

Varró Sándor

SZABAD ELEKTRONOK ÉS INTENZÍV FÉNY KÖLCSÖNHATÁSÁNAK  
ELMÉLETI VIZSGÁLATA

Egyetemi doktori értekezés

Témavezető:

Dr. Bergou János

Készült:

az MTA KFKI-SzFKI  
Szilárdtest-elméleti Osztályán

Budapest, 1981



## T A R T A L O M

BEVEZETÉS . . . . .	
1. AZ INTENZIV FÉNYTEREK SZABAD ELEKTRONON TÖRTÉNŐ SZÓRÓDÁSÁNAK KLASSZIKUS ELEKTRODINAMIKAI MODELLJE . . .	6
1A. Elektronpályák elektromágneses síkhullám térben . .	6
1B. Monokromatikus fényben mozgó elektron sugárzási tere. Intenzív Thomson-szórás . . . . .	13
2. KLASSZIKUS ELEKTRON KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TERE . . . . .	18
3. KÜLSŐ ELEKTROMÁGNESES SIKHULLÁMOKKAL KÖLCSÖNHATÓ NEM- RELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRONOK KVANTUMMECHANIKAI LEÍRÁSA . . . . .	21
3A. Nemrelativisztikus elektron hullámfüggvényei külső elektromágneses síkhullámtérben . . . . .	21
3B. Nemrelativisztikus elektron többfotonos kényszeri- tett fékezési sugárzása . . . . .	26
Megjegyzés . . . . .	30
4. NEMRELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON KÖLCSÖNHATÁSA KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TÉRREL . . . . .	31
4A. A "nemrelativisztikus szabad elektron + kvantált e.m. módus" rendszer egzakt állapotai . . . . .	31
4B. Többfotonos kényszerített fékezési sugárzás kvan- tált elektromágneses térben . . . . .	38
5. ELEKTRON-ELEKTRON SZÓRÁS INTENZIV FÉNY JELENLÉTÉBEN . .	42
6. RELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON ÉS INTENZIV FÉNY KÖLCSÖNHATÁSÁNAK SZEMIKLASSZIKUS ELMÉLETE . . . . .	49
6A. Volkov-állapotok . . . . .	49
6B. Az elektron relativisztikus hullámegyenleteinek peremértékproblémája elektromágneses síkhullám- térben. Green-függvények . . . . .	55



6C. Szórásszámítás. Furry-kép . . . . .	58
6D. Intenzív Compton-szórás skalár elektronon . . . . .	62
7. RELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON KÖLCSÖNHATÁSA	
KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TÉRREL . . . . .	65
7A. A "relativisztikus szabad elektron + kvantált e.m. módus" rendszer egzakt állapotai . . . . .	65
7B. Kvantált elektromágneses sugárzás nemlineáris Compton-szórása . . . . .	68
ÖSSZEFOGLALÁS . . . . .	71
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS . . . . .	74
IRODALOMJEGYZÉK . . . . .	75

## BEVEZETÉS

A fény-elektron kölcsönhatás a fizika egyik legrészletesebben tanulmányozott jelensége, s így az e területhez tartozó alapvető folyamatok főbb kísérleti és elméleti vonatkozásai már régóta ismertek. A lézerek felfedezése azonban olyan nagy intenzitású fényterek kísérleti alkalmazását tette lehetővé, amelyek különböző anyagokkal való kölcsönhatását a klasszikus ill. a kvantumelektrodinamika hagyományos módszereivel már nem lehet tárgyalni.

Az intenzív fény hatására az anyag nemlineárisan válaszolhat. Ezen azt értjük, hogy a válasz valamilyen mértéke (pl. a fémek felületi fotoeffektusa esetében a kilépő elektronok áramsűrűsége) az intenzitás magasabb hatványaival lehet arányos. Ezért az ilyen folyamatokat nemlineáris folyamatoknak nevezzük. A nemlineáris optika olyan fény-anyag kölcsönhatásokkal foglalkozik amely során az anyag halmazállapota nem változik. Az e tárgykörbe tartozó egyik tipikus jelenség a frekvenciakétszerezés kristályokon. Bizonyos kristályok válaszfüggvénye (szuszceptibilitása) erősen intenzitásfüggő lehet, ezért a ráeső fény másodharmonikusa szerint is modulálódhat, tehát a kijövő kétszeres frekvenciájú jel erőssége a gerjesztés intenzitásának négyzetével lesz arányos.

Az olyan intenzív fény számára, amely elektromos vektorának amplitudója az atomi kötéseknek megfelelő térerősségek nagyságrendjébe esik, minden anyag egyszerűen szabad töltött részecskék halmazaként (plazmaként) jelenik meg. A fémek nemlineáris fotoeffektusa esetében is a kilépő elektronokat a fény szabad töltéseként "látja". Az ide tartozó jelenségekkel az intenzív tér elektrodinamika foglalkozik. Mindezek alapján érthető, hogy a lézerek megjelenését követően a szabad töltések intenzív fénybeli viselkedését sok kutató kezdte tanulmányozni, s az intenzív tér elektrodinamika szűzterületeinek száma rohamosan csökken.

Dolgozatunkkal ehhez a munkához szeretnénk hozzájárulni a szabad elektronok és intenzív fény kölcsönhatása leírásához használható különböző szintű modellek egzakt megoldásának szisztematikus elemzésével, és néhány új eredmény közzétételével.

Az elektromágneses sugárzási tér és szabad töltések kölcsönhatásának szokásos kvantumelektrodinamikai tárgyalása perturbációs számításokkal történik, amely során a kölcsönhatást - erősségtől függően - különböző rendekben kell figyelembe venni. Például ha az elektron  $n$  egy módusba tartozó fotont abszorbeál és egy másik módusbeli fotont emittál, akkor e folyamat leírása céljából  $(n+1)$ -edrendű perturbációs számításra kell végezni. A folyamat átmeneti valószínűsége a beeső elektromágneses (e.m.) tér intenzitásának  $n$ -edik hatványával lesz arányos. (Ez esetben a "nemlineáris" és "többfotonos" kifejezéseket azonos jelentéssel használhatjuk.) Elegendően nagy fényintenzitásoknál helyes eredményt vagy a perturbációs sor felösszegzésével kaphatunk (ez általában igen nehéz matematikai feladat), vagy olyan nemperturbatív módszert kell alkalmaznunk amellyel az intenzív fény és elektron kölcsönhatását már eleve egzaktul figyelembe vesszük. Dolgozatunkban ilyen nemperturbatív eljárások működését vizsgáljuk az elektron-fény kölcsönhatáskor lejátszódó néhány tipikus nemlineáris folyamat (intenzív fény szóródása, kényszerített nemlineáris fékezési sugárzás, elektron-elektron szórás intenzív fényben) elemzése céljából. Hogy mit értünk nagy fényintenzitáson azt az alábbiakban tisztázzuk.

Az első fejezetben ki fog derülni, hogy a fény és elektron közötti csatolás a

$$v \equiv \frac{ea_0}{mc^2}$$

un. intenzitásparaméterrel jellemezhető, amelyben  $e$  ill.  $m$  az elektron töltése ill. nyugalmi tömege,  $c$  a vákuumbeli fénysebesség, és  $a_0$  a fény vektorpotenciáljának amplitudója. Kvantált sugárzási tér vektorpotenciáljának nincs aktuális értéke, ekkor  $a_0$ -t  $\alpha_0 \equiv (c/\omega)(2\pi\hbar\omega\rho)^{1/2}$ -nel azonosítjuk, ahol  $\omega$  a tekintett fénymódus körfrekvenciája,  $\hbar$  a Planck-állandó  $2\pi$ -ed része és  $\rho$  a fotonsűrűség várható értéke ( $\alpha_0$  amplitudójú klasszikus monokromatikus síkhullám átlagos energiasűrűsége éppen  $\hbar\omega\rho$ ). Az "elegendően nagy fényintenzitás" azt jelenti, hogy a  $v$  csatolási

állandó értéke egységnyi (vagy annál nagyobb) nagyságrendű. A  $v \sim 1$  feltétel klasszikus fizikai tartalmának megállapítása érdekében célszerű  $v - t$  a következő alakra hozni:

$$v = (I/\mathcal{J})^{1/2}, \mathcal{J} \equiv [2\pi mc^2 / (r_0/c)\lambda^2]^{1/2}$$

( $r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2}$  a klasszikus elektron sugár,  $\lambda \equiv \frac{2\pi c}{\omega}$  a fény hullámhossza,  $I = \frac{c}{8\pi}(2\frac{\omega}{c} a_0)^2$  az intenzitása),  $\mathcal{J}$  a kritikus intenzitás.

Az első fejezetben látni fogjuk, hogy egy kezdetben nyugvó elektron a  $v$  intenzitásparaméterű monokromatikus fény bekapcsolása után fényfrekvenciás rezgőmozgásba kezd és  $\sim mc^2 v^2$  átlagos többletenergiát nyer, ha  $v \sim 1$  akkor ez pont megegyezik  $mc^2$ -tel. A fentiek szerint  $v \sim 1$  esetén a  $\lambda^2$  felületen az elektron-fény kölcsönhatás ( $r_0/c$ ) karakterisztikus ideje alatt átáramló sugárzási energia megegyezik az elektron  $mc^2$  nyugalmi energiájával. A kvantummechanika nyelvén ezt úgy is mondhatjuk, hogy az  $r_0 \lambda^2$  kölcsönhatási térfogatban lévő fotonok  $r_0 \lambda^2 \hbar \omega$  összenergiája  $mc^2$ . Ekkor optikai párkeltés lehetséges. A lézeres fúziós kísérletekben a  $v \sim 10-100$  értékeket is elérték már, tehát nem kizárt, hogy a közeljövőben az optikai párkeltést kísérletileg észlelni fogják. Dolgozatunkban ilyen folyamatokkal nem foglalkozunk, vagyis az elektronszám esetleges változásától eltekintünk, s így az elektrontér másodkvantálására nem lesz szükségünk. Eredményeink tehát az  $I < \mathcal{J}$  intenzitástartományban érvényesek.

Amint már említettük a jelen értekezés célja a szabad elektronok és intenzív sugárzási tér (lézerefény) kölcsönhatásának leírásához eddig kidolgozott nemperturbatív módszerek rendszeres összefoglalása és továbbfejlesztése. Ennek megfelelően először az intenzív fény szabad elektronon történő szóródásának egzakt klasszikus elektrodinamikai tárgyalását adjuk, s így a nemlineáris folyamatokra egy jól ismert modell keretein belül mutathatunk be példát. A kapott eredményeket ezután a fény kvantumelektrodinamikája alapján általánosítjuk.

Az elektron-fény kölcsönhatás vizsgálata során általában nem elegendő az elektron klasszikus mechanikai leírása, ezért a dolgozat további fejezeteiben az elektront kvantummechanikai objektumként kezeljük.

A szabad elektronok intenzív sugárzási tér jelenlétében lejátszódó kvantummechanikai szórásfolyamatai a következő általános séma szerint tárgyalhatók. Először megoldjuk az intenzív sugárzási móduval kölcsönható elektron hullámegyenletét, majd e megoldásokat bázisként használva perturbációszámítást végzünk az elektront érő egyéb hatások (pl. egy ion Coulomb-tere, egy másik e.m. módus) leírása céljából. Az intenzív módust tehát egzaktul figyelembe vesszük, s így az elektron e móduval való kölcsönhatását tetszésszerűnti rendben tanulmányozhatjuk.

A szabad elektron előbb említett egzakt hullámfüggvényeinek ismerete kulcsfontosságú, ezért dolgozatunkban jelentős teret szentelünk e hullámfüggvények vizsgálatának.

Az elektron és fény kölcsönhatásának leírása különböző szinteken történhet, attól függően, hogy e két objektumot pályával, c-szám térmennyiségekkel avagy kvantált térmennyiségekkel írjuk-e le. A lehetséges kombinációkat az 1. Táblán foglaltuk össze.

Fény Elektron	Pálya (geometriai optika)	Tér (Maxwell- elmélet)	Kvantált tér (foton-kép)
Pálya (klasszikus mechanika)		1.	.2.
Tér (hullám- mechanika)		Szemiklasz- szikus el- mélet 3., 5., 6.	4., 7.
Kvantált tér			Kvantum- elektro- dinamika

1. Tábla A fény-elektron kölcsönhatás leírasi mód-  
szerei (a geometriai optikát csak a szim-  
metria kedvéért tüntettük fel). A sorszámok  
a dolgozat megfelelő fejezeteit jelölik.

A harmadik fejezetben a lézerfényvel kölcsönható nemrela-  
tivisztikus szabad elektron kvantummechanikai állapotait tanul-  
mányozzuk és megvonjuk a Schrödinger-egyenlet ilyen problémákra  
való alkalmazhatóságának határait, majd elemezzük a nemlineáris  
kényszerített fékezési sugárzást.



Ezt követően a fényt kvantált sugárzásként kezelve a 3. fejezet szemiklasszikus eredményeinek mélyebb megalapozását adjuk, amelyen azt értjük, hogy a külső tér közelítésen túlmenve az intenzív fénymódusban bekövetkező változásokat is analizáljuk.

Az ötödik fejezetben kiszámítjuk a lézerefény jelenlétében lezajló nemrelativisztikus elektron-elektron szórást leíró effektív potenciált, amely számot ad a lézerefényben tartózkodó elektronok effektív vonzásáról, és megvizsgáljuk az un. belső rezonanciákat is.

A hatodik fejezetben a relativisztikus szabad elektron és intenzív fény kölcsönhatásának szemiklasszikus elméletét tanulmányozzuk a megfelelő Dirac-ill. Klein-Gordon-egyenlet megoldásai segítségével. Vázoljuk az intenzív tér elektrodinamika Furry-képbeli felépítésének főbb lépéseit, majd meghatározzuk a nemlineáris kényszerített fékezésű sugárzás, és skalár elektronon történő intenzív Compton-szórás hatáskeresztmetszeteit.

Végül elvégezzük a hatodik fejezet eredményeinek kvantum-elektrodinamikai általánosítását, amely az eddig általánosan használt külső tér közelítésnél finomabb leírást tesz lehetővé.



## 1. AZ INTENZIV FÉNYTEREK SZABAD ELEKTRONON TÖRTÉNŐ SZÓRÓDÁSÁNAK KLASSZIKUS ELEKTRODINAMIKAI MODELLJE

Jelen fejezetben a klasszikus elektrodinamikára támaszkodva részletesen elemezzük monokromatikus fényhullámok szabad elektronon való szóródását. Az ilyen típusú folyamatok leírásának szokásos útján járva először megoldjuk a fény elektromágneses hatásainak kitett pontszerű elektron mozgásegyenletét. A kapott elektronpályák segítségével előállítjuk az elektron által képviselt négyesáramsűrűséget, amelyet ezután a szórt sugárzás négyespotenciálját meghatározó potenciálegyenletekben forrástagként szerepeltetünk. A potenciálegyenleteket megoldva kitűnik, hogy a szórt sugárzásban a beeső fény minden felharmonikusa jelen van. Végül meghatározzuk e felharmonikusok differenciális hatáskeresztmetszeteit, és ezek ismeretében elemezzük a beeső fény intenzitásának a szórásfolyamatban játszott szerepét.

### 1A. Elektronpályák elektromágneses síkhullámtérben

Az  $e$  töltésű,  $m$  nyugalmi tömegű elektron relativisztikus Newton-egyenlete az  $\underline{E}$  elektromos térerősségű,  $\underline{B}$  mágneses indukciójú elektromágneses térben

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = e(\underline{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \underline{B}); \quad \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (1.1)$$

ahol  $\mathbf{r}(t)$  az elektron helye a  $t$  időpontban és  $c$  a vákuumbéli fénysebesség. Egy  $\mathbf{k} = \underline{n}|\mathbf{k}|$  hullámvektoru,  $\omega = c|\mathbf{k}|$  frekvenciájú és  $\underline{e}$  irányban lineárisan polarizált síkhullám esetében  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  konkrét alakja a fenti egyenletben a következő:

$$\underline{E} = E_0 \underline{e} \sin[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)], \quad \underline{B} = E_0 \underline{n} \times \underline{e} \sin[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)], \quad (1.2)$$

$E_0$  az elektromos térerősség amplitudója, és  $\underline{e}$  és  $\underline{n}$  egymásra merőleges egységvektorok.

Mivel az  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  térmennyiségek az  $\mathbf{r}(t)$  pálya nemlineáris függvényei ezért az (1.1) egyenlet első pillantásra meglehetősen bonyolultnak látszik, és ebben a formájában valóban nehezen kezelhető (Vachaspati 1962).

A probléma megoldásához a Hamilton-Jacobi elméletet hívjuk segítségül, de mielőtt ezt megtennénk essék néhány szó az elektron

nemrelativisztikus mozgásáról. Ha  $(v/c) \ll 1$ , akkor (1.1) az alábbi egyenletre egyszerűsíthető

$$m\ddot{\underline{r}} = eE_0 \underline{\epsilon} \sin[\omega t - \underline{k} \underline{r}(t)] \quad (1.3)$$

(ponttal az idő szerinti deriválást jelöljük,  $\dot{\underline{r}} \equiv (d\underline{r}/dt)$ ).

