DIFFERENCIÁLEGYENLETEK STABILITÁSVIZSGÁLATA BANACH TEREKBEN A MÁSODIK GENERÁLIS KITEVŐ SEGITSÉGÉVEL

Doktori disszertáció

készitette

Klincsik Mihály

József Attila Tudományegyetem
Bolyai Intézet
Szeged

1980.

Bevezetés

A disszertációban $\mathcal{B}$ Banach térben felirt

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + F(t,x) \qquad (x \in \mathcal{B}, t \in [t_0, \infty), F(t,0) \equiv 0)$$

nem-lineáris differenciálegyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésével foglalkozunk, ahol az $A(t): \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ korlátos lineáris operátor függvény, az $F(t,x): [t_0,\infty) \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ korlátos függvény. Az egyenletben szereplő operátorok korlátossága biztositja, hogy az (1) egyenlet $x(t_0) = x_0 \in \mathcal{B}$ kezdetiérték problémájára alkalmazható a szukcesszív approximáció módszere. A módszer segitségével kritériumokat kaphatunk arra, hogy az (1) egyenlet kezdetiérték problémájának létezzen ill. csak egy megoldása létezzen. (ld. [1] - [4])
Az (1) egyenlet megoldásainak egzisztenciája és unicitása mellett igen fontos kérdés a megoldások aszimptotikus viselkedésének leirása. A Banach térben felirt (1) alaku differenciálegyenletek stabilitás vizsgálatára is alkalmazhatók A.M. Ljapunov módszerei. Mi Ljapunov első módszerét használjuk vizsgálatainkban (ld. [2] - [7]).

Az (1) egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedését a hozzátartozó

$$(2) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

lineáris közelités megoldásainak aszimptotikus viselkedése ismeretében vizsgáljuk, melyet a Ljapunov kitevőkkel jellemzünk.

A Banach terekben felirt, korlátos operátorokat tartalmazó differenciálegyenletek elmélete igen széles körben nyer alkalmazást. A klasszikus mechanika véges dimenziós térbeli egyenletekkel foglalkozik. Ha a mechanikai rendszer leirását egyértelmüen meghatározó áltálánositott koordináták száma megszámlálhatóan végtelen, azaz a rendszer végtelen szabadsági fokkal rendelkezik, akkor a Hamilton-féle kanonikus egyenlet végtelen differenciálegyenletrendszer (2) alaku lesz (ld. [7]). Bizonyos speciális integro-differenciálegyenletek tipusa is (1) alaku.

Mi most részletesen egy (2) alaku, nem korlátos A operátor együtthatóju lineáris differenciálegyenlet tipusról mutatjuk meg, hogyan lehet rá alkalmazni vizsgálatainkat. Tekintsük a

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 2b\cos x \cdot u(t,x) \tag{3}$$

hővezetési probléma differenciálegyenletét az $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ határfeltétellel és $u(0,x) = u_0(x)$ kezdeti feltétellel. A (3) egyenletet (2) alakban lehet irni, azonban az A operátor tartalmaz differenciáloperátort és igy nem-korlátos a $[0,\pi]$ intervallumon mérhető és négyzetesen Lebesgue integrálható függvények $L_2[0,\pi]$ terében. Keressük a megoldást

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \sin nx$$

alakban, mely a határfeltételeket kielégiti. Behelyettesitve ezt a (3) egyenletbe és a két oldalon összehasonlitva a $\sin nx$ együtthatóit kapjuk az

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_n = b x_{n-1} - n^2 x_n + b x_{n+1} \qquad (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

végtelen differenciálegyenletrendszert. A jobb oldalon szereplő végtelen mátrix, mint operátor nem korlátos, mert diagonális elemei nem korlátosak. Ezt a differenciálegyenletrendszert irjuk át a következő integrálegyenletté:

$$(4)\quad \begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} b\, x_2(\tau)\,d\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=2,3,\dots) \\ x_n(t) = e^{-n^2 t}x_n(0) + \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} b(x_{n-1}(\tau) + x_{n+1}(\tau))\,d\tau \end{cases}$$

Az $x_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(x) \sin nx\, dx$ az $u_0(x) \in L_2[0,\pi]$ függvény Fourier együtthatója. Megmutatjuk, hogy ekkor az $u(t,x) \in L_2$ minden fix $t \geq 0$-ra. Tekintsük a

$$z(t) = \| u(t,x)\|_{L_2} = \left(\int_0^\pi u^2(t,x)\,dx\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty x_n^2(t)\right)^{1/2}$$

függvényt. A (3) egyenletet felhasználva az

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\, z^2(t)}{dt} = \int_0^\pi u(t,x)\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 2b\cos x\; u(t,x)\right]dx\,.$$

Az

$$\int_0^\pi u(t,x)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty n^2 x_n^2(t) \leq -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty x_n^2 = -\int_0^\pi u^2(t,x)\,dx$$

egyenlőtlenségből kapjuk a

$$\frac{d\, z^2(t)}{dt} \leqq 2(2b-1)\, z^2(t)$$

egyenlőtlenséget, melyet integrálva 0-tól t-ig

$$(5)\qquad z(t) = \left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty x_n^2(t)\right)^{1/2} \leq z(0)\, e^{(2b-1)t}\,.$$

Tehát az $u(t,x) \in L_2[0,\pi]$ valóban $(t \geqq 0)$ és az $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots) \in \ell^2$, ahol $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, ha az $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2\right)^{1/2}$ véges. Meg lehet mutatni továbbá azt is (ld [7]), hogy minden $k\ (\geq 2)$ természetes számhoz van olyan $c_k > 0$ állandó, hogy az $|x_n(t)| \leq c_k n^{-k}$ $(n=1,2,\dots)$ teljesül. Ahonnan az $u(t,x)$ előállitásából adódik, hogy akárhányszor parciálisan differenciálható és megoldása a (3) egyenletnek.

Könnyü látni, hogy az $U(t,\tau) = \operatorname{diag}\left(e^{-n^2(t-\tau)}\right)$, $Se_n = e_{n+1}$,

$S^* e_n = e_{n-1}$ $(e_n = (0,\dots,0,\overset{n}{1},0,\dots), e_0 = (0,\dots))$ operátorok az ℓ^2 Banach térben korlátosak és igy a (4) integrálegyenlet alakja:

(6) $$x(t) = U(t,0)\,x(0) + b\int_0^t U(t,\tau)(S+S^*)\,x(\tau)\,d\tau ,$$

ahol $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots) \in \ell^2$.

A konstansvariációs formula alkalmazásával kapjuk, hogy minden (1) alaku egyenlet a (6) alaku integrálegyenlethez hasonló

(7) $$x(t) = U(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t,\tau)\,F(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

integrálegyenletté irható, ahol $U(t,\tau)$ a (2) lineáris egyenlet Cauchy operátora (ld 1.3.). És igy a (3) egyenlet megoldásai aszimptotikus viselkedésének vizsgálatársa alkalmazhatók mindazok a feltételek, melyeket (1) alaku egyenletekre vezetünk le. Ebben az esetben könnyü látni, hogy a (6) egyenletben $\|U(t,\tau)\| \leq e^{-(t-\tau)}$ $(t \geq \tau \geq 0)$. Ebből és a (6) egyenletből a Bellman-lemma (ld. 1.4.) alkalmazásával kapjuk éppen az (5) egyenlőtlenséget.

Megjegyezzük, hogy a (3) egyenletnél általánosabb hővezetési egyenletre is (7) alaku egyenletet kaphatunk.

Általában azonban a (2) alaku egyenlet nem-korlátos A operátorral nem fér bele a tárgyalás keretébe (ld [8] , [9]).

Mint a fenti példában is láttuk a megoldások normája exponenciális nagyságrendben tarthat 0 -hoz. Ezért hasznos a Ljapunov-féle első kitevők fogalmának bevezetése, melyben a (2) egyenlet megoldásainak normáját az $\{e^{\alpha t} : \alpha \text{ valós}\}$ függvénycsalád elemeinek növekedési rendjével hasonlitjuk össze $t \to \infty$ esetén.

Még P. Bohl (1913) vezette be és alkalmazta mechanikai rendszerek vizsgálatára a (2) egyenlet első generális kitevőjének fogalmát, mely a (2) egyenlet megoldásainak exponenciális változását együttesen jellemző szám és csak a (2) egyenlettől függ (ld. [4], [10] és 1.3. Definició).

Az első generális kitevő fogalma központi szerepet játszik A.M. Ljapunov [11] klasszikus stabilitási és instabilitási tételeinek Banach terekre történő általánositásában. A következő lineáris közelitésről szóló stabilitási ill. instabilitási tétel M.G. Krejntől származik (ld. [4]):

1) Ha a (2) egyenlet első generális kitevője negativ és az $F(t,x)$ perturbáció "elég kicsi", akkor az (1) $x=0$ megoldása aszimptotkusan és egyenletesen stabilis;

2) Ha a (2) egyenlet stacionárius, az $A(t)$ t-től független operátor, és (2) első generális kitevője pozitiv, továbbá $\|F(t,x)\|$ "elég kicsi", akkor az (1) $x=0$ megoldása instabilis.

Amikor a (2) egyenlet első generális kitevője 0, akkor általában nem tudunk az (1) egyenlet $x=0$ megoldásának stabilitási tulajdonságaira következtetni. Ezt az esetet kritikus esetnek fogjuk nevezni. (Ilyen pl. az $A(t)=\frac{A}{t}$, $t\in[1,\infty)$ eset, ahol A t-től független operátor.)

Tekintsük most a (2) lineáris egyenletet a $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$ n dimenziós euklideszi térben és legyen A konstans $n\times n$-es mátrix. Ha $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ $(r\leq n)$ jelöli az A különböző sajátértékeit, akkor a (2) egyenlet megoldásainak első karakterisztikus kitevői éppen a $\mathrm{Re}\,\lambda_i$-k lesznek $(i=1,2,\dots,r)$. Ha most a $\max_{1\leq i\leq r}\mathrm{Re}\,\lambda_i=0$, azaz a kritikus esethez tartozik a (2), akkor a megoldások aszimptotikus viselkedésében nem elegendő az exponenciális részt vizsgálni.

Jelöljük m_i-vel a λ_i sajátértékhez tartozó Jordan blokkok közül a maximális méretü blokk méretét. Mivel a megoldások $p(t)e^{\lambda_i t}$ alaku függvények összegéből állnak (ahol a $p(t)$ polinom fokszáma legfeljebb (m_i-1)), ezért ha egy megoldás első kitevője 0 , akkor aszimptotikus viselkedését a t^k $(k=0,1,\dots;\ k\leq n)$ hatványrész irja le.

A kritikus eset lineáris közelités alapján történő stabilitásvizsgálata érdekében bevezetjük a (2) egyenlet második generális kitevőjének fogalmát (ld. [12] és 1.5. Definició), mályben a (2) egyenlet megoldásai normájának változását a $\{t^\beta : \beta \text{ valós}\}$ hatványfüggvénycsalád elemeinek változásával hasonlitjuk össze $t\to\infty$ esetén.

A disszertációban a (2) egyenlet második generális kitevőjének viselkedését és az (1) egyenlet $x=0$ megoldásának stabilitási tulajdonságait vizsgáljuk a kritikus esetben, felhasználva a (2) egyenlet második generális kitevőjének fogalmát.

A disszertáció első fejezetében a $\mathcal{B}$ Banach térben korlátos operátorokkal felirt differenciálegyenletek megoldásainak egzisztenciájára, unicitására és aszimptotikus viselkedésére vonatkozó klasszikus tételeket és fogalmakat összegezzük. A 2. fejezet a lineáris differenciálegyenletek második kitevőinek általános jellemzésével foglalkozik. A 3. fejezetben az

(8) $$\dot{x} = Ax$$

stacionárius lineáris egyenlettel foglalkozunk, ahol A t-től független korlátos, lineáris operátor $\mathcal{B}$-ben. Megmutatjuk, hogy a (8) megoldásai $t^{-\rho}$ nagyságrendben is tarthatnak 0-hoz $(\rho>0, t\to\infty)$ és példát adunk olyan (8) alaku egyenletre, mely aszimptotikusan stabilis, de exponenciálisan nem. Mint a fentiekben láttuk ezek az esetek a $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$ n dimenziós euklideszi térben nem fordulhatnak elő. Az

$\|e^{At}\|$ $(t \geq 0)$ exponenciális függvény második kitevőjével foglalkozva megmutatjuk, hogy az mindig nem-negativ, és lehet $+\infty$ is, továbbá ha az A valamely Hilbert térben konvexoid operátor, akkor az $\|e^{At}\|$ második kitevője 0 .

A 4. fejezetben feltételeket adunk arra, hogy egy nem-stacionárius (2) egyenletre mit jelent a második generális kitevő negativitása, amelynek fontosságát a 6. fejezetben látjuk majd. A (2) egyenlet második generális kitevőjének negativitására szükséges és elegendő feltételeket adunk az egyenlet $A(t)$ operátora segitségével (pl. $tA(t)$ kompakt), majd a (2) egyenlet Cauchy-operátorának felhasználásával, végül az $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ inhomogén egyenlet megoldásainak korlátosságát feltételezve.

Az 5.fejezetben megmutatjuk, hogy ha az $F(t,x) = B(t)x$ lineáris, akkor az (1) és (2) lineáris egyenletek második generális kitevőinek eltérése tetszőlegesen kicsi, hacsak a $\|B(t)\|$ "elég kicsi".

A 6. fejezetben többek között általánositjuk M.G. Krejn (ld. [4]) stabilitási tételét a kritikus esetre és B.P. Demidovics [13] egy stabilitási tételét Banach terekre.

1. fejezet

Szükséges fogalmak és összefüggések

1.1. Közönséges differenciálegyenletek Banach terekben
(egzisztencia, unicitás, stabilitás)

Legyen $\mathcal{B}$ komplex Banach tér a $\|\cdot\|$ normával és jelölje $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ a $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ korlátos lineáris operátorok Banach algebráját. Tekintsük $\mathcal{B}$ -ben a következő közönséges differenciálegyenletet

(1.1) $$\dot{x} = f(t,x)$$

ahol az $f: I\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ függvény a t változójában folytonos az véges vagy végtelen intervallumon és az $\dot{x}(t)=\frac{d}{dt}x(t)$ jelöli az $x(t): I\to\mathcal{B}$ függvény Fréchet deriváltját. Vizsgálataink nagyrészében az $I=I_{t_0}=[t_0,\infty)$ lesz, ahol $t_0\geq 0$.

Mindenekelőtt felmerül a kérdés, hogy az (1.1) egyenletnek milyen $f(t,x)$ függvény mellett léteznek megoldásai. Mi most a megoldások egzisztenciájáról és unicitásáról szóló tételek közül egy globális és egy lokális tipust emlitünk meg, melyek Picard klasszikus tételének általánositásai Banach terekre.

1.1. Tétel ([1] , [4]) Legyen az $f(t,x)$ függvény t -ben folytonos és teljesitse az

(1.2) $$\|f(t,x)\| \leq M_1$$

(1.3) $$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leq M_2\,\|x_1-x_2\|$$

feltételeket a $\mathcal{D}=\{(t,x) : t\in I \;\&\; \|x-x_0\|<\eta\}$ halmazon.

Ekkor van olyan $\delta>0$ $\left(\delta=\min\left(\frac{\eta}{M_1},\frac{1}{M_2}\right)\right)$, hogy minden $t_0\in I$ -re a $(t_0-\delta,\, t_0+\delta)$ intervallumon az (1.1) egyenletnek pontosan egy $\varphi(t)$ megoldása létezik, mely kielégíti az

(1.4) $\varphi(t_0) = x_0$

kezdeti feltételt és $\|\varphi(t) - x_0\| \leq \eta$.

Az 1.1. Tétel a megoldás létezését a t_0 egy kis környezetében biztositja. Az $f(t,x)$ függvényről globális tulajdonságokat megkövetelve a $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ intervallumról a megoldást tovább folytathatjuk. Igy ha például az (1.2) és (1.3) feltételek teljesülnek minden $t \in I_{t_0}$ és $x \in \mathcal{B}$ értékekre ugyanazzal az M_1, M_2 konstanssal, akkor a megoldás az egész I_{t_0}-n létezik.

1.2. <u>Tétel</u> ([1] , [4]) Legyen $f(t,x)$ t -ben folytonos és elégitse ki $t \in I$ és $x \in \mathcal{B}$ esetén az

$$\|f(t,x)\| \leq M_1 + M_0 \|x\|$$

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq M_2 \| x_1 - x_2) \qquad (x_1, x_2 \in \mathcal{B})$$

feltételeket. Ekkor minden $x_0 \in \mathcal{B}$ és $t_0 \in I$ -re az (1.1) egyenletnek egyetlen olyan $\varphi(t)$ megoldása létezik az egész I -n, mely kielégiti az (1.4) kezdeti feltételt.

A megoldások egzisztenciájának és unicitásának kérdése mellett igen fontos kérdés a megoldások stabilitási tulajdonságainak ismerete. Legyen most az (1.1) egyenletben az $f(t,x)$ függvény az $I_{t_0} \times \mathcal{H}$ $(\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B})$ halmazon értélmezve és tegyük fel, hogy a $\varphi(t)$ rögzitett megoldás létezik az I_{t_0} félegyenesen.

1.1. <u>Definició</u>. 1) Azt mondjuk, hogy az (1.1) egyenlet $\varphi(t)$ megoldása <u>stabilis</u>, ha minden $\varepsilon > 0$ és $t_1 \in I_{t_0}$-hoz van olyan $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, hogy minden $\psi(t)$ megoldására az (1.1)-nek, melyre $\|\varphi(t_1) - \psi(t_1)\| < \delta$ következik, hogy a $\psi(t)$ létezik az I_{t_1} félegyenesen és

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \qquad (t \in I_{t_1})$$

2) A $\varphi(t)$ megoldás <u>egyenletesen stabilis</u>, ha a δ választha-

tó t_1 -től függetlenül;

3) A $\varphi(t)$ megoldás aszimptotkusan stabilis, ha stabilis, továbbá van olyan $\sigma_0 > 0$, hogy a $\| \varphi(t_1) - \psi(t_1)\| < \sigma_0$ -ból következik, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \| \varphi(t) - \psi(t)\| = 0 .$$

Az (1.1) egyenlet $\varphi(t)$ megoldásának stabilitási vizsgálatát alkalmas transzformációval mindig egy másik egyenlet 0 megoldásának stabilitási vizsgálatára lehet visszavezetni. Ugyanis tekintsük az $y = x - \varphi(t)$ transzformációt, mely az (1.1) egyenletet az

(1.5) $$\dot{y} = g(t, y)$$

egyenletbe transzformálja, ahol $g(t,y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$. Igy a $g(t,0) \equiv 0$ thaát az (1.5) egyenletnek az $y = 0$ megoldása.

Az (1.5) nem-lineáris egyenlet $y = 0$ megoldásának stabilitási tulajdonságait lineáris köhelitése ismeretében vizsgáljuk. Ha például az $f(t,x)$ az x -ben Fréchet értelemben folytonosan differenciálható az $x = \varphi(t)$ pontok környezetében, akkor a $g(t, y)$ függvényt a

$$g(t,y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) = A(t)y + F(t, y)$$

alakban irhatjuk, ahol $A(t) = f'_x(t, \varphi(t))$ az f függvény x szerinti Fréchet deriváltja és

$$\|F(t,y)\| \leq C_t(y)\|y\| \quad , \quad \lim_{y \to 0} C_t(y) = 0$$

Ebben az esetben az (1.5) egyenlet lineáris közelitésén az

(1.6) $$\dot{y} = A(t)y$$

lineáris egyenletet értjük, ahol tehát $A(t) = f_x(t, \varphi(t)) \in \mathcal{L}(B)$ minden $t \in I_{t_0}$-ra.

