revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO DA COMBINATÓRIA

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba*
Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa**
Cristiane de Arimatéa Rocha***
Adryanne Barreto de Assis****

Resumo
No presente artigo objetivamos discutir a formação de professores de Anos Iniciais para o trabalho com situações combinatórias. Argumentamos que a Combinatória deve ser estudada desde o início da escolarização, por intermédio de variados tipos de situações, e que os professores precisam conhecer esta variedade, bem como o percurso de desenvolvimento dos estudantes e formas adequadas de ensino nos Anos Iniciais. São apresentados dois estudos: o primeiro de sondagem de concepções e conhecimentos de professores e o segundo de intervenção por intermédio de uma formação continuada. Constatamos que alguns professores de Anos Iniciais conhecem pouco de Combinatória e de como se dá o desenvolvimento da compreensão deste conteúdo. Observamos, também, que processos de formação podem auxiliá-los no avanço em seus conhecimentos – de conteúdo e didático – de situações combinatórias. Dessa forma, professores bem preparados têm melhores condições de auxiliarem os estudantes a desenvolverem seus raciocínios combinatórios desde os Anos Iniciais de escolarização.
Palavras-chave: Formação de professores. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Ensino de Combinatória.

PRIMARY SCHOOL TEACHER FORMATION FOR THE TEACHING OF COMBINATORICS

Abstract
The present article aims at discussing Primary School teacher education to enable instruction in combinatorial situations. It is argued that Combinatorics should be studied since the beginning of schooling, through various types of situations and that teachers need to know this variety as well as the route of development of students and appropriate forms of education in the early years. Two studies are presented: the first probing concepts and knowledge of teachers and the second intervention through a continuing education program. It was found that some Primary School teachers know little about of Combinatorics and how development of the understanding of this content occurs. It was observed also that formation processes can assist them in advancing their content and pedagogical knowledge of combinatorial situations. Thus, well-prepared teachers are able to better assist students to develop their combinatorial reasoning since early years of schooling.
Keywords: Teacher formation. Primary school. Teaching Combinatorics.

Por que professores dos Anos Iniciais devem ser formados para o ensino de Combinatória?

Acreditamos que a qualidade do aprendizado matemático é, em grande parte, consequência das atividades que são desenvolvidas em sala de aula e defendemos que a organização de ensino é, prioritariamente, reflexo da formação do professor. Professores com sólida formação têm melhores condições de organizar as atividades vivenciadas na escola, pois conhecem bem os conteúdos a serem trabalhados, os processos de aprendizado de estudantes e caminhos que podem proporcionar avanços em seus desenvolvimentos, em particular nos seus conhecimentos matemáticos.

Argumentamos que um dos caminhos do desenvolvimento matemático é o aprendizado da Combinatória (BORBA, 2010, 2013). Esta é uma parte da Matemática que trata do levantamento de possibilidades a partir de relações de escolha de elementos, no qual a ordenação dos mesmos pode, ou não, determinar possibilidades distintas. Borba e Braz (2012) e Borba, Araújo e Braz (2013) acrescentam a essas relações de *escolha* e *ordenação* de elementos, outras relações que podem estar presentes em situações combinatórias, em particular nos problemas condicionais, *proximidade* e *posicionamento*, além da limitação da presença de determinados elementos (como nos problemas nos quais se pede ter *no mínimo* e *no máximo* algum tipo de elemento específico) [1].

Observamos, assim, que as situações combinatórias possuem diversas relações lógico-matemáticas e, desse modo, o estudo das mesmas é uma rica oportunidade de desenvolvimento dos estudantes. Defendemos que o desenvolvimento proporcionado pelo estudo da Combinatória não se limita a conhecimentos matemáticos, mas também a outras áreas, pois, na resolução de problemas combinatórios, os estudantes são estimulados a pensarem de modo hipotético, a levantarem possibilidades e a julgarem a adequação das possibilidades levantadas, a partir de uma grande variedade de situações. Assim, o estudo da

[1] Um exemplo de problema combinatório condicional com condições seria: Quantas senhas de quatro letras pode-se formar com as letras A, B, C, D e E, desde que haja no máximo uma vogal (condicional de escolha) e nas quais as letras B e C estejam sempre juntas (condicional de proximidade) e nessa ordem (condicional de posicionamento)?

Combinatória pode, em muito, contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico de estudantes.

A compreensão plena das situações combinatórias é um processo que acreditamos ser longo. Defendemos, assim, ser necessário que o estudo das variadas situações combinatórias seja iniciado cedo, bem antes do Ensino Médio – etapa da escolarização na qual se dá o estudo formal da Análise Combinatória.

Nossa defesa é baseada em estudos anteriores que evidenciam que crianças desde a Educação Infantil já são capazes de compreenderem algumas relações combinatórias e, quando o número de possibilidades não é elevado, podem determiná-lo, seja por manipulação de objetos ou figuras de objetos ou, ainda, por desenhos (PESSOA; BORBA, 2012). Estudos prévios de sondagem também mostram que estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental conseguem, em algumas situações combinatórias, levantarem o número total de possibilidades, prioritariamente por meio de listagens (PESSOA; BORBA, 2009). Além disso, Barreto e Borba (2010) verificaram que variados problemas de Combinatória são trabalhados em livros didáticos dos Anos Iniciais explícita ou implicitamente.

