EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p251-271

Ensino de operações polinomiais intermediado pela aritmética no sistema de numeração posicional decimal[1]

Polynomial operations teaching intermediated by arithmetic in the decimal positional numbering system

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA [2]

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES [3]

Resumo

Neste artigo, assumimos como objetivo principal propor o ensino das principais operações polinomiais, intermediado pelas operações aritméticas fundamentais em conexão com o sistema de numeração decimal. Para atender esse objetivo, expomos a modelização do sistema de numeração decimal na forma polinomial de potência de base dez. A noção de praxeologia da Teoria Antropológica do Didático assegura a dialética entre prática e saber de uma Organização Matemática Local, esboçada para o ensino das principais operações polinomiais.

Palavras-chave: *Sistema de Numeração Decimal; Teoria Antropológica do Didático; Organização Matemática Local.*

Abstract

In this article we assume the main objective to propose the teaching of the main polynomial operations brokered fundamental arithmetic operations, in connection with the decimal. To meet this goal, we explain the modeling of the decimal numbering system in polynomial form of ten base of power. The notion of praxeology of the Anthropological Theory of Didactic ensures the dialectic between practice and learn a Mathematics Local Organization, outlined for the teaching of the main polynomial operations.

Keywords: *Decimal Numbering System; Anthropological Theory of Didactic; Local Organization Mathematics.*

[1] Texto adaptado a partir de dois capítulos da dissertação de mestrado do primeiro autor e de sua pesquisa de tese doutoral em andamento.

[2] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) – jsouzaper@gmail.com

[3] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) – messildo@ufpa.br

Introdução

As principais operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão) iniciam os estudantes, do ensino fundamental, no estudo das operações algébricas de forma mais sistemática e, associando-o à ideia de abstração. Entretanto, pesquisas realizadas, dentro e fora do Brasil, apontam a existência de diversas problemáticas em relação ao ensino dessas operações e de outros assuntos da Álgebra (CHEVALLARD, 1989, 1994; COXFORD; SHULTE, 1995; FLORIANI, 2000; CATALÁN, 2003; KEPPKE, 2007; CARVALHO; PEREIRA, 2009).

Motivados pelas ideias de Floriani (2000) e de Carvalho e Pereira (2009), assumimos como objetivo principal, neste artigo, propor o ensino das principais operações polinomiais intermediado pelas operações aritméticas fundamentais, em conexão com o sistema de numeração decimal indo-arábico, ou seja, pela escrita de números na forma polinomial de potência de base dez ou pelo valor posicional relativo dos algarismos indo-arábicos nesses números. Além disso, expomos de forma qualitativa as ideias básicas e teóricas que tornam possível a concretude de nosso objetivo. Mas antes, descrevemos, resumidamente, a constituição histórica do sistema de numeração decimal.

O sistema de numeração hindu-árabe é dominado nos livros didáticos de matemática por sistema de numeração indo-arábico. As civilizações hindu e árabe impulsionaram o conhecimento aritmético e algébrico, assim como influenciaram o desenvolvimento da Matemática no Ocidente (IFRAH, 1997a; 1997b). A começar pelos algarismos denominados de indo-arábicos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

A numeração falada da civilização indiana, mais precisamente a língua sânscrita, contribuiu para o que hoje conhecemos como escrita por extenso dos numerais. Na língua sânscrita, os algarismos das nove unidades simples eram pronunciados: eka, dvi, tri, catur, pañca, sat, sapta, asta, nava (IFRAH, 2005, p. 267). Outro ponto importante da contribuição hindu veio de seus astrônomos que indicaram a ideia do zero ao recorrerem à palavra sânscrita šhûnya[4], que significa "vazio" e, por extensão, "zero" (IFRAH, 1997b, p. 110). Desse modo, para diferenciar, por exemplo, 42 de 402. Os hindus pronunciavam 402: "dviśūnyacatur" ("DOIS. VAZIO. QUATRO"). Usando a palavra "śūnya", os hindus tinham constituído o algarismo zero, mas apenas de forma oral. As potências de base dez eram pronunciadas na língua sânscrita por: dasa (10), sata (10^2), sahasra (10^3),

[4] Em Ifrah (2005, p. 270), está a grafia *śūnya*, que é a utilizada neste texto.

ayuta (10^4), laksa (10^5), prayuta (10^6), koti (10^7),vyarbuda (10^8) e padma (10^9) (IFRAH, 2005, p. 268).

Oralmente, o número 45.389, seria assim pronunciado pelos hindus: “nava, astadasa, tri sata, pañcasahasra, caturayuta”. Atualmente, isso seria: nove, oito dezenas, três centenas, cinco unidades de milhar, quatro dezenas de milhar. Na potência de dez ou decomposição aritmética: 9 + 8 × 10 + 3 × 102 + 5 × 103 + 4 × 104.

O simbolismo numérico possibilitou aos hindus aperfeiçoarem o modo como eles calculavam. Isso os permitiu calcular mais facilmente. Contudo, a organização algorítmica dos calculistas hindus era diferente das que recorremos hoje. Assim descreve Cajori (2007, p. 143): “[...] Os hindus estavam geralmente inclinados a seguir o movimento da esquerda para a direita como na escrita [...]. Por exemplo, para somar 254 e 663 procediam assim: 2 + 6 = 8, 5 + 6 = 11, que muda 8 para 9, 4 + 3 = 7. Portanto, tem-se a soma 917[...]”. Basicamente, o algoritmo hindu da adição está pautado na posição que cada algarismo ocupa. Só após o resultado obtido, procedem-se as transformações de ordens. É o famoso “vai um”.

Os árabes copiaram, inicialmente, “a numeração posicional e os métodos de cálculos originários da Índia” (IFRAH, 2005, p. 299). Esses algarismos passaram por modificações na cultura árabe antes de assumirem a forma como os conhecemos atualmente. Além disso, a primeira introdução desses algarismos na cultura ocidental cristã ocorreu na Europa (final do século X), sendo responsável por isso o monge francês Gerbert d’Aurillac (IFRAH, 1997b).

O estágio final da grafia numérica hindu-árabe, tal como conhecemos hoje na cultura ocidental, consolida-se por volta do século XIII e XIV. Daí em diante, o que ocorre é o aprimoramento tipográfico proporcionado pela invenção da imprensa por Gutenberg (IFRAH, 2005). Esse aprimoramento tipográfico criou grafias numéricas variadas para os algarismos indo-arábicos tal como vemos hoje nos livros didáticos de Matemática.

A modelização do sistema de numeração posicional decimal na forma polinomial

Podemos compor um sistema de numeração posicional a partir da escolha de um número b que sirva de base (EVES, 2004). A nossa referência para outras bases é a base dez do sistema de numeração decimal. Adotaremos aqui, a representação $N_{(b)}$,, na qual o indicativo em que base o número N está representado é (b). Desse modo, quando tivermos b = 2, 3, 5; podemos representar o número N, como segue:

- *Base 2:* $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n;* $ai \in \{0, 1\}$ *e b= 2;*
- *Base 3:* $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n;* $ai \in \{0, 1, 2\}$ *e b= 3;*
- *Base 5:* $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$; $0 \le a_i < b$, *i = 0, 1, 2, 3,..., n;* $ai \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e b= 5;*

Em relação à base dez, temos em De Maio (2011, 2009), Zuin (2005), Floriani (2000), Crantz (1949), Roxo et al. (1948), Carles (1927) e Wechelun (1562) compreensões epistemológicas sobre essa base e as possíveis conexões entre aritmética e álgebra. Roxo et al. (1948) assim expõem a representação de um número N no sistema de numeração decimal:

> No sistema de base 10, todo número N pode ser escrito sob a forma N = u + d· 10 + c· 102 + ...onde u, d, c, etc. indicam respectivamente os algarismos das unidades, dezenas, centenas, etc. Do mesmo modo, no sistema de base b, o número N poderá ser posto sob a forma de soma ordenada segundo as potências de b, do seguinte modo N = α + β·b + γ·b2onde α, β, γ, etc. indicam números menores que b [...] (ROXO et al., 1948, p. 64).

