ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p420-447

Uma análise semiótica e cognitiva na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros

A semiotic and cognitive analysis of the learning of triangle and quadrilateral areas

Un análisis semiótico y cognitivo en áreas de aprendizaje de triángulos y cuadriláteros

Cleide R. M. Arinos[1]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS – MS)
https://orcid.org/0000-0001-9510-5590
José L. M. de Freitas[2]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS – MS)
Universidade Anhanguera Uniderp (UNIDERP – MS)
https://orcid.org/0000-0001-5536-837X
Mustapha Rachidi[3]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS – MS)
https://orcid.org/0000-0002-8210-7383

Resumo

Este artigo analisa mudanças de representação e de registro no cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros. As atividades descritas foram realizadas por alunos do quinto e do sexto ano do ensino fundamental de uma escola privada de Campo Grande, MS. Este estudo fundamenta-se na teoria de registros de representação semiótica, de Duval, e em dois de seus elementos teóricos que tratam dos olhares e apreensões para a aprendizagem em geometria. Adotou-se como metodologia a engenharia didática, de Artigue. Constatou-se que solucionar as atividades por meio da exploração heurística das figuras, da desconstrução dimensional e do olhar não icônico, transitando em diferentes representações, permitiu aprendizagens sobre o cálculo de áreas. A diversidade de registros e estratégias nesses cálculos, nessas perspectivas, favoreceu soluções distintas, contribuindo para a superação de dificuldades e o desenvolvimento de autonomia em geometria, oportunizando um novo modo de aprender, de raciocinar e principalmente de olhar para uma figura geométrica.

[1] cleide.arinos@ufms.br
[2] joseluizufms2@gmail.com
[3] mu.rachidi@gmail.com

Palavras-chave: Geometria, Apreensões, Olhares, Ensino fundamental.

Abstract

In this article, representation and register changes in the calculation of triangle and quadrilateral areas were analysed. The activities described were performed by 5th- and 6th-grade students attending a private school in Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Midwest Brazil. This study drew on Duval's theory of registers of semiotic representation and on two of its theoretical elements addressing ways of visualising and apprehending in geometry learning. Artigue's didactic engineering method was adopted. Solving activities by heuristic exploration of figures, dimensional deconstruction, and use of non-iconic visualisation, while transiting across different representations, promoted learning of area calculation. The diversity of registers and strategies involved in the calculations furthered the emergence of a range of solutions, helping learners to overcome difficulties, gain autonomy in dealing with geometry, and experience new ways of learning, reasoning, and, most notably, of visualising geometric figures.

Keywords: geometry, apprehension, visualisation, primary school.

Resumen

Este artículo analiza cambios de representaciones y de registro en cálculo de áreas de triángulos y cuadriláteros. Las actividades descritas fueron realizadas por alumnos del quinto y sexto grados de la enseñanza básica de una escuela privada en Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil. Este estudio se fundamenta en la teoría de registros de representación semiótica, de Duval, y en dos de sus elementos teóricos que tratan de entendimiento y visión para aprendizaje en geometría. Se adoptó como metodología la ingeniería didáctica, descrita por Michèle Artigue. Se verificó que resolver actividades mediante la exploración heurística de figuras, la deconstrucción dimensional y el uso de visualización no icónica, mientras se transita por diferentes representaciones, promovió el aprendizaje del cálculo de áreas. La diversidad de registros y estrategias en esos cálculos, en esas perspectivas, favoreció soluciones distintas, contribuyendo para la superación de las dificultades y el desarrollo de autonomía en geometría, creando la oportunidad de un nuevo modo de aprender, de raciocinar y principalmente de mirar una figura geométrica.

Palabras clave: Geometría, Aprehensiones, Miradas, Enseñanza fundamental.

Uma análise semiótica e cognitiva na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros

Diversos estudos apontam o desempenho insatisfatório dos alunos no campo das grandezas geométricas no Brasil e em diversos países (Almouloud & Mello, 2000; Almouloud, 2004; Bellemain & Lima, 2010; Lorenzato, 1995; Pavanello, 2004). Segundo Belemain e Lima (2010), esse desempenho insatisfatório pode não estar relacionado apenas a dificuldades concernentes ao ensino e à aprendizagem, mas também à complexidade dos conceitos matemáticos envolvidos.

De acordo com Almouloud e Mello (2000), um dos fatores que contribuem para o baixo desempenho dos alunos diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas resultantes da prática e escolha didática que os professores fazem ao ensinarem geometria. Para Pavanello (2004), muitos dos professores da educação básica não abordam geometria na sala de aula porque não dominam o conteúdo nem o modo de desenvolvê-lo com os alunos. Para Almouloud (2004), parte dos professores em exercício teve formação geométrica precária e não sabe claramente o que fazer em sala de aula**.**

Recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) orienta que o pensamento geométrico deve ser desenvolvido nos alunos para elaborar conjecturas, investigar propriedades e produzir argumentação dedutiva. Para isso, não se deve reduzir a geometria a aplicações imediatas de fórmulas. Recursos didáticos devem ser incorporados em situações que promovam a reflexão, a sistematização e a formalização de conceitos matemáticos.

Contudo, embora a geometria tenha nos últimos anos recebido maior atenção de professores, documentos oficiais e pesquisadores, permanecem certas lacunas quanto a seu ensino e aprendizagem (Almouloud, 2004; Bellemain & Lima, 2010; Silva, 2016; Souza, 2018).

Souza (2018) constatou que atividades que envolvem desconstrução dimensional ainda não povoam os livros didáticos. Isso pode explicar alguns bloqueios que os estudantes encontram ao resolver problemas geométricos, pois na geometria o uso de figuras na resolução de problemas exige muitas vezes uma mudança de olhar. Isso envolve operar uma desconstrução dimensional na figura, de modo a olhar para uma ou mais dimensões inferiores à enunciada, embora atendo-se a esta.

Este artigo traz resultados de uma pesquisa de mestrado em educação matemática empreendida em uma escola privada de Campo Grande, MS. As atividades transcorreram em oito sessões de cerca de duas horas cada. Participaram 12 alunos, seis deles do quinto ano do ensino fundamental e seis do sexto. Os encontros ocorreram no contraturno escolar. Participaram das sessões também duas professoras da escola, uma da alfabetização e outra do quinto ano. Sua participação se deu por livre e espontânea vontade, com o intuito de contribuir com a prática pedagógica frente à formação de ambas, que reconheciam como precária em geometria.

O aporte teórico, sobretudo para elaborar as atividades, pautou-se nos registros de representação semiótica e nas apreensões e olhares em geometria (Duval, 2005, 2009, 2011, 2012a, 2012b).

