ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p145-163

Relações pessoais e relações institucionais com o teorema de Pitágoras

Personal relationships and Institution relationship with Pythagoras' theorem

____

ALEXANDRE LUIS DE SOUZA BARROS[1]
PAULA MOREIRA BALTAR BELLEMAIN[2]

Resumo

Durante a realização da pesquisa de Doutorado, identificamos que o Teorema de Pitágoras é utilizado para justificar técnicas de construção de ângulos retos em terrenos planos, quando se utiliza trena e balizas. Essa realidade proporciona aos alunos uma razão de ser para o estudo desse saber matemático. O objetivo desse texto é discutir a relação institucional e a relação pessoal para o referido saber. Propomos duas tarefas para alunos do 1º ano do ensino médio, ambas estão relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Utilizamos a noção de praxeologia para analisar as relações institucionais presentes em Brasil (1998) e a noção de praxeologia pessoal na análise das técnicas apresentadas pelos alunos. Os resultados apresentaram técnicas pessoais diferentes daquelas preconizadas pela instituição ensino de matemática.

Palavras-chave: *Teorema de Pitágoras, Praxeologia pessoal, Relação institucional.*

Abstract

During the doctoral research, we identified that the Pythagorean Theorem is used to justify techniques of construction of right angles in flat lands, when using trena and beacons. This reality gives students a raison d'être for the study of this mathematical knowledge. The purpose of this text is to discuss the institutional relationship and the personal relation to this knowledge. We propose two tasks for students in the 1st year of high school, both of which are related to the Pythagorean Theorem. We use the notion of praxeology to analyze the institutional relations present in Brazil (1998) and the notion of personal praxeology in the analysis of the techniques presented by the students. The results presented personal techniques different from those recommended by the teaching institution of mathematics.

Keywords: Pythagorean Theorem. Personal praxeology. Institution relationship.

[1] Doutor em Educação Matemática e Tecnológica. Professor do Colégio Dom Agostinho Ikas da Universidade Federal Rural de Pernambuco - alex.luis.barros@gmail.com
[2] Doutora em Didática das Disciplinas Científicas - especialidade Didática da Matemática pela Universidade de Grenoble I – França. Professora da Universidade Federal de Pernambuco – pmbaltar@gmail.com

Introdução

Os saberes matemáticos não são estudados apenas no componente curricular matemática. Ao estudar física ou química no ensino médio é preciso muito frequentemente lidar com objetos matemáticos, como funções, unidades de medida, área, volume, entre outros. Do mesmo modo, saberes matemáticos estão presentes nos cursos da educação profissional.

Esse texto é originado dos resultados de uma pesquisa de Doutorado, nossa inquietação inicial surgiu das reflexões sobre as dificuldades dos alunos na utilização de saberes matemáticos, o que nos conduziu a refletir sobre: como são vivenciados os saberes na formação técnica de nível médio? Esse é um questionamento que se insere na problemática ecológica discutida pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) ao interrogar as condições de vida dos saberes matemáticos.

Desenvolvida por Chevallard e seus colaboradores, a TAD situa a atividade matemática, e, portanto, a atividade de estudo da matemática, no conjunto de atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999). Segundo Chevallard e seus colaboradores é um modelo epistemológico para o estudo dos processos de produção e circulação de saberes. Desde Romo-Vazquez (2009), observamos uma intensificação de pesquisas que adotam a TAD para investigar contextos de formação profissional.

Enquanto percurso metodológico da pesquisa, realizamos observações das aulas do componente curricular topografia de um curso técnico em Agropecuária, ofertados para estudantes do ensino médio. Identificamos vários saberes matemáticos vivenciados, entretanto para este artigo, delimitamos nossas reflexões sobre o Teorema de Pitágoras, utilizado para justificar técnicas de construção de ângulos retos em terrenos planos quando são utilizadas a trena e balizas.

Observado o uso do Teorema de Pitágoras, surgiram outros questionamentos sobre a relação institucional e a relação pessoal referente ao saber em jogo. Assim, utilizamos a noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999) para analisar os elementos da relação institucional preconizada em Brasil (1998). Em seguida, propomos duas atividades para alunos do 1º ano do ensino médio, ambos referentes ao Teorema de Pitágoras. Apresentamos uma análise a priori baseada na dialética objetos ostensivos/não-ostensivos (CHEVALLARD, 1994). Utilizamos a noção de praxeologia pessoal, desenvolvida por Croset (2009) e Chaachoua (2010) para analisar os protocolos dos alunos.

Teoria Antropológica do Didático

Um saber não existe “em um vácuo”, ele aparece em determinado momento histórico, em uma determinada sociedade, ou seja, todo saber é saber de uma instituição. Muitos objetos são estudados na escola, outros não. Uma noção fundamental na TAD é a de pessoa, formada pelo par indivíduo X e o sistema de relações pessoais de X num dado momento da sua história, pois ao longo da sua vida, seu sistema muda.

O universo cognitivo do indivíduo é o conjunto constituído por todos os objetos com os quais o indivíduo interage e todas as relações pessoais com esses objetos, ou seja, a maneira que X conhece O. Nestes termos, o cognitivo não deve ser visto somente como um adjetivo num sentido de intelecto, pois temos relações pessoais com máquinas, móveis, eletrodomésticos, etc. Outra noção fundamental é a de instituição I, introduzida para explicar a formação e evolução do universo cognitivo. Todo indivíduo é sempre sujeito de uma instituição I. Esta é apresentada como um dispositivo social que permite, e impõe, aos seus sujeitos um modo de fazer e pensar próprio. Os sujeitos de uma instituição são as pessoas que vivem e ocupam diversas posições, denotadas pelo símbolo p, oferecidas em I (CHEVALLARD, 2002).

