RECONHECENDO O *PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM* COMO ESTRATÉGIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

RECOGNIZING THE *FUNDAMENTAL COUNTING PRINCIPLE* AS A STRATEGY IN THE RESOLUTION OF COMBINATORIAL PROBLEMS

ANA PAULA BARBOSA DE LIMA[1]
RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA[2]

Resumo
O estudo objetiva investigar o reconhecimento, de professores de Matemática, do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) em situações combinatórias. Trata-se de um recorte de uma dissertação que investiga os conhecimentos de professores de Matemática à luz dos conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps. Como resultados, tem-se que há mobilização do conhecimento especializado do PFC quando professores aplicam esta estratégia na resolução de problemas de produto cartesiano, arranjo e permutação; porém, o mesmo não acontece em problemas de combinação; professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC, quando comparados com os do Ensino Fundamental, indicando influência da prática de ensino, bem com necessidade de melhor abordar este princípio em formações iniciais e continuadas.
Palavras-chave: Princípio Fundamental da Contagem; Combinatória; Professores de Matemática.

Abstract
The study aims to investigate the recognition, by Mathematics teachers, of the Fundamental Counting Principle (FCP) in combinatorial situations. This is an excerpt of a master's dissertation that investigates the knowledge of Mathematics teachers, in the light of knowledge proposed by Ball, Thames and Phelps. The results are that specialized knowledge of the FCP is mobilized when teachers apply this strategy in solving Cartesian Product, arrangement and permutation problems; however, the same is not true in combination problems; High School teachers better recognize the use of PFC, compared to Middle School teachers, indicating influence of teaching practice, as well as the need to better address this principle in initial and continuing education
Key words: Fundamental Counting Principal; Combinatorics; Mathematics Teachers.

[1] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco - EDUMATEC/UFPE, e-mail: lima.apb@gmail.com

[2] Doutora pela Oxford Brookes University – Reino Unido, Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – EDUMATEC/UFPE, e-mail: resrborba@gmail.com

O ensino de Combinatória e o Princípio Fundamental da Contagem

A Combinatória[3] é um tema clássico na Matemática e seu ensino é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) desde os anos iniciais do Ensino Fundamental com problemas envolvendo situações simples de contagem. Pessoa e Borba (2009), em um estudo realizado com 99 estudantes do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, concluíram que estudantes, a partir deste nível de escolaridade, já desenvolvem compreensão sobre problemas envolvendo raciocínio combinatório. Dessa forma, a Combinatória tem papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes. Já os PCN (BRASIL, 1998), para os anos finais do Ensino Fundamental, orientam que os problemas que envolvem o raciocínio combinatório sejam tratados, nesta etapa de escolaridade, com números maiores do que aqueles trabalhados nos anos iniciais. Assim, os estudantes poderão perceber o *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC implícito nestes problemas.

Para que haja este ensino gradativo da Combinatória, dos anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, segundo Borba (2010), é preciso que o professor aproveite as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas combinatórios - operações aritméticas, desenhos, listagens e diagramas - e gradativamente vá se construindo procedimentos mais formais para resolução deste tipo de problema. A autora defende que, a partir de estratégias mais intuitivas, pode-se construir o uso do PFC e, a partir deste, pode-se dar a construção das fórmulas da Combinatória.

Os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e as Orientações Educacionais Complementares para o Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2012) reforçam esta orientação dada por Borba (2010) quando sugerem que o ensino da Combinatória, principalmente no Ensino Médio, seja feito com base no uso de estratégias mais intuitivas, em detrimento do uso das fórmulas. Nesse sentido, o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) já vem sendo introduzido em alguns livros didáticos do Ensino Médio no capítulo que trata do conteúdo da Combinatória. Entretanto, de acordo com os Guias do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD

[3] A Combinatória e Análise Combinatória são no artigo tratadas, basicamente, como sinônimas e, por vezes, Análise Combinatória se refere mais especificamente à disciplina cursada no Ensino Médio.

(BRASIL, 2011 e 2014), as inserções do PFC nos livros didáticos têm sido feita de forma discreta. Assim, os livros que trazem o PFC como estratégia para resolução de problemas Combinatórios o fazem apenas no início do capítulo referente ao estudo da Análise Combinatória e depois seguem o ensino baseado no uso de fórmulas para a resolução dos problemas apresentados.

O Princípio Fundamental da Contagem - enunciado e aplicações

O *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC, Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 125) pode ser enunciado como, “Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq”. Esta definição pode ser ampliada para outras decisões, D3, D4, D5 e assim por diante. De tal modo, o PFC pode ser aplicado ao diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*), sejam estes problemas simples ou que apresentem algum tipo de condição para sua resolução.

No que se refere aos problemas condicionais, Borba e Braz (2012) afirmam que o PFC é uma estratégia válida para resolução de diferentes situações, como, por exemplo, condições de *ordem*, de *proximidade,* de *escolha implícita* ou *explícita* de elementos. As autoras ressaltam, ainda, que o uso de fórmulas, nestes casos, pode ser um dificultador para a resolução de problemas combinatórios quando os mesmos apresentam algum tipo de condição para sua resolução. Maher, Powell e Uptegrove (2011), reforçam, ainda, que a introdução do PFC é uma ideia chave para o estudo da Análise Combinatória. No Quadro 01, Lima (2015) mostra como o PFC pode ser aplicado em diferentes situações combinatórias.

É preciso, no entanto, averiguar como o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) está sendo trabalhado na sala de aula por professores da Educação Básica, principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Quadro 01. Aplicações do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC).

TIPO	PROBLEMAS	REPRESENTAÇÃO USANDO O PFC
PRODUTO CARTESIANO	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos X QMP de lápis X QMP de borracha X QMP de canetas.
ARRANJO	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.
PERMUTAÇÃO	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.
COMBINAÇÃO	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta X quantidade de escolhas para o 2º atleta X quantidade de escolhas para o 3º atleta X quantidade de escolhas para o 4º atleta X quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.
ARRANJO CONDICIONAL	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ 1º lugar ocupado por Júlia X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.
COM BINAÇÃO CONDICIONAL	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos?	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 1º lugar ocupado por Jéssica X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.

Fonte: Lima (2015).

No presente estudo, o objetivo foi, então, investigar se professores de Matemática da Educação Básica reconhecem o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia para resolução dos diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*); observar os tipos de conhecimentos evidenciados pelos professores; e verificar se há diferença no uso de estratégias ao resolver problemas com quatro e cinco etapas de escolha[4].

Pensando nos conhecimentos que o professor deve mobilizar para o ensino e aprendizagem da Combinatória, faz-se necessário uma leitura sobre quais são os conhecimentos necessários para a prática docente, aconrados nas ideias de Shulman (1986, 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008).

