ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 275-292

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Modelización Matemática en la Educación Secundaria

Marisa Reid, Rosana Botta Gioda

Fecha de recepción: 02/03/2020
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	En este artículo se presenta el relato de dos experiencias desarrolladas en cuarto año (14-15 años), en distintos colegios, de la Educación Secundaria, en donde se incorpora la modelización matemática como estrategia pedagógica con el objetivo de motivar el trabajo matemático y establecer fuertes raíces cognitivas de los conceptos de función lineal y cuadrática, utilizando recursos tecnológicos. Se pretende ofrecer descripciones y análisis de las situaciones de enseñanza y aprendizaje generadas en contextos de modelización, como insumos para poder modificar las estrategias didácticas en los nuevos escenarios educativos. **Palabras clave:** Modelización Matemática, Funciones, Educación Secundaria
Abstract	This article presents the account of two experiences developed in the fourth year (14-15 years), in different schools, of Secondary Education, where mathematical modeling is incorporated as a pedagogical strategy with the aim of motivating mathematical work and establishing strong cognitive roots of the concepts of linear and quadratic function, using technological resources. The aim is to offer descriptions and analyzes of the teaching and learning situations generated in modeling contexts, as inputs to be able to modify the didactic strategies in the new educational settings. **Keywords:** Modelling Mathematical, Functions, Education Secondary
Resumo	Este artigo apresenta o relato de duas experiências desenvolvidas no quarto ano (14 a 15 anos), em diferentes escolas, do ensino médio, onde a modelagem matemática é incorporada como estratégia pedagógica, com o objetivo de motivar o trabalho matemático e estabelecer fortes raízes cognitivas dos conceitos de função linear e quadrática, utilizando recursos tecnológicos. O objetivo é oferecer descrições e análises das situações de ensino e aprendizagem geradas em contextos de modelagem, como insumos para modificar as estratégias didáticas nos novos contextos educacionais. **Palavras-chave:** Modelagem Matemática, Funções, Ensino Secundário

1. Introducción

La escuela y sus actores inmersos en un mundo que experimenta continuamente grandes cambios nos lleva a tener que reflexionar respecto de nuestra práctica docente y el paradigma en que estamos ubicados, no podemos evitar ver lo que sucede a nuestro alrededor, en nuestra sociedad.

La educación secundaria no está ajena a estos cambios y la obligatoriedad es uno de ellos. En este sentido, el desafío, no es pensar simplemente cómo hacemos para que los chicos estén todo el tiempo en la escuela, completen niveles educativos y aprendan, sino también cómo revisamos la propuesta formativa, de forma tal que los prepare para vivir en sociedades que son mucho más complejas que aquéllas en las cuales surgió la escuela y donde la pluralidad de perspectivas, la diversidad cultural, aparece como una riqueza reconocida.

La importancia y necesidad de considerar el lenguaje matemático presente en la vida diaria de nuestros estudiantes debe ser una oportunidad para establecer un diálogo entre los saberes escolares y los saberes del alumno.

Los problemas son los que le dan sentido a la matemática y priorizar trabajar con ellos implica también pensar la matemática como una actividad de modelización, lo que nos exige un cambio de mirada sobre el trabajo que propiciamos entre nuestros estudiantes respecto del saber matemático. Barbosa, señala:

> La modelización es un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes son invitados a indagar y/o investigar, por medio de la matemática, situaciones de otras áreas de la realidad (Barbosa, 2001, p. 6).

Los temas abordados en el aula, en la mayoría de los casos, son distantes de la realidad de los estudiantes dejando de lado lo que podría motivarlos y no contribuyen a dotar al alumno de herramientas para enfrentar los desafíos del mundo contemporáneo. La modelización matemática, puede ser vista como una estrategia de enseñanza que instala la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje.

Si nos remitimos a los Materiales Curriculares para el ciclo orientado de la Educación Secundaria de Matemática (Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa, 2013) se promueve la modelización como una actividad fundamental del hacer matemático.

Se presentan en este trabajo dos ejemplos, producto de experiencias en distintos colegios, sobre el uso de la modelización matemática como estrategia pedagógica con el objetivo de motivar el trabajo matemático, establecer fuertes raíces cognitivas de los conceptos matemáticos básicos y proporcionar a los estudiantes experiencias donde la Matemática es un medio para describir, analizar y comprender situaciones de la vida cotidiana.

Se abordan, en aulas de secundaria de distintos colegios, la función lineal y cuadrática, analizando qué ocurrió en la real gestión de la clase.

El desarrollo de las propuestas exige observar, en detalle, lo que ocurre en estos ambientes de aprendizaje. Se pretende así, ofrecer descripciones y análisis de las situaciones de enseñanza y aprendizaje generadas en contextos de modelización, para poder modificar las estrategias didácticas propuestas o crear aquellas que se consideren adecuadas para este nuevo escenario educativo.

2. ¿En qué consiste la Modelización Matemática?

Para la implementación de la modelización matemática como un recurso en el aula, algunos autores han sugerido una serie de fases o etapas (Bassanezi, 2002, p.24; Blum et al, 2007, p.225; Blomhoj & Jensen, 2003, p.129).

En este trabajo, se adoptan los momentos descriptos por Blomhøj & Jensen (2003) que ofrecen una visualización útil y completa del proceso de modelización, a través de seis etapas o sub-procesos:

(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

(c) Matematización: traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Análisis del sistema matemático: uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

(e) Interpretación/Evaluación: de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Validación: evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El proceso de modelización siempre toma la forma de un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de su utilización conducen a una redefinición del modelo. De hecho, cada uno de los seis sub-procesos puede introducir cambios en el proceso previo.

La modelización matemática como estrategia pedagógica incluye objetivos didácticos y conceptuales. Por un lado, fomentar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de conceptos matemáticos básicos y, por otro lado, tratar con actividades de modelización considerando el conocimiento del ciclo de modelización como una herramienta para planificar la actividad.

3. Breve Descripción del diseño metodológico

La intención de esta investigación es analizar, interpretar y comprender las características de las dos propuestas didácticas de matemática que incorporan la Modelización Matemática como estrategia pedagógica apoyadas por el uso de tecnología en la Educación Secundaria.

Se emplea un abordaje cualitativo, el cual tiene como propósito “proporcionar informaciones más descriptivas que priman por el significado dado a las acciones” (Borba y Araújo, 2012, p. 24). Se utilizan una variedad de técnicas de recolección de datos y métodos de análisis e interpretación de estos.