Com base na escrita dos números N, pertencentes ao sistema de numeração decimal, conforme se encontra em Roxo et al. (1948), propomos a escrita polinomial abaixo para os números inteiros positivos N_1 e N_2 no sistema de numeração decimal:

$$N_1 = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + x_3 \cdot 10^3 + ... + x_n \cdot 10^n, 0 \le x_i < 10, i = 0,1,...,n$$ e

$$N_2 = y_0 + y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 10^2 + y_3 \cdot 10^3 + ... + y_n \cdot 10^n, 0 \le y_i < 10, i = 0,1,...,n$$.

Se a escrita polinomial de N_1 e N_2 não for na base dez, essa modelação também é válida. Por exemplo, se temos $N_1 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1$ e $N_2 = 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4$, então $N_1 \times N_2 = = (2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1)\ (3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4) = \mathbf{1} \cdot 5^5 + \mathbf{4} \cdot 5^4 + \mathbf{2} \cdot 5^3 + \mathbf{3} \cdot 5^2 + \mathbf{2} \cdot 5 + \mathbf{4} = \mathbf{142324_{(5)}}$. Porém, se a escrita polinomial de N_1 e N_2 for representada pelos polinômios $2x^2 + 4x + 1$ e $3x^2 + x + 4$, a tarefa consiste em: **Multiplicar $2x^2 + 4x + 1$ por $3x^2 + x + 4$**. Logo, o resultado que se obtém é o polinômio $6x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 17x + 4$. Nota-se, no polinômio produto, que os coeficientes dos termos algébricos são quase todos diferentes dos que aparecem no resultado da multiplicação da escrita polinomial dos números N_1 e N_2 na base cinco. Isso ocorreu porque, na multiplicação de polinômios, o processo resolutivo não exige transporte de ordem. Entretanto, do polinômio $6x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 17x + 4$, chega-se ao resultado da multiplicação dos números N_1 e N_2. Para isso, é suficiente tornar x = 5 e proceder com os ajustes dos coeficientes e dos expoentes de x pelo produto de potência de mesma base.

A descrição que Crantz (1949) faz do sistema de numeração decimal é semelhante à de Roxo et al. (1948). No entanto, ele acrescenta outras explicações:

> Em nosso sistema de numeração de base *dez* cada número representa uma soma ordenada segundo as potências decrescentes de 10; assim, por exemplo,
>
> $$4759 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9.$$
>
> O valor relativo dos números 4, 7, 5, e 9 é neste caso seu produto por 103, 102, 10 e 1, respectivamente. Se falta uma potência de 10, se indica com o signo 0:
>
> $40759 = 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$ (CRANTZ, 1949, p. 30, tradução nossa).

O tratamento que Crantz (1949) propõe à multiplicação merece atenção. Ele manipula a potência de base dez para clarificar como ocorre a conversão de uma ordem para outra durante o processo multiplicativo do algoritmo tradicional da multiplicação aritmética.

> [...] o produto $523 \cdot 412 = (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3)\ (4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2)$.
>
> Produz um efeito surpreendente resolver, primeiramente, esta operação colocando um fator debaixo do outro e escrevendo imediatamente na terceira linha (da direita à esquerda) o *resultado:*
>
> $$\begin{array}{r} 523 \\ 412 \\ \hline 215476 \end{array}$$
>
> Para isso se procede assim:
>
> $$\left.\begin{array}{l} (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) \\ \\ (\alpha \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + \gamma) \end{array}\right\} =$$
>
> $$= \underset{6}{c\gamma} + \underset{7 \cdot 10}{(b\gamma + c\beta) \cdot 10} + \underset{24 \cdot 10^2}{(a\gamma + c\alpha + b\beta) \cdot 10^2} + \underset{13 \cdot 10^3}{(a\beta + b\alpha) \cdot 10^3} + \underset{20 \cdot 10^4}{a\alpha \cdot 10^4}$$
>
> separando logo $20 \cdot 10^2$ de $24 \cdot 10^2$ para somá-lo, como $2 \cdot 10^3$ a $13 \cdot 10^3$ e obter $15 \cdot 10^3$, de onde se separa por sua vez $10.\ 10^3$ para somá-lo como $1 \cdot 10^4$ a $20 \cdot 10^4$ e obter $21 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4$ (CRANTZ, 1949, p. 31, tradução nossa).

A conformidade algébrica que De Maio (2009, p. 275) descreve para os números N_1 e N_2 é explicada pela soma do polinômio $P(x) = 3 + 5 \cdot x + 2 \cdot x^2$com $Q(x) = 4 + 3 \cdot x + 6 \cdot x^2$, ou seja, $P(x) + Q(x) = 7 + 8 \cdot x + 8 \cdot x^2$. De Maio estabelece que N_1 e N_2 assumem a escrita polinomial na base dez se $x = 10$, consequentemente, teremos $N_1 = 3 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2$ e N_2

$=4 + 3\cdot 10 + 6\cdot 10^2$. Dessa forma, $N_1 + N_2 = 7 + 8\cdot x + 8\cdot x^2 = 7 + 8\cdot 10 + 8\cdot 10^2$. A modelização de N_1 e $N_{2,}$ na base dez, segue as mesmas ideias de Floriani (2000) e Carvalho e Pereira (2009).

Vamos tornar mais evidente a modelização polinomial do sistema de numeração decimal, somando o número 45325 com 23414. O número 45325 = 40000 + 5000 + 300 + 20 + 5 = $4\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0$ e 23414 = 20000 + 3000 + 400 + 10 + 4 = $2\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$. Na potência de base dez, os dois números estão escritos na forma polinomial, isso nos permite associar essas potências a identificação dos seguintes pares de termos semelhantes: $4\cdot 10^4$ e $2\cdot 10^4$, $5\cdot 10^3$ e $3\cdot 10^3$, $3\cdot 10^2$ e $4\cdot 10^2$, $2\cdot 10^1$ e $1\cdot 10^1$, $5\cdot 10^0$ e $4\cdot 10^0$. Portanto, $45325 + 23414 = (4 + 2)\cdot 10^4 + (5 + 3)\cdot 10^3 + (3 + 4)\cdot 10^2 + (2 + 1)\cdot 10^1 + (5 + 4)\cdot 10^0 = \mathbf{6}\cdot 10^4 + \mathbf{8}\cdot 10^3 + \mathbf{7}\cdot 10^2 + \mathbf{3}\cdot 10^1 + \mathbf{9}\cdot 10^0 = \mathbf{68739}$.

