Construindo significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem

Gabriela dos Santos Barbosa[1] *e Sandra M. P. Magina*[2]

Resumo: Este texto objetiva apresentar e discutir as estratégias empregadas por 22 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona oeste da cidade do Rio de Janeiro, ao participar de um jogo que favorece a construção de significados para expressões numéricas envolvendo duas multiplicações. Trata-se de um estudo analítico, desenvolvido a partir das ideias da Teoria dos Campos Conceituais. A análise permitiu reconhecer que as situações vivenciadas no jogo, bem como as representações favorecidas, criaram condições para que os alunos mobilizassem esquemas úteis à decomposição de um número em fatores primos e compreendessem que, embora a multiplicação seja uma operação comutativa, alterações na ordem dos fatores podem implicar na representação de situações distintas.

Palavras-chave: Jogo; Estrutura multiplicativa; Teoria dos Campos Conceituais.

Constructing meaning for multiplicative numerical expressions from the set of message

Abstract: This text aims to present and discuss the strategies employed by 22 students of the 6th year of elementary school to a private school in the western city of Rio de Janeiro, to participate in a game that favors the construction of meanings for numerical expressions involving two multiplications. This is an analytical study, developed from the theoretical ideas of Vergnaud (1990). The analysis allowed us to recognize that the situations experienced in the game, as well as the representations favored, created conditions for students to mobilize schemes useful for decomposing a number into prime factors and understand that while the multiplication is a commutative operation, changes in the order of factors may result in the representation of different situations.

Keywords: Game. Multiplicative structure. Conceptual Fields Theory.

Introdução

Quando pensamos no ensino da Aritmética, inicialmente nos remetemos ao ensino das quatro operações fundamentais com números

---

1 Universidade do Estado do Rio de Janeiro - RJ. gabrielasb80@hotmail.com
2 Universidade Estadual de Santa Cruz - BA. sandramagina@gmail.com

naturais e/ou números inteiros, com ênfase em seus algoritmos. Entretanto, mais que isso, a Aritmética engloba as propriedades de tais operações e as propriedades dos números naturais e dos números inteiros. Em resumo, ela abarca parte da Teoria dos Números. Santos (2003) explica que a Teoria dos Números se divide em Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica. A divisibilidade, a decomposição de um número em fatores primos e os conceitos envolvidos nela integram a Teoria Elementar dos Números. Embora sem receber esta nomenclatura específica, ela começa a ser trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental e vai sendo retomada nos anos subsequentes, com o aumento gradativo dos números envolvidos nas situações, porém com insistência nas mesmas técnicas e nos mesmos exercícios. Ela está ainda nos cursos de formação de professores de Matemática, em disciplinas voltadas apenas para ela, ou compõe a parte inicial de disciplinas que envolvem também o estudo de estruturas algébricas.

Pesquisas em Educação Matemática, a que nos referiremos a seguir, sinalizam a existência de problemas no ensino e na aprendizagem de conceitos específicos da Teoria Elementar dos Números e, em linhas gerais, da Aritmética. Nessa direção, Lins e Gimenez (1997) afirmam que muitas possibilidades de abordagem dos conceitos relacionados à Aritmética são reduzidas ao ensino de algoritmos. Eles acrescentam ainda que pouca atenção tem sido dispensada às reflexões sobre o funcionamento dos algoritmos, e os alunos não têm tido oportunidade de descobrir variações nos algoritmos que possam ser úteis para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e estimativas.

A importância do tema levou Campbell e Zazkis (2002) a organizar uma obra contendo 11 pesquisas que abordaram a Teoria dos Números. Interessa referir aqui os estudos de Brown, Thomas e Tolias (2002), Campbell (2002) e Teppo (2002), porque todos abordaram a estrutura multiplicativa e a decomposição de números em fatores primos, ou seja, nosso objeto matemático. Os sujeitos dessas pesquisas são diferentes dos sujeitos envolvidos em nossa investigação: trabalhamos com alunos do Ensino Fundamental, enquanto esses pesquisadores fizeram-no com professores em formação.

Brown, Thomas e Tolias (2002) procuraram enfocar a habilidade do indivíduo para orientar suas ações aritméticas e raciocínios por meio da compreensão da estrutura multiplicativa sobre o conjunto dos números naturais. Eles apresentaram aos professores em formação a decomposição de um número em fatores primos. Em seguida, questionaram sobre a divisibilidade desse número por outros que, em muitos casos, eram fatores presentes na sua decomposição. Por exemplo, perguntaram se o número $3^3 x 5^2 x 7$ é divisível por 7. Por meio das respostas e das justificativas dos sujeitos, concluíram que alguns frequentemente lidam com tarefas da Teoria dos Números, sem usar de modo consciente seus conhecimentos da estrutura multiplicativa. Eles escolhem executar cálculos, quando raciocinar sobre eles bastaria. Parte dos sujeitos, efetuando os cálculos, descobriu que $3^3 x 5^2 x 7 = 4725$, para, enfim, dividir esse resultado por 7 e decidir sobre a divisibilidade em questão, analisando o resto da divisão.

Campbell (2002), também, investiga as habilidades dos professores em formação para pensar a divisão aritmética em um nível mais abstrato. O autor pesquisou a compreensão desses professores sobre conceitos, procedimentos e termos pertencentes ao algoritmo da divisão, teorema fundamental da Teoria dos Números que define a divisão com números inteiros. Ele iniciou a pesquisa, propondo aos sujeitos questões semelhantes às de Brown, Thomas e Tolias (2002). Em seguida, acrescentou questões relativas à divisibilidade, por 2 e por 6, dos números $6x147+1$ e $6x147+2$, respectivamente. Questionou sobre os restos das divisões desses números por 2 e por 6 e sobre a utilidade da calculadora para determinar tais restos. Os resultados obtidos abrangeram desde abordagens processuais da divisão, quer usando uma calculadora, quer efetuando divisão longa, até abordagens mais conceituais, que resultaram em respostas apropriadas com pouco ou nenhum cálculo. Por meio de entrevistas, observou-se ainda que, entre esses extremos, houve variações, sugerindo dificuldades na compreensão da divisão de número inteiro em relação à divisibilidade e na sua distinção da divisão de número racional.