Entre las características de la investigación cualitativa destacamos la predilección por un ambiente natural como fuente directa de datos, el predominio de datos descriptivos, una mayor preocupación con el proceso que con el producto, una postura inductiva en el análisis de los datos y la importancia dada al significado que los participantes del estudio atribuyen a sus actividades (Lincoln y Guba, 1985, pp. 39-43).

La perspectiva cualitativa requiere múltiples modos de recolectar datos (entrevistas en profundidad, observación participante, análisis de documentos, entre otras), y también diversos métodos de análisis sobre los mismos. No hay un privilegio de unos sobre otros, todo depende de la pregunta de investigación, de las características del campo y de la creatividad del investigador para lograr la comprensión del fenómeno.

El ambiente didáctico en el que se desarrollan las propuestas de enseñanza se constituirá en nuestro escenario de investigación.

En el marco del ambiente didáctico antes descripto se realizarán observaciones de tipo cualitativa. Adler y Adler (1994) caracterizan la observación cualitativa como fundamentalmente naturalista, en el sentido de que se efectúa en el contexto natural, entre las personas que participan naturalmente de los acontecimientos y siguiendo su flujo natural, pues ningún fenómeno puede ser entendido fuera del tiempo y el contexto en el cual ocurre. Los observadores cualitativos no están amarrados por categorías predeterminadas de medidas o respuestas, sino que procuran conceptos o categorías emergentes que parecen significativas para los participantes del estudio.

Otra fuente de datos a la que recurriremos serán producciones escritas de los estudiantes.

Según Charmaz (2006), la interpretación de los datos tiene como propósito generar comprensiones fundamentadas en la interrelación del referencial teórico de la investigación con los registros de las evidencias recolectas.

A partir de las observaciones y producciones escritas de los participantes, se iniciará un proceso de triangulación de los datos, como alternativa de validación (Flick, 2002, pp. 5-24). La combinación de múltiples prácticas metodológicas, materiales empíricos, perspectivas y observadores en un estudio se entiende mejor, entonces, como una estriega que potencia el rigor, la amplitud, la complejidad, la riqueza y la profundidad de una investigación dada (Flick, 2002, pp. 5-24).

4. Descripción y análisis de las experiencias

Las dos experiencias se desarrollaron en cuarto año del ciclo orientado de la Educación Secundaria y las temáticas que se abordan, las ubicamos en relación con uno de los ejes que estructura el espacio, según los Materiales Curriculares para el ciclo orientado de la Educación Secundaria de Matemática (Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa, 2013), en relación con las funciones y el álgebra.

En cuanto a los saberes seleccionados para el cuarto año del ciclo orientado de la educación secundaria (14 -15 años) está presente la modelización de situaciones que promuevan la interpretación, análisis y uso de funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas. Identificar, definir, graficar, describir e interpretar distintos tipos de funciones en diferentes marcos, decidiendo qué tipo de función y de representación se adecua como modelo para los diversos problemas.

El concepto de función, muy importante en el contexto matemático, debe ser abordado en una forma que permita al alumno más que la mera construcción de tablas y gráficos.

Es interesante llevar al alumno a confrontar relaciones funcionales que, desde su manejo inicial, permiten un análisis cualitativo de los gráficos que representan esas relaciones.

Los datos se recolectaron durante el desarrollo de actividades de modelización en cursos de distintos colegios. Las principales fuentes fueron las guías de actividades para los estudiantes, fotografías, los trabajos escritos producidos por los estudiantes, las observaciones registradas en el aula como dialogo entre los estudiantes y actitudes importantes de ser consideradas como elemento de información. El análisis de estas experiencias nos conducirá a resultados significativos que tienen como fin contribuir a generar cambios en la práctica escolar.

4.1 Función Lineal: el problema de las velas

La primera de las experiencias que se describe tuvo como objetivo iniciar el estudio de la función lineal.

La idea fue trabajar a partir de modelizar una situación extramatemática, presentando como punto de partida el interrogante:

¿Cuál es el tiempo que tardan distintos tipos de velas en consumirse?

Los contenidos específicos abordados en relación con la función lineal son:

- representación (gráfica, fórmula, tabla, descripción verbal);
- fórmula (parámetros pendiente y ordenada);
- modelización de una situación.

Al iniciar el trabajo dentro del aula se presenta al grupo el problema a resolver.

Los estudiantes conforman grupos de 2 o 3 y comienzan a trabajar, se plantea una actividad experimental en la que se estudia cómo varía la altura de la vela a medida que transcurre el tiempo, utilizando distintas velas y registrando sus observaciones. Los grupos elaboran hipótesis e identifican variables, grafican los datos y obtienen conclusiones.

En esta etapa de experimentación, como se muestra en la figura 1, se utilizan velas de distinto tipo, encendedor, regla y/o centímetro y el cronómetro del teléfono celular. Básicamente el trabajo consistió en medir la altura de la vela, encenderla y dejar quemar un tiempo determinado que cada grupo establecía, apagarla y medirla nuevamente.

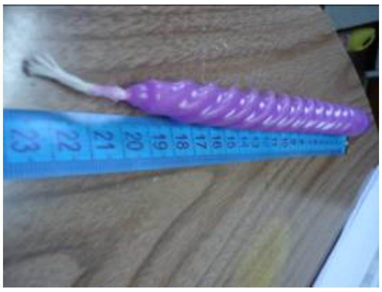



Figura 1. Etapa de experimentación de dos de los grupos.
Fuente: Fotografías propias de la experiencia.

El docente tuvo que intervenir ante algunos interrogantes surgidos como:

- *¿siempre debemos dejar la vela encendida el mismo tiempo?*
- *¿debemos hacer el experimento hasta que se nos queme toda la vela?*
- *¿anotamos lo que achica la vela o la medida que va quedando?*

Algunas de las respuestas del docente fueron: “tengan en cuenta que lo que tratamos de hacer es analizar el tiempo que tardan distintas velas en consumirse”, “analicen qué tipos de datos obtendrán del experimento para poder responder luego el interrogante”, “comencemos con el experimento y vamos a ir administrando el tiempo”.

En el transcurso del experimento aparecieron inconvenientes con algunas velas en donde la altura no variaba ya que se consumían en el centro. Esto permitió que los estudiantes comprendieran que el problema planteado no solo dependía de la altura, sino que hay otras variables que influyen en el proceso de quemado de las velas. Por lo tanto, se decidió realizar nuevamente el experimento utilizando únicamente velas de cera, de forma cilíndrica y de un diámetro determinado.