Adicionalmente a essas constatações, estudos de intervenção anteriores evidenciam que crianças dos Anos Iniciais de escolarização podem aprender a sistematicamente levantarem a totalidade de possibilidades de situações combinatórias, seja por listagens (PESSOA; SANTOS, 2012), seja por construção de árvores de possibilidades (BORBA; AZEVEDO, 2012; AZEVEDO; BORBA, 2013).

Se o aprendizado de situações combinatórias é um longo processo, se as crianças desde a Educação Infantil possuem algumas noções iniciais de Combinatória e estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental podem avançar significativamente em seu conhecimento combinatório, defendemos, assim, que o professor dos Anos Iniciais necessita estar preparado para lidar com as situações combinatórias variadas que são apresentadas nos livros didáticos dos Anos Iniciais e propor outras que possam auxiliar os estudantes no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Discutimos, a seguir, quais conhecimentos combinatórios são necessários e como pode ser a formação do professor dos Anos Iniciais que possibilite que o mesmo desenvolva um eficiente trabalho de Combinatória.

Conhecimentos combinatórios necessários ao professor dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

O raciocínio combinatório é uma forma de pensamento que auxilia no aprendizado matemático, bem como de outras áreas do conhecimento, particularmente em conteúdos nos quais é importante analisar e sistematizar dados. Este tipo de pensamento precisa ser desenvolvido como parte integrante do conhecimento científico, baseado em levantamento de possibilidades.

Pessoa e Borba (2010) defendem que na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de casos possíveis, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a determinação de possibilidades, a constituição de agrupamentos e sua contagem. Assim, estas pesquisadoras defendem que a Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1997) – orientam para o 1º e 2º ciclos “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio fundamental da contagem” (p.57). Em documento mais recente, nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), dentre os objetivos para o trabalho com os conteúdos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, destaca-se o de “resolver e elaborar problemas de multiplicação em linguagem verbal (com o suporte de imagens ou materiais de manipulação), envolvendo as ideias de adição de parcelas iguais, elementos apresentados em disposição retangular, proporcionalidade e a ideia de combinatória” (p.87).

De acordo com o estudo de Barreto e Borba (2010), que analisaram cinco coleções aprovadas pelo PNLD de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental de 2007, os livros destinados a este nível de ensino abordam os quatro tipos de problemas combinatórios (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*) e trazem variadas representações das situações. Entretanto, nenhum dos autores dos livros analisados chama a atenção do professor em relação às diferentes situações que dão significado à Combinatória, assim como também não orienta o professor para a especificidade desses tipos de problema. Desse modo, na prática, diferentes tipos de problemas combinatórios são apresentados nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e podem ser trabalhados em sala de aula, mas nem sempre o professor deste nível de ensino tem o conhecimento necessário para se trabalhar adequadamente a variedade de situações combinatórias.

Apesar das recomendações dos PCN (BRASIL, 1997), de propostas curriculares estaduais (PERNAMBUCO, 2012) e de os livros didáticos do Ensino Fundamental abordarem problemas combinatórios de diferentes tipos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental (BARRETO; BORBA, 2010), na prática de sala de aula a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (*arranjo*, *combinação* e *permutação*) é introduzida formalmente na escola somente a partir do 2º ano do Ensino Médio, como evidenciado na fala de professores pesquisados no estudo de Lima, Amorim e Pessoa (2013). Apenas o problema do tipo *produto cartesiano* é trabalhado explicitamente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Se há indicações, por documentos oficiais, de trabalho com a Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e se os livros didáticos trazem os diferentes tipos de problemas combinatórios desde os Anos Iniciais, o que o professor precisa saber acerca desse conteúdo para trabalhar eficientemente com os estudantes?

Vergnaud (1986), em sua Teoria dos Campos Conceituais, defende que todo conceito é formado por um tripé composto de *situações que dão significado* ao conceito, propriedades *invariantes* que o caracterizam e diferentes *representações simbólicas* do mesmo. Na Combinatória, as *situações* são os diferentes tipos de problemas, quais sejam, *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*; as propriedades *invariantes* se referem à escolha dos elementos e à ordenação desses elementos, dentre outras relações; e as *representações* podem ser desde desenhos, listagens e árvores de possibilidades, até o uso de algoritmos mais formais, como o uso do *princípio fundamental da contagem* ou a fórmula, por exemplo.

A seguir, mais detalhadamente, estão colocadas as *situações* presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus *invariantes* e exemplos de possíveis soluções:

- **Arranjo** - *invariantes*: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0** < **p** < **n**, sendo **p** e **n** números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Um exemplo com uma possível solução, por meio do desenho, para *arranjo* pode ser visto na Figura 1.

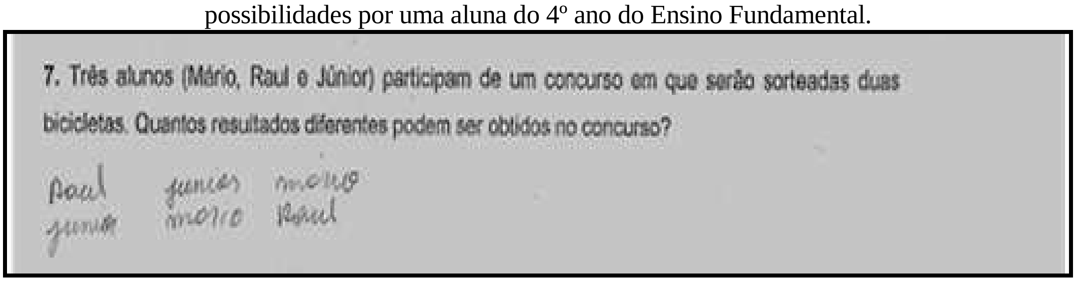
Figura 1. Protocolo de solução correta para um problema de *arranjo* por um estudante do 3o. ano do Ensino Fundamental.