Az (1.6) alaku lineáris differenciálegyenlet megoldásai igen általános $A(t)$ operátorfüggvény mellett léteznek pl. ha az $A(t)$ erős értelemben mérhető (azaz $A(t)x$ minden $x \in \mathcal{B}$ -re t -nek mérhető függvénye) és Bochner integrálható az I_{t_0} bármely véges részintervallumán. Ekkor mint ismeretes ([4]) az (1.6) egyenlet $y(t_0) = y_0 \in \mathcal{B}$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása $y(t) = U(t)y_0$ alaku. Az $U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ operátorfüggvényt az (1.6) egyenlet Cauchy-operátorának nevezzük, mely megoldása az

$$\begin{cases} \dot{U} = A(t)U \\ U(t_0) = I \end{cases} \qquad (U \in \mathcal{L}(\mathcal{B}))$$

Cauchy-problémának az $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ Banach térben, ahol I az identitás operátora. Továbbá az $U(t)$ Cauchy operátornak létezik az inverze $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ -ben $(t \in I_{t_0})$ és az $y(t) = U(t,\tau)y_\tau = U(t)U^{-1}(\tau)y_\tau$ $(y_\tau \in \mathcal{B},\ \tau \in I_{t_0})$ olyan megoldása az (1.6) egyenletnek, melyre az

$$y(\tau) = y_\tau$$

kezdeti feltétel teljesül.

Megmutatható (ld. [4]), hogy az $U(t,\tau)$ operátor eleget tesz az alábbi egyenlőtlenségeknek

$$e^{-\int_\tau^t \|A(s)\|ds} \leq \|U(t,\tau)\| \leq e^{\int_\tau^t \|A(s)\|ds} \qquad (t \geq \tau \geq t_0). \tag{1.7}$$

1.2. A lineáris differenciálegyenletek megoldásainak Ljapunov kitevői

Mint már az 1.1 pontban emlitettük, az (1.5) alaku nemlineáris differenciálegyenletek 0 -megoldásának stabilitási tulajdonságait a lineáris közelités, azaz az (1.6) egyenlet megoldásainak asszimptotikus viselkedése ismeretében vizsgáljuk. Az (1.6) lineáris egyenlet megoldásainak asszimptotikus viselkedését pedig a megoldások Ljapunov-kitevőivel jellemezzük.

A Ljapunov-féle első kitevőket ugy kapjuk, hogy az adott megoldás(ok) növekedési rendjét $t \to +\infty$ esetén az

$\{e^{\alpha t} : \alpha$ valós$\}$ exponenciális függvénycsalád elemeivel hasonlitjuk össze.

Legyen $y(t)$ az (1.6) egyenlet nem-triviális megoldása.

1.2. Definició (A.M. Ljapunov [11]). A $\varkappa[y]$ számot (ill $\pm\infty$ -t) az $y(t)$ megoldás első karakterisztikus kitevőjének nevezzük (röviditve e.k.k.), ha alsó határa azon ρ számoknak, melyekhez van olyan $N_\rho > 0$, hogy az

$$\|y(t)\| \leq N_\rho e^{\rho t} \qquad (t \in I_{t_0})$$

teljesül.

Könnyü látni, hogy a

$$\varkappa[y] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|y(t)\|}{t}$$

Az (1.5) nem-lineáris egyenlet $y=0$ megoldásának stabilitási vizsgálatához nem elegendő ismerni az (1.6) lineáris közelités minden megoldásának e.k.k.-t, hanem szükség van az összes megoldás exponenciális növekedését együttesen korlátozó kitevő ismeretére is (ld. [10]). Ennek felismerése szükségszerüvé tette az első generális kitevő fogalmának bevezetését a lineáris közelités alapján történő stabilitásvizsgálatokban (ld. [4] , [10]).

1.3. Definició. (P. Bohl). A $\varkappa_g$ számot (ill $\pm\infty$-t) az (1.6) egyenlet első generális kitevőjének nevezzük (röviden e.g.k.), ha alsó határa azon ρ számoknak, melyekhez van olyan $N_\rho > 0$,

hogy az

$$(1.8) \qquad \|y(t)\| \leq N_\rho e^{\rho(t-\tau)} \|y(\tau)\| \qquad (t \geq \tau \geq t_0)$$

teljesül az (1.6) minden $y(t)$ megoldására.

Könnyü látni, hogy mivel (1.8) minden $y(t)$ megoldásra teljesül, ezért ez ekvivalens az egyenlőtlenséggel.

Ha a $\varkappa_g < 0$, akkor azt mondjuk, hogy az (1.6) egyenlet $y = 0$ megoldása exponenciálisan stabilis.

Az (1.7) egyenlőtlenséget felhasználva könnyen megmutathatjuk, hogy ha az $\int_t^{t+1} \|A(s)\| ds \leq K \quad (t \in I_{t_0})$, azaz $A(t)$ integrálisan korlátos, akkor a $\varkappa_g$ véges, továbbá a $\varkappa[y] \leq \varkappa_g$ minden $y(t)$ megoldására az (1.6) egyenletnek. Tehát a $\varkappa_s = \sup_y \varkappa[y] \leq \varkappa_g$ is fennáll és van olyan korlátos $A(t)$, melynél a $\varkappa_s < \varkappa_g$ (ld. [4]).

A Banach-Steinhaus tétel felhasználásával igazolható, hogy a

$$(1.9) \qquad \varkappa_s = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|U(t)\|}{t},$$

tehát $\varkappa_s$ az $\|U(t)\|$ függvény e.k.k.-je. Az $U(t, \tau)$ operátor segitségével pedig az (1.6) e.g.k.-jét a következőképpen kaphatjuk meg, ha a $\varkappa_g$ véges:

$$(1.10) \qquad \varkappa_g = \overline{\lim_{t, s \to \infty}} \frac{\ln \|U(t+s, t)\|}{s}$$

(ld [4]).

Abban a fontos speciális esetben, amikor $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ t-től független operátor, az $U(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ és igy a $\varkappa_s = \varkappa_g$. Továbbá megmutatható, hogy ekkor a

$$(1.11) \quad \varkappa_s = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \},$$

ahol $\sigma(A)$ az A operátor spektruma.

Tekintsük most az (1.6) mellett az

$$(1.12) \qquad \dot{x} = A(t)x + F(t, x) \qquad (F(t, 0) \equiv 0)$$

nem-lineáris egyenletet, mely kielégiti az 1.1 Tétel feltételeit. Tegyük fel, hogy az $F(t, x)$ perturbáció eleget tesz az

(1.13) $\quad \|F(t,x)\| \leqq f(t)\,\|x\|$

feltételnek az $\|x\| \le r$ és $t \in I_{t_0}$-ra.

Az (1.6) egyenlet $\varkappa_g$ e.g.k.-jének fogalmát felhasználva M.G. Krejn [4] igazolta a következő két tételt:

1) Ha az (1.6) lineáris egyenlet $\varkappa_g$ e.g.k.-je negatív és az $F(t,x)$ perturbáció kielégíti (1.13)-t olyan $f(t): I_{t_0} \to I_0$ függvénnyel, hogy az $\frac{1}{s_0}\int_t^{t+s_0} f(\tau)d\tau < q$ teljesül minden $t \in I_{t_0}$ -ra, valamely $s_0 > 0$, $q > 0$ csak az (1.6) egyenlettől függő konstansokkal, akkor az (1.12) egyenlet $x=0$ megoldása egyenletesen és aszimptotikusan stabilis.

2) Ha az (1.6) egyenletben az $A(t) \equiv A$ t-től független operátor és a $\varkappa_g$ e.g.k. pozitív, továbbá az $F(t,x)$ perturbáció eleget tesz az

$$\|F(t,x)\| \leqq q\,\|x\|^m \qquad (m > 1,\ q > 0)$$

egyenlőtlenségnek, akkor az (1.12) egyenlet $x=0$ megoldása instabilis.

Azt az esetet, amikor a $\varkappa_g = 0$, kritikus esetnek fogjuk nevezni. A kritikus eset stabilitásvizsgálata érdekében bevezetjük az (1.6) egyenlet második generális kitevőjének fogalmát (ld. 1.5 Definició), melyben az (1.6) egyenlet megoldásainak növekedési rendjét a $\{t^\beta : \beta \text{ valós}\}$ hatványfüggvény-család elemeinek, növekedési rendjével hasonlitjuk össze.

1.4. Definició (B.P. Demidovics [13]). Legyen az (1.6) egyenlet $y(t)$ nem-triviális megoldásának $\varkappa[y]$ e.k.k.-je véges. A $\lambda[y]$ számot (ill $\pm\infty$ -t) az $y(t)$ megoldás második karakterisztikus kitevőjének nevezzük (röviden m.k.k.), ha alsó határa azon ρ számoknak, melyekhez van olyan $N_\rho > 0$, hogy

$$\|y(t)\| \leqq N_\varrho e^{\varkappa[y]\cdot t} t^\varrho \qquad (t \in I_{t_0},\ t_0>0)$$

Könnyü látni, hogy a

$$\lambda[y] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\left(\|y(t)\| e^{-\varkappa[y]t}\right)}{\ln t} .$$

1.5. <u>Definició.</u> Legyen az (1.6) $\varkappa_g$ e.g.k.-je véges. Ekkor a λ_g számot (ill $\pm\infty$ -t) az (1.6) egyenlet <u>második generális kitevőjének</u> (röviden m.g.k.), ha alsó határa azon ϱ számoknak, melyekhez van olyan $N_\varrho > 0$, hogy

$$(1.14) \qquad \|y(t)\| \leqq N_\varrho e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varrho \|y(\tau)\| \qquad (t \geq \tau \geq t_0 > 0)$$

teljesül az (1.6) minden $y(t)$ megoldására.

Mivel az (1.14) az (1.6) egyenlet minden $y(t)$ megoldására teljesül, ezért (1.14) ekvivalens az

$$\|U(t,\tau)\| \leqq N_\varrho e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varrho \qquad (t \geq \tau \geq t_0 > 0)$$

egyenlőtlenséggel.

1.3. <u>A konstansvariációs formula</u>

Tekintsük az

$$(1.15) \qquad \dot{x} = A(t)x + F(t,x) \qquad (x \in \mathfrak{B},\ t \in I_{t_0},\ F(t,0)\equiv 0)$$

nem-lineáris differenciálegyenletet, mely kielégiti az 1.1 lokális egzisztencia-tétel feltételeit a $\tau_0 (\geq t_0)$ pont környezetében és az $\|x\| \leq \varrho$ gömbben. Legyen $U(t)$ az (1.15) egyenlet lineáris közelitésének, azaz az

$$\dot{x} = A(t)x$$

egyenletnek a Cauchy operátora és $U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$.

A Lagrange-féle konstansvariációs módszerrel kapjuk, hogy az (1.15) egyenlet azon $x(t)$ megoldása, melyre az $x(\tau_0) = x_0$ $(\|x_0\| \leq \varrho)$

kezdeti feltétel teljesül, fennáll az

(1.16) $$x(t) = U(t,\tau_0)x_0 + \int_{\tau_0}^{t} U(t,s)F(s,x(s))\,ds$$

integrálegyenlet olyan t -kre, ahol $x(t)$ létezik.

A lineáris közelités alapján történő stabilitásvizsgálatokban igen sokszor alkalmazzuk az (1.16) formulát.

1.4. Integrálegyenlőtlenségek

Ahhoz, hogy az (1.15) nem-lineáris egyenlet megoldásainak normájára becsléseket kapjunk az (1.16) integrálegyenletből indulunk ki. Itt az $F(t,x)$ perturbáció és az $U(t,\tau)$ operátor normáira alkalmas feltevéseket téve, az $\|x(t)\|$ függvényre egy integrálegyenlőtlenséghez jutunk. Ezért ahhoz, hogy az $\|x(t)\|$ függvényre becslést kapjunk, szükségünk van az integrálegyenlőtlenség megoldásának becslésére.

1.1. Lemma [4] . Legyen a nem negativ $K(t,\tau)$ magfüggvény egy $J \times J$ (véges vagy végtelen) intervallumon értelmezve ugy, hogy az

$$(\mathcal{K}x)(t) = \int_J K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

integráloperátor a $C(J)$ Banach teret ($C(J)$ az $J \to B$ folytonos és korlátos függvények tere a szupremum normával) önmagára képezi le és spektruma legyen a nyilt egységkörben (azaz spektrálrádiusza kisebb mint egy).

Ekkor az olyan $\varphi(t)$ folytonos függvényre, mely kielégiti a

$$\varphi(t) \le f(t) + \int_J K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (t \in J)$$

egyenlőtlenséget, ahol $f: J \to B$ folytonos függvény, igaz a $\varphi(t) \le \psi(t)$ $(t \in J)$ egyenlőtlenség, ahol $\psi(t)$ megoldása az

(1.17) $$\psi(t) = f(t) + \int_J K(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau$$

integrálegyenletnek.

Fontos speciális eset az, amikor $\mathcal{I}=[a,b]$ véges és a $K(t,\tau)$ magfüggvény folytonos $\tau\le t$ -n és 0 a $\tau>t$ esetén. Ekkor a $\mathcal{K}$ operátor

$$(\mathcal{K}x)(t)=\int_{\mathcal{I}} K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau=\int_a^t K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

Volterra tipusu és igy $\sigma(\mathcal{K})=\{0\}$ (ld. [14]). Theát ekkor az 1.1 Lemma feltételei teljesülnek.

Ha speciálisan az $f(t)\equiv c=$ konst. és a $K(t,\tau)=h(\tau)\ge 0,\ t\in I_\tau$ és 0 a $\tau>t$ esetén, akkor az (1.17) egyenlet megoldása

$$\psi(t)=c\ \exp\Big(\int_a^t h(s)\,ds\Big)$$

és igy kapjuk a következő, az alkalmazások szempontjából fontos lemmát (ld [15])

1.2. Bellman-lemma [4] . Ha $u,h: I_{t_0}\to I_0$ függvények folytonosak és az

$$u(t)\le c+\int_\tau^t f(s)\,u(s)\,ds \qquad (t\ge\tau\ge t_0,\ c>0),$$

akkor

$$u(t)\le c\ \exp\Big(\int_\tau^t f(s)\,ds\Big) \qquad (t\in I_\tau).$$

Az 1.2 Lemmának igaz a következő általánositása, melyet a 6. fejezetben használunk stabilitásvizsgálatra.

1.3. Bihari-lemma [15] . Legyen $\phi:[0,\bar u]\to\mathbb{R}^1$ monoton, nem-csökkenő folytonos, nem-negativ függvény $(\bar u\le\infty)$ és definiáljuk az

(1.18) $$\psi(u)=\int_c^u \frac{dw}{\phi(w)} \qquad (c>0)$$

függvényt.

Ha az

$$u(t)\le c+\int_\tau^t \phi(u(s))\,f(s)\,ds \qquad (t\ge\tau)$$

és

(1.19) $$\int_\tau^t f(s)\,ds \le \psi(\bar{u}-0), \qquad (\tau \le t < \infty)$$

akkor

(1.20) $$u(t) \le \psi^{-1}\Big(\int_\tau^t f(s)\,ds\Big) \qquad (\tau \le t < \infty),$$

ahol ψ^{-1} a ψ inverze.

Speciálisan, ha $\bar{u}=\infty$ és $\psi(\infty)=\infty$, akkor az (1.20) teljesül az (1.19) feltétel nélkül is.

A $\phi(u)=u$ esetben kapjuk a Bellman-lemmát.

1.1. Következmény. Legyen $\phi(u)=u^m\ (m>1)$, akkor ha

$$u(t) \le c + \int_\tau^t [u(s)]^m f(s)\,ds \qquad (\tau \le t)$$

teljesül, akkor az

$$u(t) \le c\Big[1-(m-1)c^{m-1}\int_\tau^t f(s)\,ds\Big]^{-\frac{1}{m-1}} \qquad (\tau \le t),$$

hacsak $\int_\tau^t f(s)\,ds < 1/(m-1)c^{m-1}$.

A Bellman-lemma alkalmazásaként most két lineáris differenciálegyenlet Cauchy operátorának kapcsolatáról szóló állitást vezetünk le, melyet a 4.4 pontban és az 5. fejezetben is használni fogunk.

1.4. Lemma. Legyen $U_k(t)$ $(k=1,2)$ Cauchy-operátora az

$$\dot{x} = A_k(t)x \qquad (k=1,2;\ x\in B,\ t\in I_1)$$

lineáris differenciálegyenletnek, melyre $U_k(1)=I$ és $U_k(t,\tau)= =U_k(t)U_k^{-1}(\tau)$ $(k=1,2)$.

Ha valamely $N>0$ és ν,μ számokkal teljesül az

$$\|U_1(t,s)\| \le N e^{\nu(t-s)}\Big(\frac{t}{s}\Big)^{\mu} \qquad (t \ge s \ge 1)$$

egyenlőtlenség, akkor fennáll az

$$\|U_2(t,s)\| \le N e^{\nu(t-s)}\Big(\frac{t}{s}\Big)^{\mu} e^{N\int_s^t \|A_2(\tau)-A_1(\tau)\|\,d\tau} \qquad (t \ge s \ge 1).$$

Bizonyitás. Elegendő a bizonyitást, az $s=1$ esetre elvégezni. Tudjuk, hogy az $U_2(t)$ operátorfüggvény megoldása az

$$\begin{cases} \dot{U}_2 - A_1 U_2 = (A_2 - A_1) U_2 \\ U_2(1) = I \end{cases} \qquad (U_2 \in \mathcal{L}(B))$$

Cauchy-feladatnak. Másrészt ugyancsak megoldása a fenti Cauchy-feladatnak (ld. [4]) az

$$U_1(t) + \int_1^t U_1(t,\tau)\left[A_2(\tau) - A_1(\tau)\right] U_2(\tau)\, d\tau$$

operátor is. Az unicitás alapján ez a két megoldás azonosan egyenlő. Igy ha a $\varphi(t) = \|U_2(t)\|$, akkor

$$\varphi(t) \le N e^{\nu(t-1)} t^{\mu} + N \int_1^t e^{\nu(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\mu} p(\tau)\, d\tau ,$$

ahol $p(t) = \|A_2(t) - A_1(t)\|$.

A $\varphi(t) = \varphi_1(t) e^{\nu t} t^{\mu}$ helyettesitéssel

$$\varphi_1(t) \le N e^{\nu} + N \int_1^t p(\tau) \varphi_1(\tau)\, d\tau .$$

Ahonnan az állitás a Bellman-lemma alapján következik.

2. fejezet

Lineáris differenciálegyenletek és a második kitevők

Tekintsük a $\mathcal{B}$ Banach térben felirt

(2.1) $$\dot{x} = A(t)x \qquad (x \in \mathcal{B},\ t \in I_1)$$

lineáris differenciálegyenletet, ahol $A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ $(t \in I_1)$ és az $A: I_1 \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ függvény erős értelemben mérhető és lokálisan Bochner integrálható I_1-n. (Itt egyszerüség kedvéért feltesszük, hogy $t_0 = 1$, tehát az egyenlet az $[1,\infty)$-n értelmezett.)

Ebben a fejezetben a (2.1) egyenlet megoldásai m.k.k.-nek és a (2.1) egyenlet m.g.k.-nek jellemzésével és összehasonlitásával foglalkozunk. Feltesszük, hogy a (2.1) egyenlet $\varkappa_g$ e.g.k.-je véges. Ekkor szükséges és elegendő feltételt vezetünk le a (2.1) λ_g m.g.k.-nek végességére, majd az $A(t)$ segitségével λ_g végességére elegendő feltételt adunk.

Jelölje $U(t)$ a (2.1) Cauchy-operátorát, melyre $U(1) = I$ és legyen $U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$.

2.1. **Tétel.** A (2.1) egyenlet λ_g m.g.k.-je véges akkor és csakis akkor, ha a

$$K = \sup\left\{ \|U(t,\tau)\| e^{-\varkappa_g(t-\tau)} : 1 \le \tau \le t \le 2\tau \right\} < \infty.$$

(itt $\varkappa_g \neq \pm\infty$ a (2.1) e.g.k.-je)

Bizonyitás. Szükségesség. Legyen λ_g véges és $\lambda_g < \varrho$. Ekkor λ_g definiciója szerint van olyan $N_\varrho > 0$, hogy

$$\|U(t,\tau)\| \le N_\varrho e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho} \qquad (t \ge \tau \ge 1)$$

és igy $K \le N_\varrho 2^\varrho < \infty$.