Já Teppo (2002) propôs para uma turma de futuros professores uma atividade para a introdução da Teoria dos Números por meio da investigação de modelos para números naturais que têm exatamente dois, três, quatro ou cinco divisores. A investigação incluiu o trabalho com os conceitos de fatores, divisibilidade, números primos e compostos. Na análise dos dados, ela mostrou que é possível que os estudantes e o professor se envolvam em um processo matemático de grande extensão, incluindo organizar informação, fazer generalizações a partir de padrões numéricos, fazer e testar conjecturas e formar abstrações. As inferências ocorriam com base nas propriedades comutativa e associativa da multiplicação com o processo de concepção da decomposição em fatores primos. Durante a reflexão, o indivíduo que, por exemplo, associa a divisibilidade primeiramente com a divisão, faz inferências e pode também incluir uma aplicação da relação reversa entre multiplicação e divisão. Ainda segundo Teppo (2002), representações verbais, escritas e simbólicas contribuem significativamente para que os estudantes as articulem e reflitam sobre as ideias discutidas.

No Brasil temos os estudos de Barbosa (2008), Coelho, Machado e Maranhão (2003, 2005) e de Resende (2007), entre outros, voltados para a investigação do tema. Assim, Coelho, Machado e Maranhão (2003) fizeram uma análise de propostas curriculares nacionais, identificando descontinuidades entre o ensino da aritmética na educação básica e nos cursos superiores de formação de professores, salientando a necessidade do ensino da Teoria Elementar dos Números para esses últimos. Mais tarde, em 2005, as mesmas autoras investigaram a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) por professores de Matemática em curso de formação continuada e por alunos de 8ª série (atualmente 9º ano) do Ensino Fundamental de São Paulo e chegaram à conclusão de que a compreensão dos alunos era muito restrita, voltada basicamente para o algoritmo, enquanto a dos professores, embora algumas fossem próximas das dos alunos, eram mais amplas. As autoras reforçam a necessidade de uma abordagem que priorize a formação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Já Resende (2007), ao analisar as propostas curriculares das disciplinas de doze universidades brasileiras que tratavam da Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em Matemática, concluiu que tais instituições não tinham preocupação com a formação do professor da escola básica e que o ensino se enquadrava na tendência formalista clássica, com ênfase na abordagem axiomática, nas demonstrações, na divisibilidade e nas propriedades dos naturais. Ela propõe que esse quadro seja revisto.

Por fim, Barbosa (2008), fundamentada nos estudos citados acima, realizou uma intervenção de ensino com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, tendo em vista a construção dos principais conceitos associados ao TFA, e concluiu que um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Nessa pesquisa, respaldada pela Teoria dos Campos

Conceituais, a autora propõe que uma intervenção de ensino voltada para a construção do conceito de primo deve ser iniciada com discussões envolvendo os conceitos de múltiplo, fator, critérios de divisibilidade, número primo, entre outros. Ela também entende que a compreensão dos conceitos associados ao TFA requer de alunos e professores longos processos de reflexão e que as generalizações devem ocorrer a partir da observação de padrões numéricos. Entre os resultados de sua pesquisa, apresenta a *construção da árvore* como uma técnica mais eficiente que a técnica tradicional – no que concerne à produção de significados – para a decomposição de um número em fatores primos.

Contudo, Barbosa (2008) conclui que o desafio inicial para o professor não está no ensino da nova técnica, mas, sim, em criar condições para que os alunos concebam a possibilidade de decompor um número. Os alunos não compreendiam as razões para decompor um número, e essa falta de compreensão se intensificava, quando a decomposição envolvia mais de dois fatores. É nesse sentido que reconhecemos a importância do jogo da mensagem: ele favorece a construção de significados para a *multiplicação de três números* e sua representação.

Aporte teórico

Nosso estudo apoiou-se em duas perspectivas teóricas. A primeira é a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), elaborada por Gerard Vergnaud (1983, 1990, 1997, 2009), a qual, embora inserida na Psicologia Cognitiva, lança mão das abordagens desenvolvimentalista, social e epistemológica em suas premissas e constructos. A segunda perspectiva vem do papel do jogo no processo de aprendizagem dos estudantes, largamente discutida por Piaget (1994) e trazida para a sala de aula pelas mãos de Macedo, Petty e Passos (2000).

Segundo Vergnaud (1990), um conceito não pode ser ensinado isoladamente. Ele está inserido num campo conceitual. Um campo conceitual é:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição [...]. Ou ainda: um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes,

> mas intimamente relacionados. (Vergnaud, 1983, p. 127)

No caso dos objetos matemáticos envolvidos no jogo de mensagem (a multiplicação de três números), eles compõem o que Vergnaud definiu como campo conceitual multiplicativo, incluindo nele os conceitos de multiplicação, divisão, decomposição em fatores primos, fração, razão, números racionais, função linear e n-linear, análise dimensional, espaço vetorial, entre outros. Segundo ele, trata-se de conceitos que não são matematicamente independentes uns dos outros e estão simultaneamente presentes nos primeiros problemas com que os alunos se deparam.

Acrescentamos ainda que, para este teórico, o conhecimento constitui-se e desenvolve-se no tempo em interação adaptativa do indivíduo com as situações que ele vivencia. O funcionamento cognitivo do sujeito diante de uma situação repousa sobre novos aspectos relacionados a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas.

Dessa forma, Vergnaud considera a possibilidade e a relevância de classificar clara e exaustivamente as situações do ponto de vista de sua estrutura conceitual. Para ele, a classificação das situações é consequência de considerações matemáticas e psicológicas. Como resultado de seu esforço nessa direção, podemos citar a classificação das estruturas aditivas e multiplicativas.