Na multiplicação de 453 por 234, na escrita polinomial de potência de base dez, podemos verificar a equivalência que esse tipo de representação tem com a multiplicação de $4x^2 + 5x^1 + 3x^0$ por $2x^2 + 3x^1 + 4x^0$, que resulta $\boldsymbol{8x^4 + 22x^3 + 37x^2 + 29x^1 + 12x^0}$: $453\times 234 = (4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0) \times (2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0) = (4\times 2)\cdot 10^2\cdot 10^2 + (4\times 3)\cdot 10^2\cdot 10^1 + (4\times 4)\cdot 10^2\cdot 10^0 + (5\times 2)\cdot 10^1\cdot 10^2 + (5\times 3)\cdot 10^1\cdot 10^1 + (5\times 4)\cdot 10^1\cdot 10^0 + (3\times 2)\cdot 10^0\cdot 10^2 + (3\times 3)\cdot 10^0\cdot 10^1 + (3\times 4)\cdot 10^0\cdot 10^0 = 8\cdot 10^4 + 12\cdot 10^3 + 16\cdot 10^2 + 10\cdot 10^3 + 15\cdot 10^2 + 20\cdot 10^1 + 6\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 12\cdot 10^0 = \mathbf{8\cdot 10^4 + 22\cdot 10^3 + 37\cdot 10^2 + 29\cdot 10^1 + 12\cdot 10^0}$.O resultado aritmético de 453×234 é $106002 = \mathbf{1\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 6\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0}$. Notamos certa diferença nos dois resultados, mas eles são equivalentes, para torná-los iguais devemos realizar a decomposição dos coeficientes que ultrapassam nove unidades e ajustar as potências de mesma base: $\mathbf{8\cdot 10^4 + 22\cdot 10^3 + 37\cdot 10^2 + 29\cdot 10^1 + 12\cdot 10^0} = 8\cdot 10^4 + (2\cdot 10^1 + 2)\cdot 10^3 + (3\cdot 10^1 + 7)\cdot 10^2 + (2\cdot 10^1 + 9)\cdot 10^1 + (1\cdot 10^1 + 2)\cdot 10^0 = 8\cdot 10^4 + 2\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 = 10\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 10\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 = 1\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 = 1\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 = 1\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 = \mathbf{1}\cdot 10^5 + \mathbf{0}\cdot 10^4 + \mathbf{6}\cdot 10^3 + \mathbf{0}\cdot 10^2 + \mathbf{0}\cdot 10^1 + \mathbf{2}\cdot 10^0 = \mathbf{106002}$. Podemos também conferir a equivalência por meio do valor relativo posicional e ajustando as transformações de ordens: $\mathbf{8\cdot 10^4 + 22\cdot 10^3 + 37\cdot 10^2 + 29\cdot 10^1 + 12\cdot 10^0}$ = 80000 + 22000 + 3700 + 290 + 12 = 80000 + 20000 + 3000 + 2000 + 700 + 200 + 90 + 10 + 2 = (80000 + 20000) + (3000 + 2000) + (700 + 200) + (90 + 10) + 2 = 100000 + 5000 + 900 + 100 + 2 = 100000 + 5000 + (900 + 100) + 2 = 100000 + 5000 + 1000 + 2 = 100000 + (5000 + 1000) + 2 = 100000 + 6000 + 2 = **106002**.

O procedimento descrito para a base dez é valido para quaisquer sistemas de numeração posicional de base não decimal, desde que se obedeça às particularidades das bases numéricas que constituem esses sistemas. O passo posterior é compreender como os algoritmos das operações aritméticas fundamentais funcionam nesses sistemas de numeração posicional e, também, sua extensão para a álgebra. Porém, para fundamentar melhor essa ideia, expomos a seguir algumas noções da Teoria Antropológica do Didático, teoria esta idealizada por Yves Chevallard a partir da década de 1990.

Noção de praxeologia na teoria antropológica do didático

A Teoria Antropológica do Didático (daqui em diante TAD) possui dois blocos praxeológicos menores denominados de bloco prático-técnico (ou do saber-fazer) e o bloco tecnológico-teórico (ou do saber) (CHEVALLARD, 1998; 1999). No bloco prático-técnico temos o tipo de tarefas T e a técnica τ(maneira de fazer ou solucionar as tarefas t que pertencem ao tipo T), esse bloco é denotado por $[T/\tau]$. O bloco tecnológico-teórico constitui-se da tecnologia θ e da teoria Θ, denota-se esse bloco por $[\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 1998; 1999). A simbologia desses dois blocos vem do alfabeto grego: T (tau maiúsculo), τ (tau minúsculo), θ (teta minúsculo) e Θ (teta maiúsculo).

Chevallard (1998, 1999) designa uma praxeologia pontual pelo bloco $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Essa praxeologia pontual gira em torno de um único tipo de tarefas T. Por conseguinte, esse tipo de tarefas possuem várias tarefas t ($t \in T$). Para se anunciar um tipo de tarefas T, deve-se pensar em verbo que anuncie um gênero amplo de tipos de tarefas: **calcular, resolver, efetuar, identificar, representar, escrever, demonstrar, provar etc**. Um tipo de tarefas T seria: **Identificar no sistema de numeração decimal o valor posicional relativo dos algarismos indo-arábicos, em números de três ordens**. Uma tarefa t para esse tipo de tarefas é: **Identificar no sistema de numeração decimal o valor posicional relativo dos algarismos 3, 4 e 5, no número 543**.A técnica τ que soluciona a tarefa t está associada à ordem que cada algarismo ocupa. O algarismo 3 ocupa a ordem das unidades simples, possui valor relativo 3; o algarismo 4 está na ordem das dezenas, logo seu valor relativo é 4 dezenas ($4 \times 10 = 40$); o algarismo 5 ocupa a ordem das dezenas, assume o valor relativo de 5 centenas ($5 \times 100 = 500$). Na tarefa t que solucionamos, o bloco do saber-fazer comanda a solução. E o bloco do saber? Esse bloco nos anos iniciais do ensino fundamental pouco interessa para o professor de Matemática, mas nos anos finais deveria ser essencial, porém, ainda prevalece o bloco do saber-fazer (PEREIRA, 2012).

Completaremos o bloco da praxeologia pontual, assegurando o nosso objetivo neste artigo, ou seja, a tecnologia θ interliga a representação polinomial na potência de base dez para qualquer número do sistema de numeração decimal, conforme temos para N_1 e N_2. Seguindo essa lógica, a tecnologia θ para qualquer número N_i (i = 1, 2, 3, ..., n) será: $N_i = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ... + a_n \cdot 10^n$, $0 \leq a_i < 10$, i = 0, 1, 2, ..., n. A teoria Θ que justifica a tecnologia θ é a Aritmética (PEREIRA, 2012).

As Organizações Praxeológicas Pontuais são a base para que existam outros tipos de Organizações Praxeológicas (daqui em diante OP). Estas são assim denominadas: Organização Praxeológica Local (OPL), Organização Praxeológica Regional (OPR) e Organização Praxeológica Global (OPG) (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000). Desses quatro tipos de OP, as pontuais e locais predominam nos livros didáticos de matemático do ensino fundamental e embasam os de ensino médio. As OPL são geradas pelo agrupamento de várias organizações praxeológicas pontuais. Denota-se o bloco praxeológico de uma OPL por $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ (MATHERON, 2000). A simbologia T_i (i = 1, 2, 3, ..., n) indica a multiplicidade de tipos de tarefas e isso exige várias técnicas τ_i (i = 1, 2, 3, ..., n) para solucionar as tarefas t_i (i = 1, 2, 3, 4, ..., n) desses diferentes tipos de tarefas T_i. As OPR e as OPG não serão discutidas neste artigo, porque são organizações praxeológicas complexas e fogem ao nosso objetivo. Porém, entenda-se que as OPR resultam do agrupamento das OML e as OPG da teoria matemática que fundamentam e agrupam as OPR (MATHERON, 2000).

