Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações

SADDO AG ALMOULOUD*
MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA
MARIA INEZ RODRIGUES MIGUEL
CRISTIANA ABUD DA SILVA FUSCO

Resumo
Neste artigo, apresentamos uma reflexão sobre prova e demonstração em matemática e discutimos alguns resultados sobre um conjunto de atividades envolvendo o raciocinio dedutivo, realizadas por professores de ensino fundamental. Este trabalho faz parte de uma pesquisa em desenvolvimento, que tem por objetivo investigar os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem envolvendo provas e demonstrações em matemática nas séries finais do ensino fundamental, bem como as representações de professores sobre o racicíonio dedutivo. O trabalho foi realizado em quatro fases que se complementam: a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática; o estudo dos processos de ensino e aprendizagem envolvendo provas e demonstração; a análise de concepções dos estudantes e professores sobre prova e demonstração em matemática, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; a análise das condições de realização efetiva da formação de professores do ensino básico participantes da pesquisa. A análise das produções dos professores participantes do projeto mostra, sobretudo, a necessidade de se criarem condições que promovam mudanças nas concepções e nos saberes dos professores de matemática a respeito de prova e demonstração, bem como nas linguagens utilizadas para criar condições que permitam aos seus alunos raciocinar, argumentar, provar e demonstrar.
Palavras-chave: formação de professores; prova; demonstração; ensino e aprendizagem da Matemática.

Abstract
In this paper, we introduce a reflection on mathematical proof and demonstration and discuss some results from activities involving deductive reasoning carried out by Secondary School teachers. This

* PUC-SP. E-mail: saddoag@pucsp.br

work is part of an ongoing research study. Our aim is to investigate the organization methods and the theoretical and methodological procedures related to the teaching and learning that involves mathematical proof and demonstration in the early years of Secondary Education, as well as teachers' representations about deductive reasoning. This work was developed in four directions: epistemological analysis of the notion of demonstration in mathematics; analysis of teaching and learning processes that involve proof and demonstration; analysis of students' and teachers' conceptions about proof and demonstration, and the difficulties and obstacles which determine their development; analysis of the education conditions of the teachers that participate in this research study. The results of this study show the need to create conditions that can promote changes in the teachers' conceptions and knowledge about mathematical proof and demonstration, as well as in the languages used to create conditions in which students are able to reason, argue, prove and demonstrate.
Keywords: *Teacher education; Proof; Demonstration; Mathematics teaching and learning.*

Introdução

Atualmente, verificamos, sem grande dificuldade, que no ensino fundamental e médio não se dá ênfase ao ensino de demonstrações em matemática. Um dos motivos pode ser a elaboração, pelo próprio professor, do planejamento de sua disciplina de acordo com as necessidades da clientela, sugerido pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, 1996). Levantamos a hipótese de que os professores, em geral, não consideram as exigências para o ensino e a aprendizagem da matemática que prevêem, a partir da sétima série, que o aluno inicie a justificar, a provar e a demonstrar alguns resultados a fim de torná-los indiscutíveis. Além disso, existem problemas específicos da demonstração na formação inicial.

Para Garnica (1995 apud Cury e Hack, 2000), os professores universitários reconhecem a importância da demonstração, mas fazem duas leituras diferentes. Uma delas considera o ponto de vista técnico e se apóia no fazer matemático profissional, a outra considera o ponto de vista crítico. Para Cury e Hack (ibid., pp. 1-2) a formação inicial do professor de Matemática "apresenta" essas duas visões, mas,

> [...] especialmente a visão técnica, nas disciplinas de conteúdo específico, tem dificuldade de entender a razão pela qual deve ser feita a demonstração, especialmente se esta lhe é "jogada" para que seja reproduzida fielmente em avaliações da aprendizagem.

No intuito de discutir esses e outros problemas a respeito de demonstração, grupos de pesquisadores se preocupam em resgatar atividades matemáticas que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio dedutivo presente na demonstração de resultados matemáticos. Entre eles, Almouloud e Fusco (2006) discutem as noções que alguns professores da rede pública do estado de São Paulo têm a respeito de teoremas e demonstrações que aparecem nos textos didáticos voltados para os ensinos fundamental e médio. Tanto nesse trabalho, quanto no que passaremos a desenvolver, os dados foram coletados a partir de um projeto realizado com professores da rede pública do estado de São Paulo. Tais professores participam como voluntários de um projeto de pesquisa que trata do raciocínio dedutivo nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática nas séries finais do ensino fundamental. Os encontros são semanais, com duração de três horas e, neles, uma pesquisadora orienta os trabalhos que ora são realizados individualmente, ora em duplas ou trios. Geralmente, os professores recebem material fotocopiado com problemas de matemática para serem resolvidos nos grupos e, depois, comentados, com as soluções discutidas e reproduzidas na lousa.

No decorrer do projeto, os professores realizam atividades que favorecem a compreensão do significado de demonstração e de seu papel no ensino, com o propósito de incentivá-los a integrar provas e demonstrações ao processo de formação de seus alunos "ajudando-os a restituir a historicidade de prova, de demonstração e de rigor matemático" (Gouvêa, 1998, p. 1). Tal preocupação está presente também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), tanto do ensino fundamental, quanto do médio, indicando a demonstração como parte integrante do currículo, conforme podemos ver no seguinte trecho:

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (Ibid., p. 71)

Nesse sentido, um dos nossos objetivos é realizar um trabalho com os professores fundamentado em nosso quadro teórico, de modo a fazê-los entender os caminhos da demonstração, bem como de provas e justificativas que os levem a desenvolver uma autonomia necessária para empreender atividades que envolvam esses procedimentos com seus alunos em sala de aula.

Para tanto, desenvolvemos um projeto de pesquisa que tem por objetivo investigar os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem envolvendo o raciocínio dedutivo em matemática. Essencialmente, investigamos os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem envolvendo provas e demonstrações em matemática nas séries finais do ensino fundamental, bem como o estudo das representações dos professores dessas séries no que diz respeito ao papel do raciocíonio dedutivo na formação do aluno. O projeto foi desenvolvido em torno das seguintes questões a serem pesquisadas: Quais fatores influenciam no processo ensino-aprendizagem envolvendo o raciocinio dedutivo em matemática? Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações? Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores no que diz respeito às provas e demonstração em matemática?

Nossa finalidade é, portanto, apresentar uma reflexão a respeito de prova e demonstração em matemática e discutir alguns resultados sobre um conjunto de atividades envolvendo o raciocínio dedutivo realizadas por professores do ensino fundamental e médio participantes do projeto de pesquisa.

Metodologia e procedimentos metodológicos

Organização geral da pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo, ou seja, o ensino e a aprendizagem da Matemática via demonstração, em que os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema são envolvidos de modo cooperativo ou participativo (Thiollent, 1998).

O trabalho realizado desenvolveu-se em quatro fases: a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática; a análise do processo ensino-aprendizagem envolvendo provas e demonstração; a análise das concepções dos estudantes e professores, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; a análise das condições da realização efetiva da formação de professores do ensino básico participantes do projeto. Todas essas etapas foram, logicamente, pautadas pelos objetivos específicos de nossa investigação.