Elegendőség. Legyen $K < \infty$. Ha a $t \geq \tau \geq 1$ tetszőleges, akkor van olyan n egész, hogy $2^n \tau \leq t < 2^{n+1}\tau$. Legyen a $\tau_0 = \tau$, $\tau_k = 2^k \tau$ $(k = 1,2,\dots,n)$ és $\tau_{n+1} = t$ ekkor az

$$U(t,\tau)\, e^{-\varkappa_g (t-\tau)} = \prod_{k=1}^{n+1} U(\tau_k, \tau_{k-1})\, e^{-\varkappa_g(\tau_k - \tau_{k-1})}$$

egyenlőségből az

$$\|U(t,\tau)\|\, e^{-\varkappa_g(t-\tau)} \leq \prod_{k=1}^{n+1} \|U(\tau_k,\tau_{k-1})\|\, e^{-\varkappa_g(\tau_k-\tau_{k-1})} \leq K^{n+1} = K\, e^{n \ln K}$$

Az n választása alapján $n \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{t}{\tau}$, következésképpen

$$\|U(t,\tau)\| \leq K\, e^{\varkappa_g (t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{\ln K}{\ln 2}} \qquad (t \geq \tau \geq 1).$$

Az 1.5 Definició alapján $\lambda_g < \frac{\ln K}{\ln 2}$, azaz λ_g véges,

2.1. Megjegyzés. Az $U(t,s) = U(t,\tau)\,U(\tau,s)$ egyenlőség alapján a K végessége ekvivalens a

$$K' = \sup \left\{ \|U(t,\tau)\|\, e^{-\varkappa_g (t-\tau)} ;\ 1 \leq \tau \leq t \leq \tau T \right\} < \infty$$

feltétellel, ahol $T > 1$ tetszőleges.

A következő lemmában λ_g végességére adunk elegendő feltételt az $A(t)$ operátor segitségével.

2.1. Lemma. Ha az $\int_t^{2t} \|A(s)\|\, ds \leq K < \infty$ teljesül minden $t \in I_1$ -re, akkor a (2.1) egyenletre a $\varkappa_g = 0$ és a λ_g véges.

Bizonyitás: Legyen $1 \leq s < t$ tetszőleges és az n egész szám olyan, hogy $2^n s \leq t < 2^{n+1} s$. Ekkor az n választása és a lemma feltétele alapján az

$$\int_s^t \|A(\tau)\|\, d\tau \leq \int_s^{2s} + \int_{2s}^{2^2 s} + \dots + \int_{2^n s}^{2^{n+1} s} \leq (n+1) K \leq K + \frac{K}{\ln 2} \ln \frac{t}{s}.$$

Felhasználva az (1.7) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$e^{-K} \left(\frac{t}{s}\right)^{-\frac{K}{\ln 2}} \leq \|U(t,s)\| \leq e^{K} \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{K}{\ln 2}}$$

Az (1.10) formula felhasználásával adódik, hogy $\varkappa_g = 0$ és a λ_g definiciója alapján kapjuk, hogy $-\frac{K}{\ln 2} \leq \lambda_g \leq \frac{K}{\ln 2}$.

2.2. Megjegyzés. A 2.1 Lemma feltétele speciálisan teljesül, ha a

$$t\,\|A(t)\| \leqq K < \infty \qquad (t \in I_1)\,.$$

2.3. Megjegyzés. Látható, hogy ha az $A(t) \equiv A$ t-től független operátor, akkor a 2.1 Lemma feltétele nem teljesül. Azonban, ekkor mint látni fogjuk a 3. fejezetben, a λ_g általában nem véges (ld. 3.3. Példa).

A következőkben a λ_g meghatározására adunk formulát az $U(t,\tau)$ operátor segitségével, abban az esetben amikor $\varkappa_g$ és λ_g véges.

2.2. Tétel. Legyen $\varkappa_g$ és λ_g véges. Ekkor λ_g előállitható a következő formulával

$$\lambda_g = \overline{\lim_{\substack{s/\tau\to\infty\\ \tau\to\infty}}} \frac{\ln\left(\|U(\tau+s,\tau)\|\, e^{-\varkappa_g s}\right)}{\ln s - \ln\tau}\,. \tag{2.2}$$

Bizonyitás. Jelöljük β-val a (2.2) jobb oldalán álló kifejezés értékét. A m.g.k. definiciója alapján, ha a $\varrho > \lambda_g$, akkor van olyan $N_\varrho > 0$, hogy

$$\|U(t,\tau)\| \leq N_\varrho\, e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho} \qquad (t \geq \tau \geq 1)\,.$$

A $t = s+\tau$ helyettesitéssel kapjuk, hogy a $\beta \leq \varrho$, és igy $\beta \leq \lambda_g = \inf \varrho$. Megmutatjuk, hogy a $\beta \geq \lambda_g$ egyenlőtlenség is áll. A β definiciója alapján, ha a $\varrho > \beta$, akkor van olyan $T_\varrho > 1$, hogy az

$$\|U(t,\tau)\| \leq e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho}$$

minden $\tau, t/\tau \geqq T_\varrho$. Mivel a λ_g véges, igy a $K = \sup\{ \|U(t,\tau)\| e^{-\varkappa_g(t-\tau)} ;\ 1 \leq \tau \leq t \leq T_\varrho \tau\}$ véges, ezért az

$$\|U(t,\tau)\| \leq N\, e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho}$$

teljesül minden $t \geq \tau \geq T_\varrho$ és $T_\varrho \geq t \geq \tau \geq 1$ esetén, ahol az $N = \max\left(1, K T_\varrho^{|\varrho|}\right)$. Végül az $1 \leq \tau \leq T_\varrho \leq t$ esetben kapjuk, hogy

$$\|U(t,\tau)\| e^{-\varkappa_g(t-\tau)} \leqq \|U(t,T_\varrho)\| e^{-\varkappa_g(t-T_\varrho)} \|U(T_\varrho,\tau)\| e^{-\varkappa_g(T_\varrho-\tau)} \leqq N^2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varrho .$$

Következésképpen az

$$\|U(t,\tau)\| \leq N_\varrho e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\varrho \qquad (N_\varrho = N^2)$$

teljesül minden $t \geq \tau \geq 1$ -re. Ebből következik, hogy a $\lambda_g \leq \varrho$. Mivel $\varrho > \beta$ tetszőleges volt, ezért $\lambda_g \leq \beta$.

Vezessük be a következő jelöléseket: $\lambda_s = \sup_{x \neq 0} \lambda[x]$ és μ pedig jelölje az $\|U(t)\|$ függvény m.k.k.-jét, azaz

(2.3) $$\mu = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\left(\|U(t)\| e^{-\varkappa_s t}\right)}{\ln t} .$$

Az első kitevőkre, mint az 1.2 pontban emlitettük igaz, hogy a $\varkappa_s$ egyenlő az $\|U(t)\|$ függvény e.k.k.-jével. A következő példa mutatja, hogy a második kitevőkre általában nem igaz, hogy a $\mu = \lambda_s$.

2.1. <u>Példa</u>. Legyen $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ az n dimenziós euklideszi tér és az $A(t) \equiv A$ $n \times n$-es konstans mátrix Jordan-féle normál alakban adva. Legyenek $\lambda_i - k$ $(i = 1,2,\dots,r;\ r < n)$ az A mátrix különböző sajátértékei és jelölje m_i a λ_i sajátértékhez tartozó Jordan blokkok közül a maximális méretü blokk méretét. Ekkor a (2.1) egyenlet megoldásai $e^{\lambda_i t} p(t)$ alakúak összege, ahol $p(t)$ a t egy vektor-polinomja, melynek fokszáma legfeljebb $(m_i - 1)$. Igy könnyü látni, hogy a $\mu = \lambda_g = k - 1$, ahol

$$k = \max_i \left\{ m_i : \operatorname{Re}\lambda_i = \max_{1\leq k\leq r} \operatorname{Re}\lambda_k \right\} .$$

Mig a $\lambda_s = m - 1$, ahol az $m = \max m_i$ és itt a maximumot az összes $i = 1,2,\dots,r$ -re kellvenni.

Tehát általában a $\mu \leq \lambda_s$, ebben az esetben.

Következőkben összefüggéseket adunk meg a $\mu, \lambda_g, \lambda_s$ számok között.

2.2. Lemma. Minden (2.1) alaku lineáris egyenletre a $\mu \le \lambda_s$.

Bizonyitás. Bármely $x_0 \in \mathcal{B}$ és $\varepsilon > 0$-hoz a m.k.k. definiciója alapján van olyan $N_{\varepsilon, x_0} > 0$, hogy az

$$\|U(t)x_0\| \le N_{\varepsilon, x_0} e^{\varkappa[x]t} t^{\lambda[x]+\varepsilon} \qquad (t \in I_1).$$

Legyen a λ_s véges (ellenkező esetben triviális az állitás). Mivel a $\varkappa[x] \le \varkappa_s$ és a $\lambda[x] \le \lambda_s$, ezért

$$\|U(t)x_0\| \le N_{\varepsilon, x_0} e^{\varkappa_s t} t^{\lambda_s+\varepsilon} \qquad (t \in I_1).$$

Tehát az $\left\{ U(t)e^{-\varkappa_s t} t^{-(\lambda_s+\varepsilon)} : t \in I_1 \right\}$ operátor család korlátos minden fix $x_0 \in \mathcal{B}$-re. A Banach-Steinhaus tétel értelmében van olyan x_0 -tól független $N_\varepsilon > 0$, hogy

$$\|U(t)\| \le N_\varepsilon e^{\varkappa_s t} t^{\lambda_s+\varepsilon} \qquad (t \in I_1)$$

minden $\varepsilon > 0$-hoz. Mivel μ a legkisebb ilyen tulajdonságu szám, ezért valóban $\mu \le \lambda_s$.

2.3. Megjegyzés. Ha a (2.1) egyenlet minden $x(t) = U(t)x_0 \ne 0$ megoldásának e.k.k.-je egyenlő $\varkappa_s$ -sel, akkor a $\mu = \lambda_s$.

Ugyanis az $\|x(t)\| \le \|U(t)\| \|x_0\|$ minden $x_0 \in \mathcal{B}$ -re és ebből a m.k.k. definiciója alapján $\lambda[x] \le \mu$, tehát a $\lambda_s \le \mu$.

2.3. Lemma. Ha a (2.1) egyenletre a $\varkappa_g = \varkappa_s$, akkor a $\mu \le \lambda_g$.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy $\lambda_g < \infty$ és a $\lambda_g < \mu$. Legyen $\lambda_g < \rho < \mu$, ekkor a λ_g definiciója alapján van olyan $N_\rho > 0$, hogy

$$\|U(t,\tau)\| \le N_\rho e^{\varkappa_g(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\rho \qquad (t \ge \tau \ge 1).$$

Vegyük ezt az egyenlőtlenséget a $\tau = 1$ helyen, ekkor

$$\|U(t)\| \leq K_\varrho e^{\varkappa_s t} t^\varrho \qquad (t \in I_1,\ K_\varrho = N_\varrho e^{-\varkappa_g}),$$

mely ellentmond a μ definiciójának és a $\varrho < \mu$ egyenlőtlenségnek. Igy a $\lambda_g < \mu$ feltevés nem igaz, vagyis a lemma állítása teljesül.

A 2.3. Megjegyzésből következik az alábbi

2.1. <u>Következmény. Ha minden nem triviális</u> $x(t)$ <u>megoldására a</u> (2.1) <u>egyenletnek a</u> $\varkappa_g = \varkappa_s = \varkappa[x]$ <u>teljesül, akkor a</u> $\lambda_s \leq \lambda_g$.

3. fejezet

Lineáris stacionárius differenciálegyenletek második kitevőiről

Tekintsük a $\mathcal{B}$ Banach térben az

(3.1) $$\dot{x} = Ax \qquad (x \in \mathcal{B})$$

stacionárius differenciálegyenletet, ahol $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ t-től független operátor. Ekkor a (3.1) egyenlet $x(t_0) = x_0 \in \mathcal{B}$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása az $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Ebben a fejezetben a (3.1) egyenlet megoldásainak ill. az $\|e^{At}\|$ exponenciális függvénynek a m.k.k.-it vizsgáljuk, Többek között példát adunk olyan (3.1) egyenletre, melynek bizonyos megoldásaira a m.k.k. negativ ill. olyan egyenletre, melynek $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis, de exponenciálisan nem. Ezek az esetek véges dimenziós térben nem fordulhatnak elő.

A 3.2. pontban megmutatjuk, hogy az $\|e^{At}\|$ függvény m.k.k.-je minden $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ mellett nem-negativ és egyenlő 0, ha pl. az A operátor a $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ Hilbert térben konvexoid. Példát adunk olyan kvázinilpotens A operátorra, melyre az $\|e^{At}\|$ függvény m.k.k.-je $+\infty$ és vizsgáljuk ezzel kapcsolatban a kvázinilpotencia és a nilpotencia közötti összefüggést.

3.1. A megoldások második karakterisztikus kitevőiről

Ha a $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ az n dimenziós euklideszi tér és az A $n \times n$-es mátrix különböző sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r (r \leq n)$, akkor mint tudjuk a (3.1) egyenlet megoldásainak e.k.k.-i a $\operatorname{Re} \lambda_i$ értékekkel egyenlőek. Hasonlóan, mint a 2.1. Példában, jelölje m_i a λ_i

sajátértékhez tartozó Jordan blokkok közül a maximális méretü blokk méretét. Ekkor a $\operatorname{Re}\lambda_i$ (i fix) e.k.k.-val rendelkező megoldások m.k.k.-i a $0, 1, \dots, (\max_j m_j) - 1$ értékeket veszik fel, ahol a maximumot olyan j -kre vesszük, melyekre $\operatorname{Re}\lambda_j = \operatorname{Re}\lambda_i$.

Tehát véges dimenzióban a megoldások m.k.k.-i csak nemnegativ egész számok lehetnek. Megmutatjuk, hogy végtelen dimenziós esetben a $\lambda[x]$ lehet negativ (nem egész) szám is.

3.1. Példa. Tekintsük a $\mathcal{B} = \ell^2$ Hilbert térben (melynek elemei olyan $x = (x_1, x_2, \dots)$ sorozatok, hogy az $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$ véges) az $e_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots)$ $(n = 1, 2, \dots)$ ortonormált bázist. Jelölje S az ℓ^2 térben az egyirányu eltolás (shift) operátorát:

$$S e_n = e_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Megmutatjuk, hogy van olyan H részhalmaza a ℓ^2 térnek, mely mindenütt sürü az ℓ^2 -ben és az

$$\dot{x} = Sx \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_n = x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots) \end{array} \right\} \quad (x \in \ell^2) \tag{3.2.}$$

végtelen differenciálegyenletrendszer minden $x(t) = e^{St}x$ $(x \in H)$ megoldásának m.k.k.-je $-1/4$.

Legyen $H = \{x \in \ell^2 : \exists\, n \in N \ \&\ x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\}$, ahol $N = \{1, 2, \dots\}$ a természetes számok halmaza. Nyilván a H pontjai mindenütt sürün vannak az ℓ^2 térben. Mivel az $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ -re

$$e^{St}x = \left(x_1, \frac{t}{1!}x_1 + x_2, \frac{t^2}{2!}x_1 + \frac{t}{1!}x_2 + x_3, \dots\right), \tag{3.3}$$

ezért, ha $x = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots) \in H$, akkor

$$\|e^{St}x\|^2 = \sum_{1 \le k < n \le m} (x_k \bar{x}_n + \bar{x}_k x_n)(e^{St}e_k, e^{St}e_n) + \|e^{St}e_1\|^2 \|x\|^2,$$

ahol $(\cdot,\cdot)$ jelöli a belső szorzatot ℓ^2 térben. A (3.3) egyenlőség felhasználásával kapjuk, hogy

$$(e^{St}e_k, e^{St}e_n) = t^{n-k}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^{2\ell}}{(n-k+\ell)!\,\ell!} = i^{-p}J_p(2it),$$

ahol $p=n-k\geq 0$ és

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,(j+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

az elsőfaju p -edrendü Bessel függvény. Ismert (ld. [16] , 204. feladat), hogy az $i^{-n}J_n(2it)$ függvény $t\to\infty$ esetén aszimptotikusan egyenlő a $Ke^{2t}t^{-1/2}$ függvénnyel ($K=(2\sqrt{\pi})^{-1}$, $n=0,1,2,\dots$) . Tehát az $\|e^{St}x\|$ n.k.k.-je, ha $x\in H$, akkor $-1/4$ -del egyenlő.

3.1 . Megjegyzés. Meg fogjuk mutatni (ld. a 3.2 Megjegyzést), hogy minden (3.1) alaku egyenletre a $\lambda_S = \sup_{x\neq 0}\lambda[x]$ mennyiség nem negativ, és innen következik, hogy a (3.2) egyenletre sem lehet a $\lambda[x]=-1/4$ minden $x\in\ell^2$ -re.

Tekintsük most az

$$\text{(3.4)}\qquad \dot{x}=(S-I)x \iff \left.\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1\\ \dot{x}_n = x_{n-1}-x_n \quad (n=2,3,\dots)\end{cases}\right\}(x\in\ell^2)$$

végtelen differenciálegyenletrendszert. Mivel az S operátor $\sigma(S)$ spektruma a zárt egységkörlemez (ld [14]) ezért a $\sigma(S-I)$ a baloldali félsikban fekszik és van a képzetes tengelyen is spektrumpont (azaz $\max \operatorname{Re}\sigma(S-I)=0$). Igy a (3.4) egyenlet $x=0$ megoldása nem lehet exponenciálisan stabilis (ld. [4]), viszont megmutatjuk, hogy aszimptotikusan stabilis. Ez véges dimenziós térben nem fordulhat elő, mert ha egy (3.1) alaku egyenlet $x=0$ megoldása aszimptotikusan stabilis $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor exponenciálisan is stabilis, azaz $\max \operatorname{Re}\sigma(A)<0$.

3.1. Lemma. A (3.4) egyenlet $x=0$ megoldása aszimptotikusan stabilis, de exponenciálisan nem stabilis.

Bizonyitás. A stabilitás az

$$\|e^{(S-I)t}\| \leq e^{\|S\| t} e^{-t} = 1$$

egyenlőtlenségből következik. Legyen $x \in \ell^2$ tetszőleges és $x_0 \in H$ olyan, hogy $\|x - x_0\| < \varepsilon/2$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a 3.1 Példa alapján az

$$\|e^{St} x\| \leq \|e^{St}(x - x_0)\| + \|e^{St} x_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

ha a $t \geq t_0(x, \varepsilon) \geq 1$.

A $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ véges dimenziós esetben az A $n \times n$-es mátrix Jordan-féle felbontásából kapjuk, hogy a $\lambda_S = \sup\limits_{x \neq 0} \lambda[x] \leq n$. Megmutatjuk, hogy a λ_S végtelen dimenzióban lehet $+\infty$ (ld. még a 3.3 Példát).

3.2. Példa. Legyen a $\mathcal{B} = \ell^\infty$ térben ($x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$, ha $\|x\|_\infty = \sup\limits_n \{|x_n|\}$ véges) az $e_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots)$ és $S^* e_1 = 0$, $S^* e_n = e_{n-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$. Tekintsük az ℓ^∞ térben az

$$\dot{x} = S^* x \Leftrightarrow \dot{x}_n = x_{n+1} \ (n = 1, 2, \dots) \quad (x \in \ell^\infty)$$

végtelen differenciálegyenletrendszert. Legyen $x^{(n)} = (1, \dots, \overset{n}{1}, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty$, melyre $\|e^{S^* t} x^{(n)}\|_\infty = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$. Tehát a $\varkappa[x^{(n)}] = 0$ és $\lambda[x^{(n)}] = n-1$ és igy a $\lambda_S = \sup\limits_{x \neq 0} \lambda[x] = +\infty$.