Fonte: Pessoa (2009), utilizado na pesquisa de Rocha (2011).

- **Combinação** - *invariantes*: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n, p** e **n** naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Um exemplo com uma possível solução, por meio de listagem de possibilidades, para a *combinação* pode ser visto na Figura 2.

Figura 2. Protocolo de solução correta para um problema de *combinação*, através do uso da listagem de possibilidades por uma aluna do 4º ano do Ensino Fundamental.



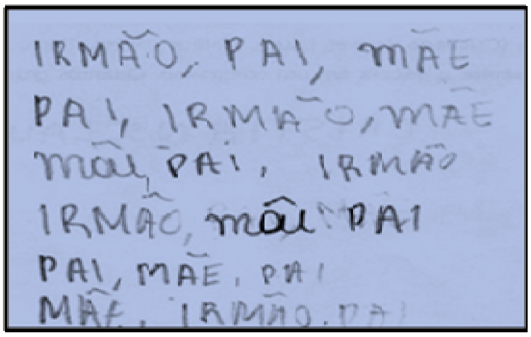
Fonte: Pessoa (2009).

- **Permutação** - *invariantes*: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Um exemplo com uma possível solução, por meio de listagem de possibilidades, para a *permutação* pode ser visto na Figura 3.

Figura 3. Protocolo de solução correta para um problema de *permutação* por uma aluna do 3º ano do Ensino Fundamental.

De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

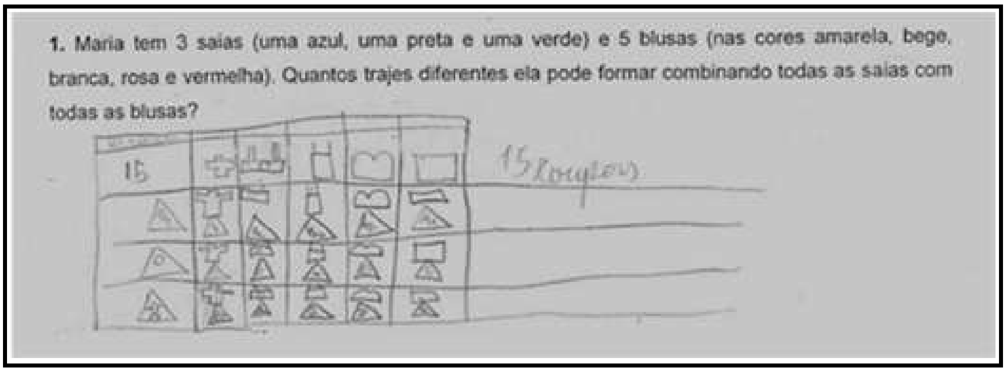


Fonte: Pessoa (2009), utilizado na pesquisa de Rocha (2011).

- **Produto Cartesiano** - *invariantes*: (1) dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) a ordem de disposição dos elementos não é determinante para gerar, ou não, novas possibilidades.

Um exemplo com uma possível solução, por meio de quadro, para o *produto cartesiano* pode ser vistos na Figura 4.

Figura 4. Protocolo de solução correta para um problema de *produto cartesiano* por uma aluna, do 4º ano do Ensino Fundamental.



Fonte: Pessoa (2009), utilizado na pesquisa de Rocha (2011).

Acreditamos que é importante que o professor dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental se aproprie de conceitos através da articulação entre *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Defendemos, portanto, que o professor dos Anos Iniciais tenha um domínio do conteúdo de Combinatória, de suas aplicações didáticas e do desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes e, para isso, acreditamos ser necessário um trabalho acerca desse conteúdo na formação inicial e continuada de professores.

Formação de professores dos Anos Iniciais em Combinatória

Diversos são os conhecimentos necessários aos professores que devem ser desenvolvidos em suas formações – inicial e continuada - bem como em suas práticas na escola. Estes conhecimentos se relacionam aos conteúdos a serem trabalhados, aos currículos ao longo da escolarização, ao ambiente escolar (macro e micro) e às relações dos estudantes com o saber e com outras pessoas.

Shulman (2005) nomeou diferentes categorias necessárias ao professor e, dentre elas, destacou o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo*. A primeira categoria se relaciona ao domínio dos conceitos a serem trabalhados em sala de aula e a segunda categoria é a que permeia o modo de pensar do professor sobre o ensino e se articula com as suas escolhas de ações pedagógicas.

Em relação à Matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) discutem e ampliam, a partir da análise da prática docente, os diferentes domínios do conhecimento do professor, na tentativa de delimitar quais os conhecimentos relacionados com o processo de ensino e aprendizagem desta área do conhecimento. A seguir, discutiremos alguns desses domínios em relação à Combinatória, posto que essa classificação permite uma melhor compreensão da organização do ensino desse conteúdo.

Com base nessa classificação, tem-se o *conhecimento especializado do conteúdo*. Este é um conhecimento matemático específico ao ensino. No caso da Combinatória, refere-se ao conhecimento do professor dos diferentes tipos de problemas combinatórios e das propriedades e relações que se mantêm para cada tipo de problema ao longo de distintos contextos.

No domínio *conhecimento do conteúdo e estudantes*, o professor precisa antecipar as ideias e possíveis equívocos dos estudantes. Portanto, reconhecer que problema combinatório seria mais difícil para os estudantes é uma característica desse domínio.