Conhecimentos docentes na perspectiva de Shulman e Ball, Thames e Phelps

Sobre conhecimentos docentes, Shulman (1986, 1987) ao investigar processos seletivos para ingresso de professores na docência, observou que no início eram cobrados, destes professores, apenas conhecimentos acerca do conteúdo que seria trabalhado na sala de aula, sem se importar com aspectos metodológicos. Posteriormente, estes processos passaram a focar, os conhecimentos pedagógicos e metodológicos, sem se preocupar com o conhecimento que estes professores, que estariam ingressando na docência, tinham sobre o conteúdo que seria trabalhado.

A partir desta investigação, Shulman (1987) defende uma base de conhecimentos necessários à docência. Essa base de conhecimentos é composta pelas seguintes categorias:

> - conhecimento do conteúdo; - conhecimento pedagógico geral, com referência especial para princípios amplos e estratégias de gestão e organização da sala de aula que transcendem o assunto; - conhecimento do currículo, com particular compreensão dos materiais e programas que servem como "ferramenta de ofício" para o professor; - conhecimento pedagógico do conteúdo, amálgama especial de conteúdo e pedagogia, sua forma especial de compreensão profissional é próprio do professor; - conhecimento de alunos e suas características; - conhecimento do contexto educacional, variando entre o funcionamento do grupo ou classes, a gestão ou financiamento de distritos escolares, ao caráter de comunidades e culturas; e - conhecimento dos

[4] As etapas de escolha, consideradas neste estudo, referem-se ao número de escolhas necessárias para se chegar ao total de possibilidades em cada uma das situações combinatórias apresentadas.

finalidades educacionais, propósitos, e valores e seus fundamentos filosóficos e históricos.[5] (SHULMAN, 1987, p. 8).

Shulman (1987) elenca, dentre as categorias citadas, o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo* como sendo as categorias de maior importância para o professor, pois o mesmo precisa conhecer o conteúdo que será trabalhado em sala de aula e também de que forma esse conteúdo será trabalhado para que seus alunos possam ter o melhor aproveitamento possível.

Ball, Thames e Phelps (2008), ao estudarem o *conhecimento matemático para o ensino* a partir do *conhecimento do conteúdo* e do *conhecimento pedagógico do conteúdo* de Shulman (1987), com foco na prática do professor de matemática em sala de aula, elencam seis domínios diferentes. São eles:

Do *conhecimento do conteúdo*:

- *Conhecimento comum do conteúdo* (em inglês: *common content knowledge*) - habilidade matemática usada em uma ampla variedade de configurações e que não é exclusivo para o ensino;
- *Conhecimento especializado do conteúdo* (em inglês: *specialized content knowledge)* - habilidade matemática usada exclusivamente para o ensino;
- *Conhecimento horizontal do conteúdo* (em inglês: *horizon content knowledge)* - conhecimento de como os temas matemáticos estão relacionados e a previsão de aprofundamento destes conteúdos com o avançar da escolaridade.

Do *conhecimento pedagógico do conteúdo*:

- *Conhecimento do conteúdo e alunos* (em inglês: *knowledge of content and students*) - combinação entre conhecimento da Matemática e conhecimento sobre o aluno;

[5] Tradução nossa: em inglês "- content knowledge; - general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; - curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers; - pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; - knowledge of learners and their characteristics; - knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of schoool districts, to the character of communities and cultures; and - knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds."

- *Conhecimento do conteúdo e ensino* (em inglês: *knowledge of content and teaching*) - conhecimento do conteúdo matemático com a compreensão pedagógica para o ensino deste conteúdo;
- *Conhecimento do conteúdo e currículo* (em inglês: *knowledge of content and curriculum*) - conhecimento sobre os materiais e programas curriculares que orientam o ensino.

Método

Os dados apresentados neste artigo foram cedidos pelas autoras Rocha (2013) e Cunha, Lima e Rocha (2013). Inicialmente, os dados foram levantados, a partir de um mesmo instrumento de coleta, Quadro 2, construído na disciplina de Tópicos em Educação Matemática - Combinatória, do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. Assim, os participantes deste estudo são 13 professores dos anos finais do Ensino Fundamental - Grupo 1 - e 11 professores do Ensino Médio - Grupo 2. O instrumento que foi utilizado para coleta de dados, Quadro 2, continha oito questões, sendo duas de cada tipo (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*).

Nestes testes foram manipuladas as etapas de escolha (quatro ou cinco etapas) e também, os contextos (os mesmos para quatro e para cinco etapas: refeições, esportes, competições, fotos de artistas). A análise dos dados deste estudo foi feita com o auxílio do software estatístico Statistical Package for the Social Sciences - SPSS e o teste utilizado para comparação entre os grupos foi o de análise de variância - ANOVA.

Participantes do Estudo

Os dados referentes aos 13 professores dos anos finais do Ensino Fundamental, concedidos pelas autoras Cunha, Lima e Rocha (2013), são de professores formados em Matemática que lecionavam em escolas municipais e estaduais dos Municípios de Olinda e Recife. Já os dados cedidos por Rocha (2013) eram de 11 professores que atuavam em turmas do Ensino Médio, formados em cursos de Licenciatura em Matemática ou Ciências com habilitação em Matemática. Os participantes serão aqui identificados, como Grupo 1 e Grupo 2, respectivamente.

Neste estudo, o foco está no reconhecimento pelos participantes do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*, presente nas alternativas corretas de cada questão, e seu uso nas justificativas apresentadas pelos participantes, durante a resolução das questões propostas. É também objetivo observar se as etapas de escolha influenciam na escolha das estratégias e em quais tipos de problemas o PFC é mais utilizado.

Quadro 02 - Teste para coleta de dados.

Tipo	Problemas com 4 etapas de escolha	Problemas com 5 etapas de escolha
Produto cartesiano	No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 3 + 2 + 4 + 3 b) 3 x 2 x 4 c) 4 x 3 x 2 x 1 d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) 3 x 2 x 4 x 3 f) NDRA Justifique:	Na Lanchonete “Que Delicia” José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ c) 4 x 3 x 5 x 2 x 3 d) 4 + 3 + 5 + 2 + 3 e) 4 x 3 x 5 x 2 f) NDRA Justifique:
Arranjo	Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 7 x 4 b) 4 x 3 x 2 x 1 c) 7 + 4 d) 7 x 6 x 5 x 4 e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) NDRA Justifique:	Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 7 + 5 b) 7 x 6 x 5 x 4 x 3 c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 7 x 5 e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) NDRA Justifique:
Combinação	Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8 x 4 c) 8 + 4 d) 4 x 3 x 2 x 1 e) 8 x 7 x 6 x 5 f) NDRA Justifique:	Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 12 x 5 b) 12 + 5 c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 12 x 11 x 10 x 9 X 8 e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) NDRA Justifique:
Permutação	A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 4 x 4 b) 4 x 3 x 2 x 1 c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$ d) 4 + 3 + 2 + 1 e) 4 + 4 f) NDRA Justifique:	Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 5 x 5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) 5 + 4 + 3 + 2 + 1 d) 5 + 5 e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1 f) NDRA Justifique:

Fonte: Professoras e estudantes da disciplina Tópicos em Educação Matemática - Combinatória do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC / UFPE no semestre 2012.2.