3.2. Az exponenciális függvény második kitevőjének viselkedése

Tekintsük most az e^{At} $(A \in \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ exponenciális függvény második karakterisztikus kitevőjét:

$$\mu(A) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln(\|e^{At}\| e^{-\varkappa_S t})}{\ln t} , \tag{3.5}$$

ahol $\varkappa_s = \max \operatorname{Re} \sigma(A)$, $\sigma(A)$ az A spektruma.

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy $\mu(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{L}(B)$ re és lehet $+\infty$ is. Továbbá vizsgáljuk annak a feltételét, hogy a $\mu(A) = 0$ milyen A operátorra teljesül.

3.3. Lemma. Minden $A \in \mathcal{L}(B)$ operátorra a $\mu(A) \geq 0$.

Bizonyitás. Legyen $A' = A - \varkappa_s I$. Mivel a $\varkappa_s = \max \operatorname{Re} \sigma(A)$, ezért a $\max \operatorname{Re} \sigma(A') = 0$. Ahonnan az (1.11) egyenlőség alapján az

$$\inf_{t>0} \frac{\ln \|e^{A't}\|}{t} = 0 ,$$

tehát $\|e^{A't}\| \geq 1$. A (3.5) felhasználásával kapjuk, hogy $\mu(A) \geq 0$.

3.2. Megjegyzés. Mivel ebben az esetben a $\varkappa_g = \varkappa_s$, ezért a 2.3 Lemma szerint a $\mu(A) \leq \lambda_g$ és igy λ_g is nem negativ. Továbbá a $\mu \leq \lambda_s$ mindig áll és igy a λ_s is nem negativ.

Természetesen vannak olyan (2.1) alaku nem stacionárius egyenletek, melyekre a λ_g negativ (ld. 4. fejezet).

Vizsgáljuk most azt a szélsőséges esetet, mikor $\mu(A) = 0$ Véges dimenzióban, ha az A mátrix normális $(A^* A = A A^*)$, azaz diagonális alakra hozható, akkor a $\mu(A) = 0$, hiszen a Jordan blokkok 1×1 -esek. Ennek általánositása a következő két tétel, Banach ill. Hilbert térre.

3.1. Tétel. Ha az $A \in \mathcal{L}(B)$ operátorra a

$$\max \operatorname{Re} \sigma(A) = \lim_{h \to 0+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h} , \tag{3.6}$$

akkor a $\mu(A) = 0$. Továbbá, ha a (3.1) egyenletre $\varkappa_s = 0$ és teljesül (3.6), akkor a (3.1) egyenlet $x = 0$ megoldása stabilis.

Bizonyitás. Először is megmutatjuk, hogy a (3.6) egyenlőség jobb oldalán álló határérték minden $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ -re létezik, amit $\eta(A)$ -val fogunk jelölni. Ehhez elég megmutatni, hogy az

$$F(h) = \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

függvény $h > 0$ -ra monoton növekvő függvénye h -nak és mivel $F(h) \geq -\|A\|$, ezért a $\lim\limits_{h \to 0+} F(h) = \eta(A)$ létezik. Legyen $h_2 \geq h_1 > 0$, ekkor

$$F(h_2) - F(h_1) = \frac{\|h_1 + h_1 h_2 A\| - \|h_2 + h_1 h_2 A\| + h_2 - h_1}{h_1 h_2} \geq \frac{-|h_1 - h_2| + h_2 - h_1}{h_1 h_2} = 0 .$$

Tehát az $F(h)$ $h>0$ -ra valóban monoton növő függvény.

Teljesüljön most (3.5). Mivel az $\|e^{A(t+h)}\| = \|e^{At} + hAe^{At}\| + o(h)$, ezért a

$$\frac{d^+\|e^{At}\|}{dt} = \lim_{h \to 0+} \frac{\|e^{At} + hAe^{At}\| - \|e^{At}\|}{h} \leq \|e^{At}\| \, \eta(A) .$$

Integrálva a fenti egyenlőtlenséget 0 -tól t -ig

$$\|e^{At}\| \leq e^{\eta(A)t} = e^{\varkappa_s t} \qquad (t \in I_0), \tag{3.7}$$

ahol felhasználtuk a (3.6) feltételt. És igy (3.5) értelmében a $\mu(A) \leq 0$. Mivel $\mu(A)$ nem lehet negativ, ezért kapjuk, hogy $\mu(A) = 0$.

A Tétel utolsó állitásának bizonyitásához, legyen $\varkappa_s = 0$. Ekkor a (3.7) egyenlőtlenség szerint $\|e^{At}\| \leq 1$ $(t \in I_0)$, ahonnan a (3.1) $x = 0$ megoldásának stabilitása következik.

Legyen most a $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ Hilbert tér a $(\cdot, \cdot)$ belsőszorzattal.

3.2. Tétel [20] . Minden $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operátorra

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h} = \sup\{\operatorname{Re}(Ax, x) : x \in \mathcal{H} \,\&\, \|x\| = 1\} .$$

Bizonyitás. Jelölje $W(A) = \{(Ax, x) : x \in \mathcal{H} \,\&\, \|x\| = 1\}$ az

A operátor numerikus értékkészletét (ld. [14]) és legyen $\Theta(A) = \sup \operatorname{Re} W(A)$. A Tétel tehát azt állitja, hogy $m(A) = \Theta(A)$.

Legyen $x \in \mathcal{H}$ és $\|x\| = 1$, $h > 0$. Ekkor az

$$(Ax, x) = \frac{1}{h}\left[((I + hA)x, x) - 1 \right],$$

ahonnan

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq \frac{1}{h}\left(\|I + hA\| - 1 \right).$$

Mivel ez minden egy normáju $x \in \mathcal{H}$ -ra és $h > 0$ -ra fennáll, ezért $\Theta(A) \leq m(A)$. A forditott irányu egyenlőtlenség megmutatásához legyen $x \in \mathcal{H}$ és $\|x\| = 1$, $h > 0$. Az

$$\|(I + hA)x\|^2 = 1 + 2h \operatorname{Re}(Ax, x) + h^2 \|Ax\|^2$$

egyenlőségben vegyük x -ben a felső határakat, igy

$$\|I + hA\|^2 \leq 1 + 2h\, \Theta(A) + h^2 \|A\|^2.$$

Tehát az

$$\frac{\|I + hA\| - 1}{h} \cdot \frac{\|I + hA\| + 1}{2} \leq \Theta(A) + h \frac{\|A\|^2}{2}.$$

egyenlőtlenség teljesül, ahonnan $h \to 0+$ esetén kapjuk, hogy $m(A) \leq \Theta(A)$.

A 3.1 és 3.2 Tételeket felhasználva kapjuk a $\mathcal{H}$ Hilbert térben a következő állitást.

3.3. <u>Tétel. Ha az</u> $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ <u>operátorra</u>

$$\max \operatorname{Re} \sigma(A) = \sup \operatorname{Re} W(A),$$

<u>akkor</u> $\mu(A) = 0$ <u>és ha még a</u> $k_s = 0$ <u>is teljesül a (3.1) egyenletre, akkor a (3.1)</u> $x = 0$ <u>megoldása stabilis.</u>

3.1. <u>Következmény. Ha az</u> A <u>operátor a</u> $\mathcal{H}$ <u>Hilbert téren konvexoid, akkor</u> $\mu(A) = 0$.

Ugyanis, ekkor a $\operatorname{Co} \sigma(A) = \overline{W(A)}$ (ahol $\operatorname{Co} \mathcal{D}$ $(\mathcal{D} \subset \mathbb{C})$ jelöli a $\mathcal{D}$ halmaz konvex burkát és $\overline{\mathcal{D}}$ pedig a $\mathcal{D}$ lezártját) és igy a

$$\max \operatorname{Re} \sigma(A) = \max \operatorname{Re} \operatorname{Co} \sigma(A) = \max \operatorname{Re} \overline{W(A)} = \sup \operatorname{Re} W(A).$$

Speciális konvexoid operátorokat választva kapjuk, hogy ha az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ operátor

1) normális, szubnormális vagy Toeplitz, akkor $\mu(A) = 0$,

2) olyan, hogy a $\sigma(A)$ spektrum az A operátor spektrális halmaza, akkor $\mu(A) = 0$.

Ugyanis az 1) és 2)-ben szereplő operátorok konvexoidok (ld. [14]).

Tudjuk, hogy a $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ esetben a $\mu(A)$ véges ($\leq n$). A következő példa mutatja, hogy végtelen dimenzióban lehet $\mu(A)$ $+\infty$ is.

3.3. Példa. Tekintsük a $\mathcal{B} = \ell^2$ térben az A sulyozott shift operátort pozitiv α_n sulyokkal ugy, hogy az $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Tehát az $A = SP$, ahol $Se_n = e_{n+1}$, $Pe_n = \alpha_n e_n$ és $e_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{\check{1}}, 0, \dots)$ $(n = 1, 2, \dots)$

Ismeretes (ld. [14]), hogy ilyen α_n sulyok mellett az A operátor kvázinilpotens, azaz $\sigma(A) = \{0\}$. Ahonnan az (1.11) egyenlőség alapján a (3.1) egyenletre $\varkappa_s = 0$ és igy a

$$\mu(A) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|e^{At}\|}{\ln t} .$$

Tekintsük (3.1)

$$e^{At} e_1 = e_1 + \frac{t}{1!} \alpha_1 e_2 + \frac{t^2}{2!} \alpha_1 \alpha_2 e_3 + \cdots$$

megoldását, melynek normája

$$(3.7) \qquad \|e^{At} e_1\|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^2 \frac{t^{2n}}{(n!)^2} .$$

Következésképpen az

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \frac{t^n}{n!} \leq \|e^{At} e_1\| \leq \|e^{At}\|$$

egyenlőtlenség teljesül minden $n = 1, 2, \dots$ egész számra. Ahonnan kapjuk, hogy a $\mu(A) = +\infty$. Nyilvánvaló, hogy akkor a $\lambda_s = \lambda_g = +\infty$ is teljesül.

3.3. Megjegyzés. Ha az $\alpha_n = \frac{1}{n}$, akkor azt kapjuk (3.7) alapján, hogy az $\|e^{At} e_1\|$ függvény $e^{\sqrt{t}}$ nagyságrendü, ha a $t \to \infty$.

Ezt a 3.1 Példában a Bessel-függvényekre használt aszimptotikus becslésből nyerhetjük.

Érdekes továbbá megjegyezni, hogy ha $\mathcal{B}=L^2[0,1]$ ($f\in L^2[0,1]$, ha $f:[0,1]\to C$ függvény a $[0,1]$ intervallumon Lebesgue-mérhető és ott abszolut értékben négyzetesen integrálható) függvénytérben az

$$(Af)(x)=\int_0^x f(s)\,ds \qquad (f\in L^2[0,1],\ x\in[0,1])$$

Volterra-operátort tekintjük, akkor az A szintén olyan kvázinilpotens operátor, melyre $\mu(A)=+\infty$.

3.3. Kvázinilpotens operátorok exponenciális függvényének második kitevőjéről

Az előző pontban láttuk, hogy már kvázinilpotens operátorra is az $\|e^{At}\|$ függvény tetszőleges t^{ρ} $(\rho\in\mathbb{R}^1)$ függvénynél gyorsabban növekedhet $t\to\infty$ esetén.

Vizsgáljuk most azt a kérdést, hogy mikor lesz egy kvázinilpotens A operátorra $\mu(A)$ véges.

Ez biztosan teljesül, ha az A nilpotens, azaz valamely természetes n számra $A^n=0$, ugyanis akkor $\mu(A)=n-1$.

A következőkben feltételeket adunk arra, hogy egy kvázinilpotens operátor nilpotens legyen, azaz a $\mu(A)$ véges legyen.

3.4. Tétel. Ha az $A\in\mathcal{L}(\mathcal{B})$ operátorra $\sigma(A)=\{0\}$, akkor a következő állítások ekvivalensek

1) $A^{n+1}=0$

2) $R(\lambda,A)=(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \qquad (\lambda\neq 0)$

3) $e^{At}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}t^k \qquad (t\geq 0)$

Bizonyítás. Mivel az $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$, ezért 1)-ből a 3) triviálisan következik. Ahhoz, hogy 3)-ból a 2)-t bebizonyitsuk, használjuk fel a Laplace-transzformációt e^{At} -re:

$$R(\lambda,A) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{At}\,dt\,,$$

ha $Re\lambda > 0$, mert az kvázinilpotens. Felhasználva 3)-at kapjuk, hogy a 2) teljesül minden $Re\lambda > 0$ -ra. Mivel 2) bal és jobb oldalán álló függvények $\lambda = 0$ kivételével holomorfak, igy szükségképpen teljesül 2) a $\lambda = 0$ kivételével.

Végül 2)-ből következik 1), mert minden A kvázinilpotens operátorra a Neumann-féle sorfejtésből (ld. [17]):

$$R(\lambda,A) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \qquad (\lambda \neq 0)$$

És igy 2)-t felhasználva

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n+1}\left[-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k\right] = \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}R(\lambda,A) = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$$

Az $(A-\lambda I)$ operátorral jobbról szorozva kapjuk 1)-t.

Elegendő feltételt adunk az $\|e^{At}\|$ $(-\infty < t < \infty)$ becsléséből arra, hogy az A kvázinilpotens operátor nilpotens legyen.

3.5. <u>Tétel. Ha a</u> $\mu(A)$ <u>és</u> $\mu(-A)$ <u>véges, azaz van olyan</u> $\alpha > 0$, <u>hogy</u>

$$\|e^{At}\| \leq O(|t|^\alpha) \qquad (|t| \to \infty),$$

<u>akkor</u> $A^n = 0$, <u>hacsak</u> $n > \alpha$.

<u>Bizonyitás.</u> Terjesszük ki az exponenciális függvényt a $\mathbb{C}$ komplex számsíkra, azaz vegyük az $F(z) = e^{Az}$ $(z \in \mathbb{C})$ egész függvényt. Mivel $\|F(z)\| \leq e^{\|A\|\,|z|}$, továbbá mivel $\sigma(A) = \{0\}$, azaz $\|A^n\|^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$, ezért bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $n_0(\varepsilon) > 0$, hogy ha az $n \geq n_0$, akkor az $\|A^n\| < \varepsilon^n$. És igy

$$\|e^{Az}\| \leq \left\|\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{A^k}{k!}z^k\right\| + e^{\varepsilon|z|} \neq e^{2\varepsilon|z|}\,.$$

Tehát az $F(z)$ függvény rendje 1 és minimális tipusu (ld. a definiciókat [18] -ben), igy alkalmazhatjuk G. Pólya egy tételét (ld. [18] , [19]), mely szerint az ilyen $F(z)$ függvény z -nek α -nál nem nagyobb fokszámu polinomja (α a Tétel feltételében szereplő szám). A 3.4. Tétel szerint tehát $A^n=0$ ha $\alpha < n$.

Felvetődik a kérdés, hogy ha csak a $\mu(A)$ végességét kötjük ki, akkor az A kvázinilpotenciájából következik-e a nilpotenciája? Véges dimenzióban mindig következik, viszont a következő példa mutatja, hogy végtelen dimenzióban a 3.5 Tételben nem elég a $\mu(A)$ végességét megkövetelni.

3.4. <u>Példa.</u> (G. Lumer és R.S. Phillips [20]) Legyen $\mathcal{B}=L^2[0,1]$ és tekintsük a

$$K(x,y)= \min(x,y) - xy = \begin{cases} x(1-y) & \text{, ha} \quad 0\le x \le y \le 1 \\ y(1-x) & \text{, ha} \quad 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

magfüggvényt. Megmutatható, hogy a

$$(\hat{K} f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy \qquad (f \in L^2[0,1])$$

integráloperátor nem negativ (sajátértékei nem negativak) és önadjungált. Tekintsük az

$$(Af)(x) = -(1-x)\int_0^x y f(y)\,dy \qquad (f \in L^2[0,1])$$

Volterra-tipusu operátort, melyre $A+A^*=-\hat{K}$, tehát a

$$\mathrm{Re}\,(Ax,x) = ((\mathrm{Re}\,A)x,x) = \frac{1}{2}(-\hat{K}x,x) \le 0,$$

ahol $(\cdot,\cdot)$ jelöli a L^2 térben a belső szorzatot.

Másrészt a $\{0\} = \sigma(A) \subseteq W(A)$ mindig teljesül (ld. [14]) és igy $\omega(A) = \kappa_s = 0$ erre az A operátorra. A 3.3 Tétel alapján az $\|e^{At}\| \le 1$ $(t \in I_0)$, tehát $\mu(A)=0$. Viszont a $\mu(-A)=0$ nem lehet véges, mert ha az $\|e^{At}\| = O(|t|^\alpha)$ $(\alpha>0,\ t\to-\infty)$, akkor a 3.5 Tétel alapján az e^{Az} z -nek polinomja lenne, mondjuk

m-edfoku, és igy a

$$\lim_{|z|\to\infty} \|z^{-m}F(z)\| > 0$$

teljesülne. Mivel ez pozitiv z -kre is áll, ezért $m = 0$, mert az $m > 0$ esetén $t^{-m}F(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$. Tehát az $F(z)=I$, ahonnan $A = \frac{d(e^{Az})}{dz}\Big|_{z=0} = 0$ lenne. Ami viszont nem igaz. Tehát az a feltevés, hogy a $\mu(-A) < \infty$ nem igaz, vagyis $\mu(A)=+\infty$.

4. fejezet

Kritériumok a második generális kitevő negativitására

Ebben a fejezetben olyan nem stacionárius

(4.1) $$\dot{x} = A(t)x \qquad (x \in \mathcal{B},\ A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}),\ t \in I_1)$$

lineáris differenciálegyenletet vizsgálunk, mely a kritikus esethez tartozik, azaz $\varkappa_g = 0$. A 6. fejezetben megmutatjuk, hogy ha a (4.1) egyenlet m.g.k.-je negativ és az $F(t,x)$ perturbáció "kicsi", akkor az

$$\dot{x} = A(t)x + F(t,x) \qquad (F(t,0) \equiv 0)$$

nem-lineáris egyenlet megoldásai még mindig $t^{-\rho}$ $(\rho > 0)$ nagyságrendben 0 -hoz tartanak, azaz a perturbált egyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis lesz.

Ezért igen fontos, hogy egy (4.1) ealaku lineáris egyenletről el tudjuk dönteni, hogy ha a $\varkappa_g = 0$, akkor a λ_g m.g.k. mikor lesz negativ. Ebben a fejezetben az $A(t)$ operátorfüggvény ill. a (4.1) egyenlet Cauchy operátora segitségével feltételeket adunk erre.

A 4.1 pontban az $A(t) = \frac{A}{t}$ $(A \in \mathcal{L}(\mathcal{B}),\ t \in I_1)$ esetre megmutatjuk, hogy a $\varkappa_g = 0$ és $\lambda_g = \max \operatorname{Re} \sigma(A)$. A 4.2 pontban a (4.1) Cauchy operátora segitségével olyan kritériumokat adunk a $\varkappa_g = 0$ és $\lambda_g < 0$ ra, melyeket a későbbiekben stabilitásvizsgálatra hasunálunk. A 4.3 pontban a (4.1) egyenletet véges dimenzióban és az térben vizsgáljuk és megmutatjuk, hogy ha $t\,A(t)$ vertikálisan diagonálisan domináns, akkor λ_g negativ. A 4.4 pontban megmutatjuk, hogy ha $A(t) = \frac{B(t)}{t}$ és a $B(t)$ kompakt operátorfüggvény ω -limesz operátorainak spektruma a baloldali félsikban fekszik, akkor λ negativ. Végül 4.5-ben általánositjuk K.P. Perszidszkij egy tételét a kritikus esetre.