Los grupos fueron registrando los datos obtenidos en tablas. Mostramos algunos ejemplos en la Figura 2.

En un principio los registros de las mediciones siguieron un formato textual y posteriormente los distintos grupos decidieron organizarlos usando tablas.

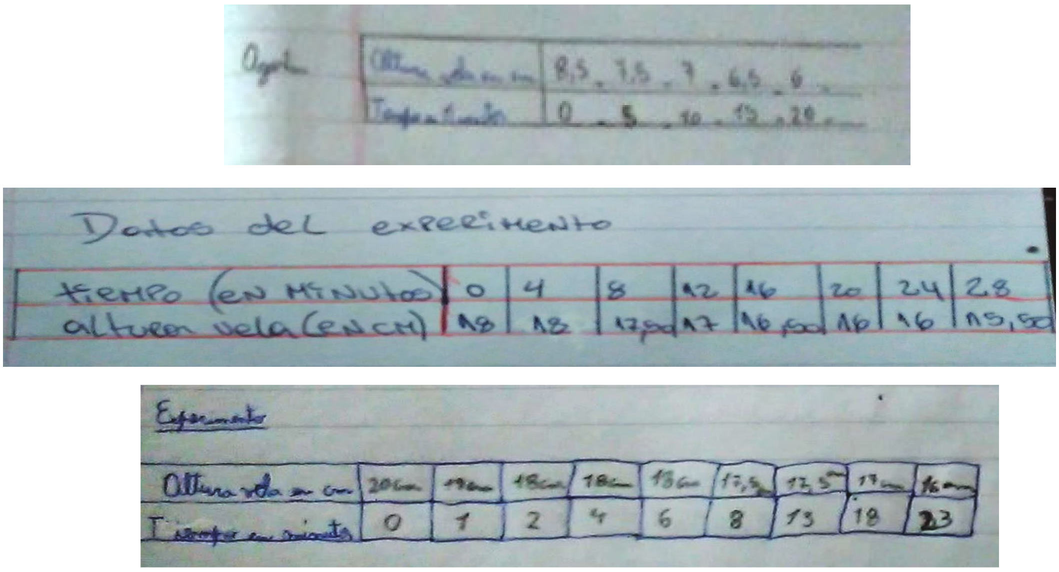


Figura 2. Ejemplos de registros de los datos del experimento por distintos grupos
Fuente: Fotografías propias de las producciones de los estudiantes.

La elección de las variables se realizó luego de una puesta en común guiada por la profesora, donde se analizaron los factores que influyen a la hora de encender una vela y observar el tiempo de duración de esta (tiempo, altura, ancho, o diámetro, clase de material de fabricación de la vela). Según Bassanezi (2002, p. 27) la abstracción es un proceso que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos. Dicho proceso incluye la selección de las variables, la formulación del problema en un lenguaje especializado, la formulación de hipótesis y la simplificación, dado que en muchos casos los fenómenos son lo suficientemente complejos para ser considerados con todos sus detalles.

Para comenzar el trabajo se realizaron las simplificaciones necesarias y se consideraron como variables la altura de la vela, en centímetros, y el tiempo en minutos. Seguidamente los estudiantes analizaron los datos obtenidos y registrados en las tablas. Seleccionamos, para mostrar cómo continuó el trabajo, la tabla de uno de los grupos (Tabla 1):

Tiempo (en minutos)	0	5	10	15	20
Altura de la vela (en centímetros)	8,5	7,5	7	6,5	6

Tabla 1. Tabla construida por uno de los grupos.

Dos grupos discutían sobre la posibilidad de responder a la pregunta inicial y conjeturaban:

— “La vela tarda 80 minutos en consumirse completamente”

— “La vela tarda 85 minutos en quemarse toda”

Mientras que otros grupos expresaban no poder responder hasta terminar definitivamente el experimento, es decir quemar totalmente la vela.

Una de las ventajas que presentó al elaborar tablas es que les permite descubrir regularidades como son diferencias constantes, diferencias que crecen (o decrecen) regularmente, productos o cocientes constantes, etc.

Los alumnos buscaron regularidades entre los datos obtenidos. En las conversaciones que mantienen, se menciona que la altura de la vela aumenta ciertos centímetros por cada minuto transcurrido. Se hace evidente, por tanto, que los alumnos se han dado cuenta de que la relación entre los datos que van obteniendo implica una tasa de variación media constante.

Se continuó con la tarea volcando los datos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos. Para ello debieron decidir, en función de los valores registrados en la tabla de datos, el intervalo visible del eje de abscisas y de ordenadas. Luego de que esos datos tomaron la forma de puntos del plano, estudiaron el comportamiento que tiene la “curva” o gráfica resultante.

Luego se buscó expresar esta relación mediante una función matemática. En la Figura 3, se muestra el trabajo de uno de los grupos.

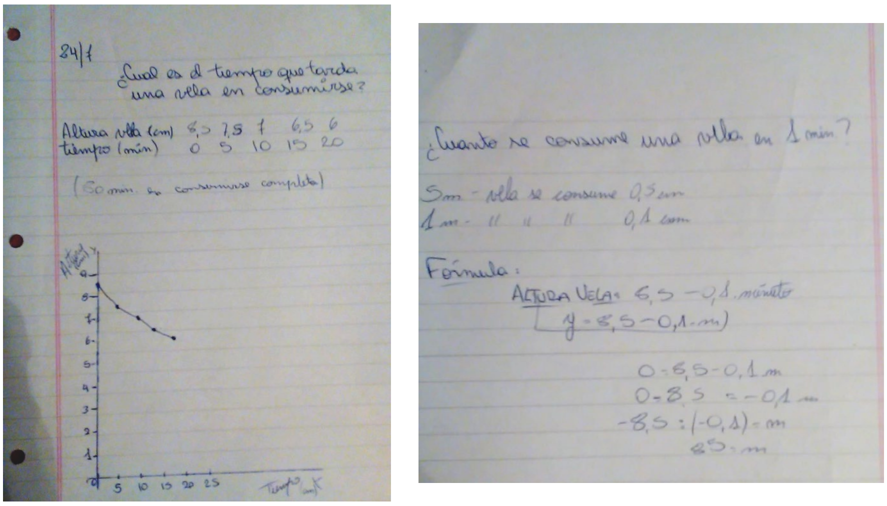


Figura 3. Trabajo de uno de los grupos.
Fuente: Fotografías propias de las producciones de los estudiantes.