Temos a preocupação em trabalhar com professores e pensamos que não se faz a formação de um docente como um mero treinamento individual, mas sim com o desenvolvimento de uma comunicação e da expressão dos participantes. A reflexão gerada nesse processo possui uma representação social que se vincula com outras realidades educativas-sociais, devido às diferenças entre os membros, para construir redes de intercâmbio e de transformação (Comuzzi, 2002, p. 5). Essa pesquisa foi concebida de forma a contribuir na formação do professor, na perspectiva de Garcia (1999, p. 26):

> A formação de professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipa, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objectivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem.

A presença simultânea e integrada dos meios de comunicação social e as novas tecnologias vêm ajudar a formação docente, permitindo a orientação de um novo educador. A ferramenta fórum, por exemplo, de algum ambiente virtual, tal como o Moodle, tem um papel importante para o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de reflexão a respeito da ação e das concepções dos professores no processo de formação contínua.

Nosso projeto de pesquisa foi norteado pelas seguintes etapas:

1. Diagnosticar concepções iniciais dos professores que pretendem participar do processo de formação em situações envolvendo provas e demonstrações, por meio de mapa conceitual e entrevista estruturada.
2. Com base nos resultados e nos estudos didático-epistemológicos, elaborar um conjunto de situações para serem desenvolvidas com os professores.

3. Orientar os professores na elaboração, análise e aplicação de um conjunto de atividades para ser desenvolvido com seus alunos. Realizamos, nesse sentido, discussões no processo, tanto de modo presencial quanto no Fórum do ambiente Moodle.
4. Diagnosticar possíveis mudanças de concepções e da prática pedagógica dos professores, por meio de mapa conceitual, entrevistas e de acompanhamentos em sala de aula e no Moodle.
5. Analisar as produções escritas e orais dos professores e os testes aplicados aos seus alunos, utilizando programas para o tratamento de dados estatísticos.
6. Analisar o papel do raciocínio dedutivo nas abordagens de alguns livros didáticos de matemática do 3º e 4º ciclos do ensino fundamental.

Organização do trabalho realizado com os professores

Para este projeto, desenvolvemos o trabalho com os professores em dois momentos:

- Os encontros de segundas-feiras, nos quais o grupo de pesquisadores e os alunos da pós-graduação discutem a fundamentação e os aspectos teóricos da pesquisa e da formação dos professores;
- Os encontros de formação propriamente ditos, que acontecem com dois grupos de professores voluntários: às quintas-feiras, das 14h às 17h e às sextas-feiras das 8h às 11h.

Durante o segundo semestre de 2005 e todo o ano de 2006, nos encontros das segundas-feiras, direcionamos os trabalhos para as leituras de embasamento teórico para a condução do projeto. Dentre elas, destacamos: Pedemonte (2002), Balacheff (2004), Godino e Recio (1997) e Boero (1996). Os textos, na íntegra ou em parte, eram previamente traduzidos e enviados aos participantes pela lista de discussão geral do grupo para que todos pudessem participar mais ativamente das discussões teóricas. Dessa forma, a cada texto, buscava-se identificar os pontos relevantes para a análise teórica da parte experimental do projeto, ou seja, das oficinas que ocorriam nas quintas e sextas-feiras com os professores voluntários, em um processo de reflexão que relacionava a teoria à prática vivenciada pelo grupo com o objetivo de transformar fatos observados em fenômenos didáticos.

Participavam dessas reuniões não apenas os pesquisadores, mas também os alunos de mestrado e doutorado em Educação Matemática, bem como outros professores que já haviam concluído seu mestrado na PUC-SP e que atuavam como colaboradores no projeto, seja como observadores nas oficinas, seja ampliando a revisão bibliográfica que poderia contribuir para o avanço da pesquisa.

Para o grupo de professores participantes, foi aplicado um questionário de identificação e diagnóstico a respeito de seus conhecimentos sobre demonstração. Decidiu-se adotar, enquanto procedimento de formação, a elaboração de material de apoio pelo qual os professores pudessem refletir sobre as situações apresentadas e propor possíveis soluções em discussões coletivas.

Visando coletar os dados para o desenvolvimento dessa pesquisa, de acordo com a metodologia escolhida, os dois grupos contaram com observadores que tomavam nota e gravavam, em áudio, os diálogos dos professores durante as sessões, e com formadores, cujo papel era o de organizar e mediar as sessões de formação de professores do ensino fundamental e médio.

Reflexão sobre prova e demonstração

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) enfatizam a importância da demonstração em Matemática, dando orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior *demonstração* formal*,* privilegiando conjecturas e relações vinculadas ao discurso teórico. A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, mas que ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficiente para a compreensão dos mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

Pesquisadores como Boero (1996) discutem o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de oitava série. Na pesquisa desse autor, o problema consiste em verificar que a maioria dos alunos, nesse nível de escolaridade, pode produzir teoremas (conjecturas e provas) se forem colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:

- durante a produção das conjecturas, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;

- durante o estágio seguinte da prova, o estudante seleciona e organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, produz algumas justificativas ("argumentos") elaboradas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

Além de trabalhos que procuram compreender melhor o raciocínio lógico, nos deparamos com outros, que buscam uma melhor compreensão do que vem a ser uma prova matemática. Usualmente, consideramos a *demonstração* como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Nesta pesquisa, adotamos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff (1982). A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social e constitui uma prova para essa comunidade, sendo a proposição "verdadeira" ou não. As *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff (ibid.) denomina, somente nesse caso, demonstração. *As demonstrações* são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros, anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução escolhidas com base em um conjunto de princípios básicos da lógica;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e questiona se seria possível um consenso a respeito de prova em Matemática, confronta as afirmações de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (apud Balacheff, 2004, p. 13) a respeito das funções da prova:

(i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação;

> (ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das conseqüências de uma hipótese, absorvendo um fato novo em uma nova estrutura que permite uma nova percepção.

O autor destaca, ainda, perspectivas radicalmente diferentes de epistemologias de provas matemáticas como, por exemplo, prova como tipo de comprovação universal e exemplar ou início de uma natureza idiossincrática no núcleo da Matemática, ou como instrumento necessário da matemática, ou, ainda, como algo que adquire seu significado ou como um campo autônomo da matemática. A falta de clareza dessas diferenças pode tornar-se obstáculo nas pesquisas e contribuir para gerar uma situação de impasse para o pesquisador.

