Revista**, v. 2, n. 1, p. 40-52, mar. 2006.

STOJANOVSKA, L.F.; STOJANOVSKI, V. Geogebra – Freedom to explore and learn. **Teaching Mathematics and its applications**, Oxford University, Reino Unido, v. 28, p. 69-76, 2009.

TENÓRIO, A.; COSTA, Z.S.S.; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 3, n. 2, p. 104-119, 2014.

TENÓRIO, T.; LEITE, R.M.; TENÓRIO, A. Séries televisivas de investigação criminal e o ensino de ciências: uma proposta educacional. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 13, n. 1, p. 73-96, 2014.

VALENTE, J.A. **A espiral de aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. Campinas: Unicamp, 2005.

XAVIER, S.A.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. Uma proposta de ensino-aprendizagem das leis dos senos e dos cossenos por meio do software Régua e Compasso. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 3, p. 158-190, 2014.

Submetido: abril de 2015

Aceito: junho de 2015