Ha (1.3) mindkét oldalát  $\underline{k}$ -val skalárisan szorozzuk, akkor  $\underline{k} \perp \underline{\epsilon}$  miatt a  $\underline{k} \dot{\underline{r}} = 0$  összefüggést kapjuk, következésképpen  $\underline{k} \underline{r}(t) = \underline{k} \underline{r}_0 + \underline{k} \underline{v}_0 t$  ( $\underline{r}_0$  az elektron kezdeti helye,  $\underline{v}_0$  a kezdősebessége). (1.3) tehát a következő alakra hozható:

$$m\ddot{\underline{r}} = eE_0 \underline{\epsilon} \sin(\omega_D t - \varphi), \quad (1.3a)$$

ahol  $\omega_D \equiv \omega - \underline{k} \underline{v}_0$  Doppler-eltolódott frekvencia és  $\varphi \equiv \underline{k} \underline{r}_0$  a kezdőfázis. A nemrelativisztikus elektron transzverzális sikhullámtérben (1.3a) szerint úgy viselkedik mintha homogén térben lenne. (1.3) megoldása közvetlen kiintegrálással megkapható

$$\underline{v}(t) = -\frac{eE_0}{m\omega_D} \underline{\epsilon} \cos(\omega_D t - \varphi) + \underline{v}_0, \quad (1.3b)$$

$$\underline{r}(t) = -\frac{eE_0}{m\omega_D^2} \underline{\epsilon} \sin(\omega_D t - \varphi) + \underline{v}_0 t + \underline{r}_0.$$

Az elektron mozgása egy szabad transzlációs mozgásból és egy  $\underline{\epsilon}$  irányu harmonikus oszcillációból tevődik össze. Az origóban átlagosan nyugvó elektron esetében ( $\underline{r}_0 = \underline{v}_0 = 0$ )

$$\underline{r}(t) = -\lambda v \underline{\epsilon} \sin \omega t, \quad \underline{v}(t) = -c v \underline{\epsilon} \cos \omega t, \quad (1.3c)$$

$$\lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}, \quad v \equiv \frac{eE_0}{m\omega c}. \quad (1.3d)$$

(1.3d)-ben bevezettük a  $v$  dimenziótlan intenzitásparamétert, amelynek a későbbiekben fontos szerepe lesz. Az elektron sebességamplitúdója  $cv$ , tehát fenti számolásunk akkor van összhangban a  $(v/c) \ll 1$  feltétellel, ha  $v \ll 1$ . Ha  $v$  nem hanyagolható el az egység mellett, akkor a probléma relativisztikussá válik.  $v$  nagyságrendjének tanulmányozása céljából írjuk fel  $v - t$  a következő alakban:

$$v = \left(\frac{I}{J}\right)^{1/2}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{c}{8\pi} \mathcal{E}_0^2, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{e}{r_0 \lambda}, \quad (1.3e)$$

$r_0 \sim 10^{-13}$  cm a klasszikus elektron sugár. A fenti egyenletben definiált  $\mathcal{J}$  mennyiséget a  $\lambda$  hullánhosszhoz tartozó kritikus inten-

zitásnak nevezzük. Az  $\mathcal{E}_0$  térerősségű sztatikus elektromos tér az elektronon  $\lambda_C \equiv \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-11}$  cm Compton-hullámhossznyi uton éppen  $\hbar\omega$  munkát végez ( $\hbar$  a Planck-állandó  $2\pi$ -ed része),

$$e \mathcal{E}_0 \lambda_C = \hbar\omega. \quad (1.3f)$$

Például széndioxid lézer esetében  $\lambda \sim 10^{-4}$  cm tehát  $\mathcal{E}_0$  közel esik a Bohr-térerősség  $E_B \equiv \frac{e}{a_B^2} \sim 10^9 \frac{V}{cm}$  értékéhez, ( $a_B \equiv (\hbar^2/me^2) \sim 10^{-8}$  cm).

E kis kitérő után kanyarodjunk most vissza az elektron relativisztikus leírásához. Ahelyett, hogy az (1.1) egyenlet megoldásával próbálkoznánk, a továbbiakban a vele ekvivalens

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{r}} = -\dot{\underline{p}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} = \dot{\underline{r}} \quad (1.4)$$

kanonikus mozgásegyenleteket vizsgáljuk.

Itt

$$H = H(\underline{r}, \underline{p}, t) = [c^2 (\underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A})^2 + m^2 c^4]^{1/2} + e \Phi \quad (1.5)$$

az elektron Hamilton-függvénye amely számszerűleg nem más, mint az elektron teljes E energiája,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + e\Phi. \quad (1.5a)$$

A kanonikus impulzus

$$\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + \frac{e}{c} \underline{A}. \quad (1.5b)$$

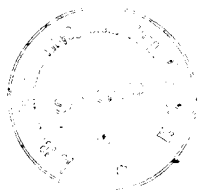
Az imént bevezetett  $\Phi$  skalár- és  $\underline{A}$  vektorpotenciálból az (1.1) egyenletben szereplő  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  térmennyiségek a szokásos módon származtathatók (sugárzási mértékben  $\Phi=0$ ),

$$\underline{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}}, \quad \underline{B} = \text{rot } \underline{A}. \quad (1.5c)$$

Az (1.4) egyenletek megoldása céljából hajtsuk végre az

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{Q}, \underline{P}), \quad \underline{p} = \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P}) \quad (1.6)$$

kanonikus transzformációt, melynek generátorfüggvénye legyen  $W(\underline{r}, \underline{P}, t)$ .



A legkisebb hatás Hamilton-féle elvének felhasználásával könnyen belátható, hogy

$$\underline{P} = - \frac{\partial W(\underline{r}, \underline{P}, t)}{\partial \underline{r}} \quad (1.7a)$$

és

$$\underline{Q} = - \frac{\partial W(\underline{r}, \underline{P}, t)}{\partial \underline{P}} \quad (1.7b)$$

fennállása esetén a  $\underline{Q}$  és  $\underline{P}$  új változók szintén kielégítik a kanonikus mozgásegyenleteket:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \underline{Q}} = -\dot{\underline{P}}, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \underline{P}} = \dot{\underline{Q}}, \quad (1.8)$$

ahol  $\bar{H}$  a transzformált Hamilton-függvény,

$$\bar{H}(\underline{Q}, \underline{P}, t) = H - \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Ha  $(\partial W / \partial t) = H$ , akkor  $\bar{H}$  azonosan nulla, tehát (1.8) szerint az új változók mozgásállandók. Ez esetben  $W$  az elektron hatásfüggvénye,  $W = S = \int H \, dt$ . A részecske pályáját az (1.7b) implicit összefüggésből határozhatjuk meg ha  $S$ -et ismerjük. Fő feladatunk tehát az  $S$  hatásfüggvény meghatározása, amely (1.7a) és  $(\partial S / \partial t) = H(\underline{r}, \underline{p}, t)$  miatt kielégíti az alábbi egyenletet

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(\underline{r}, - \frac{\partial S}{\partial \underline{r}}, t). \quad (1.10)$$

A továbbiakban az (1.10) Hamilton-Jacobi egyenletet tanulmányozzuk. Először a jobb áttekinthetőség érdekében formuláinkat kovariáns alakra hozzuk. Bevezetjük a

$$p = \{p^\mu\} = (\frac{H}{c}, \underline{p}), \quad x = \{x^\mu\} = (ct, \underline{r}), \quad (1.11a-b)$$

$$P = \{P^\mu\} = (P_0, \underline{P}), \quad Q = \{Q^\mu\} = (Q_0, \underline{Q}) \quad (1.11c-d)$$

négyesvektorokat és a

$$\partial = \{\partial_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}, \quad \partial_P = \left\{ \frac{\partial}{\partial P^\mu} \right\}, \quad (1.11e-f)$$

négyesnablákat /a  $\mu$  index lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3/.

Két tetszőleges  $a$  és  $b$  négyesvektor skalárszorzatát  $a \cdot b$ -vel jelöljük és a következőképpen definiáljuk:

$$a \cdot b = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, \quad a \cdot a \equiv a^2, \quad (1.11g-h)$$

ahol

$$g_{00} = -g_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (1.11i)$$

(1.7a) és (1.10) ezek után az alábbi alakban foglalhatók össze

$$p = \partial S(x, P). \quad (1.12)$$

Hasonlóan, (1.7b) szerint

$$Q = \partial_P S(x, P). \quad (1.13)$$

Az (1.10) relativisztikus Hamilton-Jacobi egyenlet (1.5) figyelembevételével a következő racionális formára hozható (Rohrlich 1965):

$$\left(\partial S - \frac{e}{c} A\right)^2 = (mc)^2. \quad (1.14)$$

(1.14)-ben bevezettük az A négyespotenciált,

$$A = \{A^\mu\} = (\Phi, \underline{A}). \quad (1.15)$$

Transzverzális síkhullámot reprezentáló négyespotenciál csak a  $k \cdot x = \omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}$  szorzattól függ, ahol  $k$  a négyeshullámvektor,

$$A = A(k \cdot x), \quad (1.16a)$$

$$k = \{k^\mu\} = (k_0, \underline{k}), \quad k_0 = |\underline{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad k^2 = 0. \quad (1.16b)$$

$$k \cdot A = 0 \xrightarrow{\Phi=0} \underline{k} \cdot \underline{A} = 0. \quad (1.16c)$$

Monokromatikus és lineárisan polarizált hullám esetében

$$A = a_0 \epsilon \cos k \cdot x, \quad \epsilon = \{\epsilon^\mu\} = (0, \underline{\epsilon}). \quad (1.17)$$

E formai részletek után térjünk rá az (1.14) egyenlet megoldására.

Mivel síkhullámok esetén A csak a  $\xi = k \cdot x$  változótól függ, ezért S-et a következő alakban keressük (Landau és Lifsic 1976)

$$S = P \cdot x + g(\xi), \quad (1.18)$$

ahol P tetszőleges állandó és  $g(\xi)$  meghatározandó függvény.

(1.18)-at (1.14)-be helyettesítve  $g(\xi)$ -re az alábbi közönséges differenciálegyenlet adódik

$$P^2 + 2k \cdot P \frac{dg}{d\xi} - 2 \frac{e}{c} A \cdot P + \frac{e^2}{c^2} A^2 = (mc)^2, \quad (1.19)$$

amelynek megoldását közvetlen kiintegrálással megkaphatjuk,

$$g(k \cdot x) = \frac{1}{2k \cdot P} \int d\xi [2 \frac{e}{c} P \cdot A(\xi) - \frac{e^2}{c^2} A^2(\xi)] - \frac{P^2 - (mc)^2}{2k \cdot P} k \cdot x. \quad (1.20)$$

Feltesszük, hogy  $P$  a szabad tömeghéjon van, azaz  $P^2 = (mc)^2$ .

Ekkor (1.18) és (1.20) szerint

$$S(x, P) = P \cdot x + \frac{1}{2k \cdot P} \int d\xi [2 \frac{e}{c} P \cdot A(\xi) - \frac{e^2}{c^2} A^2(\xi)]. \quad (1.21)$$

Az elektron négyesimpulzusa és pályája (1.12) és (1.13) alapján számítható:

$$p = P + \frac{k}{2k \cdot P} (2 \frac{e}{c} P \cdot A - \frac{e^2}{c^2} A^2), \quad (1.22)$$

$$Q = x - \frac{k}{2(k \cdot P)^2} \int d\xi [2 \frac{e}{c} P \cdot A(\xi) - \frac{e^2}{c^2} A^2(\xi)] + \frac{1}{k \cdot P} \frac{e}{c} \int d\xi A(\xi). \quad (1.23)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy az elektron kinetikus négyesimpulzusa (1.5a) és (1.5b) szerint a következő alakba írható:

$$p - \frac{e}{c} A = m \frac{dx}{d\tau}, \quad d\tau \equiv dt \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, \quad (1.24)$$

és ha a fenti összefüggésbe  $p$  (1.22)-ben megadott kifejezését behelyettesítjük, akkor az alábbi egyenlethez jutunk

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{m} [P + \frac{k}{2k \cdot P} (2 \frac{e}{c} P \cdot A - \frac{e^2}{c^2} A^2) - \frac{e}{c} A]. \quad (1.25)$$

Az (1.25) egyenlet mindkét oldalát  $k$ -val skalárisan szorozva kapjuk, hogy

$$\frac{d}{d\tau} k \cdot x = \frac{1}{m} k \cdot P \rightarrow k \cdot x(\tau) = \frac{k \cdot P}{m} \tau + k \cdot x_{(0)}. \quad (1.25a)$$

( $x_{(0)}$  tetszőleges konstans amelyet a továbbiakban nullának tekintünk.) Az egyszerűség kedvéért válasszuk  $P = t P = (mc, \underline{Q})$ -nak. Ez annak felel meg, hogy az elektron kezdetben nyugszik. Ekkor  $k \cdot x(\tau) = \omega \tau$ . Az (1.25) egyenletet mostmár  $x(\tau)$  minden komponensére megoldhatjuk, mivel a jobboldalon  $\tau$  ismert függvényei állnak.

$$x(\tau) = \frac{1}{m} P \tau + \frac{1}{m} \int d\tau' [\frac{k}{2k \cdot P} (-\frac{e^2}{c^2} A^2(\omega \tau')) - \frac{e}{c} A(\omega \tau')] \quad (1.26)$$

Az (1.17) potenciállal számolva  $x(\tau)$  konkrét alakja:

$$x(\tau) = \frac{1}{m} P \tau - \lambda v (\epsilon \sin \omega \tau - \frac{1}{8} v \cdot n \sin 2\omega \tau) + \frac{1}{4} v^2 n c \tau, \quad (1.27a)$$

ahol  $n \equiv (k/k_0) = (1, \underline{n})$   $k$  irányu nullvektor és  $v = \frac{ea_0}{mc^2}$  az

(1.3d)-ben definiált intenzitásparaméterrel azonos. (1.27a) komponensekkel kiírva

$$x_o(\tau) = c\tau + \frac{1}{4} v^2 c\tau + \frac{1}{8} \chi v^2 \sin 2\omega\tau, \quad (1.27b)$$

$$\underline{r}(\tau) = -\chi v(\underline{\epsilon} \sin \omega\tau - \frac{1}{8} v\underline{n} \sin 2\omega\tau) + \frac{1}{4} v^2 \underline{n} c\tau. \quad (1.27c)$$

Az elektron mozgása tehát az  $\underline{\epsilon}$  és  $\underline{n}$  vektorok által kifeszített síkban egy  $\underline{n}$  irányu translációból és egy lemniszkátán történő periódikus mozgásból tehető össze.

A

$$v(\tau) \equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{m} p - cv(\underline{\epsilon} \cos \omega\tau - \frac{1}{4} v\underline{n} \cos 2\omega\tau) + \frac{1}{4} v^2 c\underline{n} \quad (1.28a)$$

négysessebesség komponensei a következők:

$$v_o(\tau) = c + \frac{1}{4} v^2 c + \frac{1}{4} v^2 c \cos 2\omega\tau, \quad (1.28b)$$

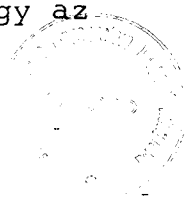
$$\underline{v}(\tau) = -cv(\underline{\epsilon} \cos \omega\tau - \frac{1}{4} v\underline{n} \cos 2\omega\tau) + \frac{1}{4} v^2 c \underline{n}. \quad (1.28c)$$

(1.27b), (1.28c) és (1.5a) valamint dt (1.24)-beli definíciójának felhasználásával belátható, hogy az elektron összenergiája

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2} \cos^2 \omega\tau\right). \quad (1.28d)$$

$v \ll 1$  esetben (1.27c) és (1.28c) egybeesik az (1.3c)-ben megadott nemrelativisztikus eredménnyel.

Ha az (1.27a) és (1.28a) formulák által definiált pályákat az elektronon történő fényszórás leírására akarjuk használni, akkor először tisztáznunk kell, hogy milyen kezdeti feltételeknek felelnek meg. A szórásfolyamatot úgy képzelhetjük el, hogy a kezdetben pl. nyugvó elektront egy fényhullámvonulat éri el, amelynek hatására az elektron oszcillálni kezd és sugároz. Az ilyen jelenségek tárgyalásához az általunk fentebb használt tiszta monokromatikus síkhullámok nem alkalmasak, mert amplitúdóik definíció szerint térben és időben állandók, vagyis ez esetben a "beeső fény" mindig és mindenütt jelen van. Belátható azonban (Kibble 1965, Eberly 1969), hogyha a beeső fényt egy  $e^{-\alpha |n \cdot x|}$  faktorral adiabatikusan be(ki) kapcsoljuk, akkor így az





$n \cdot x = c\tau = -\infty$  sajátidőpontban nyugvó elektron pályájára kapott összefüggésekből az  $\alpha \rightarrow 0$  határesetben reprodukálhatjuk az (1.27a) és (1.28a) képleteket bármely véges  $\tau$ -ra. Leubner (1978) olyan négyyszögamplitudóju hullámvonulatot használt amelyre

$$A = \begin{cases} a_0 \epsilon \cos k \cdot x, & \alpha |n \cdot x| < N \\ 0 & , \alpha |n \cdot x| > N, \end{cases}$$

(a hullámvonulatban  $2N$  periódus van,  $N$  nagy egész szám). Olyan  $x'$ -re amelyre pl.  $\alpha n \cdot x' < -N$ , az elektron nyugszik. Az  $\alpha n \cdot x = -N$  pontban éri el a hullámvonulat. Ez a pont valójában nem tekinthető igazi bekapcsolási pontnak, mert az  $\alpha n \cdot x' < -N$  feltételt kielégítő  $t'$  időpillanatok nagyobbak is lehetnek, mint az  $\alpha n \cdot x \geq -N$ -ben szereplő  $t$  időpontok. Az adiabatikus bekapcsolásnál ilyen kauzalitási problémánk nincs, mert az  $e^{-\alpha |n \cdot x|}$  faktor a  $t = -\infty$  időpontban bármely véges  $\underline{r}$  helyen zérus, tehát ezzel biztosítani tudjuk, hogy az elektron kezdetben teljesen szabad legyen.