Análise e discussão dos resultados

Na Tabela 1 observa-se a frequência de quantos participantes, em cada grupo, conseguem acertar todas ou parte das questões propostas no teste. Os erros/acertos parciais variaram, então, desde participantes que não acertam nenhuma das questões a participantes que acertam até sete das oito questões contidas no teste.

Tabela 1 - Frequência de acertos totais e erros/acertos parciais do teste.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**TOTAL**
Grupo 1	1	0	1	1	1	2	3	0	4	13
Grupo 2	0	0	0	0	0	0	3	3	5	11

Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio.

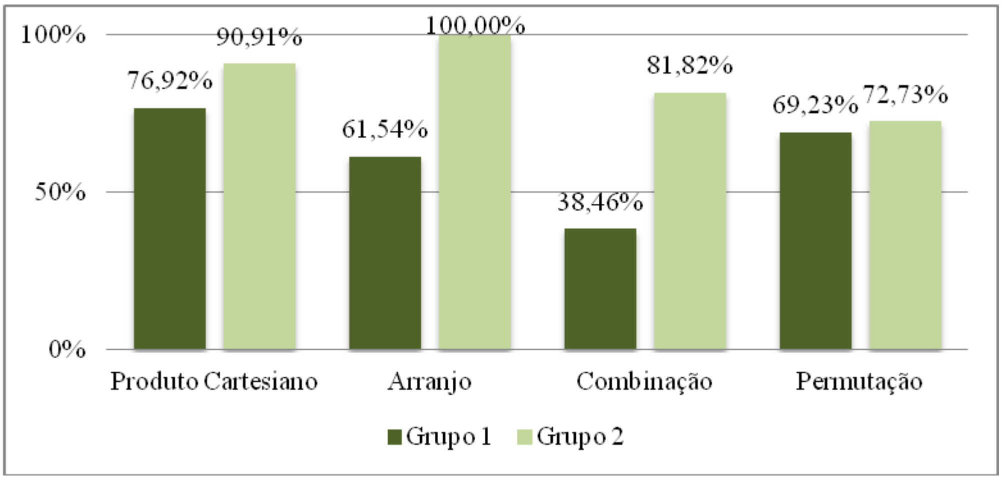
Fonte: Lima (2015)

Ressalta-se que a frequência de acertos totais foi baixa, entre o Grupo 1 – professores dos anos finais do Ensino Fundamental - e o Grupo 2 – professores do Ensino Médio, pois nos dois casos menos da metade dos participantes reconheceu o PFC nos diferentes tipos de problemas apresentados no teste. Assim, o desempenho foi aquém do esperado, nos dois grupos de professores.

Ao realizar o teste de análise de variância - ANOVA, para comparação entre os grupos de professores, foram observadas diferenças significativas entre os mesmos ($p < 0,001$). Uma justificativa plausível para essa diferença pode ser dada pelas experiências dos professores na prática de ensino da Combinatória, em particular do uso do PFC. Neste caso, os participantes do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) podem ter apresentado melhores resultados devido à prática de ensino deste conteúdo, principalmente no segundo ano do Ensino Médio, que é quando esse conteúdo é tratado de maneira mais efetiva. Resultados semelhantes, que apontam diferenças de conhecimentos entre professores com a mesma formação inicial, foram encontrados por Rocha (2011).

Na Figura 1, são apresentados os percentuais de acerto dos participantes nos dois problemas de cada tipo (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*) propostos no teste. É feita, então, uma comparação de desempenho entre os professores participantes dos Grupos 1 e 2 que atuavam em diferentes níveis de ensino – anos finais do Ensino Fundamental (Grupo 1) e Ensino Médio (Grupo 2).

Figura 1- Acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 1 e o Grupo 2.



Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio.
Fonte: Lima (2015).

Observa-se que os desempenhos apresentados são semelhantes entre grupos nos problemas de *permutação*, já nos problemas de *produto cartesiano, arranjo* e *combinação* observam-se diferenças significativas de desempenho entre estes dois grupos, principalmente no que diz respeito aos problemas do tipo *arranjo* e *combinação*. Acredita-se que a dificuldade em reconhecer o *Princípio Fundamental da Contagem* (*PFC*) presente nas opções corretas, nos problemas de *arranjo* e *combinação*, pelos professores de Matemática do Grupo 1, dê-se pelo fato dos mesmos não terem experiência com o ensino de Análise Combinatória neste nível de escolaridade.

A dificuldade enfrentada pelos professores do Grupo 1, em decorrência de sua falta de experiência no ensino de Análise Combinatória, se reflete na dificuldade em diferenciar problemas de *arranjos* de *combinações*. Para casos de *combinações*, é preciso reconhecer que o PFC será aplicado duas vezes, uma para fazer todas as combinações possíveis e, logo após, dividir, este resultado, pela permutação dos elementos repetidos, para, então, encontrar a resposta correta para o problema apresentado. Assim, observa-se que o Grupo 2 apresenta melhor desempenho ao reconhecer o PFC nos diferentes problemas propostos no teste.