En otro momento de la actividad, a partir de los datos registrados y utilizando el programa GeoGebra, se compararon los resultados obtenidos utilizando lápiz y papel.

Para llegar a determinar una ecuación que relacione las variables, se apeló a una "función de ajuste". Es decir, se trató de encontrar, una función que "pase" o que “esté más cerca" del conjunto de datos que se obtuvieron por experimentación.

Utilizando el software GeoGebra (Figura 4) se buscaron la expresión analítica de una función adecuada para ajustar los puntos obtenidos a partir de la tabla de datos.

En este momento del trabajo, la confirmación visual es muy valiosa, pero posteriormente se necesitó validar las conjeturas realizadas.

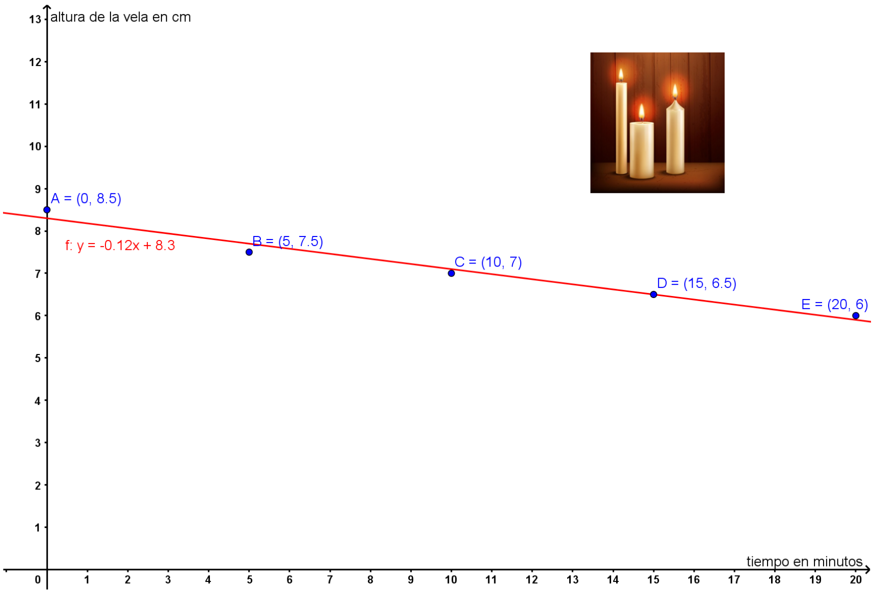


Figura 4. Gráfico y expresión obtenida con GeoGebra por uno de los grupos.
Fuente: Captura de pantalla de la producción de los estudiantes.

Se observa entonces que el uso de un software, como GeoGebra, puede ayudar a los estudiantes a visualizar el hecho de que se puede utilizar funciones matemáticas que no necesariamente deben pasar por todos los puntos y a validar otras encontradas en forma analítica.

El uso de GeoGebra facilita la conversión e interacción de los diversos registros de representación semiótica de un mismo objeto matemático, lo que posibilita el estudio y análisis de los invariantes conceptuales de cada tipo de representación lo que lleva a la discusión e intercambio entre los estudiantes.

Como expresan Ruiz, Avila y Villa-Ochoa:

> El uso de recursos tecnológicos en el aula de clase permite la creación de ambientes de aprendizaje en que los estudiantes pueden producir conocimiento matemático de una forma alternativa, donde se resalten aspectos de los conceptos no siempre explícitos en el modelo tradicional de presentación expositiva. El asistente matemático GeoGebra integra el trabajo en las áreas de geometría, algebra y análisis matemático en un ambiente dinámicos potenciando entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional (Ruiz, Avila y Villa-Ochoa, 2013, p. 12).

La fórmula que encontraron utilizando GeoGebra tiene diferencia con las halladas por los grupos, por lo que se analizó en una puesta en común las similitudes y diferencias.

El modelo hallado se encuentra en consonancia con la definición dada por Biembengut y Hein quienes afirman que:

> Un modelo matemático puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc. Dicho modelo proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno y retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada (Biembengut y Hein , 2003, p. 12).

El rol docente es de gran importancia, para que los alumnos se sigan preguntando, conjeturando y validando sus conclusiones. El profesor interviene reflexionando “A partir de los datos tomados de la realidad, debemos tratar de validar un modelo matemático que nos permita explicar el fenómeno, cuestionando las suposiciones básicas, los datos usados para estimar los parámetros, predecir lo que podría suceder con otra vela”.

Y también plantea algunos interrogantes para reflexionar como:

- ¿Qué gráficos obtuvieron a partir de los datos obtenidos?
- ¿Responden a funciones directamente proporcionales? ¿Por qué?
- ¿Se puede señalar alguna relación entre los términos de las fórmulas y los gráficos obtenidos?

En esta primera parte, se pudo observar que los estudiantes se involucraron completamente en la actividad, hasta los que no estaban trabajando anteriormente, y manifestaron estar motivados por el tipo de tarea que tenían que realizar.

Se encontró una relación lineal entre la altura y lo que se consume la vela en el tiempo transcurrido, en la cual los parámetros corresponden a la altura inicial como ordenada al origen y la velocidad del consumo como pendiente. Esta relación se obtuvo con datos recogidos a partir de la experimentación y el uso de GeoGebra.

La situación planteada deja abierta la posibilidad de continuar profundizando con el tema en un abordaje interdisciplinario con otras áreas de conocimiento, como física y química, tanto para mejorar la comprensión de los alumnos acerca de cómo se produce el quemado de las velas cómo para la obtención de modelos matemáticos más complejos y evolucionados.

En una clase posterior, se propuso a los estudiantes, a través de una hoja de cálculo interactiva de Excel o Excelet (Figura 5), la construcción de un modelo funcional interactivo que tiene también como propósito hacer visible de otra manera, la relación matemática-realidad estableciendo la altura de dos velas diferentes a medida que transcurre el tiempo y recoger dato en un gráfico.

Es una oportunidad de relacionar las TIC con la modelización, pues éstas resultan ser una importante herramienta didáctica para la representación de simulaciones de modelos.