Mas Vergnaud acrescenta que, se quisermos avaliar de forma correta a medida da função adaptativa do conhecimento, teremos de atribuir um lugar central às formas que ela assume na ação do sujeito. Assim, ele distingue dois tipos de situações:

> 1) Situações para as quais o sujeito dispõe no seu repertório, num dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2) Situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, de hesitações, de tentativas abortadas e o conduz eventualmente a resultados satisfatórios (Vergnaud, 1990, p. 156).

O conceito de esquema é relevante, tanto para um tipo de situação como para outro. Esquema é um conceito introduzido por Piaget, para considerar as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais. Vergnaud, em sua teoria, utiliza-se desse conceito. Um esquema gera ações e deve conter regras, é eficiente para toda uma série de situações e pode gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. No primeiro tipo de situações (para as quais o sujeito dispõe de repertório), observam-se condutas largamente automatizadas, organizadas por um esquema único; no segundo tipo (para as quais o sujeito não dispõe de repertório), percebe-se a recorrência sucessiva a vários esquemas que podem entrar em competição e que, para conduzir à solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Esse processo é acompanhado necessariamente por descobertas.

Assim, o autor chama de esquema "a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações" (Vergnaud, 1990, p. 136). Segundo ele, é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Não se pode mais falar em conceito, sem mencionar as diversas situações associadas a ele e, igualmente, sem destacar os invariantes operatórios que levam o indivíduo a reconhecer os elementos pertinentes à situação. Nesse sentido, Vergnaud (1990, p. 145, 1997, p. 6) define conceito como um tripleto de três conjuntos:

> C = (S, I, R) onde:
> S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.
> O primeiro conjunto - de situações - é o referente do conceito, o segundo - de invariantes operatórios - é o significado do conceito, enquanto o terceiro - de representações simbólicas - é o significante.

Assim, para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente. Por outro lado, um único conceito não se refere a um só tipo de situação, e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito.

Isso nos leva a concluir que um programa de ensino abrangente não prioriza a construção de um conceito por parte da criança, mas, sim, a construção das ideias relativas a um campo conceitual. Cabe ressaltar, entretanto, que o domínio de um campo conceitual não ocorre em alguns meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos, se quisermos que os alunos progressivamente os dominem.

Dessa forma, com base na TCC, entendemos que os conhecimentos construídos no jogo correspondem a etapas de um longo processo e buscamos analisar as características da situação do jogo que favorecem a atribuição de significado à multiplicação de três números. Neste estudo, tentaremos descrever os esquemas mobilizados pelos alunos no jogo e os conhecimentos em ação que compõem tais esquemas.

É importante esclarecer que privilegiamos a situação do jogo porque, segundo Piaget (2010), de quem Vergnaud é discípulo, o jogo é, ao mesmo tempo, condição e forma de expressão do desenvolvimento infantil. Segundo ele, vivenciando o jogo, a criança tem oportunidade de realizar os processos de assimilação e de acomodação. Em linhas gerais, estes processos consistem em, respectivamente, acrescentar novos eventos a esquemas já existentes e modificar esses esquemas ou modificar uma estrutura em função das particularidades do objeto a ser assimilado.

No que se refere ao uso de jogos no contexto escolar, Macedo, Petty e Passos (2000) acrescentam ainda que os jogos possibilitam a produção de experiências significativas para as crianças, em termos tanto dos conteúdos disciplinares como do desenvolvimento de competências e de habilidades. Entre as habilidades, ele destaca ser atento, organizado, e coordenar diferentes pontos de vista. Estas habilidades, por sua vez, favorecem a aprendizagem de conceitos matemáticos, na medida em que a criança passa a ser mais participativa, cooperativa, melhor observadora chegando à abstração. Entretanto, Macedo, Petty e Passos (2000) nos alertam que o jogo não pode nem deve ser utilizado em sala de aula como fim em si mesmo, é necessário transformá-lo em material de estudo e ensino. Por isso, desde as primeiras etapas da elaboração da atividade que descrevemos e analisamos a seguir, tínhamos um objetivo, ou melhor, uma intenção clara – favorecer a produção de significado para expressões que envolvem três multiplicações. Além disso, oportunizamos reflexões sobre o jogo durante a sua realização e em momentos posteriores, com o auxílio de exercícios de fixação por escrito. Nas reflexões conjuntas, procurávamos fazer uso das diversas representações e propriedades matemáticas favorecidas no contexto do jogo.

O estudo

O jogo de mensagens foi realizado com os 22 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em dois encontros: um de 100 minutos e outro de 50 minutos. Esses encontros foram filmados, e as filmagens, transcritas. Contamos com a colaboração da professora de Matemática da turma, a qual esteve presente durante toda a atividade e colaborou também com nossas reflexões teóricas. Além de jogar, os alunos, a professora e nós tivemos a oportunidade de refletir sobre o jogo oralmente e, ainda, ao final do jogo, foi proposto aos alunos que resolvessem um exercício por escrito, que foi recolhido e analisado por nós posteriormente. A análise dos dados coletados nesse jogo dar-se-á à luz da Teoria dos Campos Conceituais. É evidente que não temos a pretensão de esgotar todos os elementos e contribuições dessa teoria. Focalizamos nossas análises nos conceitos de campo conceitual, esquema, invariante operatório, situação, representação e no próprio conceito de conceito.