Chevallard (2002) afirma que os sujeitos de uma instituição são as pessoas que vivem e ocupam diversas posições, denotadas pelo símbolo p, oferecidas em I. Por exemplo, temos como sujeitos da instituição escola: professor, aluno, coordenador, etc. Considerar que esses atores ocupam diferentes posições, diz respeito àquilo que a instituição espera deles enquanto ocupantes dessas posições, ou seja, o que a escola espera de um professor que leciona matemática para turma de ensino médio? O que a escola espera de um aluno de um curso técnico?

Dado um objeto O, uma instituição I e uma posição p; a relação institucional com objeto O na posição p diz respeito àquilo que a instituição espera que os sujeitos ocupantes dessa posição saibam sobre O e que sejam capazes de fazer com esse objeto, bem como o modo como espera que seus sujeitos realizem certas tarefas. Por exemplo, a relação institucional vai modelar o que e como a escola espera que um professor que leciona matemática para uma turma de ensino médio regular saiba e seja capaz de fazer ou o que espera que um aluno de um curso técnico em agropecuária saiba e seja capaz de fazer. Um indivíduo é considerado um bom sujeito da instituição se há um grau elevado de conformidade entre o que ele faz e como faz e as expectativas da instituição para os sujeitos que ocupam sua posição.

Ressaltamos que essa conformidade não se refere a uma passividade do sujeito com respeito à instituição. A relação institucional numa determinada posição é dinâmica, então ao se dizer bom sujeito, não se trata de um julgamento de valor, é somente uma avaliação de conformidade. O fato de os sujeitos interferirem nas instituições às quais estão sujeitados, faz com que sejam atores das modificações das relações institucionais.

Uma instituição admite outras instituições no seu interior, vejamos o seguinte caso, a escola é uma instituição de estudo de saberes e possui diferentes cursos, considerados como instituições nela inseridas. O professor pode ser visto como representante, mandatário de uma instituição. Em certa medida, ele representa a maneira de fazer e pensar próprios do componente curricular que ele ensina.

No âmbito da TAD, para poder modelar as relações institucionais e as relações pessoais Chevallard (1999) propõe a noção de praxeologia. Portanto essa noção será um instrumental teórico metodológico utilizado para modelar tais relações. Um postulado da TAD é que toda atividade humana pode ser modelizada sob um modelo resumido pela palavra praxeologia, a qual é originada a partir de dois termos gregos "práxis e logos", que correspondem respectivamente às dimensões prática e teórica. Nessa perspectiva, a atividade de estudo da matemática é considerada como atividade humana, o que justifica, segundo nosso entendimento, o termo antropológico. Uma praxeologia é uma organização constituída por quatro componentes: tipo de tarefas, técnica, tecnologia e teoria.

As noções solidárias de tarefa t e tipo de tarefa T estão na raiz da noção de praxeologia. Quando t pertence a T, dizemos que a tarefa t pode ser caracterizada segundo um tipo de tarefa T. As atividades propostas em sala de aula, ou nos livros didáticos, podem ser vistas como exemplo de tarefa t.

Nos tipos de tarefas T, o objeto está bem especificado. Calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3cm e 4cm é uma tarefa do tipo "calcular a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo dadas as medidas dos seus catetos". Por sua vez, esse tipo de tarefa faz parte de um gênero de tarefa - calcular – do qual também fazem parte, vários outros tipos de tarefas como: calcular a área de um retângulo dados os comprimentos de dois lados adjacentes; calcular as raízes de uma equação de segundo grau; calcular quantidade de diagonais de um polígono, calcular o determinante de uma matriz; calcular a derivada de uma função, etc. Portanto, a tarefa é mais precisa. O tipo de tarefa tem um grau de precisão intermediário porque agrupa tarefas, mas ao mesmo tempo faz parte de um gênero de tarefa que é algo mais geral.

As tarefas do tipo T serão respondidas ou executadas por meio de procedimentos, chamados técnica τ. Nesses termos, uma praxeologia relativa ao tipo de tarefa T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a T constituindo assim o bloco [T/τ], chamado bloco prático-técnico (CHEVALLARD, 1999).

De que é feita uma dada técnica? Quais ingredientes a compõe? Na observação desse elemento da atividade humana, Chevallard (1994) estabelece uma fundamental distinção entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não ostensivos. São denominados de ostensivos aqueles objetos que possuem uma forma material. Por exemplo, um lápis, mas também os ostensivos gestuais (gestos); ostensivos discursivos (as palavras e mais geralmente o discurso); ostensivos gráficos (diagramas, desenhos e gráficos) e ostensivos escriturais (escritos e formalismos). Contrariamente aos ostensivos, os não ostensivos são as noções, conceitos e ideias podem somente ser evocados e manipulados através dos ostensivos associados.

Uma técnica τ terá êxito sobre uma parte das tarefas do tipo T. Não são necessariamente algorítmicas, mas serão explicadas, justificadas e produzidas por uma tecnologia θ esclarecida e apoiada por uma teoria Θ; que formam o bloco tecnológico-teórico [θ/Θ]. Esses quatro componentes: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ] compõem uma praxeologia matemática pontual, pois está organizada em torno de um único tipo de tarefa.

A tecnologia θ é o discurso que objetiva justificar racionalmente a técnica. Chevallard (1999) afirma que existe na técnica a presença de um embrião da tecnologia. A teoria Θ tem uma relação com a tecnologia θ, semelhante ao papel que esta tem com a técnica, em um nível superior de justificação. O discurso da tecnologia tem afirmações, explícitas ou não da razão. Uma praxeologia é uma construção social que vive de maneira estável em determinada instituição I.