4.1. Példa olyan lineáris egyenletre, amelyre a $\varkappa_g = 0$ és a $\lambda_g < 0$.

Tekintsük az

$$\dot{x} = \frac{A}{t} x \qquad (x \in \mathcal{B},\ A \in \mathcal{L}(\mathcal{B}),\ t \in I_1) \tag{4.2}$$

lineáris egyenletet, ahol A t-től független operátor. Megmutatjuk, hogy erre az egyenletre $\varkappa_s = \varkappa_g = 0$ és a $\mu = \lambda_g = \max \operatorname{Re} \sigma(A)$, ahol $\sigma(A)$ az A operátor spektruma. A (4.2) egyenlet Cauchy operátora $U(t) = e^{A \ln t} = t^A$ $(t \in I_1)$ és az $U(t,\tau) = e^{A \ln \frac{t}{\tau}}$ $(t \geq \tau \geq 1)$. A 2.1 Lemma alapján kapjuk, hogy a $\varkappa_g = 0$, mert $\int_t^{2t} \frac{\|A\|}{s} ds = \|A\| \ln 2 < \infty$. Viszont a $\varkappa_s = 0$ is teljesül, mert a

$$\varkappa_s = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|e^{A \ln t}\|}{\ln t} \cdot \frac{\ln t}{t}$$

egyenlőségben a $\frac{\ln \| e^s \|}{s}$ korlátos $s > 0$-ra és a $\frac{\ln t}{t} \to 0$ $(t \to \infty)$. Felhasználva az (1.11) összefüggést és a μ definicióját kapjuk, hogy

$$\mu = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \| e^{A \ln t} \|}{\ln t} = \max \operatorname{Re} \sigma(A).$$

A 2.1 Lemma alapján a λ_g véges és igy a 2.2 Tétel szerint

$$\lambda_g = \overline{\lim_{\substack{t/s \to \infty \\ s \to \infty}}} \frac{\ln(\|U(t,s)\| e^{-\varkappa_g (t-s)})}{\ln t - \ln s} = \overline{\lim_{\substack{t/s \to \infty \\ s \to \infty}}} \frac{\ln \| e^{A \ln \frac{t}{s}} \|}{\ln \frac{t}{s}} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \| e^{A\tau} \|}{\tau}$$

és igy a $\mu = \lambda_g = \max \operatorname{Re} \sigma(A)$. Tehát azt kaptuk, hogy ha az operátor spektruma a (nyitott) baloldali félsikban van, akkor a μ és λ_g negativ.

Megemlitjük, hogy ha speciálisan a $\mathcal{B} = C[a,b]$, az $[a,b]$

intervallumon folytonos függvények terét tekintjük és A ebben egy integráloperátor, azaz

$$(A f)(x) = \int_a^b K(x,s) f(s)\,ds \qquad (x \in [a,b], f \in C[a,b]),$$

ahol a $K(x,s): [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}^1$ függvény folytonos, akkor a következők mondhatók.

Tekintsük a $C[a,b]$ térben a következő

$$\frac{d\varphi(x,t)}{dt} = \frac{1}{t}\int_a^b K(x,s)\varphi(s,t)\,ds \qquad (x \in [a,b], t \in I_1) \tag{4.3}$$

integro-differenciálegyenletet, ahol $\varphi_t(s) = \varphi(s,t) \in C[a,b]$ minden fix $t \in I_1$ -re. Mivel a (4.3) egyenlet (4.2) tipusu, a fentiek szerint azt mondhatjuk, hogy a (4.3) integro-differenciálegyenletre a $\varkappa_g = 0$ és ha az A integráloperátor spektruma teljesen a baloldali félsikban fekszik, akkor a λ_g negativ, azaz (4.3) megoldásai $t^{-\varrho}$ $(\varrho > 0)$ nagyságrendben 0 -hoz tartanak.

4.2. <u>A második generális kitevő negativitásának kritériumai a Cauchy operátor segitségével</u>

A kritikus eset első közelitésben való stabilitásvizsgálatában nagy szerepe van a m.g.k. negativitásának. Ezért a következőkben két ekvivalens feltételt adunk arra, hogy a λ_g negativ legyen, ha a $\varkappa_g = 0$. Az első tételt alkalmazzuk a második tétel bizonyitása során és a kompakt operátorfüggvényekkel foglalkozó 4.4 pontban. A második tételt a 6. fejezetben stabilitásvizsgálatra alkalmazzuk.

4.1. <u>Tétel.</u> Legyen a (4.1) egyenletre $\varkappa_g = 0$ és λ_g véges. Ekkor λ_g negativitásának szükséges és elegendő feltétele, hogy létezzenek olyan $T > 1$, $0 < q < 1$ számok, melyekkel teljesül a következő feltétel:

minden $x \in \mathcal{B}$, $t \in I_1$ -hez található olyan $\Theta_{x,t} \in [1,T]$, hogy

$$\|U(t\cdot\Theta_{x,t}, t)x\| \leq q\|x\|.$$

Bizonyitás. Szükségesség. Ha a $\lambda_g < -\varrho < 0$, akkor

$$\|U(tT,t)x\| \leq \|U(tT,t)\|\|x\| \leq N_\varrho T^{-\varrho}\|x\| \qquad (N_\varrho > 0)$$

teljesül a λ_g definiciója alapján és igy ha T elég nagy $(T > N_\varrho^{1/\varrho})$, akkor $N_\varrho T^{-\varrho} < 1$ és igy a Tétel állitásához a $q = N_\varrho T^{-\varrho}$ és $\Theta_{x,t} = T$ választás megfelelő.

Elegendőség. Legyen a $1 \leq t_0 < t < \infty$ tetszőleges. Az $U(\tau,\tau')$ operátor folytonossága miatt van olyan Θ, hogy $\|U(\tau,\tau')\| \leq \frac{1}{q}$ minden $|\tau-\tau'| < \Theta$ és $t_0 \leq \tau, \tau' \leq 2t$ esetén. Tehát van olyan $\Theta' > 0$ $\left(\Theta' = \frac{\Theta}{2t}\right)$, hogy ha $(1-\Theta')\tau' \leq \tau \leq (1+\Theta')\tau'$ teljesül, akkor az $\|U(\tau,\tau')\| \leq 1/q$ $(t_0 \leq \tau, \tau' \leq 2t)$. Ilyen τ, τ' -re és tetszőleges $x \in \mathcal{B}$ -re

$$\|x\| = \|U(\tau,\tau')U(\tau',\tau)x\| \leq \|U(\tau,\tau')\|\,\|U(\tau',\tau)x\| \leq \frac{1}{q}\|U(\tau',\tau)x\|,$$

ahonnan az $\|U(\tau',\tau)x\| \geq q\|x\|$. Vagyis a $\Theta_{x,\tau} > 1+\Theta'$ a feltétel alapján, hacsak a $t_0 \leq \tau < \Theta_{x,t}\tau \leq 2t$. Tehát a $\tau \in [t_0, 2t]$ intervallumon $\Theta_{x,\tau}$ -nak van egynél nagyobb alsó korlátja.

Legyen $x_0 \in \mathcal{B}$ tetszőleges és tekintsük a következő sorozatot $\mathcal{B}$ -ben és I_{t_0}-n:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0\,\Theta_{x_0,t_0} & x_1 &= U(t_1,t_0)x_0 \\ t_2 &= t_1\,\Theta_{x_1,t_1} & x_2 &= U(t_2,t_1)x_1 = U(t_2,t_0)x_0 \\ &\vdots & &\vdots \\ t_{k+1} &= t_k\,\Theta_{x_k,t_k} & x_{k+1} &= U(t_{k+1},t_k)x_k = U(t_{k+1},t_0)x_0 \end{aligned}$$

$(k = 1,2,\ldots)$

Véges m lépésen belül teljesülni fog, hogy a $t_m \leq t < t_{m+1}$

Az $U(t,t_0)x_0 = U(t,t_m)x_m$ egyenlőség és az $\|x_m\| \leq q^m\|x_0\|$

alapján

(4.4) $$\|U(t,t_0)x_0\| \le k\, q^m \|x_0\| ,$$

ahol $k = \sup\limits_{1\le\tau\le t\le T\tau} \|U(t,\tau)\| < \infty$ a λ_g végessége miatt. Mivel a $\Theta_{x_k,t_k} < T$ $(k=0,1,\dots,m+1)$, ezért a

$$t_0\Theta_{x_0,t_0} = \frac{t_2}{\Theta_{x_1,t_1}} = \dots = \frac{t_m}{\Theta_{x_1,t_1}\cdots\Theta_{x_{m-1},t_{m-1}}} = \frac{t_{m+1}}{\Theta_{x_1,t_1}\cdots\Theta_{x_m,t_m}}$$

$$t < t_{m+1} = t_0\Theta_{x_0,t_0}\cdots\Theta_{x_m,t_m} \le t_0\, T^{m+1},$$

azaz $m+1 \ge \frac{1}{\ln T}\ln\frac{t}{t_0}$. Tehát (4.4) alapján

$$\|U(t,t_0)x_0\| \le \frac{k}{q}\, q^{\frac{1}{\ln T}\ln\frac{t}{t_0}} \|x_0\| ,$$

következésképpen, $\|U(t,t_0)x_0\| \le N(t/t_0)^{-\varrho}\|x_0\|$, ahol $N = k/q$, $\varrho = \frac{\ln\frac{1}{q}}{\ln T} > 0$ és igy a λ_g negativ.

4.2. Tétel. Legyen a (4.1) egyenletre $\varkappa_g = 0$, $\lambda_g < \infty$ és a $p>0$ tetszőleges. A $\lambda_g < 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $c>0$ konstans, hogy

(4.5) $$\left\{\int_\tau^\infty \frac{1}{t}\|U(t,\tau)x\|^p dt\right\}^{1/p} \le c\|x\| \qquad (1\le\tau<\infty,\ x\in B)$$

teljesül.

Bizonyitás. Szükségesség. Legyen $\lambda_g < -\varrho < 0$, ekkor az $\|U(t,\tau)x\| \le N_\varrho (t/\tau)^{-\varrho}\|x\|$ teljesül valamilyen $N_\varrho > 0$ -val. Tehát

$$\int_\tau^\infty \frac{1}{t}\|U(t,\tau)x\|^p dt \le \int_\tau^\infty N_\varrho^p \tau^{\varrho p} t^{-p\varrho-1} dt\, \|x\|^p = \frac{N_\varrho^p}{\varrho p}\|x\|^p$$

egyenlőtlenségből következik (4.5).

Az elegendőség bizonyitásához megmutatjuk, hogy ha a 4.1 Tétel feltételei nem teljesülnek, akkor a 4.2 Tétel (4.5) állitása sem teljesülhet semmilyen $c>0$ -val.

Tegyük fel, hogy minden q $(0<q<1)$ és $T>1$ esetén van olyan $x_0\in\mathcal{B}$, $\tau_0\in I_1$, hogy

$$\|U(t,\tau_0)x_0\|>q\|x_0\| \qquad (t\in[\tau_0,\tau_0T]).$$

Ahonnan

$$\int_{\tau_0}^{\infty}\frac{1}{t}\|U(t,\tau_0)x_0\|^p dt\ge\int_{\tau_0}^{\tau_0T}\frac{1}{t}\|U(t,\tau_0)x_0\|^p dt\ge\int_{\tau_0}^{\tau_0T}\frac{q^p}{t}\|x_0\|^p dt=q^p\ln T\|x_0\|^p$$

Ha a q és T olyan nagy, hogy $q^p\ln T>c^p$, akkor a 4.2 Tétel (4.5) feltétele nem teljesül.

4.1. Megjegyzés. Ha a $p\ge 1$, akkor a (4.5) feltétel helyettesithető az egyszerübb

$$\text{(4.6)}\qquad \sup_{\tau\ge 1}\int_{\tau}^{\infty}\frac{1}{t}\|U(t,\tau)x\|^p dt<\infty \qquad (x\in\mathcal{B})$$

feltétellel.

Ugyanis a (4.6) feltétel ekvivalens a következővel:

$$\sup_{\tau\in I_1}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t}\|e_\tau(t)U(t,\tau)x\|^p dt<\infty,$$

ahol $e_\tau(t)$ az I_τ intervallum karakterisztikus függvénye. Ez pedig azt jelenti, hogy az $V_\tau=e_\tau(t)U(t,\tau):\mathcal{B}\to L^p(\mathcal{B})$ operátorcsalád korlátos minden $x\in\mathcal{B}$ -re, ahol az $L^p(\mathcal{B})$ Banach tér elemei olyen mérhető $x(t):I_1\to\mathcal{B}$ függvények, melyekre a norma p -edik hatványa integrálható (Lebesgue szerint). A norma $L^p(\mathcal{B})$ -ben az $|||x|||=\left(\int_1^\infty\|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$. Tehát a Banach-Steinhaus tétel értelmében a V_τ normában is korlátos, ami éppen a (4.5) feltétel.

4.2. Megjegyzés. A 4.1 és 4.2 Tételekben a $\varkappa_g=0$ és a $\lambda_g<0$ helyettesithető az $\int_t^{2t}\|A(s)\|ds<\infty$ $(t\in I_1)$ feltétellel.

4.3. Véges dimenziós egyenlet diagonálisan domináns mátrixszal és a második generális kitevő.

Tekintsük most a (4.1) egyenletet a $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$ dimenziós euklideszi térben, melynek alakja legyen a következő:

$$\dot{x}_i(t) = -p_{ii}(t)x_i(t) + \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} p_{ik}(t)x_k(t) \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{4.7}$$

ahol $p_{ik}(t): I_1 \to R^1$ folytonos függvények.

C. Kohane [21] megmutatta, hogy ha a $p_{kk}(t) - \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} |p_{ik}(t)| \geq \delta > 0$ $(k=1,2,\dots,n)$ feltétel teljesül, akkor a (4.7) egyenlet megoldásai $e^{-\delta t}$ nagyságrendben tartanak 0 -hoz, $t\to\infty$ esetén. Azaz a (4.7) egyenlet $\varkappa_g$ e.g.k. negativ.

Mi most megmutatjuk, hogy ha a (4.7) egyenletben szereplő együtthatókra csak a

$$t\, p_{kk}(t) - \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} t\, |p_{ik}(t)| \geq \delta > 0 \qquad (t \in I_1 \tag{4.8}$$

feltétel teljesül, akkor a megoldások $t^{-\delta}$ nagyságrendben tartanak 0 -hoz, $t\to\infty$ esetén. (A (4.8) feltétel azt jelenti, hogy a $tA(t)$ mátrix vertikálisan diagonálisan domináns.)

Ennek bizonyitását arra a speciális esetre való visszavezetéssel igazoljuk, amikor minden $p_{ik}(t)$ nem negativ. Ebben a speciális esetben, ha az $x_i(1)>0$, akkor a (4.7) $x_i(t)$ megoldása is pozitiv $t\in I_1$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Ugyanis ha valamely j indexre az x_j megoldás nem lenne pozitiv, akkor lenne olyan $t_0>1$ időpont, hogy az $x_j(t_0)=0$ és az $x_i(t)>0$, ha $t\in[1,t_0)$ és $i=1,2,\dots,n$. Mivel a $p_{ik}(t)$ -k nem negativak

$$\dot{x}_i + p_{ii}(t)x_i \geq 0 \qquad (t\in[1,t_0],\ i=1,\dots,n).$$

Amelyből kapjuk, hogy az

$$x_i(t) \geq x_i(1)\exp\Big(-\int_1^t p_{ii}(\tau)d\tau\Big) \qquad (t\in[1,t_0],\ i=1,2,\dots,n),$$

ahonnan $x_j(t_0)>0$, a feltétellel ellentmondásban. Ez tehát azt jelenti, hogy minden $x_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ függvény pozitiv minden $t\in I_1$ -re. Ha az $x_i(1)\geq 0$ teljesül csak, akkor vegyük az $x_i(1)+\varepsilon$ pontból kiinduló megoldást $(\varepsilon>0)$, majd $\varepsilon\to 0$ esetén kapjuk, hogy $x_i(t)\geq 0$ $(t\in I_1,\ i=1,\dots,n)$.

Ezek után adjuk össze a (4.7) egyenleteket és használjuk fel a (4.8) feltételt, kapjuk hogy

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\Big) = -\sum_{k=1}^{n}\Big[p_{kk}(t)-\sum_{i\neq k} p_{ik}(t)\Big]x_k(t) \leq -\frac{\delta}{t}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\Big),$$

mivel az $x_i(t)\geq 0$ $(t\in I_1,\ i=1,2,\dots,n)$. Megoldva ezt a differenciálegyenlőtlenséget kapjuk, hogy a $\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\Big] \leq \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{-\delta}\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i(\tau)\Big]$ $(t\geq \tau\geq 1)$. Ha a $\mathcal{B}=R^n$ térben az $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ normát tekintjük, akkor a fenti egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy a (4.7) egyenletre a m.g.k. negativ, ebben a speciális esetben.

Legyenek a $p_{ik}(t)$ függvények és az $x_i(1)$ kezdeti értékek tetszőleges előjelüek és legyen a (4.7) megoldása $x_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$. Legyen $z(t)=(z_1(t),\dots,z_n(t))$ megoldása a

(4.9) $$\dot{z}_j = -p_{jj}(t)z_j + \sum_{k=1,k\neq j}^{n}|p_{jk}(t)|z_k \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

differenciálegyenletnek a $z_j(1)=|x_j(1)|$ kezdeti feltétellel. Megmutatjuk, hogy az

(4.10) $$|x_j(t)| \leq z_j(t) \qquad (t\in I_1).$$

Könnyü látni, hogy a $z_j(t)$ -k kielégitik az

$$z_j(t) = |x_j(1)|\exp\Big(-\int_1^t p_{jj}(\tau)d\tau\Big) + \int_1^t \exp\Big(-\int_s^t p_{jj}(\tau)d\tau\Big)\Big[\sum_{k\neq j}|p_{jk}(s)|\,z_k(s)\Big]ds$$

integrálegyenletet. A (4.7) egyenletből kapjuk, hogy az $x_j(t)$ függvények kielégitik az

$$|x_j(t)| \le |x_j(1)| \exp\left(-\int_1^t p_{jj}(\tau)d\tau\right) + \int_1^t \exp\left(-\int_s^t p_{jj}(\tau)d\tau\right)\left[\sum_{k\neq j} |p_{jk}(s)|\,|x_k(s)|\right]ds$$

integrálegyenlőtlenséget. Az 1.1 Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy a (4.10) egyenlőtlenség fennáll.

Mivel a (4.9) rendszer együtthatói és a kezdeti feltételek is nemnegativak, ezért az előbbiek szerint a

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(t) \le t^{-\rho}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(1)|\right) \qquad (t\in I_1).$$

A (4.10) egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy a

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j(t)| \le t^{-\rho}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(1)|\right) \qquad (t\in I_1).$$

A $\tau = 1$ kezdeti feltétel helyett tetszőleges $\tau \in I_1$ -re megismételve a fenti gondolatmenetet kapjuk, hogy a (4.7) egyenlet λ_g m.g.k.-je negativ, feltéve, hogy $\varkappa_g = 0$.

4.3. Megjegyzés. A fenti állitás kiterjeszthető a $\mathcal{B} = \ell^1$ térben felirt

$$\dot{x}_j(t) = -p_{jj}(t)\,x_j + \sum_{k=1,\,k\neq j}^{\infty} p_{jk}(t)\,x_k \qquad (j = 1,2,\dots) \tag{4.11}$$

végtelen differenciálegyenletrendszerekre is (ld. [22]), amikor a (4.11) egyenlet megoldásai approximálhatók (4.7) alaku véges rendszerek megoldásaival.

4.4. Kompakt operátorfüggvények és a második generális kitevő

Ebben a pontban az

$$\dot{x} = \frac{A(t)}{t}\,x \qquad (t\in I_1,\ A(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{B}),\ x\in\mathcal{B}) \tag{4.12}$$

alaku lineáris differenciálegyenleteket olyan $A(t)$ operátorfüggvény mellett tekintjük, melyre az $\{A(t) : t\in I_1\}$ operátorcsalád lezártja az operátor normára nézve kompakt lesz az $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ Banach algebrában. Megmutatjuk, hogy ha az $A(t)$ olyan kompakt operátorfüggvény, hogy a ω -limesz operátorainak spektruma a $\mathrm{Re}\,\lambda \leq -\nu_0$ $(\nu_0 > 0)$ félsikban fekszik és az $A(t)$ még további feltételnek is eleget tesz, akkor a (4.12) egyenletre a λ_g negativ lesz.