Jogo de mensagem

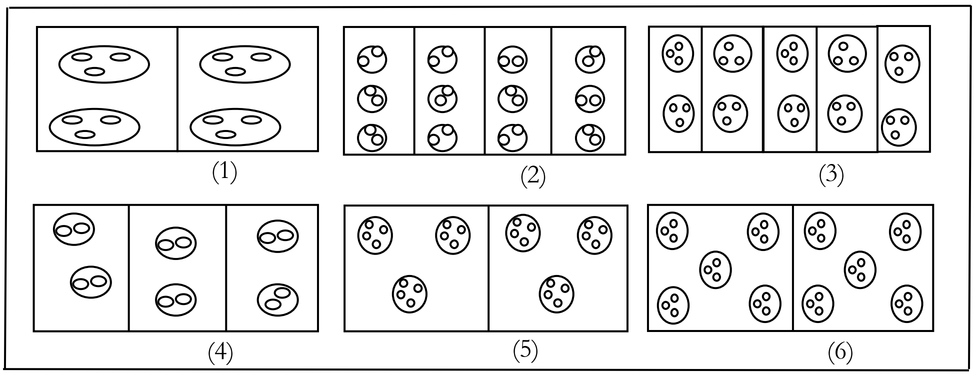
O jogo de mensagem tinha por objetivo criar condições para que os alunos construíssem representações para o *produto de três números naturais*. Cabe explicar que destacamos a última expressão, pois nela há um erro conceitual. De acordo com a definição matemática, a multiplicação é uma operação que se estabelece entre dois números. Quando empregamos tal expressão, estamo-nos referindo a representações para expressões matemáticas como *2 x 3 x 7* ou *3 x 5 x 11*, ou melhor, para expressões numéricas envolvendo apenas duas multiplicações.

<u>Organização da classe</u>: Os alunos trabalharam em grupos de quatro componentes, divididos em duas duplas adversárias. A realização de quatro

partidas foi suficiente para que se estabelecesse uma discussão informal entre nós e os alunos sobre o conceito envolvido no jogo – comutatividade –, seja na perspectiva da Matemática, seja na do mundo tangível.

Material utilizado: Um dado; etiquetas brancas; e seis cartas semelhantes às da Figura 1 para cada dupla de alunos.

Figura 1 - Cartas do jogo de mensagem



Fonte: Pesquisa privada, 2008.

Desenvolvimento: Cada dupla (alunos) recebe um envelope, contendo as mesmas seis cartas, todas de mesmo tamanho, e várias etiquetas brancas para transmissão de mensagens. Essas seis cartas possuem divisões distintas umas das outras; cada divisão, por sua vez, tem diferentes representações de quantidades. A mensagem corresponde à expressão matemática que representa cada carta. Apresentamos, na Figura 1, seis cartas e abaixo de cada uma a sua respectiva mensagem. A dupla que inicia a partida seleciona uma carta, coloca-a separada das demais, sem que a dupla adversária veja o seu conteúdo, e passa a mensagem para ser decifrada pela dupla adversária. Assim, a dupla que inicia o jogo escreve em uma etiqueta branca a expressão matemática correspondente à carta selecionada, para que a dupla adversária identifique, entre suas cartas, aquela que corresponde à expressão escrita na etiqueta, descobrindo, assim, a carta selecionada. Em resumo, os alunos devem jogar de acordo com as seguintes regras: (1): Jogar o dado para decidir que dupla iniciará a partida: aquela que obtém o maior número deve começar. (2): A dupla que começa deve escolher uma carta, escrever na etiqueta uma mensagem e mostrá-la à dupla adversária, para que a decifre. (3): Se a dupla decifrar corretamente, será a vencedora da rodada. Caso contrário, a dupla que deu início à rodada escrevendo a mensagem é a vencedora. (4): As duplas se alternam na escrita da mensagem de cada rodada. (5) Ganha a partida a dupla que, ao final de seis rodadas, tiver mais vitórias.

Análise da atividade do jogo de mensagem

Inicialmente, compreender como o jogo deveria ser realizado não foi uma tarefa fácil para os alunos. Todos priorizavam o total de bolinhas contidas na carta e não atentavam para as diferentes situações que estavam sendo representadas em cada carta. Por exemplo, para eles, as cartas 3 e 6 apresentadas na Figura 1 tinham o mesmo significado, qual seja, o de 30 unidades. Impacientes para ouvir as regras do jogo e ansiosos para começarem a usar as cartas, muitos alunos criavam regras próprias: *"Você pega uma carta, eu pego outra. Quem tiver mais bolinhas na carta ganha"*.

Precisávamos, então, favorecer a compreensão de que, embora a ordem dos fatores não alterasse o produto, a inversão deles implicava na representação de situações distintas. Começamos pedindo que todos parassem de jogar e formassem um grande grupo. Colocamos junto a nós as cartas em um monte, com os desenhos voltados para baixo. Depois pedíamos que um dos alunos pegasse uma carta do monte e nos dissesse o total de bolinhas dessa carta. Em seguida, solicitávamos que ele explicasse em voz alta que esquema(s) havia usado para chegar a esse total. Esse procedimento foi feito com vários alunos, de forma a podermos identificar diferentes esquemas por eles utilizados. Entendemos "esquema" tal como definido por Vergnaud (1990): uma organização invariante da conduta do sujeito.

A discussão, acompanhada de um posterior registro com símbolos matemáticos desses esquemas, permitiu a distinção das situações. Durante as explicações, identificamos cinco esquemas usados entre os alunos da turma. Vamos expô-los a seguir, tomando como referência a carta número 3 (5 x 2 x 3).

1º) Contagem um a um

Este esquema foi usado por três alunos e considerado trabalhoso pelos outros da turma. Aqueles que o adotaram apontavam cada bolinha e falavam a sequência dos números naturais. Assim, para contar o total de bolinhas da carta 3, eles apontavam para cada uma de todas as bolinhas e, simultaneamente, falavam a sequência dos números naturais de 1 até 30. Vergnaud (1990) descreve este esquema, ao apresentar o esquema empregado por uma criança para contar a quantidade de elementos de um conjunto discreto.