Já o domínio denominado *conhecimento do conteúdo e ensino* seria aquele necessário para determinar a escolha de uma estratégia que viabilize a superação das dificuldades dos estudantes em Combinatória ou a escolha de um recurso didático para esse fim.

Desse modo, podemos perceber a complexidade da sistematização dos conhecimentos de professores para a organização do ensino e da aprendizagem de um conceito matemático. Essa realidade traz inúmeros questionamentos para o ensino de Combinatória e a formação dos professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais. Até que ponto os conhecimentos discutidos acima influenciam na avaliação de atividades dos estudantes e nas proposições de atividades para ensinar Combinatória? Quais são, no âmbito do conhecimento do professor, as ideias e destrezas importantes para possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos estudantes? Que materiais e recursos auxiliam os professores desse nível de escolaridade no ensino de Combinatória?

Sobre os conhecimentos de professores e a relação com o ensino e aprendizagem de Combinatória, Costa (2003) investigou como os professores estão instrumentalizados no Ensino Fundamental para o trabalho com este conteúdo. Para isso, analisou a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de Matemática (SÃO PAULO, 1989), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL,1997) e alguns livros didáticos. Constatou que tanto os Parâmetros quanto as coleções analisadas enfatizam a contagem direta e o uso de representações mais concretas, para uso posterior do princípio multiplicativo. Observou também que não há a preocupação em definir *arranjo*, *permutação* e *combinação* nesse nível de ensino.

Costa (2003) propôs, ainda, dois questionários para 37 professores que participaram de um momento de formação continuada: o primeiro para identificar os participantes da pesquisa e o segundo para constatar as dificuldades dos professores em relação ao ensino de Combinatória. Verificou as seguintes dificuldades: a falta de um procedimento sistemático que os auxiliem na listagem de possibilidades, a ausência de justificativa na solução apresentada, a não utilização da árvore de possibilidades ou a sua utilização de forma inadequada e, ainda, a dificuldade em reconhecer nos agrupamentos a presença da ordenação quando esta é relevante, ou não. Essa pesquisa assinalou a necessidade de melhor preparo da formação matemática e didática dos professores que apresentam uma relação insatisfatória com as propriedades de Combinatória.

Ainda sobre o conhecimento de Combinatória de professores, Rocha e Ferraz (2011) analisaram a compreensão que professores com formação em Matemática e em Pedagogia possuem na resolução de problemas combinatórios. Para isso, as autoras reaplicaram o teste de Pessoa e Borba (2009) com 29 professores para avaliar o desempenho e as estratégias priorizadas na resolução desses problemas. Para a análise realizada, foram escolhidas como variáveis a formação inicial, os tipos de problemas combinatórios (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*) e a ordem de grandeza dos números envolvidos nesses problemas.

As autoras constataram que os professores formados em Pedagogia utilizaram mais frequentemente a estratégia de listagem na resolução de problemas combinatórios e que, quando a ordem de grandezas dos números envolvidos nos problemas é menor, não existe diferença significativa entre as médias de acertos entre professores formados em Pedagogia ou em Matemática. No entanto, quando o número de possibilidades aumenta, a diferença entre as médias de acerto entre os grupos de professores torna-se significativa.

Sobre a intervenção do professor em situações de ensino de problemas de *produto cartesiano*, Placha e Moro (2009) investigaram, além das soluções desses problemas apresentadas por cinco crianças da 3ª série do Ensino Fundamental (atual 4º ano), as formas que assumem as intervenções da pesquisadora, no papel de professora, durante as soluções das crianças. Da análise qualitativa dos dados gravados em vídeo foram identificadas as seguintes formas de intervenção da professora: orientadora, reorientadora, questionadora e instigadora.

Os resultados da análise das soluções dos participantes aos problemas, conforme os níveis e/ou subníveis de raciocínio combinatório nelas implicados e as formas de intervenção de ensino da professora, possibilitaram identificar mudanças dos níveis menos avançados para os mais avançados de solução, no decorrer das sessões, para todos os participantes. Ao que tudo indica, esses avanços de nível tiveram relação com as formas de intervenção da pesquisadora, no papel de professora.

Placha e Moro (2009) apresentaram indicações aos professores e pesquisadores da área da Educação Matemática, sobre a discussão dos problemas de *produto cartesiano*, recomendando a importância e a necessidade de os professores conhecerem o conceito matemático com o qual trabalham e os patamares de sua construção, para que possam auxiliar os estudantes nessa construção em situações de aprendizagem.

No contexto das discussões expostas, vê-se a necessidade de formação inicial e continuada que discuta a Combinatória a partir da natureza diferenciada desses problemas, da discussão de estratégias diferenciadas de resolução dos problemas e de seus possíveis erros, para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes dos Anos Iniciais. Rocha (2011) ressalta, ainda, que são poucas as pesquisas que tratam da formação de professores e o ensino de Combinatória, principalmente no que se refere ao Ensino Fundamental – Anos Iniciais e/ou Finais.

Ainda assim, as pesquisas apresentadas versam sobre diferentes aspectos relativos ao ensino de Combinatória: recursos didáticos (livros didáticos, objetos de aprendizagem, jogos matemáticos), dificuldades de compreensão dos estudantes e professores sobre problemas combinatórios e nos levam aos seguintes questionamentos: quais conhecimentos de Combinatória e de seu ensino são possuídos por professores e como um processo de formação continuada pode ampliar estas compreensões? No sentido de contribuir para obtenção de respostas a estes questionamentos, relatamos, a seguir, duas pesquisas realizadas. A primeira um estudo de sondagem (levantamento de conhecimentos docentes) e a segunda um estudo de intervenção (formação continuada proposta e vivenciada).