Igy ujabb feltételeket nyerünk arra vonatkozóan, hogy egy (4.1) alaku egyenletre a $\varkappa_g = 0$ és $\lambda_g < 0$ mikor teljesül.

A bizonyitás technikájában felhasználjuk a "befagyasztási" elvet (ld [10]).

Mindenekelőtt néhány seégdállitást vezetünk le és megadjuk a szükséges fogalmakat.

4.1. Definició. Azt mondjuk, hogy a $\Gamma \subset \mathcal{L}(B)$ operátorok halmaza önmagában kompakt (röviden kompakt), ha minden $A_n \in \Gamma$ $(n = 1, 2, \dots)$ sorozatnak van olyan A_{n_k} részsorozata, mely operátornormában egy Γ -beli operátorhoz konvergál.

4.1. Lemma. Legyen $\Gamma \subset \mathcal{L}(B)$ önmagában kompakt és $G\ (\subset \mathbb{C})$ nyitott halmaz, mely lefedi Γ elemeinek spektrumát. Ekkor

i) az $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ rezolvens operátor egyenletesen korlátos $\lambda \notin G$ és minden $A \in \Gamma$ -ra;

ii) létezik olyan $F\ (\subset G)$ zárt halmaz, mely minden Γ -beli operátor spektrumát lefedi.

Bizonyitás. i) Tegyük fel, hogy nem igaz az állitás, tehát van olyan λ_n, A_n, hogy $\lambda_n \notin G$ és $A_n \in \Gamma$-ra az

(4.13) $$\|R_{\lambda_n}(A_n)\| \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy az $A_n \Rightarrow A \in \Gamma$ és igy $\sigma(A) \subset G$, tehát $\|R_\lambda(A)\| \leq M$ minden $\lambda \notin G$.
Az $A_n \Rightarrow A$ alapján az $\|R_\lambda(A_n)\| \to \|R_\lambda(A)\|$ $(n \to \infty)$

(ld. [4]) és igy az

$$R_{\lambda_n}(A_n) = [A-\lambda_n I + (A-A_n)]^{-1} = [I - R_{\lambda_n}(A)(A-A_n)]^{-1} R_{\lambda_n}(A).$$

Legyen n_0 olyan index, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $\|A-A_n\| < \frac{M}{2}$, tehát $\|R_{\lambda_n}(A)(A-A_n)\| \leq \frac{1}{2}$ alapján az $\|I - R_{\lambda_n}(A)(A-A_n)\| = = \left[\sum_{k=0}^{\infty} R_{\lambda_n}(A)(A-A_n)\right]^k$ sor konvergens. Ahonnan következik, hogy ez a sor korlátos is $n \geq n_0$ -ra, ami ellentmond a (4.13) feltevésnek.

ii) Először is megjegyezzük, hogy az $S = \bigcup_{A\in\Gamma} \{\sigma(A)\}$ halmaz a komplex sikon korlátos. Ugyanis, ha lenne olyan $A_n \in \Gamma$ és $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ sorozat, hogy $|\lambda_n| \to \infty$, akkor az $A_n \Rightarrow A \in \Gamma$ alapján a $\sigma(A)$ körüli elég nagy sugaru körben minden $\sigma(A_n)$ benne van. Ami ellentmond annak, hogy $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ és $|\lambda_n| \to \infty$. Tehát S valóban korlátos.

Az állitás igazolásához elegendő megmutatni, hogy a $\rho(CG, S) = \delta > 0$, azaz a G halmaz CG komplementerének és az S halmaznak a távolsága pozitiv. És igy F -t az S és CG "között" lehet választani. Ennek igazolásához tegyük fel, hogy $\delta = 0$, azaz van olyan $A_n \in \Gamma$ és $\lambda_n \in \sigma(A_n)$, hogy $\lambda_n \to \lambda \in \partial G$ (∂G a G határa). Feltehető, hogy $A_n \Rightarrow A$ $(A \in \Gamma)$. De ekkor a $\sigma(A)$ -t lefedi a G nyitott halmaz és a $\sigma(A)$ elég kicsi környezete is benne van G -ben. Viszont a $\sigma(A_n)$ elég nagy n indextől kezdve ebbe a kijelölt környezetbe esik, mert $A_n \Rightarrow A$, ami ellentmond annak, hogy a $\sigma(A_n) \ni \lambda_n \to \lambda \in \partial G$. Tehát a δ valóban pozitiv.

4.2. <u>Lemma. Legyen</u> $\Gamma \subset \mathcal{L}(B)$ <u>önmagában kompakt és tegyük fel, hogy az</u> $S = \bigcup_{A\in\Gamma}\{\sigma(A)\}$ <u>halmaz a</u> $\mathrm{Re}\,\lambda < -\nu_0$ <u>nyilt félsikban van</u> $(\nu_0 > 0)$.

Ekkor a

$$\|t^A\| = \|e^{A \ln t}\| \leq k_0 t^{-\nu_0} \qquad (t \in I_1, A \in \Gamma).$$

Bizonyitás: A 4.1 Lemma ii) részében láttuk, hogy a $\mathrm{Re}\,\lambda < -\nu_0$ nyitott félsikban van olyan F zárt halmaz, melynek határa egy C egyszerü zárt görbe, amelyre az S a C belsejében van. Mivel a $C \subset \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda < -\nu_0\}$ ezért a 4.1 Lemma i) állitása szerint $\|R_\lambda(A)\| \leq K$, ha $\lambda \in C$. Az A operátor t^A függvényét a következő alakban irhatjuk (ld. [4])

$$e^{A \ln t} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\lambda \ln t} R_\lambda(A)\, d\lambda,$$

ahonnan következik, hogy

$$\|e^{A \ln t}\| \leq \frac{K}{2\pi} \ell\, t^{-\nu_0} \qquad (t \in I_1, A \in \Gamma),$$

ahol ℓ a C görbe hossza.

4.2. Definició. Azt mondjuk, hogy az $A : I_1 \to \mathcal{L}(B)$ operátorfüggvény kompakt, ha a $\Gamma = \{A(t) : t \in I_1\} \subset \mathcal{L}(B)$ lezártja önmagában kompakt, azaz minden $\{A(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválaszthatunk egy konvergens részsorozatot, mely $\mathcal{L}(B)$ egy eleméhez konvergál.

Ha pl. az $A(t)$ folytonos, akkor véges intervallumon az $A(t)$ kompakt.

4.3. Definició. A $C \in \mathcal{L}(B)$ operátort az $A : I_1 \to \mathcal{L}(B)$ operátorfüggvény ω -limeszoperátorának nevezzük, ha van olyan $t_n \to \infty$ sorozat, hogy $A(t_n) \Rightarrow C \quad (n \to \infty)$.

Legyen most $\Gamma = \{C\}$ az A kompakt operátorfüggvény ω - limeszoperátorainak halmaza. Mivel Γ zárt és része az $\{A(t)\} \cup \Gamma$ kompakt halmaznak, ezért a Γ kompakt.

4.3. Lemma. Tegyük fel, hogy az $A(t)$ kompakt operátorfüggvény ω -limeszoperátorainak spektruma a $\mathrm{Re}\,\lambda < -\nu_0 \quad (\nu_0 > 0)$ félsikban van.

Ekkor van olyan $T > 1$, hogy ha $t > T$, akkor

$$\|e^{A(t)\ln\tau}\| \leq N_0\tau^{-\nu_0} \qquad (N_0>0,\ \tau\in I_1).$$

Bizonyitás. Meg kell mutatni, hogy ha a T elég nagy, akkor az

$$\{A(t):\ t\geq T\}\cup\Gamma\subset\mathcal{L}(B)$$

kompakt halmaz elemeinek spektruma a $\mathrm{Re}\,\lambda<-\nu_0$ félsikban van (ahol Γ az $A(t)$ ω-limeszoperátorainak halmaza), mert akkor az állitás a 4.2 Lemmából folyik. Mivel a Γ elemeire ez teljesül, ezért csak azt kell belátni, hogy a $\bigcup_{t\geq T}\sigma(A(t))$ halmaz a $\mathrm{Re}\,\lambda<-\nu_0$ félsikban van elég nagy T-re. Tegyük fel, hogy ez nem igaz egyetlen $T>1$ számmal se, azaz van olyan $t_n\to\infty$ sorozat, hogy minden $\sigma(A(t_n))$-nek van a $\mathrm{Re}\,\lambda<-\nu_0$ félsikon kivül pontja. Feltehetjük, hogy $A(t_n)\Rightarrow C\in\Gamma$ $(n\to\infty)$. és a feltevés szerint $\sigma(C)$ a $\mathrm{Re}\,\lambda<-\nu_0$-ban fekszik, ezért $\sigma(A(t_n))$ is, elég nagy n-re, ebbe a félsikba esik. A kapott ellentmondás az állitást igazolja.

Ahhoz, hogy egy kompakt $A(t)$ operátorfüggvénnyel a (4.12) egyenlet λ_g m.g.k.-je negativ legyen, az $A(t)$-ről további feltételeket is ki kell kötnünk. Ezért hasznos lesz a következő

4.4. Definició. Legyen $\varepsilon>0$, $L>1$. Azt mondjuk, hogy az $A(t)$ operátorfüggvény kielégiti az $F_{\varepsilon,L}$ feltételt, vagy $A(t)\in F_{\varepsilon,L}$, ha van olyan $T>1$, hogy minden $t,s\geq T$ és $1/L\leq t/s\leq L$ esetén teljesül az $\|A(t)-A(s)\|<\varepsilon$ egyenlőtlenség.

Nézzünk néhány példát olyan $A(t)$ operátorfüggvényre, melyek kielégitik az $F_{\varepsilon,L}$ feltételt, valamely adott $\varepsilon>0$ és $L>1$-gyel.

1) Ha elég nagy t-re az

$$\|A(t)-A_0\|<\varepsilon/2 \qquad (A_0\in\mathcal{L}(B))$$

akkor $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$ tetszőleges $L>1$-gyel.

2) Ha létezik az $A(t)$ differenciálhányadosa és a $t\|A'(t)\| < \frac{\varepsilon}{\ln L}$ elég nagy t-kre, akkor $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$.

Ugyanis, ha t,s elég nagy és $1/L \le t/s \le L$, akkor

$$\|A(t)-A(s)\| = \|\int_s^t A'(\tau)d\tau\| = \|\int_s^t \tau A'(\tau)\frac{1}{\tau}d\tau \le \frac{\varepsilon}{\ln L}\left|\ln\frac{t}{s}\right| < \varepsilon$$

Az 1) és 2) esetek nyilván nem fedik le egymást pl. $A(t) = \sin \ln \ln t$ függvényre az 1) nem teljesül míg a 2) igen.

Az 1) és 2) alapján, ha az $A(t)$ operátorfüggvénynek $t \to \infty$ esetén létezik a limesze, vagy ha létezik az $A'(t)$ és $\lim_{t\to\infty} tA'(t) = 0$, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $L>1$, hogy $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$.

Ezek után tekintsük az

$$\dot{x} = \frac{A(t)}{t}x \qquad (t \in I_1,\ x \in B) \tag{4.12}$$

egyenletet kompakt $A(t)$ operátorfüggvénnyel. Feltételt adunk arra, hogy a (4.12) egyenlet λ_g m.g.k.-je negativ legyen.

4.3. Tétel. Legyen az $A(t): I_1 \to \mathcal{L}(B)$ operátorfüggvény kompakt és az ω-limesz operátorainak spektruma pedig a $\mathrm{Re}\,\lambda < -\nu_0$ $(\nu_0>0)$ félsikban. (Ekkor a 4.3 Lemma alapján van olyan $T>1$, $N_0>0$, hogy $\|e^{A(t)\ln\tau}\| \le N_0\tau^{-\nu_0}$, $\tau \in I_1$).

Ha az $A(t)$ kielégiti még az $F_{\varepsilon,L}$ feltételt elég kicsi $\varepsilon>0$-val $(\varepsilon < \frac{\nu_0}{N_0})$ és elég nagy $L>1$-gyel $(L > N_0^{1/(\nu_0 - N_0\varepsilon)})$, akkor a (4.12) egyenlet λ_g m.g.k.-je negativ.

4.4. Megjegyzés. A (4.12) egyenletre a $\kappa_g = 0$, mert az $A(t)$ kompaktságából következik korlátossága és igy a $t\frac{\|A(t)\|}{t} \le K$ $(t \in I_1)$ (ld. 2.1 Lemma).

Bizonyitás. Az $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$ és igy ha τ elég nagy, akkor

$$\|A(t)-A(\tau)\| < \varepsilon \qquad (\tau \le t \le \tau L).$$

Válasszunk egy ilyen τ számot, majd fixáljuk le.

Tekintsük az

$$(4.13) \qquad \dot{x} = \frac{A(\tau)}{t} x$$

$$(4.14) \qquad \dot{y} = \frac{A(t)}{t} xy \qquad (\tau \le t \le \tau L)$$

differenciálegyenletet ("befagyasztási" elv). Mivel a (4.13) egyenlet Cauchy operátora $e^{A(\tau)\ln t}$, ezért az $U_1(t,s) = e^{A(\tau)\ln\frac{t}{s}}$ operátorra a 4.3 Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|e^{A(\tau)\ln\frac{t}{s}}\| \le N_0\left(\frac{t}{s}\right)^{-\nu_0} \qquad (\tau \le s \le t)$$

Az 1.4 Lemma felhasználásával kapjuk a következő becslést a (4.14) egyenlet $U(t,s)$ operátorára:

$$\|U(t,s)\| \le N_0\left(\frac{t}{s}\right)^{-\nu_0} e^{N_0\int_s^t \frac{\|A(\tau)-A(u)\|}{u}du} \le N_0\left(\frac{t}{s}\right)^{-\nu} \quad (\tau \le s \le t \le \tau L),$$

ahol $\nu = \nu_0 - N_0\varepsilon > 0$ a feltevésünk alapján. Legyen most $s = \tau$ és $t = \tau L$, így

$$\|U(\tau, \tau L)\| \le N_0 L^{-\nu} = q$$

A $q < 1$ teljesül, mert az $L > N_0 L^{1/\nu}$. Tehát a 4.1 Tétel feltételei teljesülnek ($\Theta_{x,t} = L$ és a fenti q-val) elég nagy t-re, mert az $A(t)$ korlátosságából és a 2.1 Lemmából a $\varkappa_g = 0$ és λ_g végessége következik. Következésképpen a 4.1 Tételből kapjuk, hogy a (4.12) egyenlet m.g.k.-je negativ.

Igaz a 4.3 Tétel következő megfordítása is.

<u>4.4. Tétel. Legyen az</u> $A(t)$ <u>kompakt operátorfüggvény és tegyük fel, hogy az</u>

$$(4.12) \qquad \dot{x} = \frac{A(t)}{t} x \qquad (t \in I_1, x \in \mathcal{B})$$

<u>egyenlet</u> λ_g <u>m.g.k.-je negativ.</u> (Mivel a $\varkappa_g = 0$, ezért vannak

olyan ρ, N_ρ pozitiv számok, hogy $\|U(t,\tau)\| \le N_\rho (t/\tau)^{-\rho}$ $(t \ge \tau \ge 1)$.)

Ha az $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$ elég kicsi $\varepsilon > 0$ és elég nagy $L > 1$ számmal, $(\varepsilon < \frac{\rho}{N_\rho}; L > N_\rho^{1/(\rho - N_\rho \varepsilon)})$ akkor az $A(t)$ ω-limeszoperátorainak spektruma valamely $Re\,\lambda \le -\nu_0$ $(\nu_0 > 0)$ félsikban van.

Bizonyitás. Legyen $C \in \mathcal{L}(B)$ az $A(t)$ ω-limeszoperátora, akkor van olyan $t_n \to \infty$ sorozat, hogy $A(t_n) \Rightarrow C$ $(n \to \infty)$. Tehát bármely $\delta > 0$-hoz ha az n elég nagy, akkor az

$$\|A(t_n) - C\| < \delta$$

Mivel $A(t) \in F_{\varepsilon,L}$, ezért ha t_n elég nagy, akkor

$$\|A(t_n) - A(t)\| \le \varepsilon \qquad (t_n \le t \le t_n L).$$

Tehát a $\|C - A(t)\| < \varepsilon + \delta$, ha a $t_n \le t \le L t_n$ és az n elég nagy. Alkalmazva az 1.4 Lemmát a (4.12) és az

$$\dot{x} = \frac{C}{t} x \qquad (t \in I_1, x \in B)$$

egyenletre, melyre az $U_1(t,\tau) = e^{C \ln \frac{t}{\tau}}$, kapjuk az

$$\|e^{C \ln \frac{t}{\tau}}\| \le N_\rho \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\rho} \exp\left(N_\rho \int_\tau^t \frac{\|C - A(s)\|}{s} ds\right)$$

egyenlőtlenséget. Legyen most $\tau = t_n$ és $t = L t_n$, igy

$$\|e^{C \ln L}\| \le N_\rho e^{\{-\rho + N_\rho(\varepsilon + \delta)\} \ln L}.$$

Az (1.11) egyenlőség értelmében a

$$\max Re\,\sigma(C) = \inf_{t>0} \frac{\ln\|e^{Ct}\|}{t} \le \frac{\ln\|e^{C \ln L}\|}{\ln L} \le -\rho + N_\rho(\varepsilon+\delta) + \frac{\ln N_\rho}{\ln L} = -\nu_0,$$

ahonnan az ε, L választása alapján $\rho - N_\rho \varepsilon - \frac{\ln N_\rho}{\ln L} > 0$, ezért ha a δ elég kicsi, akkor a $\nu_0 = \rho - N_\rho(\varepsilon + \delta) - \frac{\ln N_\rho}{\ln L} > 0$ és C-től független. Tehát a $\sigma(C)$ minden C-re valóban a $Re\,\lambda \le -\nu_0$ félsikban van.

A fenti két tétel és az $F_{\varepsilon,L}$ operátorosztályról mondottak értelmében kapjuk az alábbi állitásokat.

4.1. Következmény. i) Ha az $A(t)$ folytonos operátorfüggvényre létezik a $\lim_{t\to\infty} A(t) = A$ határérték, akkor az A operátor spektruma a baloldali félsikban fekszik akkor és csakis akkor, ha a (4.12) egyenletre λ_g negativ;

ii) Ha létezik az $A(t)$ differenciálhányados függvénye $(A'(t))$ és a $\lim_{t\to\infty} tA'(t) = 0$, akkor az $A(t)$ ω-limesz operátorainak spektruma a baloldali félsikban fekszik akkor és csakis akkor, ha a (4.12) egyenletre a λ_g negativ.

4.5. Az inhomogén egyenlet megoldásainak korlátossága és a második generális kitevő

Ebben a pontban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az

(4.15) $$\dot{x} = A(t)x + f(t) \qquad (t \in I_1, A(t) \in \mathcal{L}(B), f \in C(B))$$

inhomogén egyenlet $x(1)=0$ megoldása milyen $f(t): I_1 \to B$ folytonos függvény mellett lesz korlátos, ha az

(4.16) $$\dot{x} = A(t)x$$

homogén egyenlet a kritikus esethez tartozik.

Megmutatjuk, hogy ha az $\int_t^{2t} \|A(s)\|\,ds \le K < \infty$ $(t \in I_1)$, akkor a (4.16) egyenlet λ_g m.g.k.-je negativ akkor és csakis akkor, ha a (4.15) egyenlet $x(1)=0$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása korlátos, minden $t\|f(t)\| \le M$ $(t \in I_1)$ feltételnek eleget tevő folytonos $f(t)$ függvényre.

Ez az eredmény általánositja K.P. Perszidszkij egy ismert tételét (ld. [4]) a kritikus esetre, mely tétel a következőképpen szól: Legyen $A(t)$ integrálisan korlátos, azaz $\int_t^{t+1} \|A(s)\|\,ds \le K$. Ahhoz, hogy a (4.15) egyenlet $x(1)=0$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása korlátos legyen minden folytonos és korlátos $f: I_1 \to B$ függvény mellett, szükséges és elegendő, hogy a (4.16) egyenletre a $\varkappa_g$ negativ legyen.