As Organizações Praxeológicas são também Organizações Matemáticas (OM) (CHEVALLARD, 1998; 1999). Dessa forma, valem as igualdades: Organização Praxeológica Pontual = Organização Matemática Pontual (OMP), Organização Praxeológica Local = Organização Matemática Local (OML), Organização Praxeológica Regional = Organização Matemática Regional (OMR) e Organização Praxeológica Global = Organização Matemática Global (OMG). Para ensinarmos uma OM precisamos de uma Organização Didática (OD). Nos livros didáticos de Matemática dos ensinos fundamental e médio predominam as OML e suas Organizações Didáticas (CHEVALLARD, 1998, 1999; PEREIRA, 2012).

Em Carvalho e Pereira (2009) identificamos o esboço inicial de uma OML, acompanhada de sua OD. Estes autores elaboraram uma proposta didática para ensinar as quatro principais operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão), transformando-as em operações aritméticas. Entretanto, essa proposta didática possuía lacunas que foram preenchidas por Pereira (2012). É com base nas ideias de Pereira (2012) que esboçamos a seguir uma possível OML para o ensino de polinômios de uma variável e suas principais operações, no ensino fundamental.

Esboço de uma organização matemática local para polinômios de uma variável em conexão com o sistema de numeração decimal

As OML surgem das OMP, logo precisamos de tipos de tarefas T_i (T_1, T_2 etc.). Tomemos os seguintes tipos de tarefas:

- *T_1: Indicar o valor posicional relativo dos algarismos indo-arábicos em números de três, quatro e cinco ordens do sistema de numeração decimal;*
- *T_2: Decompor na forma posicional números de três, quatro e cinco ordens do sistema de numeração decimal;*
- *T_3: Representar na forma polinomial de potência de base dez, números de três, quatro e cinco ordens do sistema de numeração decimal;*
- *T_4: Criar expressões algébricas de uma variável, a partir de números do sistema de numeração decimal indo-arábico com duas ordens;*
- *T_5: Criar expressões algébricas de uma variável, a partir de números do sistema de numeração decimal indo-arábico com três ordens;*
- *T_6: Criar expressões algébricas de uma variável, a partir de números do sistema de numeração decimal indo-arábico com quatro ordens;*
- *T_7: Criar expressões algébricas de uma variável, a partir de números do sistema de numeração decimal indo-arábico com cinco ordens;*
- *T_8: Somar duas expressões algébricas de uma variável obtidas em T_4;*
- *T_9: Multiplicar duas expressões algébricas obtidas em T_4;*
- *T_{10}: Dividir um polinômio criado em T_5 por outro de T_4;*
- *T_{11}: Subtrair um polinômio de T_6 por um de T_5.*

Com esses onze tipos de tarefas $\boldsymbol{T_i}$ podemos formular t_i tarefas para $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_4}$, $\boldsymbol{T_5}$, $\boldsymbol{T_6}$, $\boldsymbol{T_7}$, $\boldsymbol{T_8}$, $\boldsymbol{T_9}$, $\boldsymbol{T_{10}}$ e $\boldsymbol{T_{11}}$. A notação que adotaremos para as tarefas e qual tipo elas pertençam será o seguinte: $\mathbf{t_{i,n}}$. O ***i*** indica o tipo que a tarefa pertence e o ***n*** a contagem dessas tarefas, por exemplo, em $\mathbf{t_{1,1}}$ (tarefa "tê", um, um) temos a **tarefa 1 do tipo 1**. Vejamos como se anuncia a tarefa $\mathbf{t_{4,1}}$: Criar duas expressões algébricas de uma variável com os números 32 e 45 do sistema de numeração decimal. Para solucionar essa tarefa, estabeleceremos como variável a letra *x*, a técnica τ_1 está associada ao valor posicional dos algarismos indo-arábicos e a técnica τ_2 é a escrita polinomial na potência de base dez desses números, atribuindo-se a *x* o valor 10. A tecnologia θ para τ_2 é a de $N_i = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ... + a_n \cdot 10^n$, $0 \leq a_i < 10$, $i = 0, 1, 2, ..., n$. Assim, $32 = 30 + 2 = 3 \cdot 10 + 2 = 3x + 2$ e $45 = 40 + 5 = 4 \cdot 10 + 2 = 4x + 5$.

A tarefa $\mathbf{t_{4,1}}$ nos possibilita formular a tarefa $\mathbf{t_{8,1}}$: Somar a expressão algébrica $3x + 2$ com $4x + 5$. Sabemos que essas duas expressões algébricas foram obtidas dos números 32 e 45, o que nos permite pensar na técnica da soma aritmética para obter o resultado de $(3x + 2) + (4x + 5)$, ou seja, $(3x + 2) + (4x + 5) = 32 + 45$. Aplicando-se a técnica τ do algoritmo da soma aritmética em 32 + 45, obtemos $77 = 70 + 7 = 7 \cdot 10 + 7$. Fazendo-se $x = 10$, temos $7\cdot 10 + 7 = \boldsymbol{7x + 7}$. A técnica τ para solucionar $(3x + 2) + (4x + 5)$ é a soma dos coeficientes dos termos semelhantes: $(3x + 2) + (4x + 5) = (3x + 4x) + (2 +5) = (3 + 4)\,x + 7 = \boldsymbol{7x + 7}$. Nota-se que os coeficientes do resultado da soma algébrica é o algarismo 7 (sete) do resultado da soma aritmética, mas essa equivalência ocorreu porque na soma aritmética não houve transformação de ordens.

Agora vejamos o que ocorre na tarefa $\mathbf{t_{4,2}}$: Criar duas expressões algébricas de uma variável com os números 68 e 74 do sistema de numeração decimal. Aplicando os mesmos passos da resolução de $\mathbf{t_{4,1}}$ para $\mathbf{t_{4,2}}$, temos que: $68 = 60 + 8 = 6 \cdot 10 + 8 = 6x +8$ e $74 = 70 + 4 = 7 \cdot 10 + 4 = 7x +4$. Da solução da tarefa $\mathbf{t_{3,2}}$ formulamos a tarefa $\mathbf{t_{8,2}}$: Obter o resultado de $(6x +8) + (7x +4)$. A técnica τ aplicada à tarefa $\mathbf{t_{7,1}}$ subsidiará a resolução da tarefa$\mathbf{t_{7,2}}$. Primeiro resolvemos a soma aritmética de $68 + 74 = 142 = 100 + 40 + 2 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 = \boldsymbol{x^2 + 4x + 2}$. Se o resultado da soma aritmética for equivalente ao da soma de $(6x +8) + (7x +4)$, então temos uma técnica τ que soluciona as adições entre polinômios de uma variável: $(6x +8) + (7x +4) = (6 + 7)x + (8 + 4) = \boldsymbol{13x + 12}$. Observa-se que o polinômio originado da soma aritmética não é igual ao polinômio resultante da soma entre as duas expressões algébricas. Por que isso ocorreu? Na adição aritmética quando a soma das ordens atinge valor igual ou maior que 10 (dez), a técnica do algoritmo aditivo procede à transformação de ordem da anterior para a posterior, já na adição de termos semelhantes positivos isso não ocorre, porque os termos semelhantes não dependem dessa transformação de ordens.