A base metodológica adotada foi a engenharia didática, descrita por Artigue (1996), por considerar as realizações didáticas em sala de aula[4] e por permitir prever dificuldades e possíveis estratégias nas atividades, de modo a promover a aprendizagem. Nas produções dos alunos, ao descreverem como haviam obtido as respostas, identificamos a possibilidade de utilizar procedimentos metodológicos de narração de pesquisa, na perspectiva de Chevallier (1993), mas nossa abordagem priorizou princípios metodológicos da engenharia didática.

[4] Refere-se ao grupo constituído pelos alunos do quinto e sexto anos do ensino fundamental.

Os alunos participantes serão designados em ordem numérica (de 1 a 12) na análise. Para resolver as atividades os alunos trabalharam em duplas. Os dados para análise foram colhidos na forma de atividades impressas, áudios, vídeos, fotos e recursos didáticos como a malha quadriculada e o geoplano[5].

Durante a resolução das atividades, buscou-se mudar as representações e os registros, com vistas à aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros. Na análise, essas mudanças de representação e registro contribuíram para os alunos conjecturarem, experimentarem, argumentarem, refletirem, sistematizarem e formalizarem conteúdos geométricos, como as fórmulas das áreas do quadrado e do triângulo.

Além disso, as atividades propiciaram a experimentação heurística nas figuras geométricas, permitindo-lhe nelas explorar caminhos para a resolução, articulando o discurso geométrico com a visualização. Essa experimentação permitiu calcular as áreas de outros modos, sem aplicar diretamente ou mecanicamente as fórmulas algébricas. Conforme orienta a BNCC, "a geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área" (Brasil, 2017, p. 272).

Flores e Moretti (2006) consideram que essa exploração heurística na figura permite soluções alternativas, em vez de limitar a resolução ao cálculo de áreas usando somente fórmulas. Isso permite que o aluno desenvolva novos modos de pensar, de olhar para uma figura e de raciocinar.

No entanto, essa intuição heurística que as figuras geométricas permitem requer certa aprendizagem. Flores e Moretti (2006, p. 12) apontam que essa intuição heurística "pode levantar percepções distintas e envolver outros tantos fatores que possam auxiliar ou dificultar este papel heurístico".

[5] É uma prancha de madeira ou plástico, normalmente quadrangular, com pregos ou metais dispostos na sua superfície em quadrados que permite a construção de polígonos com elásticos do tipo daqueles de amarrar dinheiro e a exploração de conceitos geométricos como o de áreas de figuras planas.

Além dessa intuição heurística que as figuras geométricas proporcionam, a geometria é, como expõe Duval (2005), um domínio do conhecimento que exige articulação de pelo menos dois registros de representação: a linguagem e a visualização.

Geometria, representações e registros

Para Duval, a visualização de uma figura em geometria faz parte de uma atividade cognitiva mais complexa que o simples ato de ver: o modo de ver uma figura depende da atividade na qual esta é mobilizada, uma vez que as figuras em geometria, diferentemente de todas as outras, permitem tratamentos como a reconfiguração[6] e as desconstruções dimensionais[7]. Para Duval (2005), a visualização constitui o processo central de aprendizagem em geometria. Neste artigo abordaremos esse modo de visualizar figuras no estudo de áreas.

Na matemática, a comunicação ocorre por meio das representações semióticas que são imprescindíveis para a mobilização de conhecimentos matemáticos. Segundo Duval, na matemática a representação é crucial, porque todos os objetos são abstratos e por isso não são diretamente acessíveis à percepção. Além disso, um mesmo objeto matemático pode ser representado em diferentes registros. Por exemplo, a área do triângulo (Tabela 1) pode ter representação: figural, algébrica e numérica.

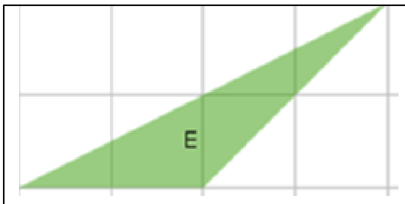
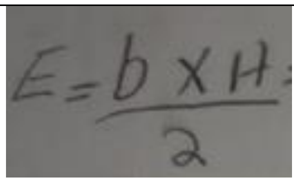
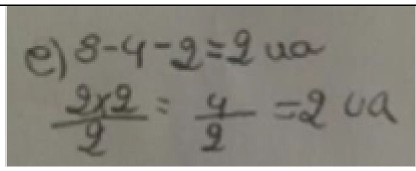
---

[6] A reconfiguração é um tipo de tratamento figural nas figuras geométricas. Esse procedimento consiste em decompor a figura de partida em subfiguras, reorganizá-las de modo a formar outra figura que seja possível calcular a sua área.

[7] A desconstrução dimensional é realizada considerando as dimensões das figuras e os elementos figurais, que são tridimensionais (3D) nos: cubos, pirâmides, cones,...; bidimensionais (2D) nos polígonos: quadrados, retângulos, ...; unidimensionais (1D), nas retas, segmentos e curvas; e adimensionais (0D) nos pontos.

Tabela 1.

*Representação de área em diferentes registros (*Arinos, 2018, p. 194*)*

<table>
<tr><td colspan="3">Enunciado em língua natural: Calcular a área do triângulo de duas maneiras diferentes, uma fazendo uso de fórmulas e outra sem utilizá-las.</td></tr>
<tr><td>Representação figural (2D/2D)</td><td>Representação algébrica</td><td>Representação numérica</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

O cerne da atividade matemática consiste em transformar representações semióticas em outras representações (Duval, 2012b). Quanto maior a flexibilidade com registros de representação diferentes para o mesmo objeto matemático, maior a chance de apreensão desse objeto.

Uma fórmula algébrica, uma figura e um enunciado em língua natural são exemplos de representações semióticas que integram diferentes sistemas semióticos. Nem todo sistema semiótico, porém, é um registro de representação. Para ser um registro, ele deve ter regras específicas de funcionamento e devem ocorrer três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Uma representação identificável pode ser estabelecida por meio da organização de um texto, da imagem de uma figura, de um enunciado em língua natural compreensível, de um gráfico ou da escrita de uma expressão algébrica. Um registro é um sistema semiótico particular, cujos símbolos são identificáveis e podem ser transformados segundo regras específicas operacionalizadas dentro deste conjunto de representações. Como exemplos temos as composições e decomposições de figuras no registro figural, as operações com números realizadas com representações numéricas, o cálculo literal com expressões algébricas e as paráfrases na língua natural.

Para haver uma representação identificável, é fundamental selecionar as relações e os dados do conteúdo. Essa organização obedece a regras de formação e às unidades específicas do registro cognitivo, sendo o produto a representação. Tais regras têm a função de assegurar as condições de reconhecimento e identificação e também permitir seu uso por meio de transformações internas. Não se trata de regras de produção efetiva por um indivíduo, mas sim regras de conformidade, que já estão estabelecidas num grupo social, ou seja, já existem e o sujeito apenas as usa, para reconhecer e produzir novas representações.