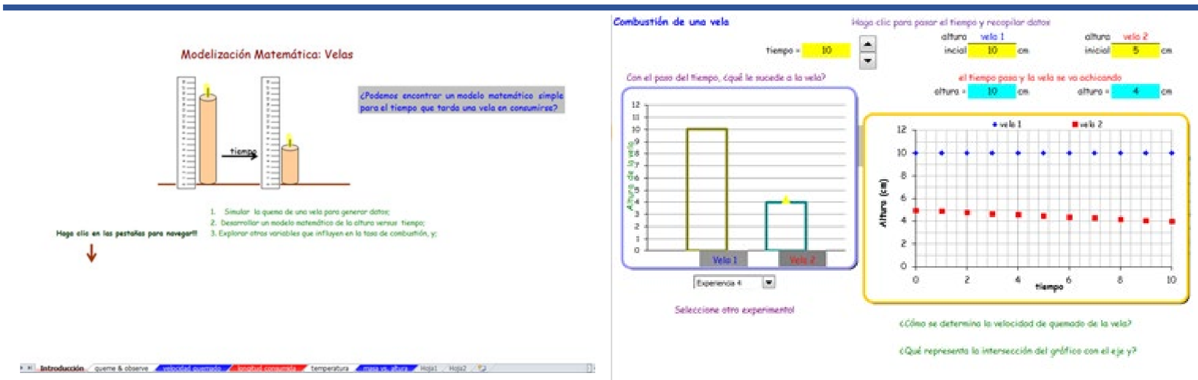


Figura 5. Hojas de Cálculo interactiva de Excel.
Fuente: Captura de pantalla de la producción de los estudiantes.

Se trabajó con la siguiente guía de preguntas:

- ¿Con el paso del tiempo ¿qué le sucede a la vela?
- ¿Qué representa la intersección del gráfico con el eje y
- ¿Qué representa el valor que multiplica al tiempo en minutos?
- ¿Cuáles datos coinciden con los del experimento que ustedes realizaron? o ¿Cómo comparan los datos de sus experimentos con los modelos presentados en la planilla de cálculo?
- ¿Qué representa la función creciente? ¿Y la decreciente?

Se fomentó la discusión acerca de las conjeturas elaboradas por los grupos y cómo se validaron.

Las hipótesis y conjeturas de los distintos grupos se expusieron, discutieron y validaron. El docente tuvo que trabajar sobre la interpretación de los errores u obstáculos didácticos encontrados en los comentarios anteriores.

A partir del análisis de la información recogida, se puede decir que unos pocos alumnos interpretan el modelo matemático como una función sin identificación clara con la situación que le dio origen, pero la mayoría, en cambio, sí tienen presente que el modelo obtenido pretende describir matemáticamente el tiempo que tarda en consumirse la vela.

Las respuestas que surgieron pueden ser enmarcadas en la propuesta de Blum y Leiss (2007); es decir, los estudiantes buscaron comprender el problema, simplificar, resolver matemáticamente e interpretar, y realizar una explicación de los resultados obtenidos.

Triangulando la información obtenida, podemos decir que, a partir de la situación, los estudiantes pueden construir una sólida base cognitiva para el concepto de función como un proceso ligado a variables, así como a un objeto matemático, que puede representarse en diferentes formas: verbal, tabular o numérica, algebraica o simbólica, y visual o gráfica.

La hoja de cálculo interactiva permite a los estudiantes desarrollar un modelo para comprender funciones lineales en general, es decir, cambiar la perspectiva de trabajar con un modelo de alguna situación real para ver el modelo en cuestión como un medio para comprender un concepto matemático.

4.2. Función cuadrática: el problema de las monedas

La segunda experiencia que se describe tuvo como objetivo, en el aula de clase, iniciar el estudio de la función cuadrática.

Se trabajó a partir de modelizar una situación, desde el siguiente interrogante:

¿Cuántas monedas necesito para "llenar" un círculo?

Se conformaron grupos de 2 o 3 estudiantes para trabajar en la actividad planificada en la que se estudió cómo varía la cantidad de monedas necesarias para rellenar un círculo si se modifica la longitud de su radio, utilizando distintas monedas ($0,25; $0,50 y $1).

La situación planteada se desarrolló en un ambiente experimental que presupone el uso de materiales relacionados con el problema propuesto y la producción de un informe escrito por cada grupo sobre el trabajo realizado y las conclusiones obtenidas.

Uno de los inconvenientes que se fueron perfilando a partir de las reflexiones realizadas con los estudiantes en los momentos iniciales del trabajo sobre la comprensión de la situación problemática, fue el significado de "llenar" o completar un círculo. Se acordó con todos los grupos que llenar o completar significa no superponerse entre sí ni salirse del círculo.

Es importante que los estudiantes reciban apoyo en la comprensión de la situación real que deben modelizar. Por ello el docente propone una discusión previa con todos los estudiantes sobre la forma de cómo están idealizando y entendiendo la situación o el problema.

Con este planteamiento los participantes comenzaron diversas tareas para responder esta pregunta como, por ejemplo: definir cómo hacerlo, proponer estrategias para abordar la pregunta, identificar variables y condiciones y decidir cómo recolectar, organizar e interpretar los datos.

Básicamente el trabajo consistió en rellenar círculos de distinto radio con monedas y cada grupo recibió una copia de circunferencias con distintos diámetros. Además, se proporcionó a los estudiantes el radio de cada una de las monedas: la de $0,25 tiene radio 12,1 mm; la de $0,50 radio 12,6 mm y la de $1 un radio de 11,5 mm.

Los distintos grupos se organizaron para explorar el problema usando distintos tipos de monedas y enmarcar su pensamiento sobre varios modelos posibles.

Se realizó la tarea planteada utilizando monedas de $0,25 y círculos de distinto tamaño (radio=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Luego se repitió el experimento anterior utilizando monedas de $0,50 y $1 sin mezclarlas, como se puede observar en la Figura 6.