Jelölje most $U(t)$ a (4.16) egyenlet azon Cauchy operátorát, melyre $U(1)=I$.

4.5. Tétel. Ha a (4.15) egyenlet

(4.17) $$x(1)=0$$

kezdeti feltételt kielégitő megoldása korlátos minden $t\|f(t)\| \leq K$ $(t\in I_1)$ feltételnek eleget tevő folytonos $f(t)$ függvényre, akkor létezik olyan N és ρ pozitiv szám, hogy

(4.18) $$\|U(t)\| \leq N t^{-\rho} \qquad (t\in I_1).$$

Továbbá, ha a (4.15) egyenletre a fenti feltételek teljesülnek, akkor a (4.15) egyenlet minden megoldása korlátos lesz.

Bizonyitás. Definiáljuk a folytonos függvények következő alterét

$$\tilde{C}(\mathcal{B})=\{f(t): f: I_1\to\mathcal{B} \text{ folyt. } \& \ t\|f(t)\|\leq K \ (t\in I_1)\}.$$

Könnyü látni, hogy $\tilde{C}(\mathcal{B})$ az $|||f||| = \sup_{t\in I_1} t\|f(t)\|$ normával ellátva Banach tér. A (4.15) - (4.17) Cauchy feladat megoldása az

$$x(t)=\int_1^t U(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (t\in I_1).$$

Mivel az

$$\|x(t)\| \leq \left(\int_1^t \frac{\|U(t,\tau)\|}{\tau}\,d\tau\right)|||f|||,$$

ezért a $V_t f=\int_1^t U(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$ operátor, mely $\tilde{C}(\mathcal{B})$ térből a $\mathcal{B}$ térbe hat, korlátos lineáris operátor minden fix $t\in I_1$-re. A Tétel feltétele szerint a $\{V_t : t\in I_1\}$ operátorcsalád t -ben egyenletesen korlátos minden fix $f\in\tilde{C}(\mathcal{B})$-re. A Banach-Steinhaus tétel értelmében létezik olyan t és f -től független $k>0$, hogy

(4.19) $$\|x(t)\| \leq \|V_t f\| \leq k|||f||| \qquad (t\in I_1).$$

Legyen $x(t)=\|U(t)\|$ és $f(t)=\dfrac{U(t)y}{t\,x(t)}$, ahol $y\in B$. Az $f\in \tilde{C}(B)$, mert $|||f|||\leq\|y\|<\infty$ és ezzel az $f(t)$ függvénnyel a (4.15) - (4.17) Cauchy feladat megoldása

(4.20) $$x(t)=\int_1^t U(t,\tau)\frac{U(\tau)y}{\tau\, x(\tau)}\,d\tau = U(t)\,y\cdot\varphi(t)$$

alaku, ahol $\varphi(t)=\int_1^t \frac{d\tau}{\tau x(\tau)}$. A (4.19) és (4.20) relációk alapján

$$\|U(t)y\|\,\varphi(t)\leq k|||f|||\leq k\|y\| \qquad (y\in B,\ t\in I_1),$$

következésképpen

(4.21) $$\frac{1}{t\varphi'(t)}=x(t)=\sup\frac{\|U(t)y\|}{\|y\|}\leq\frac{k}{\varphi(t)}.$$

Ahonnan a

(4.22) $$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\geq\frac{1}{k}\,\frac{1}{t}$$

egyenlőtlenség következik, melyet integrálva 2-től t -ig

(4.23) $$\varphi(t)\geq\frac{\varphi(2)}{2^{1/k}}\,t^{1/k}.$$

A (4.21), (4.22) és (4.23) összefüggésekből

$$\frac{1}{t\,x(t)}=\varphi'(t)\geq\frac{1}{k}\,\frac{\varphi(t)}{t}\geq\frac{\varphi(2)}{k\,2^{1/k}}\cdot\frac{t^{1/k}}{t} \qquad (t\geq 2).$$

Ami azt jelenti, hogy

$$\|U(t)\|=x(t)\leq N t^{-\rho} \qquad (t\in I_1),$$

ahol $\rho=1/k>0$, $N=\max\left(\dfrac{2^{1/k}k}{\varphi(2)},\ \max\limits_{1\leq t\leq 2} t^{\rho}\|U(t)\|\right)$.

A Tétel utolsó állításának bizonyításához legyen $0\neq x_0\in B$, ekkor a (4.15) egyenlet $x(1)=x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$x(t)=U(t)x_0+\int_1^t U(t,s)\,f(s)\,ds.$$

A (4.18) egyenlőtlenség alapján következik, hogy az $x(t)$ korlátos.

Tekintsünk most olyan $A(t)$ operátor függvényt, amelyre teljesül az

(4.24) $$\int_t^{2t} \|A(s)\|\,ds \leq K < \infty \qquad (t \in I_1).$$

Ebben az esetben többet tudunk mondani, mint a 4.5 Tételben. Megmutatjuk, hogy igaz a következő

4.6. Tétel. Tegyük fel, hogy teljesül (4.24). Ahhoz, hogy a (4.15) - (4.17) Cauchy feladat megoldása korlátos legyen az I_1 -n, minden olyan folytonos $f(t)$ függvényre, melyre a $t\,f(t)$ függvény az I_1 -n korlátos, szükséges és elegendő, hogy a (4.16) egyenlet második generális kitevője negativ legyen.

4.5. Megjegyzés. Mint láttuk, a (4.24) feltétel biztositja, hogy a $\varkappa_g = 0$ legyen, azaz a (4.16) egyenlet a kritikus esethez tartozzék. És igy K.P. Perszidszkij tételéből következik, hogy a (4.15) - (4.17) Cauchy feladat megoldása nem lehet korlátos minden folytonos és korlátos $f(t)$ -re. Ugyanis, ha korlátos lenne, akkor az

$$\int_t^{t+1} \|A(s)\|\,ds \leq \int_t^{2t} \|A(s)\|\,ds \leq K \qquad (t \in I_1)$$

egyenlőtlenség alapján a (4.16) egyenlet integrálisan korlátos és igy K.P. Perszidszkij tételéből következne, hogy a (4.16) egyenlet első generális kitevője negativ.

Bizonyitás. Elegendőség. Legyen $\lambda_g < -\rho < 0$, ekkor van olyan $N_\rho > 0$, hogy az

$$\|U(t,\tau)\| \leq N_\rho \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\rho} \qquad (t \geq \tau \geq 1),$$

ahonnan következik, hogy

$$\Big\| \int_1^t U(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \Big\| \le |||f||| \int_1^t \frac{\|U(t,\tau)\|}{\tau}\, d\tau \le |||f|||\, N_\varrho \int_1^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\varrho} \frac{d\tau}{\tau} \le \frac{N_\varrho}{\varrho} |||f|||$$

minden $t \in I_1$ -re.

Szükségesség. Először is megmutatjuk, hogy ha minden $f \in \tilde{C}(B)$ -re a (4.15) - (4.17) Cauchy feladat megoldása korlátos, akkor szintén korlátos az

(4.25)
$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \qquad (t \in I_{t_0})$$

Cauchy feladat megoldása is $(t_0 \in I_1)$.

Folytassuk az $f(t)$ függvényt a t_0 -tól balra 0 -val, azaz legyen

(4.26)
$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & t \ge t_0 \\ 0 & 1 \le t < t_0 \end{cases} .$$

És igy a (4.25) feladat megoldását ugy tekinthetjükm mint a (4.15) - (4.17) feladat megoldását a (4.26) szabad taggal. Előfordulhat természetesen, hogy az $f^*(t)$ nem lesz folytonos, ezért tekintsük előbb a következő (4.15) - (4.17) tipusu feladatot:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A(t)x_\varepsilon + f_\varepsilon(t) \\ x_\varepsilon(1) = 0 \end{cases} ,$$

ahol az

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 - \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} f(t_0)(t - t_0 + \varepsilon) & t_0 - \varepsilon \le t < t_0 \\ f(t_0) & t_0 \le t \end{cases}$$

függvény folytonos. A fenti egyenlet megoldása

$$x_\varepsilon(t) = \int_1^t U(t,\tau) f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} U(t,\tau) f_\varepsilon(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} U(t,\tau) f(\tau)\, d\tau .$$

Hasonlóan mint a 4.5 Tétel bizonyitásánál láttuk, van olyan $k > 0$, hogy

$$\| x_\varepsilon(t) \| \le k |||f_\varepsilon||| = k |||f||| .$$

Legyen t fix és $\varepsilon \to 0$ esetén az első integrál normában 0 -hoz tart és igy $x_\varepsilon(t) \to x(t)$, tehát

$$\|x(t)\| \le k \||f|\| .$$

Vagyis a (4.25) feladat megoldása is korlátos.

Válasszuk most a (4.25) feladatban szereplő szabad tagot $f(t) = U(t,t_0)y/t\varkappa(t)$ -nek, ahol $\varkappa(t) = \|U(t,t_0)\|$, $y \in \mathcal{B}$. Megismételve a 4.5 Tételben mondottakat kapjuk, hogy

$$\|U(t,t_0)\| \le N\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\rho} \qquad (t \ge t_0 \ge 1),$$

ahol $N \ge \max\left\{ \frac{2^{1/k}k}{\varphi(2t_0)} , \max_{1 \le t/t_0 \le 2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\rho} \|U(t,t_0)\| \right\}$, $\rho = 1/k$ és $\varphi(2t_0) = \int_{t_0}^{2t_0} \frac{ds}{s\varkappa(s)}$.

Ahhoz, hogy bebizonyitsuk a m.g.k. negativitását, be kell látni, hogy az N választható a t_0 -tól függetlenül.

Mivel a

$$\varkappa(s) = \|U(s,t_0)\| \le e^{\int_{t_0}^{s} \|A(\tau)\| d\tau} \le e^{K},$$

ahol $t_0 \le s \le 2t_0$ és igy

$$\varphi(2t_0) = \int_{t_0}^{2t_0} \frac{ds}{s\varkappa(s)} \ge e^{-K} \ln 2 ,$$

továbbá

$$\max_{1 \le t/t_0 \le 1} \left\{ \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\rho} \|U(t,t_0)\| \right\} \le \max_{1 \le t/t_0 \le 2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\rho} e^{K} \le 2^{\rho} e^{K} .$$

Következésképpen az

$$N = e^{K} 2^{1/k} \max\left\{ \frac{k}{\ln 2} , 1 \right\}$$

választás a tétel állításának megfelelő.

Felhasználva a 4.1 Következményben mondottakat kapjuk a

4.2. <u>Következmény</u>. <u>Tekintsük a következő</u>

$$(4.27) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{A(t)}{t} x + \dfrac{f(t)}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{B},\ t \in I_1,\ A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}))$$

<u>Cauchy feladatot.</u>

1) <u>Ha az</u> $A(t)$ <u>operátorfüggvény folytonos és a</u> $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = A$ <u>létezik, akkor a</u> (4.27) <u>Cauchy feladat megoldása korlátos tetszőleges</u> $f(t)$ <u>folytonos és korlátos függvényre akkor és csakis akkor, ha az</u> A <u>limesz operátor</u> $\sigma(A)$ <u>spektruma a (nyilt) baloldali félsikban fekszik;</u>

2) <u>Ha létezik az</u> $A'(t)$ <u>és a</u> $\lim\limits_{t\to\infty} t A'(t) = 0$, <u>akkor a</u> (4.27) <u>feladat megoldása korlátos minden folytonos és korlátos</u> $f(t)$ <u>függvényre akkor és csakis akkor, ha az</u> $A(t)$ ω<u>-limeszoperátorai-nak spektruma a</u> $Re\,\lambda \le -\nu_0$ $(\nu_0 > 0)$ <u>félsikban fekszik.</u>

Tekintsük most a $\mathcal{B} = C[a,b]$ speciális esetet és legyen

$$(A(t)\,\varphi)(x) = \int_a^b K(x,s,t)\varphi(s)ds\,, \quad (\varphi \in C[a,b]\,, x \in [a,b])$$

a $C[a,b]$ -ben egy integráloperátor, azaz $K_t(x,s) = K(x,s,t) \in C([a,b]\times[a,b])$.
Tegyük fel, hogy a $K(x,s,t)$ magfüggvény $t \to \infty$ esetén az $[a,b]\times[a,b]$ téglalapon egyenletesen konvergál egy $\hat{K}(x,s)$ függvényhez. Legyen A a következő integráloperátor $C[a,b]$-ben:

(4.28) $$(A\,\varphi)(x) = \int_a^b \hat{K}(x,s)\,\varphi(s)ds \qquad (\varphi \in C[a,b], x \in [a,b]).$$

A 4.2 Következmény most a következő alakot ölti.

4.3. <u>Következmény. Az</u>

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{t}\int_a^b K(x,s,t)\,\varphi(s,t)ds + \frac{f(x,t)}{t} \qquad (t \in I_1)$$

<u>integro-differenciálegyenlet</u> $\varphi(x,1) \equiv 0$ $(x \in [a,b])$ <u>kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása korlátos tetszőleges</u> $f_x(t) = f(x,t)$ $(x \in [a,b])$ <u>folytonos és korlátos függvényre akkor és csakis akkor, ha az</u> A <u>limesz operátor (mely a</u> (4.28)-<u>cal értelmezett) spektruma a baloldali félsikban fekszik.</u>

5. fejezet

A második generális kitevő stabilitása

Tekintsük az

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.1}$$

$$(x \in \mathcal{B}, t \in I_1, B(t), A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}))$$

$$\dot{x} = (A(t)+B(t))x \tag{5.2}$$

lineáris homogén differenciálegyenleteket, ahol $A(t)$ és $B(t)$ operátorfüggvények erős értelemben mérhetők és lokálisan Bochner integrálhatók az I_1 -n. Jelölje $\varkappa_g(k)$ (ill. $\lambda_g(k)$) az (5. k) egyenlet első (ill. második) generális kitevőjét $(k=1,2)$.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy ha a $\varkappa_g(1)=\varkappa_g(2)$ akkor a $B(t)$ változtatásával, hogyan változik a $\lambda_g(2)$. Meg fogjuk mutatni, hogy ha a $\|B(t)\|$ "kicsi", akkor a $\lambda_g(2)$ is a $\lambda_g(1)$ -től csak kicsit lehet nagyobb, azaz a λ_g az egyenlettől felülről félig folytonosan függ.

A továbbiakban feltesszük, hogy a $\varkappa_g = \varkappa_g(1) = \varkappa_g(2)$ teljesül. Ez például fennáll, ha a $\lim\limits_{t,s\to\infty} \frac{1}{s}\int_t^{t+s} \|B(\tau)\|\, d\tau = 0$ (ld. [4]), azaz ha speciálisan $\lim\limits_{t\to\infty}\|B(t)\| = 0$, vagy $\int_0^\infty \|B(\tau)\|\, d\tau < \infty$ teljesülnek.

Jelölje $U_k(t)$ az (5. k) egyenlet Cauchy operátorát, melyre $U_k(1)=I$ és legyen $U_k(t,s) = U_k(t)U_k^{-1}(s)$ $(k=1,2)$.

5.1. Definició. Azt mondjuk, hogy az (5.1) egyenlet rendelkezik az $\mathcal{L}(\rho, N)$ tulajdonsággal $(\rho \in \mathbb{R}^1, N>0)$, ha az (5.1) $U_1(t,s)$ operátorára teljesül az

$$\|U_1(t,s)\| \le N e^{\varkappa_g(t-s)} \left(\frac{t}{s}\right)^{\rho} \qquad (t \ge s \ge 1)$$

feltétel.

5.1. Lemma. Rendelkezzen az (5.1) egyenlet az $\mathcal{L}(\rho, N)$ tulajdonsággal és legyen a $\varkappa_g(1) = \varkappa_g(2) = \varkappa_g \ (<\infty)$. Ha van olyan $t_0 > 1$ szám, melyre az

$$M_{t_0} := \sup_{s \geq 1} \frac{1}{\ln t_0} \int_s^{st_0} \|B(\tau)\| \, d\tau < \infty$$

feltétel teljesül, akkor az (5.2) egyenlet rendelkezik az $\mathcal{L}(\rho', N')$ tulajdonsággal, ahol $\rho' = \rho + N M_{t_0}$, $N' = N e^{N M_{t_0} \ln t_0}$.

Bizonyitás. Legyen $t \geq s \geq 1$ tetszőleges, ekkor az 1.4 Lemma értelmében

$$\|U_2(t,s)\| \leq N e^{\varkappa_g(t-s)} \left(\frac{t}{s}\right)^{\rho} e^{N \int_s^t \|B(\tau)\| \, d\tau}.$$

A lemma feltétele alapján $\int_s^t \|B(\tau)\| \, d\tau \leq M_{t_0} \left(\ln \frac{t}{s} + \ln t_0\right)$ teljesül, ahonnan az állítás következik.

Ebből a második generális kitevő stabilitása:

5.1. Tétel. Legyen az (5.1) és (5.2) egyenlet e.g.k.-je egyenlő a $\varkappa_g$ számmal. A m.g.k. ekkor a következő stabilitási tulajdonsággal rendelkezik:
bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, mely csak az ε -tól és az (5.1) egyenlettől függ, hogy ha

$$\overline{\lim_{t,s \to \infty}} \frac{1}{\ln t} \int_s^{st} \|B(\tau)\| \, d\tau < \delta,$$

akkor a $\lambda_g(2) \leq \lambda_g(1) + \varepsilon$.

Bizonyitás. A m.g.k. definiciója alapján az (5.1) rendelkezik az $\mathcal{L}(\lambda_g(1) + \varepsilon/2, N_{\varepsilon/2})$ tulajdonsággal. Másrészt a feltétel alapján létezik olyan $S_0, t_0 > 1$, hogy a

$$\sup_{s \geq S_0} \frac{1}{\ln t_0} \int_s^{st_0} \|B(\tau)\| \, d\tau < 2\delta.$$

Ezért az 5.1 Lemma alapján az (5.2) egyenlet rendelkezik az $\mathcal{L}(\lambda_g(1)+\varepsilon/2+2N_{\varepsilon/2}\delta, N')$ tulajdonsággal bizonyos $N'>0$ -val. Ahonnan a $\lambda_g(2) \leq \lambda_g(1)+\varepsilon/2+2N_{\varepsilon/2}\delta$ egyenlőtlenség következik a m.g.k. definiciója értelmében. A Tétel állitása tehát teljesül, ha a $\delta < \varepsilon/4N_{\varepsilon/2}$ választást tekintjük.

5.1. Megjegyzés. Speciálisan az 5.1 Tétel feltételei teljesülnek a $t\|B(t)\| \leq \delta$ $(t \in I_1)$ mellett. Ekkor ugyanis a $\varkappa_g(1)=\varkappa_g(2)$, mert a $\lim\limits_{t\to\infty} B(t)=0$

5.1. Következmény. Ha a

$$\lim_{t,s\to\infty} \frac{1}{\ln s}\int_t^{ts}\|B(\tau)\|\,d\tau = 0,$$

akkor az (5.1) és (5.2) egyenletekre a $\varkappa_g(1)=\varkappa_g(2)$ és $\lambda_g(1)=\lambda_g(2)$.

Valóban az e.g.k.-k egyenlősége következik az

$$0 \leq \frac{1}{s}\int_t^{t+s}\|B(\tau)\|\,d\tau \leq \frac{1}{s}\int_t^{t\cdot s}\|B(\tau)\|\,d\tau \leq \frac{1}{\ln s}\int_t^{ts}\|B(\tau)\|\,d\tau$$

egyenlőtlenségből (t, s elég nagy). A m.g.k.-k egyenlősége pedig az 5.1 Tétel következménye, mert a tétel feltétele teljesül tetszőlegesen kicsiny $\delta>0$ -val.