1B. Monokromatikus fényben mozgó elektron sugárzási tere.

Intenzív Thomson-szórás

Az  $x(t)$  pályán  $v(t)$  sebességgel mozgó pontszerű elektron

$$\rho(\underline{r}, t) = e \delta_3(\underline{r} - \underline{r}(t))$$

töltéssűrűséget, és

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = e \underline{v}(t) \delta_3(\underline{r} - \underline{r}(t))$$

áramsűrűséget képvisel ( $\delta_3$  háromdimenziós Dirac-delta). Az előző részben az  $x(\tau)$  és  $v(\tau)$  függvényeket tudtuk csak megkapni, tehát a mozgás jellemzői az elektron sajátidejével paraméterezve állnak rendelkezésünkre, ez azonban teljesen elegendő az elektron sugárzási terét leíró  $A_S$  négyespotenciál kiszámításához. Egyszerűen belátható, hogy az elektron  $j = \{j^\mu\} = (c\rho, \underline{j})$  négyesáramsűrűsége a következő alakra hozható

$$j(x) = ce \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \delta_4(x - x(\tau)) d\tau, \quad (1.30)$$

ahol  $\delta_4$  négydimenziós Dirac-deltát jelöl.

A Maxwell-elmélet szerint  $A_S$ -t az alábbi inhomogén D'Alembert-egyenlet partikuláris megoldása szolgáltatja:

$$\partial^2 A_S = \frac{4\pi}{c} j. \quad (1.31)$$

A megoldást (1.31)  $G(y-x)$  Green-függvényének ismeretében könnyedén felírhatjuk,

$$A_s(y) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x G(y-x) j(x). \quad (1.32)$$

Definíció szerint  $G(y-x)$  kielégíti a  $\delta_4(y-x)$  forrásu inhomogén D'Alembert-egyenletet,

$$\partial_y^2 G(y-x) = \delta_4(y-x), \quad (1.33)$$

amelynek megoldása (lásd pl. Jackson 1963):

$$G(y-x) = \frac{1}{4\pi c |\underline{R}-\underline{r}|} \delta(t - \frac{1}{c} |\underline{R}-\underline{r}| - \frac{1}{c} x_0), \quad ct > x_0, \quad (1.34)$$

ahol

$$\{y^\mu\} = (ct, \underline{R}), \quad \{x^\mu\} = (x_0, \underline{r}).$$

Az áramsűrűség (1.30) alakját (1.32)-be helyettesítve  $A_s(y)$ -ra a következő eredmény adódik

$$A_s(y) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(y-x(\tau)) v(\tau). \quad (1.35a)$$

$G$  (1.34)-ben megadott előállítását figyelembevéve (1.35a) így írható:

$$A_s(\underline{R}, t) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau) d\tau}{|\underline{R}-\underline{r}(\tau)|} \delta(t - \frac{1}{c} |\underline{R}-\underline{r}(\tau)| - \frac{1}{c} x_0(\tau)). \quad (1.35b)$$

Az (1.35b)-ben szereplő integrálokat az  $|\underline{R}| \rightarrow \infty$  határesetben számítjuk ki, vagyis feltesszük, hogy a szórt sugárzás  $\underline{R}$  észlelési helye nagyon messze van a forrástól. A szórt sugárzás skalárpotenciálja (1.35b), (1.27 b-c) és (1.28b) alapján a következő alakra hozható

$$\Phi_s(\underline{R}, t) = \frac{e}{R} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left( 1 + \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4} \cos 2\omega\tau \right) \cdot \exp\left\{i\eta\left(t - \frac{R}{c}\right) - i\eta \frac{v}{\omega} (\underline{s} \underline{\epsilon}) \sin \omega\tau - i\eta \frac{v^2}{8\omega} [1 - (\underline{s} \underline{n})] \sin 2\omega\tau - i\eta w\tau\right\}, \quad (1.36)$$

ahol  $\underline{s} \equiv (\underline{R}/R)$  az észlelés irányába mutató egységvektor és

$$w \equiv 1 + \frac{v^2}{4} [1 - (\underline{s} \underline{n})]. \quad (1.36a)$$

(1.36) megkapásához felhasználtuk az  $|\underline{R} - \underline{r}| \approx R - \underline{s} \underline{r}$  közelítést, valamint az (1.35b)-ben szereplő Dirac-delta Fourier-előállítását,

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta a} d\eta.$$

(1.36)-ban az exponenciális kifejezés Fourier-sorba fejthető a Jacobi-Anger-formula (Erdélyi 1953) segítségével, amely szerint

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_{\ell}(z) e^{i\ell\varphi}, \quad (1.37)$$

$J_{\ell}(z)$   $\ell$ -edrendű elsőfajú Bessel-függvény. (1.37) alapján

$$\begin{aligned} \exp\{-in\frac{v}{\omega}(\underline{s}\underline{\epsilon})\sin\omega\tau - in\frac{v^2}{8\omega} [1 - (\underline{s}\underline{n})]\sin 2\omega\tau\} = \\ = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\ell-2m}(-n\frac{v}{\omega}(\underline{s}\underline{\epsilon})) J_m(-n\frac{v^2}{8\omega} [1 - (\underline{s}\underline{n})]) \right] e^{i\ell\omega\tau}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

(1.38) (1.36)-ba helyettesítése után ha először  $\tau$  szerint kiintegrálunk, akkor  $\delta(\ell\omega - n\omega)$  típusú Dirac-deltákat kapunk, majd az  $n$  szerinti integrálást elvégezve  $\Phi_S$ -re a következő formulát nyerjük

$$\Phi_S(\underline{R}, t) = \frac{e}{R} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \Phi_S^{(\ell)}(\underline{R}, t), \quad (1.39)$$

ahol

$$\Phi_S^{(\ell)}(\underline{R}, t) \equiv \frac{2}{w} [C_{\ell} + \frac{v^2}{4} C_{\ell} + \frac{v^2}{8} (C_{\ell-2} + C_{\ell+2})] \frac{e}{R} \cos[\frac{\ell\omega}{w}(t - \frac{R}{c})], \quad (1.39a)$$

és

$$C_{\ell} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\ell-2m}(-\rho) J_m(-\delta/2); \quad (1.39b)$$

valamint

$$\rho \equiv \frac{\ell v}{w} (\underline{s}\underline{\epsilon}), \quad \delta \equiv \frac{\ell v^2}{4 w} [1 - (\underline{s}\underline{n})] = \ell \frac{w-1}{w}. \quad (1.39c)$$

A szórt sugárzás skalárpotenciálja egy sztatikus Coulomb teret és  $(\ell\omega/w)$  frekvenciájú kifutó gömbhullámokat ír le. Belátható, hogy az (1.39b)-ben definiált  $C_{\ell}$  függvények kielégítik az alábbi rekurziós formulát:

$$2C_{\ell} + \rho(C_{\ell-1} + C_{\ell+1}) + \delta(C_{\ell-2} + C_{\ell+2}) = 0. \quad (1.39d)$$

(1.39d) és az (1.39c) definíciók felhasználásával az  $(\ell\omega/w)$  frekvenciájú komponens skalárpotenciálja a következő alakra hozható

$$\Phi_S^{(\ell)}(\underline{R}, t) = -\frac{1}{w} \frac{2}{[1 - (\underline{s}\underline{n})]} [(\underline{s}\underline{n}) C_{\ell} + v(\underline{s}\underline{\epsilon}) B_{\ell}] \frac{e}{R} \cos[\frac{\ell\omega}{w}(t - \frac{R}{c})], \quad (1.40)$$

ahol

$$B_{\ell} \equiv \frac{1}{2} (C_{\ell-1} + C_{\ell+1}). \quad (1.40a)$$

(1.35b), (1.27 b-c) és (1.28c) alapján az imént látott fogások segítségével a szórt sugárzás komponenseinek vektorpotenciáljára az alábbi kifejezést kapjuk

$$\underline{A}_s^{(\ell)}(\underline{R}, t) = -\frac{1}{w} \frac{2}{[1 - (\underline{s} \cdot \underline{n})]} \{ [1 - (\underline{s} \cdot \underline{n})] v B_\ell \underline{\epsilon} + [c_\ell + v(\underline{s} \cdot \underline{\epsilon}) B_\ell] \underline{n} \} \frac{e}{R} \cos\left[\frac{\ell \omega}{w} \left(t - \frac{R}{c}\right)\right]. \quad (1.41)$$

A fentiek szerint a szórt fény spektruma diszkrét és az egyes komponensek  $\omega(\ell)$  frekvenciái nem egyszerűen a beeső fény frekvenciájának egészszámu többszöröse, hanem egy intenzitásfüggő eltolódást is tartalmaznak. (1.36a) figyelembevételével

$$\omega(\ell) = \frac{\ell \omega}{1 + \frac{v^2}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\ell \omega}{w}, \quad (1.42)$$

ahol  $\theta$  a szórási szög,  $\cos \theta = (\underline{s} \cdot \underline{n})$ .

Az egyes felharmonikusak differenciális hatáskeresztmetszeteinek meghatározása végett először az (1.40) és (1.41)-ben megadott potenciálokat használva előállítjuk a megfelelő térerősségeket,

$$\underline{E}_s^{(\ell)} = -\text{grad}_R \Phi_s^{(\ell)} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}_s^{(\ell)}, \quad \underline{B}_s^{(\ell)} = \text{rot}_R \underline{A}_s^{(\ell)},$$

s ezután kiszámoljuk a szórt sugárzás  $\underline{S}$  Poynting-vektorának egy periódusra vett átlagértékét,

$$\begin{aligned} \langle \underline{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle \underline{E}_s^{(\ell)} \times \underline{B}_s^{(\ell)} \rangle = \underline{s} \frac{c}{8\pi} \left(\frac{\ell \omega}{cw}\right)^2 \frac{4e^2}{R^2} [ (C_\ell \text{ctg} \frac{\theta}{2} + v B_\ell \cos \phi)^2 + \\ &+ (v B_\ell \sin \phi)^2 ] + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$O(1/R^3)$  az  $(1/R)$ -ben másodrendűnél magasabbrendű tagok összegét jelenti. (1.43)-ban  $\theta$  és  $\phi$  az  $\underline{s}$  vektor polárszögei az  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{n} \times \underline{\epsilon}$  és  $\underline{n}$  vektorok által kifeszített koordinátarendszerben,  $\underline{s} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . (1.43) alapján az  $\ell$ -edik felharmonikus differenciális hatáskeresztmetszetére a következőt kapjuk

$$\frac{d\sigma^{(\ell)}}{d\Omega} = r_0^2 \left(\frac{2\ell}{wv}\right)^2 [ (C_\ell \text{ctg} \frac{\theta}{2} + v B_\ell \cos \phi)^2 + (v B_\ell \sin \phi)^2 ], \quad (1.44)$$

ahol  $r_0 \equiv (e^2/mc^2) \sim 10^{-13} \text{cm}$  a klasszikus elektron rádiusz. Az itt közölt (1.44) eredmény tökéletes egyezésben van a Leubner (1978, 1981) által más módszerrel kapott differenciális hatáskeresztmetszettel, amely  $v_0 = 0$  határesetben átmegy (1.44)-be.

(1.27 b-c) és (1.28 b-c) alapján megállapíthatjuk, hogy az (1.42)-ben szereplő  $\frac{v^2}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$  intenzitásfüggő frekvenciaeltolódás az elektron  $\frac{v}{4} c \underline{n}$  sebességű translációs mozgása következtében

fellépő Doppler-eltolódás. Nem relativisztikus esetben (lásd (1.3c)-t) ez a drift nem jelentkezik, s az elektron az (1.27c)-ben paraméterezett lemniszkáta mozgás helyett egyszerűen lineáris harmonikus rezgőmozgást végez. Ekkor a szórt sugárzásban a pontos felharmonikusokat kapjuk (Jackson 1963), és

$$\frac{d\sigma_{NR}^{(\ell)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} \ell^4 \left( \frac{2J_\ell(z_\ell)}{z_\ell} \right)^2, \quad (1.45)$$

$$z_\ell \equiv \ell v(\underline{s} \cdot \underline{\epsilon}), \quad \frac{d\sigma_{Th}}{d\Omega} = r_0^2 |\underline{s} \times \underline{\epsilon}|^2. \quad (1.45a-b)$$

$(d\sigma_{Th}/d\Omega)$  a Thomson-féle hatáskeresztmetszet. Mivel

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{2J_\ell(z_\ell)}{z_\ell} = \delta_{\ell,1} \begin{cases} 0 & \ell \neq 1 \\ 1 & \ell = 1 \end{cases}$$

ezért kis intenzitásoknál ( $v \ll 1$ ) a felharmonikus keltésnek nincs jelentősége és  $(d\sigma^{(\ell)}/d\Omega)$  a Thomson-féle differenciális hatáskeresztmetszetre redukálódik.

## 2. KLASSZIKUS ELEKTRON KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TERE

Az alábbiakban a külső elektromágneses síkhullámtérben mozgó nemrelativisztikus elektron kvantált sugárzási terét vizsgáljuk e tér Schrödinger-egyenletének egzakt megoldásai segítségével. Bebizonyítható, hogyha a sugárzási tér kezdetben vákuumállapotban volt, akkor bármilyen klasszikus áramforrás hatására minden módusa koherens állapotba kerül. Ezt az általános tételt használjuk fel a szabad elektronon szóródó fény néhány statisztikus tulajdonságának elemzéséhez. Kiszámítjuk a szórt sugárzás normál-módusaihoz tartozó differenciális hatáskeresztmetszetek várható értékét és a kapott eredményt összevetjük az előző fejezetben látottakkal.

A  $\underline{j}(\underline{r}, t)$  áramsűrűség sugárzási tere  $|\Phi\rangle$  állapotvektorának időbeli változását kölcsönhatási képben az alábbi egyenlet írja le (e fejezetben Coulomb-mértéket használunk),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle = \left( -\frac{1}{c} \int d^3r \underline{j}(\underline{r}, t) \underline{A}(\underline{r}, t) \right) |\Phi\rangle, \quad (2.1)$$

ahol  $\underline{A}(\underline{r}, t)$  a sugárzási tér kvantált vektorpotenciálja, amely síkhullámok szerint kifejtve a következő alakú:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}, \lambda} [\underline{g}(\underline{k}, \lambda; \underline{r}, t) a_{\underline{k}, \lambda} + \underline{g}^*(\underline{k}, \lambda; \underline{r}, t) a_{\underline{k}, \lambda}^+], \quad (2.1a)$$

$$\underline{g}(\underline{k}, \lambda; \underline{r}, t) \equiv c \left( \frac{2\pi\hbar}{\omega_{\underline{k}} V} \right)^{1/2} \underline{\epsilon}(\underline{k}, \lambda) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega_{\underline{k}} t)}, \quad \omega_{\underline{k}} = c|\underline{k}|. \quad (2.1b)$$

$\underline{k}$  az egyes Fourier-komponensek hullámvektora,  $\underline{\epsilon}(\underline{k}, \lambda)$  a  $\underline{k}$ -hoz tartozó  $\lambda$  indexű polarizációs egységvektor,  $V$  a kvantálási térfogat. Az  $a_{\underline{k}, \lambda}$  és  $a_{\underline{k}, \lambda}^+$  amplitudók az

$$[a_{\underline{k}, \lambda}, a_{\underline{k}', \lambda'}^+] = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [a_{\underline{k}, \lambda}, a_{\underline{k}', \lambda'}] = [a_{\underline{k}, \lambda}^+, a_{\underline{k}', \lambda'}^+] = 0 \quad (2.1c)$$

felcserélési relációkat elégíti ki.