A noção de praxeologia pessoal

Desde o início do desenvolvimento da TAD, o conhecimento de um aluno é considerado por meio do conceito de relação com o saber. Alguns estudos têm utilizado a noção de praxeologia pessoal para caracterizar as relações pessoais dos sujeitos. Bittar e Chaachoua (2016) trazem reflexões sobre a evolução dessa consideração, apresentando um resgate histórico dividido em três períodos. E por que estudar o conhecimento do aluno?

Segundo os autores, os sujeitos são estudados para que se entendam melhor as instituições às quais eles estão assujeitados, bem como desenvolver ou testar novas praxeologias. Todavia, a praxeologia é utilizada para descrever relações pessoais em conformidade com as relações institucionais (BITTAR; CHAACHOUA, 2016).

Quando a relação pessoal não apresentava conformidade, as pesquisas utilizavam outros quadros ou conceitos não abordados pela TAD. Essa perspectiva é reformulada no terceiro período, correspondente às pesquisas realizadas a partir de 2006. O modelo praxeológico é utilizado para descrever a relação pessoal do sujeito com os objetos, mesmo quando ela não está em conformidade com a relação institucional. Nesse último período, houve uma mudança no olhar dado ao erro,

> No estudo de Nguyen (2006) o erro é considerado como um mau funcionamento de uma técnica institucional. Na sequência dessa tese, Croset & Chaachoua (2010) procuraram interpretar o erro como um componente de uma técnica pessoal do estudante [...] (BITTAR; CHAACHOUA, 2016, p. 15).

Nessa perspectiva, a técnica pode ser matematicamente válida ou não, pode estar em conformidade com as expectativas ou não. Bittar e Chaachoua (2016, p. 15) refletem que veem "[...] o surgimento de um terceiro período favorável à inclusão do sujeito cognitivo e, em particular, o erro como um objeto de estudo como tal na TAD."

A noção de praxeologia-em-ação é proposta inicialmente por Croset (2009), em seguida por Chaachoua (2010) denominando-a de praxeologia pessoal que prefere utilizar essa denominação, pois faz analogia a relação pessoal.[3]

> Assim, a relação institucional $R_I(p,O)$ do sujeito na posição p de aluno ao objeto O no seio de uma instituição I é descrita pelas praxeologias institucionais. E a relação pessoal $Rp(e^*/I,O)$ de um aluno e*, assujeitado à uma instituição I, ao objeto O é descrita pelas praxeologias pessoais. (CHAACHOUA, 2010, p. 52, tradução nossa)[4]

Optamos por adotar a mesma terminologia de Chaachoua (2010). A praxeologia pessoal é composta por três elementos. O primeiro é o tipo de tarefa pessoal que é o conjunto de tarefas que o sujeito reconhece como similares provocando aplicação de uma mesma técnica. Dois tipos de tarefas pessoais serão diferentes quando emanam do sujeito técnicas diferentes. Essa diferenciação não corresponde necessariamente àquela da instituição.

---

[3] Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de *praxéologie personnelle* à la place de *praxéologie-en-acte* par analogie à la notion du rapport personnel. (CHAACHOUA, 2010, p. 51)

[4] Original em francês: Ainsi, le rapport institutionnel $R_I(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institition I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $Rp(e^*/I,O)$ d'un élève e*, assujetti à une institution I, à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles (CHAACHOUA, 2010, p. 52).

O segundo elemento é a técnica pessoal que pode ser errônea, correta, legitimada ou não pela instituição. Ela deve apresentar certa estabilidade na sua utilização para ser considerada como técnica de resolução. Dessa forma, evita-se considerar os erros por falta de atenção ou um descuido pontual como exemplos de uma técnica pessoal. Esses dois componentes formam a práxis pessoal. Por fim, tem-se a tecnologia pessoal que explica ou não, governa e legitima a utilização da técnica pessoal. Essa tecnologia nem sempre é consciente ou explicitável (CROSET, 2009).

No contexto brasileiro, embora não utilize as terminologias apresentadas mais acima, observamos na pesquisa de Menezes (2010) várias aproximações às noções discutidas nos parágrafos anteriores. Inicialmente, as temáticas das pesquisas de Croset (2009) e Menezes (2010) são referentes ao ensino de conteúdos da álgebra.

A tese inicial de Menezes (2010) foi identificar as diferenças entre o saber que é ensinado pelo professor e o saber efetivamente aprendido pelo aluno, fato que segundo o pesquisador caracterizaria uma nova transposição de saberes em sala de aula.

> Porém, com o desenvolvimento da pesquisa, verificamos que não seria possível identificarmos o saber efetivamente aprendido pelo aluno, mas, sim, elementos que indicassem para uma nova organização no saber ensinado pelo professor. Uma nova ordem, estabelecida por cada aluno, que contaria com o resgate de conhecimentos prévios que dessem mais sentido e segurança para eles na resolução das equações de 2º grau, ou seja, uma nova *práxis*, a *práxis* do aluno (Menezes, 2010, p. 141).

Garciadiego (2002) reflete a respeito das escolhas didáticas do professor se faz para o saber Teorema de Pitágoras. Embora não façam menção às relações pessoais do sujeito, trouxemos algumas considerações desses trabalhos. Esse autor discute demonstrações do Teorema de Pitágoras, no que diz respeito à simplicidade de algumas e complexidade de outras, refletindo sobre possíveis indagações dos alunos diante dessas diferentes demonstrações. Afirma que ao escolher uma demonstração mais simples podemos deixar de abordar outros saberes, assim simplificar o ensino pode trazer consequências não muito boas.