No entanto, Balacheff (ibid., p. 12) destaca que existem pontos comuns nas epistemologias de prova matemática que podem facilitar a busca de elementos, tais como:

> (i) reconhecimento de que a origem da racionalidade matemática, ao menos sob a perspectiva da aprendizagem, é construída sobre e contra um tipo de racionalidade baseada no "senso comum", apoiada em uma cultura histórica, moral e de adesões religiosas, em práticas sociais e profissionais de uma comunidade; (ii) a existência de profundas relações entre argumentação e prova cuja natureza é o objeto de debate ou pelo menos deve ser transformado em um problema; (iii) a prova deveria ser considerada à luz da teoria e da prática; (iv) reconhecimento de que a matemática enquanto conteúdo gera dificuldades específicas para serem superadas ou, ao contrário, para serem construídas no surgimento de um significado de prova matemática; (v) o professor desempenha um papel-chave tanto como um animador acidental ou como um facilitador necessário (tradução nossa).

O autor acrescenta que "entre todos esses aspectos, surpreendentemente, um não aparece: a relação entre prova e linguagem, provar e redigir uma prova"(ibid, p. 13).

Balacheff (1987) identifica os seguintes níveis de prova entre as provas pragmáticas e conceituais:[1]

- *Empirismo ingênuo:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
- *Experimento crucial:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição a partir de um caso especial, geralmente não familiar.
- *Exemplo genérico:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
- *Experimento de pensamento:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

De Villiers (2002) comenta que é costume, no ensino da matemática, fazer uma abordagem em que as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Porém, ele alerta que a demonstração tem outras funções em matemática:

i) **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;

ii) **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;

iii) **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;

iv) **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;

v) **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;

vi) **Sistematização**: organização de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

---

1 Segundo Balacheff (1987, p. 217), as provas pragmáticas são aquelas que recorrem a uma ação atual ou *showing*, e, pelo contrário, as provas conceituais são aquelas que não envolvem ações e resultam de formulações de propriedades em questões e relações entre elas.

Analisando as causas do fracasso, tanto no ensino e na aprendizagem da demonstração em Matemática, Duval (1995) diz que ela envolve uma atividade cognitiva específica e que sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Ela é um modo de processamento cognitivo autônomo com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, a interpretação. De um lado, ela articula os enunciados em função do estatuto que lhe é reconhecido e não em função de seu significado; por outro lado, ela se faz em progressão por substituição de enunciados e não pelo encadeamento. A aprendizagem da demonstração, para Duval (ibid.), consiste primeiramente na conscientização de que se trata de um discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. A tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre em uma articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso.

Sem dúvida alguma, as discussões a respeito de provas e demonstrações são inúmeras e extensas, uma vez que o tema pode ser abordado sob diversas óticas. No entanto, admitimos que a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados. Além disso, o conjunto organizado desses fatos deve comprovar, de forma irrefutável, algum tipo de proposição matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada.

Parsysz (2006), estudando os processos e mecanismos relacinados com o ensino e a aprendizagem da geometria no ensino fundamental, propôs uma classificação que considera os objetos em jogo, físicos ou teóricos, e os modos de validações, perceptivo ou dedutivo. Como Geometrias não-axiomáticas, o autor apresenta, G0-Geometria Concreta e G1-Geometria Espaço-gráfica. Em G0 os estudos geométricos são realizados a partir de atividades concretas como maquetes, plantas e dobraduras. Na Geometria Espaço-Gráfica (G1) ainda se confunde Geometria e realidade; os alunos podem conjecturar e fazer constatações de propriedades, empiricamente. Quanto às Geometrias axiomáticas, Parsysz (ibid.) as classifica como:

Geometria Proto-Axiomática (G2) e Geometria Axiomática (G3). Em G2, ocorre a concepção de um esquema da realidade em que as definições fazem sentido e os resultados passam a ser validados com técnicas dedutivas. Ainda nesse nível, a figura construída em G1 tem estatuto de figura genérica e a dedução é reconhecida como ferramenta de validação no interior de um sistema axiomático. Em G3, não se faz referência à realidade e a Geometria é totalmente explicada (ou abstrata). Trabalhando em G3, o aluno é capaz de situar-se nos diferentes sistemas axiomáticos, bem como compará-los.

Parsysz (ibid.) considera que na articulação entre os níveis G1 e G2 a gestão do salto conceitual é um elemento essencial na problemática do ensino obrigatório da Geometria, uma vez que é nessa articulação que devem ser fixados os conceitos em jogo e sua articulação. Nesse sentido, Fetissov (1997) e Arsac (1987) relevam a importância de apresentar a limitação das validações empíricas e de questionar a evidência da figura. Concordamos com Fetissov (1997) quando recomenda explicações de termos, de técnicas e lógicas empregadas em uma demonstração. Balacheff (1987) releva a importância da demonstração como único meio de legitimar uma hipótese matemática.

Um estudo (Carlovich, 2005) que versa sobre uma das questões de nosso projeto analisou livros didáticos do início dos anos 90 e do início dos anos 2000. O objetivo foi investigar como, em cada época, as coleções de livros didáticos acompanharam as discussões da Didática da Matemática no que se refere ao ensino-aprendizagem da Geometria dedutiva e sobre as diferenças dessas apropriações nas duas épocas. Os resultados da análise das coleções escolhidas mostram que, no início dos anos 90, a geometria era apresentada no final dos livros e sob enfoque dedutivista, ou seja, a grande maioria das demonstrações geométricas era apenas apresentada aos alunos, seguida de exercícios de aplicação das propriedades. Nas coleções de livros didáticos dos anos 2000, há indícios da apropriação do enfoque empírico e heurístico, pois apresentam situações cujo objetivo seria incentivar o aluno a conjecturar e a descobrir heuristicamente demonstrações de propriedades geométricas. Para Carlovich (2005), como o professor usa o livro didático como fonte para sua formação continuada (formação em exercício), pode-se supor que existe certo impacto nessa mudança de enfoque nos livros didáticos na prática desses docentes.

Discutindo algumas dificuldades de professores participantes do projeto

Nesta parte do trabalho, discutimos o entendimento que alguns professores possuem a respeito de teoremas e demonstrações. Trata-se de professores preocupados com a sua prática pedagógica e que gostariam de incrementá-la, porém não sabem como fazê-lo.

Apresentamos dois estudos de caso: no primeiro, analisamos o entendimento que uma dupla de professoras possui a respeito de teoremas e demonstrações que aparecem em alguns livros didáticos voltados para os ensinos fundamental e médio, e no segundo, investigamos o comportamento de *uma* das professores ante uma situação que envolve o raciocínio dedutivo.

Estudo de caso 1: "*Demonstração é como chegou àquilo?*"

Analisamos uma das atividades iniciais focando uma das duplas de professoras envolvida na formação. Essa dupla era composta por professoras que atuam tanto no ensino fundamental quanto no médio da rede pública. Uma delas tem formação em Administração de Empresas e a outra em Tecnologia de Processamento de Dados, ambas com complementação em licenciatura em Matemática. A fim de facilitar a identificação de algumas transcrições, passaremos a identificar essas professoras de P1 e P2.