(2.1) megoldása klasszikus áram esetében könnyen felírható (Glauber 1963 b) (a lényegtelen fázisfaktorokat nem tüntetjük fel),

$$|\Phi(t)\rangle = \prod_{\underline{k}, \lambda} D(\alpha_{\underline{k}, \lambda}(t)) |\Phi(t_0)\rangle, \quad (2.2)$$

ahol

$$D(\alpha_{\underline{k}, \lambda}(t)) \equiv \exp [\alpha_{\underline{k}, \lambda}(t) a_{\underline{k}, \lambda}^+ - \alpha_{\underline{k}, \lambda}^*(t) a_{\underline{k}, \lambda}], \quad (2.3)$$

és

$$\alpha_{\underline{k}, \lambda}(t) \equiv \frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t dt \int d^3r \underline{j}(\underline{r}, t) \underline{g}^*(\underline{k}, \lambda; \underline{r}, t), \quad (2.4)$$

$|\Phi(t_0)\rangle$  a sugárzási tér kezdeti állapota.  $|\Phi(t)\rangle$  (2.2) alakjának elemzése céljából felsoroljuk a (2.3)-ban definiált  $D(\alpha)$  unitér operátorok néhány fontosabb tulajdonságát.

$$A \quad D(\alpha) \equiv e^{\alpha a^+ - \alpha^* a} \quad (2.5a)$$

által generált unitér transzformáció az  $a$  ill.  $a^+$  bozonoperátorokat  $\alpha$  ill.  $\alpha^*$  értékekkel eltolja,

$$D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad D^{-1}(\alpha) a^+ D(\alpha) = a^+ + \alpha^*. \quad (2.5b)$$

Érvényes a következő szorzási szabály

$$D(\alpha) D(\beta) = D(\alpha + \beta) e^{i \text{Im}(\alpha \beta^*)}, \quad (2.5c)$$

$\text{Im}$  imaginárius részt jelent.

$D(\alpha)$  az  $\alpha$  paraméterű koherens állapot keltőoperátora,

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (2.5d)$$

ahol  $|\alpha\rangle$  az a operátor  $\alpha$  sajátértékhez tartozó sajátállapota ( $\alpha$  tetszőleges komplex szám lehet),

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.5e)$$

$|\alpha\rangle$  az  $|n\rangle$  számsajátállapotok szerint kifejtett alakja a (2.5e) definíciós egyenletből könnyen megkapható,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle, \quad (2.5f)$$

tehát, ha az adott módus koherens állapotban van, akkor a foton-szám  $|\alpha|^2$  paraméterű Poisson-eloszlást követ,

$$P_n \equiv |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (2.5g)$$

(2.2) és (2.5d) alapján megállapíthatjuk, hogy bármilyen klasszikus áram a vákuumból koherens állapotu elektromágneses teret generál.

Az (1.2) külső monokromatikus síkhullámok hatásainak kitett, nemrelativisztikus elektron  $\underline{j}$  áramsűrűsége (1.3c) alapján így írható

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = -ce \underline{v} \underline{\epsilon} \cos \omega t \delta_3(\underline{r} + \lambda \underline{v} \underline{\epsilon} \sin \omega t). \quad (2.6)$$

Ezzel az árammal  $\alpha_{\underline{k}, \lambda}$ -ra (2.4), (2.1b) és (1.37) figyelembevételével a következő kifejezés adódik

$$\alpha_{\underline{k}, \lambda}(T/2) = -\frac{i}{\hbar} c e v \left( \frac{2\pi\hbar}{\omega_{\underline{k}} v} \right)^{1/2} \sum_{\underline{\epsilon} \in (\underline{k}, \lambda)} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\ell J_{\ell}(\chi v \underline{k} \underline{\epsilon})}{(\chi v \underline{k} \underline{\epsilon})} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega_{\underline{k}} + \ell\omega)t} dt \quad (2.7)$$

( $J_{\ell}$   $\ell$ -edrendű Bessel-függvény,  $T/2 = t$ ,  $-T/2 = t_0$ ).

(2.7)-ből kitűnik, hogy a  $t \rightarrow \infty$  határesetben  $\alpha_{\underline{k}, \lambda}(T/2) \delta(\omega_{\underline{k}} + \ell\omega)$  típusú Dirac-deltákat tartalmaz, tehát ha a rendszer kezdetben vákuum állapotban volt ( $|\Phi(-\infty)\rangle = |0\rangle$ ), akkor a  $|\Phi(+\infty)\rangle$  végállapotban csak az  $\ell\omega$  frekvenciájú módusok maradnak gerjesztett állapotban. A szórásfolyamat során egy  $\underline{s} = (\underline{k}/|\underline{k}|)$  irányba  $d\Omega(\underline{s})$  térszögelembe egységnyi idő alatt kisugárzott energia várható értékének az  $\ell\omega$  frekvenciához tartozó járuléka

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{\ell}(\underline{s}) \rangle &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\lambda} \hbar \ell \omega \langle a_{\ell\omega \underline{s}, \lambda}^+ a_{\ell\omega \underline{s}, \lambda} \rangle = \\ &= r_0^2 |\underline{s} \times \underline{\epsilon}|^2 \ell^4 \left( \frac{2J_{\ell}(z_{\ell})}{z_{\ell}} \right) I_0 d\Omega(\underline{s}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ahol  $I_0 = (cE_0^2/8\pi)$  a beeső külső tér intenzitása, és  $z_{\ell}$  definíciója ugyanaz mint (1.45a)-ban. (2.8) szerint az  $\ell$ -edik felharmonikus hatáskeresztmetszetének várható értéke megegyezik az első fejezetben a klasszikus elektrodinamika segítségével kapott (1.45) értékkel,

$$\left\langle \frac{d\sigma^{(\ell)}}{d\Omega(\underline{s})} \right\rangle \equiv \frac{\langle \varepsilon_{\ell}(\underline{s}) \rangle}{I_0 d\Omega(\underline{s})} = r_0^2 |\underline{s} \times \underline{\epsilon}|^2 \ell^4 \left( \frac{2J_{\ell}(z_{\ell})}{z_{\ell}} \right)^2. \quad (2.9)$$



### 3. KÜLSŐ ELEKTROMÁGNESES SIKHULLÁMOKKAL KÖLCSÖNHATÓ NEMRELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRONOK KVANTUMMECHANIKAI LEIRÁSA

E fejezet első részében megoldjuk az elektromágneses síkhullámmal kölcsönható szabad elektron Schrödinger-egyenletét dipólközelítésben, majd dipólközelítésen túl, és megvizsgáljuk e megoldásrendszerek ortogonalitását, teljességét. A monokromatikus síkhullámok térfüggésének pontos figyelembevételével kapott hullámfüggvények analízise alapján a fényel kölcsönható elektronok energiaspektrumának sávós szerkezetére következtetünk (optikailag indukált sáv szerkezet), s ennek kapcsán diszkutáljuk az intenzív fényel kölcsönható elektron Schrödinger-egyenlettel való leírásának határait.

A második részben az intenzív sugárzási térben tartozkodó szabad elektron valamilyen háttérpotenciálon való szóródását vizsgáljuk. Kiszámoljuk az ilyen esetben lezajló indukált direkt és inverz fékezési sugárzás differenciális hatáskeresztmetszetét és áttekintjük a kapcsolódó kísérleti eredményeket.

#### 3A. Nemrelativisztikus elektron hullámfüggvényei külső elektromágneses síkhullámtérben

A szabad elektron Schrödinger-egyenlete az  $\underline{A}$  vektorpotenciállal jellemzett sugárzási térben

$$\frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \underline{A} \right)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.1)$$

ahol  $\hat{p}$  az elektron kanonikus impulzusának operátora és  $\hbar$  a Planck-állandó  $2\pi$ -ed része.

Dipólközelítésben  $\underline{A}$  csak az időtől függ és (3.1) impulzusreprezentációban egyszerűen kiintegrálható (Bergou 1980). (3.1) általános megoldása

$$\psi(\underline{p}, t) = F(\underline{p}) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2m} \left( \underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A}(\tau) \right)^2 d\tau \right] \quad (3.2a)$$

ahol  $F(\underline{p})$  tetszőleges függvény.  $\psi$  koordinátareprezentációbeli alakja (3.2a)-ból Fourier-transzformálással kapható meg,

$$\psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 p' \psi(\underline{p}', t) e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p}' \cdot \underline{r}} \quad (3.2b)$$

Ha az  $F(\underline{p}')$  függvényt  $\delta_3(\underline{p} - \underline{p}')$ -nek választjuk, akkor  $\psi(\underline{r}, t)$  (3.2a-b) szerint a következő formájú lesz

$$\psi(\underline{r}, t) = \varphi_{\underline{p}}(\underline{r}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p} \cdot \underline{r} - Et)} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[ \frac{e}{mc} \underline{p} \cdot \underline{A}(\tau) - \frac{e^2}{2mc^2} A^2(\tau) \right]\right\}, \quad E \equiv \frac{p^2}{2m} \quad (3.3)$$

(Keldis 1964, Kohler 1966). Könnyen belátható, hogy a (3.3)-ban definiált  $\varphi_{\underline{p}}(\underline{r}, t)$  modulált síkhullámok ortogonális és teljes rendszert alkotnak.

Ha a vektorpotenciálban a térfüggést is figyelembe vesszük, akkor (3.1) megoldása már nem annyira triviális mint dipólközelítésben volt. Ebben az esetben (3.1) a következőképpen írható (koordináta reprezentációban):

$$\frac{1}{2m} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial \underline{r}} + \frac{e}{c} \underline{A}(\xi) \right)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\xi \equiv \omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}, \quad \omega = c|\underline{k}|, \quad \underline{k} \cdot \underline{A} = 0. \quad (3.4a)$$

A fenti egyenlet megoldását (3.3)-ra emlékezve keressük modulált síkhullám alakban,

$$\psi = \psi_{\underline{p}}(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p} \cdot \underline{r} - Et)} f(\xi). \quad (3.5)$$

A moduláció itt tehát nemcsak az időtől függ, mint (3.3) esetében, hanem a teljes  $\xi = \omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}$  hullámargumentumtól. (3.5)-öt (3.4)-be helyettesítve  $f(\xi)$ -re az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk (vesszővel a  $\xi$  szerinti deriválást jelöljük)

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2(1 - \frac{v_{||}}{c})} f'' + if' + \frac{(e/mc)\underline{A} \cdot \underline{p} - (e^2 A^2/2mc^2)}{\hbar\omega(1 - \frac{v_{||}}{c})} f = 0, \quad (3.6a)$$

$$v_{||} \equiv (\underline{n} \cdot \underline{p}/m), \quad (3.6b)$$

ahol  $\underline{n}$  a síkhullám terjedési irányába mutató egységvektor és  $v_{||}$  a sebesség ezzel párhuzamos komponense. (3.6a)-ban a második derivált együtthatója lényegében a  $\hbar\omega$  foton energia és az elektron-positron párkeltési energia hányadosa, amely optikai frekvenciák

esetében igen kicsiny ( $10^{-6}$  nagyságrendű). Ha ezt a tagot elhagyjuk, akkor (3.6a) egyszerűen kiintegrálható a következő eredménnyel (Ehlotzky 1978, Nickle 1966)

$$f \approx \exp \left[ -i \int d\xi \frac{(e/mc) \underline{p} \cdot \underline{A}(\xi) - e^2 A^2(\xi) / 2mc^2}{\hbar\omega(1-v_{||}/c)} \right]. \quad (3.7)$$

A fenti közelítés jogossága azonban nemcsak a második derivált együtthatójának nagyságrendjétől függ. Ha (3.7)-et visszahelyettesítjük (3.6a)-ba, akkor - mivel a baloldal második és harmadik tagjának összege nulla - az alábbi összefüggéshez jutunk

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2} \left( \frac{K}{\hbar\omega} \right)^2 \approx 0, \quad K \equiv (e/mc) \underline{p} \cdot \underline{A} - e^2 A^2 / 2mc^2, \quad (3.7a)$$

ahol  $K$  az elektron-fény kölcsönhatási energia. (3.7a) alapján világos, hogyha a fény intenzitása elég nagy akkor a  $(K/\hbar\omega)^2$  arány ( $\hbar\omega/2mc^2$ ) kicsinységét kompenzálni tudja, vagyis (3.7) durva közelítésnek bizonyul. Következésképpen (3.6a) baloldalának mindhárom tagját figyelembe kell venni (Bergou és Varró 1980 b). Mielőtt (3.6a) egzakt megoldásával foglalkoznánk megjegyezzük, hogy ha (3.7) exponensének nevezőjében a  $(v_{||}/c)$  Doppler-eltolódástól eltekintünk, akkor az így kapott (3.5) típusu hullámfüggvények ortogonális és teljes rendszert képeznek.

Térjünk most vissza a (3.6a) egyenlethez és az egyszerűség kedvéért használjunk monokromatikus cirkulárisan polarizált potenciált,

$$\underline{A} = A_0 (\underline{e}_1 \cos\xi + \underline{e}_2 \sin\xi), \quad \xi = \omega(t - \underline{n} \cdot \underline{r}/c). \quad (3.9)$$

(Ebben az esetben  $\underline{A}^2 = A_0^2 = \text{konstans.}$ )

Mivel  $f'$  és  $f''$  együtthatói állandók, ezért az első deriváltat a következő helyettesítéssel kiküszöbölhetjük.

$$f(\xi) = \exp(-i \frac{2mc^2(1-v_{||}/c)}{\hbar\omega} \frac{1}{2} \xi) g(\xi). \quad (3.10)$$

Ezzel (3.6a -ból)  $g$ -re az alábbi Mathieu-egyenletet kapjuk

$$g''(z) + (a - 2q \cdot \cos 2z) g(z) = 0, \quad (3.10a)$$

ahol

$$a \equiv \left( \frac{2mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \left[ \left( 1 - \frac{v_{||}}{c} \right)^2 - v^2 \right], \quad (3.10b)$$

$$q \equiv - \left( \frac{2mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 v \left( \frac{v_{\perp}}{c} \right), \quad (3.10c)$$

$$v_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{m}, \quad p_{\perp} \equiv [(e_1 p)^2 + (e_2 p)^2]^{1/2}, \quad (3.10d)$$

$$z \equiv \frac{1}{2} (\xi - \alpha), \quad (3.11)$$

$$\alpha \equiv \arctg[(e_2 p) / (e_1 p)], \quad (3.12)$$

$v = (eA_0/mc^2)$  a már ismert intenzitásparaméter.

(3.10a) általános megoldása

$$g(z) = Ae^{-\mu z} \Phi(z) + Be^{\mu z} \Phi(-z) \quad (3.13)$$

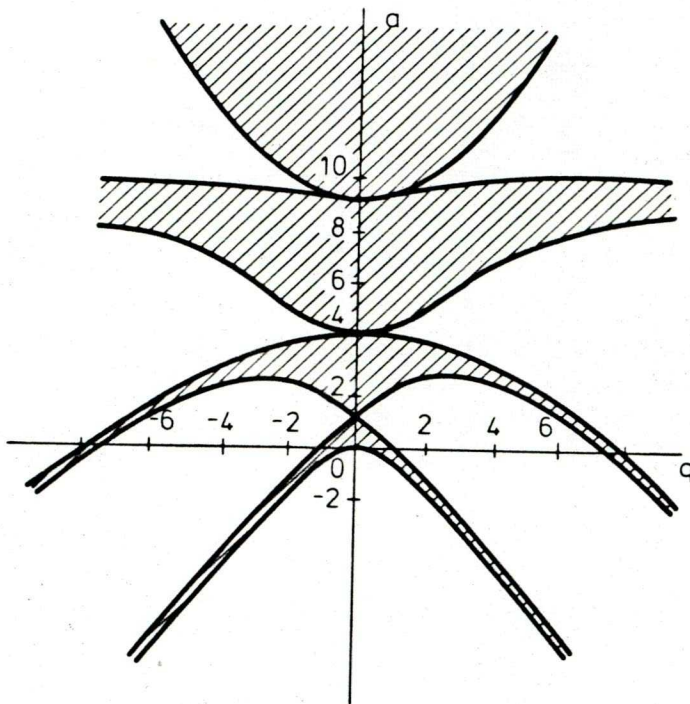
alakban írható (Arscott 1964), ahol A és B konstansok,  $\Phi(z)$   $\pi$  periódusu függvény, és  $\mu$  a karakterisztikus exponens, amely általában komplex szám. Ha  $\mu$  valós része nem nulla, akkor  $z \rightarrow \pm\infty$  esetén a (3.13) függvény divergál, tehát a fizikailag elfogadható stacioner megoldásokra  $\mu$ -nek tiszta képzetesnek kell lennie. A Mathieu-függvények elmélete szerint  $\mu$  a következő sajátértékegyenletből határozható meg

$$\operatorname{ch}\pi\mu = 1 - 2\Delta(0) \sin^2 \frac{1}{2} \pi\sqrt{a}, \quad (3.14)$$

ahol  $\Delta(0)$  tridiagonális végtelenedrendű determináns,

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \gamma_{-2} & 1 & \gamma_{-2} & & \\ & & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad \gamma_{2r} = \frac{q}{4r^2 - a} \quad (3.15)$$

(3.14) megoldásaként  $\mu$ -t az  $a$  ((3.10b)) és  $q$  ((3.10c)) paraméterek függvényeként kapjuk meg. Bizonyos  $(a, q)$  párokra  $\operatorname{Re}\mu = 0$  (stabil megoldások), másokra  $\operatorname{Re}\mu \neq 0$  (instabil megoldások), tehát az  $(a, q)$  sík stabil és instabil tartományokra osztható, amint ezt az 1. ábrán láthatjuk.



1. ábra A Mathieu-egyenlet stabilitás diagramja. A bevonalkázott tartományok stabilak, az  $(a, q)$  sík fennmaradó része instabil.