O tratamento de uma representação consiste em transformá-la no mesmo registro em que foi estabelecida; é uma transformação interna ao registro. Por exemplo, para as figuras geométricas a reconfiguração é um tipo de tratamento, dando a elas a possibilidade de exploração heurística.

A reconfiguração consiste em dividir uma figura "*em unidades figurais de mesma dimensão* $(2D \rightarrow 2D)$ e sua reconfiguração em outra figura cujo contorno global é ou não o mesmo" (Duval, 2011, p. 88, destaque do autor). Os tratamentos surgem dependendo da modificação realizada: "repartir uma figura em subfiguras permite, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas" (Duval, 2012a, p. 125). Um exemplo disso ocorre na reconfiguração de um paralelogramo em um retângulo.

A figura 1[8] mostra uma reconfiguração que consistiu em decompor um losango em subfiguras bidimensionais, reconfigurando-o em um quadrado de área equivalente, como mostram os traços a lápis.

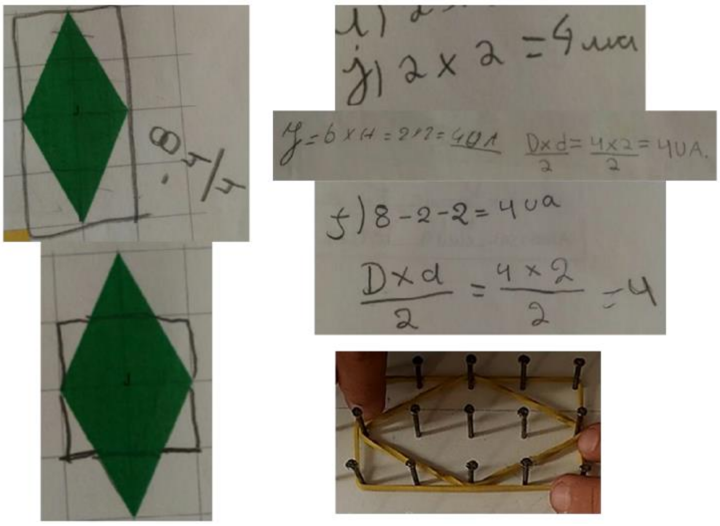
A conversão de uma representação envolve registros diferentes. Consiste em transformar uma representação em outra em outro registro, ou seja, é uma transformação externa ao registro de partida. Calcular a área do losango (Figura 1) requer converter o registro em língua natural (enunciado) em registro figural.

[8] É um dos resultados de nossa pesquisa. Por conveniência articulamos os resultados com os elementos teóricos.

Outra conversão foi a realizada do registro figural (figura presente na folha) para a representação no geoplano. No geoplano, os alunos identificaram os tratamentos figurais do losango que os levariam a determinar sua área.

Figura 1.

Cálculo da área do losango (Arinos, 2018, p. 214)



Como mostra a Figura 1, ao mobilizarem as fórmulas algébricas do losango ($\frac{D \times d}{2}$) e do retângulo ($B \times h$), os alunos converteram registros, do figural (representação do losango no geoplano e tratamentos figurais, como a reconfiguração, para obter o quadrado) ao algébrico. Subsequentemente, converteram o registro algébrico em numérico, realizando tratamentos neste registro para obter a resposta. Assim, quatro registros foram mobilizados: a língua natural, o figural, o algébrico e o numérico.

A desconstrução dimensional é realizada no losango (2D) quando se substituem os valores nas fórmulas algébricas. Com isso, ocorre uma mudança no olhar, passando-se do bidimensional ao unidimensional, o que permite identificar as medidas dos segmentos ($D, d, B\ e\ h$) para determinar a área (um número e sua grandeza) de uma figura bidimensional.

As figuras, em geometria, diferentemente de todas as outras representações, permitem esses tipos de tratamento. Para a aprendizagem geométrica, há, segundo Duval, especificidades, como essas desconstruções dimensionais. Assim, as figuras exercem um papel importante nas atividades em geometria, possibilitando diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

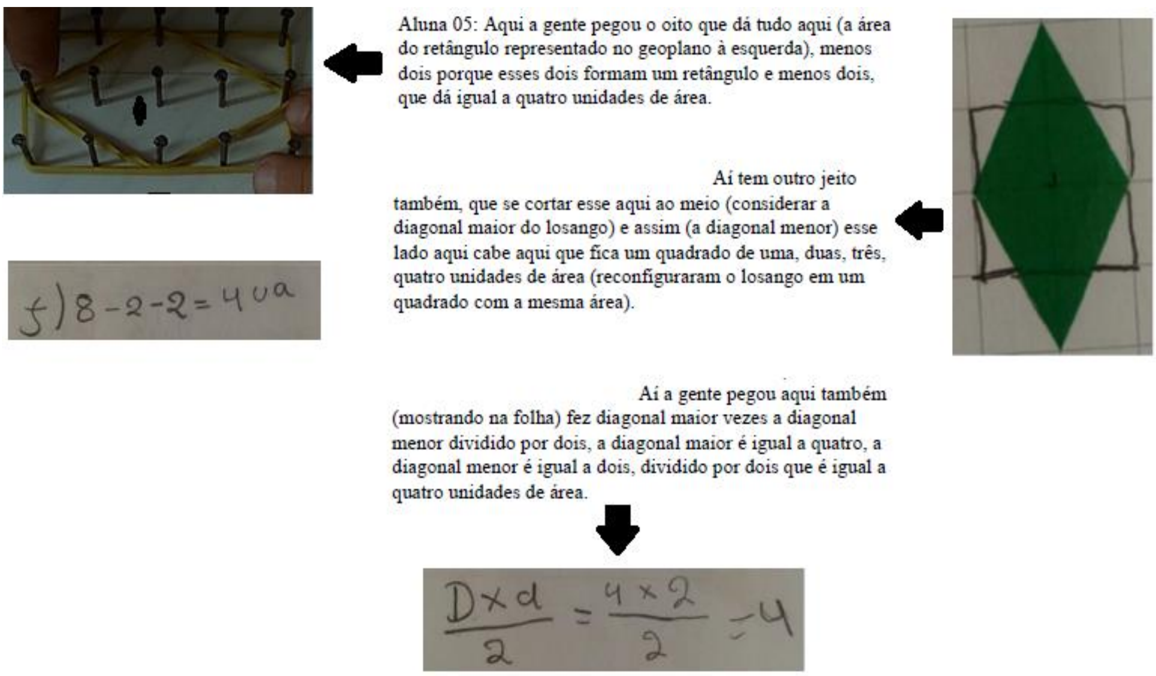
As apreensões na geometria

A **apreensão perceptiva** se caracteriza pela identificação feita por meio do contorno das figuras, que ocupa a posição central. Essa apreensão, que pode “ter um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado” (Duval, 2012a, p. 136), foi requerida para identificar o losango (Figura 1).