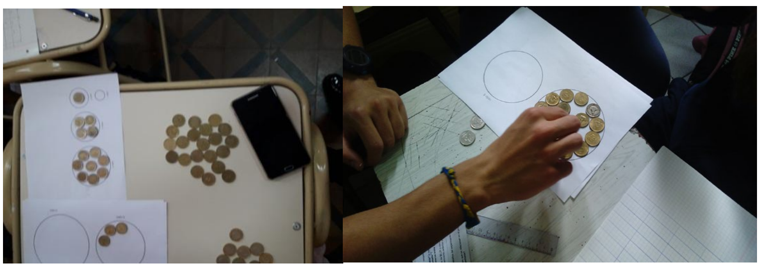


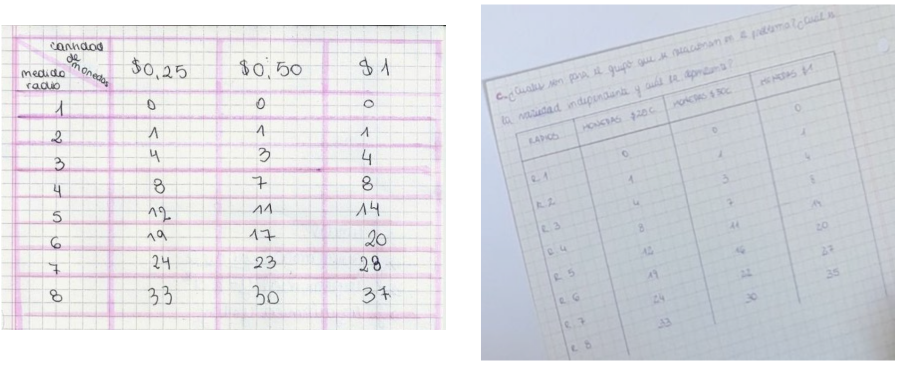
Figura 6. Rellenado de círculos con monedas.
Fuente: Fotografías propias de las producciones de los estudiantes.

En el informe escrito que presentaron los grupos indicaron que el concepto matemático de función era una herramienta eficaz para modelizar estas situaciones de cambio, y es la noción de dependencia entre variables la que involucra la existencia de una relación entre cantidades, la cual implica la idea de que un cambio en una de las variables tendrá efectos sobre las otras.

Finalizada esta primera etapa el docente intervino y preguntó: ¿Cuáles son para el grupo las variables que se relacionan en el problema? ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?

Luego de la discusión en cada uno de los grupos, se acordó con toda la clase que la variable independiente sería el radio de los círculos y la variable dependiente la cantidad de monedas.

Fue necesario registrar los datos obtenidos del experimento. Para ello discutieron en los grupos la forma de organizarlos y se puso en evidencia la importancia de la noción de representación (Figura 7).



cantidad de monedas / medida radio	$0,25	$0,50	$1
1	0	0	0
2	1	1	1
3	4	3	4
4	8	7	8
5	12	11	14
6	19	17	20
7	24	23	28
8	33	30	37

Figura 7. Tablas construidas por distintos grupos.
Fuente: Fotografías propias de las producciones de los estudiantes.

Se observa que este problema no responde al formato de un típico problema escolar y genera que los estudiantes movilicen todo su bagaje de conocimientos, interactuando la lógica de la matemática con la del sentido común. La creación de un modelo matemático para el problema permitió generar un importante discusión y exploración de la situación experimental, que involucró construcción y reconstrucción de conceptos matemáticos relevantes.

El docente fue quien tuvo a cargo la tarea de explicitar aquellos conocimientos matemáticos involucrados en la resolución del problema.

Con la idea de producir relaciones entre las variables que tuvieron en cuenta, el docente planteó: ¿Será posible, para cada tipo de moneda, encontrar una fórmula para calcular cuántas monedas son necesarias para completar un círculo de cualquier radio? ¿Qué deberíamos tener en cuenta?

En esta etapa los alumnos utilizaron el software GeoGebra instalado en sus netbooks, notebooks o celulares (Figura 8) para trazar los puntos correspondientes a la medida el radio y la cantidad de monedas según las tablas construidas por los distintos grupos. La representación de los puntos en un sistema de ejes cartesianos reveló una representación visual de un nuevo concepto no lineal.

Los estudiantes a veces esperan que el problema esté relacionado con alguno de los conceptos que ya han aprendido y que se resuelva con la aplicación de este conocimiento. Así que desde el principio buscan conceptos matemáticos familiares que se ajusten más o menos a la situación dada.

En este momento es necesaria la intervención docente para realizar una primera presentación de las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

Luego, se ajustan a un modelo, eligiendo entre lineal, cuadrático, exponencial y logarítmico, con todos los datos que la clase recopiló (Figura 8).

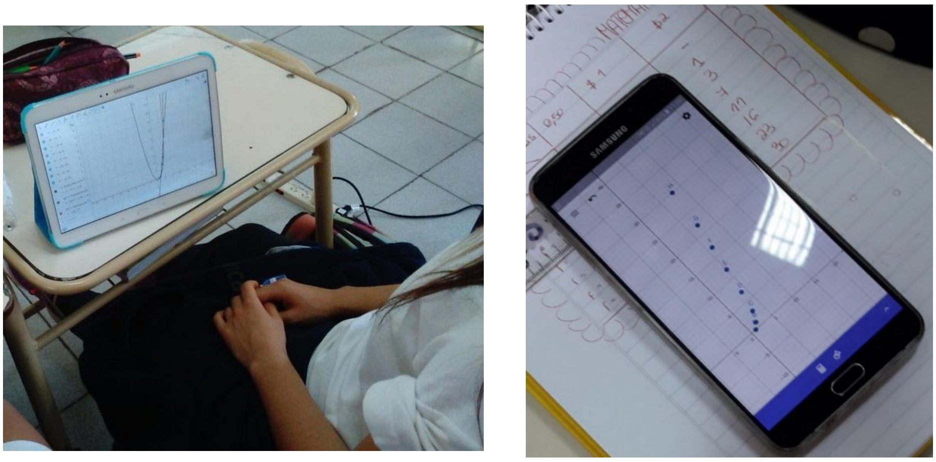


Figura 8. Gráficas construidas con GeoGebra por distintos grupos.
Fuente: Fotografías propias de las producciones de los estudiantes.

Partiendo de los datos obtenidos por cada grupo generaron funciones de ajuste a los puntos trazados en el plano (Figura 9).

El objetivo era construir la idea de modelo y evaluar si era adecuado para la situación dada, así como lograr que los estudiantes se involucraran y se aseguraran a partir de la función dada por el software de que era apropiada para modelizar la situación.

Ante la pregunta: ¿Cuál es la función que ajusta satisfactoriamente la cantidad de monedas cuando el radio aumenta?

Usando el método de los mínimos cuadrados que conduce a minimizar la función error se decidió que el modelo que mejor ajustaba correspondía a una función cuadrática.

Cada grupo fue capaz de explicar y justificar su elección del modelo discutido entre los miembros del grupo y con el resto de la clase.

