ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p327-346

Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares

An Epistemological Model of Reference for the study of the planning of surfaces of triangular pyramids

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA[1]

SADDO AG ALMOULOUD[2]

Resumo

Retomamos neste artigo um anteriormente publicado no sentido de ampliar as discussões lá propostas analisando a situação a partir de outro referencial. Trata-se da apresentação de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para a construção, no Geogebra, de planificações de superfícies de pirâmides triangulares de altura determinada, verificando condições e restrições para a referida construção. Tal MER pode justificar organizações didáticas que promovam Atividades de Estudo e Pesquisa (PEP) desenvolvidas a partir de questionamentos realizados durante a atividade que conduzirão a resolução do problema proposto. Um dos objetivos do estudo é proporcionar uma razão de ser para o trabalho com a representação plana de sólidos geométricos.

Palavras Chave: Pirâmide triangular. Planificação de superfícies de sólidos.

Abstract

In this paper we have taken back a previously published one in order to broaden the discussion considering another referential. It refers to an Epistemological Model of Reference (EMR) for the construction of surface planning of triangulated pyramids of determined height, verifying conditions and restrictions using Geogebra. EMR can justify pedagogic organization that enable the method Study and Research Activities (SRA), which is developed from questions emerging that will lead to the resolution of the proposed problem. The main objective of the study is supporting the surface representation of geometric solids work.

Key words: Triangular pyramids. Solid surface planning

Introdução

Desde o final da década de noventa temos nos dedicado à formação continuada de professores e, sempre que possível, buscamos tratar do ensino de Geometria na educação básica, ultimamente, em especial à geometria espacial. O trabalho de Almeida (2010),

[1] Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP, professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, zeze@pucsp.br
[2] Doutor em Mathematiques et Applications pela Universite de Rennes França, Vice Coordenador do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, saddoag@pucsp.br

que tratou de sólidos arquimediano e suas construções por truncaturas utilizando o software Cabri 3D, nos inspirou a olhar para alguns tópicos do currículo sob um novo ponto de vista. Em Silva (2012), Silva e Salazar (2012), Silva e Almouloud (2013), buscamos, com a ajuda desse software, utilizar as truncaturas para a construção de sólidos, que não são comumente trabalhados no ensino básico, para desenvolver fórmulas para o cálculo da medida de seus volumes, buscando integrar um trabalho essencialmente algébrico ao estudo de geometria. Concordando com Laborde (2007) quando afirma que podemos ampliar a capacidade de manipulação e processamento dos alunos com a introdução de tecnologias digitais, como os ambientes que proporcionam diversas representações dinâmicas para objetos matemáticos, bem como os tipos que conduzem à construção de significados. E, ainda, com Chevallard (1989) quando afirma que a geometria é um excelente ponto de partida para conduzir o aluno ao papel modelizador da álgebra.

No entanto, essa busca por novos pontos de vista para conteúdos de geometria teve início muito antes. Em Ardaya e Silva (2001), apresentamos o relato de uma experiência vivenciada em uma formação continuada de professores em que se discutiu as possibilidades de construção da planificação da superfície de uma pirâmide triangular. Nessa experiência, em uma determinada atividade[3], foi fornecido aos professores um modelo planificado para uma pirâmide triangular para que a observassem e montassem um modelo de pirâmide. Na sequência, foram apresentadas duas figuras compostas por quatro triângulos, cada uma, para que verificassem se representavam a planificação da superfície de uma pirâmide triangular. Foram apresentadas a figura de um triângulo com um ponto em sua região interior, que representava a projeção ortogonal do vértice sobre a base, de uma pirâmide triangular para que completassem a planificação, e outras três figuras, cada uma com dois triângulos, duas delas com a representação da projeção ortogonal do vértice para que completassem a planificação. Finalmente, perguntamos quais relações precisavam ser verdadeiras para se obter a planificação da superfície de uma pirâmide triangular. Assim, nesse artigo, relatamos, especificamente, a experiência de uma das professoras em formação que utilizou o Cabri II para construir suas hipóteses de solução e, enfim, chegar às condições que devem ser consideradas para que uma planificação represente efetivamente um modelo de pirâmide triangular.

[3] A atividade na íntegra está no anexo.

Passado esse tempo, decidimos retomar esse artigo com uma nova roupagem e sob um ponto de vista teórico que permita uma investigação para a busca de solução de tal problema que acreditamos seja possível ser utilizada com alunos do ensino médio. Estamos nos referindo à Teoria Antropológica do Didático.

Para o atual artigo, fizemos uma rápida revisão bibliográfica a respeito desse tema e encontramos trabalhos em que as planificações são dadas ou alguns modelos no espaço baseados, principalmente em cubos, são dados para que fossem construídas, tanto a representação em perspectiva, quanto as planificações das superfícies. Encontramos ainda, o artigo de Barachet, Demichel e Noirfalise (2007) para pirâmides de base quadrilátera em que são apresentados resultados de uma pesquisa que visou dinamizar o estudo de matemática no ensino secundário respeitando o programa oficial francês. Para isso os autores utilizaram Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) ou Percursos de Estudo e de Pesquisa (PEP) que sugerem, como ponto de partida, uma questão Q que conduz a outras questões e respostas até que a resposta à Q seja elaborada. No caso das AEP, podemos ter uma questão quase isolada, enquanto no PEP, podemos ter uma questão geratriz que conduz à elaboração de uma rede de questões até à resposta final ou, ainda, um conjunto de AEP.

Os autores identificam no programa quatro tipos de tarefas: 1) calcular grandezas geométricas: comprimentos, áreas, volumes; 2) determinar secções planas de sólidos; 3) representação plana de um sólido do espaço (por um desenho em perspectiva cavaleira) e 4) construir um modelo de sólido e construir um sólido a partir de um modelo (manipulação de objetos). Para eles, uma razão de ser para a geometria no espaço seria a busca de respostas a questionamentos do tipo "determinar grandezas geométricas", "construir sólidos sob certas condições" e "representar sólidos". Assim, apresentam uma Atividade de Estudo e Pesquisa, que foi trabalhada com alunos para construção de um modelo de pirâmide de base quadrilátera a partir de uma representação em perspectiva cavaleira.

Com essas referências, decidimos então, para atualizar o artigo já citado, buscar o foco do ensino de geometria no Ensino Médio brasileiro atualmente para verificar que conteúdos poderiam estar associados o objeto de nosso estudo.

O ensino de Geometria no Ensino Médio

O ensino de Geometria é uma preocupação do ensino de Matemática há algumas décadas. Já em 1993, Regina Maria Pavanello, em seu artigo *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências* alertava para tal fato. Tanto tempo depois será que realmente houve alguma mudança? Como estamos interessados no ensino de Geometria para o Ensino Médio, especificamente, no que se refere à planificação de superfícies de sólidos, procuramos as sugestões para tal ensino nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2002). Encontramos no tema 2, que trata de Geometria e medidas, que seu ensino "é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços" (Ibid, p. 123). Complementam que a utilização de formas geométricas "para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resoluções de questões da Matemática e de outras disciplinas" e que

> o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. (BRASIL, 2002, p. 123).

Como unidade temática, sugerem "interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos" (Ibid, p. 125). Assim, entendemos que faz parte das orientações desse documento o que pretendemos apresentar a respeito de planificação de superfícies de sólidos, bem como o trabalho com situações problemas em contexto real como "perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado" (Ibid, p. 129).