Durante a realização das atividades diagnósticas com alunos do 9º ano do ensino fundamental, Santos e Viana (2011, p. 8) identificaram dificuldade dos alunos em reconhecer um triângulo retângulo em posição não prototípica. Segundo as autoras, a dificuldade de identificar o triângulo retângulo é ocasionada pela dificuldade na identificação do ângulo reto.

Observamos um exemplo onde o enriquecimento de uma relação pessoal, no caso com o ângulo reto, estrutura outra relação pessoal, agora com o triângulo retângulo, ambas ancoradas nos gêneros: identificar ou reconhecer. Diante dessas discussões, buscaremos caracterizar as relações institucionais por meio da análise das recomendações curriculares para o tema em questão.

Relações institucionais preconizadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o saber Teorema de Pitágoras

Não identificamos muitas menções ao o Teorema de Pitágoras em Brasil (1998). As recomendações refletem sobre o fato de apresentá-lo aos alunos em situações experimentais não se constituem como provas matemáticas para o Teorema.

Brasil (1998) se comenta que as situações com materiais concretos, por exemplo, quebra cabeça, podem ser desencadeadoras de conjecturas e processos que levem a maior formalidade. Justificativas com base na congruência de figuras planas, princípio da aditividade das áreas das figuras, e posteriormente, quando tiverem se apropriado dos saberes: semelhança e relações métricas dos triângulos, os alunos poderão demonstrar o Teorema de Pitágoras. Identificamos em Brasil (1998, p. 89), enquanto conceitos e procedimentos: "Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras." Segundo tais recomendações o Teorema de Pitágoras está localizado no domínio da Geometria, chamado de Espaço e Forma. As breves considerações presentes em Brasil (1998) nos fornecem indícios de possíveis atividades: aplicar o Teorema de Pitágoras; verificar experimentalmente o Teorema de Pitágoras. Entretanto não temos subsídios para detalhamento na caracterização da relação da instituição ensino de matemática com o objeto Teorema de Pitágoras.

Elementos da relação pessoal observados nas aulas de Topografia

Trazemos um breve trecho da aula de topografia numa turma de curso técnico. Os alunos são egressos do ensino fundamental. Nesse trecho[5] destacamos que a turma enuncia corretamente o Teorema de Pitágoras, identifica adequadamente a hipotenusa e os catetos quando o triângulo está na posição prototípica. Entretanto não menciona um exemplo de uma terna que represente um triângulo retângulo.

[5] G – indica algo de movimento realizado pelo professor. P – indica o professor. I – investigador; E – estudante. Es – turma (fala simultânea).

G: O professor desenha um triângulo retângulo em posição prototípica com vértices A, B (vértice com ângulo reto) e C enquanto fala.

P: Então veja só, se eu tenho o triângulo retângulo, e quero um ângulo de 90º aqui, o Teorema de Pitágoras nos diz o quê? Esse lado maior é o quê?

Es: Hipotenusa.

G: O professor marca o ângulo agudo formado pelo lado horizontal e a hipotenusa, e pergunta.

P: E aqui é o quê?

E3: Cateto Oposto.

[...]P: Hã?

E3: Cateto adjacente.

P: Sim. E esse outro é o quê?

E3: Cateto adjacente.

P: Estão lembrados disso?

E3: Eu me lembrei agora.

I: Tem algum triângulo que vocês conhecem com medidas que dê aquilo que o professor está falando?

E: Triângulo equilátero?

I: Colocando as medidas, esse cateto medindo tanto, esse outro cateto medindo tanto e a hipotenusa medindo tanto.

E: Um triângulo retângulo mesmo.

P: Assim com medidas, por exemplo: 3...2...10

Es: Há!

I: Então, algum triângulo que você diga: esse eu sei que é retângulo, ou esse eu lembro que é retângulo.

Obs: Os alunos respondem: lembro não; um aluno diz: 4, 6, 8.

P: ... 4, 6 e 8 está perto, mas não é não. Olha a fórmula não é essa? A de Pitágoras? Hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos, então quais são os números que eu substituo aqui e dá certinho?

E: 10... 4, 6 e 10?

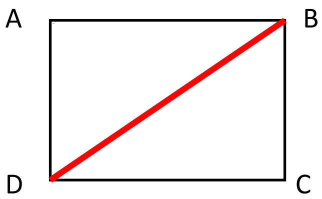
P: Não. Geralmente, eu na Topografia trabalho com esses números: a hipotenusa vale cinco, o cateto adjacente mede quatro e aqui três. Três, quatro e cinco. [...]

Os dados apresentados no trecho acima, nos fornecem indícios que os alunos não conseguem construir um triângulo retângulo ou mesmo utilizar o Teorema de Pitágoras como propriedade que confirme se dadas três medidas quaisquer, elas possam representar lados de um triângulo retângulo. Nesses termos, os alunos não caracterizam um triângulo retângulo por meio do Teorema de Pitágoras, ou seja, o trecho nos aponta indício que o objeto ostensivo: triângulo retângulo que foi desenhado pelo professor, não evoca o objeto não ostensivo: a noção do Teorema de Pitágoras.

Atividade de Sondagem

Observamos aulas de Topografia, identificamos saberes matemáticos vivenciados nesse componente curricular. Retornamos um ano depois e propomos a turma do 1º ano do curso técnico em agropecuária, seis atividades. Dessas, duas tratavam do Teorema de Pitágoras. Os alunos são egressos do ensino fundamental. A primeira atividade foi: Determine o comprimento da diagonal DB do retângulo ABCD. As medidas dos lados são: AB = CD = 6 cm; AD = BC = 8 cm.