Ao analisar a média de acertos entre os grupos, Tabela 2, evidencia-se novamente, a dificuldade que os participantes do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) têm ao resolver, principalmente, problemas de *arranjo* e *combinação.*

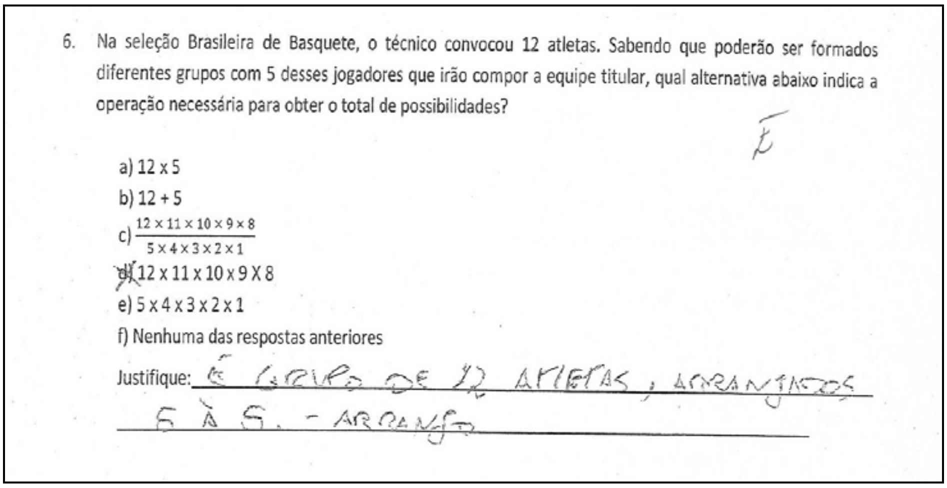
Tabela 2 - Média de acertos no teste por grupo.

	PRODUTO CARTESIANO	ARRANJO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO
Grupo 1	1,69	1,23	1,00	1,38
Grupo 2	1,91	2,00	1,73	1,55

Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio.
Fonte: Lima (2015)

De acordo com Rocha (2011), a dificuldade dos professores em diferenciar problemas de *arranjo* e *combinação*, ver Figura **2**1, demonstra um desconhecimento das situações no qual os invariantes do conceito referentes à ordenação irão implicar, ou não, em novas possibilidades. Neste caso, o professor de anos finais do Ensino Fundamental acredita se tratar de um problema de *arranjo*, quando de fato é uma *combinação*, uma vez que a ordem dos atletas nos grupos de cinco não determina possibilidades distintas.

Figura 2 - Justificativa de professor do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) ao resolver um problema de *combinação*.


6. Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

É

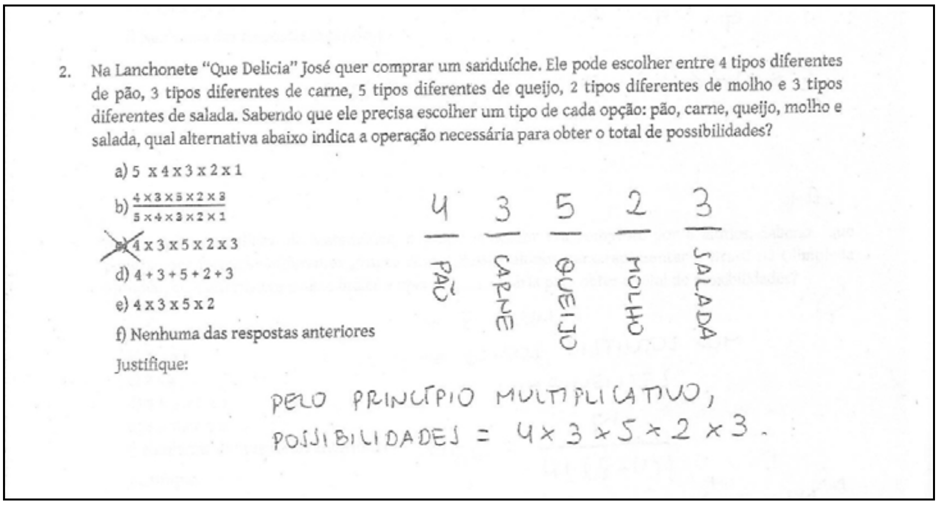
a) 12 x 5
b) 12 + 5
c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
~~d)~~ 12 x 11 x 10 x 9 X 8
e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: É GRUPO DE 12 ATLETAS, ARRANJADOS 5 À 5. - ARRANJO

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Os participantes do Grupo 1, entretanto, apresentam um melhor reconhecimento do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) nos problemas do tipo *produto cartesiano,* Figura **3**2. O reconhecimento do PFC na resolução nestes problemas aponta mobilização do *conhecimento comum da Combinatória* e *conhecimento especializado da Combinatória*, uma vez que o professor utiliza o PFC como estratégia de resolução de problemas deste tipo.

Figura 3 - Justificativa de um participante do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental), usando o PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano*.



2. Na Lanchonete "Que Delicia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 4 x 3 x 2 x 1

b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

c) 4 x 3 x 5 x 2 x 3

d) 4 + 3 + 5 + 2 + 3

e) 4 x 3 x 5 x 2

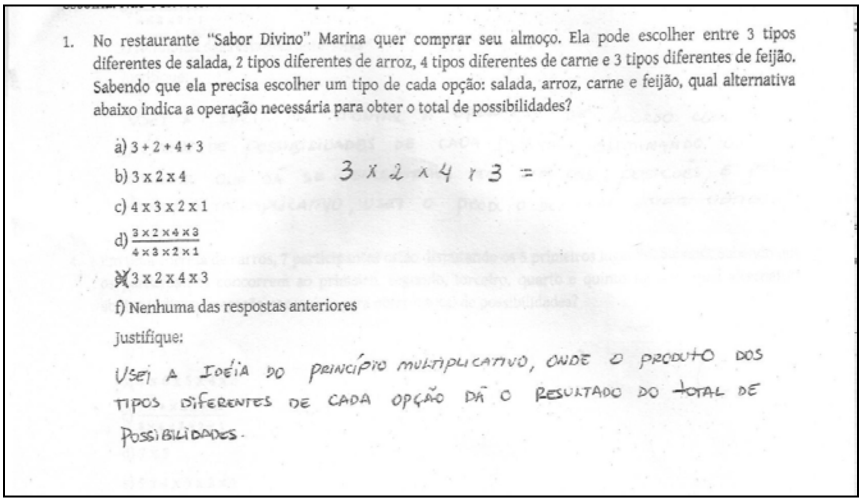
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Ao analisar as estratégias que foram usadas pelos participantes do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) para resolver os diferentes tipos de problemas presentes no teste, percebe-se que, para os problemas do tipo *produto cartesiano* há uso mais explícito do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC). Sobre quais tipos de conhecimentos os professores do Grupo 1 mobilizam, percebe-se o *conhecimento especializado do PFC*, quando os participantes utilizam o PFC para resolução do referido problema, como se pode obervar na Figura **4**3, e o *conhecimento comum do PFC* aparece quando os participantes apontam apenas a resposta correta para resolução do problema.

Figura 4 - Justificativa de participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano*.