Mivel a  $\hat{p}_1 = \underline{e}_1 \hat{p}$  és  $\hat{p}_2 = \underline{e}_2 \hat{p}$  operátorok a (3.4)-ben szereplő Hamilton-operátorral felcserélhetők, ezért a  $p_{\perp}$  impulzus komponens mozgásállandó és így (3.10c) szerint a  $q$  paraméter nem függ a rendszer dinamikájától. Az elektron-fény kölcsönhatás folyamán csak a  $p_{\parallel} = \underline{n} p$  komponens változhat. A stabilitás diagramról leolvasható, hogy adott  $q$  értékeknél a fizikailag megengedett  $a$  értékek sávokban helyezkednek el. Ez az optikailag indukált sáv-szerkezet.

Megjegyezzük, hogy hasonló strukturáju sáv-szerkezetet talált Berson és Valdmanis (1973) két egymással szemben terjedő cirkulárisan polarizált monokromatikus fényhullámban tartózkodó relativisztikus elektronokra, valamint Cronström és Noga (1977) és Becker (1977) refraktív közegben terjedő haladóhullámu elektromágneses sugárzás és relativisztikus elektronok kölcsönhatása esetén (lásd még Becker, Meckbach és Mitter 1979 és Becker és Mitter 1979).

A hatodik fejezetben látni fogjuk, hogy a vákuumbeli haladó síkhullámokkal kölcsönható relativisztikus elektronok energia-

paramétere folytonos spektrumu, és egzakt hullámfüggvényeik nem-relativisztikus közelítésben a (3.13) Mathieu-függvények helyett a (3.7) megoldásokba mennek át. Ennek figyelembevételével az általunk bemutatott sávszerkezet fizikai létezése erősen kérdéses. A sávszerkezethez a (3.6a) egyenlet egzakt megoldása segítségével jutottunk a (3.7) közelítés elvetése után. Eljárásunkat azzal indokoltuk, hogy (3.6a)-ban a második derivált elhagyásából a (3.7a) feltétel következik, amely elegendően nagy  $K$  kölcsönhatási energiánál nem teljesül. Egyszerűen belátható, hogy (3.7a) baloldala  $v^2(v/c)^2(mc^2/\hbar\omega)$  nagyságrendű, másrészt (1.3c) szerint  $v$  a klaszikus elektron fénytérbeli oszcillációja sebességamplitudójának és a fénysebességnek a hányadosa. Tehát az említett "elegendően nagy" kölcsönhatási energia valójában relativisztikus sebességnek felel meg ( $v \sim 1$ ), ekkor viszont a Schrödinger-egyenlet nem alkalmazható. Ennek alapján a fenti sávszerkezet fizikai létezésének lehetőségét el kell vetnünk, s ugyanakkor a (3.13) egzakt megoldás helyett elegendő a (3.7) közelítő hullámfüggvényt használnunk.

### 3B. Nemrelativisztikus elektronok többfotonos kényszerített fékezési sugárzása

Köztudott tény, hogy a sugárzási tér egyetlen módusával (vagy olyan módusok összességével, amelyek hullámvektora azonos irányu) kölcsönható elektron energiát nem vehet fel és nem adhat le. Ahhoz hogy ilyen reális abszorpciós vagy emissziós folyamatok lejátszódjanak, egy harmadik testre van szükség. E fejezetben a harmadik test szerepét egy az origóban nyugvó végtelen nagy tömegű ion (vagy atom, molekula) játsza, amelynek az elektronra gyakorolt hatását a  $V(\underline{r})$  sztatikus skalárpotenciállal jellemezzük. Feltesszük, hogy e potenciál az alkalmazott intenzív fény hullámhosszánál lényegesen kisebb méretű tértartományban különbözik jelentősen zérustól (pl. egy árnyékolt ion esetében  $V(r) = \frac{e^{-r/d}}{r}$ , ahol  $d$  a Debye-hossz, amely rendszerint sokkal kisebb az optikai hullámhosszknál). Ekkor az elektron szóródását a dipólközelítéssel kapott (3.3) bázisfüggvényekkel írhatjuk le. (A relativisztikus, dipólközelítésen tuli általánosítást a 6. fejezet tartalmazza). Monokromatikus, lineárisan polarizált fényvel való kölcsönhatás esetén  $(\underline{A} = A_0 \underline{\epsilon} \cos \omega t)$  (3.3) konkrét alakja

$$\varphi_{\underline{p}}(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p} \cdot \underline{r} - Et)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left( \frac{eA_0}{mc\omega} \underline{p} \cdot \underline{\epsilon} \sin\omega t - \int_t^{\tau} d\tau \frac{e^2 A_0^2}{2mc^2} \cos^2\omega\tau \right)\right]. \quad (3.16)$$

Az elektron Schrödinger-egyenlete

$$\left[ \frac{1}{2m} (\hat{\underline{p}} - \frac{e}{c} \underline{A})^2 + V(\underline{r}) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.17)$$

melynek megoldását a következő alakban keressük (Bergou 1980)

$$\psi = \varphi_{\underline{p}_i} + \psi_K, \quad \psi_K = \int d^3p a_{\underline{p}}(t) \varphi_{\underline{p}}, \quad (3.18)$$

$\varphi_{\underline{p}_i}$  az elektron (3.16) típusu kezdeti állapota és a  $\psi_K$  korrekciót a (3.16) teljes rendszer szerint fejtettük ki. (3.18)-at (3.17)-be helyettesítve és csak a  $V$ -ben elsőrendű tagokat megtartva (ez a Born-közelítésnek felel meg) az  $a_{\underline{p}}(t)$  amplitudókra az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk

$$i\hbar \frac{da_{\underline{p}}}{dt} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V(\underline{p}_i - \underline{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{p^2 - p_i^2}{2m} t + i \frac{eA_0}{mc\hbar\omega} (\underline{p}_i - \underline{p}) \cdot \underline{\epsilon} \sin\omega t\right], \quad (3.19)$$

ahol

$$V(\underline{p}_i - \underline{p}) = \int d^3r V(\underline{r}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\underline{p}_i - \underline{p}_f) \cdot \underline{r}\right] \quad (3.19a)$$

a háttérpotenciál Fourier-transzformáltja. A  $\varphi_{\underline{p}}$  rendszer ortogonalitása következtében a  $\varphi_{\underline{p}_f}$  végállapotú szórásfolyamat  $(\varphi_{\underline{p}_f}, \psi_K) \equiv T_{fi}$  mátrixeleme (3.18) szerint éppen  $a_{\underline{p}_f}(t)$ .  $t \rightarrow +\infty$  esetén

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{p_f^2 - p_i^2}{2m} t + iz \sin\omega t\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V(\underline{Q}), \quad (3.20)$$

$$\underline{Q} \equiv \underline{p}_i - \underline{p}_f, \quad z \equiv \frac{eA_0}{mc\hbar\omega} \underline{Q} \cdot \underline{\epsilon}. \quad (3.20a-b)$$

(3.20) kiértékelése céljából  $\exp(iz\sin\omega t)$ -t az (1.37) Jacobi-Anger-formula szerint Fourier-sorba fejtjük, s ezután végezzük el az idő szerinti integrálást:

$$T_{fi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{fi}^{(n)}, \quad T_{fi}^{(n)} = -2\pi i \delta\left(\frac{p_f^2 - p_i^2}{2m} + n\hbar\omega\right) t_{fi}^{(n)}, \quad (3.21a)$$

ahol

$$t_{fi}^{(n)} \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V(\underline{Q}) J_n(z) \quad (3.21b)$$

Megjegyezzük, hogy az időben periodikus külső elektromágneses tér jelenlétében szóródó elektron átmeneti amplitudói mindig parciális amplitudók inkoherens szuperpozíciójaként állíthatók elő (Bergou 1975). (3.21a) ennek az általános tételnek az érvényességét illusztrálja.

A (3.21a)-ban szereplő Dirac-delta a különböző rendű foton-abszorpciókra ( $n < 0$ ) és emissziókra ( $n > 0$ ) vonatkozó energia megmaradást fejezi ki,

$$\frac{p_f^2}{2m} = \frac{p_i^2}{2m} - n\hbar\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.21c)$$

(3.21b) ismeretében a megfelelő differenciális hatáskeresztmetszetek a szokásos módon számíthatók,

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i} J_n^2(z) \frac{d\sigma_B}{d\Omega}, \quad \frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |V(\underline{Q})|^2. \quad (3.22)$$

$(d\sigma_B/d\Omega)$  a  $p_i \rightarrow p_f$  folyamat Born-féle hatáskeresztmetszete.

A (3.22) eredményt sok szerző megkapta különböző módszereket használva (Bunkin és Fjodorov 1965, Bunkin, Kazakov és Fjodorov 1972, Faisal 1973, Gontier és Rahman 1974, Bergou 1976). Megjegyezzük, hogy cirkuláris polarizáció esetén ( $\underline{A} = A_0(\underline{\epsilon}e^{-i\omega t} + \underline{\epsilon}^*e^{i\omega t})$ ) (3.22)-vel teljesen azonos strukturájú hatáskeresztmetszeteket kapunk, a különbség annyi, hogy  $z$  (3.20b)-ben definiált alakja helyett

$$z \equiv 2 \frac{eA_0}{m\hbar\omega} |\underline{Q} \cdot \underline{\epsilon}| \quad (3.22a)$$

szerepel a Bessel-függvények argumentumában. Alacsonyfrekvenciás közelítésben bebizonyítható, hogy

$$(d\sigma^{(n)}/d\Omega) = (p_f/p_i) J_n^2(z) (d\sigma_{e\ell}/d\Omega) \quad (3.22b)$$

(Kroll és Watson 1973), ahol  $(d\sigma_{e\ell}/d\Omega)$  a lézerfény jelenléte nélkül végbemenő folyamat rugalmas szórás hatáskeresztmetszete.

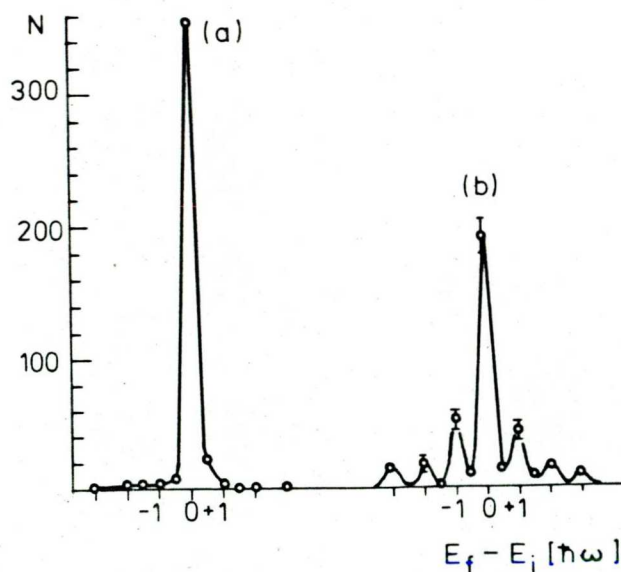
(3.22) szerint a szóródás a rugalmas szórás Born-féle keresztmetszetével és a  $\frac{p_f}{p_i} J_n^2(z)$  rugalmatlanságot kifejező tényezővel jellemezhető. Kis intenzitások esetén ( $z \approx 0$ )  $(d\sigma^{(n)}/d\Omega) = \delta_{n,0} (d\sigma_B/d\Omega)$ , ugyanis  $J_n(0) = \delta_{n,0}$ . Az első fejezetben láttuk, hogy az intenzív Thomson-szórás hatáskeresztmetszete  $\sigma_{Th} \sim r_0^2 \sim 10^{-25} \text{ cm}^2$  nagyságrendű, ugyanakkor (3.22) szerint egy  $Z$  töltésű ion esetében  $d\sigma^{(n)}/d\Omega$  a kényszerített fékezési sugárzás esetében  $\sigma_{e\ell} \sim 10^9 (r_0 Z^{1/3})^2$  nagyságrendű lehet,



tehát  $\sigma_{el} \sim 10^9 \sigma_{Th}$ . Ezek alapján nem véletlen, hogy a többfotonos szabad-szabad elektronátmenetek első kísérleti kimutatása kényszerített fékezési sugárzás esetében sikerült. Weingarsthofer és munkatársai (1977) 11 eV-os szabad elektronok argon atomokon való szóródását vizsgálták. A kölcsönhatási tartományt 200  $\mu$ s kihagyásokkal 2  $\mu$ s időtartamokra  $10^9$  W/cm<sup>2</sup> intenzitású CO<sub>2</sub>-lézerrel periódikusan megvilágították és elektronspektrométerrel analizálták a szóródott elektronok energiaeloszlását. Az találták, hogy a lézerfény hatására az  $E_f = E_i + n\hbar\omega$  energiaértékeknél az eloszlási görbén lokális maximumok jelennek meg, amint ez az 2. ábrán látható. Ezek a szimmetrikusan elhelyezkedő maximumok az egy, két, stb. foton abszorbeált ill. emittált elektronoktól erednek. A Bessel-függvények elméletéből jól ismert  $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(Z) = 1$  formula alapján (3.22b)-ből következik, hogy alacsonyfrekvenciás esetben (amikor  $z$  (3.20b))  $n$ -függésétől eltekinthetünk) érvényes a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(n)}{d\Omega} \approx \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}$$

összegszabály (Brown és Goble 1968, Jung 1980, Rosenberg 1979). A 2. ábra (a) és (b) görbéjét összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a fenti összegszabályt a kísérletek - legalábbis közelítőleg - igazolják.



2. ábra A lézerfény nélkül (a) és annak jelenlétében (b) atomokon szóródó elektronok energiaspektruma.  $N$  = a szórt elektronok 600 2  $\mu$ s-os lézerimpulzus alatt detektált gyakorisága,  $E_f - E_i$  = az elektronok energianyeresége  $\hbar\omega$  egységekben. A szórási szög e kísérletben  $153^\circ$  volt. (Weingarsthofer és munkatársai (1977) nyomán)

A már említett és a későbbi kísérletekben (Weingarsthofer és munkatársai 1979) is az alkalmazott lézer amplitudója közel sem volt állandó. Krüger és Jung (1978) szerint a lézerimpulzusok időbeli lefutása a hatáskeresztmetszeteket erősen befolyásolhatja.

$\underline{A} = \underline{\epsilon} A_0(t) \cos \omega t$  esetén ha  $A_0(t)$  karakterisztikus ideje  $(2\pi/\omega)$ -nál jóval nagyobb, akkor a szórást a következő átlaggal jellemezhetjük

$$\frac{d\bar{\sigma}(n)}{d\Omega} \approx \frac{p_f}{p_i} \frac{d\sigma_{e\ell}}{d\Omega} R_n, \quad R_n \equiv \frac{1}{T} \int_0^T J_n^2(z(t)),$$

$T$  a lézerimpulzus időtartama és  $z(t)$  (3.20b)-ből  $A_0 \rightarrow A_0(t)$  helyettesítéssel nyerhető. A kísérletekben előforduló  $A_0(t)$  amplitudó profilokra  $R_n$  5-nél nagyobb  $n$ -ekre, már gyakorlatilag zérus. Ennek alapján érthető, hogy miért nem tudtak ötödrendűnél magasabbrendű folyamatokat észlelni.

Megjegyzés: A (3.21c) enegiamérleg interpretálásakor fotonok abszorpciójáról és emissziójáról kezdtünk beszélni, holott az elektromágneses sugárzást klasszikus vektorpotenciállal írtuk le. A (3.21c)eredmény valójában az elektron kvantummechanika rezonanciáiról ad számot, tehát fotonokkal való értelmezése redundáns. (Teljesen hasonló a helyzet a jól ismert felületi fotoelektromos effektus esetében is (lásd pl. Mandel 1976).) A (3.21c) típusu szemiklasszikus eredményeket mindezek ellenére nyugodt lelkiismerettel magyarázhatjuk fotonok segítségével, amint ezt a következőkben megmutatjuk.

#### 4. NEMRELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON KÖLCSÖNHATÁSA KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TÉRREL

Jelen fejezetben a nemrelativisztikus szabad elektronok kvantált sugárzási térrel való kölcsönhatását vizsgáljuk dipólközelítésben.

Az első részben megadjuk az "elektron + kvantált e.m. módus" rendszer Schrödinger-egyenletének stacionárius és időfüggő megoldásait és ezek segítségével elemezzük a rendszer néhány statisztikus tulajdonságát. A második részben meghatározzuk a kvantált sugárzás jelenlétében valamilyen sztatikus potenciálon való elektron szóródás egzakt differenciális hatáskeresztmetszetét, s a kapott eredményt összevetjük az előző fejezetben szemiklasszikus módszerrel kiszámolt (3.22) hatáskeresztmetszetekkel. A szórásfolyamat energiamérlegének analízise során kitűnik, hogy a (3.21c) rezonanciafeltétel értelmezéséhez az előző fejezetben használt intuitív foton kép lényegében korrekt.