A **apreensão discursiva** é subordinada à perceptiva, pois “uma figura geométrica não mostra à primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito” (Duval, 2012a, p. 133). O enunciado da questão e o losango (Figuras 1 e 2) comandaram o discurso geométrico, que serviu para justificar os tratamentos figurais.

Figura 2.

Apreensão discursiva no cálculo da área do losango (Arinos, 2018, p. 214)



A **apreensão sequencial** é usada nas atividades de construção ou de descrição cujo objetivo é reproduzir uma figura. Essa apreensão foi mobilizada quando os alunos representaram o losango no geoplano. Nessa construção, puderam visualizar o losango em posições diferentes, o que contribuiu para a operação de reconfiguração por ser uma prática dos movimentos efetuados em uma figura. Essa visualização permitiu prever os tratamentos figurais e proporcionou outras informações visuais, como o mergulhamento[9].

A **apreensão operatória** é "uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações" (Duval, 2012a, p. 125). Percebemos que essa apreensão, mobilizada pelos alunos (Figuras 1 e 2), foi guiada pela percepção, nos procedimentos de decomposição, composição e reconfiguração no losango, sendo este explorado heuristicamente pelos alunos.

Esse papel heurístico que as figuras geométricas apresentam é "resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva" (Moretti & Brandt, 2015, p. 605).

Os tratamentos figurais, como a reconfiguração do losango em um quadrado, foram guiados pela percepção, como o foi a desconstrução dimensional para aplicar as fórmulas algébricas. Essa exploração heurística no losango permitiu determinar sua área de maneiras distintas.

Além da operação de reconfiguração, tem-se o mergulhamento (Duval, 2012a), que está relacionado às operações mereológicas[10] na apreensão operatória. Para Duval (2012a), o

[9] O mergulhamento, outro tipo de tratamento figural, consistiu em contornar o losango por um retângulo. Retirando da área do retângulo as áreas dos quatro triângulos congruentes que não correspondem à área do losango. Assim, a área do losango é calculada por fora. O mergulhamento proposto por Duval é outro tipo de tratamento figural que consiste em enquadrar a figura inicial em outra que a contenha e que permita o cálculo de sua área. Neste caso se procede à retirada da(s) área(s) da(s) subfigura(s) que excede(m) a área da figura inicial (obtidas por procedimentos de decomposição). Restando a área da figura solicitada.
[10] Para Duval (2005, 2011, 2012a) este procedimento, nas figuras geométricas, consiste em dividir uma figura em subfiguras de mesma dimensão, por exemplo, $(2D \rightarrow 2D)$.

mergulhamento é inverso à reconfiguração, pois prolonga a figura. É o que ocorre, por exemplo, quando o triângulo se torna metade de um paralelogramo.

A apreensão operatória foi mobilizada ao se reconfigurar o losango em um quadrado (Figuras 1 e 2). Isso tornou o cálculo de área mais simples, bem como contribuiu para a visualização, que foi comandada pela apreensão perceptiva e pelo olhar botânico[11].

Assim, a apreensão **perceptiva** tem papel de destaque frente às demais, pois envolve uma predominância em olhar para o aspecto visual da figura geométrica. Isso perpassa pelas dificuldades que os alunos encontram no campo da geometria. Para Duval, isso ocorre porque uma figura é objeto de três apreensões: a **perceptiva** que é imediata e automática; a **discursiva,** que relaciona o texto com a figura; e a **operatória,** que envolve a heurística para resolver o problema (Duval, 2012a).

É esse destaque da apreensão **perceptiva** que levou Duval (2005) a categorizar os olhares em quatro tipos: **botanista, agrimensor, construtor** e **inventor**, que trataremos a seguir e serão usados em nossa análise.

Os olhares na geometria

Duval (2005) aponta serem muito complexas as formas de "ver" em geometria. Tais modos de visualização têm lugar de destaque na aprendizagem de geometria. Moretti e Brandt (2012, p. 605) nos lembram que, embora a visualização não requeira conhecimentos matemáticos, "ela pode comandar a apreensão operatória".

Nos modos de olhar as figuras em geometria, segundo Duval (2005), distinguem-se duas categorias: o modo icônico (subdividido em **botanista** e **agrimensor**) e o não icônico (**construtor** e **inventor**). O icônico faz menção a objetos reais, cujas formas e contornos permitem associá-los com objetos da realidade. Na visualização não icônica, porém, "existe

[11] O olhar botanista é usado para nomear e identificar as figuras geométricas (Duval, 2005). Esse olhar foi mobilizado para identificar o losango e o quadrado.

uma sequência de operações que permitem reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas" (Duval, 2005, p. 9).

Para Duval (2005), normalmente olhamos as figuras no modo icônico, mas esse olhar não conduz a um bom trabalho geométrico.

> As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de *que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclua a possibilidade de reconhecer outras*. Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada. (Duval, 2011, p. 86, destaque do autor)

Isso nos remete a uma mudança no olhar, a uma visualização não icônica ou a uma desconstrução das formas. Para isso, deve-se transpor o olhar icônico.

O olhar icônico **botanista** é usado para identificar e nomear as formas elementares usadas na geometria plana. Na presente pesquisa, essa categoria revelou-se necessária para nomear os quadriláteros e os triângulos, bem como para observar as diferenças e semelhanças nas figuras. As especificidades exigidas nesse olhar preparam os alunos para os demais olhares.

O **olhar agrimensor** é usado quando se realizam medidas em uma superfície ou em um terreno e assim representam tais medidas no papel.

Conhecidos os olhares não icônicos vamos não icônicos.

O olhar não icônico **construtor** é requisitado quando se usam instrumentos como régua não graduada e compasso. Por meio dele, os alunos "podem realmente tomar consciência de que as propriedades geométricas não se limitam às características perceptivas" (Duval, 2005, p. 6, tradução nossa).

O olhar não icônico **inventor** foi mobilizado, por exemplo, quando os alunos adicionaram traços ao losango (Figuras 1 e 2). Esses traços contribuíram para que descobrissem um procedimento de resolução por meio das operações e modificações feitas nessa figura. A adição desses traços a lápis permitiu que os alunos dividissem o losango em subfiguras e com estas formassem um quadrado de área equivalente. Esse modo de ver exige “uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptivas elementares que são necessárias à primeira vista” (Duval, 2005, p. 7, destaque do autor, tradução nossa).