Por outro lado, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino médio (BRASIL, 2018, p. 517, ainda em discussão), tratando do tema de Grandezas e Medidas, sugere que o estudo de grandezas amplia a noção de medida dos alunos a partir da construção de expressões "para o cálculo da medida de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos". Para atingir tais objetivos os estudantes "devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" (p. 519). Neste ponto, a Base compartilha as sugestões dos PCN no que tange à necessidade de conduzir os alunos desse nível de ensino à investigação por meio de

> estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística -, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.” (BRASIL, 2018a, p. 527).

Para o desenvolvimento de tais competências associam várias habilidades, entre elas a resolução e elaboração de problemas que envolvem “o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados” (p. 529). Sentindo falta da esfera, enquanto um corpo redondo, fizemos uma busca no documento pela palavra “esfera” e, embora apareça várias vezes, tanto no singular, quanto no plural, nenhuma se referia a um sólido geométrico, ou seja, não há sugestão de seu estudo no ensino médio. Além disso, a construção de modelos sugerida seria realizada a partir dos sólidos estudados, ou seja, composição com prismas, pirâmides, cilindros ou cones, nada além disso. Outra habilidade apresentada é “resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.” (p. 533). Aqui se vê um retrocesso em relação aos PCN, pois estas habilidades deveriam ser construídas no ensino fundamental e, neste nível de ensino, deveriam ser mobilizadas como conhecimento já construído. Para terminar nossa busca na BNCC, procuramos pelos termos “planificação” e “poliedros” que resultaram em nenhuma ocorrência, ou seja, nada de poliedros platônicos ou planificações com régua e compasso como sugeriam os PCN, nem com uma sugestão para utilização de um software.

Dessa forma entendemos que nosso tema é relevante para a área de Educação Matemática e, na sequência, apresentaremos então o referencial que utilizaremos para analisar o artigo já mencionado.

Referencial Teórico

Para Chevallard (2012) a um determinado sujeito, em uma determinada instituição são impostas restrições que são consideradas, por tal sujeito, impossíveis de serem modificadas. Existe então um domínio institucional sobre o sujeito (o professor, por exemplo) que o impede de observar condições que poderiam ser modificadas e o conduz a esquecer as próprias restrições. A Teoria Antropológica do Didático assume que "a didática é a ciência das condições e restrições da difusão das praxeologias nas instituições da sociedade." (Ibid, p. 27). De acordo com Chevallard (1999), um saber é organizado por praxeologias em que o *saber fazer* está associado as noções de tipos de tarefa e de técnicas que solucionam essas tarefas e às noções de tecnologia e teoria que envolvem as justificativas para tais técnicas que, por sua vez, são justificadas por saberes científicos. Para o autor, uma praxeologia é considerada pontual se consideramos uma técnica que resolve um conjunto de tipos de tarefas, será considerada local quando agrupa várias praxeologias pontuais em torno de uma mesma tecnologia e será regional quando agrupa varias organizações locais em torno de uma mesma teoria.

Para Bosch e Gascón (2010, p. 56), o ensino escolar pode ser organizado de várias maneiras de acordo com alguma interpretação para a matemática "um *modelo epistemológico* – estreitamente relacionado com uma conceituação concreta do que se entende por "ensinar e aprender matemática" em cada momento histórico, em cada tradição cultural e em cada instituição: o que podemos considerar como um *modelo didático*." Para os autores quando os modelos didáticos "se apresentam como se não necessitassem de nenhum tipo de justificativa nem fundamentação explícita, além de critérios genéricos que emanam, principalmente, do senso comum, diremos que se trata de *modelos didáticos espontâneos*." Porém, desde meados do século passado os modelos são mais "deliberados" e menos "espontâneos" porque baseiam-se em critérios mais explícitos e discutíveis. Nesse sentido, os autores criticam a "pedagogia das competências", porque o processo de estudo não se apresenta detalhadamente organizado e justificado, pois é formulado em termos simplistas deixando o modelo didático, outra vez, em aberto.

Para os autores o problema da organização didática é o problema do desenho, gestão, avaliação e desenvolvimento de processos de estudo e, nesse sentido, tomando-se um programa organizado em temas associados a organizações matemáticas locais (OML) as Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) poderiam ser um novo modelo didático para o professor. Uma AEP tem início com um questionamento a respeito de alguma situação do mundo que requer a reconstrução da OML que se pretende estudar. Os autores supõem que "toda organização ou praxeologia didática [...] que vive em uma determinada instituição é sustentada e fortemente condicionada pelo *modelo epistemológico da* *matemática* dominante em tal instituição" (Ibid, p. 60). Sugerem então *modelos epistemológicos de referência* (MER) específicos que seriam elaborados para a análise e desenhos didáticos considerados relativos e provisórios para o investigador.

Observando então que, embora sejam citados nos documentos oficiais a construção de modelos, a planificação de superfícies de sólidos, bem como uma atitude de investigação do aluno, não há justificativas nem detalhamentos suficientes para que tais assuntos sejam tratados em sala de aula. Pelo contrário, geralmente, os modelos de planificações são oferecidos para serem recortados e montados, sem qualquer razão de ser ou questionamentos que justifiquem suas construções. Assim, se apresentarmos a tarefa: *construir a planificação da superfície de uma pirâmide de base triangular com altura dada* quais seriam as técnicas para resolvê-las e como poderiam ser justificadas? Essa tarefa lança, de imediato, uma questão que gerará o estudo: c**omo construir um modelo de pirâmide triangular de altura determinada?** Tal pergunta, que poderia ser associada a uma embalagem, por exemplo, gerará outras questões e respostas que darão sentido à investigação.

Entendemos, desse modo, que precisamos construir um modelo epistemológico de referência para a construção da planificação solicitada que poderá encaminhar e justificar possíveis organizações didáticas para o ensino baseadas em Atividades de Estudo e Pesquisa. É este modelo que apresentaremos na sequência.

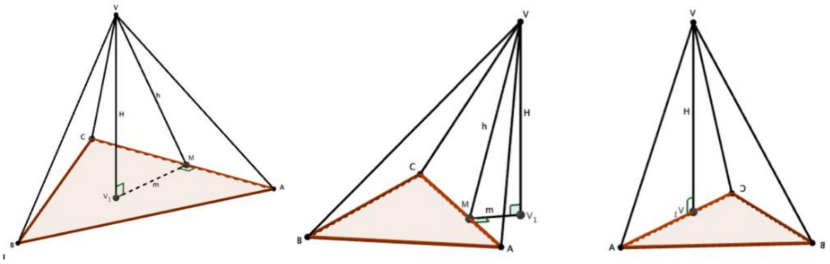
Um modelo epistemológico de referência: planificação de superfícies de pirâmides triangulares

Primeiras hipóteses para construção do modelo.