Na atividade em questão, a formadora do grupo deixou à disposição dos professores livros didáticos de diversas séries e autores do ensino fundamental II. A tarefa consistia em identificar qualquer tipo de demonstração e discutir a viabilidade de ensino dessa demonstração em sala de aula. Antes que a dupla escolhesse um livro, houve uma pequena discussão em que a dificuldade inicial era saber o que seria uma demonstração, conforme registramos:

> P1: *Demonstração é como chegou àquilo?*
> P2: *Vou lhe dar um exemplo. É como se faz para chegar a uma equação, você diz o que significa o x, acredito que é isso...*

Após essa pequena discussão, selecionaram um livro de sexta série e começaram a folhear aleatoriamente, procurando uma demonstração. Tinham muita dificuldade em identificar se o que estavam lendo tratava mesmo de uma demonstração. Liam e refletiam, mostrando-se um pouco pensativas. Às vezes divergiam, pois a professora P1 acreditava tratar-se de uma demonstração e a P2 achava que não. Nesse caso, o texto em questão consistia em um problema cujo tema girava em torno da representação de vários potes de vidro contendo balas e etiquetas indicando, por exemplo, +2 (2 balas foram acrescidas ao pote) ou –3 (3 balas foram retiradas do pote); inicialmente, os potes estavam todos com 20 balas. As questões eram todas relacionadas com o acréscimo e retirada de balas. A professora P2 leu o enunciado do problema em voz alta, argumentando com a colega que se tratava de um problema e não de uma demonstração e passaram a discutir a resolução do mesmo, até que a professora P1 convenceu-se de que não era uma demonstração e exclamou: "*então siga em frente*". E continuaram folheando o livro mais um pouco. Desistiram e pegaram outro livro.

Ao se depararem com um problema envolvendo pesos, que incluía figuras de balanças, a professora P2 disse: "*isto, sim, é uma demonstração a respeito de pesos*". Tratam de peso maior e menor. No entanto, desistiram de se aprofundar nessa "demonstração", uma vez que na escola em que trabalham não existem balanças, o que inviabiliza a reprodução da referida "demonstração". A professora P2, a fim de ilustrar para a colega o que vem a ser uma demonstração, relatou como desenvolveu sua aula, no período da manhã, para chegar à fórmula que calcula as coordenadas do ponto médio de um segmento. No final do seu relato questionou: "*demonstração não é como eu cheguei a essa fórmula?*" A professora P1 retrucou: " falado é uma coisa, tem que manusear o concreto, que é melhor".

Passaram a discutir o ensino de números relativos, concordando que nem os alunos do ensino médio sabem, por exemplo, adicioná-los. Dessa forma, optaram por eleger o problema das balas nos potes como um exemplo de demonstração e iniciaram uma discussão de como fariam para apresentá-lo na sala de aula. Decidiram, então, que o mais adequado seria pedir para que os alunos trouxessem vidros vazios de maionese e passaram a discutir o que colocar nos vidros: "*bala de goma mela, juquinha também não é bom, bolas são grandes e pesadas*". Finalmente, decidiram que o melhor seria pedir tampas de garrafas para os alunos e, além disso, eles também deveriam providenciar selinhos para colar no vidro indicando se faltam ou sobram tampas, por exemplo, indicando –5 ou +10. Uma vez que o material estivesse completo, a professora pediria para que cada aluno montasse uma "continha" retratando a situação do seu pote. Uma outra dinâmica da aula seria realizar essa atividade em grupo. As professoras P1 e P2 utilizaram o restante do tempo procurando mais demonstrações em outros livros e finalizaram com comentários do tipo:

> P2: *Penso que demonstração é a fórmula geral.*
> P1: *Para mim, demonstração é quando eu mostro para que serve alguma coisa, como a equação do 2º grau, que se mostra como chegou na equação. Também é preciso se ver o objetivo, uma hora para que serve e outra como se resolve.*

Encerrado o tempo destinado à busca de demonstrações nos livros didáticos, as professoras ficaram muito curiosas para saber o que realmente vem a ser uma demonstração. A formadora passou, então, para a segunda parte da atividade, em que cada dupla deveria relatar para o grupo o que identificou como demonstração e o grupo deveria reconhecer exemplo como uma demonstração.

As professoras P1 e P2 relataram o exemplo dos potes de vidro com tampas e argumentaram tratar-se de uma demonstração, pois o aluno deverá realizar adição de números positivos e números negativos. Após a explicação das professoras, a formadora indagou ao grupo se o que foi relatado era uma demonstração e as respostas obtidas foram as seguintes:

> – *Acho que é uma experimentação, uma ilustração e não uma demonstração.*
> – *Não é demonstração porque não é teorema.*
> – *Para ser demonstração tem que ser algo generalizado.*

A partir dos comentários feitos pelas professoras e pela escolha do “exemplo” de demonstração, tornou-se evidente que, para elas, a demonstração em matemática está associada a algo que evidencie o que se está pretendendo ensinar, como, por exemplo, o caso da adição e subtração de números relativos por meio das balas colocadas em potes de vidros. Para elas, demonstração é uma contextualização, no sentido de que, ao se criar uma situação-problema com o objetivo de tornar compreensível para os alunos um teorema ou propriedade, esse teorema ou propriedade já estará demonstrado. Tais afirmações nos mostram, também, a grande preocupação atual de se dar um sentido prático a tudo que se faz em matemática, transparecendo que só tem valor o que se pode aplicar de imediato numa situação cotidiana. O compreensível passa a ser apenas aquilo que pode ser usado no dia-a-dia, isto é, um conhecimento de uso imediato. As professoras têm consciência de não ter uma certeza absoluta do que vem a ser uma demonstração, mas possuem uma "intuição" que vem ao encontro do que Harel e Sowder (1998, p. 42) afirmam:

> O esquema de provar do sujeito consiste em averiguar e convencer-se a si próprio [...].. Como definido, o averiguar e o persuadir são totalmente subjetivos e podem variar de sujeito para sujeito e de geração para geração, numa mesma civilização.

A busca pela compreensão comprovada do fato matemático aliada a uma aplicabilidade imediata conduz também as professoras a confundir demonstração com dedução de fórmulas, como foi o caso de uma delas ter "demonstrado" pela manhã a fórmula do ponto médio. Na realidade, a professora deduziu a fórmula que permite calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento no plano utilizando uma representação gráfica como apoio para suas explicações. Declarações como: "penso que demonstração é a fórmula geral", mostram a falta de clareza que possuem a respeito de prova matemática, dedução e generalização.

Vale ainda mencionar um estudo, a respeito de provas, realizado por um grupo de pesquisadores de Londres, que teve início em 1995 e durou aproximadamente dez anos. Esse estudo buscou esclarecer o entendimento e a visão de estudantes a respeito da prova matemática. Nessa pesquisa foram utilizados sofisticados questionários e entrevistas: os alunos respondiam as questões para construir ou julgar provas. Para os pesquisadores Healey e Hoyles (apud Balacheff, 2004, p. 9), "demonstração é o coração do pensamento matemático, do argumento dedutivo, o qual tem sua base teórica no processo de provar, exemplifica as distinções entre matemática e as ciências empíricas".