Figura 1 – Retângulo utilizado na primeira atividade de sondagem



Fonte: Autores

Essa tarefa pode ser descrita como: determinar o comprimento da diagonal de um retângulo de lados 6 cm e 8 cm. Embora o enunciado enforme que o lado maior tenha 6 cm de comprimento e o menor 8 cm, esse erro não interferiu na resposta, bem como não foi mencionado pelos alunos. Nessa resolução, escreveremos a unidade de medida apenas no final dos cálculos, assim procuramos manter um hábito comum nas aulas de topografia. A resolução prevista, ou seja, a descrição da técnica: reconhecer que o triângulo BCD é triângulo retângulo, e substituir na fórmula que representa o Teorema de Pitágoras os valores dos catetos. E por fim, resolver a equação do segundo grau incompleta. Consideramos BD = X; BC = Y e CD = Z. Abaixo temos a resolução.

$$X^2 = Y^2 + Z^2$$

$$X^2 = 8^2 + 6^2$$

$$X^2 = 64 + 36$$

$$X^2 = 100$$

$$X = \sqrt{100}$$

$$X = 10\ cm$$

Reconhecer o triângulo BCD como triângulo retângulo é evocar o não-ostensivo *a noção de triângulo retângulo* a partir do ostensivo gráfico. Esse mesmo ostensivo evoca o não-ostensivo *a noção do Teorema de Pitágoras* que pode ser manipulado pelo ostensivo escritural: $X^2 = Y^2 + Z^2$. Os ostensivos 6 cm e 8 cm que representam o não-ostensivo *a ideia de comprimento do lado do triângulo* são postos na referida expressão. Na próxima etapa, aquilo que deveria ser uma manipulação baseada no não-ostensivo *as operações entre grandezas* pois estamos elevando medidas de comprimento a segunda potência é baseada no não-ostensivo *potenciação numérica*, pois temos $X^2 = 6^2 + 8^2$ e em seguida $X^2 = 36 + 64$. Agora tem-se um ostensivo que evoca o não ostensivo *a noção de equação do segundo grau*. Após manipulações com os ostensivos obtem-se como resultado: $X = 10$. Entretanto a resposta da atividade é um ostensivo associado ao não ostensivo *comprimento*, mais particularmente comprimento da diagonal de um quadrado. Assim a resposta é: $X = 10\,cm$. O Teorema de Pitágoras está presente no bloco tecnológico/teórico que justifica uma parte da técnica empregada.

Chevallard (1994) afirma que uma técnica de resolução de equação pressupõe a implementação de um sistema de ostensivos articulados a não ostensivos. A análise do parágrafo anterior é um exemplo desse sistema.

> Toda técnica supõe a ativação de um complexo de objetos, alguns ostensivos (que serão manipulados), outros não ostensivos (que serão evocados). A manipulação dos ostensivos é regulada com o auxílio dos não ostensivos, e esses, inversamente, são evocados com auxílio dos ostensivos. Existe, portanto, uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos. (CHEVALLARD, 1994, p. 5, tradução nossa)[6]

A segunda atividade pode ser considerada como tarefa do tipo: Construir triângulo retângulo dada a medida do seu perímetro. Procuramos manter medidas inteiras, mas não queríamos trabalhar com o triângulo de medidas: três, quatro e cinco. O enunciado: A figura abaixo representa uma corda com 25 nós igualmente espaçados. Construa um triângulo retângulo utilizando toda a corda, de modo que o último nó coincida com o primeiro.

[6] Original do francês: Toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs.

Figura 2 – ilustração utilizada na segunda questão

Fonte: Adaptada de Santos e Viana, 2011

Uma técnica para essa tarefa é o aluno perceber que os 25 nós formam 24 intervalos iguais e essa medida será o perímetro do triângulo. Lembrando que as medidas três, quatro e cinco são de lados de um triângulo retângulo que possuirá doze de perímetro, multiplicando por 2 obtém a resposta: lados com medidas seis, oito e dez. Essas medidas coincidem com aquelas do triângulo retângulo da atividade 1. No trecho a seguir revela indícios que os alunos poderiam não associar a uma possível técnica apoiada na recíproca do Teorema de Pitágoras.

Propomos essa atividade com objeto de analisar possíveis respostas dos alunos diante de uma tarefa cuja técnica possibilita a construção de um triângulo com cordas. Uma aplicação do Teorema de Pitágoras. Adaptamos de uma atividade proposta por Santos e Viana (2011, p. 9)

> A classe foi organizada em grupos de três alunos cada. A cada grupo foi entregue um pedaço de barbante e um pincel. Cada grupo escolheu uma unidade de medida e utilizou o pincel, para demarcar as treze medições, ao invés de fazer nós no barbante.
> Assim, como os egípcios, a professora solicitou que cada grupo formasse um triângulo retângulo com o pedaço do barbante a partir das marcações. Somente dois grupos conseguiram realizar a atividade sem a intervenção da professora. Por isso, ela sugeriu que antes de qualquer procedimento, os alunos formassem o ângulo reto e depois formassem o triângulo.

Embora a atividade tenha sido proposta noutras condições, as autoras apontam para a dificuldade dos alunos em produzir uma solução.

As atividades foram aplicadas na primeira aula do componente curricular topografia, praticamente na metade do segundo semestre. Foi perguntado o que haviam estudado em matemática desde o início do ano letivo. Conteúdos relacionados às funções aparecem como respostas.