##### 4A. A "nemrelativisztikus szabad elektron + kvantált e.m. módus" rendszer állapotai

Az "elektron + kvantált e.m. módus" rendszer Hamilton-operátorra nemrelativisztikus esetben

$$H = \frac{1}{2m} \left( \hat{\underline{p}} - \frac{e}{c} \underline{A} \right)^2 + H_f, \quad (4.1)$$

amely természetes módon három részre bontható

$$H = H_e + H_f + H_I, \quad (4.1a)$$

ahol

$$H_e = \frac{\hat{\underline{p}}^2}{2m}, \quad H_f = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}), \quad H_I = -\frac{e}{mc} \underline{A} \underline{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \underline{A}^2. \quad (4.1b)$$

$H_e$  és  $H_f$  az elektron ill. a tekintett  $\omega$  frekvenciájú e.m. módus energia operátorai, és  $H_I$  a kölcsönhatást írja le. Az  $\underline{A}$  vektorpotenciál Schrödinger-képben dipólközelítés esetén a következő alakú

$$\underline{A} = \alpha(\underline{\epsilon}a + \underline{\epsilon}^*a^+), \quad \alpha \equiv c \left( \frac{2\pi\hbar}{\omega V} \right)^{1/2}. \quad (4.1c)$$



$V$  a kvantálási térfogat,  $\underline{\epsilon}$  polarizációs egységvektor, és az  $a, a^+$  amplitudók az  $[a, a^+] = 1$  felcserélési összefüggésnek tesznek eleget. Cirkulárisan polarizált módus esetében

$$\underline{\epsilon} \underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^* \underline{\epsilon}^* = 0; \quad \underline{\epsilon}^* \underline{\epsilon} = 1, \quad (4.2)$$

s ezért a  $H_I$ -ben szereplő  $A^2$ -et tartalmazó tag beleolvasztható a  $H_f$  módus energiába,

$$H_f + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 = \hbar\Omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad (4.2a)$$

ahol

$$\Omega \equiv \omega \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right), \quad \omega_p^2 \equiv \frac{4\pi e^2}{mV}. \quad (4.2b)$$

Megjegyezzük, hogy  $\omega_p$  formálisan azonosítható az  $(1/V)$  sűrűségű elektrongáz plazmafrekvenciájával. (4.2a) és (4.1a-b-c) figyelembevételével a rendszer teljes Hamilton-operátora cirkulárisan polarizált módus esetében a következő alakra hozható

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\Omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\alpha}{mc} \hat{p} (\underline{\epsilon} a + \underline{\epsilon}^* a^+). \quad (4.3)C$$

Lineáris polarizációnál  $\underline{\epsilon}$  valós és  $\underline{\epsilon}^2 = 1$ , könnyen belátható, hogy ekkor

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\Omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\alpha}{mc} \hat{p} \underline{\epsilon} (a + a^+) + \frac{e^2 \alpha^2}{2mc^2} (a^2 + a^{+2}). \quad (4.4)L$$

A rövidség kedvéért itt csak a (4.3) C Hamilton-operátor diagonalizálásával foglalkozunk részletesen, mivel ez (4.4) L-el ellentétben nem tartalmaz  $a^2$  - ill.  $a^{+2}$ -tel arányos kölcsönhatási tagot.

A (4.3) C energiaoperátor nem függ az időtől, következésképpen az elektron-foton rendszer

$$H\psi(t) = i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

Schrödinger-egyenletének vannak stacionárius megoldásai:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \varphi \quad (4.5a)$$

ahol  $\varphi$  az alábbi energiasajátértékegyenletet elégíti ki

$$H\varphi = E\varphi. \quad (4.5b)$$

Mivel esetünkben  $H$  az elektronkoordinátáktól független ezért  $\varphi$ -t egy impulzussajátállapot és egy módusállapot szorzataként vehetjük fel,

$$\varphi = |p\rangle |x\rangle \quad (4.5c)$$

(4.5b)-ből  $H$  (4.3) C-ben megadott konkrét alakját figyelembe véve  $|x\rangle$ -re a következő egyenletet kapjuk

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2}) - \frac{e\alpha}{mc} p(\underline{\epsilon}a + \underline{\epsilon}^*a^+) \right] |x\rangle = E|x\rangle. \quad (4.6)$$

A (4.6)-ban szereplő kölcsönhatási tagot a második fejezetben már látott (2.5c) eltolási transzformációk segítségével küszöbölhetjük ki (Bergou és Varró 1981 a). Megjegyezzük, hogy ugyanilyen típusu transzformációkat használt Bloch és Nordsieck (1937) az infravörös divergenciával foglalkozó alapvető cikkükben az elektron-foton kölcsönhatási tagok eliminációjához.

(4.6) megoldása érdekében vezessük be először a

$$D_\sigma = e^{\sigma^*a - \sigma a^+} \quad (4.7)$$

operátort, ahol  $\sigma$  később meghatározandó paraméter. Ha (4.6)-on végrehajtunk egy  $D_\sigma$  generátoru unitér transzformációt, akkor  $D_\sigma$  (2.5b) eltolási tulajdonságainak felhasználásával a következő egyenletet nyerjük

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2} + |\sigma|^2) + (\hbar\Omega\sigma^* - \frac{e\alpha}{mc} p \underline{\epsilon})a + (\hbar\Omega\sigma - \frac{e\alpha}{mc} p \underline{\epsilon}^*)a^+ - \frac{e\alpha}{mc} (p \underline{\epsilon}\sigma + p \underline{\epsilon}^*\sigma^*) \right] D_\sigma^{-1} |x\rangle = E D_\sigma^{-1} |x\rangle. \quad (4.8a)$$

Ezek után válasszuk  $\sigma$ -t úgy, hogy (4.8a) baloldalán  $a$  és  $a^+$  együttthatói eltűnjenek, azaz legyen

$$\sigma = \frac{e\alpha}{m\hbar\Omega} p \underline{\epsilon}^*. \quad (4.8b)$$

Ekkor (4.8a) az alábbi egyenletre redukálódik

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2} - |\sigma|^2) \right] D_\sigma^{-1} |x\rangle = E D_\sigma^{-1} |x\rangle. \quad (4.8c)$$

Világos, hogy (4.8c) a

$$D_{\sigma}^{-1}|\chi\rangle = |n\rangle \quad (a^+a|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.8d)$$

számsajátállapotokkal és az

$$E = E(p, n) \equiv \frac{p^2}{2m} + \hbar\Omega(n + \frac{1}{2} - |\sigma|^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8e)$$

energiasajátértékekkel kielégíthető. Eredményeinket összegyűjtve (4.5a-c) valamint (4.8d-e) alapján a (4.5) Schrödinger-egyenlet stacionárius megoldásait a következő alakban állíthatjuk elő

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E(p, n)t} |p\rangle_{D_{\sigma}} |n\rangle. \quad (4.9)$$

$D_{\sigma}$  unitaritása miatt a (4.9) megoldásrendszer teljes és ortonormált.

Mivel  $D_{\sigma}$  (2.5d) szerint a  $\sigma$  paraméterű koherens állapot keletkezőoperátora, ezért (4.8e) és (4.9) alapján megállapíthatjuk, hogy rögzített  $p$  esetén a rendszer legalacsonyabb energiájú állapotában ( $n=0$ ) az e.m. módus koherens állapotban van.

Helykimélés céljából itt csak bizonyítás nélkül közöljük, hogy a lineáris polarizációjú módushoz tartozó (4.4) L Hamilton-operátor a

$$C_{\theta} = e^{-\frac{\theta}{2}(a^{+2} - a^2)}, \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arth} \frac{e^2 \alpha^2}{mc^2 \hbar \Omega} \quad (4.10)$$

Bogoljubov-transzformációval (Tabane 1973)

$$H' = C_{\theta}^{-1} H C_{\theta} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2}) \operatorname{sech} 2\theta - \frac{e\alpha}{mc} \hat{p} \underline{\epsilon} (a+a^+) e^{-\theta} \quad (4.10a)$$

alakra hozható. (4.10a) ugyanolyan strukturájú, mint (4.3) C, tehát diagonalizálása az előbb bemutatott D-transzformációs módszerrel történhet (a részleteket illetően lásd Bergou és Varró 1981a). Mielőtt a (4.9) stacionárius állapotokban szereplő  $D_{\sigma}|n\rangle$  típusú módusállapotok statisztikus tulajdonságainak elemzésébe belekezdénénk röviden megvizsgáljuk a (4.5) egyenlet időfüggő megoldásait is cirkulárisan polarizált módus esetében. Első lépésként vegyük fel  $\psi(t)$ -t a következő alakban:

$$\psi(t) = \exp\{-\frac{i}{\hbar} [\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2})] t\} \varphi(t). \quad (4.11)$$

(4.11)(4.5)-be való behelyettesítése után  $\varphi(t)$ -re az alábbi egyenletet kapjuk

$$\hat{k}(t)\varphi(t) = i\hbar \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}, \quad (4.11a)$$

ahol

$$\hat{k}(t) \equiv -\frac{e\alpha}{mc} \hat{p}(\underline{\epsilon}ae^{-i\Omega t} + \underline{\epsilon}^*a^+e^{i\Omega t}). \quad (4.11b)$$

(4.11a) megoldása érdekében ugyanazokat a fogásokat kell alkalmaznunk mint a második fejezet (2.1) egyenlete esetében ezért itt csak a végeredményt közöljük:

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right) D_{\sigma}(t) \varphi(t_0). \quad (4.12)$$

(4.12)-ben  $\varphi(t_0)$  a kezdeti állapot (kölcsonhatási képben) és

$$D_{\sigma}(t) \equiv e^{\sigma(t)a^+ - \sigma^+(t)a} \quad (4.12a)$$

$$\sigma(t) \equiv \frac{e\alpha}{m\hbar\Omega} \underline{\epsilon}^* \hat{p}(e^{i\Omega t} - e^{i\Omega t_0}), \quad (4.12b)$$

$$g(t) \equiv \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \left[ \int_{t_0}^t \hat{k}(\tau) d\tau, \hat{k}(t) \right]. \quad (4.12c)$$

$g(t)$  bozonoperátorokat nem tartalmaz. (4.12) alapján egyszerűen belátható, hogy ha  $\varphi(t_0) = |\underline{p}_0\rangle|0\rangle$  a vákuumban terjedő szabad elektront reprezentál, akkor  $\varphi(t)$  fotonokat leíró része  $\sigma(t) = \frac{e\alpha}{m\hbar\Omega} \underline{p}_0 \underline{\epsilon}^*(e^{i\Omega t} - e^{i\Omega t_0})$  paraméterű koherens állapot lesz. Következésképpen - ezen egyszerű modell szerint - a szabad elektron sajátterének hosszuhullámu komponensei koherens állapotban vannak. Ha  $\varphi(t_0) = |\underline{p}_0\rangle|\alpha\rangle$ , ahol  $|\alpha\rangle$  koherens állapot, akkor a  $D$  operátorok (2.5c) szorzási szabálya segítségével egyszerűen belátható, hogy  $\varphi(t)$  (4.12) alakjában a kvantált módust leíró rész  $\alpha + \sigma(t)$  paraméterű koherens állapot lesz. Ha azonban az elektron kezdetben szuperponált állapotban van, akkor  $|\alpha\rangle$ -ból már nem feltétlenül alakul ki koherens állapot, ez a különbség a kvantummechanikai és klasszikus elektronáramok által generált sugárzási tér között.

Térjünk most rá a  $D_\sigma|n\rangle$  típusu állapotok statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára  $|n\rangle$  számsajátállapot/.  $D_\sigma|n\rangle$  kifejezhető Fock-állapotok szerint,

$$D_\sigma|n\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} c_r|r\rangle, \quad a^+a|r\rangle = r|r\rangle, \quad (4.13)$$

ahol

$$c_r = \langle r|D_\sigma|n\rangle. \quad (4.13a)$$

Mivel  $D_\sigma$  unitér, ezért a  $|c_r|^2$  valószínűségeloszlás normált.  $c_r$ -ek konkrét alakját a Baker-Campbell-Hausdorff-formula segítségével kaphatjuk meg, amely szerint ha az A és B operátorok kommutátorukkal felcserélhetők, akkor érvényes a következő összefüggés

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

$D_\sigma$  ennek figyelembevételével  $e^{\sigma a^+} e^{-\sigma^* a} e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}$  alakba írható ezután az  $(\langle r|e^{\sigma a^+}) (e^{-\sigma^* a}|n\rangle)$  mátrixelemek már könnyen meghatározhatók:

$$c_r = \langle r|D_\sigma|n\rangle = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2} \sqrt{r!n!} \sigma^{r-n} \sum_{\ell=0}^n \frac{(-|\sigma|^2)^\ell}{(r-n+\ell)!(n-\ell)! \ell!}, & r > n \\ e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2} \sqrt{r!n!} (-\sigma^*)^{n-r} \sum_{\ell=0}^r \frac{(-|\sigma|^2)^\ell}{(n-r+\ell)!(n-\ell)! \ell!}, & r < n. \end{cases} \quad (4.14)$$

(4.14) jobboldalai általánosított Laguerre-polinomokkal (Abramowitz és Stegun 1964) arányosak,

$$c_r = \langle r|D_\sigma|n\rangle = \begin{cases} \left(\frac{n!}{r!}\right)^{1/2} \sigma^{r-n} L_n^{(r-n)}(|\sigma|^2) e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}, & r > n \\ \left(\frac{r!}{n!}\right)^{1/2} (-\sigma^*)^{n-r} L_r^{(n-r)}(|\sigma|^2) e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2}. & r < n. \end{cases} \quad (4.14a)$$

A  $|c_r|^2$  eloszlás momentumai a (4.14a), konkrét alakok ismerete nélkül is meghatározhatók. A fotonszám várható értéke (2.5b) alapján

$$\langle r \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} |c_r|^2 r = \langle n|D_\sigma^{-1} a^+ a D_\sigma|n\rangle = n + |\sigma|^2. \quad (4.15)$$



Az átlagos négyzetes eltérés

$$\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = |\sigma|^2 (2n+1). \quad (4.16)$$

Ha a (4.12) állapotokat tekintjük a  $\varphi(t_0) = |p\rangle|n\rangle$  esetben, akkor (4.15) és (4.16) alapján megállapíthatjuk, hogy egy kezdetben éles fotoneloszlás ( $c_r(t_0) = \delta_{r,n}$ ) az elektronokkal való kölcsönhatás következtében szétfolyik egy  $n+|\sigma|^2$  középpontú és  $|\sigma|(2n+1)^{1/2}$  félszélességű eloszlássá, amely  $n$ -re vonatkozóan aszimmetrikus.

Ha  $n = 0$ , akkor a módus koherens állapotba kerül, amelyben a foton-szám  $|\sigma|^2$  paraméterű Poisson-eloszlást követ (lásd a (2.5d-e-f-g) képleteket). A másik szélsőséges esetben a kezdeti  $n$  fotonszám nagyon nagy. Ekkor  $c_r$ -ek (4.14a) kifejezéseit a Laguerre-polinomokra vonatkozó Hilb-formula segítségével értékelhetjük ki. Eszerint (Erdélyi 1953)

$$x^{m/2} L_n^{(m)}(x) e^{-x/2} = \frac{(n+m)!}{(n + \frac{m+1}{2})^{m/2} n!} J_m[(vx)^{1/2}] + O(n^{m/2-3/4}), \quad (4.17)$$

$$v \equiv 4n + 2m + 2.$$

$J_m$   $m$ -edrendű Bessel-függvény. (4.14a) és (4.17) alapján  $c_r$ -eket  $r > n$  esetben így írhatjuk

$$c_r = \langle r | D_\sigma | n \rangle = e^{im\chi} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n}\right) \right]^{1/2} \left(\frac{2n}{2n+m+1}\right)^{m/2} J_m[(vx)^{1/2}] + \frac{O(n^{-3/4})}{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n}\right)\right]^{1/2}}, \quad (4.18)$$

ahol

$$m \equiv r-n > 0, \quad x \equiv |\sigma|^2, \quad v \equiv 4n+2m+2, \quad \chi \equiv \arg\sigma. \quad (4.18a)$$

Hasonló formula érvényes, ha  $r < n$ .  $\sigma$  (4.8b) (vagy (4.12b)) definíciós egyenletéből látszik, hogy (mivel (4.1c) szerint  $\alpha \equiv c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega V}\right)^{1/2}$ )  $|\sigma|^2$  arányos  $(1/V)$ -vel; a kvantálási térfogat reciprokával.

(4.18)-ban tehát a Bessel-függvény argumentuma lényegében arányos a fotonsűrűség  $(n/V)$  várható értékével. (4.18) segítségével  $c_{n\pm m}$ -et egzaktul ki tudjuk értékelni az  $n \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  határesetben, ha a  $\rho \equiv (n/V)$  fotonsűrűséget és  $m = |r-n|$ -et a határértékképzés során állandónak tartjuk.

$$\lim_{n, V \rightarrow \infty} c_{n\pm m} = e^{\pm im\chi} J_{\pm m}(|\zeta|), \quad (4.19)$$

$$\rho \equiv (n/V), \quad m \text{ rögzített}$$

ahol

$$\zeta \equiv 2 \frac{ea_0}{mc\hbar\omega} (\underline{p} \cdot \underline{\epsilon}^*), \quad a_0 \equiv \frac{c}{\omega} (2\pi\rho\hbar\omega)^{1/2}, \quad \chi = \arg\zeta. \quad (4.19a-b)$$

Megjegyezzük, hogy az  $\underline{A} = a_0 (\underline{\epsilon} e^{-i\omega t} + \underline{\epsilon}^* e^{i\omega t})$  klasszikus vektorpotenciállal jellemzett elektromágneses tér energiasűrűsége (4.19b) alapján éppen  $\rho\hbar\omega$ . A fenti  $\underline{A}$  vektorpotenciállal az előző fejezet (3.16) típusu hullámfüggvényei az

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{2ea_0}{mc\omega} |\underline{p} \cdot \underline{\epsilon}| \sin(\omega t - \chi) \right\}$$

modulációs faktort tartalmazzák (ne feledjük, hogy most  $\underline{A}^2 = a_0^2 = \text{const.}$ ), amelynek Fourier-együtthatói az (1.37) Jacobi-Anger-formula szerint pontosan megegyeznek a (4.19) határértékekkel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (3.16) szemiklasszikus állapotokból származó energiaspektrum megegyezik a nagy  $n$  betöltési számokkal paraméterezett  $D_0 |n\rangle$  állapotokból számítható fotonspektrummal.