Supomos que os alunos já tenham tido contato com o modelo a partir de planificações dadas e que levantem a hipótese de que para construir o que está sendo solicitado, podem utilizar quatro superfícies triangulares. Tal ação, conduz a questionar se e**ssa condição garante a construção do modelo pretendido** que pode ser respondida por meio da construção de alguns modelos e a consequente percepção de que, em alguns casos, uma das superfícies triangulares pode permanecer no mesmo plano da base ou se sobrepor a uma outra face e a lançar outra questão mas **por que isto está ocorrendo?** É necessário então observar alguns modelos de pirâmides triangulares para caracterizá-las: **como se caracteriza uma pirâmide triangular?**

A princípio, como mostra a figura 1, uma pirâmide triangular é um sólido que se caracteriza por ter quatro faces triangulares. Podemos perceber que o vértice da pirâmide tem projeção, V_1, no plano que contém a superfície triangular que, geralmente, chamamos de base. O segmento VV_1 representa a altura H da pirâmide, que pode estar contida na região interior, exterior ou em uma face da pirâmide, e implica na existência do triângulo VV_1E. Considerados os três tipos de pirâmides triangulares possíveis de serem construídos, precisamos então buscar as relações que devem ser consideradas na planificação para que o modelo seja construtível.

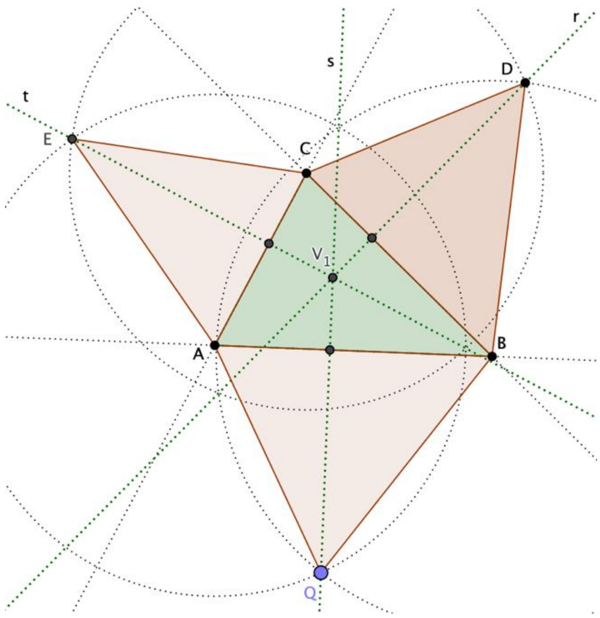
Figura 1 – Caracterização das pirâmides triangulares



Fonte: produção dos autores

Um primeiro ponto é observar que nas superfícies triangulares que representam as faces laterais das pirâmides, os lados que formam uma aresta devem ter mesma medida e ainda que as retas suportes das alturas desses triângulos devem se interceptar em um ponto V_1 que representa a projeção do vértice da pirâmide sobre o plano que contem a base da pirâmide (figura 2). Para realizar esses estudos utilizaremos o Geogebra porque permite melhor percepção da situação e a construção da planificação de modelos de diversos tipos a partir de uma única construção.

Figura 2 – Primeira hipótese de construção da planificação da superfície



Fonte: Produção dos autores

Para iniciar nossos estudos, vamos considerar duas superfícies triangulares, uma para a base, *ABC* e outra para uma das faces, *BCD* como mostra a figura 2. Traçando pelo ponto *D* uma reta perpendicular à reta *BC*, sabemos que a projeção do vértice, V_1, pertencerá à essa reta. Traçando a circunferência de centro em *B* e raio *BD* podemos tomar um ponto *Q* para determinar a face *ABQ*. Traçando então, pelo ponto *Q*, uma reta perpendicular à reta *AB* obteremos na intersecção das duas perpendiculares o ponto V_1. Podemos então por ele traçar uma reta perpendicular à reta *AC* e a circunferência de centro em *C* e raio *CD* para determinar o ponto *E* que nos dá a superfície *ACE*. Dessa forma, $CE = CD$, $BQ = BD$ e $AE = AQ$.

Temos, assim, a possibilidade de construir alguns modelos de pirâmides triangulares, mas **será que qualquer ponto *Q*, considerado na circunferência de centro em *B* garante a construção pretendida?** Precisamos observar com mais cuidado as relações métricas que garantem a existência da altura da pirâmide, que não fica explícita na construção realizada.

Relações métricas para determinação da altura da pirâmide.

Que relações podemos identificar nos diferentes tipos de pirâmides que permitam garantir sua altura?

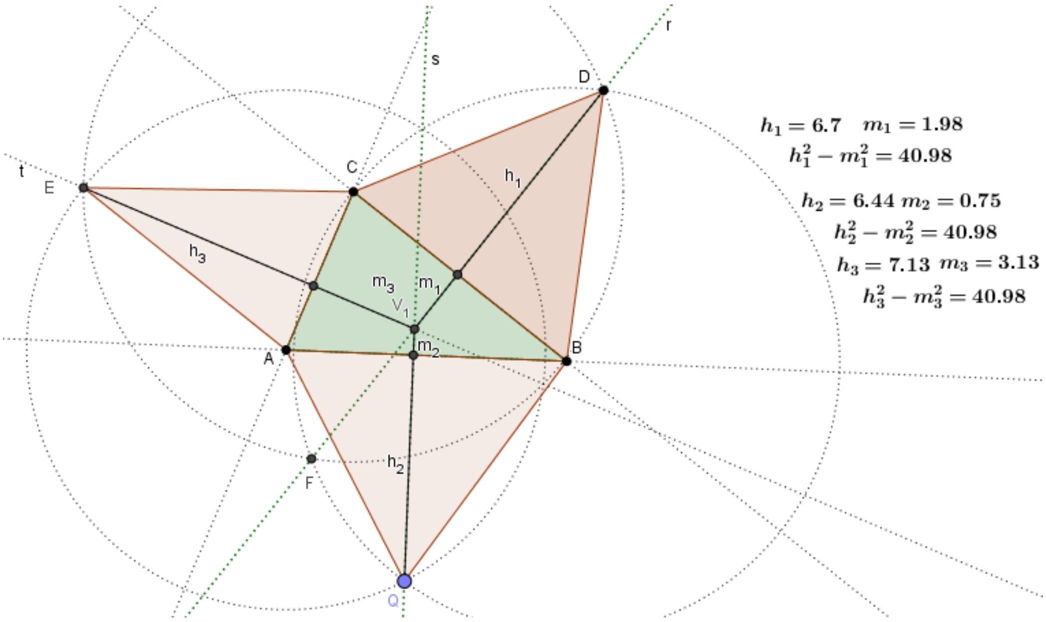
Nos dois primeiros casos, da figura 1, podemos considerar o triângulo VV_1M sendo $VV_1 = H$, $VM = h$ (altura do triângulo da face) e $V_1M = m$, no terceiro caso temos a altura da pirâmide *H* coincidindo com a altura *h* de uma das faces laterais da pirâmide e, neste caso $m_i = 0$.

Para a primeira hipótese podemos dizer que o triângulo VV_1M é retângulo em V_1 e, portanto, $H^2 = h_i^2 - m_i^2$. Com *i = 1, 2, 3*, pois para cada face teremos um *h* e um *m* associados a ela. Assim, para garantir a existência de *H* temos que considerar que $h_i \neq m_i$ e $h_i > m_i$ e ainda como os três triângulos construídos têm o lado que representa *H* coincidentes, temos que garantir que $h_i^2 - m_i^2$ dê o mesmo valor.