Estudo 1: Conhecimentos de professores dos Anos Iniciais sobre Combinatória e seu ensino

Discutiremos, aqui, os resultados parciais de uma pesquisa que objetivou analisar que conhecimentos os professores dos Anos Iniciais têm de Combinatória e seu ensino (ROCHA;

BORBA, 2010, 2013a, 2013b). Desse modo, focalizaram-se aspectos do *conhecimento de conteúdo* e do *conhecimento pedagógico* de Combinatória, fundamentados na discussão trazida por Shulman (1986) sobre o *knowledge base* (conhecimento base) na formação de professores, e sobre os diferentes domínios do conhecimento do professor de Matemática, discutidos por Ball, Thames e Phelps (2008).

Serão aqui descritas e analisadas entrevistas semiestruturadas realizadas com duas professoras que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. No Quadro 1, a seguir, estão descritas as características da formação das entrevistadas.

Quadro 1: Características das participantes da pesquisa

Códigos das Professoras	Formação	Anos de Ensino	Rede(s) na(s) qual(is) ensina
PAI_1	Pedagogia; Especialização em Orientação Educacional e em Gestão Educacional; Mestrado em andamento.	25 anos	Pública
PAI_2	Pedagogia; Mestrado em Educação.	12 anos	Pública, Particular

As entrevistas trataram de questões referentes aos tipos de problemas combinatórios e sobre as possíveis sugestões das professoras para a superação de dificuldades encontradas. Para avaliar conhecimentos – de *conteúdo* e *pedagógico* – das professoras, foram utilizados os problemas combinatórios e protocolos de estudantes retirados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009).

Quadro 2: Caracterização dos problemas utilizados na entrevista, retirados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009)

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas? ***Produto cartesiano* com maior número de possibilidades (PCM)**	**5.** Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante? **Arranjo com menor número de possibilidades (Am)** **6.** Para a festa de São João da escola, tem 3

2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR? **Permutação com maior número de possibilidades (PM)** **3.** As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? **Arranjo com maior número de possibilidades (AM)** **4.** Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar? **Combinação com maior número de possibilidades (CM)**	meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? ***Produto cartesiano* com menor número de possibilidades (PCm)** **7.** Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? **Combinação com menor número de possibilidades (Cm)** **8.** De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado? **Permutação com menor número de possibilidades (Pm)**

Foram discutidas as semelhanças e diferenças dos problemas combinatórios com base em Pessoa e Borba (2009). Nessa discussão, foram apresentados oito problemas combinatórios (Quadro 2), sem a classificação dos mesmos, para serem agrupados de acordo com as semelhanças encontradas.

Em relação aos agrupamentos dos problemas, entendemos que a distinção dos tipos de problemas combinatórios pelo professor é necessária, para que, assim, tenha possibilidade de auxiliar nas propostas de situações-problema diversificadas, além de verificar o desempenho dos estudantes nas soluções e acompanhar o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. Seguem-se os extratos das respostas das professoras e a análise dos mesmos.

> **PAI_1:** *Os problemas 2(PM) e 4(CM) eu posso agrupar porque são grupos de palavras. Trabalhar para formar também outras palavras. A ideia da Língua Portuguesa. Mas também posso agrupar os problemas 4(CM) e 6(PCm), a ideia de correspondência... posso agrupar os problemas 3(AM) e 7(Cm) porque são três alunos e aqui sairão os três primeiros colocados.*

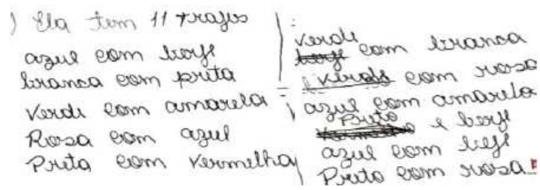
Nesse caso, a primeira professora (PAI_1) fez relações desses problemas com outras disciplinas, especificamente a Língua Portuguesa, e, também, com quantidades iguais. Ressaltamos, a partir do extrato, que a professora priorizou uma classificação com base na forma dos problemas, uma categorização possível, mas que não classifica os problemas combinatórios de acordo com o significado presente na situação.

PAI_2: *Nos problemas 2(PM) e 8(Pm) o sentido da pergunta, <u>o nível da pergunta é mais elementar...ele não faz comparativo entre grupos que os outros fazem</u>; os problemas 3(AM), 5(Am) e 7(Cm) todos eles dão uma quantidade específica de pessoas e de elementos e pede quantas maneiras diferentes esses elementos podem ser agrupados[...]os três têm essa mesma característica; os problemas 7(Cm) e 5(Am) estão até mais próximos que o 3(AM) na verdade, porque <u>estão trabalhando com a mesma</u> <u>quantidade, mas a pergunta tem a mesma característica;</u> os problemas 1(PCM), 6 (PCm) e 4 (CM); <u>aqui faz um comparativo entre grupos e a pergunta é mais elaborada.</u>*

Nesse extrato, a segunda professora (PAI_2) separou em três grupos os problemas combinatórios, demonstrando perceber diferenças mais significativas entre os problemas expostos. Apesar de ter agrupado os problemas de permutação corretamente, utilizou na justificativa a questão do enunciado como principal característica para a distinção dos problemas. Essa professora apresentou *conhecimento sobre o problema de produto cartesiano*, pois ela utilizou como critério de distinção entre os grupos propostos a ideia de *comparativos entre grupos*, discutindo sobre o número de conjuntos envolvidos nos problemas do tipo *produto cartesiano* apresentados, que, no caso, possuem dois conjuntos diferentes envolvidos na situação.