1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 3 + 2 + 4 + 3

b) 3 x 2 x 4   3 x 2 x 4 x 3 =

c) 4 x 3 x 2 x 1

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

e) 3 x 2 x 4 x 3

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:

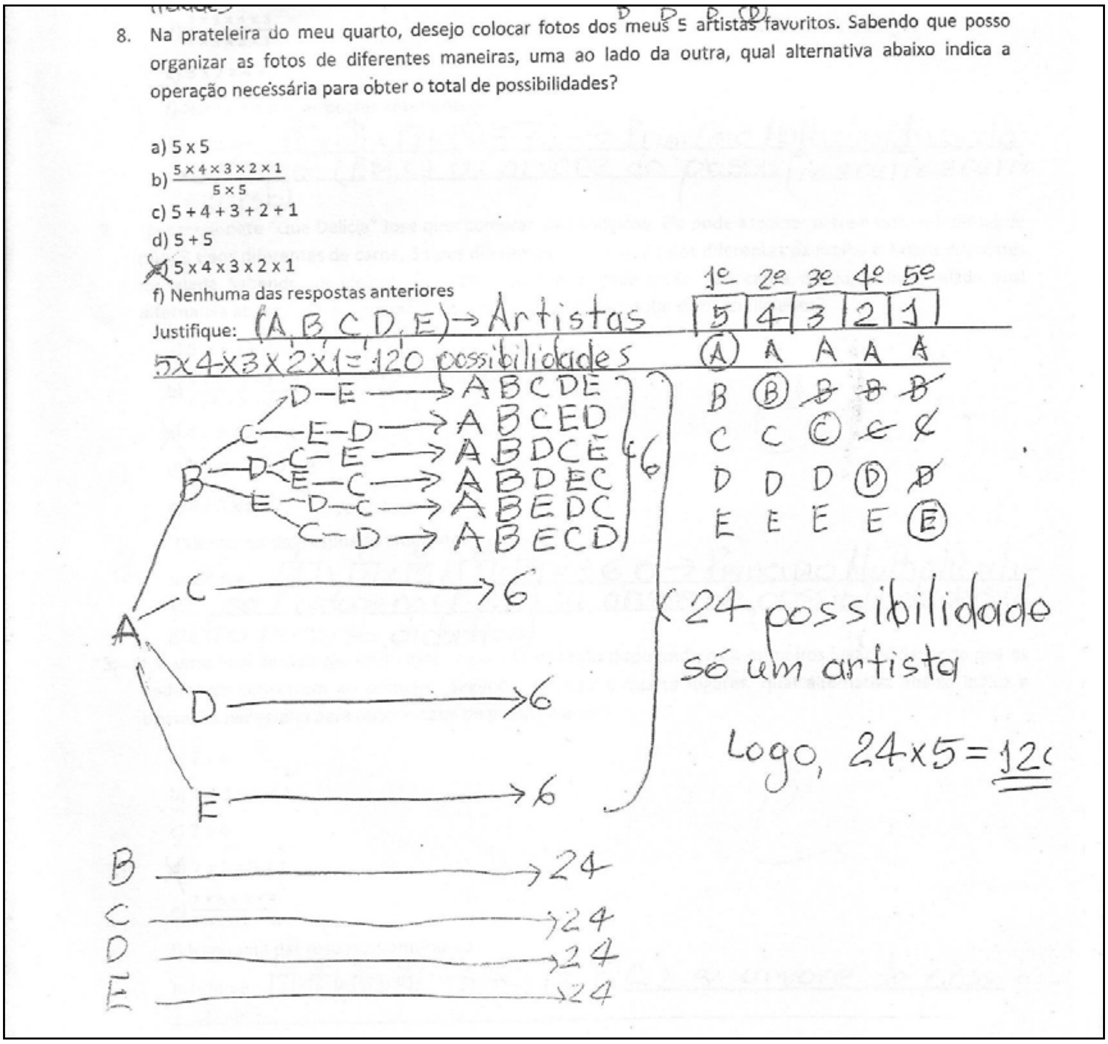
USEI A IDÉIA DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO, ONDE O PRODUTO DOS TIPOS DIFERENTES DE CADA OPÇÃO DÁ O RESULTADO DO TOTAL DE POSSIBILIDADES.

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Nos problemas de *arranjo, combinação* e *permutação*, o uso do PFC ainda é feito pelos participantes do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental), porém com menor explicitação, e, em algumas vezes, acompanhado de uma árvore de possibilidades. Na Figura **5**4, o professor, além de usar o PFC, construiu parcialmente uma árvore de possibilidades e em seguida faz uma generalização de modo que consegue encontrar o total de possibilidades da situação apresentada. Esta estratégia não deixa de se caracterizar como um indício de *conhecimento especializado do PFC*, mostrando, assim, um reconhecimento de que o mesmo pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas. Já nos problemas de *arranjo* e, principalmente, nos casos de *combinação*, o uso da fórmula aparece com maior frequência como estratégia para resolução destes problemas.

Nas justificativas dadas aos demais problemas, os participantes do Grupo 1 evidenciam o *conhecimento comum do PFC* nestes problemas, utilizando o PFC, mas sem explicitação sobre seu uso.

Figura 5 - Justificativa de um participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de *permutação*.



8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 5

b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$

c) 5 + 4 + 3 + 2 + 1

d) 5 + 5

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: (A, B, C, D, E) → Artistas

5x4x3x2x1 = 120 possibilidades

1º	2º	3º	4º	5º
5	4	3	2	1

ABCDE, ABCED, ABDCE, ABDEC, ABEDC, ABECD — 6

A → C → 6; D → 6; E → 6

24 possibilidade só um artista

Logo, 24x5 = 120

B → 24

C → 24

D → 24

E → 24

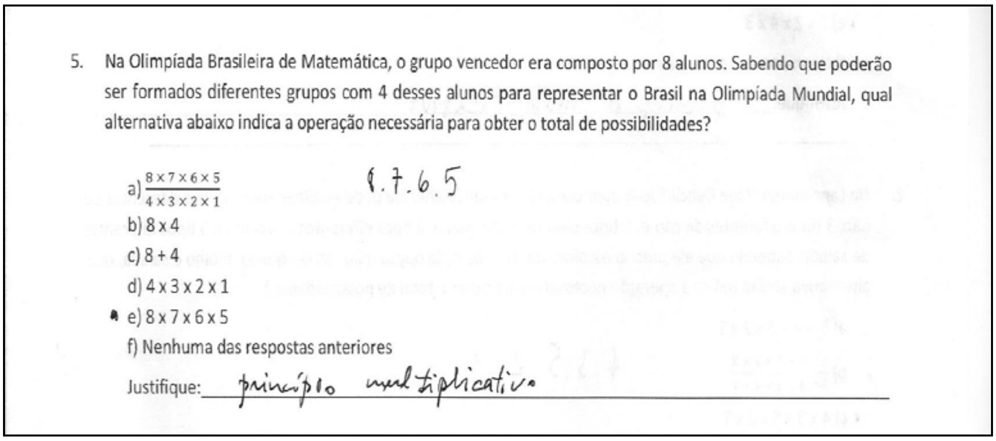
Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Os participantes do Grupo 2 – Professores do Ensino Médio – apresentaram melhor desempenho, como se pode observar pela - Média de acertos no teste por grupo. Na Tabela 2, (com acerto máximo em cada tipo de problema: 2,00), os acertos médios foram de 1,91 (para *produtos cartesianos*), 2,00 (para *arranjos*), 1,73 (para *combinações*) e 1,55 (para *permutações*).