2º) Contagem das bolinhas de cada círculo (adição repetida)

Da turma, 12 alunos adotaram este esquema. Ele consistiu em obter o total de bolinhas de um círculo e, em seguida, ir apontando para cada círculo e acrescentando mais três ao conjunto inicial das três bolinhas. Assim, os alunos contavam as três bolinhas que havia em um dos círculos e, apontando para esse círculo, falavam "três"; para o círculo seguinte, já falavam "mais três, seis"; para outro, "mais três, nove"; e assim, por diante, até que, ao apontar para o décimo e último círculo, falavam "trinta". Embora mais sofisticado que o anterior, o qual se limitava à contagem das bolinhas da carta, este esquema indica que o raciocínio multiplicativo desses alunos passava pela adição de parcelas iguais, ou seja, a multiplicação vista como continuidade da adição.

3º) Contagem das bolinhas de cada círculo e sua multiplicação pelo total de círculos

Na fala *"Eu comecei fazendo assim* [referindo-se ao esquema descrito anteriormente]*, mas depois eu vi que dava no mesmo se eu fizesse a conta de multiplicar"*, o aluno L. G. explica que, ao longo das partidas, havia alterado seu esquema inicial de contar as bolinhas de um círculo, obter o total e, daí, somar repetidas vezes esse total para cada um dos círculos da carta, para adotar o seguinte esquema: após obter o total de bolinhas de um círculo, ele contava o total de círculos e efetuava o produto dos dois números obtidos, sem, entretanto, preocupar-se com a ordem dos fatores. Assim, sabendo que havia três bolinhas em cada círculo, os alunos observavam que havia dez círculos e efetuavam o produto ora de 10 x 3, ora de 3 x 10.

Ao analisar as falas dos alunos, como a que destacamos de L.G., percebemos que o novo esquema foi tratado pela turma como certo aprimoramento, ou refinamento, do anterior. Tal conduta vai ao encontro da Teoria dos Campos Conceituais, quando Vergnaud (1990, 1997) afirma que as situações que se referem a um certo conceito vão sendo progressivamente dominadas pelos estudantes, trazendo como consequência a apropriação desse conceito. Além disso, esse fato nos permite verificar, na prática, as ideias de Piaget (2010) sobre a importância dos jogos como condição e forma do desenvolvimento infantil. Assim como previsto por ele, os alunos modificaram seus esquemas, incorporando-lhes novas ações, ou seja, experimentaram os processos de acomodação e assimilação.

4º) Contagem do total de bolinhas de cada "pedaço"

Alguns alunos chamavam de "pedaço" cada retângulo obtido a partir da divisão da superfície de uma carta em partes iguais. Dessa forma, as cartas 1, 5 e 6 da Figura 1 tinham dois pedaços, a carta 2 tinha quatro, a 4 tinha três e a 3 tinha cinco pedaços.

Nesse esquema, os alunos obtinham o número de bolinhas de um pedaço e, apontando para cada pedaço, falavam a sequência dos múltiplos positivos desse número. No caso da carta 3, após identificarem que, em um pedaço, havia 6 bolinhas, os alunos apontavam para o primeiro pedaço à esquerda e falavam 6, para o segundo e falavam 12 e assim por diante, até que, no quinto e último pedaço, falavam 30. Notamos que esse quarto esquema era muito parecido com o segundo, mudando apenas as quantidades, pois, enquanto no segundo esquema o aluno contava a quantidade de bolinhas contidas no círculo, no quarto, ele contava todas as bolinhas dos círculos de uma das partes da carta e, então, ia adicionando essa mesma quantidade para cada uma das demais partes dessa carta.

5º) Contagem das bolinhas de um pedaço e sua multiplicação pelo total de pedaços

Finalmente, assim como aconteceu no terceiro esquema, este último foi considerado pelos alunos um aprimoramento do esquema anterior. Após obterem o número de bolinhas de um pedaço, eles contavam o número de pedaços que compunham a carta e efetuavam o produto dos dois números. Para obter o total de bolinhas da carta 3, por exemplo, eles verificavam que havia seis bolinhas em cada pedaço, observavam que havia cinco pedaços e, então, efetuavam um produto envolvendo 6 e 5, sem novamente se preocupar com a ordem dos fatores.

Com base nos esquemas apresentados, é importante observarmos que, embora tivéssemos escolhido este jogo na busca de construir um significado para a *multiplicação de três números* e, futuramente, para a decomposição de um número, estavam envolvidos na situação os conceitos relacionados à sequência dos números naturais, à definição de múltiplo, à obtenção da sequência dos múltiplos de um número e à multiplicação. Assim, constatamos, tal como enfaticamente afirma a teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990, 1997, 2009), que uma situação não abarca apenas um conceito e que um conceito nunca pode ser compreendido isoladamente, a partir de uma única situação. Na verdade, o conceito está inserido dentro de um campo conceitual, e sua compreensão está associada à compreensão de outros conceitos que compõem esse campo.

É importante destacarmos também que a discussão sobre o jogo, o que inclui a compreensão das regras e os esquemas empregados na compreensão dos materiais utilizados nesse jogo, tem uma função específica na construção dos conceitos que pretendíamos favorecer. Como mencionamos anteriormente, concordamos com Macedo, Petty e Passos (2000): o jogo não teve um fim em si mesmo. Para que ele cumprisse seu papel no processo de aprendizagem, estabelecíamos frequentes reflexões coletivas sobre as situações vivenciadas. Mesmo quando as discussões assumiam níveis de abstração mais elevados, em alguns momentos, remetíamo-nos ao jogo para atribuir significado a certos conceitos. Além disso, trata-se da inserção dos alunos na situação, ou melhor, trata-se de momentos em que os alunos iniciam a produção de significados para essa situação. Segundo Vergnaud (1990), uma situação só será progressivamente dominada, na medida em que os indivíduos lhe atribuam significados.

Depois que os alunos expuseram oralmente seus esquemas, pedimos-lhes que escrevessem, quando possível, igualdades matemáticas que os representassem. Nos esquemas 1º, 2º e 4º, que descrevemos anteriormente, cuja ação em comum era a de enunciar uma sequência numérica, os alunos não escreviam qualquer igualdade. Havia apenas o registro, por escrito, de tais sequências. Esses registros apresentavam pequenas variações: a) listagem de todos os números da sequência, separados por vírgulas ou traços; b) listagem dos primeiros números da sequência seguida da palavra *até* e do último número da sequência; e c) listagem dos primeiros números da sequência, seguida de reticências e do último número da sequência.