Esses olhares se articulam com as apreensões supracitadas. Percebemos isso na elaboração de estratégias e nas representações mobilizadas pelos alunos (Figuras 1 e 2). Para Moretti e Brandt (2015, p. 606, destaque nosso), “esses olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do **botanista** exige-se essencialmente a apreensão **perceptiva**. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do **inventor**”.

Normalmente, o olhar icônico se impõe quando uma figura geométrica simples é visualizada e a reconhecemos, comparando-a com outros elementos figurais conhecidos, empregando neste caso o olhar **botanista**. Quando identificamos figuras, por exemplo, em triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos, operamos iconicamente, neste caso predominando a apreensão **perceptiva** e o olhar **botanista**.

Como vimos (Figuras 1 e 2), o reconhecimento do losango não se mostrou suficiente para determinar sua área. Foi necessário operar sobre o losango uma desconstrução dimensional, como frisa Duval (2011, p. 87):

> Ver <geometricamente> uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.

É sempre possível realizar essa desconstrução numa figura geométrica, gerando essas maneiras de ver destacadas por Duval (2005, 2011), que são essenciais para a aprendizagem de geometria.

Os processos de visualização geométrica (olhares icônico e não icônico) e a produção de enunciados requerem funcionamentos cognitivos específicos na geometria. Assim, seu desenvolvimento e coordenação devem ser considerados como objetivos do ensino tão essenciais quanto os conteúdos matemáticos. O modo de ver uma figura depende da desconstrução dimensional que operamos sobre ela (Duval, 2005).

Nas Figuras 1 e 2, percebe-se que os alunos avançaram da apreensão perceptiva e do olhar botanista a outro mais elaborado: o inventor. Nisso consiste aprender a olhar em geometria. Quando mobilizaram fórmulas algébricas, quer do retângulo ou do losango, tiveram que visualizar os segmentos, o que exigiu desconstrução dimensional, que requer o olhar não icônico de inventor sobre a figura. Essa é "uma abordagem que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas" (Duval, 2005, p. 16, tradução nossa).

Esse modo de ver uma figura geométrica difere daquele com que olhamos para as demais (Duval, 2005, 2011), pois:

> Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras figuras que não vemos, mas que vão se tornar mais importantes que aquelas que vemos. (Duval, 2011, p. 88)

Para Duval (2011, p. 88), esse olhar "exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas". E "é nessa maneira, violenta e irrealista que se fundamenta o enunciado das propriedades, nas definições e nos teoremas".

Essa desconstrução dimensional que se coloca na aprendizagem precisa ser considerada, pois muitas vezes os alunos nem se dão conta de sua existência, visto que "para fazer o aluno entrar nessa maneira de ver é preciso elaborar tarefas e problemas específicos desde o ensino primário" (Duval, 2011, p. 94).

A seguir, na discussão de exemplos, articulamos a visualização com o discurso para a aprendizagem de área de triângulos e quadriláteros.

Discussão de exemplos

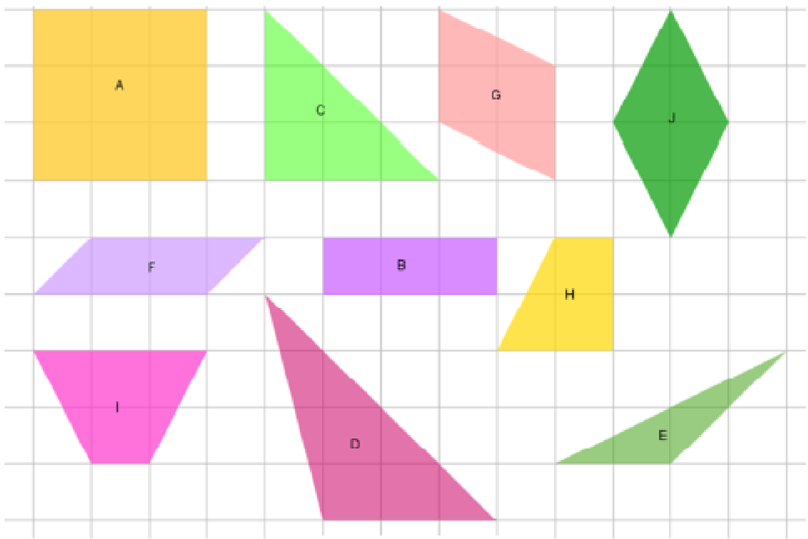
A Figura 3 mostra a atividade utilizada na sessão 6 e teve como variável didática[12] o tipo de figura cuja área pode ser calculada com e sem fórmulas algébricas. A atividade visou promover o uso de mais de um registro (geoplano e a malha quadriculada), tanto para calcular a área quanto para validá-la.

Note-se que para determinar as áreas deve-se primeiramente converter o registro em língua natural (enunciado) em registro figural.

Figura 3.

Registros distintos para calcular a área dos triângulos e quadriláteros (Arinos, 2018, p. 207)

Calcule a área dos triângulos e quadriláteros abaixo de duas maneiras diferentes, uma fazendo uso de fórmulas e outra sem utilizá-las.

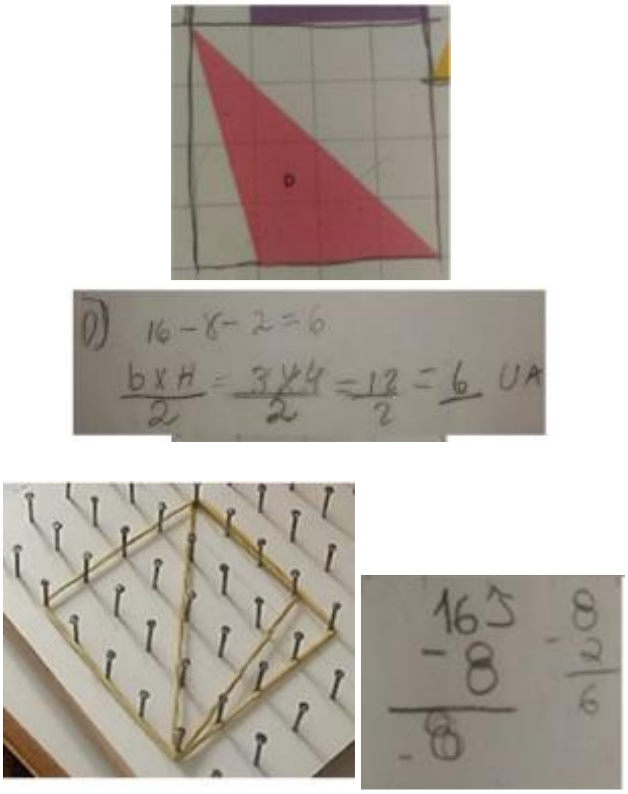


Como mostra a Figura 3, para calcular a área os alunos representaram o triângulo no geoplano e fizeram tratamentos figurais e numéricos nessa representação. Em seguida, adotaram outra estratégia, com uso da fórmula algébrica, validando o resultado já encontrado. Na apreensão **discursiva** desses alunos, constatamos a nomeação das figuras em triângulo e quadrado: o olhar **botanista**.