Esses dados, como apontados por Lima (2015), apresentam fortes indícios de que há *conhecimento especializado do PFC* mobilizado pelos professores deste Grupo 2, uma vez que estes reconhecem e aplicam o *princípio multiplicativo* aos diferentes tipos de problemas combinatórios. As justificativas aqui apresentadas indicam maior frequência com menção ao PFC entre os professores do Ensino Médio.

Ao analisar as justificativas apresentadas pelo Grupo 2, nota-se, além da utilização–explícita do PFC nos problemas dos tipos *produto cartesiano*, *arranjo* e *permutação,* uma indicação de como estes problemas podem ser resolvidos por meio do PFC. Uma observação que chama atenção é a não indicação do PFC para resolver problemas de *combinação*. A Figura **6**5 mostra a dificuldade dos professores em relacionar o *princípio multiplicativo* a esse tipo de problema, uma vez que em problemas deste tipo o PFC deve ser duplamente aplicado. O professor indica, entretanto, a aplicação do princípio apenas uma vez (8 x 7 x 6 x 5), sem considerar a permutação dos elementos entre si, ou seja, a divisão do resultado obtido do produto acima por (4 x 3 x 2 x 1).

Figura 6 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de *combinação.*



5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 8.7.6.5
b) 8 x 4
c) 8 + 4
d) 4 x 3 x 2 x 1
e) 8 x 7 x 6 x 5
f) Nenhuma das respostas anteriores

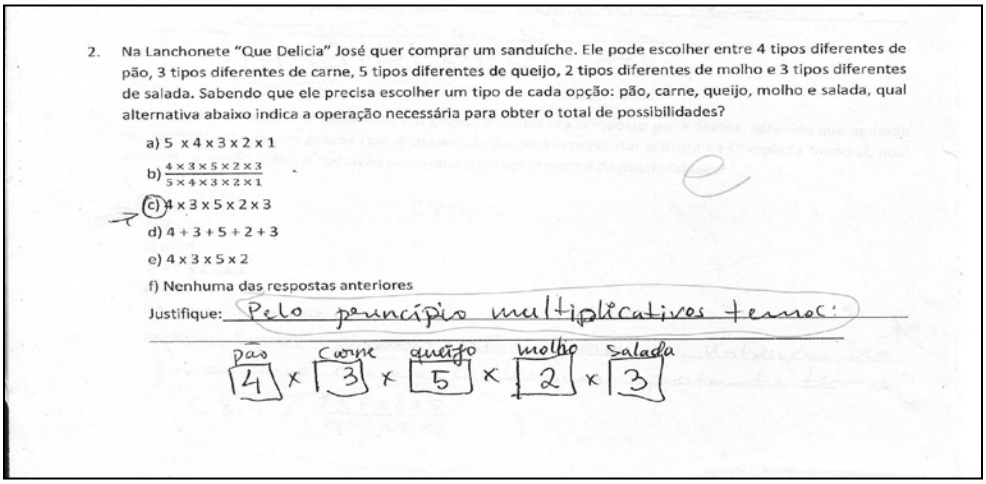
Justifique: princípio multiplicativo

Fonte: Rocha (2013).

Neste grupo há mobilização de *conhecimento especializado do PFC,* pois este tipo de conhecimento aparece explicitamente e com maior frequência em problemas de *produto cartesiano*. Na Figura **7**6 pode-se observar como se dá o uso do PFC como estratégia de resolução pelos participantes do Grupo 2.

Apesar do uso do PFC não ser feito com tanta frequência quando se trata de problemas envolvendo situações de *arranjo* e *permutação*, alguns participantes do Grupo 2 indicam o PFC para resolução destes tipos de problemas como observado nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano.*



2. Na Lanchonete "Que Delicia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$

d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$

e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$

f) Nenhuma das respostas anteriores

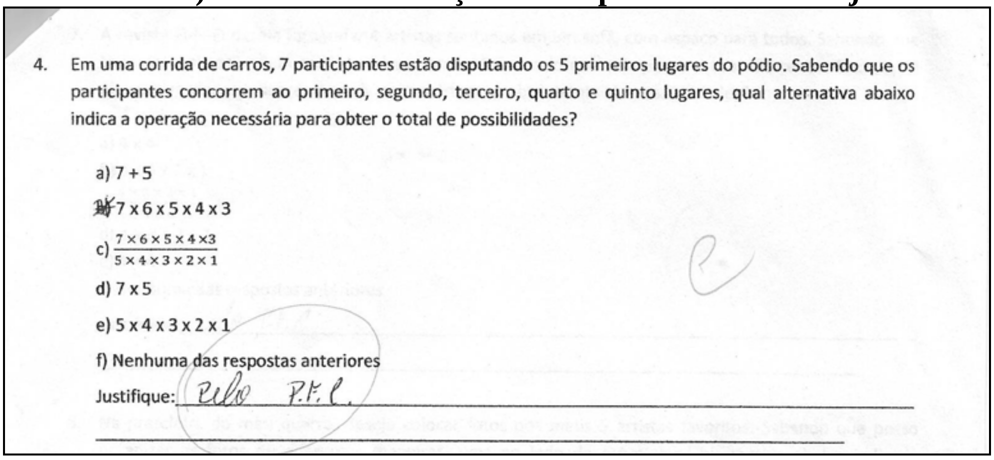
Justifique: Pelo princípio multiplicativo temos:

pão carne queijo molho salada

$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{2} \times \boxed{3}$

Fonte: Rocha (2013).