No livro de matemática adotado pela escola, o penúltimo capitulo trata da noção de semelhança em triângulos sendo abordado o Teorema de Pitágoras, mas conforme respondido pelos aluno, o estudo das funções predominou no ensino de matemática desse 1º ano.

Análise das Respostas dos alunos

Apresentamos discussões baseadas nas respostas dos alunos para as duas atividades propostas, aplicadas na primeira aula do componente curricular Topografia. Pedimos para os alunos responder um questionário no qual eles afirmaram que os saberes matemáticos trabalhados no primeiro ano do ensino médio foram predominantemente as funções. Diante dessa realidade, temos indícios que a relação pessoal dos alunos com os objetos do saber necessários para Topografia, dentre outros o Teorema de Pitágoras, está mais sustentada naquilo que foi estudado nos anos anteriores de escolarização, ou seja no ensino fundamental. Essas constatações apontam para um conjunto de fatores que podem justificar o baixo índice de respostas corretas na atividade de sondagem, conforme observamos na seguinte tabela.

Tabela 1: porcentagem das respostas no teste

Atividade	Acertos	Inadequações	Não respondeu
1	**13,3**	**40**	**46,7**
2	**0**	**33,3**	**66,7**

Fonte: Dados da pesquisa

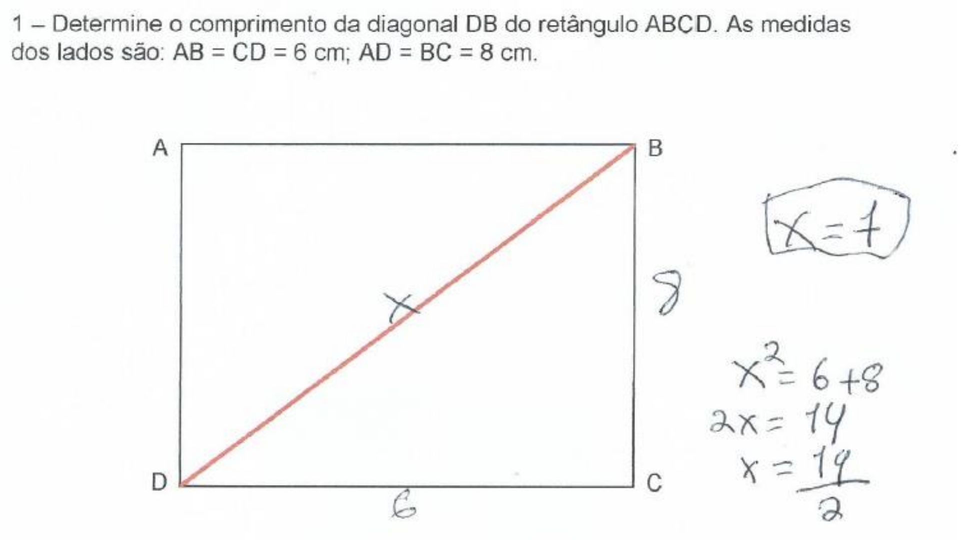
Dois alunos acertaram o resultado numérico da atividade, utilizaram a expressão que representa o Teorema de Pitágoras. Dizemos numérico, pois eles não escreveram a unidade de medida centímetro. Entretanto, a técnica pessoal desses sujeitos apresenta conformidade com a esperada pela instituição ensino de matemática.

Conforme comentado sobre a estabilidade da técnica pessoal, somente com as atividades de sondagem não teremos como avaliar tal aspecto. Por outro lado, as respostas dos alunos nos fornecem elementos sobre sua relação pessoal. E por tal motivo, preferimos utilizar o termo inadequação ao invés da expressão: erro.

Na primeira atividade, nos chamou atenção as respostas inadequadas, vista por meio da técnica pessoal apresentada e que não está em conformidade com as expectativas. Embora o enunciado informe que o lado maior tenha 6 cm de comprimento e o menor 8 cm, esse equívoco não interfere na resolução, bem como não foi mencionado pelos alunos.

A resposta diferente do valor esperado foi denominada pela expressão: resposta inadequada. A noção de praxeologia pessoal possibilitou ampliar nossas análises conforme apresentamos a seguir.

Figura 3 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica com inadequação conceitual

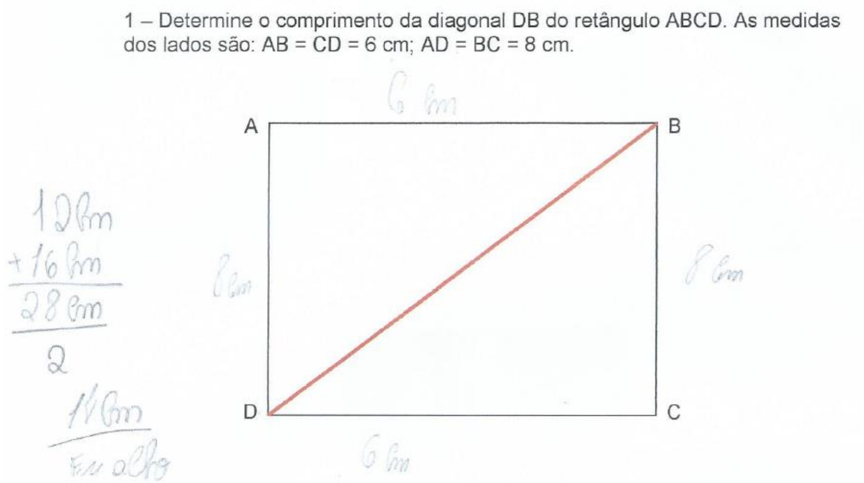


Fonte: Dados da pesquisa

No protocolo acima, o sujeito utilizou uma expressão inadequada para representar o Teorema de Pitágoras, outra inadequação está em transformar X^2 em 2X. Percebemos indícios de inadequação entre as relações: pessoal e institucional para o Teorema de Pitágoras. A relação pessoal desse aluno com o Teorema de Pitágoras foi identificada, em parte, pela expressão: $X^2 = 6 + 8$; enquanto que a relação institucional na posição de aluno esperada para essa mesma parte é: $X^2 = 6^2 + 8^2$. Portanto observamos que o resultado obtido pelo aluno é fruto de uma técnica que possui inadequações conceituais.