No momento seguinte da entrevista, analisamos a proposta de superação das dificuldades na resolução de problemas combinatórios apresentadas pelos estudantes, a partir de protocolos retirados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009). Na Figura 5, foi discutido um protocolo no qual o estudante não consegue fazer a listagem de todas as possibilidades de trajes, apresentando dificuldades no esgotamento de possibilidades.

Figura 5. Resolução incompleta de um problema de *produto cartesiano*

<table>
<tr>
<td>1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?</td>
<td>

ALUNO I</td>
</tr>
</table>

Fonte: Protocolo retirado da Pesquisa de Pessoa e Borba (2009)

A seguir, apresentamos extratos das professoras ao analisarem o protocolo.

PAI$_1$: *[...]Você vê que ele começa com o azul, depois pega blusa. Está difícil até de entender quem é saia e quem é blusa. Está faltando estratégia. Trabalho com outras questões dessa natureza e até mostrar a ele. Você utilizando assim você vai chegar ao ponto que ele vai esquecer e passar batido. Ele não tem a compreensão de quantas combinações se pode fazer entre saias e blusas.*

PAI$_2$: *O Aluno I vai ter que se deparar com outras estratégias. [...] A gente fazer trabalhos em grupo e exposição oral disso. Com o professor sistematizando as diferentes estratégias que os diferentes grupos fizeram, também ajuda o aluno a utilizar outras formas. O professor pode fazer até o comparativo, digamos: Gente que estratégia seria mais rápida? E efetivamente eficaz? Da melhor forma de concluir? O professor pode até expor depois, expor não, até fazer com que eles mesmos digam. Acho que essa seria uma estratégia mais interessante para não acontecer trocas. E, assim, acho que no chegar junto, mostrar, apresentar outro problema com a mesma estrutura, eu acho que isso é muito importante.*

Observamos, a partir desses extratos, que as professoras indicam a busca por um trabalho que priorize problemas de mesma natureza, mas com abordagens diferenciadas. A primeira professora (PAI$_1$) não mencionou o procedimento desse trabalho, entretanto, a segunda professora (PAI$_2$) detalhou o procedimento que propunha, trabalhando a partir da resolução de problemas em grupos e na comparação das estratégias explicitadas pelos estudantes, de modo que possibilitasse trocas de conhecimentos e discussão entre os pares.

A segunda professora (PAI$_2$) comentou, ainda:

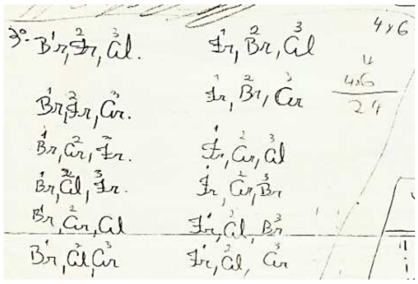
PAI$_2$: *Às vezes o professor diversifica demais a estrutura do enunciado e as crianças nas séries iniciais elas têm dificuldade, elas têm que vivenciar mais aquela mesma estrutura, mas com outros conteúdos, digamos assim.*

Dessa forma, constatamos na fala da Professora PAI$_2$ uma discussão sobre os diferentes papéis dos professores, principalmente em relação ao planejamento e escolhas das atividades. Verificamos, a partir desse fragmento da Professora PAI$_2$, um co*nhecimento pedagógico de Matemática*, ligado à resolução de problemas com os estudantes, o qual está diretamente imbricado com a natureza do ensino de Combinatória.

Ressaltamos, porém, que concordamos que, de início, variar demasiadamente as situações pode dificultar o estabelecimento de relação entre problemas combinatórios de mesma natureza, mas defendemos a importância dos estudantes terem contato com situações de naturezas variadas, de modo a poder reconhecer semelhanças e diferenças entre os tipos de problemas.

Nesse estudo, ainda, observamos a análise de situações corretas pelas professoras, quando se pediu para analisar a Figura 6, que segue.

Figura 6: Resolução de Problema de Arranjo

3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	**ALUNO E**  

Fonte: Protocolo retirado da pesquisa de Pessoa e Borba (2009)

Obtivemos, então, as considerações apresentadas sobre a estratégia do Aluno E pela Professora PAI_1:

> **PAI_1:** *O Aluno E, não entendi como ele chegou a essa conta. Esse aqui. Eu não sei como ele chegou a esse número 24 jeitos [lê as possibilidades]....<u>ele não está compreendendo não...Ele teve o conhecimento dele, mas acho que esse conhecimento priorizou só o Brasil e França, ele direcionou o resultado</u>. [....] Aluno E eu não compreendi a estratégia dele não ....*

As considerações dessa professora parecem decorrer da falta de alguns elementos relativos à sua compreensão do raciocínio combinatório, ou seja, detectamos certa ausência do que Ball, Thames e Phelps (2008) indicam como domínio referente ao *conhecimento especializado do conteúdo*. Nesse sentido, Grossman, Wilson e Shulman (2005) consideram que o *conhecimento do conteúdo*, ou a ausência dele "pode afetar como os professores criticam os livros textos, como selecionam o material pra ensinar, como estruturam seus cursos e como conduzem a instrução" (p.13). Decorre dessas considerações que o *conhecimento de Combinatória*, ou falta dele por parte do professor, pode comprometer a análise ou avaliação de estratégias evidenciadas pelos estudantes.