As soluções das tarefas $\mathbf{t_{4,2}}$ e $\mathbf{t_{8,2}}$ possuem certa equivalência, de $\boldsymbol{13x + 12}$ obtemos$\boldsymbol{x^2 + 4x + 2}$. Isso decorre do fato que a OML está em dialética com sistema de numeração decimal e atribuímos a variável x o valor 10, então: $\boldsymbol{13x + 12 = (10 + 3)x + (10 + 2) = (10 +3) \times 10 + 10 + 2 = (10 \times 10) + (3 \times 10) + 10 + 2 = 100 + 30 + 10 + 2 = 100 + (30 + 10) + 2 = 100 + 40 + 2 = 142 = x^2 + 4x + 2}$. A técnica mais imediata seria: $\boldsymbol{13x + 12 = 13 \times 10 + 12 = 130 +12 = 142}$.Enfatizamos que o bloco do saber-fazer – $[T/\tau]$ – predomina em uma OML.

Efetivamente, o alcance da técnica τ sobre uma parte $P(\square)$ das tarefas do tipo T (CHEVALLARD, 1998; 1999) promove o estudo das tarefas e dos tipos que elas pertencem. Neste estudo, compreender que o trabalho da técnica possui "uma dimensão e um papel essencial no desenvolvimento e complementação progressiva da prática matemática escolar" (FONSECA; BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 5) é fundamental quando se propõe organizações praxeológicas locais. Nesse sentido, temos neste esboço de OML uma técnicaτ que seu alcance e trabalho dependem das tarefas $\mathbf{t_{i,n}}$ formuladas com base nas peculiaridades do sistema de numeração decimal ensinadas no ensino fundamental. A extensão dessas peculiaridades para a álgebra pode estar nos tipos de tarefas $\boldsymbol{T_2}$ e $\boldsymbol{T_3}$, ou em outros tipos de tarefas $\boldsymbol{T_k}$ e suas tarefas $\mathbf{t_j}$. Por exemplo, a tarefa $\mathbf{t_1}$: Obter as somas das ordens semelhantes dos números 4567 e 97849; remete-nos ao sistema de numeração decimal e, também, à soma de termos algébricos semelhantes. A solução resumida de $\mathbf{t_1}$ seria: 7 unidades simples + 9 unidades simples = 16 unidades simples; 6 dezenas + 4 dezenas = 10 dezenas; 5 centenas + 8 centenas = 13 centenas; 4 unidades de milhar + 7 unidades de milhar = 11 unidades de milhar; 0 centena de milhar + 9 centenas de milhar = 9 centenas de milhar. Outra possibilidade seria a tarefa $\mathbf{t_2}$: Identificar os termos semelhantes existentes na escrita polinomial de potência de base dez dos números 456078 e 567002.

A técnica τ para solucionar a tarefa $\mathbf{t_2}$ exige a tecnologia θ de N_i: $456078 = 8 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5 = \mathbf{8 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5}$ e $567002 = 2 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^5 = \mathbf{2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^5}$. Sabemos que os termos algébricos semelhantes possuem mesma parte literal com seus respectivos expoentes. Essa mesma ideia se aplica à escrita polinomial de potência de base dez, ou seja, $\mathbf{8 \cdot 10^0}$ é semelhante a $\mathbf{2 \cdot 10^0}$, assim como, $\mathbf{7 \cdot 10^1}$ e $\mathbf{0 \cdot 10^1}$, $\mathbf{6 \cdot 10^3}$ e $\mathbf{7 \cdot 10^3}$, $\mathbf{5 \cdot 10^4}$ e $\mathbf{6 \cdot 10^4}$, $\mathbf{4 \cdot 10^5}$ e $\mathbf{5 \cdot 10^5}$.

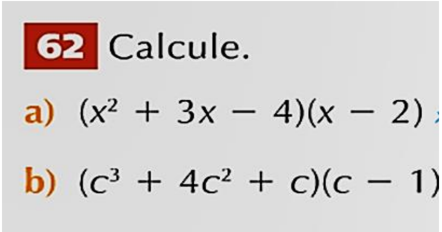
A tarefa $\mathbf{t_3}$ (Classificar os polinômios gerados pelos números 20, 45, 304, 561, 400 e 5732, de forma que $x = 10$.) nos possibilita iniciar o ensino de polinômios no oitavo ano do ensino fundamental. A técnica τ que soluciona a tarefa $\mathbf{t_3}$ é justificada pela tecnologia de N_i. Devemos primeiro representar cada número na escrita polinomial de potência de base dez e depois substituir a base 10 pela variável x. Finaliza-se a tarefa, classificando os polinômios obtidos em: monômio (expressão polinomial de um termo algébrico), binômio (expressão polinomial de dois termos algébricos), trinômio (expressão polinomial de três termos algébricos) e, simplesmente polinômio, as expressões polinomiais que possuem mais de três termos algébricos. Dessa forma, temos que: 20 = 2 ·10 = *2x* (**monômio**), 45 = 4 ·10 + 5 = *4x + 5* (**binômio**), 304 = 3 ·10² + 0 ·10 + 4 = $3x^2 + 0x + 4 = 3x^2 + 0x + 4 = 3x^2 + 4$ (**binômio**), 561 = 5 ·10² + 6 ·10 + 1 = $5x^2 + 6x + 1$ (**trinômio**), 400 = $4x^2 + 0x + 0 = 4x^2$ (**monômio**) e 5732 = 5 ·10³ + 7 ·10² + 3 ·10 + 2 = $5x^3 + 7x^2 + 3x + 2$ (**polinômio**).

Ao modelizarmos a OML com polinômios de uma variável fica implícita uma pergunta: E os polinômios com mais de uma variável? Por entendermos que os polinômios com mais de uma variável possuem maiores abstrações algébricas, eles devem ser ensinados após o aluno compreender satisfatoriamente as abstrações algébricas dos polinômios de uma variável. Além disso, as expressões polinomiais com uma variável são mais propícias à dialética entre Aritmética e Álgebra. Esse fato é constatado por Carvalho e Pereira (2009) e Pereira (2012). Na pesquisa de Pereira (2012) encontramos a ampliação do alcance da técnica τ para os números inteiros positivos e negativos. Essa ampliação decorre que a tecnologia θ para N_i não mais se limita ao sistema de numeração decimal, porém, a escrita polinomial na potência de base dez se mantém por intermédio da ideia de valor posicional dos algarismos.

Tomemos o número inteiro –456. Se dele quiséssemos gerar um polinômio, primeiro teríamos que reescrevê-lo assim: **(–1) (456)**. Dessa escrita surgem então outras representações: $\mathbf{(-1)\ (400 + 50 + 6) = (-1)\ (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) = -4 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10 - 6}$. Substituindo 10 por *x*, temos então: $\boldsymbol{-4x^2 - 5x - 6}$. A tecnologia θ_k para representar um número inteiro N_k (k = 1, 2, 3, ..., n), na escrita polinomial de potência de base dez é: $N_k = (\pm 1)\ (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + ... + a_n \cdot 10^n)$, $0 \leq a_i < 10$, i = 0, 1, 2, ..., n. Nessa tecnologia, os números naturais estão contemplados, pois o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). Compreenda-se que no polinômio $4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 8x - 2$, a tecnologia θ_k permite pensar esse polinômio como resultado de: $(4x^4 + 0x^3 + 5x^2 + 0x + 0) + (0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 8x - 2) = (4 + 0)\,x^4 + (0 + 0)x^3 + (5 + 0)x^2 + (0 - 8)x + (0 - 2)$.