Já no terceiro e no quinto esquemas, os alunos escreviam igualdades matemáticas, na tentativa de representá-los. Entretanto, nenhuma dessas igualdades apresentou um "produto de três fatores". Tal fato não nos surpreendeu. Aliás, foi justamente porque tínhamos a hipótese de que tais esquemas surgiriam, que selecionamos este jogo. De todos os esquemas, inferimos que o quinto favoreceria a escrita de um produto de três fatores, mas os alunos não produziam igualdades matemáticas para o total de bolinhas de um pedaço. Escreviam imediatamente esse total. Podemos tomar o exemplo da carta 6. As igualdades produzidas pelos alunos foram 2 x 15 = 30 e 15 x 2 = 30. Por mais que eles percebessem que o 15 é obtido, calculando-se 5 x 3, não faziam esta substituição na igualdade. Questionamos sobre o fato de eles não fazerem tal substituição. Tal questionamento está descrito no extrato de uma de nossas conversas com dois dos alunos. Cabe observar que, em todas as conversas transcritas, utilizamos a letra "P" para as falas da pesquisadora, enquanto as falas dos alunos, por questões éticas, foram representadas com a primeira letra de seus nomes.

> **P.**: De onde saiu o 15? Como vocês o encontraram?
> **M:** Ué, contando.
> **G.S.**: Eu não contei não. Eu fiz 5 x 3.
> **P.**: E por que você não escreve isso no lugar do 15?
> **G.S.**: Se eu já sei que o resultado é 15, pra que que eu vou escrever a conta? Pra gastar mais lápis?

Por meio das palavras de G.S., percebemos que sua preocupação era apenas expressar o total de bolinhas da carta. Diante da argumentação do aluno, decidimos solicitar que todos observassem mais detalhadamente cada carta. Adotando o vocabulário deles, perguntávamos quantos pedaços cada carta tinha. Depois perguntamos: se nós recortássemos as cartas para poder dar um pedaço dela para cada aluno, qual seria a carta com que um número maior de alunos seria contemplado?

Essas questões levaram os alunos a observar mais detalhadamente e perceber que cada carta estava dividida em grupos, e estes, por sua vez, também estavam divididos em grupos. Estabelecendo ainda uma comparação entre as cartas que possuíam o mesmo total de bolinhas e as cartas 3 e 6 nas mãos, acrescentamos:

> **P.:** Quantas bolinhas há em cada cartinha?
> **TODOS:** Trinta.
> Sacudindo a carta 3, continuamos:
> **P.:** Mas quantas pessoas vão ganhar um pedaço, se eu recortar esta cartinha?
> **TODOS:** Cinco.
> E, balançando a cartinha 6, perguntamos:

> **P.:** E se eu recortar esta?
> **TODOS:** Duas.
> **P.:** É a mesma coisa? Se vocês fossem escolher uma para recortar, qual vocês escolheriam?
> Depois de muita confusão, porque todos falavam e justificavam suas escolhas ao mesmo tempo:
> **G.S.:** Eu escolheria a primeira porque dava pra mais gente.
> **B.H.:** Mas, se a gente recortar os círculos, em vez dos pedaços, dá para dar pra dez pessoas nos dois jeitos e os círculos ainda são todos iguais.

A resposta de G.S., compartilhada pela maioria (15 alunos), foi para nós um indício de que os alunos passavam a observar as cartas de outra forma e não apenas procurando obter o total de bolinhas.

Entre os alunos que optaram pela segunda cartinha, um deles argumentou: *"tem menos pedaços para dar, mas os pedaços são melhores porque têm mais bolinhas"*. Com mais esse comentário, confirmamos que os alunos já faziam uma análise qualitativa das cartas. Atribuímos essa mudança de comportamento dos alunos ao fato de terem construído um significado para cartinhas, pedaços e bolinhas no momento em que foram inseridos em uma situação que dominavam: a distribuição de objetos entre indivíduos.

Restava-nos investigar se eram capazes de expressar essas diferenciações por meio das igualdades matemáticas, e prosseguimos a discussão. Assim, argumentamos com B.H., tomando como referência as cartas 2 e 5. Este par nos permitiu lhe fornecer um contraexemplo para seu comentário transcrito acima, em que afirmava que, se recortassem os círculos em vez dos pedaços, os resultados seriam os mesmos. Nas cartas 2 e 5, o total de bolinhas era o mesmo, mas o total de bolinhas por círculo e o total de círculos variava de uma para outra. Tentamos impedir que ele generalizasse a ideia equivocada e perguntamos:

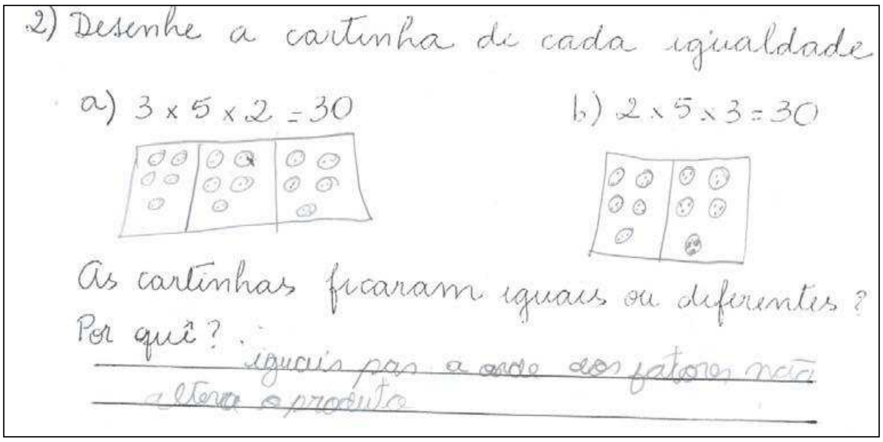
> **P.:** E agora, quantas bolinhas há em cada cartinha?
> **B.H.:** Vinte e quatro nas duas.
> **P.:** E se a gente recortar os círculos, vai dar o mesmo resultado nas duas?
> **B.H.:** Ih! Não.
> **P.:** Por quê? O que você está vendo?
> **B.H.:** Porque numa tem 6 círculos com 4 bolinhas em cada um e na outra tem 12 círculos com 2 bolinhas em cada um. Nada dá igual.