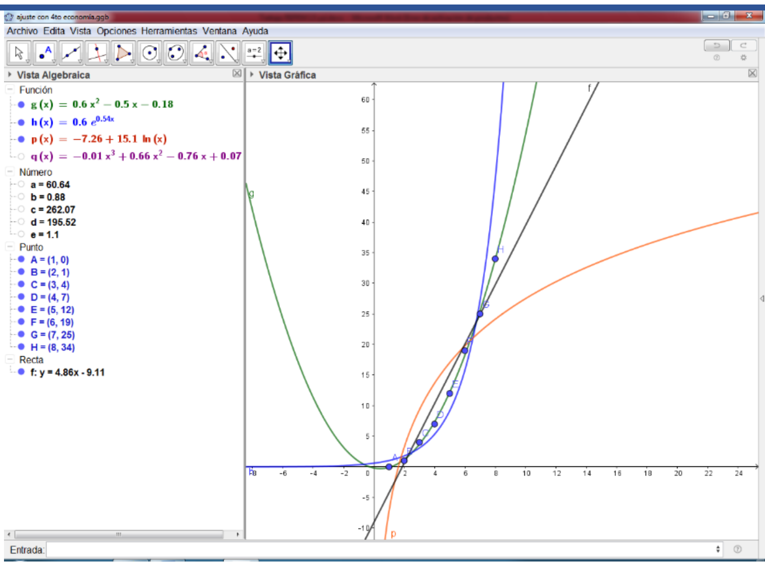


Figura 9. Funciones de ajuste generadas con GeoGebra por uno de los grupos.
Fuente: Captura de pantalla de la producción de los estudiantes.

El docente destacó la relación entre la representación algebraica brindada por el software y el sentido del problema (Figura 10).

Usando ese modelo respondieron a las siguientes cuestiones: ¿Qué radio debería tener un círculo para poder ser “llenado” con 100 monedas de $0,25? ¿Y de $0,50? ¿Y con las de $1?

En esta instancia se socializaron las tareas y conclusiones de cada grupo y las compararon con las de sus compañeros, considerando que el error y las exploraciones son instancias necesarias para el aprendizaje.

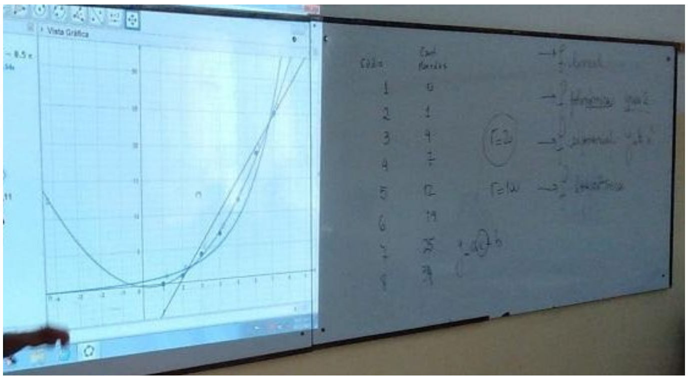


Figura 10. Socialización e intervención docente.
Fuente: Fotografías propias de la pizarra del aula.

La actividad permitió estimular el desarrollo del pensamiento matemático, y le dio mucho sentido al uso de funciones para modelizar situaciones. Los estudiantes estaban interesados en encontrar una respuesta al problema planteado.

Algunos grupos manifestaron que cuanto mayor fuera el número datos y en consecuencia de puntos en el gráfico mejor sería la función de aproximación que ajustara a esos datos.

Varios grupos descartaron alguno de los modelos obtenidos aduciendo a distintas razones, por ejemplo, las polinómicas de grado tres observando que las gráficas no se correspondían con lo que se podía predecir en el futuro, ya que cuando el radio del círculo aumenta, se supone que van a entrar más monedas y en la gráfica de la función polinómica de tercer grado se observa que comienza a decrecer. Por eso consideraron el modelo cuadrático como el más apropiado para describir esta situación.

Los estudiantes desarrollaron un concepto matemático con reflexiones implícitas sobre el contexto real. El modelo matemático obtenido cubre estructuras esenciales de la situación real. Este fue un momento significativo de aprendizaje en la distinción adecuada entre la función obtenida y la función aplicada en el caso concreto de la modelización realizada, o sea en la interpretación del resultado matemático acotando el dominio de definición en el contexto del problema.

El tiempo para la construcción del modelo y su validación fue escaso comparado con el tiempo destinado a la experimentación y sistematización. Según Blomhoj (2004) y Blomhoj y Jensen (2003) este fenómeno es uno de los principales obstáculos al trabajar con actividades de modelización en el aula.

El aprendizaje se produce por construcción, a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor, es decir, planifica para la adquisición de un conocimiento determinado. Son de interés tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la matemática y el trabajo escolar en general.

El docente, utilizando el enfoque de modelado como herramienta de enseñanza, estimuló a los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo la aplicación interdisciplinaria y haciendo que el proceso de enseñanza sea más cercano a la realidad del alumno.

La tecnología contribuyó a generar cambios en la manera de plantear y desarrollar las clases de matemática.

Las experiencias realizadas en las distintas clases mostraron que una dificultad está en la atención que el docente debe disponer a cada grupo, ya que cuando el trabajo de los grupos de estudiantes se diversifica, el grado de acompañamiento no va seguido de un ritmo similar de trabajo. Y sería natural que después de varias experiencias el profesor se sienta más preparado para llevar adelante este tipo de propuestas.

A partir de las producciones de los alumnos se destaca que es a través de la construcción de modelos, que el alumno relaciona los conceptos matemáticos con la realidad y entiende la necesidad del estudio de la Matemática y su importancia en la aplicación a otras disciplinas.

Del análisis de las experiencias coincidimos con Patricia Sadovsky (2005) quien sostiene que la modelización permite apreciar el trabajo matemático de una manera mucho más integrada en la medida que posibilita ver el funcionamiento de problemas, técnicas, representaciones y demostraciones.

> En general, la insuficiencia de algunas herramientas plantea la necesidad de inventar nuevas técnicas y nuevos modos de representar más potentes o ajustados; al hacerlo pueden surgir nuevas relaciones y se puede acceder a perspectivas más generales. La reflexión sobre los problemas puede dar lugar a conjetura, a la identificación de propiedades que podrán –o no- reformularse en organizaciones teóricas que funcionen más o menos descontextualizadas de los problemas que les dieron origen (Sadovsky, 2005, p. 31).