Outra resposta inadequada, porém produzida por uma técnica que não apresenta inadequações conceituais, está apresenta na figura abaixo.

Figura 4 – Protocolo com resposta inadequada produzida por técnica sem inadequação conceitual



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse protocolo, consideramos que o sujeito reconheceu a tarefa proposta como similar a outra tarefa institucional: calcular o semiperímetro de um retângulo de lados 6 cm e 8 cm. E aplica uma técnica eficaz para a tarefa assimilada que não é a tarefa proposta.

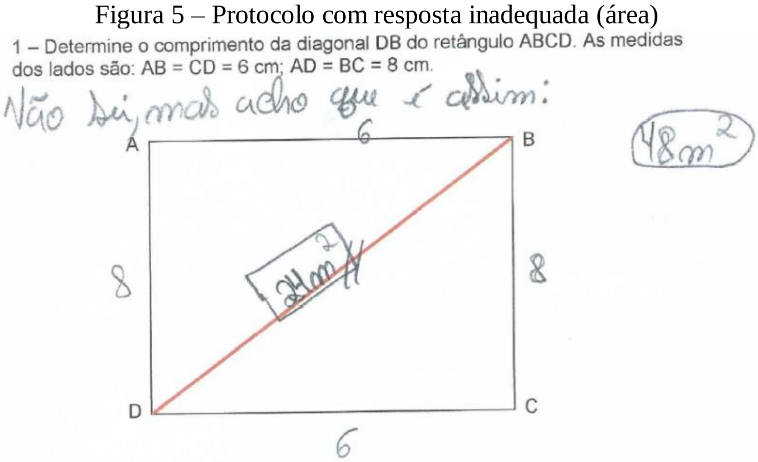
Consequentemente, essa técnica produz uma resposta que não está em conformidade com a esperada pela instituição ensino de matemática, mas que não apresenta inadequações conceituais. Alguns indícios apontam que a tecnologia pessoal, ou seja, os argumentos que explicam, justificam e produzem essa técnica estão apoiados na noção de perímetro.

Embora não seja temática desse artigo discutir a noção de perímetro, não podemos desconsiderar o fato de surgir uma resposta que faz referência a tal objeto matemático. Consideramos o perímetro de uma figura plana como sendo o comprimento do contorno dessa figura. O perímetro é visto como uma grandeza associada a figuras planas, mais especificamente ao seu contorno, sendo representado pelo par indissociável: número e unidade de medida. E nesses termos, ao apresentar a resposta 14 cm; o sujeito escreveu corretamente o semiperímetro. Diferentemente do primeiro protocolo que apresentou a resposta sem a unidade de comprimento centímetro.

Além da noção de perímetro, foram observadas respostas que fazem referência à grandeza geométrica: área. O aluno reconheceu a tarefa proposta como similar a outra tarefa institucional: determinar área de um triângulo retângulo de comprimento de lados 6 cm e 8 cm.

Os alunos responderam utilizando técnica ancorada na noção de área. Apresentaram como resposta para o comprimento de um segmento de reta, a área do retângulo ou a sua metade que é a área do triângulo retângulo, havendo uma inadequação conceitual no sentido de representar um comprimento como se fosse uma área.

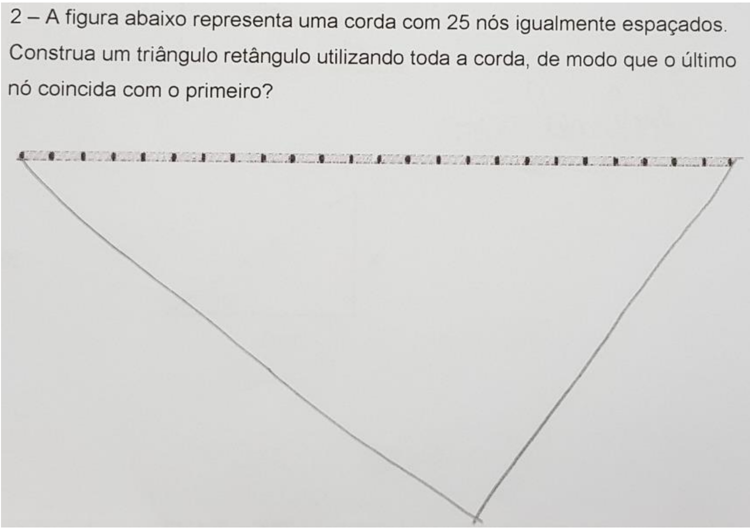
Figura 5 – Protocolo com resposta inadequada (área)



Fonte: Dados da pesquisa

Direcionando nossa análise para a segunda atividade proposta. Lembramos que nenhum aluno apresentou resposta correta. No protocolo abaixo, identificamos que o aluno procura traçar um triângulo retângulo cuja a hipotenusa tenha o comprimento da corda de 25 nós.