Assim, para verificar a relação entre esses resultados e a posição do ponto Q, dada a superfície *ABC* (figura 3), que tomaremos como base da pirâmide e a superfície *BCD*, que tomaremos como uma das faces da pirâmide, podemos traçar por *D* a reta perpendicular à reta *BC* e nela determinar o ponto V_1 que representa a projeção do vértice da pirâmide no plano de sua base, pois sabemos que essa projeção pertence à reta *r*.

Depois, traçamos as circunferências de centro em *B* e raio *BD* e de centro em *C* e raio *CA* que garantirão a igualdade das medidas dos lados dos triângulos das faces que formarão mesmas arestas. Assim, podemos verificar a relação entre *H*, *m* e *h*, vista anteriormente.

Figura 3 – Relações métricas para verificar a altura da pirâmide

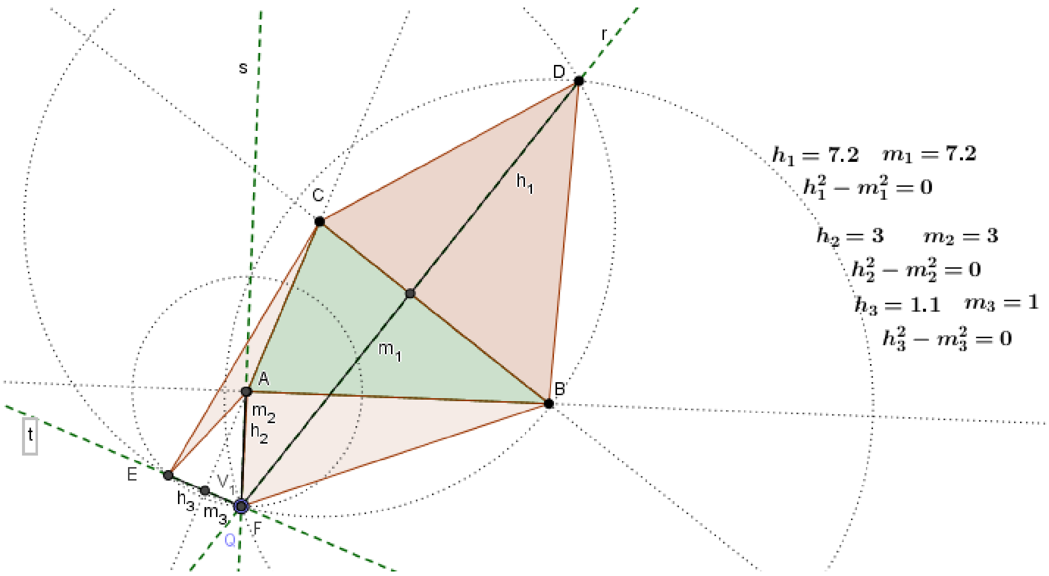


Fonte: Produção dos autores

Se essa é a construção ideal a manipulação da posição dos vértices dos triângulos iniciais, deveria garantir a construção de qualquer modelo de pirâmide triangular, mas isso não ocorre. A alteração da posição do ponto *Q*, por outro lado faz com que um ou mais dos triângulos construídos desapareçam ou passem a estar contidos no mesmo plano da base. Temos então que verificar todas as condições. Como o cálculo de *H* depende das medidas dos segmentos h_i e m_i, nessas manipulações não está sendo respeitada a condição de que $h_i > m_i$. Devemos então aprofundar o estudo buscando as relações possíveis entre h_i e m_i e o que ocorre quando um deles é zero. Então **o que ocorre com a posição de V_1 quando $\boldsymbol{h_i = m_i}$?**

Manipulando o ponto *Q*, no sentido horário (figura 4), podemos ver que quando o ponto *Q* coincide com o ponto de interseção, *F*, das circunferências de centro em *B* e de centro em *C* temos $h_1 = m_1$ porque o triângulo *BDF* é isósceles ($\overline{DB}$ e $\overline{BF}$ são raios da circunferência de centro *B*) e $h_3 = m_3$ porque o triângulo *AEF* é isósceles ($\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ são raios da circunferência de centro *A*), nesse caso temos $h_i^2 - m_i^2 = 0$. Temos ainda que h_2 coincide com m_2, o que faz com que o triângulo *ABF* esteja contido no mesmo plano da base da pirâmide.

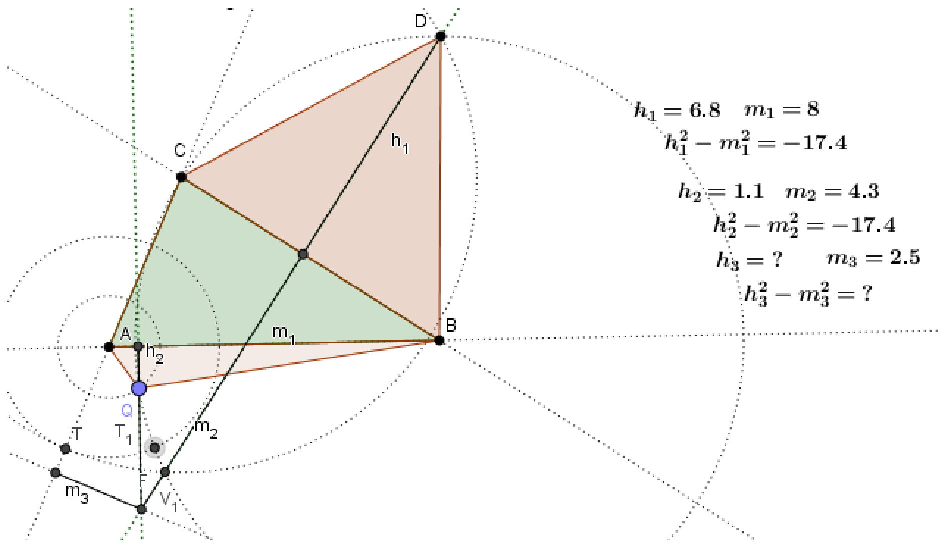
Figura 4 – Movimentação do ponto Q no sentido horário



Fonte: Produção dos autores

Se continuarmos a movimentar o ponto Q, no mesmo sentido, podemos observar que alguns resultados para $h_i^2 - m_i^2$ tornam-se negativos (figura 5), o que mostra a não existência de H.