#### 4B. Többfotonos kényszerített fékezési sugárzás kvantált elektromágneses térben

A harmadik fejezetben kiszámítottuk egy  $V(\underline{r})$  háttérpotenciál hatására intenzív fény jelenlétében bekövetkező elektronszóródás differenciális hatáskeresztmetszetét.  $V(\underline{r})$ -t Born-közelítésben vettük figyelembe, míg az elektron lézerefénnyel való kölcsönhatását tetszőleges rendben tárgyalhattuk, mivel a perturbációszámításhoz a (3.16) szemiklasszikus bázisfüggvényeket használtuk. Megállapítottuk, hogy az átmeneti amplitudó végtelen sok parciális amplitudó inkohereus szuperpozíciójaként állítható elő (lásd (3.21a)-t), s minden egyes ilyen parciális amplitudó a (3.21c) rezonanciafeltételt kielégítő egyedi szórásfolyamathoz tartozik. A

$$\frac{P_f^2}{2m} = \frac{P_i^2}{2m} - n\hbar\omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.21c)$$

rezonanciafeltétel értelmezésekor azt állítottuk, hogy tulajdonképpen  $n$  foton abszorpciójához ill. emissziójához tartozó energiamegmaradást fejez ki, holott a lézerefényt klasszikus vektorpotenciállal jellemeztük. Ugy érezzük, hogy ez a szemiklasszikus alapokon nyugvó intuitív foton-kép mélyebb megalapozásra szorul, s

ezért a többfotonos kényszerített fékezési sugárzást kvantált lézerefénnyel kölcsönható elektronok esetében is megvizsgáljuk (Bergou és Varró 1981a). E program végrehajtásának egy másik fontos motivuma az, hogy a szórásfolyamat során bekövetkező móduskiürülést (feltöltődést) is le szeretnénk írni, s ehhez a szemi-klasszikus elméletben használt külső tér közelítés per.def. nem alkalmas.

A többfotonos kényszerített fékezési sugárzás tárgyalásához most a (4.9) stacionárius bázisállapotokat használjuk. A  $V(\underline{r})$  potenciál hatására a

$$|\psi_i\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E(\underline{p}_i, n_i) t} |\underline{p}_i\rangle_{D_{\sigma_i}} |n_i\rangle \quad (4.20a)$$

kezdeti és

$$|\psi_f\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E(\underline{p}_f, n_f) t} |\underline{p}_f\rangle_{D_{\sigma_f}} |n_f\rangle \quad (4.20b)$$

végállapotok közötti átmenet amplitudója Born-közelítésben

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^{\infty} \langle \psi_f | V(\underline{r}) | \psi_i \rangle dt. \quad (4.21a)$$

A (4.21a)-ban kijelölt idő szerinti integrálás elvégzése után  $T_{fi}$ -re a következő kifejezést kapjuk

$$T_{fi} = -2\pi i \delta[E(\underline{p}_f, n_f) - E(\underline{p}_i, n_i)] \langle \underline{p}_f | V(\underline{r}) | \underline{p}_i \rangle \langle n_f | D_{-\sigma_f} D_{\sigma_i} | n_i \rangle. \quad (4.21b)$$

A (4.21b)-ben szereplő Dirac-delta (4.8e) alapján az alábbi energiamegmaradási törvényt fejezi ki

$$\frac{p_f^2}{2m} + \hbar\Omega(n_f - |\sigma_f|^2) = \frac{p_i^2}{2m} + \hbar\Omega(n_i - |\sigma_i|^2). \quad (4.21c)$$

Mivel az e.m. módusnak sem a kezdeti sem a végállapota nem foton-szám sajátállapot, ezért (4.21c)-t nem interpretálhatjuk úgy, hogy a szórásfolyamat során a módus fotontartalma  $n_i$ -ről  $n_f$ -re változott, azonban a megfelelő fotonszám várható értékekre (4.15) szerint az állítás már lényegében igaz.

A (4.21b) átmeneti amplitudó felhasználásával a folyamat differenciális hatáskeresztmetszete a szokásos módon kiszámítható a következő eredménnyel

$$\frac{d\sigma^{(\pm\ell)}}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i} |M_{\pm\ell}(n_i)|^2 \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \quad (4.22)$$

ahol

$$M_{\pm\ell}(n_i) \equiv \langle n_i \pm \ell | D_{-\sigma_f} D_{\sigma_i} | n_i \rangle, \quad \ell \equiv |n_f - n_i|. \quad (4.22a)$$

(4.22)-ben ( $d\sigma_B/d\Omega$ ) a megfelelő Born-féle keresztmetszet, amelyet (3.22)-ben már definiáltunk.  $M_{\pm\ell}(n_i)$  a D-operátorok (2.5c) szorzási tétele alapján az alábbi alakra hozható

$$M_{\pm\ell}(n_i) = \langle n_i \pm \ell | D_{\tau} | n_i \rangle e^{i \operatorname{Im}(\sigma_f \sigma_i^*)}, \quad \tau \equiv \sigma_i - \sigma_f = \frac{e\alpha}{m\hbar\Omega} \underline{\epsilon}^*(\underline{p}_i - \underline{p}_f) \quad (4.22b)$$

Amint azt a fejezet első részében láttuk ((4.14a)) az  $\langle r | D_{\tau} | n \rangle$  típusu mátrixelemet általánosított Laguerre-polinomokkal fejezhetők ki, s így pl.  $n_f > n_i$  esetben

$$M_{\ell}(n_i) = \left( \frac{n_i!}{(n_i + \ell)!} \right)^{1/2} \tau^{\ell} L_{n_i}^{\ell}(|\tau|^2) \exp\left[-\frac{1}{2}|\tau|^2 + i \operatorname{Im}(\sigma_f \sigma_i^*)\right], \quad n_f > n_i. \quad (4.23)$$

A (4.17) Hilb-féle képletet használva (4.19) bizonyításához teljesen hasonlóan belátható, hogy az  $M_{\ell}(n_i)$  mátrixelemek  $n_i, V \rightarrow \infty$  határesetben ( $V$  a kvantálási térfogat) a következőképpen viselkednek

$$\lim_{n_i, V \rightarrow \infty} M_{\pm\ell}(n_i) = J_{\pm\ell}(|Z|) e^{\pm i\ell\chi}, \quad (4.24a)$$

$$\rho \equiv (n_i/V), \quad \ell \text{ rögzített}$$

ahol

$$Z \equiv 2 \frac{e\alpha_0}{m\hbar\omega} \underline{\epsilon}^*(\underline{p}_i - \underline{p}_f), \quad \alpha_0 \equiv \frac{c}{\omega} (2\pi\rho\hbar\omega)^{1/2}, \quad \chi \equiv \arg Z, \quad (4.24b)$$

és  $J_{\ell}$   $\ell$ -edrendű Bessel-függvény. (4.24a) figyelembevételével megállapíthatjuk, hogy ha a kezdeti fotonszám várható értéke igen nagy

( $n_i \gg 1$ ) és ha az e.m. módus kiürüléséből (feltöltődéséből) eltekinthetünk ( $n_i \gg |\ell|$ ), akkor (4.22) jó közelítéssel ekvivalens az alábbi formulával

$$\frac{d\sigma(\pm\ell)}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i} J_\ell^2(|Z|) \frac{d\sigma_B}{d\Omega}, \quad (4.25)$$

amely formailag azonos a (3.22) szemiklasszikus eredménnyel. Ha a (3.20b) definíciós egyenletében a klasszikus vektorpotenciál  $A_0$  amplitudóját a (4.24b)-ben szereplő  $a_0$ -al helyettesítjük akkor (3.22) (4.25)-tel teljesen megegyezik.

Ha a szórásfolyamat során a módus kiürülése (feltöltődése) számottevő, akkor a szemiklasszikus módszer nem használható és a (3.22) ill. (4.25) közelítő képletek - a (4.22) egzakt eredménnyel ellentétben - elvesztik érvényességüket. Épp ezért nem tudunk egyetérteni Osbornnal (1972), aki a szabad elektrongáz nemlineáris fékezési sugárzás közben bekövetkező energia elnyelésének tárgyalása során a lehetséges foton abszorpciós és emissziós folyamatok mindegyikét ( $n_f = 0, 1, 2, \dots$ ) a csak szemiklasszikus határesetben érvényes (4.25) differenciális hatáskeresztmetszettel vette figyelembe. Például teljes kiürülés esetén ( $\ell = n_i$ )  $Z = 2|\tau|\sqrt{\ell}$ , s ekkor  $|J_\ell(2|\tau|\sqrt{\ell})|$  /közelítő/ és  $(|\tau|^{2\ell}/\ell!)$  /pontos/ hányadosának alsó határa  $(|\tau|\sqrt{\ell}/2)^\ell$ -nel becsülhető. Nagy kezdeti intenzitásoknál ( $\ell \gg 1$ ) ez a kifejezés divergál, tehát a szemiklasszikus közelítés ebben az esetben nem alkalmazható.



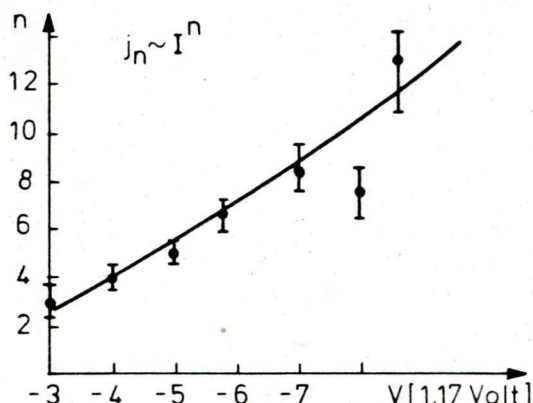
## 5. ELEKTRON-ELEKTRON SZÓRÁS INTENZIV FÉNY JELENLÉTÉBEN

Jelen fejezetben először röviden áttekintjük a szabad elektronok fényabszorpciójával kapcsolatos kísérleti eredményeket. Ezután analitikus alakot adunk meg a lézerfényben lezajló nemrelativisztikus elektron-elektron szórást leíró effektív potenciálra, amely számot ad a lézerfényben lévő elektronok közötti (több kutató által már régóta sejtett) vonzásról. Megvizsgáljuk a rugalmas szórás esetében a szokásos Rutherford-rezonancia mellett fellépő un. belső rezonanciákat is.

Ismeretes, hogy a sugárzási tér egy módusával kölcsönható szabad elektron fotont nem abszorbeálhat és nem emittálhat egy harmadik test jelenléte nélkül, ugyanis az ilyen hipotetikus folyamatok esetében az energia- és impulzusmegmaradást kifejező mérlegegyenletek ellentmondanak egymásnak. A harmadik test szerepét egy ion(atom) vagy egy másik e.m. módus vagy akár egy másik elektron is játszhatja. Az e három esetnek megfelelő folyamatok rendre a kényszerített fékezési sugárzás, a Compton-féle szórás és az e-e szórás monokromatikus elektromágneses sugárzásban. Mielőtt az utóbbi folyamat elméleti leírásába belekezdnénk, essék néhány szó a szabad elektronok fényabszorpciójával kapcsolatos kísérletekről.

Az elektronok többfotonos szabad-szabad átmeneteit - amint azt már a harmadik fejezetben is említettük - először Weingartshofer és munkatársai mutatták ki kísérletileg monoenergetikus elektronnyaláb argon atomnyalábon lézerfény jelenlétében történő szóródásának vizsgálatával. Ebben a kísérletben az elektron-atom ütközések játszották a lényeges szerepet, tehát a domináns folyamat nyilvánvalóan a kényszerített fékezési sugárzás volt. Egy másik alapvető kísérletben (Farkas 1977, Lompré és munkatársai 1979) fűtött katódból kilépő  $10^{-2}$  eV átlagos termikus energiájú elektronokból álló gázt világítottak meg nagy intenzitású Nd lézerrel ( $I \sim 10$  GW,  $\hbar\omega \sim 1,17$  eV) és mérték a katódhoz képest negatív feszültségű fémhálón átjutó elektronok áramát. Azt tapasztalták, hogy a lézerfény hatása nélkül a több Voltos ellenfeszültséget legyőzni képtelen elektronok a lézer bekapcsolása után, fotonabszorpciók következtében, már át tudtak hatolni a

a fémhálón, s hogy a háló mögött mért  $j_n$  elektronáram a fényintenzitás  $n$ -edik hatványával arányos ( $n$  a folyamat rendje), amint ez a 3. ábrán látható.



3. ábra. A többfotonos fényabszorpció rendjének ( $n$ ) az ellenfeszültségtől ( $V$ ) való függése (Farkas 1977 nyomán).  $j_n$  az észlelt elektronáram,  $I$  az alkalmazott lézer intenzitása.

A kísérlet eredményének értelmezésére a következő lehetőségek kínálkoznak:

1. Az elektrongázt tartalmazó vákuumkamrában visszamaradt szennyező atomok hatására az elektronok kényszerített inverz fékezési sugárzás révén  $n\hbar\omega \sim n(1,17 \text{ eV})$  energiát vehettek fel a lézerefényből. /A kapott  $n$ -hatvány törvény a (3.22a) hatáskeresztmetszet-formulából dedukálható, mivel az idézett kísérletben  $J_n^2(z)$  jól közelíthető  $(\frac{z}{2})^{2n} / (n!)^2 \sim I^n$ -el (Lompré és munkatársai 1979)./

2. A szabad elektronok energianyereségének a több fotonos Compton-szórást kísérő visszalökődés a forrása (Körmendi 1977, 1980). Egyszerűen belátható azonban, hogy még ideális esetben is (visszaszórás) a visszalökődési energia csak akkor érheti el a  $\hbar\omega$  értéket, ha az elektronnál visszaszóródott fotonok száma  $N \sim (\frac{mc}{\hbar\omega})^{2 \cdot 1/2}$ . Optikai frekvenciáknál  $N \sim 500$ , tehát legalább 500-ad rendű folyamatok végbemenetelével kell számolnunk, viszont ezt a rendekre vonatkozó mérési eredmények nem támasztják alá.

3. Harmadik lehetőségként említjük, hogy ha a kölcsönhatási tartományban olyan jó a vákuum, hogy a szennyezések hatásától gyakorlatilag eltekinthetünk, akkor elektron-elektron szórás kö-

vetkeztében még mindig végbemehet reális fotonabszorpció. Alább megmutatjuk, hogy az n-hatvány törvény ebben az esetben is érvényes.

Az 1-es és 3-as magyarázatok között úgy dönthetnénk, hogy az elméletből adódó hatáskeresztmetszeteket összevetnénk a kísérleti értékekkel, amelyek azonban az eddigi kísérletekből nem állapíthatók meg.

A bevezetés után most rátérünk az intenzív fény jelenlétében lezajló elektron-elektron szórás elméleti vizsgálatára. E folyamatot először Oleinik (1967 a,b), majd Bös és munkatársai (1979 a,b) tanulmányozták Dirac-elektronok esetében. Mivel eredményeik meglehetősen bonyolultak (és implicitek is), és pl. Bös és munkatársai a kinetikát csak nemrelativisztikus határesetben tudták kiértékelni, ezért úgy érezzük, hogy szükség van a probléma konzekvens nemrelativisztikus tárgyalására is (Bergou, Varró és Fjodorov 1981 a-b).

A két elektronból álló rendszer nemrelativisztikus Hamilton-operátora az  $\underline{A}$  vektorpotenciállal jellemzett külső monokromatikus síkhullám térben

$$H = H_0 + V \\ = \frac{1}{2m} (\hat{p}_1 - \frac{e}{c} \underline{A}(\xi_1))^2 + \frac{1}{2m} (\hat{p}_2 - \frac{e}{c} \underline{A}(\xi_2))^2 + V, \quad (5.1a)$$

ahol

$$\underline{A}(\xi_{1,2}) = A_0 (\underline{e}_1 \cos \xi_{1,2} + \underline{e}_2 \sin \xi_{1,2}), \quad \xi_{1,2} = \omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}_{1,2}, \quad (5.1b)$$

$\underline{e}_1$  és  $\underline{e}_2$  egymásra és a  $\underline{k}$  hullámvektorra merőleges polarizációs egységvektorok (az egyszerűség kedvéért cirkuláris polarizációt használunk, mert ekkor  $\underline{A}^2 = A_0^2 = \text{állandó}$ ). (Megjegyezzük, hogy a két-elektron rendszernek nincs eredő dipólmomentuma, ezért az elektronok relativ mozgását homogén elektromos térrel nem befolyásolhatjuk (pl. Bergou 1976, Brehme 1971), s ennek alapján már sejthető, hogy az e-e szórás vizsgálata csak dipólközelítésen túl szolgáltathat nem triviális eredményeket.)