A ampliação da OML para os números inteiros nos possibilita aplicar a técnica τ em vários exercícios propostos pelos autores de livros didáticos de Matemática dos ensinos fundamental e médio. Nesses livros, as tarefas t_i do tipo *T* estão em diversas questões propostas para os alunos solucionarem, a exemplo da Figura 1.

Figura 1: Questão de multiplicação polinomial


62 Calcule.

a) $(x^2 + 3x - 4)(x - 2)$

b) $(c^3 + 4c^2 + c)(c - 1)$

Fonte: Andrini (2012, p. 92)

Na questão da Figura 1, o gênero de tarefa "Calcular..." leva ao tipo de tarefas *T*: **Calcular o resultado das multiplicações polinomiais**. As duas tarefas, que as denotaremos por $\mathbf{t_a}$ (tarefa **a**) e $\mathbf{t_b}$ (tarefa **b**), assumem os seguintes enunciados: $\mathbf{t_a}$: Calcular o resultado de $(x^2 + 3x - 4)$ $(x - 2)$; $\mathbf{t_b}$: Calcular o resultado da multiplicação de $(c^3 + 4c^2 + c)$ por $(c - 1)$. A solução da tarefa $\mathbf{t_a}$, pela técnica τ, que atribui a variável o valor 10, se ajusta melhor a noção de valor posicional: $(x^2 + 3x - 4)$ $(x - 2) = (1{\cdot}10^2 + 3{\cdot}10 - 4)$ $(10 - 2) = (100 + 30 - 4)$ $(10 - 2)$. Note-se que o expoente da variável indica a quantidade de zero relativo a cada termo algébrico em correspondência ao valor posicional, ou seja, $\boldsymbol{x^5}$ (cinco zeros), $\boldsymbol{x^4}$ (quatro zeros), $\boldsymbol{x^2}$(dois zeros) etc. Recomendamos não estabelecer a seguinte igualdade:$(100 + 30 - 4)$ $(10 - 2)$ = **126** × **8** = **1008** = $1{\cdot}10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8 = \boldsymbol{x^3 + 0x^2 + 0x + 8} = \boldsymbol{x^3 + 8}$. O resultado de $\boldsymbol{(x^2 + 3x - 4)}$ $\boldsymbol{(x - 2)}$ é diferente de $\boldsymbol{x^3 + 8}$, porque a tecnologia agora é dos números inteiros. A maneira correta, expomos a seguir:

100	+ 30	– 4	
×	10	– 2	
1000	+300	–40	
	–200	– 60	+ 8

= 1000 + (+300 – 200) + (– 40 – 60) + 8 = 1000 + (+100) + (–100) + 8

= **1000** +**100** –**100** +8 = $\boldsymbol{1x^3 + 1x^2 - 10x + 8 = x^3 + x^2 - 10x + 8}$.

A resolução da tarefa $\mathbf{t_a}$ revela que há particularidades aritméticas que não se aplicam às operações polinomiais. Isso se verifica quando tornamos $\boldsymbol{(x^2 + 3x - 4)}$ $\boldsymbol{(x - 2)}$ =**126** × **8** = **1008** = $\boldsymbol{x^3 + 8}$. Essa mesma solução se configura em **1000** + **(+100)** + **(–100)** + **8**, se considerássemos o pensamento aritmético para **(+100) + (–100) = 0**, mas por ser algébrico, **+100** se refere ao termo de grau dois e **–100** ao termo de grau um, logo os dois zeros de +1**00** equivalem ao expoente 2 do termo $\boldsymbol{x^2}$ e +1 o coeficiente desse mesmo termo. Em **–100** apenas um zero equivale ao expoente 1 do termo $\boldsymbol{x}$ e –10 o coeficiente.

Existe uma técnica τ elaborada por Delord (2003) aplicável na resolução de operações polinomiais que segue a mesma configuração da escrita polinomial de potência de base dez. A técnica proposta por Delord utiliza os coeficientes dos polinômios no processo resolutivo. Ilustraremos essa técnica com a resolução da tarefa $\mathbf{t_b}$:

	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	
	c^6	c^5	c^4	c^3	c^2	c^1	c^0	
×				1	4	1	0	
						1	–1	
+				–1	–4	–1	0	
			1	4	1	0		
			1	**3**	**–3**	**–1**	**0**	$\mathbf{= c^4 + 3c^3 – 3c^2 – c}$

Ao trazermos a técnica de Delord (2003) para a OML que propomos, temos a intencionalidade de que o professor de Matemática, dos ensinos fundamental e médio, conheça outras técnicas diferentes das que estão no livro didático, aplicáveis à resolução das principais operações polinomiais. Avançando nessa ideia, resolveremos a tarefas $\mathbf{t_c}$: Obter o quociente da divisão do polinômio $4x^3 + 5x + 6$ por $2x^2 + 1$. Primeiro, calcularemos o valor numérico dos dois polinômios, atribuindo ao x o valor 10, em seguida aplicaremos o algoritmo da divisão aritmética.

- $4x^3 + 5x + 6 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 6 = 4000 + 50 + 6 = 4056.$
- $2x^2 + 1 = 2 \cdot 10^2 + 1 = 200 + 1 = 201.$

$$
\begin{array}{l|l}
405'6 & 201 \\
\hline
-402 & 20 = 2 \cdot 10 = 2x \\
\hline
003 \rightarrow 36 & \\
\quad -0 & \\
\hline
\quad 36 = 3 \cdot 10 + 6 = 3x + 6 &
\end{array}
$$

Se o quociente $\boldsymbol{2x}$ e o resto $\boldsymbol{3x + 6}$ resultam de $(4x^3 + 5x + 6) \div (2x^2 + 1)$, então se verifica que: $(2x^2 + 1) \times \boldsymbol{2x} + (\boldsymbol{3x + 6}) = 4x^3 + 5x + 6$. De $(2x^2 + 1) \times \boldsymbol{2x}$, obtemos $\boldsymbol{4x^3 + 2x}$, adicionando-se a esse resultado $\boldsymbol{3x + 6}$, temos que: $\boldsymbol{3x + 6 + (4x^3 + 2x) = 4x^3 + 5x + 6}$. Logo, na resolução da tarefa $\mathbf{t_c}$ ocorre a equivalência entre divisão aritmética e divisão polinomial. Entretanto, Carvalho e Pereira (2009) testaram essa equivalência várias vezes e constaram que apenas uma parte das tarefas de divisão polinomial se ajusta a essa técnica. Digamos que essas tarefas constituem tipos de tarefas *T* para os quais o trabalho da técnica τ alcança.