Figura 5 – Condições de não existência da altura da pirâmide

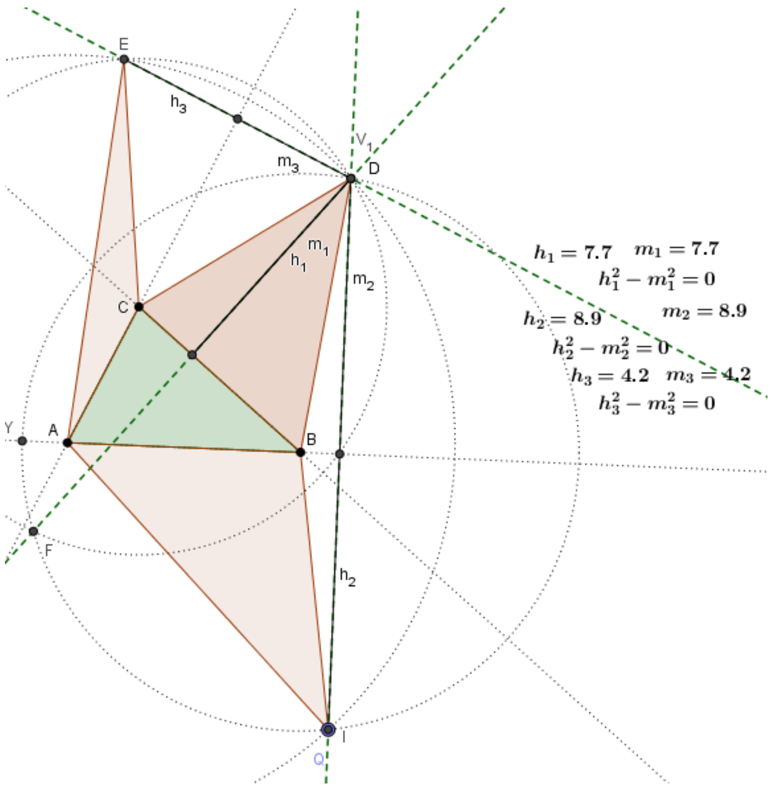


Fonte: Produção dos autores

Então **a partir de que ponto temos uma das alturas igual a zero?** Continuando a movimentar o ponto Q, no mesmo sentido, podemos ver que a partir de um determinado ponto $h_3 = 0$ (figura 5). O ponto em questão é o ponto T, interseção da reta AC com a circunferência de centro em C. Para relacionar esse ponto com o ponto Q traçamos a circunferência de centro em A e raio AT que determina na circunferência de centro B o ponto T_1. Podemos observar então que movimentando o ponto Q, no sentido horário, assim que ele ultrapassa o ponto *T₁* a altura do triângulo *ACE* passa a ser zero e, portanto, esse triângulo deixa de existir. Ele só volta a existir depois do ponto Q ultrapassar a reta *AB*, no entanto $h_i^2 - m_i^2$ continua tendo valor negativo.

Mas, agora precisamos verificar **o que ocorre com a planificação se movimentarmos o ponto Q no sentido anti-horário.** Movimentando então o ponto Q no sentido oposto (figura 6), podemos notar que a partir do ponto F a relação entre as medidas existe, garantindo a existência da planificação procurada. No entanto quando o ponto Q coincide com o ponto, *I*, de interseção da reta que passa por D e é perpendicular à reta AB com a circunferência de centro *B*, podemos ver, pela construção, que $h_2 = m_2$, pois o triângulo *BDI* é isósceles ($\overline{BD}$ e $\overline{BI}$ são raios da circunferência de centro *B*) e que $h_3 = m_3$, pois o triângulo *CDE* é isósceles ($\overline{CE}$ e $\overline{CD}$ são raios da circunferência de centro *C*). Notamos ainda que h_1 coincide com m_1 o que faz com que o triângulo *BCD* esteja no mesmo plano da base da pirâmide. Continuando a movimentar o ponto *Q*, no mesmo sentido os resultados de $h_i^2 - m_i^2$ tornam-se negativos.

Figura 6 – Movimentação do ponto Q no sentido anti-horário

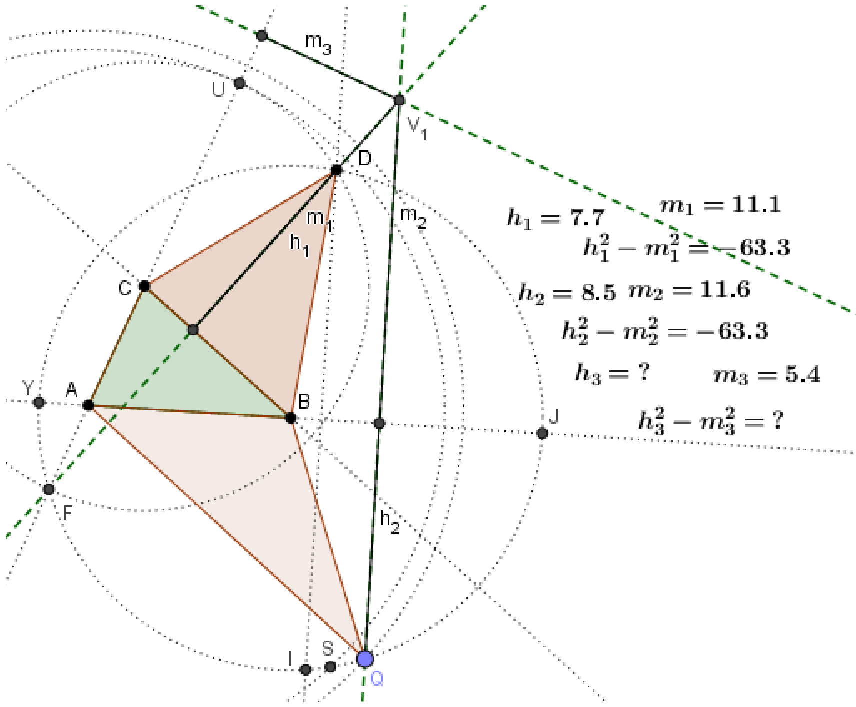


Fonte: Produção dos autores

Mas se continuarmos a movimentar o ponto *Q*, no mesmo sentido a partir de um determinado ponto o triângulo *ACE* deixa de existir. **Por que?** Se determinarmos o ponto

U na intersecção da circunferência de centro C com a reta AC (figura 7), temos que $AU = AC + CE$, pois $UC = EC$ e pela desigualdade triangular o triângulo ACE não existe.

Figura 7 – Não existência de faces da pirâmide



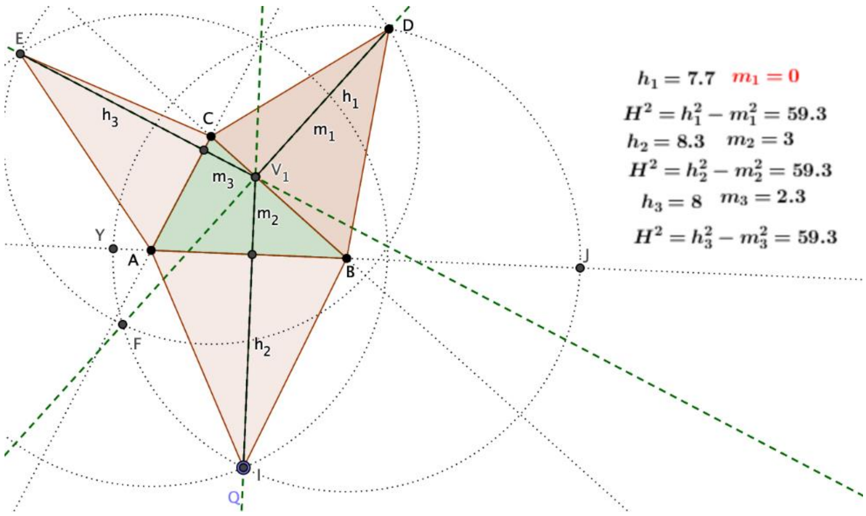
Fonte: Produção dos autores

Traçando a circunferência de centro em A e raio AU determinamos o ponto S na circunferência de centro B e posicionando o ponto Q além do ponto S, no mesmo sentido, o triângulo ACE deixa de existir porque AE passa a ser maior que $AC + CE$. É evidente, pela própria natureza do problema proposto, que não é necessário pesquisar o ponto Q sobre o arco JDY, pois se o objetivo é obter a planificação da superfície de uma pirâmide, o ponto Q só poderá estar no arco já estudado YFJ.