Az 5.1 Következmény feltétele speciálisan a $\lim\limits_{t\to\infty} tB(t)=0$, $\int_1^\infty \|B(\tau)\|\,d\tau < \infty$ esetekben teljesül. (A $\lim\limits_{t\to\infty} tB(t)=0$ esettel a 4.4 pontban már foglalkoztunk, ld. 4.1. Következmény)

Vegyük most az $A(t)=\frac{A}{t}$ $(t\in I_1,\ A\in\mathcal{L}(B))$ speciális esetet.

5.2. Következmény. Ha az A operátor $\sigma(A)$ spektruma a baloldali félsikban fekszik és a $B(t): I_1 \to \mathcal{L}(B)$ operátorfüggvény olyan, hogy az $\int_1^\infty \|B(\tau)\|\,d\tau < \infty$, akkor az

$$\dot{x} = \left(\frac{A}{t}+B(t)\right)x$$

egyenletre $\varkappa_g=0$ és λ_g negativ.

6. fejezet

A második generális kitevő negativitásának szerepe a stabilitásvizsgálatokban

Ebben a fejezetben az

$$(6.1) \qquad \dot{x} = A(t)x + F(t,x) \qquad (t \in I_1,\ F(t,0) \equiv 0,\ x \in B)$$

nem-lineáris differenciálegyenlet 0 -megoldásának stabilitási tulajdonságait vizsgáljuk a hozzárendelt

$$(6.2) \qquad \dot{x} = A(t)x \qquad (A(t) \in \mathcal{L}(B),\ t \in I_1)$$

lineáris egyenlet λ_g m.g.k.-jének felhasználásával. A vizsgálatokban feltesszük, hogy a (6.2) egyenlet a kritikus esethez tartozik, azaz $\varkappa_g = 0$. Továbbá csak olyan $F : I_1 \times B \to B$ perturbációkat tekintünk, melyekre a (6.1) egyenlet kielégiti az 1.1 lokális egzisztencia tétel feltételeit, valamely $S_n = \{x : \|x\| \leq n\}$ gömbben. Az $A : I_1 \to \mathcal{L}(B)$ operátorfüggvényről pedig feltesszük, hogy mérhető és lokálisan Bochner integrálható az I_1 félegyenesen.

Megadjuk M.G. Krejn stabilitási tételének általánositását [ld. 1.2 pont] a kritikus esetre, továbbá B.P. Demidovics egy stabilitási tételének általánositását Banach terekre. Vizsgáljuk a (6.1) egyenletet olyan perturbáció mellett, mely kielégiti a $t\|F(t,x)\| = o(\|x\|)$ feltételt ($x \to 0$ esetén t -ben egyenletesen). Végül az $A(t) \equiv A = co$ =konst. esetben vizsgáljuk a megoldások m.k.k.-k változását az $F(t,x)$ perturbációtól függően.

6.1. Krejn tételének általánostása kritikus esetre

Legyen az $F(t,x)$ perturbáció olyan, hogy az

(6.3) $$\|F(t,x)\| \le f(t)\|x\| \qquad (t\in I_1, x\in S_n)$$

teljesül, ahol az $f: I_1 \to I_0$ függvény folytonos.

6.1. Tétel. Legyen a (6.2) egyenlet $\varkappa_g$ e.g.k.-je 0 és a λ_g m.g.k. negatív. Ha az

(6.4) $$\frac{1}{\ln t_0}\int_t^{tt_0} f(s)\,ds \le q \qquad (t_0>1 \text{ fix}, t\in I_1)$$

egyenlőtlenség teljesül, a (6.2) egyenlettől függő "elég kicsi" $q>0$ -val, akkor (6.1) nem lineáris egyenlet $x=0$ megoldása egyenletesen és aszimptotikusan stabilis.

Bizonyitás. Legyen $\lambda_g < \rho < 0$, akkor a λ_g definiciója értelmében van olyan $N_\rho > 0$, hogy

$$\|U(t,\tau)\| \le N_\rho\left(\frac{t}{\tau}\right)^\rho \qquad (t\ge\tau\ge 1),$$

ahol $U(t,\tau)=U(t)U^{-1}(\tau)$ és $U(t)$ a (6.2) egyenlet Cauchy operátora. Legyen $N_1 = N_\rho \exp(N_\rho q \ln t_0)$ és $\eta_0 < \min(\eta/N_1, \eta)$, $x_\tau \in S_{\eta_0}=\{x \mid \|x\| \le \eta_0\}$. Tekintsük a (6.1) egyenlet azon $x(t)$ megoldását, melyre $x(\tau)=x_\tau$ teljesül $(\tau\in I_1)$.

Az $x(t)$ folytonossága miatt létezik olyan $T>0$, hogy

$$\|x(t)\| < \eta \qquad (\tau\le t<\tau+T).$$

A konstansvariációs formula alapján

$$x(t) = U(t,\tau)x_\tau + \int_\tau^t U(t,s)F(s,x(s))\,ds \quad (\tau\le t<\tau+T).$$

Ahonnan

$$\|x(t)\| \le N_\rho\left(\frac{t}{\tau}\right)^\rho\|x_\tau\| + N_\rho\int_\tau^t\left(\frac{t}{s}\right)^\rho f(s)\|x(s)\|\,ds,$$

azaz

$$\|x(t)\|t^{-\rho} \le N_\rho\tau^{-\rho}\|x_\tau\| + N_\rho\int_\tau^t f(s)\left(\|x(s)\|s^{-\rho}\right)ds.$$

A Bellman-lemma alapján

$$\|x(t)\| \le N_\rho\left(\frac{t}{\tau}\right)^\rho\|x_\tau\| \exp\left(N_\rho\int_\tau^t f(s)\,ds\right) \qquad (\tau\le t<\tau+T).$$

A (6.4) feltételből következik, hogy

$$\int_{\tau}^{t} f(s)ds \leq q\left(\ln \frac{t}{\tau} + \ln t_0\right),$$

tehát

$$\|x(t)\| \leq N_\varrho e^{N_\varrho q \ln t_0} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho + N_\varrho q} \|x_\tau\| \qquad (\tau \leq t < \tau + T).$$

Tehát ha a q olyan kocsi, hogy a $\varrho + N_\varrho q < 0$ $\left(q < -\frac{\varrho}{N_\varrho}\right)$, akkor a (6.1) egyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen és aszimptotikusan is stabilis lesz, ugyanis a fenti egyenlőtlenség alapján az $x(t)$ megoldás az egész I_τ intervallumon létezik. Valóban, az x_τ választása miatt

$$\|x(t)\| \leq n \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho + N_\varrho q} \qquad (\tau \leq t < \tau + T)$$

és itt a T tetszőleges nagyra választható, mert ha az $\|x(\tau + T)\| = n$ lenne, akkor

$$n = \|x(\tau + T)\| \leq n \left(\frac{\tau + T}{\tau}\right)^{\varrho + N_\varrho q} < n$$

teljesülne, ami ellentmondás.

6.2. A $t\|F(t,x)\| = o(\|x\|)$ feltételt kielégítő perturbáció melletti stabilitás

M.G. Krejn megmutatta (ld. [4]), hogy ha a (6.1) egyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen stabilis tetszőleges

$$F(t,x) \in P = \{G(t,x) : \|G(t,x)\| = o(\|x\|)\}$$

feltételnek eleget tevő perturbáció mellett, akkor a (6.2) lineáris egyenlet e.g.k.-je negativ, tehát ilyen perturbáció mellett (6.1) 0-megoldása aszimptotikusan is tabilis lesz. (A $\|G(t,x)\| = o(\|x\|)$ alatt a $\|G(t,x)\|/\|x\| \Rightarrow 0$, ha $x \to 0$ konvergenciát értjük, ahol a konvergencia t-ben egyenletes.)

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy ha csak azt tudjuk, hogy a (6.1) $x = 0$ megoldása egyenletesen stabilis minden

$$F(t,x) \in \hat{P} = \{ G(t,x) : t\|G(t,x)\| = o(\|x\|) \} \subset P$$

perturbáció mellett, akkor a $\hat{P}$ elemeire még mindig aszimptotikusan stabilis marad a (6.1) $x=0$ megoldása.

A 6.1. Tétel értelmében, ha a (6.2) egyenletre $\varkappa_g = 0$ és $\lambda_g < 0$, akkor (6.1) $x=0$ megoldása egyenletesen stabilis tetszőleges $F(t,x) \in \hat{P}$ perturbáció mellett. Ugyanis ekkor a 6.1. Tétel (6.4) feltétele teljesül tetszőlegesen kicsiny $q > 0$ -val.

Megmutatjuk, hogy a fenti állítás fordítva is teljesül. Tehát, ha a (6.2) egyenletre a $\varkappa_g = 0$ és a (6.1) $x=0$ megoldása egyenletesen stabilis tetszőleges $F(t,x) \in \hat{P}$ perturbációra, akkor ebből következik, hogy a λ_g negativ.

6.2. <u>Tétel</u>. <u>Ha a</u> (6.2) <u>lineáris egyenletre a</u> $\varkappa_g = 0$, <u>akkor a</u> (6.1) <u>nem-lineáris egyenlet</u> $x=0$ <u>megoldása egyenletesen stabilis tetszőleges</u> $t\|F(t,x)\| = o(\|x\|)$ <u>feltételt kielégitő perturbáció mellett akkor és csakis akkor, ha a</u> (6.2) <u>egyenlet</u> λ_g <u>m.g.k.-je negativ</u>.

<u>Bizonyitás</u>. Az állitás elegendősége a 6.1. Tétel közvetlen következménye.

<u>Szükségesség</u>. Tegyük fel, hogy a (6.1) egyenlet $x=0$ megoldása egyenletesen stabilis minden $F \in \hat{P}$ perturbáció mellett. Ekkor speciálisan az $F(t,x) = \frac{1}{t} x \|x\|^p$ ($p>1$ fix) esetén is. Tekintsük most az $x=0$ -nak azt az $S_\eta = \{ x : \|x\| < \eta \}$ környezetét, mely olyan tulajdonságu, hogy minden $x(t_0) = x_0 \in S_\eta$ esetén az $x(t)$ megoldás létezik I_{t_0} -n. Ilyen η szám létezik a stabilitás definiciója értelmében. Minden ilyen megoldást az $x(t) = U(t,t_0)\, y(t)$ alakban irhatunk fel, ahol $U(t,t_0)$ a (6.2) Cauchy operátora. Az $y(t)$ -re az

(6.5) $$\dot{y} = \varphi(t)\, y \qquad \left(\varphi(t) = \frac{1}{t}\|U(t,t_0)y(t)\|^p,\ t \in I_{t_0}\right)$$

differenciálegyenlet teljesül. Ahonnan az $y = \psi(t)x_0$, ahol $\psi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds\right) > 1$. A (6.5) egyenlet alapján a

$$\dot{\psi}(t) = \psi^{p+1}(t)\, \frac{1}{t}\, \|U(t,t_0)x_0\|^p .$$

Ahonnan

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}\|U(\tau,t_0)x_0\|^p d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\psi}(\tau)}{\psi^{p+1}(\tau)}\, d\tau \le \frac{1}{p} \quad (x_0 \in S_n).$$

És igy a 4.1 Megjegyzés értelmében következik, hogy a $\lambda_g < 0$, hacsak a λ_g véges. Ezt az egyenletes stabilitásból vezethetjük le, ugyanis bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, mely t_0 -tól független, hogy ha az $\|X(t_0)\| < \delta$, akkor $\|X(t)\| < \varepsilon$ $(t \in I_{t_0})$. Legyen $\|X_0\| < \min(\delta, n)$, ekkor

$$\|X(t)\| = \psi(t)\|U(t,t_0)x_0\| < \varepsilon \qquad (t \in I_{t_0}),$$

ahonnan $\|U(t,t_0)X_0\| \le \varepsilon/\psi(t) \le \varepsilon$ $(t \in I_{t_0})$. A Banach-Steinhaus tétel értelmében és a $\kappa_g = 0$ alapján ebből következik, hogy $\lambda_g < 0$.

6.1. Következmény. i) Ha a (6.1) nem-lineáris egyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen stabilis tetszőleges $F \in \hat{P}$ feltételt kielégitő perturbáció mellett, akkor aszimptotikusan is stabilis minden ilyen perturbáció mellett;

ii) Ha az

$$\dot{x} = \frac{A}{t}x + F(t,x) \qquad (t \in I_1,\ A \in \mathcal{L}(B),\ F(t,0) \equiv 0)$$

nem-lineáris egyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen stabilis minden $F \in \hat{P}$ perutrbáció mellett, akkor az A operátor $\sigma(A)$ spektruma a baloldali félsikban fekszik.

6.3. B.P. Demidovics tételének általánositása

Tekintsük most a (6.1) nem-lineáris egyenletet olyan $F(t,x)$ perturbáció mellett, mely kielégiti az

(6.6) $\|F(t,x)\| \le q\|x\|^m \qquad (q>0, m>1, t\in I_1)$

feltételt.

B.P. Demidovics a $\mathcal{B}=\mathbb{R}^n$ véges dimenziós euklideszi térben megmutatta, hogy ha az $F(t,X)$ kielégiti a (6.6) feltételt és a (6.2) lineáris közelités "teljesen szabályos" (ld. [13]) nem-pozitiv e-k.k.-kel és a megoldások m.k.k.-inek maximuma kisebb mint $-1/(m-1)$, akkor a (6.1) $x=0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

Megadjuk ennek a tételnek az általánositását tetszőleges $\mathcal{B}$ Banach térre a m.g.k. fogalmának felhasználásával.

6.3. Tétel. Ha a (6.2) egyenletre a $\varkappa_g=0$ és a λ_g m.g.k.-re a

$$\lambda_g < -\frac{1}{m-1} \qquad (m>1-1/\lambda_g)$$

feltétel teljesül, akkor a (6.1) nem-lineáris egyenlet $X=0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

Bizonyitás. A konstansvariációs formulából a (6.1) egyenlet $X(t_0)=X_0$ kezdeti feltételt kielégitő megoldása

$$x(t)=U(t,t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}U(t,\tau)F(\tau,x(\tau))d\tau.$$

Legyen $\lambda_g<-\rho<-\frac{1}{m-1}$, ekkor a feltételek és a m.g.k. definiciója alapján

$$\|x(t)\|\le\|U(t,t_0)\|\,\|X_0\|+\int_{t_0}^{t}N_\rho\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\rho}q\,\|x(\tau)\|^m d\tau.$$

Az $\|U(t,t_0)\|\le Kt^{-\rho}$ $(t\ge t_0\ge 1)$ egyenlőtlenség alapján, ahol $K>0$ függ a t_0 -tól,

$$t^\rho\|x(t)\|\le K\|x(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}N_\rho q\,\tau^{-\rho(m-1)}(\tau^\rho\|x(\tau)\|)^m d\tau.$$

A Bihari-lemma következménye értelmében

$$\|x(t)\| \leq \frac{K\|x(t_0)\|}{\left[1-(m-1)(K\|x(t_0)\|)^{m-1}N_\varrho q\int_{t_0}^{t}\tau^{-\varrho(m-1)}d\tau\right]^{\frac{1}{m-1}}}\, t^{-\varrho},$$

mivel $\varrho(m-1)>1$, tehát valóban a (6.1) $x=0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

6.4. Konstans operátor együtthatós lineáris egyenletek perturbációja

Az eddigi vizsgálatokban feltettük, hogy a lineáris közelités m.g.k.-je negativ, ami az $A(t)\equiv A$ stacionárius egyenlet esetében nem teljesül (ld. 3.3. Lemma). Ebben a pontban a (6.1) egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, ha a (6.2) lineáris közelités stavionárius

(6.7) $$\dot{x} = Ax \qquad (A\in\mathcal{L}(\mathcal{B}),\, x\in\mathcal{B}).$$

Teltesszük a (6.7) egyenletre, hogy $\mu(A)$ véges és legyen az $\alpha\geq 0$ olyan szám, hogy az

(6.8) $$\|e^{At}\| \leq K\, e^{\varkappa_s t}\, t^{\alpha} \qquad (t\in I_1).$$

6.4. Tétel. Ha az $F(t,x)$ perutrábicióra teljesül a (6.3) egyenlőtlenség és a lineáris egyenletre a (6.8) feltétel, akkor a (6.1) nem-lineáris egyenlet $x(t)$ megoldására

$$\frac{\|x(t)\|}{\exp(\varkappa_s t)\,t^{\alpha}} = \mathcal{O}\left(\exp\left(\int_1^t s^{\alpha} f(s)\,ds\right)\right) \qquad (t\to\infty).$$

Bizonyitás. A konstansvariációs formulából

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s,x(s))\,ds \qquad (t\in I_{t_0}).$$

Tehát az

$$\|x(t)\| \leq K e^{\varkappa_s(t-t_0)}(t-t_0)^{\alpha}\|x_0\| + K\int_{t_0}^{t} e^{\varkappa_s(t-s)}(t-s)^{\alpha} f(s)\|x(s)\|\,ds.$$

egyenlőtlenség teljesül, melyet osztva $e^{\varkappa_s t}\, t^{\alpha}$ függvénnyel és felhasználva, hogy $\alpha \geq 0$ kapjuk

$$\|x(t)\| e^{-\varkappa_s t} t^{-\alpha} \leq K e^{-\varkappa_s t_0} \|x_0\| + K \int_{t_0}^{t} s^{\alpha} f(s) (e^{-\varkappa_s s} s^{-\alpha} \|x(s)\|)\, ds .$$

Az állítás a Bellman-lemmából következik.

6.2. Következmény. Ha a (6.7) egyenlet $x=0$ megoldása stabilis, azaz (6.8) teljesül a $\varkappa_s = \alpha = 0$ -val és a $\int_0^{\infty} f(s) ds < \infty$ akkor a (6.1) nem-lineáris egyenlet minden megoldása korlátos lesz.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Красовский М.А., Крейн С.М.,
К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Труды семинара по функц. анализу, Воронеж, 2 (1956).

[2] К. П. Персидский,
Избранные труды, т.2, "Наука" Казахской ССР, Агма-Ата, 1976..

[3] Е.А. Барбашин,
Введение в теорию устойчивости, "Наука", Москва, 1967.

[4] Ю. Л. Далецкий, М.Г. Крейн,
Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве, "Наука", Москва, 1970.

[5] Х. Л. Массера, Х.Х. Шеффер,
Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, Изд. "Мир", Москва, 1970.

[6] В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Ленинград, 1957.

[7] К. Г. Валеев, О. А. Жаутыков,
Бесконечных системы дифференциальных уравнений, "Наука" Казахской ССР, Алма-Ата, 1974.

[8] С. Г. Крейн,
Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве, "Наука", Москва, 1967.

[9] S. Agmon, L. Nirenberg,
Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, Commun. Pure Appl. Math. 16, 2 (1963), 121-239.

[10] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В.В. Немицкий,
Теория показателей Ляпунова, Изд. "Наука", Москва, 1966.

[11] А.М. Ляпунов, Собрание соченений, т.2, Изд. АН СССР, Москва, 1956.

[12] M. Klincsik, On the stability of solutions of differential equations in Banach space by second general exponent, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 30. Qualitative Theory of Differential equations, Szeged (Hungary), 1979. (Megjelenés alatt)

[13] Б.П. Демидович, Об одном обобщеним критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем, Мат. сб. 66 (108), 3 (1965), 344-353.

[14] P. R. Halmos, Hilbert space problem book, Van Nostrand, 1967.

[15] Б.П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", Москва, 1967.

[16] G. Pólya, G. Szegő, Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, I. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964.

[17] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Functional analysis, Frederick Ungar Publishing Co, New York, 1965.

[18] E. Hille, R.S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, American Math. Society, 1957.

[19] G. Pólya, Aufgaben 105. Jahresbericht D.M.V., 40 (1931) 80.

[20] G. Lummer, R.S. Phillips, Dissipative operators in a Banach space, Pacific J. Math. 11, 2 (1961), 679-698.

[21] C. Kahane, Stability of solutions of linear systems with dominant main diagonal, Proc. of the Am. Math. Soc. 33 (1972), 69-71.

[22] J. P. Mc Clure, R. Wong, Infinite systems of differential equations, Can. J. Math., 23 (1976), 1132-1145.