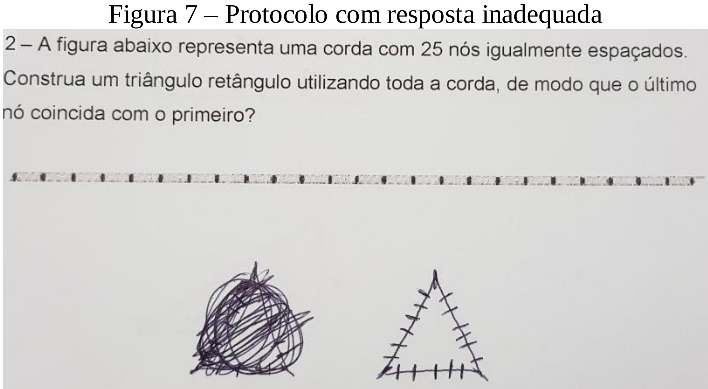
Figura 6 – Protocolo com resposta inadequada produzida



Fonte: Dados da pesquisa

Enquanto na figura 7, temos a tentativa do aluno em traçar um triângulo retângulo, na figura 8, houve a construção de outro tipo de triângulo. Embora o aluno compreenda que a corda faz referência ao contorno da figura.

Figura 7 – Protocolo com resposta inadequada



Fonte: Dados da pesquisa

Entretanto, a construção do aluno mostra que não houve uso da corda completamente. Essas dois protocolos apresentam respostas inadequadas, porém as respostas não fornecem muitos indícios das técnicas pessoais empregadas.

Considerações Finais

Esse texto procurar trazer discussões sobre aspectos de ensino e aprendizagem referente ao saber matemático Teorema de Pitágoras. Essas discussões resultam de uma pesquisa de Doutorado sobre a utilização de saberes matemáticos no âmbito da educação profissional técnica profissional de nível médio. As aulas observadas foram da disciplina de topografia do curso técnico em Agropecuária integrado ao ensino médio.

Observamos o uso do Teorema de Pitágoras nos argumentos de justificação e produção da técnica de construção de ângulo reto num terreno plano, atividade comum tanto na demarcação de terras quanto na construção de canteiros para o cultivo. Algumas noções presentes na Teoria Antropológica do Didático foram importantes na ampliação da nossa unidade de análise, permitindo refletir sobre relações institucionais e relações pessoais referentes ao saber em jogo.

Consideramos o ensino de matemática como instituição e utilizamos a noção de praxeologia para analisar as recomendações curriculares. Assim, buscamos caracterizar as relações institucionais preconizadas em Brasil (1998). Identificamos indícios de atividades que tratassem em aplicar o teorema de Pitágoras. Entretanto não se percebe clareza em exemplos que proporcionem tal aplicação.

As relações pessoais foram caracterizadas pela noção de praxeologia pessoal. Propomos duas atividades para alunos do 1º ano do ensino médio que não havia estudado naquele ano escolar o Teorema de Pitágoras. Os resultados mostram que a maioria dos sujeitos assimilou a tarefa proposta como outra tarefa, por exemplo: determinar a área do triângulo retângulo de lados 6 cm e 8 cm; determinar o semiperímetro de um retângulo de lados 6 cm e 8 cm. E consequentemente as técnicas estão apoiadas nos ostensivos: grandezas perímetro e área. Lembramos que os saberes área e perímetro são preconizados em Brasil (1998).

Alguns estudos discutem sobre a estabilidade da técnica pessoal, e consideramos que somente com a atividade de sondagem não teremos como avaliar esse aspecto. Por outro lado, as respostas dos alunos nos fornecem elementos sobre sua relação pessoal. E por tal motivo, preferimos utilizar o termo inadequação de que erro nas análises. Os resultados indicam que os ostensivos utilizados nas duas atividades não evocaram o não ostensivo: a noção do Teorema de Pitágoras.

Os resultados indicam que os objetos ostensivos presentes nos enunciados pouco evocam o objeto não ostensivo: a noção do Teorema de Pitágoras. Os protocolos mostram que esses ostensivos evocaram outros saberes: as noções de área e perímetro que são preconizados em Brasil (1998), mas que também não foram estudados pelos alunos naquele ano letivo.

No processo de estudo de um saber, consideramos importante que o professor saiba o que seus alunos conhecem sobre os saberes que serão abordados. Assim as decisões didáticas do professor podem ser baseadas nessas informações.

Referências

BITTAR, Marilena; CHACHOUA, Hamid. Conferência 2: A Teoria Antropológica do Didático: Paradigmas, Avanços e Perspectivas. In: Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, 2016, Bonito – Mato Grosso do Sul. Disponível em: < http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/CONFER%C3%8ANCIA%202%20-%20PORTUGU%C3%8AS.pdf > Acessado: em 31 ago. 2018

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: matemática.* Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf > Acessado: em 31 ago. 2018.

CHEVALLARD, Yves (1999) *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.* Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. (2002) *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques.* Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62 > Acessado: em 11 mai. 2016.

CROSET, Marie-Caroline. *Modélisation des connaissances dês élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.* 2010. 349f. Tese (Doutorado). Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. França. Disponível em: < https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00444557 > Acessado: em 20 jun. 2018.

GARCIADIEGO, Alejandro R. El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometria plana: simplificar no siempre simplifica. *Revista Latinoamericana de Investigacion em Matemática Educativa.* México, vol. 5, nº 03, p. 251 – 270, nov. 2002.

MENEZES, Marcus Bessa de. *Praxeologia do Professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau.* 2010. 178f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SANTOS, Márcia Nunes; VIANA, Marger da Conceição Ventura. Abordagem histórica para aprendizagem dos teoremas de Tales e Pitágoras. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.*