5. Comentarios Finales

La modelización matemática como una metodología de enseñanza nos exige un cambio de mirada sobre el trabajo en el aula, la responsabilidad de los estudiantes en el acto de aprender y de los profesores en su rol de orientadores. Los estudiantes ponen de manifiesto distintas maneras de pensar y abordar los problemas favoreciendo el desarrollo de sus sistemas conceptuales.

Acordamos con Blomhøj (2004) en que un argumento importante a favor de la modelización matemática como elemento central en la enseñanza de la Matemática es que tiende puentes entre la experiencia de la vida diaria de los alumnos y la Matemática.

Las experiencias promueven que los estudiantes elaboren conclusiones a partir de las observaciones realizadas, la información disponible y la confrontación de ideas en clase dando las razones que permiten sostenerlas; la reflexión sobre lo producido y las estrategias que se emplearon.

Blum, et al. (2007) observan que, si bien hoy las aplicaciones y la modelización juegan roles más importantes en las clases de matemática que los que jugaban en el pasado, aún existe una brecha considerable entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas de enseñanza que se desarrollan día a día.

En el análisis de las dos experiencias se puso en acción el reconocimiento del carácter empírico de la producción matemática y su vínculo con la tecnología.

El escenario creado por la profesora en los dos cursos abrió posibilidades para que los estudiantes formularan preguntas, explicaran, utilizaran el lenguaje matemático y se involucran en procesos de modelización transitando las diferentes etapas de este.

La modelización matemática como estrategia pedagógica contribuye a la construcción del significado de los conceptos matemáticos; los estudiantes, además de tener la oportunidad de entender cómo son necesarios para resolver un problema determinado, también encuentran anclajes de análisis y comprensión de otros conceptos matemáticos involucrados en la resolución del problema.

La inserción de esta estrategia en la clase de matemática se justifica por la necesidad de buscar estrategias alternativas en el proceso de enseñanza aprendizaje que instale la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Esta interacción o movimiento permanente: del mundo real a la matemática y desde la matemática al mundo real son esenciales.

En las dos situaciones de modelización planteadas, los estudiantes necesitan buscar caminos para abordar el problema; necesitan interrogarse y “mirar” la realidad. En definitiva, necesitan poner en juego lo que saben sobre la situación real y aportar conocimiento extramatemático relevante para la actividad, incluyendo una dosis de intuición matemática y sentido común.

Las intervenciones docentes tienen como objetivo promover la discusión y el intercambio de ideas entre los estudiantes. Se los debe incentivar a comprender y explicar las decisiones y supuestos, y a desarrollar su sentido crítico. En los problemas propuestos una discusión interesante puede darse en la elección de las unidades a usar, el tipo de monedas, el tamaño de velas y el tipo de error o precisión que sería conveniente usar.

El trabajo de hallar y analizar el modelo matemático puede ser favorecido y facilitado si se incorpora el uso de tecnología digitales. En muchos problemas los estudiantes pueden completar la información presentada con datos y elementos que buscan en Internet. En las situaciones planteadas, el uso del software GeoGebra fue determinante para la profundización y exploración de ideas matemáticas involucradas en las actividades planteadas.

Las actividades presentadas se diferencian de las que aparecen en la mayoría de los libros de textos de enseñanza secundaria, los enunciados propuestos en este trabajo pueden considerarse problemas abiertos para acentuar su naturaleza indeterminada y ambigua, susceptible de múltiples enfoques, en contraste con preguntas o problemas cuya estructura matemática se presenta más definida y predecible. Esto significa, que los enfoques o abordajes pueden variar entre los distintos grupos o en los distintos niveles de enseñanza, pero es esencial el uso de distintas representaciones, incluidos esquemas, tablas, gráficos, registros numéricos y algebraicos, relaciones matemáticas, etc. Por lo tanto, el uso de la modelización matemática lleva a los estudiantes, naturalmente, al uso de representaciones múltiples y su combinación en una actividad dada.

Bibliografía

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. Reunião anual da ANPED*, 24, 1-30.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* Editora Contexto. San Pablo. Brasil.

Biembengut, M., Hein, N. (2003). Modelagem Matemática no Ensino. 3a ed. Editora Contexto. San Pablo. Brasil.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling - A theory for practice.* En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, 145-159.

Blomhøj, M., Jensen, T. H. (2003). *Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning.* Teaching Mathematics and its Application 22 (3),123-138.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer, ICMI Studies series 10.

Blum, W., Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan, (2006), Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics. Chichester: Horwood Publishing. 222-231.

Borba, M. y Araújo, J. L. (2012) *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias.* En Borba, M. y Araujo, J. L. (Org.). Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 23-30.

Borromeo, R., Blum, W. (2009). *Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (1), 45-58.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, L., Borromeo Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., Stillman, G., English, L., Wake, G., Kaiser, G., Kwon, O. (2014). *Mathematical modelling in* *school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives*. Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 1, 145–172.

Materiales Curriculares de Matemática para la Educación Secundaria -Ciclo Orientado- (2013). Ministerio de Cultura y Educación. Gobierno de La Pampa.

Sadovsky, P. (2005). En *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Villa-Ochoa, J. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas, un marco de referencia y un ejemplo*. Tecno Lógicas, 19, 63-85.

Ruiz, M.; Ávila, P. y Villa-Ochoa, J. (2013). *Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas.* En Córdoba, Francisco; Cardeño, Jorge (Eds.), Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas Medellín: Fondo Editorial ITM. 446-454.

Lincoln, Y.; Guba, E. (1985). Naturalistic inquiry. California: Sage Publications.

Adler, Patricia A. & Adler, Peter (1994). Observation techniques. In Norman K. Denzin & Yvonna S. Lincoln (Eds.). Handbook of qualitative research. Thousand Oaks, CA: Sage. 377-392.

Charmaz, K. (2006). Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Flick, U. (2002). Qualitative research – State of the art. Social Science Information, 41 (1), 5-24.

Botta Gioda, Rosana G. Nació en Rafaela (Provincia de Santa Fe, Argentina, 1975). Es Profesora en Matemática y Computación, Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Es docente en nivel Secundario y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Desde 2001 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática. Correo electrónico: rbottagioda@hotmail.com

Reid, Marisa. Nació en Sansinena (Provincia de Buenos. Aires, 1966). Es Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de La Pampa. Es docente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Desde 1997 es integrante de proyectos de investigación en el área de Educación Matemática. Correo electrónico: mareid@exactas.unlpam.edu.ar