Nesse primeiro estudo aqui relatado, assinalamos a condução de um trabalho que permita o desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos estudantes. Para tal, constatamos ser necessário um maior nível de conhecimento das estruturas combinatórias, das estratégias evidenciadas e do conhecimento dos estudantes, ou seja, há necessidade dos domínios para o professor indicados por Ball, Thames e Phelps (2008). Esse resultado pode colaborar no planejamento e organização de práticas de formação inicial e continuada de professores dos Anos Iniciais.

A seguir, apresentamos um segundo estudo, voltado para a formação continuada em ensino de Combinatória para professores dos Anos Iniciais de escolarização.

Estudo 2: Uma formação continuada em Combinatória

O segundo estudo teve por objetivo analisar o efeito no conhecimento dos professores de uma *formação continuada em Combinatória*, baseada na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1986).

A pesquisa foi realizada com professoras dos Anos Iniciais de uma escola pública do Recife. Antes do processo de formação, foi realizada uma entrevista semiestruturada com as professoras, a fim de verificar quais seus conhecimentos iniciais acerca da Combinatória. Em seguida, foi realizada uma formação, na qual foi enfatizada a importância da análise de *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* no ensino da Combinatória.

A formação teve o primeiro encontro voltado para a discussão e reflexão da Combinatória para ser trabalhada em sala de aula à luz da Teoria de Vergnaud, abordando as *situações* e *invariantes* combinatórios. O segundo encontro abordou as diferentes *representações simbólicas* possíveis para a resolução dos problemas combinatórios, assim como a ideia de sistematização dos procedimentos de resolução e generalização. No terceiro encontro, em conjunto com os professores, houve um planejamento de aula, abordando o tema Combinatória para que fosse aplicado em sala de aula e, no quarto encontro, as professoras trouxeram suas análises e discussões de sua prática diante de todo o processo realizado durante a formação. Após o último encontro, foram realizadas entrevistas, buscando constatar qual compreensão final da Combinatória se observou entre as professoras, após suas participações no processo de formação vivenciado. As entrevistas realizadas foram baseadas em Rocha (2011), o primeiro estudo descrito neste artigo.

Apresentamos, a seguir, as análises efetuadas a partir das entrevistas de uma das professoras participantes da formação continuada, a qual foi escolhida por ter participado de todos os momentos de formação. A mesma possui Licenciatura em Pedagogia e em Física e duas especializações, além de possuir 19 anos de docência.

A compreensão inicial da professora, com relação ao conteúdo abordado, era de que não é possível trabalhar a Combinatória no 1º ano do Ensino Fundamental (turma que lecionava na época da entrevista). Apesar desta compreensão inicial, a professora mostra, em algumas falas, que acredita que quanto mais cedo um conteúdo for apresentado ao estudante, mais fácil e rápida será sua apreensão.

Na diferenciação e classificação dos problemas combinatórios, antes da formação continuada, a professora demonstrou conhecer somente um tipo de problema combinatório, o *produto cartesiano*, apesar de chamá-lo de *combinação*, não reconhecendo a *combinação* como outro tipo de problema combinatório.

Antes da formação continuada, a professora também não reconheceu as diferentes *representações* apresentadas em protocolos, e acreditava que havia apenas duas formas de *representação* que os estudantes (turma do 1º ano do Ensino Fundamental) podiam utilizar para resolver problemas combinatórios, sendo elas: a forma escrita, utilizando-se do desenho, e o material manipulativo.

Após o processo de formação, a professora passou a perceber e distinguir todas as *situações* combinatórias e seus respectivos *invariantes* (relações e propriedades). Quanto às possíveis *representações simbólicas* para o ensino e a aprendizagem da Combinatória, a professora permaneceu reconhecendo as duas formas acima citadas para serem utilizadas com estudantes, o que vai de acordo com Santos, Matias e Pessoa (2011), ao revelarem que o uso de material manipulativo viabiliza o ensino da Combinatória, especificamente para estudantes em início de escolarização. As autoras ressaltam a importância de trabalhar com material manipulativo esses conceitos que formalmente não são trabalhados na Educação Infantil, contudo, refletem, ainda, sobre o uso de outros tipos de representações, como a listagem.

Assim como na entrevista inicial, na entrevista final a professora também analisou protocolos de estudantes sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos Anos Iniciais. Diferentemente da entrevista inicial, após a formação, a professora conseguiu realizar uma análise mais aprofundada dos possíveis avanços dos estudantes, citando a organização da resposta como um avanço dos mesmos.

Os dados analisados apontam para a importância de processos de formação continuada em Combinatória, uma vez que nos mostram que há uma limitação com relação ao *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento didático desse conteúdo* por parte de professores dos Anos Iniciais.

Apesar da professora inicialmente acreditar não ser possível trabalhar este conteúdo com estudantes do 1º ano do Ensino Fundamental, Pessoa e Borba (2009) defendem ser possível o trabalho com a Combinatória desde os Anos Iniciais e Matias, Santos e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012) mostram que estudantes da Educação Infantil já são capazes de perceber alguns dos *invariantes* de problemas combinatórios. Após o processo vivenciado, a professora também passou a pensar nessa possibilidade de trabalho e foi possível verificar que há um reconhecimento por parte da mesma da evolução do raciocínio combinatório de estudantes, reconhecendo a sistematização como um avanço dos mesmos.