A tarefa $\mathbf{t_d}$ nos ajudará a compreender com mais clareza o que Carvalho e Pereira (2009) identificaram no trabalho e alcance da técnica τ que compõe a nossa OML: $\mathbf{t_d}$: Efetuar a divisão de $p(x) = x^4 – 10x^3 + 24x^2 + 10x – 24$ por $h(x) = x^2– 6x + 5$ (DANTE, 2013, p. 181). Primeiro, tornamos $x = 10$ e calculamos o valor $p(10)$ e $h(10)$: $p(10) = 10^4 – 10\cdot 10^3 + 24\cdot 10^2 + 10\cdot 10 – 24= 10000 – 10000 + 2400 + 100 – 24= 2300 – 24 = \mathbf{2276}$; $h(10) = 10^2–6\cdot 10 + 5= 100 – 60 + 5 = 40 + 5 = \mathbf{45}$. Dividindo-se 2276 por 45, obtém-se 50 como quociente e resto 26. Na forma polinomial, $q(x) = 50 = 5\cdot 10 = 5x$ e $r(x) = 26 = 20 + 6 = 2\cdot 10 + 6 =2x +6$. Se o que acabamos de for verdadeiro, então: $p(x) = h(x) \times q(x) + r(x) = (x^2–6x + 5)\times (5x) + (2x + 6) = 5x^3 – 30x^2 + 25x + 2x + 6 = \mathbf{5x^3 – 30x^2 + 27x + 6}$. Vemos que a igualdade $\boldsymbol{p(x) = h(x) \times q(x) + r(x)}$ não se confirma. Por quê?

Os polinômios $p(x)$ e $h(x)$ possuem coeficientes negativos e isso se transformou em subtração quando calculamos o valor numérico dos dois polinômios. Na resolução da tarefa $\mathbf{t_a}$ recorremos à representação numérica por valor posicional para não proceder com a subtração. Assim, vejamos essa ideia aplicada à divisão polinomial:

- $p(x) = x^4 – 10x^3 + 24x^2 + 10x – 24 = 10000 – 10000 + 2400 + 100 – 24;$
- $h(x) = x^2–6x + 5 = 100 – 60 + 5;$
- $p(x) \div h(x) = (10000 – 10000 + 2400 + 100 – 24) \div(100 – 60 + 5):$

$$
\begin{array}{l|l}
10000 - 10000 + 2400 + 100 - 24 & 100 - 60 + 5 \\ \cline{2-2}
-(10000 - 6000 + 500) & 100 - 40 - 5 = x^2 - 4x - 5 = q(x) \\ \cline{1-1}
0 \quad -4000 + 1900 + 100 - 24 & \\
\quad -(-4000 + 2400 - 200) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 0 \quad -500 + 300 - 24 & \\
\quad\quad -(-500 + 300 - 25) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad 0 \;+\; 0 \;+ 1 = 1 = r(x). &
\end{array}
$$

Retomando a igualdade ***p(x) = h(x) × q(x) + r(x)***, verificaremos se a técnica τ pelo valor posicional associado ao expoente da variável satisfaz a tarefa $\mathbf{t_d}$ de divisão polinomial: $p(x) = \mathbf{(}x^2–6x + 5)\times(x^2 – 4x – 5) + 1 = x^4 – 4x^3 – 5x^2 – 6x^3+ 24x^2 + 30x + 5x^2 – 20x – 25 + 1= \boldsymbol{x^4– 10x^3+ 24x^2+ 10x – 24}$. O polinômio $\boldsymbol{x^4– 10x^3+ 24x^2+ 10x –24}$ confirma que a técnica τ soluciona a tarefa $\mathbf{t_d}$, porque $p(x) = x^4 – 10x^3+ 24x^2+ 10x – 24$. Nessa mesma tarefa podemos adaptar a técnica τ de Delord (2003) para a divisão polinomial:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	
x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	–10	+24	+10	–24	
–1	+6	–5			
0	–4	+19	+10	–24	
	+4	–24	+20		
	0	–5	+30	–24	
		+5	–30	+25	
		0	0	+1	= ***r(x)***

10^2	10^1	10^0	
x^2	x^1	x^0	
1	–6	+5	
+1	–4	–5	$= \boldsymbol{x^2–4x –5} = \boldsymbol{q(x)}$

Para completar o esboço de nossa OML, solucionaremos a tarefa $\mathbf{t_e}$: Resolver a divisão de $4x^4+ 6x^2 +8x + 6$ por $3x^2 + 6$. Na tarefa $\mathbf{t_e}$ temos uma divisão entre dois polinômios incompletos, algo nada simples para alunos do ensino fundamental e, às vezes, para alunos do ensino médio. Assim, tornemos $x = 10$ e calculemos o valor numérico dos dois polinômios: $4x^4+ 6x^2 +8x + 6$ = 4 ·10^4 + 6 ·10^2 + 8 ·10 + 6 = 40000 + 600 + 80 + 6 = **40686** e $3x^2 + 6$ = 3 ·10^2 + 6 = 300 + 6 = **306**. Nos dois valores numéricos obtidos, o algarismo zero indica os termos algébricos que faltam nos dois polinômios incompletos, ou seja, no polinômio $4x^4+ 6x^2 +8x + 6$ falta o termo $\boldsymbol{0x^3}$ e em $3x^2 + 6$, o termo $\boldsymbol{0x}$. Dessa forma, os polinômios completos são$4x^4+\boldsymbol{0x^3} +6x^2 +8x + 6$ e $3x^2 +\boldsymbol{0x} + 6$. A resolução da tarefa de $\mathbf{t_e}$ seguirá os moldes das tarefas $\mathbf{t_c}$ e $\mathbf{t_d}$:

- $4x^4+0x^3+6x^2+8x+6 = 40000 + 0 + 600 + 80 + 6;$
- $3x^2+0x+6 = 300 + 0 + 6;$
- $(40000 + 0 + 600 + 80 + 6) \div (300 + 0 + 6):$

$$
\begin{array}{l|l}
40000 + 0 + 600 + 80 + 6 & 300 + 0 + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-(40000 + 0 + 800)} & \frac{400}{3} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{4x^2/3 - 2/3} \\
0 \quad + 0 - 200 + 80 + 6 & \\
\qquad \underline{-(-200 - 0 - 4)} & \\
\qquad 0 \quad + 80 + 10 = 8x + 10. &
\end{array}
$$

O quociente da divisão está na representação fracionária, fato motivado pela divisão não exata entre 40000 por 300 e –200 por 300. Desse modo, apenas simplificamos as frações 40000/300 e –200/300. Com a tarefa **t_e**, atingimos os números racionais e o esboço da OML se completa. Porém, resta mostrarmos a resolução dessa tarefa pela técnica adaptada de Delord (2003):

10^4 x^4	10^3 x^3	10^2 x^2	10^1 x^1	10^0 x^0	
4	0	+6	+8	+6	
–4	0	–8			
0	0	–2	+ 8	+ 6	
		+2	0	+ 4	
		0	+ 8	+ 10	= $\boldsymbol{8x + 10}$

10^2 x^2	10^1 x^1	10^0 x^0	
3	0	+6	
4/3	0	–2/3	= $\boldsymbol{4x^2/3 - 2/3}$

A técnica τ de Delord aplicada à divisão polinomial usa a divisão de potência de mesma base para esquematizar a posição dos coeficientes dos polinômios dividendo, divisor e quociente. Por exemplo, se o termo de maior grau do polinômio dividendo for $\boldsymbol{x^7}$ e do divisor for $\boldsymbol{x^2}$, então o termo de maior grau do quociente resulta de $\boldsymbol{x^{7-2} = x^5}$. Neste caso, o esquema para resolver essa divisão seria assim:

10^7 x^7	10^6 x^6	10^5 x^5	10^4 x^4	10^3 x^3	10^2 x^2	10^1 x^1	10^0 x^0

10^5	10^4	10^3	10^2 x^2	10^1 x^1	10^0 x^0

O esquema acima se ajusta à multiplicação polinomial, conforme está na resolução da tarefa **t_b**, ou seja, aplica-se a propriedade do produto de potência de mesma base entre os termos do polinômio multiplicando e os termos do polinômio multiplicador. Além disso, todas as tarefas que expomos nesta seção fazem parte do esboço da OML para o ensino das principais operações polinomiais, no ensino fundamental e, por extensão, no ensino médio.