Os resultados obtidos nessa pesquisa apontam um nível abaixo da expectativa quanto à construção de provas, isto é, os alunos são mais eficazes em reconhecer um argumento válido do que realizar a construção, propriamente dita, de uma prova conforme destacam os pesquisadores:

> [...] o que pode simplesmente ser explicado através da carência da familiaridade com o processo de provar. Muitos alunos possuem uma vaga idéia do processo e nenhum senso de compor a prova,

> como sugerem os nossos resultados, dificultando suas habilidades em construir corretamente o desenvolvimento da prova. (Ibid., p. 9)

Na direção da identificação de obstáculos relativos à prova em matemática, as professoras envolvidas em nossa pesquisa já possuem uma dificuldade inicial em reconhecer uma demonstração em matemática; essa é uma questão que precede a construção de uma prova. As professoras apresentam carência de um tipo de conhecimento que as leve a identificar um texto matemático que venha a ser uma demonstração. Nessa atividade de busca aleatória de uma demonstração em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio, fica evidente essa dificuldade de reconhecimento de prova. Em geral, detinham-se em textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração.

Nesse trabalho, fica nítida a dificuldade que as professoras têm em identificar uma prova matemática; no entanto, constatamos que possuem a certeza de que a função da prova é esclarecer e deixar comprovado, de forma contundente, algum resultado matemático. Essa percepção que possuem a respeito de provas e demonstrações está fortemente ligada ao entendimento de Balacheff (1982) a respeito de explicação que, ao ser convincente para uma comunidade, adquire um *status* de prova e que quando essa prova se refere a um enunciado matemático ele a chama de demonstração conforme discutimos anteriormente. Para Balacheff (2004), dentre os pontos comuns às epistemologias de prova matemática, está a racionalidade matemática que se baseia no senso comum, fato esse presente nas ações de busca das professoras enquanto realizavam a atividade com os livros didáticos. Explicações com indícios claros de veracidade, como o exemplo dos potes, eram por elas consideradas como demonstrações. Essa relação com o "senso comum" aponta um estágio intuitivo do pensamento das professoras, uma vez que não possuíam conhecimentos mais avançados em termos de provas e demonstrações em matemática; provavelmente pela natureza de sua formação acadêmica, uma vez que não cursaram Licenciatura em Matemática.

Na segunda parte da atividade, quando as professoras P1 e P2 apresentaram, para a classe, o exemplo dos potes, obtivemos a confirmação de que o conceito de demonstração em matemática também não faz parte das convicções dos demais colegas professores, pois constatamos que o grau de desconhecimento deles sobre a idéia de demonstração é maior que o conhecimento acerca do assunto em questão, conforme podemos perceber em uma de suas falas: "acho que é uma experimentação, uma ilustração e não uma demonstração". Tal afirmação justifica, uma vez mais, a necessidade de distinção entre explicação, prova e demonstração, conforme Balacheff (1982), para que os professores possam reconhecer procedimentos de validação em matemática. Em um livro didático existem textos que correspondem à explicações, na maioria das vezes, com exemplos contextualizados que podem conduzir o professor a acreditar que se trata de demonstração; uma vez que a referida explicação mostra o caráter de verdade de um enunciado relacionado à matemática.

Outro comentário, feito por um professor do grupo, a respeito do exemplo dos potes foi: "*não é demonstração porque não é teorema*". Essa afirmação mostra que a idéia desse professor está relacionada a objetos matemáticos com estatuto teórico e não prático ou concreto, como foi o caso do pensamento da dupla de professoras. O entendimento desse professor, que associa demonstração a teoremas, está mais relacionado a objetos matemáticos que não fazem parte do mundo sensível, como Balacheff (1982) apresenta dentre as características de uma prova, conforme discutido anteriormente.

Na segunda parte da mesma atividade percebeu-se que os professores não concordaram com o exemplo dos potes, por entenderem que a demonstração era uma explicação. Entretanto, as professoras que o selecionaram iniciaram um processo de revisão pessoal de crenças adquiridas previamente como estudantes. Elas passaram, então, a refletir sobre os argumentos dos colegas e a compará-los com os seus conhecimentos a respeito de demonstrações, reformulando, assim, algumas de suas concepções. Esse estágio de transformação faz parte do processo de formação continuada previsto na pesquisa a respeito do raciocínio dedutivo. Esse processo de mudança a respeito do pensamento e a prática do professor são registrados por Polettini:

> O conhecimento e crenças do professor sobre a matemática e seu ensino e sua aprendizagem parecem ser fortemente influenciados por suas experiências prévias como estudante de Matemática (por exemplo, Ball, 1980), também fatores contextuais parecem influenciar a prática do professor (Cooney,1985; Wilcox, Schram, Lappan e Lanier, 1991). Todavia, algumas pesquisas com o professor em serviço indicam que mudanças em seu conhecimento e

> nas suas crenças associam-se a mudanças na prática do professor e com a aprendizagem dos alunos (Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang e Loef, 1989; Cobb, Wood e Yackel, 1990; Simon e Schifter, 1991). (1998, p. 89)

Certamente, as duas professoras participantes dessa pesquisa a respeito do raciocínio dedutivo, durante o processo de formação continuada, tiveram a oportunidade de rever e ampliar suas concepções relativas a provas e demonstrações em matemática. Provavelmente, elas terão reflexo nas suas práticas pedagógicas indo, portanto, ao encontro de seus anseios.

Estudo de caso 2: "*Não demonstrei, rabisquei*"

Para este trabalho, investigamos o comportamento de uma professora que participa do projeto a respeito do raciocínio dedutivo, mencionado anteriormente. O fato de a professora estar habituada com a dinâmica das atividades, além de estar envolvida com questões relativas à demonstração foi decisivo para sua escolha, uma vez que percebemos um avanço na reconstrução de seus conceitos a respeito de demonstração. Tivemos a intenção de investigar, por meio de um estudo de caso, quais seriam os possíveis entraves que essa professora encontraria ao ser exposta a uma nova situação relativa à demonstração, em que deveria realizar um trabalho de escrita e outro de transcrição.

Nessa pesquisa, o estudo de caso nos propiciou a obtenção de dados para a nossa questão, considerando-se que essa modalidade "é recomendável para a construção de hipóteses, para confirmação ou reformulação do problema e, sobretudo, quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo" (Fiorentini e Lorenzato, 2006, pp. 109-110). Vale mencionar que o estudo de caso segue uma abordagem qualitativa e busca retratar a realidade de forma profunda e completa. No presente trabalho, nosso estudo de caso pretende observar: quais seriam, caso existam, as diferenças de comportamento de um professor do ensino básico ao enfrentar situações de escrita e transcrição da demonstração de uma proposição. Tal estudo, evidentemente, contribuirá na busca de respostas para essa questão de pesquisa.

Essa professora é casada, tem 47 anos, leciona Matemática há seis anos e já trabalhou em todas as séries do ensino fundamental e médio.