Figura 8 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) do PFC na resolução de um problema de *arranjo.*



4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $7 + 5$

b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

d) 7×5

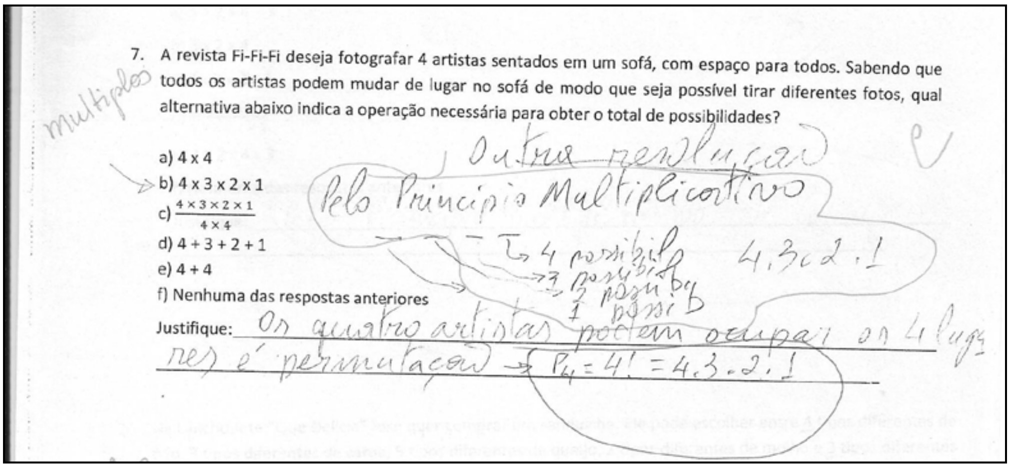
e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Pelo P.F.C.

Fonte: Rocha (2013).

Figura 9 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 do PFC na resolução de um problema de *permutação.*



7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

multiplos

a) 4×4

b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$

d) $4 + 3 + 2 + 1$

e) $4 + 4$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Outra resolução

Pelo Princípio Multiplicativo

4 possib

3 possib

2 possib

1 possib

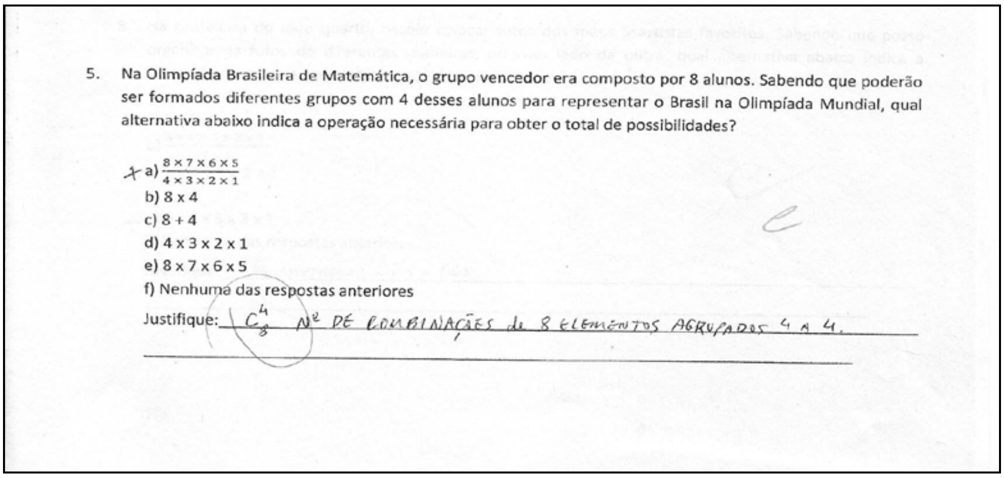
4.3.2.1

Justifique: Os quatro artistas podem ocupar os 4 lugares é permutação → $P_4 = 4! = 4.3.2.1$

Fonte: Rocha (2013).

Para os problemas de *combinação*, Figura 10, o que acontece é o uso predominante das fórmulas, sem a explicitação direta ao uso do PFC. Como visto anteriormente, em casos envolvendo situações de *combinação*, o PFC deve ser aplicado duas vezes e nem todos os professores do Grupo 2 percebem isso, já que nenhum explicitou claramente o uso do *princípio multiplicativo* nestes tipos de problemas.

Figura 10 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) de fórmula na resolução de um problema de *combinação*.


5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

X a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
b) 8 x 4
c) 8 + 4
d) 4 x 3 x 2 x 1
e) 8 x 7 x 6 x 5
f) Nenhuma das respostas anteriores

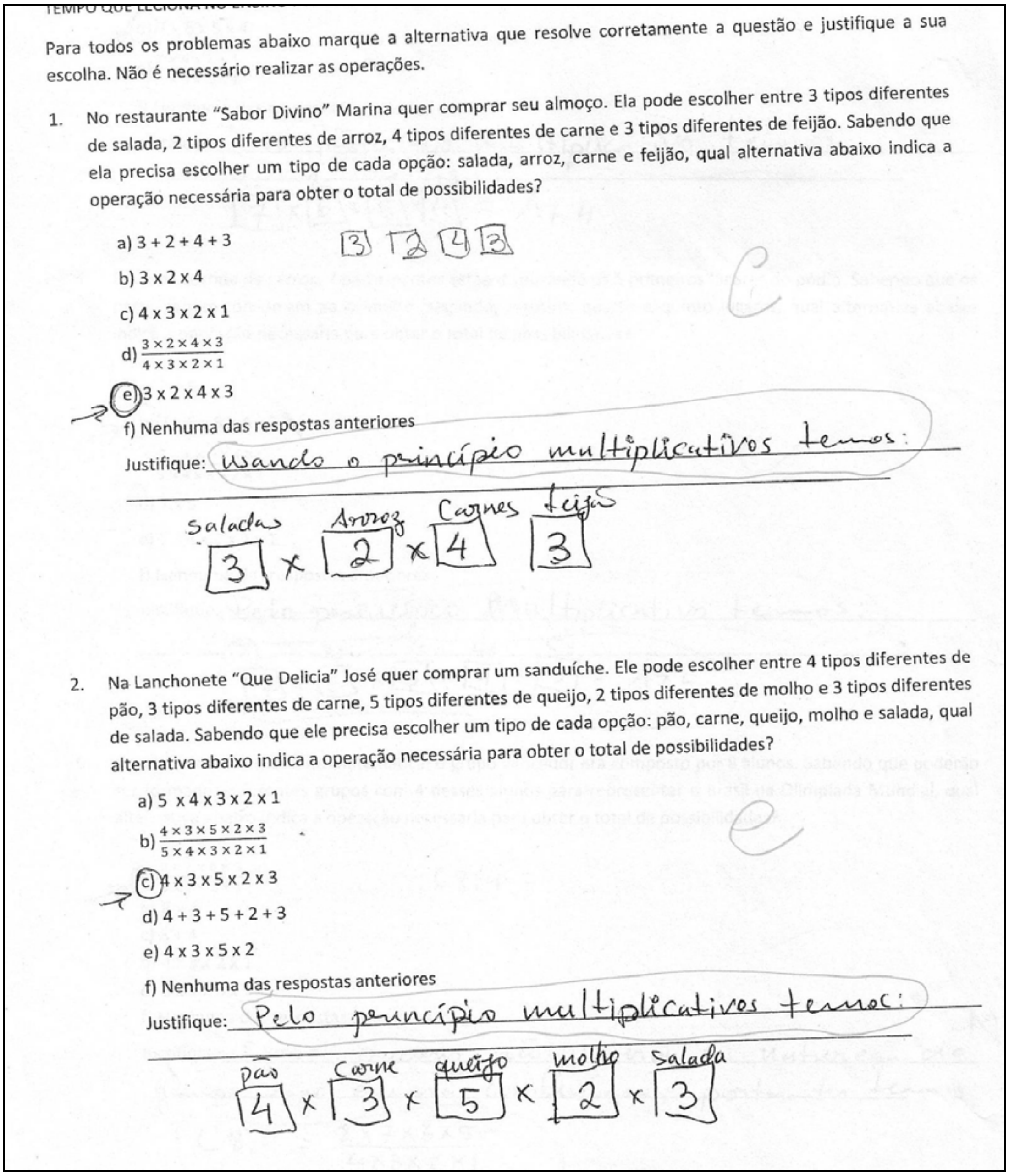
Justifique: C_8^4 Nº DE COMBINAÇÕES de 8 ELEMENTOS AGRUPADOS 4 A 4.