[12] Para Bittar (2017, p. 104) as variáveis didáticas são "elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos".

Figura 4.

Protocolos dos alunos, sessão 6 (Arinos, 2018, p. 213)



Pesquisadora: Como vocês fizeram para encontrar a área deste triângulo?
Aluna 10: O triângulo D foi assim: a gente pegou três, que é de base, e quatro, que é de altura, e dividiu por dois, que deu seis.
Aluno 3: A gente montou ele no geoplano e fez um quadrado em volta dele. Então a gente pegou esse triângulo e viu quanto ele valia. Ele é a metade [metade do quadrado de área dezesseis], então ele vale oito. Esse daqui (o outro triângulo de base quatro e altura um), a gente somou e ele deu dois. Daí ele deu seis [triângulo D] porque de dezesseis a gente tirou oito e tirou dois que deu seis.
Aluna 11: A gente olhou aqui que esse quadrado inteiro que deu dezesseis. Daí a gente tirou essa metade, que ficou oito, daí a gente tirou mais dois, que deu seis. Daí a gente montou base vezes a altura, que deu três vezes quatro, dividido por dois, que dá seis unidades de área.

Essa representação no geoplano exigiu o olhar **construtor** e a produção heurística. Nessa representação, eles perceberam que a contagem dos quadradinhos por dentro não seria suficiente para calcular a área. Assim, realizaram o mergulhamento, contornando o triângulo por um quadrado.

Essa atividade de construir o quadrado “ensina a ver” os olhares explicitados por Duval (2005), realizando o que ele chama de **produtividade heurística**, fazendo aparecer o quadrado que o olho não vê à primeira vista (Duval, 2012a). Os tratamentos feitos, constituídos dessa produtividade heurística nesse triângulo, combinam operações que não são puramente a **perceptiva** e a **discursiva**.

Ao representarem o triângulo no geoplano, tiveram que desconstrui-lo dimensionalmente ($0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$). Este procedimento requer a visualização não icônica articulada com a apreensão **discursiva**, que é uma especificidade para a aprendizagem geométrica. Tiveram que descontruir o triângulo representado na folha $(2D)$ para o construir no geoplano, o que exigiu que estabelecessem uma ordem nas operações efetuadas por meio da apreensão **sequencial** controlada pela **perceptiva** e **discursiva**, a que não estão habituados. Essa representação permitiu a passagem do olhar icônico (**botânico** e **agrimensor**) para o não icônico (**construtor** e **inventor**).

Essa é uma característica específica das figuras geométricas: podem ser construídas e desconstruídas. Neste caso, essa desconstrução repousou em traços $1D/2D$ e $0D/2D$. Para Duval (2005), toda atenção é centrada na reconstrução – nesta atividade, de desconstrução, porque exige uma ordem nas operações dos traços que se devem fazer.

Ao adicionar traços ao triângulo de modo a contorná-lo por um quadrado, calcularam a área do triângulo "por fora", retirando da área do quadrado as áreas que não fazem parte do triângulo D.

A representação do triângulo no geoplano serviu de suporte para os raciocínios elaborados e também de controle, para justificar a área por meio dos tratamentos figurais e numéricos realizados, bem como na conversão entre esses registros. Para Duval (2005), a utilização heurística de uma figura geométrica depende da capacidade de ver esses traços reorganizadores possíveis, que é uma das especificidades da visualização não icônica, que não é subordinada ao conhecimento das propriedades geométricas.

Ao identificarem que esse tratamento figural seria suficiente, eles realizaram uma conversão ao registro numérico, seguida de tratamentos nesse registro para obterem a área. As fórmulas algébricas foram mobilizadas junto com uma conversão delas ao registro numérico.

Realiza-se a desconstrução dimensional $(2D/1D)$ para aplicar a fórmula algébrica, muda-se o olhar e olha-se para o unidimensional, de modo a obter a área, que é bidimensional. Essas formas $1D/2D$ presentes no triângulo são identificadas por meio do olhar **inventor**.

A visualização do triângulo emerge mais prontamente a nosso olhar. No entanto, para visualizar os segmentos, exige-se a desconstrução dimensional, que requer o olhar não icônico de ***inventor***, sendo essa "uma abordagem que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas" (Duval, 2005, p. 16).

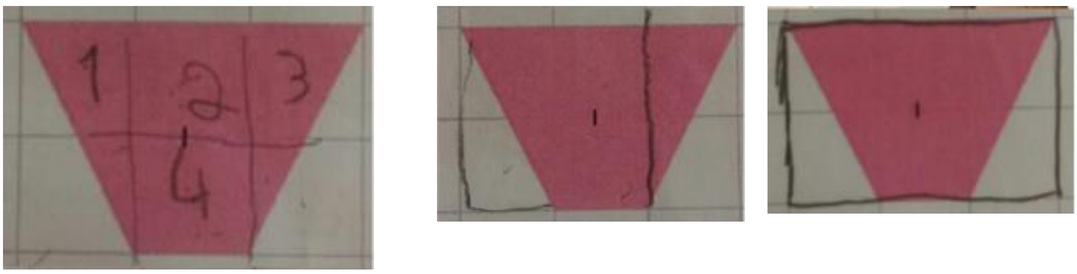
Para Duval (2005), esses procedimentos são importantes e devem ser considerados para a aprendizagem de geometria, pois o modo como vemos as figuras depende da desconstrução dimensional que nelas operamos.

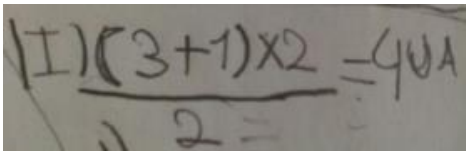
Para calcular a área do triângulo D (Figura 4) utilizando a fórmula algébrica, identifica-se a altura relativa à base, que não é visível nem interna ao triângulo, mas externa a ele. A representação no geoplano contribuiu para determinar essa altura, porque "sobem-se" quatro quadradinhos. Essa altura é obtida por meio de uma desconstrução dimensional: olha-se para a base com o olhar inventor, sai-se do triângulo representado $(2D/2D)$ e vai para o $1D/2D$ e para o $0D/2D$.