Esses resultados nos mostram que a formação continuada em Combinatória é uma ação importante, pois ajudará na reflexão sobre esse conteúdo que deve ser trabalhado desde os Anos Iniciais, tanto por já ser orientado pelos PCN desde 1997, quanto por estarem sendo abordados nos livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais (BARRETO; BORBA, 2010). Entretanto, este conteúdo tem sido negligenciado na prática, provavelmente pela falta de conhecimento aprofundado de alguns professores em relação à Combinatória.

Considerações Finais

Neste artigo, discutimos a importância do estudo da Combinatória no desenvolvimento do raciocínio de estudantes e defendemos que desde os Anos Iniciais é indicado tratar situações combinatórias – com problemas variados e apropriados para esta fase de escolarização. Estudos anteriores evidenciaram que desde a Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental crianças podem ser bem sucedidas na resolução de problemas combinatórios, por meio de representações simbólicas apropriadas (como material manipulativo, desenhos e listagens), desde que as situações envolvam quantidades de possibilidades menores.

No artigo também discutimos sobre conhecimentos necessários a professores para o ensino da Combinatória: os diferentes tipos de problemas combinatórios; suas propriedades e relações envolvidas; processos de desenvolvimento do raciocínio combinatório; possibilidades de resolução de situações combinatórias; limitações de compreensão dos estudantes; e estratégias de ensino para superação de dificuldades e mais amplo desenvolvimento.

Foram apresentados dois estudos que, junto a investigações anteriores, evidenciam o conhecimento limitado de alguns professores dos Anos Iniciais referentes a situações combinatórias, mas que apontam sobre possibilidades de formação para prepararem os professores a um melhor ensino da Combinatória. O modo particular aqui apresentado foi o de chamar a atenção de professores das *situações que dão significado à Combinatória* (diferentes tipos de problemas), dos *invariantes* (relações e propriedades das situações combinatórias) e das variadas formas de *representação simbólica* que podem ser utilizadas na resolução de problemas combinatórios.

Dessa forma, acreditamos que processos de formação – iniciais e continuadas – podem auxiliar professores a uma melhor compreensão da Combinatória – tanto em seus aspectos de conteúdo quanto referentes ao ensino e à aprendizagem da mesma. O adequado preparo de professores poderá, em consequência, possibilitar um rico trabalho em sala de aula e ajudar estudantes a desenvolverem um amplo conhecimento de situações combinatórias e de outras naturezas.

*PhD pela Oxford Brookes University – Reino Unido, docente da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, resrborba@gmail.com
**Doutora em Educação, docente da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, cristianepessoa74@gmail.com
***Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, docente da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, tiane_rocha@yahoo.com.br

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

****Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, adryanne@gmail.com

Referências

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de softwares. **Alexandria** (UFSC), v.6, p. 113-140, 2013

BALL, Deborah. THAMES, Mark. PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? In: **Journal of Teacher Education**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais...** 11º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2013.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. *In*:SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria. (Org.). **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática.** 1ed. Recife: Universitária, 2012, v., p. 89-138.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: **Anais...** 3º Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

BORBA, Rute; ARAÚJO, Ana Cristina; BRAZ, Flávia. A compreensão por alunos do ensino médio de problemas combinatórios condicionais. In: **Anais...** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

COSTA, Claudinei. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.** São Paulo, 2003, 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

GROSSMAN, Pamela L.; WILSON, Suzzane M.; SHULMAN, Lee S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**, 9, 2 (2005)

LIMA, Itatiane; AMORIM, Natália; PESSOA, Cristiane. Aulas de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos: como ocorrem na prática? **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia** — UFPE. Recife, 2013.

MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. In: **Anais...** 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: 2011.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática.** Recife: SE, 2012.

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? In: **Anais...** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36). Taiwan, 2012.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a serie. **Zetetike** – Cempem – FE – Unicamp – v17, n.31 – jan/jun – 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. In: **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana.** Recife: V.1, n.1. 2010.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. GATO, GOTA, TOGA... A Combinatória no 5º ano do ensino fundamental. **Revista Unopar Científica Ciências Humanas e Educação. Paraná**: V. 13, n.2. 2012.

PLACHA, Kelly Cristine; MORO, Maria Lucia Faria. Problemas de produto cartesiano, raciocínio combinatório e intervenção do professor. **Psicologia: Teoria e Pesquisa.** Brasília, v. 25, n. 1, Mar. 2009. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-37722009000100002&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 26 de Novembro de 2013.

ROCHA, Cristiane. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos.** Dissertação. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2011.

ROCHA, Cristiane; BORBA, Rute. Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios: diferentes olhares. In: **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

ROCHA, Cristiane; BORBA, Rute. Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios. In: **Anais...** 17º Encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Vitória: 2013a.

ROCHA, Cristiane; BORBA, Rute. Reflexões de docentes sobre o ensino de combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. **Anais...** 1º Jornadas Virtuales en Ditáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Granada: 2013b.

ROCHA, Cristiane; FERRAZ, Martha. Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios. In: **Anais...** 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: 2011.

SANTOS, Missilane; MATIAS, Patrícia; PESSOA, Cristiane. O raciocínio combinatório na Educação Infantil. **Cadernos de TCC do CE**-UFPE. 2011.

SÃO PAULO. (ESTADO) Secretaria da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º grau**, 2ª ed, São Paulo: SE/CENP, 1989.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher.** V.15. 1986.

_________. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado.** V 9,2, 2005 (p.1-30)

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1. 1986.