C

Fonte: Rocha (2013).

Observa-se, também, que as etapas de escolha não influenciaram na escolha das estratégias usadas pelos professores para resolver as situações combinatórias. O que há são participantes que usam a mesma estratégia para resolver os problemas propostos, seja ele com quatro ou com cinco etapas, como se pode observar na Figura 110.

Figura 11 - Estratégia usada por professor dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de *produto cartesiano* com 4 e 5 etapas de escolha.



Para todos os problemas abaixo marque a alternativa que resolve corretamente a questão e justifique a sua escolha. Não é necessário realizar as operações.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 3 + 2 + 4 + 3 $\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{3}$

b) 3 x 2 x 4

c) 4 x 3 x 2 x 1

d) $\frac{3\times2\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$

e) 3 x 2 x 4 x 3

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Usando o princípio multiplicativos temos:

Saladas $\boxed{3}$ x Arroz $\boxed{2}$ x Carnes $\boxed{4}$ feijão $\boxed{3}$

2. Na Lanchonete "Que Delicia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 4 x 3 x 2 x 1

b) $\frac{4\times3\times5\times2\times3}{5\times4\times3\times2\times1}$

c) 4 x 3 x 5 x 2 x 3

d) 4 + 3 + 5 + 2 + 3

e) 4 x 3 x 5 x 2

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Pelo princípio multiplicativos temos:

pão $\boxed{4}$ x carne $\boxed{3}$ x queijo $\boxed{5}$ x molho $\boxed{2}$ x salada $\boxed{3}$

Fonte: Rocha (2013).

Como observado por Lima (2015), de um modo geral, os participantes tendem a sempre usar a mesma estratégia para resolver os diferentes tipos de problema propostos, independente do número de etapas de escolha necessárias à sua resolução. Neste caso, o participante do Grupo 2 usa uma estratégia para resolver o problema de *produto cartesiano* e repete esta mesma estratégia para os demais problemas propostos.

Conclusões

Apesar de mostrar reconhecer o PFC nas alternativas corretas do teste, a maioria dos professores neste estudo não conseguem reconhecer a aplicação deste princípio nas diferentes situações combinatórias, como é o caso dos problemas de *combinação*. Nas justificativas apresentadas pelos participantes do Grupo 2 - Professores do Ensino Médio - o que se observa é o uso predominante de fórmulas para resolver problemas que envolvem situações de *combinação*. Nos demais problemas combinatórios, principalmente os que envolvem situações de *produto cartesiano*, os professores utilizam o PFC como estratégia de resolução.

Mesmo todos os professores participantes tendo a mesma formação inicial – Licenciatura em Matemática – o melhor desempenho foi apresentado pelos professores do Ensino Médio o pode indicar que a prática de ensino do conteúdo de Combinatória pode possibilitar um maior reconhecimento da aplicação do PFC em variadas situações combinatórias. Essa afirmação vai de encontro com os resultados de Rocha (2011), de que, apesar de mesma formação inicial, a experiência docente possibilita uma ampliação dos conhecimentos de Combinatória, em particular do PFC. Os saberes da prática, como apontados por Shulman (1986), Ball (1991) e Tardif (2012), são também motores para o desenvolvimento de conhecimentos docentes, Entretanto, o baixo desempenho dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental no reconhecimento do PFC em situações combinatórias, de modo geral, é preocupante e deve ser alvo de discussões em formações iniciais e continuadas.

Referências

BALL, D. (1991). Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.) Advances in research on teaching*:* Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction*.* Greenwich, CT: JAI Press, v. 2, pp.1- 47.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, v.59 n.5 pp. 389-407.

BORBA, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. Anais... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Salvador.

BORBA, R.; BRAZ, F. (2012). O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? Anais... 3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT. Fortaleza.

BRASIL. (2011). Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLD 2012 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação.

______. (2014). Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação.

______. (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica.. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC.

______. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática. Ensino de primeira a quarta série. Brasília: MEC, 1997.

______. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) 5ª a 8ª séries: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

CUNHA, M. J.; LIMA, A. P.; ROCHA, C. (2013). Raciocínio combinatório: compreensão dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Anais... 21 Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste - EPENN. Recife.

LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. (2006). Temas e problemas elementares. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 12 ed. Rio de Janeiro.

LIMA, A. P. (2015). Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. Dissertação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE. Recife.

MAHER, C.; POWELL, A.; UPTEGROVE, E. (2001). Combinatorics and Reasoning: representing, justifying and building isomorphisms. USA. Mathematics Education Library. Springer.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação (2012). Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife: SE.

PESSOA, C.; BORBA, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké - Cempem- FE - Unicamp - v. 17, n. 31 - jan/jun.

ROCHA, C. (2011). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, Universidade Federal de Pernambuco – Recife, PE.

ROCHA, C. (2013). Princípio fundamental da contagem e a compreensão de problemas combinatórios: olhares de professores do Ensino Médio. Anais... 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba.

SHULMAN, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, vol. 15, nº 2, pp. 4 - 14, feb.

______. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. Harvard Educational Review. Vol. 57, nº 1, feb.

TARDIF, M. (2012). Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. In Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. 14 ed. pp. 56-111.

Recebido em mar./ 2015; aprovado em dez./2015