No início da formação, ministrava 33 aulas semanais em uma escola estadual. Cursou licenciatura curta em Matemática e fez complementação para a licenciatura plena na mesma área. Faz parte de nosso projeto desde 2000, participou do I CabriWord e foi monitora no projeto Construindo Sempre Matemática, ambos oferecidos pela PUC-SP. A professora possui computador e o utiliza, por aproximadamente 15 horas semanais, para pesquisas na internet, enviar e-mail, participar de fóruns, estudar o Cabri e digitar provas e trabalhos. Em sala de aula utiliza-o para ensinar Geometria com o Cabri.

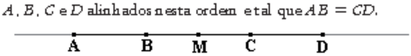
Ela conhece e utiliza os PCN porque, "é muito importante para nos orientar sobre os assuntos mais necessários", as Experiências Matemáticas porque "é um material didático muito bom, faz o aluno caminhar passo a passo para a aprendizagem" e a *Revista de Educação Matemática* da SBEM para preparar suas aulas. Justifica a utilização de Experiências Matemáticas e do material de Correção de Fluxo por não serem técnicos e possuírem linguagem clara.

Descreveremos, a seguir, uma atividade realizada com os professores participantes do projeto, destacando a participação da professora denominada P1, foco de nosso estudo de caso.

Cada professor do grupo recebeu fotocópia do material intitulado "Iniciação à demonstração em geometria", contendo dez atividades, das quais analisaremos uma neste artigo, cujo enunciado é:

Atividade 07: a lei do ponto médio

Sejam quatro pontos A, B, C e D alinhados nesta ordem e tal que $AB = CD$.



a) Demonstre que o ponto médio do segmento de BC é também o ponto médio do segmento AD.

b) Coloque em ordem as sete frases abaixo, a fim de obter uma demonstração dessa propriedade:

(I) Donde $AM = MD$

(II) Ora, por hipótese $AB = CD$

(III) M é, então, o ponto médio de AD

(IV) Por definição de ponto médio, tem-se: $BM = MC$

(V) Seja M o ponto médio de BC

(VI) Então, $AB + BM = CD + MC$

(VII) A, M e D alinhados.

Nosso objetivo, com essa atividade, era observar o comportamento dos professores quando enfrentam situações de escrita e transcrição, visto que, no item (a) a tarefa solicitava a escrita de uma demonstração, enquanto no item (b) a tarefa solicitava a reorganização de frases apresentadas a fim de que a demonstração da mesma propriedade fosse alcançada. Observemos que, ao terminar a tarefa (a), os professores poderiam apoiar-se na parte (b) para verificar o que foi feito; no entanto, como veremos a seguir, a professora observada, tratada aqui por P1, não utilizou esse recurso.

Os professores receberam esse material uma semana antes e deveriam resolver essas atividades para serem entregues no encontro posterior. A formadora solicitou que um dos professores fosse à lousa para registrar como realizou essa parte da atividade. A professora P1 se ofereceu para ir à lousa, afirmando: "*Não demonstrei, rabisquei*"*.* Na lousa, ela reproduziu o desenho apresentado no enunciado e escreveu:

Hip: A, B, C, D alinhados nesta ordem
$AB = CD$
Tese: BC e AD mesmo ponto médio

Em seguida, a formadora indagou aos participantes do grupo se eles concordavam ou não com o que a colega escrevera na lousa. Os professores não responderam nada e deixaram transparecer através de suas fisionomias que tinham dúvidas. A formadora, percebendo o que ocorreu, avançou, indagando: *"Não tem mais nenhuma hipótese?"* Dois professores responderam que o ponto M também é hipótese. A formadora leu vagarosamente o enunciado e perguntou: *"Ele* (ponto M) *ser ponto médio de BC não é hipótese?"*

A professora P1, que estava na lousa, completou a hipótese escrevendo que M é ponto médio de BC e a formadora questionou a respeito da tese. A professora P1, então, escreveu: *Tese: M é ponto médio de AD.* E acrescenta a seguir, na tese, que $BM = MC$ comentando: "*Eu não soube escrever, eu só escrevi isto aqui. Escrevi não, simbolizei só."*

A formadora interveio dizendo que nessa escrita ela estava utilizando uma das hipóteses, por que: *"Como M é ponto médio de* $\overline{BC}$ *então* $BM = MC$*".* Mais uma vez, questionou a respeito da tese e todos perceberam que a demonstração deveria concluir que M é ponto médio de $\overline{AD}$. A professora P1 comentou: "*eu não tinha achado isso como tese*". A partir daí, a professora P1 continuou na lousa registrando sua demonstração, sendo conduzida pela formadora, que perguntou ao grupo: "*e agora, o que a gente vai escrever?*" No momento de utilizar a hipótese que AB = CD a professora não conseguiu relacioná-la ao que já havia feito e a formadora interveio: "*sabe o que está acontecendo? Esta medida é igual a esta* (BM = MC) *e esta medida é igual a esta* (AB = CD) *o que acontece se eu tomar estas duas medidas* (AB e BM) *e estas* (MC e CD)?" A partir daí, a professora avançou com sua demonstração. Mas a formadora interferiu novamente, perguntando: *"Por que podemos falar que BM + CD = AM?".* E a seguir, *"qual hipótese ainda não foi usada?".* Como não obteve resposta, alertou para a questão de os pontos estarem alinhados nessa ordem e mostrou, com um desenho que, se isto não ocorresse, não seria possível tirar essa conclusão.

A partir daí, com as respostas do grupo, a demonstração ficou assim:

> Como AB = CD por hipótese vem que BM + AB = MC + CD.
> Se BM + AB = AM e MC + CD = MD, pois A, B, C e D estão alinhados, logo, AM = MD e M é o ponto médio de AD.

Ao final, a formadora comentou com o grupo acerca da diferença entre falar e escrever, mostrando no quadro o quanto o professor de Matemática utiliza gestos enquanto fala e a impossibilidade de simplesmente transcrever os procedimentos de fala e gestos, no quadro negro, para o papel. Discutiram, ainda, a diferença entre a escrita natural e a escrita matemática.

A partir da descrição apresentada, podemos observar que o item (a) solicitava uma redação da demonstração de que M é o ponto médio de um segmento a partir de uma figura que contém quatro pontos alinhados. Analisando a resolução apresentada pela professora, observamos, em primeiro lugar, que ela inicia sua demonstração apresentando hipóteses e tese, embora não tenha clareza a respeito do que significam em sua organização. Além de confundi-las, não foi uma ação tranqüila para essa professora retirar do enunciado todos os elementos que fazem parte da hipótese. Além disso, observamos, também, que o grupo sugere o ponto M como hipótese e não que M é ponto médio do segmento BC, percebemos que mesmo na comunicação oral eles não se expressam com clareza.

Foi necessário que a formadora lesse o enunciado da proposição para que o grupo e a professora P1, que se encontrava na lousa, percebessem que "M é ponto médio de BC", também era hipótese. Acreditávamos que essa demonstração, que não apresenta um enunciado complicado e, ainda, se apóia em uma figura, ocorresse sem grandes dificuldades, até como conseqüência do trabalho feito anteriormente. No entanto, a articulação desse enunciado com a demonstração requer uma série de transformações ou substituições que conduzam à validação da afirmação contida no enunciado, o que não foi percebida pelos professores.