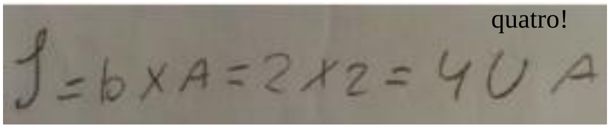
No próximo exemplo, para calcular a área do trapézio I (Figura 5), os alunos o mergulharam em um retângulo, subtraindo dele a área dos dois triângulos que não fazem parte do trapézio (trapézio à direita). No discurso, pode-se perceber esse tratamento figural por meio do registro numérico "seis menos dois".

Figura 5.

Protocolos dos alunos, sessão 6 (Arinos, 2018, p. 211)







Aluna 3: O trapézio I foi muito fácil! A gente só pegou essa parte e colocou ela aqui [reconfigurou o trapézio em um quadrado]. Então deu: um, dois, três, quatro!

Aluna 6: Aqui a gente fez a base maior mais a base menor, que no caso é três na base maior e um na base menor, que dá quatro. Vezes a altura, que é dois: dá oito. E oito dividido por dois, dá quatro unidades de área. E sem a fórmula a gente fez seis menos dois, que deu quatro também [a área do retângulo menos a área dos triângulos representados no geoplano à esquerda].

Os alunos decompuseram o trapézio (Figura 5) em um triângulo e em um trapézio retângulo e em seguida o reconfiguraram em um quadrado. Isso pode ser visto no traço a lápis. Assim, determinaram sua área por meio de contagem. Percebe-se aqui a conversão do registro figural ao numérico e tratamentos neste registro para calcular a área. No discurso da aluna 3, percebe-se autonomia na heurística empreendida sobre o trapézio. A reconfiguração articulada com a visualização, comandada pela apreensão **perceptiva** e o olhar **botanista**, permitiu o cálculo da área.

No registro numérico, um grupo mobilizou a fórmula algébrica do trapézio e outro a do quadrado. Aplicaram a fórmula ao quadrado obtido após a reconfiguração. Isso pode ser confirmado no discurso produzido e nos tratamentos figurais e numéricos realizados.

No trapézio à esquerda (Figura 5), os alunos realizaram os tratamentos figurais mentalmente, o que caracterizamos como um avanço. Essa busca no trapézio para calcular sua área o fez desempenhar sua função heurística.

Por meio dos tratamentos figurais ocorreu transformação desse trapézio, permanecendo em $2D$. No entanto, para aplicar a fórmula algébrica, mudaram-se os olhares, para o ponto $(0D)$ e para os lados $(1D)$.

Isso exige passar a dimensões inferiores no trapézio. Para Duval, uma das causas dos entraves em problemas geométricos é olhar para essas dimensões inferiores, pois à primeira vista a dimensão superior é a que prevalece. Para mobilizar a fórmula algébrica é necessário olhar os elementos $0D$ e $1D$ representados em $2D$, embora permanecendo em $2D$. Neste caso, a dimensão superior é a que se impõe perceptivelmente, com o olhar **botanista**.

Para calcular a área do trapézio, a apreensão **operatória** foi requerida por meio da operação de reconfiguração. A reconfiguração é uma importante modificação com invariância de áreas nas figuras geométricas e certamente por isso ela foi bastante requerida em nosso estudo.

Os alunos, nesses protocolos, conseguiram articular a visualização não icônica com as desconstruções dimensionais e com o discurso matemático. Para Duval (2005), uma das dificuldades específicas da aprendizagem de geometria reside na complexidade dessa articulação.

Considerações e perspectivas

Nas atividades desenvolvidas com os alunos, observamos que os procedimentos efetuados nas figuras para determinar sua área contribuíram com a visualização matemática. Embora alguns alunos já houvessem estudado o cálculo de áreas por meio de fórmulas algébricas, observamos que tiveram mais dificuldades em mobilizá-las em nossa intervenção do que em proceder à busca heurística na própria figura. Utilizaram fórmulas somente quando isso foi solicitado. Caso contrário, resolviam a atividade sem usá-las. No final, também passaram a calcular com o uso de fórmulas para validar a solução que haviam encontrado por outra estratégia.

Salientamos o quão imprescindível é pensar no tipo de atividade que se deve propor, bem como em possíveis variáveis didáticas concernentes às atividades, pois, por exemplo, a operação de reconfiguração que consideramos importante para a aprendizagem de áreas não comparece explicitamente em figuras usadas no ensino. Sendo assim, procuramos elaborar atividades que favorecessem essa operação e possibilitassem explorar diversas representações com recursos materiais. Nesse caminhar, buscamos explorar procedimentos heurísticos de modo que os alunos não ficassem limitados à apreensão **perceptiva**, que é automática, e passassem também à apreensão **operatória**.

Algumas dificuldades, como a de representar as figuras no geoplano, puderam ser identificadas por meio das apreensões discursivas elaboradas por meio de distintas representações semióticas mobilizadas pelos alunos durante as sessões. Isso nos possibilitou ser mais pontuais nas retomadas e encaminhamentos visando a aprendizagem de áreas.

Percebemos que essas atividades contribuíram para o desenvolvimento do olhar não icônico e para as produções heurísticas nessas figuras, pois os alunos exploraram as figuras representando-as de modos diferentes e, assim, calcularam suas áreas. No final, o cálculo com fórmula passou a ser utilizado para validar os raciocínios envolvidos em outras estratégias e as soluções encontradas por meio destas. Isso lhes permitiu compreender suas dúvidas, como a de identificar as medidas para aplicar as fórmulas e a decompor e reconfigurar as figuras. Isso lhes proporcionou um novo modo de calcular áreas.

Ao calcular a área em pelo menos dois modos diferentes, principalmente pela exploração heurística nas figuras, os alunos obtiveram alternativas para solucionar as atividades proposta, em vez de se aterem a procedimentos com fórmulas. Isso lhes possibilitou maior desenvoltura em seus modos de pensar, raciocinar e olhar para uma figura geométrica. Além disso, ao representarem as figuras no geoplano, ou na folha quadriculada, puderam visualizá-las em posições diferentes, o que contribui também para a operação de reconfiguração, por ser uma prática dos movimentos efetuáveis em uma figura. Essa visualização da figura representada em posições diferentes permitiu alguns tratamentos figurais e possibilitou outras informações visuais, como as obtidas por mergulhamento.

O tipo de figura proposto contribuiu para o mergulhamento e para os tratamentos figurais quando a representavam no geoplano. Isso permitiu a experimentação heurística nessas figuras. Assim, ultrapassaram a **apreensão perceptiva**, pois visualizaram outras figuras que não se veem à primeira vista. Duval (2005) lembra que certas pesquisas didáticas lamentam que na resolução de problemas de geometria muitos alunos ficam sem saber o que se deve fazer, devido à percepção que têm da figura.

Em suma, percebemos que articular a visualização com a linguagem, mudando as representações e os registros no cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros, propiciou um ambiente de aprendizagem agradável e desafiador. Isso pôde ser constatado na participação ativa dos alunos, que compareceram em pleno contraturno escolar. Dos 12 alunos, somente um deixou de participar porque mudou de escola.