A apresentação do contraexemplo acompanhado do diálogo com B.H. foi muito importante tanto para ele como para alguns outros estudantes que pareciam concordar com ele. Isso porque, além de impedir que ele generalizasse a ideia de que distribuir pedaços e círculos são ações equivalentes, alertou para a observação da distribuição dos círculos nos pedaços e das bolinhas nos círculos. Em outras palavras, o aluno percebeu que era possível estabelecer uma diferenciação entre pedaços e, em seguida, entre círculos e, consequentemente, entre as cartinhas. Vale lembrar, entretanto, que o reconhecimento das diferenças entre as cartas foi um processo lento, que só se completou durante o jogo, quando os alunos passaram a estabelecer uma relação entre as bolinhas dentro dos círculos e os feijões distribuídos nos pratos (as bolinhas eram os feijões e os círculos, os pratos). Esses feijões distribuídos nos pratos referiam-se ao *jogo de restos*, com o qual havíamos brincado no encontro anterior. Em linhas gerais, a principal ação envolvida nesse jogo era distribuir igualmente um número, inicialmente desconhecido, de grãos de feijão (afinal, os alunos enchiam a mão de grãos, sem contá-los) num total de pratos definido a partir de um sorteio no dado.

Mais uma vez, esse fato não nos surpreendeu. Isso porque, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o indivíduo aproxima situações distintas para poder empregar os esquemas de ação válidos de uma das situações, que ele já domina, na outra situação, que ele domina apenas parcialmente. A aproximação que esses alunos fizeram da situação do jogo da mensagem com a situação do jogo dos restos (da distribuição de restos) foi um exemplo explícito desse aspecto teórico. Os alunos começaram a jogar, e nós passamos a circular pela sala de aula, observando suas ações e discussões. A dupla B.H. e G. logo nos chamou atenção. B.H. ainda não estava compreendendo exatamente a produção das igualdades matemáticas a partir das cartas e G. tentava explicar-lhe: *"Pensa assim, oh, duas duplas, cada dupla com três pratinhos e tem seis feijões em cada pratinho"*.

Ouvindo a explicação da colega, outras duplas sanaram suas dúvidas e começaram a jogar, mas, em vários momentos, voltavam a errar no jogo. Percebemos que o apelo à propriedade comutativa ainda era muito forte entre os alunos, e muitos ainda priorizavam apenas o resultado. Analisando os registros feitos pelos alunos na atividade escrita que complementou o jogo, verificamos novamente estes fatos (ver Figura 2):

Figura 2 - Resposta "iguais" para cartas diferentes

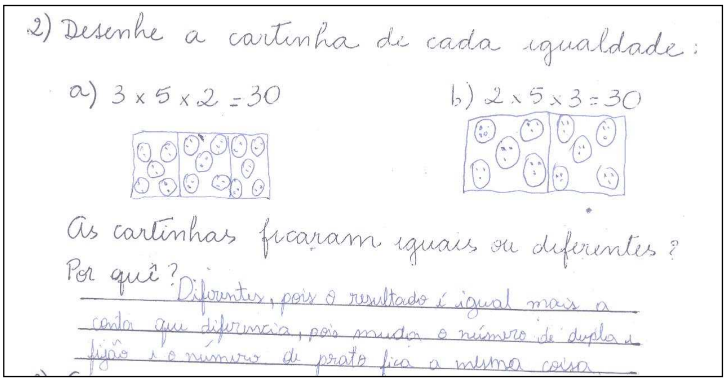


Fonte: Pesquisa privada, 2008.

Notamos que o aluno desenhou cartinhas diferentes; entretanto, respondeu *"iguais"*, pois se referiu ao total de unidades. Para se justificar, enunciou a propriedade comutativa da multiplicação.

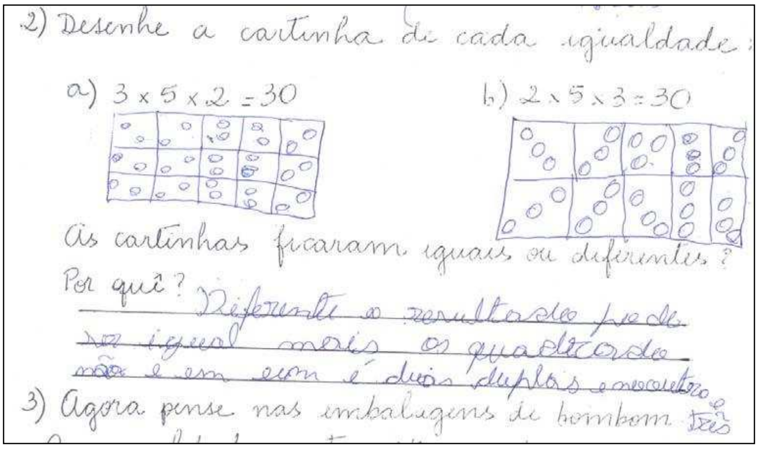
Entre os registros dos alunos que responderam *"diferentes"* à mesma questão, identificamos duas categorias: aqueles que se fundamentavam em números de feijões, pratos e pessoas e aqueles que generalizaram suas ideias, sem se referir a esses elementos. Nas Figuras 3 e 4, oferecemos um exemplo de cada categoria:

Figura 3 - Resposta "diferentes" para cartas diferentes, fundamentada no jogo dos restos



Fonte: Pesquisa privada, 2008.