Mas, ainda falta considerar **quando podemos ter mi = 0?** Para que m seja zero, teremos que considerar a projeção do vértice da pirâmide coincidindo com o pé da altura do triângulo de uma das faces (figura 8), ou seja, V_1 pertence aos segmentos que representam os lados do triângulo da base.

Podemos então relacionar a posição da projeção do vértice da pirâmide e sua altura. Movimentando o ponto Q a partir do ponto F, no sentido anti-horário, vemos que a altura da pirâmide estará no seu exterior quando o ponto V_1 estiver no interior dos triângulos ABQ e CBD, que estará contida em uma das faces da pirâmide quando V_1 pertencer aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ e estará no interior da pirâmide quando V_1 estiver no interior do triângulo ABC.

Figura 8 – Uma face perpendicular ao plano da base



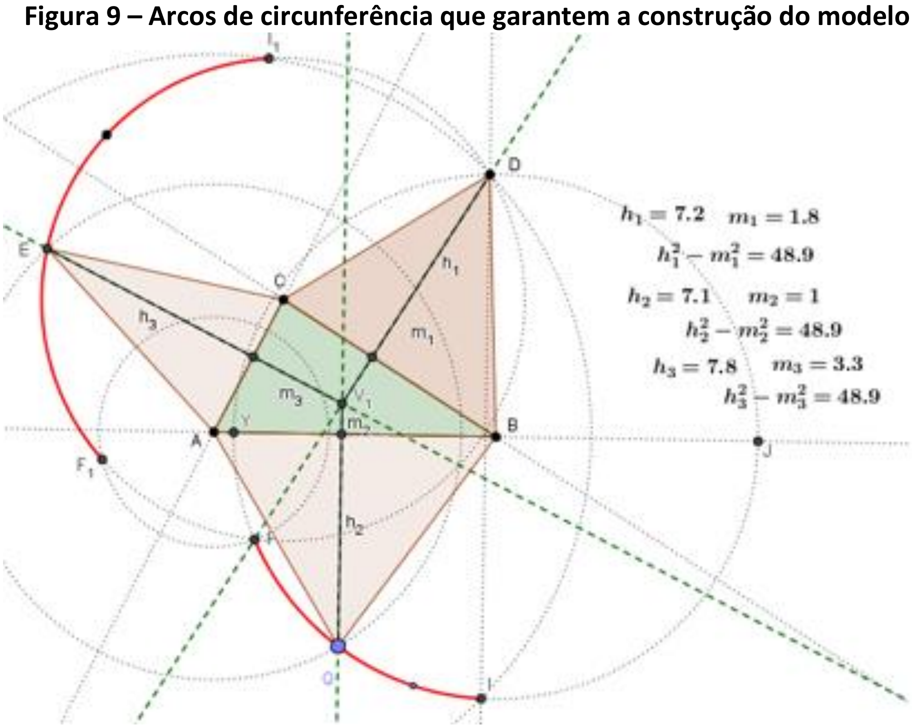
Fonte: Produção dos autores

Primeiras conclusões

O que podemos concluir então para a construção dessa planificação?

Dados dois triângulos, *ABC* representando a base da pirâmide e *CBD* representando uma de suas faces (figura 9), podemos construir a planificação da superfície de uma pirâmide triangular se tomarmos um ponto *Q* na circunferência de centro *B* e raio *BD*, mais precisamente, no arco entre o ponto *F* (interseção dessa circunferência com a circunferência de centro *C* e raio *CD*) e o ponto *I* (interseção da perpendicular à reta *AB* por *D* e a reta *AB*). Sendo definidos os triângulos *ABQ* e *ACE* a projeção do vértice da pirâmide pertencerá ao segmento *FD*.

Figura 9 – Arcos de circunferência que garantem a construção do modelo



Fonte: Produção dos autores

Em resumo, para construir a planificação solicitada, temos que observar que:

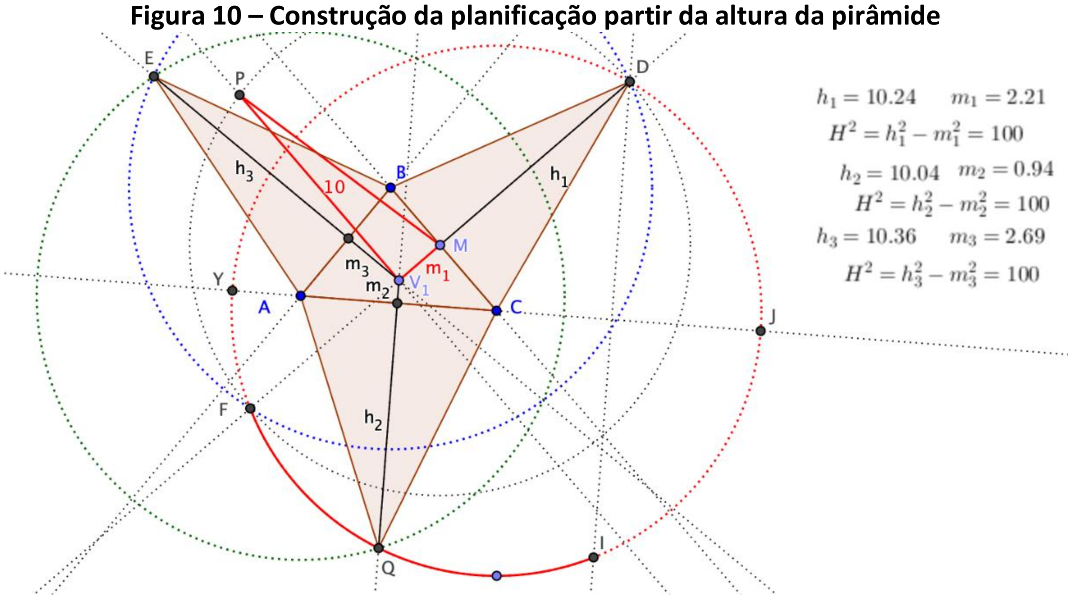
a) nos triângulos das faces da pirâmide, os lados que formam a mesma aresta devem ter mesma medida ($CD = CE$, $BD = BQ$ e $AQ = AE$);

b) a projeção do vértice sobre o plano da base coincide com o encontro das retas suportes das alturas dos triângulos das faces e, ainda, deve pertencer ao segmento *FD*;

c) se for satisfeita a relação $h^2 = H^2 + m^2$, em que *h* representa a altura de cada uma das faces em relação ao respectivo lado da base da pirâmide, *H* a altura da pirâmide e *m* representa a distância da projeção do vértice à cada um dos lados do triângulo da base; ou seja, $h > m$ e $h \neq 0$ pois $H^2 = h_i^2 - m_i^2$. No entanto, ainda não determinamos nessa planificação a altura da pirâmide, como solicitado no problema inicial.