Outra questão observada é a de registrar o que realmente se deseja comprovar, isto é, conseguir expressar por meio da língua natural ou por meio de expressões matemáticas, ou ainda, da linguagem simbólica, o que se pretende demonstrar – obter o resultado pretendido a partir da proposição feita.

Notamos, nitidamente, a força da expressão oral e a dificuldade da passagem de um discurso em linguagem natural e gestos para um discurso escrito, ou seja, de um discurso operatório para um discurso simbólico, confirmando o que foi observado por Duval (2000). Nesse momento, percebemos que, mesmo usando o quadro negro, onde poderia se expressar oralmente, a professora não conseguiu construir um argumento que convencesse de que seu encadeamento estava correto. Em outras situações, a argumentação oral geralmente funciona quando consegue mostrar a validade de algumas proposições, o que não acontece, na maioria das vezes, quando a argumentação escrita é solicitada.

Quanto ao item (b), a formadora foi ao quadro e, interagindo com os professores, escreveu as frases na ordem em que eles foram falando, destacando as expressões do tipo “donde” e “ora”, visto que tais termos poderiam ajudar na organização pretendida: “donde” introduz um passo de conclusão enquanto “ora” introduz um argumento, que no caso seria a hipótese, mas que poderia ser também um teorema ou uma definição.

Os professores concluíram, então, que a frase (III) deveria ser a última porque representava a conclusão da demonstração e, portanto, a tese. A seqüência ficou assim:

(II) Ora, por hipótese AB = CD e
(VII) A, M e D alinhados.
(V) Seja M o ponto médio de BC
(IV) Por definição de ponto médio, tem-se: BM = MC
(VI) Então, AB + BM = CD + MC
(I) Donde AM = MD
(III) M é, então, o ponto médio de AD

A professora P1 fez outra organização e a formadora solicitou, então, que ela ditasse as frases da seqüência que havia organizado para que fossem escritas na lousa e comentadas e ela apresentou:

(V) Seja M o ponto médio de BC
(IV) Por definição de ponto médio, tem-se: BM = MC
(II) Ora, por hipótese AB = CD
(VII) A, M e D alinhados.
(III) M é, então, o ponto médio de AD
(VI) Então, AB + BM = CD + MC
(I) Donde AM = MD

Embora o grupo tivesse concluído que o item (III) era o último a ser apresentado, a professora solicitou a confirmação da validade de sua organização, visto que apresentou a conclusão da demonstração em outra ordem. A formadora, antes de discutir essa organização, apresentou outra opção sugerida pelo grupo para as quatro primeiras frases:

(VII) A, M e D alinhados.
(V) Seja M o ponto médio de BC
(IV) Por definição de ponto médio, tem-se: BM = MC
(II) Ora, por hipótese AB = CD.

Os professores concordaram que seria outra maneira de encadear e a formadora, então, questionou a respeito da ordem das três frases restantes. A professora P1 e o resto do grupo concluíram que a ordem deveria ser (VI), (I), (III) e, portanto, a organização apresentada por P1, não estaria correta, visto que não poderíamos inferir a frase (III) da (VII). Concluíram, então, que só havia uma opção para o final da organização, mas que para as quatro primeiras frases, como estavam argumentando com as hipóteses, que depende de quem as está organizando e por isso poderiam aparecer em ordens diferentes. Já para a conclusão, em casos desse tipo, não há como ter outra ordem.

O que identificamos em nosso estudo é que a professora não percebe ainda o que significa validar uma afirmação feita, o que se constitui em um passo inicial na demonstração, para Gálvez (1996, p. 30) nas situações de validação:

> [...] tenta-se convencer a um ou vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Neste caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Não basta a comprovação empírica de que o que dizem é certo; é preciso explicar porque, necessariamente, deve ser assim.

A proposta do item (b) consistia em ordenar frases prontas, elencadas de forma aleatória, a fim de se obter a demonstração de uma propriedade. Apesar das frases já estarem redigidas, a organização das mesmas, em uma seqüência que leve o leitor a concluir de forma comprovada a proposição, não consistiu em uma tarefa fácil para o grupo. Houve divergências, não só na parte de argumentação, mas também e, principalmente, na finalização que apresentava a conclusão da tese. A parte inicial da argumentação realmente oferecia mais de uma opção de organização das frases, isto é, as frases (II), (IV), (V), e (VII) poderiam ser apresentadas em diferentes ordens que a compreensão não ficaria prejudicada. Já com relação às três últimas afirmações que levariam a conclusão da tese, não havia opção; a única ordem possível seria (VI), (I) e (III).

Ficou evidente que a professora P1, ao apresentar essas três últimas afirmações na seguinte ordem: (III), (VI) e (I), não conseguiu, nem através de um registro já escrito, reconhecer o objetivo final da demonstração que era concluir que M é o ponto médio do segmento AD. Tal fato mostra que, num estágio anterior à redação de uma demonstração, existe a dificuldade do encadeamento lógico de resultados que leve a uma conclusão irrefutável do que se pretende comprovar. Nessa direção, Duval e Egret (1989, p. 30) esclarecem que:

> [...] a organização dedutiva e a argumentação constituem, por conseguinte, dois tipos de funcionamento opostos do discurso. A passagem da argumentação, que é a forma mais natural de raciocínio, à demonstração exige, por conseguinte, uma mudança de atitude intelectual completa.

As discussões realizadas durante essa atividade relativa ao ponto médio, nos permitiram observar que a professora P1 compreendeu as afirmações relativas a M ser o ponto médio de alguns segmentos. Sem dúvida, a compreensão ficou facilitada pela visualização da situação, isto é, o segmento contendo os pontos A, B, M, C e D alinhados. Todavia, tanto na redação da demonstração solicitada no item (a), quanto na ordenação das frases do item (b), observamos dificuldades em registrar e a realizar um encadeamento lógico que refletisse o que pretendia comprovar.

Considerações finais

Esses estudos de caso nos revelam a necessidade de reflexões mais aprofundadas a respeito das concepções dos professores, não apenas sobre o que é demonstração, mas também sobre o que é explicar, argumentar e provar, pois, no caso de nossa professora (estudo de caso 1), a palavra demonstrar relaciona-se diretamente às palavras hipótese e tese, embora não as identifique claramente nos enunciados apresentados.

O estudo evidencia a fragilidade com que essas professoras tratam tanto a redação da argumentação, quanto das demonstrações, o que nos leva a admitir que não tenham vivido experiências desse tipo em sua formação básica e mesmo em sua formação para a docência.

Nesse sentido, Cury e Hack (2000, p. 2), de acordo com as definições de Balacheff (1982), propõem, para disciplinas específicas de cursos de Licenciatura em Matemática, níveis diversos de demonstrações de uma determinada proposição, quando afirmam que:

> [...] poderíamos começar por uma *explicação*, originada por um questionamento ou por um erro surgido em atividades de ensino. A seguir, procuraríamos fazer com que os alunos *provassem* a proposição, a partir do debate sobre as diversas idéias surgidas. Finalmente, tentaríamos apresentar a *demonstração*, que pode, ainda, ser focalizada sob diversos ângulos, mostrando ao aluno que as diversas áreas da Matemática não são estanques e que um determinado resultado pode ser validado pela Álgebra, pela Análise, pela Geometria etc.