Considerações finais

O sistema de numeração decimal hindu-árabe (IFRAH, 1997a; 1997b) se configura como o principal sistema de numeração posicional ensinado com mais consistência, nas instituições escolares, a partir dos anos iniciais do ensino fundamental. Devido a esse sistema de numeração estar na base fundante das primeiras ideias de contagem numérica, isso nos permite estabelecer possíveis conexões entre operações aritméticas e operações algébricas. Nesse sentido, nosso objetivo, propor o ensino das principais operações polinomiais intermediado pelas operações aritméticas fundamentais, em conexão com o sistema de numeração decimal indo-arábico, configura-se como uma possibilidade de melhorar a compreensão dessas operações, sem renegar o saber-fazer das operações aritméticas.

Justamente por ser um sistema de numeração posicional que possui representações associadas às noções polinomiais, conforme indicam Floriani (2000), Delord (2003), De Maio (2009) e Carvalho e Pereira (2009), nos possibilita ensinar as principais operações polinomiais (adição, subtração, multiplicação e divisão) em conexão com as operações aritméticas fundamentais. Nessa conexão, o valor posicional relativo dos algarismos indo-arábicos e a escrita polinomial na potência de base dez são fundamentais (PEREIRA, 2012).

Algumas noções da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1998; 1999; MATHERON, 2000) constituem a modelização de uma organização praxeológica, a qual possui o bloco do saber-fazer, denotado por $[T/\tau]$ (tipo de tarefas T etécnica τ) e o bloco do saber, constituído pela tecnologia θ e pela teoria Θ, denota-se esse bloco por $[\theta/\Theta]$. Esses dois blocos praxeológicos menores se fundem em um maior – $[T/\tau/\theta/\Theta]$ – constituindo uma Organização Matemática Pontual (OMP). Várias dessas OMP estão no esboço da Organização Matemática Local (OML), que propomos para o ensino das principais operações polinomiais, ensinadas com mais consistência a partir do oitavo ano do ensino fundamental.

A tarefa t_i (**t_1**: Obter as somas das ordens semelhantes dos números 4567 e 97849) solucionada com a técnica τ, apoia-se na tecnologia θ do sistema de numeração decimal posicional indo-arábico. É essa tecnologia θ que redimensiona as conexões das principais operações polinomiais com outros sistemas de números, ensinados nas escolas do Brasil como conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais etc.). Assim, nossa intenção de ensinar as principais operações polinomiais, em conexão com as operações aritméticas fundamentais, se consolida e extrapola essa ideia inicial.

Para os professores de Matemática, dos ensinos fundamental e médio, indicamos a possibilidade de recorrerem a técnicas diferentes das que estão nos livros didáticos. Portanto, se esses professores assumirem o uso dessas técnicas em suas práticas docentes, no ensino das operações polinomiais, eles redimensionarão seu saber-fazer.

Referências

ANDRINI, A. *Praticando Matemática – 8o ano*. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARLES, D. J. D. *Aritmética razonada y nociones de álgebra: tratado teórico – prático – demostrado*. 57ª Edición, corregida y aumentada por D. José Maria Dalmau Casademont. Barcelona: Juan Darne, 1927. Madrid: Libreria y Casa Editorial, 1927. Gerona: Editores Dalmau Carles, Pla S. A., 1927.

CARVALHO, C. C.; PEREIRA, J. C. S. *Aprendizagem significativa – das operações aritméticas às operações algébricas: o tratamento das operações algébricas a partir das operações aritméticas como conhecimento prévio.* 2009. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

CATALÁN, P. B. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza; Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. (Monografias del Seminário Matemático "Garcia de Galdeano", 29). Tesis- Universidad de Zaragoza.

______. *El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactiques des Mathématiques,* v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF>. Acesso em: 18 abr. 2012.

______. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique*. 1998. Disponível em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2015.

______.*Enseignement de l'algebre et transposition didactique.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. v. 52, n. 2, 1994. Disponível em: <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf>. Acesso em: 09 maio 2012.

______. *Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college*. Deuxieme partie. Petit x, n. 19, p. 43-72, 1989. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>. Acesso em : 15 jun. 2015.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da álgebra*. Trad.: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CRANTZ, P. *Manuales Técnicos Labor Nº 2: Aritmética y Álgebra.Versión de la Duodécima Edición Alemana por David Soler Carreras*. Barcelona, Madrid, Buenos Aires, Rio de Janeiro: Editorial Labor S. A., 1949.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.v. 3

DELORD, M. *Opérations arithmétiques et algèbre des polynômes ou Apprend-on seulement les opérations pour trouver le résultat?* 2003. Disponível em: <http://michel.delord.free.fr/ar-alg.pdf >.Acesso em: 15 jun. 2015.

DE MAIO, W. *Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números*. Rio de Janeiro: LTC, 2011. (Fundamentos de Matemática, 16)

______. *Álgebra: estruturas algébricas e matemática discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2009. (Fundamentos de Matemática)

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Trad.: Hygino H. Domingos. Campinas-SP: UNICAMP, 2004.

FLORIANI, J. V. *Professor e pesquisador: exemplificação apoiada na Matemática*. 2. ed. Blumenau-SC: Ed. da FURB, 2000.

FONSECA, C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios.* Educación Matemática, v. 22, n. 2, p. 5-34, 2010. Disponível em: < http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n2/v22n2a2.pdf >. Acesso em: 15 jun. 2015.

IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção.* Tradução: Stella Maria de Freitas. Rev. téc. Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

______. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997a. v. 1

______. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997b. v. 2

KEPPKE, C. L. *Álgebra nos currículos do ensino fundamental. 2007*. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MATHERON, Y.. *Analyser lês praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques.* Petit x, n. 54, p. 51-78, 2000. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>. Acesso em: 15 jun. 2015.

PEREIRA, J. C. S. *Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de Matemática.* 2012. Dissertação (Mestradoem Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

ROXO, E.; CUNHA, H. L.; PEIXOTO, R.; NETTO, C. D. *Matemática – 2o Ciclo – 1a Série. 4*. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1948.

WECHELUM, A. *Arithmética.* 1562. Cum Privilegio Regis. Disponível em: <http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/985/10/arithmetica/>. Acesso em: 09 set. 2011.

ZUIN, E. S. L. *Somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros: o método analítico na Arithmetica Raciocinada de Pedro d'Alcantara Lisboa*, publicada em 1863. Revista Educação em Questão, Natal, v. 23, n. 9, p. 31-52, maio/ago. 2005. Disponível em: <http://www.revistaeduquestao.educ.ufrn.br/pdfs/v23n09.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2012.

Texto recebido: 24/03/2016
Texto aprovado: 07/03/2017