Para considerar uma altura dada iniciaremos a construção por apenas uma superfície triangular, o triângulo *ABC* que representará a base da pirâmide e o ponto V_1 representando a projeção do vértice da pirâmide no plano de sua base (figura 10). Traçamos então uma reta perpendicular à reta *BC* passando pelo ponto V_1, que determina o ponto *M* na intersecção com $\overline{BC}$ e o segmento $MV_1 = m_1$. Traçando, pelo ponto V_1, uma perpendicular ao segmento MV_1 podemos determinar, nessa reta, o ponto *P* tal que $\overline{V_1 P}$ represente a altura da pirâmide, no caso a medida escolhida foi 10. Construímos aqui o triângulo VV_1M da figura 1 e, portanto, a hipotenusa desse triângulo representa a altura da face *BCD*, ficando o ponto *D* determinado pela circunferência de centro em *M* e raio *MP*. A partir daí a construção procede como discutido anteriormente e, a movimentação dos pontos *A, B, C* ou V_1 nos permite obter formas diferentes para o modelo.

Figura 10 – Construção da planificação partir da altura da pirâmide



Fonte: Produção dos autores

Cabe agora fazer uma institucionalização no sentido de sintetizar e mostrar os resultados obtidos.

Institucionalização

Vamos mostrar que, observando essas conclusões, poderemos obter a planificação da superfície de uma pirâmide triangular.

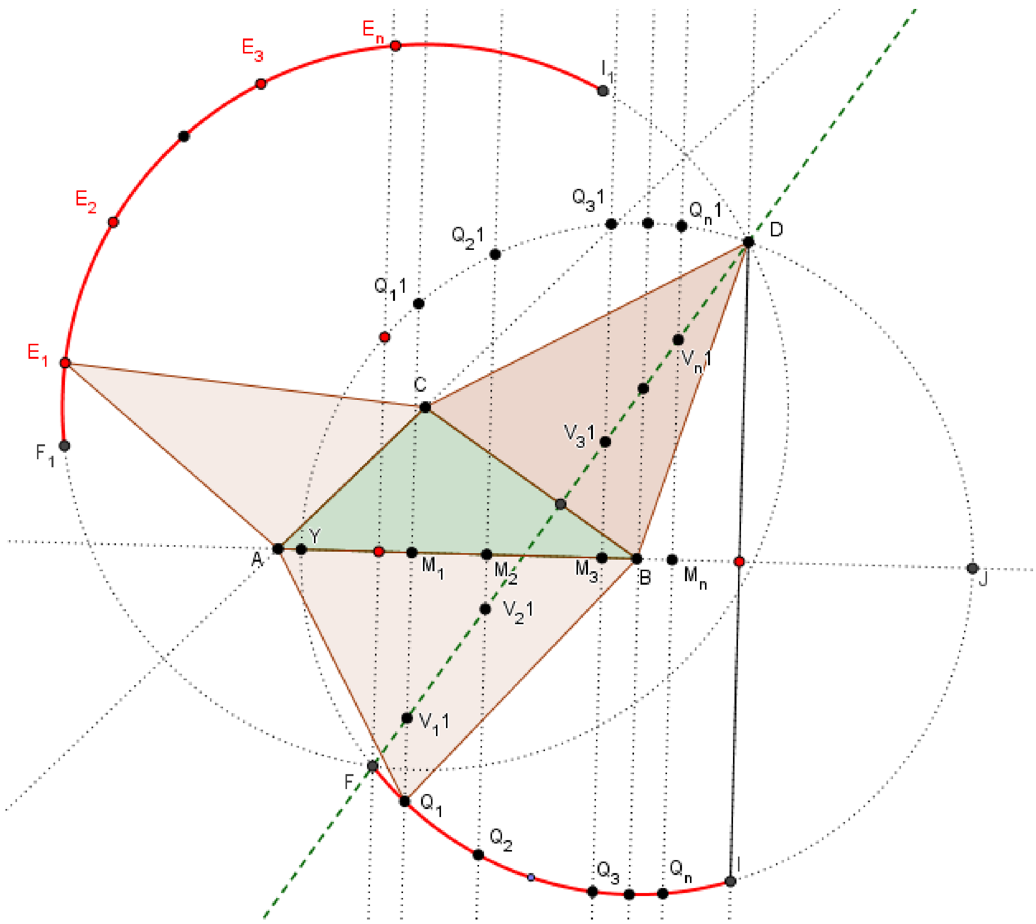
Considerando a figura 11 se tomarmos o ponto Q um ponto qualquer sobre o arco FI, $Q \neq F$ e $Q \neq I$, temos:

a) $BD = BQ$ (raios da mesma circunferência de centro B).

$AQ = AE$ (por construção).

$CD = CE$ (raios da mesma circunferência de centro C).

Figura 11 – Justificativas para os resultados



Fonte: Produção dos autores

b) Sendo *r*, *s* e *t*, as retas suportes das alturas dos triângulos das faces: *BCD*, *ACE* e *ABQ*, respectivamente, e V_1 a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base, vamos mostrar que a interseção dessas retas é o ponto V_1.

Como a projeção do vértice está sobre as retas suportes das alturas das faces, então:

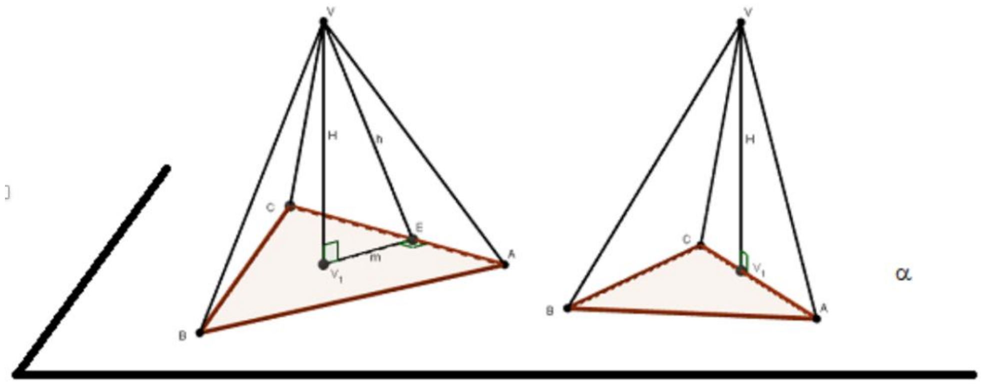
se D e V_1 estão alinhados, D está em r e V_1 está em r,

se E e V_1 estão alinhados, E está em s e V_1 está em s,

se Q e V_1 estão alinhados, Q está em t e V_1 está em t. Logo, $r \cap s \cap t = \{V'\}$.

c) Qualquer que seja a pirâmide de base triangular (figura 12), sempre existirá pelo menos dois triângulos VV_1M retângulos em V_1. Se V_1 é a projeção ortogonal de V sobre o plano α da base, sabemos que se $\overline{VV_1}$ é perpendicular ao plano α, então $\overline{VV_1}$ faz ângulo de 90° com qualquer reta que passe por V_1 (contida nesse plano).

Figura 12 – Modelos de pirâmides triangulares



Fonte: Produção dos autores

Assim, como $V_1 \in \alpha$ e $M \in \alpha$, então $\overline{V_1M} \subset \alpha$, o que garante $\overline{VV_1}$ perpendicular à $\overline{V_1M}$, sendo o triângulo VV_1M retângulo em V_1, vale a relação $h > m$ pois h é sua hipotenusa.