Sobre a formação continuada, concordamos com Serralheiro (2007, p.131), quando afirma que:

> [...] a continuidade desse processo deve propor que a formação seja realmente continuada, oferecendo momentos de aprendizado, reflexão e trocas de idéias enriquecidas com falas de motivação, de auto-estima e aproveitamento de idéias. Esta abordagem veio ao encontro do que tratamos em nossa parte teórica sobre formação

> de professores, no qual verificamos que todo processo de formação deve promover, além do estudo de um conteúdo específico, também, momentos de reflexão, a fim de que toda a abordagem realizada seja significativa do ponto de vista dos professores, de tal maneira que provoque o desejo de mudar a prática.

Percebemos que mesmo a ação de transcrição foi difícil para a professora (caso 2), provavelmente por não perceber o encadeamento necessário para validar a proposição apresentada a partir de frases já redigidas, mesmo já tendo discutido a respeito dos diferentes tipos de passos de uma demonstração, como sugerido por Houdebine et al. (1998). Pensávamos que pudessem perceber essa busca de validação na parte (b) da atividade que, literalmente, consistia em organizar frases prontas e que palavras como "donde", "ora", "então" pudessem auxiliar nessa tarefa. O sucesso dessa parte poderia contribuir para a revisão da parte (a), mas isso não ocorreu.

Na realidade, precisamos buscar caminhos que promovam mudanças nas concepções dos professores a respeito de prova e demonstração, bem como nas linguagens adotadas, posto que muitas vezes as linguagens utilizadas carecem de significado. Esses encaminhamentos poderão prepará-los para ensinarem seus alunos a raciocinar, argumentar, provar e demonstrar.

Este estudo nos levou a desenvolver atividades que permitissem aos professores perceberem a necessidade desses processos para o ensino, com base em conteúdos presentes no ensino fundamental. Com o decorrer do trabalho, notamos que esses professores adquiriram uma certa autonomia no que diz respeito à discussão, argumentação, redação, levantamento de hipóteses e demonstração. As discussões e entrevistas que realizamos revelaram que o trabalho desenvolvido junto aos professores contribuiu para sua formação, seu comprometimento com o trabalho pedagógico e, fundamentalmente, mostram uma certa motivação para o desenvolvimento desse projeto.

Para que haja uma continuidade desse processo, propomos que a formação seja realmente continuada, oferecendo momentos de aprendizado, reflexão e trocas de idéias enriquecidas com falas de motivação, de auto-estima e aproveitamento de idéias. Esta abordagem veio ao encontro dos pressupostos teóricos sobre formação de professores nos quais verificamos que todo processo de formação deve promover, além do estudo de um conteúdo específico, alguns momentos de reflexão, a fim de que toda a abordagem realizada seja significativa do ponto de vista dos professores, de tal maneira que provoque o desejo de mudar a prática.

Referências

ALMOULOUD, S. A. e FUSCO, C. A. (2006). *Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração*. In: III SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. *Anais*... Água de Lindóia, SP.

ANDRÉ, M. E. D. A. (1995). *Etnografia da prática escolar*. Campinas, Papirus.

ARSAC, G. (1987). L'origine de la dèmonstration: essai d'Épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathémtiques*, v. 8, n. 3, pp. 267-312.

BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches em Didactique des Matémathiques*, v. 3, n. 3, pp. 261-304.

BALACHEFF, N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, Grenoble, n. 109.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational *Studies in Mathematics*, v. 18, n. 2, pp. 147-176.

BOERO, P. et al. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20, Valencia. Proceedings of the 20th PME Conference… Valencia, University of Valencia, v. 2, pp. 113-120.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental: terceiros e quartos ciclos* (PCNs).

COMUZZI, I. (2002). Tecnologías de la comunicación em la formación docente. Huelva, Espanha. *Comunicar, Colectivo para la Educación em Medios de comunicación*, n. 19, p. 152-155, octubre.

CARLOVICH, M. (2005). *A Geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC.

CURY, H. N. e HACK, N. F. R. (2000). As dificuldades dos alunos de licenciatura em matemática em relação às demonstrações: uma contribuição para as discussões. *Revista ADPPUCRS*, n. 1, pp. 61-72. Disponível em: http://www.pucrs.br/famat/helena/pages/dificuldades.pdf

DE VILLIERS, M. (2002). *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue, Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em:<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html>. Acesso em: 17 set. 2006.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suiça, Peter Lang.

______(2000). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 20, n. 2, pp. 135-170.

DUVAL, R. e EGRET, M. A. (1989). *L'organisation deductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration*. In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 2, Strasbourg, IREM de Strasbourg, pp. 25-40.

FETISSOV, A. I. (1997). *A demonstração em Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. A. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 1 ed. Campinas, Autores Associados.

FUSCO, C. A. S.; SILVA, M. J. F. e ALMOULOUD, S. A. (2007). *O comportamento de professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em matemática.* IX Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, Belo Horizonte.

GÁLVEZ, G. A. (1996). "Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da Geometria na escola primária". In: PARRA, C. e SAIZ, I. (orgs.). *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Tradução por Juan Acuña Llorens. Porto Alegre, Artes Médicas.

GARCIA, C. M. (1999). *Formação de professores: para uma mudança*. Porto, Porto Editora (Coleção Ciências da Educação Século XXI, 2).

GODINO J. D. e RECIO A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education mathematics, 3 (2): 9-24), in www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97.html. Acesso em 10 de abril de 2006.

GOUVÊA, F. A. T. (1998). *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC.

HAREL, G. e SOWDER, L. (1998). "Students' proof schemes: results from exploratory studies". In: SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J. e DUBINSKY, E. (eds.). *Research in collegiate mathematics education III*. Providence, RI, American Mathematical Society.

HOUDEBINE, J. (org.) (1998). *La démonstration – écrire des mathématiques au collège et au lycée*. Paris, Hachette.

PARZYSZ, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement segundaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), n. 17, pp. 128- 151.

PEDEMONTE, B. (2002). *Argumentation et démonstration: comparaison entre les deux structures*. In : DORIER, J.-L.; ARTAUD, M.; BERTHELOT, R. e FLORIS, R. (eds.). Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. France, La Pensée Sauvage.,

POLETTINI, A. F. F. (1998). Mudança e desenvolvimento do professor – o caso de Sara. *Revista Brasileira de Educação*, n. 9, pp. 88-98.

SERRALHEIRO, T. D. (2007). *Formação de professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstração*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, PUC.

THIOLLENT, M. (1998). *Metodologia da pesquisa-ação*. 8 ed. São Paulo, Cortez.

Recebido em abr./2008; aprovado em maio/2008