Figura 4 - Resposta "diferentes" para cartas diferentes, sem mencionar o jogo



Fonte: Pesquisa privada, 2008.

Comparando os dois exemplos, percebemos que o tratamento mais generalizado também se manifestou no desenho da igualdade. O aluno que não se referiu a feijões, pratos e pessoas também não fez um desenho procurando representar esses elementos.

A partir dos episódios que expusemos, fica claro que a produção de significados e a construção do conhecimento em contextos matemáticos não ocorrem de forma linear. Assim, em determinados momentos, os alunos voltavam a priorizar o total de bolinhas ou aplicavam aleatoriamente a propriedade comutativa, e precisávamos intervir. Mas também é fato que eles já admitiam a diferenciação das cartas por meio das igualdades matemáticas. Para eles, cartas diferentes implicavam igualdades matemáticas diferentes e vice-versa, embora o total de bolinhas pudesse ser o mesmo.

Para finalizar, salientamos que temos consciência de que este jogo apenas foi um desencadeador de um processo para que os alunos iniciassem a construção de uma representação para a *multiplicação de três números*. Entre as características deste processo, estão, inclusive, o emprego e a comparação de outras representações para essa mesma situação. Nesta atividade tivemos a descrição oral, o desenho e a igualdade matemática. Para Vergnaud (1990), as representações associadas ao conceito são também seus componentes. Assim, dominar as várias representações e, quando possível, transferir tal domínio de uma situação para outra significa avançar no processo de construção do conceito.

Considerações finais

Neste artigo buscamos compreender as contribuições de uma atividade lúdica para a produção de significado para expressões numéricas envolvendo a multiplicação de três números. Para tanto, analisamos, à luz da TCC, as condutas dos alunos de uma turma de 6º ano, ao participarem do jogo da mensagem. Identificamos os esquemas empregados pelos alunos enquanto jogavam e os conhecimentos em ação que compunham tais esquemas. Em todas as etapas, o jogo mobilizou uma série de conceitos e parece ter criado condições para que os alunos desenvolvessem e utilizassem diversas representações para lidar com eles. Entre elas, citamos o desenho das cartas utilizadas no jogo, a língua materna e a linguagem matemática. A articulação entre as várias formas de representação foi feita de tal modo que parece ter permitido aos alunos que adquirissem confiança para expressar seus esquemas, tornando a aprendizagem mais eficiente. Uma vez que a atividade foi realizada em grupo, observamos que foi proveitosa a troca de informações entre os alunos, o que pode ter contribuído para o aprendizado individual.

Na reflexão com os alunos, percebemos que eles compreenderam que a cada carta deviam associar uma expressão matemática diferente, ainda que o total de bolinhas nas cartas fosse o mesmo sempre. A relevância dessa compreensão pôde ser verificada nas aulas seguintes, quando os alunos precisaram lidar com a decomposição dos números em fatores primos. A ideia de manipular e operar com decomposições não era, inicialmente, bem aceita por eles. Frutos de um ensino tradicional que sempre privilegiou resultados, os alunos não admitiam haver circunstâncias em que seria mais vantajoso não efetuar os cálculos. Somente após o jogo da mensagem, essa concepção foi revista. Inferimos que a associação de situações a expressões matemáticas foi decisiva neste processo.

Acreditamos que nosso estudo poderá trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre o ensino da aritmética e, particularmente, sobre o campo conceitual multiplicativo. Uma primeira sugestão de pesquisa é uma intervenção de ensino com maior número de encontros. Será que produziria mais resultados? E se formos realizar a mesma atividade nas escolas públicas em parceria com os professores? Os resultados serão os mesmos? A partir de que ano do Ensino Fundamental o jogo de mensagem tem significado para as crianças?

Por fim, esclarecemos que, em qualquer pesquisa que retome o jogo da mensagem, o pesquisador precisa atentar para o fato (também verificado em nossa pesquisa) de que fenômenos relacionados à construção de conceitos não se dão de forma linear. Não se trata de estabelecer relações estritas de causa e efeito. Muitos fatores conjugam-se e interagem durante a construção de conceitos, proporcionando avanços e retrocessos.

Referências

BARBOSA, G. S. *O teorema fundamental da aritmética*: jogos e problemas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC-SP, São Paulo.

BROWN, A.; THOMAS, K.; TOLIAS, S. Conceptions of divisibility: success and understanding. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIZ, R. (Org.). *Learning and teaching number theory*. Westport: Ablex Publishing, 2002. p. 41-82.

CAMPBELL, S. Coming to terms with division: preservice teachers' understanding. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIZ, R. (Org.). *Learning and teaching number theory*. Westport: Ablex Publishing, 2002. p. 1-14.

COELHO, S.; MACHADO, S.; MARANHÃO, C. Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental? In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CIBEM, 5., 17 a 22 de julho de 2005, Porto. *Anais*... Porto, 2005.

COELHO, S.; MACHADO, S.; MARANHÃO, C. Projeto: qual álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEM, 2., de 29 de outubro a 1º de novembro de 2003, Santos. *Anais*... Santos, 2003.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

MACEDO, L. de; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Aprender com jogos e situações problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

PIAGET, J. *A formação do símbolo na criança:* imitação, jogo e sonho; imagem e representação. Tradução de Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

RESENDE, M. R. *Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo.

SANTOS, J. P. A. *Introdução à teoria dos números.* Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

TEPPO, A. R. Integrating content in classroom Mathematics. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIZ, R. (Org.). *Learning and teaching number theory*. Westport: Ablex Publishing, 2002. p. 117-130.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Tradução de Maria Lucia Moro. Curitiba: UFPR Press, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press Inc., 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concept. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Ed.). *Learning and teaching Mathematics*. Sussex: Psychology Press, 1997. p. 5-28.

Submetido em 01/11/2012

Aprovado em 11/02/2014