Considerando a reta r que passa por D e é perpendicular à reta CB (figura 10) e considerando, no arco FI, os pontos $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$, com $Q_i \neq F$, $Q_i \neq I$ (para $i = 1, 2, \cdots, n$) e tomando $Q_{11}, Q_{21}, \cdots Q_{n1}$ simétricos, respectivamente, de Q_i em relação à reta AB, sabemos que os segmentos Q_1Q_{11}, Q_2Q_{21}, ..., Q_nQ_{n1} são cordas da circunferência de centro B e raio BD. Essas cordas interceptam a reta AB nos pontos $M_1, M_2, \cdots M_n$ (pontos médios das cordas) e determinam na reta r, sobre o segmento FD os pontos $V_{11}, V_{21}, \cdots V_{n1}$.

Como as cordas são perpendiculares à reta suporte do lado AB, temos que $Q_1M_1 = h_1$, ..., $Q_nM_n = h_n$ representarão as alturas dos triângulos de vértices $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$ e que $V_1M_1 = m_1$, ..., $V_nM_n = m_n$, representarão a distância da projeção do vértice ao lado $\overline{AB}$ do triângulo da base.

Assim, os segmentos de medidas h_i e m_i estão contidos nas cordas da circunferência de centro B e para as faces $ABQi$, sempre teremos $h_i > m_i$, pois h_i terá sempre a metade da medida da respectiva corda e m_i será sempre menor que tal medida. De modo análogo, podemos mostrar que o mesmo ocorre quando tomamos como vértices para o triângulo construído sobre o lado AC qualquer ponto pertencente ao arco F_1I_1, obtido a partir das igualdades: $AF_1 = AF$ e $AI_1 = AI$.

Considerações Finais

Buscamos discutir neste artigo, a luz da Teoria Antropológica do Didático, particularmente, um Modelo Epistemológico de Referência que pode inspirar diversos tipos de organizações didáticas, principalmente, as baseadas em Atividades de Estudos e Pesquisa que, por sua vez possibilitariam ir ao encontro das sugestões dos PCN. Qualquer organização didática que tecer as discussões aqui propostas ajudarão os alunos a construir significado para planificação de superfícies de sólidos e a construir seus modelos não mais para apenas identificar vértices, arestas ou a relação de Euler, mas com algum objetivo mais específico como a construção de embalagens com especificações determinadas. Além disso, as Atividades de Estudo e Pesquisa baseadas no MER aqui apresentado podem gerar outras com novos questionamentos, como por exemplo, a respeito das características dos dois triângulos iniciais (retângulo, acutângulo, obtusângulo). Outro ponto a ser considerado é a importância da utilização do Geogebra como ferramenta de construção. Sem ela as dificuldades de construção seriam imensas e cansativas, pois o menor erro poderia conduzir a necessidade de reiniciá-la. Agrega-se a essa vantagem a possibilidade de movimentação da figura para posições mais adequadas ä construção e ainda a obtenção de diversos modelos com apenas uma construção.

Por outro lado, outros estudos podem ser realizados, com outros tipos de sólidos. Um poderia se basear na verificação das condições e restrições encontradas para a pirâmide triangular serem validas ou não para outras pirâmides.

Por fim, acreditamos que tais atividades são compatíveis com o Ensino Médio, porque implica na mobilização de conhecimentos que já devem ter sido construídos na escolaridade anterior, além de os colocarem em situação efetiva de estudo, pesquisa e confrontação de conjecturas.

Referências

ALMEIDA, T.C.S. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D:** um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciencias Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALMEIDA, T.C.S.; SILVA, M. J. F. O Cabri 3D como habitat para o estudo dos Sólidos de Arquimedes. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI – IBEROCABRI, VI, 2012. Lima, Perú, **Anais**: 2012, p. 202-211.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Ensino Médio. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf

CHEVALLARD, Y. Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? In: BOSCH, M. et al (org.) **Un panorama de la TAD** - An overview of ATD. Centre de Recerca Matemàtica: Barcelona, 2012

______. Le passage de l´arithmétique a l´algébrique dans l´enseignement des mathématiques au college. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. **Petit X**. Grenoble, n. 19, p. 43-72, 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1, 1993.

SILVA, M. J. F. A construção de situações problemas utilizando o Cabri 3D. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI – IBEROCABRI, VI, 2012. Lima, Perú, **Actas,** 2012, p. 23-37.

SILVA, M. J. F.; SALAZAR, J. V. F. Cabri 3D na sala de aula. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI – IBEROCABRI, VI, 2012. Lima, Perú, **Actas,** 2012, p. 101-107.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, CIBEM, VII, Montevideo, Uruguay, **Actas (ISSN 2301-0797),** 2013, p. 7658-7665.

LABORDE, C. The role and uses of technologies in Mathematics Classrooms: between challenge and Modus Vivendi. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2007.

SILVA, M. J. F.; ARDAYA, N. H. M. Condições de representação da planificação de uma pirâmide triangular. **Educaçao matemática em revista.** Brasil: SBEM, ano 8, n. 9/10, p. 17-21, 2001.

BARACHET, F.; DEMICHEL, Y.; NOIRFALISE, R. Activités d'étude et de recherche (ERA) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde. **Petit x,** Grenoble, n. 75, p. 34-49, 2007.

ANEXO

Atividade 4

1. Observe o modelo planificado de uma pirâmide triangular (feito em acetato).
2. Observe as figuras 5 e 6 e identifique as que representam uma planificação de uma pirâmide triangular.
3. Conhecendo a base e a projeção ortogonal do vértice, sobre a base, de uma pirâmide triangular, como na figura 7, complete a figura, se possível, para obter uma planificação dessa pirâmide.
4. Complete as figuras 7, 8, 9 e 10, se possível, de modo que elas representem planificações de pirâmides triangulares.
5. Que relações precisam ser verdadeiras para que se tenha a planificação de uma pirâmide de base triangular?

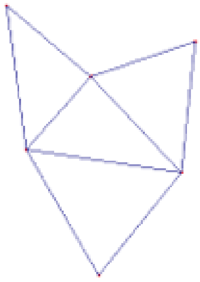


Figura 5

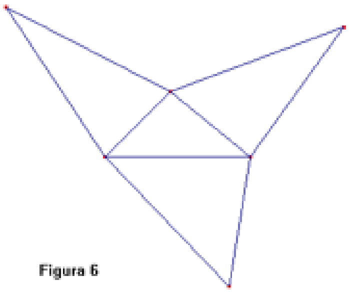


Figura 6

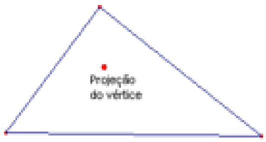


Figura 7

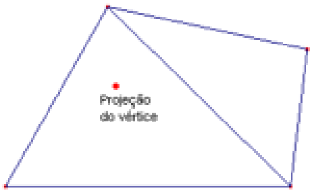


Figura 8

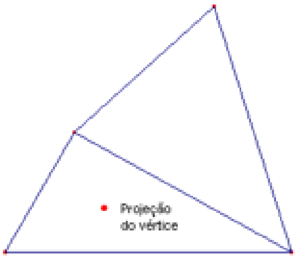


Figura 9

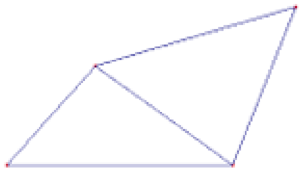


Figura 10