A análise cognitiva dessas representações e transformações semióticas contribuiu para que compreendêssemos como os alunos articulam seus conhecimentos geométricos para aprender e superar dificuldades em geometria. Para Duval, os problemas de aprendizagem de geometria decorrem de dificuldades em coordenar os tratamentos oriundos dos registros figurais e discursivos e, também, dos tratamentos espontâneos que surgem nestes.

Percebemos durante as sessões, como aponta Duval (2011, p. 83), que o registro da língua natural "constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento". Assim, por meio desse registro e da apreensão discursiva sobre as figuras geométricas e dos tratamentos figurais, os alunos puderam tomar consciência da exploração heurística que as figuras geométricas propiciam, solucionando, muitas vezes, a mesma atividade de modos diferentes.

Para finalizar, gostaríamos de apontar algumas perspectivas de continuidade e aprofundamento de estudos relacionados à problemática dos registros, olhares e apreensões em geometria. Uma delas é avançar sobre outros conteúdos e níveis de escolaridade, por exemplo sobre volumes de sólidos geométricos, adentrando o espaço tridimensional e o nível do ensino médio.

Outra perspectiva de investigação diz respeito à abordagem metodológica, por meio do uso da metodologia de narração de pesquisa. Na França, essa prática pedagógica de pesquisa surgiu no início da década de 1990, no Grupo de Geometria do IREM em Montpellier, onde professores de matemática do ensino fundamental e médio criaram esse método para que os alunos trabalhassem em problemas abertos. Esse procedimento metodológico primeiro se concentra no aspecto narrativo, em seguida dando ênfase à pesquisa e à argumentação. Em sua experimentação com os alunos, o método inclui diferentes etapas e elementos, como a escolha das declarações, as instruções dadas aos alunos, a correção e avaliação de produções e o relatório em sala de aula. Para mais detalhes, ver Chevallier (1993).

Consideramos também a possibilidade de aprofundamento na *abordagem experimental em matemática*. Durante nossa experimentação, o grupo de 12 alunos realizou uma atividade sobre problemas de pesquisa, que permitiu desenvolver procedimentos científicos, heurísticas e raciocínios, o que representa uma estrutura que permite aos alunos construir esse conhecimento. Em outras palavras, nosso trabalho em sala de aula com esse grupo parece estar relacionado a uma *dimensão experimental na busca de problemas* em matemática (Aldon, 2008). Na verdade, trata-se da abordagem experimental do ensino de matemática, que se caracteriza por passos importantes na atividade do aluno: Formular um problema (questionamento, modelagem, documentação, ...), experimentar (fazer, testar, observar, ...), conjecturar, testar a conjectura (teste, avaliação, ...), provar e comunicar, ... Desses passos, dois merecem destaque: o estágio da conjectura e o da prova. Pode-se dizer que a realização de um experimento em matemática equivale à manipulação de objetos habituais familiares, buscando-se conciliar observações com teorias matemáticas, que constituem esses objetos. Isso dá aos alunos a possiblidade de usar essas ferramentas para construir para frente e para trás, entre as observações e os conceitos matemáticos subjacentes (Aldon, 2008).

Por fim, nossos estudos indicam também a possibilidade de agregação de outra perspectiva teórica. Durante nossa experimentação, percebemos que nossas atividades mobilizaram imagens, no sentido de conceito-imagem e conceito-definição, como propostos por Tall e Vinner. A noção de conceito-imagem de Vinner e Tall (1981) refere-se ao conjunto que:

> [...] descreve a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, bem como propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa)

Assim, acreditamos que o trabalho com o conceito-imagem de Vinner e Tall no estudo da aprendizagem irá permitir a compreensão, por meio das imagens mentais, das propriedades associadas a um processo que o aluno mobiliza (imagem conceitual). Essa ferramenta teórica pode permitir o trabalho com situações voltadas à aprendizagem das fórmulas, como também para relacionar essas fórmulas com figuras.

Referências

Aldon, G. (2008) La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques, Actes de l'Université d'Été de Saint-Flour, Expérimentation et démarches d'investigation en mathématiques, www.eduscol.education.fr/forensacte, Octobre 2008.

Almouloud, S. A. (2004). A geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje? In Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo: VII EPEM.

Almouloud, S. A, & MELLO, E. G. S. (2000). Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos. http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf

Arinos, C. R. M. (2018). *Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul]. https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/5448.

Artigue, M. (1996). *Engenharia didática*. In Brun, Jean (Org). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Jean Piaget.

Bellemain, P.M.B, & Lima, P. F. (2010). *Coleção explorando o ensino de matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Bittar, M.. (2017). Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: R. A. de M. Teles, R. E. de S. R. Borba, & C. E. F. Monteiro. (Orgs.), *Investigações em didática da matemática* (pp. 101-132).1ed. Recife: UFPE.

Brandt, C. F, & Moretti, M. T. (2015). Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. *III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil* – São Paulo, 17(3), 597-616.

Brasil. (2017). Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, DF: MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Chevalier A. (1993). Narration de recherche: un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, 33, 1992-1993, 71-79.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique e de Sciences Cognitives*, nº10, 5-53.

Duval, R. (2009). *Semiose e pensamento humano: registro de representação semiótica e aprendizagens intelectuais* (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I). Tradução: Lênio F. Ley, & Marisa R. A. da Silveira. Editora da Física, São Paulo, SP.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. (Org.): T. M. M. Campos. Tradução: M. A. Dias. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo.

Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução: M. T. Moretti. *Revemat*, Florianópolis, 7(1), 118-138.

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: M. T. Moretti. *Revemat*, Florianópolis, 7(2), 266-297.

Flores, C. R, & Moretti, M. T. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat*, Florianópolis, 1(1), 5-13. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12986/12088

Lorenzato A. (1995). Por que não ensinar geometria? A Educação Matemática em Revista, ano III, n.4. Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Moretti, M. T, & Brandt, C. F. (2015). Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras – Construction of a methodological Picture of semiotic and cognitive analysis concerning geometry problems involving figures. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 17(3), 597-616.

Pavanello, R. M. (2004). Por que ensinar/aprender geometria? In VII Encontro Paulista de Educação Matemática. http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso__32_e_39_-_matematica_-_clecimara_medeiros.pdf

Silva, A. D. P. R. da. (2016). *Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti*

Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco]. https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17427/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Anderson%20Douglas%20Pereira%20Rodrigues%20da%20Silva.pdf

Souza, R. N. S. de. (2018). *Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria* [Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/198939/PECT0369-T.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 3(12), 151-169.

Recebido em: 14/09/2020

Aprovado em: 25/01/2021