Nemrelativisztikus elektronokról lévén szó, eltekinthetünk az elektronok közötti retardált kölcsönhatástól, s ekkor az (5.1a -ban) szereplő V operátor egyszerűen a pillanatszerű Coulomb-kölcsönhatást írja le.



$$V = \frac{e^2}{|\underline{r}|}, \quad \underline{r} \equiv \underline{r}_1 - \underline{r}_2. \quad (5.1c)$$

Az intenzív sugárzási terekben lezajló szórásfolyamatok tárgyalásának szokásos útján járva  $V$ -t elsőrendű perturbációszámítással vesszük figyelembe, s bázisfüggvényekként a

$$H_0 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.2)$$

Schrödinger-egyenlet megoldásait használjuk. Mivel  $H_0$  az egyes elektronok energiaoperátorainak összege, ezért  $\psi$ -t szorzat alakban vehetjük fel,

$$\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, t) = \psi_1(\underline{r}_1, t) \psi_2(\underline{r}_2, t), \quad (5.2a)$$

ahol a  $\psi_1$  és  $\psi_2$  egyelektronhullámfüggvények a megfelelő (3.4) egyenletet elégítik ki. ( $\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, t)$  antiszimetrizálásával nem foglalkozunk, mert a vizsgálandó szórásfolyamat főbb vonásait illetően ez lényegtelen.) A harmadik fejezetben láttuk, hogy a (3.4) egyenlet (3.5) megoldásai jól közelíthetők a (3.7) modulációt tartalmazó hullámfüggvényekkel. (5.1b)-t (3.7)-be helyettesítve az integrálás elvégzése után pl. a  $\psi_1(\underline{r}_1, t)$  perturbálatlan állapot a következőképpen írható

$$\psi_1(\underline{r}_1, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}_1 \underline{r}_1 - E_1 t)} \exp\left[i \frac{eA_0}{mc\hbar\omega} (\underline{p}_1 \underline{e}_1 \sin \xi_1 - \underline{p}_1 \underline{e}_2 \cos \xi_1)\right], \quad (5.3)$$

és teljesen hasonló kifejezés érvényes  $\psi_2(\underline{r}_2, t)$ -re is. (5.3)-ban az  $\omega \rightarrow [\omega - (\underline{p}_1 \underline{k} / mc)]$  Doppler-eltolódást és a  $v^2 = \left(\frac{eA_0}{mc^2}\right)^2$ -tel arányos intenzitásfüggő energia- és impulzuseltolódást az áttekinthetőség érdekében elhanyagoltuk.

Az e-e szórás átmeneti amplitudója

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \psi_{1f}^*(\underline{r}_1, t) \psi_{2f}^*(\underline{r}_2, t) V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \psi_{1i}(\underline{r}_1, t) \psi_{2i}(\underline{r}_2, t), \quad (5.4)$$

ahol  $\psi$ -k (5.3) típusú hullámfüggvények. Az  $\underline{R} \equiv \frac{1}{2}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2)$  tömegközépponti és  $\underline{r} \equiv \underline{r}_1 - \underline{r}_2$  relatív koordinátákat bevezetve, valamint az (1.37) Jacobi-Anger-formulát használva kissé hosszadalmas, de elemi számítás után  $T_{fi}$  az alábbi alakra hozható

$$T_{fi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{fi}^{(n)}, \quad (5.4a)$$

ahol

$$T_{fi}^{(n)} \equiv -2\pi i \delta(E_f - E_i + n\hbar\omega) \delta_3(\underline{p}_f - \underline{p}_i + n\hbar\underline{k}) t_{fi}^{(n)}, \quad (5.4b)$$

és

$$t_{fi}^{(n)} \equiv \frac{e^{in\varphi}}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r V(\underline{r}) J_n(z \sin \frac{1}{2} \underline{k} \underline{r}) e^{\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \Delta \underline{p} \underline{r}}, \quad (5.4c)$$

valamint

$$\sin\varphi = -(\Delta \underline{p} \underline{e}_1) / \Delta p_{\perp}, \quad \Delta \underline{p} \equiv \underline{p}_i - \underline{p}_f, \quad \Delta p_{\perp} \equiv [(\Delta \underline{p} \underline{e}_1)^2 + (\Delta \underline{p} \underline{e}_2)^2]^{1/2},$$

$$z \equiv \frac{eA_0}{m c \hbar \omega} \Delta p_{\perp}. \quad (5.4d)$$

$\Delta \underline{p}$  a  $\underline{p} \equiv \underline{p}_1 - \underline{p}_2$  relativ impulzus változása és  $J_n$  n-ed rendű Bessel-függvény. Az (5.4b)-ben látható Dirac-delta azt fejezi ki, hogy az  $E \equiv E_1 + E_2$  összenergia és a  $\underline{p} \equiv \underline{p}_1 + \underline{p}_2$  összimpulzus  $n\hbar\omega$ , ill.  $n\hbar\underline{k}$  értékekkel változhat a szórásfolyamat során. Bebizonyítható, hogy az  $n\hbar\omega$  energia tulajdonképpen a kételektron rendszer belső szabadsági fokait (relativ mozgás) gerjeszti. A  $t_{fi}^{(n)}$  amplitudók (5.4c) kifejezését úgy is interpretálhatjuk, hogy a szórást a

$$V_{\text{eff}}^{(n)}(\underline{r}) = V(r) J_n(z \sin \frac{1}{2} \underline{k} \underline{r}), \quad V(r) = \frac{e^2}{r} \quad (5.5)$$

effektív potenciál írja le. Érdekes, hogy a Bessel-függvények oszcillációja miatt  $V_{\text{eff}}^{(n)}$  bizonyos  $r$  értékeknél vonzó is lehet. Hogy a szabad elektronok fény jelenlétében vonzhatják egymást már Oleinik (1967 a-b) és Farkas és Horváth (személyes közlés) is sejtették, de tudomásunk szerint a megfelelő potenciálra (5.5) az első analitikus alak, amely ezt az effektív vonzást leírja.

Az (5.4b) átmeneti amplitudókkal számolva egy n-edrendű folyamat differenciális hatáskeresztmetszetére a következő kifejezést kapjuk

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i} \left( \frac{m_r}{2\pi\hbar} \right)^2 \left| V_{\text{eff}}^{(n)}(\underline{q}) \right|^2, \quad \underline{q} \equiv \frac{\Delta \underline{p}}{2\hbar}, \quad (5.6)$$

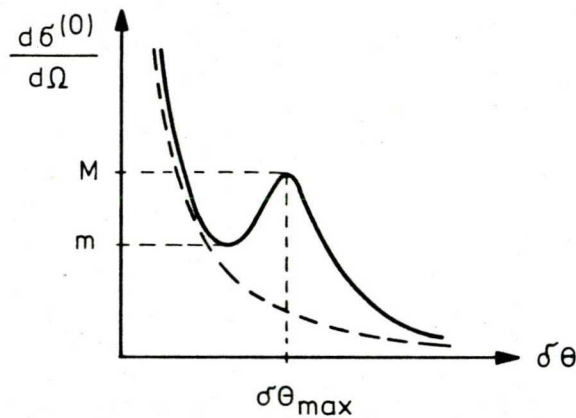
ahol  $m_r = \frac{m}{2}$  a kételektron-rendszer redukált tömege, és  $V_{\text{eff}}^{(n)}(\underline{q})$  az (5.5) potenciál  $\underline{q}$ -hoz tartozó Fourier-komponense

$$V_{\text{eff}}^{(n)}(\underline{q}) = \int d^3r V_{\text{eff}}^{(n)}(\underline{r}) e^{i \underline{q} \underline{r}}. \quad (5.6a)$$

A Bessel-függvények Graaf-féle addíciós formuláját használva (Erdélyi 1953) az (5.6a)-beli integrált egyszerűen kiértékelhetjük, s ezután  $(d\sigma^{(n)}/d\Omega)$  végső alakjához jutunk.

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} = r_0^2 \frac{v_f}{v_i} \left| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{J_{n+\ell}(\frac{z}{2}) J_{\ell}(\frac{z}{2})}{[(\Delta \underline{v}/2c) + (n+2\ell) (\hbar\omega/2mc^2) \underline{n}]^2} \right|^2 \quad (5.7)$$

$v_{i,f} \equiv (p_{i,f}/m)$ ,  $\Delta \underline{v} \equiv (\Delta \underline{p}/m)$  a relativ sebességváltozás  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  a klasszikus elektron sugár, és  $\underline{n} = (\underline{k}/|k|)$ . Hely hiányában (5.7) részletes analizisével itt nem foglalkozunk, csak annyit jegyzünk meg, hogy rugalmas szórás esetében ( $n = 0$ ,  $|\Delta \underline{v}| = 2v_i \sin \frac{\delta\theta}{2}$ ,  $\delta\theta$  a szórási szög) a szokásos Rutherford-féle rezonancia ( $\delta\theta \sim 0$ ) mellett un. belső rezonanciák is megjelennek. Ezt a 4. ábrán szemléltettük.



4. ábra. Az elektron-elektron szórás rugalmas hatáskeresztmetszetének szögfüggése.  
 $\delta\theta = (p_{1f} \angle p_{1i})$ ,  $\delta\theta_{\max} = (\hbar k/p_{1i} \cos \theta_0)$  és  $\theta_0 = (e_1 \angle p_{1i})$ . Megjegyezzük, hogy  $(M/m)$  megfelelő intenzitásoknál akár 100 nagyságrendű is lehet.

Végül megemlítjük még, hogy ha  $z \ll n$  akkor  $(d\sigma^{(n)}/d\Omega)$  jól közelíthető az alábbi formulával.

$$\frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} \approx r_0^2 \frac{v_f}{v_i} \frac{\alpha^n (\Delta v_{\perp}/2c)^{2n}}{(n!)^2 (\Delta v/2c)^4} (\gamma I)^n, \quad (5.7a)$$

ahol  $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$  a finomszerkezeti állandó,  $\gamma \equiv \frac{2\pi c^2}{\hbar \omega^4}$ , és  $I$  az alkalmazott fény intenzitása. (5.7a) szerint a fejezet elején szóba került  $n$ -hatvány törvény az elektron-elektron szórásra is érvényes.

## 6. RELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON ÉS INTENZÍV FÉNY KÖLCSÖNHATÁSÁNAK SZEMIKLASSZIKUS ELMÉLETE

Ezt a fejezetet a klasszikus elektromágneses síkhullámmal kölcsönható szabad elektron relativisztikus kvantummechanikai leírására szenteljük.

Először megoldjuk az e.m. síkhullámban levő elektron Dirac-egyenletét és bebizonyítjuk a kapott un. Volkov-féle megoldásrendszer ortogonalitását. A megfelelő Green-függvények (propagátorok) segítségével elemezzük az említett Dirac-egyenlethez kapcsolódó peremértékproblémát és bemutatjuk a szabad elektronok nemlineáris szórásfolyamatai konzekvens kvantumelektrodinamikai tárgyalásának un. Furry-képbeli általános sémáját. Ezután konkrét alkalmazásként kiszámítjuk a kényszerített többfotonos fékezési sugárzás differenciális hatáskeresztmetszetét, ez a 3. fejezet dipólközelítésben kapott nemrelativisztikus eredményeinek általánosítását jelenti.

A síkhullámtérbeli elektron Klein-Gordon-egyenletének megoldásait és propagátorait is tanulmányozzuk, és megvizsgáljuk, hogy hogyan változtatja meg a fénnel való kölcsönhatás, az elektron impulzustérbeli terjedési tulajdonságait. Végül kiszámítjuk a skalár elektronon történő intenzív Compton-szórás differenciális hatáskeresztmetszetét, amelyet összevetünk az első fejezet ide vonatkozó részével.

### 6A. Volkov-állapotok

A szabad elektron Dirac-egyenletének kovariáns alakja az  $A(x)$  négyespotenciállal jellemzett elektromágneses térben

$$(\not{D}-\kappa)\psi = 0, \quad \Pi \equiv i\partial - eA, \quad (6.1)$$

$$\kappa \equiv \frac{mc}{\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{e}{\hbar c}. \quad (6.1a)$$

$\kappa$  az elektron Compton-hullámszáma és  $\hbar\Pi$  a kinetikus négyesimpulzus operátora. (6.1)-ben bevezettük a

$$\not{D} \equiv \gamma \cdot \Pi \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\mu \Pi^\nu \quad (6.1b)$$



jelölést, ahol  $\gamma^\mu$ -k a Dirac-féle mátrixok, amelyek az alábbi felcserélési törvénynek tesznek eleget

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (6.1c)$$

A továbbiakban a  $\gamma \cdot a$  típusu szorzatokat Feynman (1961) követve  $\not{a}$ -nak írjuk, a többi kovariáns jelölést az első fejezet (1.11 b, e, g-h, i) egyenleteiben már bevezettük.

Sikhullámokat leíró potenciálok esetében - amint azt Volkov (1935) már régen megmutatta - a (6.1) Dirac-egyenlet egzaktul megoldható. A Volkov-féle állapotok alapvető fontosságúak a szabad elektronok többfotonos szórásfolyamatainak elméletében, ezért először Volkov (1935), és Brown és Kibble (1964) nyomán végig követjük a (6.1) egyenlet megoldásának főbb lépéseit az

$$A = (0, \underline{A}(\xi)), \quad \xi \equiv k \cdot x, \quad k \cdot A = k^2 = 0 \quad (6.1d)$$

sikhullám potenciálokra.

Ha  $\psi$  kielégíti a

$$(\not{\nabla} - \kappa)(\not{\nabla} + \kappa)\psi = 0 \quad (6.2)$$

másodrendű Dirac-egyenletet, akkor  $\psi = (\not{\nabla} + \kappa)\underline{\psi}$  nyilván (6.1)-nek megoldása. (6.1c)-t és  $A(\xi)$  transzverzálitását kihasználva (6.2)-t az alábbi alakra hozhatjuk

$$(\Pi^2 - \kappa^2 - \frac{1}{2} \epsilon \sigma F)\underline{\psi} = 0, \quad (6.2a)$$

ahol

$$\frac{1}{2} \epsilon \sigma F \equiv \frac{1}{2} \epsilon \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = i \epsilon \not{k} \frac{d\underline{A}}{d\xi}, \quad (6.2b)$$

és

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (6.2c)$$

Az  $\frac{1}{2} \epsilon \sigma F$  tag a spin-dipól és az  $F$  térerősségtenzor elektromágneses sugárzás kölcsönhatásáról ad számot. (6.2a) pozitív és negatív frekvenciás megoldásait  $\xi$  szerint modulált sikhullám alakban keressük,

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_{ps}^{(\pm)} = \exp[\mp i(p \cdot x + g^{(\pm)}(\xi))] u_{ps}^{(\pm)}, \quad (6.3)$$

$g^{(\pm)}$  ( $\xi$ ) meghatározandó mátrix-függvények amelyekről feltesszük, hogy deriváltjukkal felcserélhetők (a megoldás igazolni fogja ezt a feltevést),  $u_{ps}^{(\pm)}$  pozitív és negatív frekvenciás szabad bispinorok,

$$(\not{p} \mp \kappa) u_{ps}^{(\pm)} = 0. \quad (6.3a)$$

$\not{k}p = \not{k}(\sqrt{p^2 + \kappa^2}, p)$  a  $p^2 = \kappa^2$  egyenlőség által definiált szabad tömeghéjon levő négyesimpulzus,  $s = 1, 2$  a spinindex. (6.3)-at (6.2a)-ba helyettesítve  $g^{(\pm)}$  ( $\xi$ )-re a

$$\frac{dg^{(\pm)}(\xi)}{d\xi} = I_p^{(\pm)}(\xi) \pm \frac{1}{2} \epsilon \sigma F(\xi) \quad (6.4a)$$

közönséges differenciálegyenlet adódik, amelynek megoldása (6.2b) figyelembevételével a következőképpen írható

$$g^{(\pm)}(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} I_p^{(\pm)}(\xi') d\xi' \pm i \frac{\epsilon \not{k} \not{A}(\xi)}{2k \cdot p}, \quad (6.4b)$$

ahol

$$I_p^{(\pm)}(\xi) \equiv \frac{1}{2k \cdot p} [\pm 2\epsilon p \cdot A(\xi) - \epsilon^2 A^2(\xi)]. \quad (6.4c)$$

Mivel  $(\not{k} \not{A})^2 = 0$  ezért  $\exp(\pm \frac{\epsilon \not{k} \not{A}}{2k \cdot p}) = 1 \pm \frac{\epsilon \not{k} \not{A}}{2k \cdot p}$ , és így (6.4b) és (6.3) alapján  $\psi_{ps}^{(\pm)}$ -re az alábbi kifejezést kapjuk

$$\psi_{ps}^{(\pm)} = (1 \pm \frac{\epsilon \not{k} \not{A}}{2k \cdot p}) u_{ps}^{(\pm)} \exp[\mp i(p \cdot x + \int_{\xi_0}^{\xi} I_p^{(\pm)}(\xi') d\xi')] \quad (6.5)$$

Belátható, hogy  $(\not{A} + \kappa) \psi_{ps}^{(\pm)} = 2\kappa \psi_{ps}^{(\pm)}$ , tehát (6.5) (6.1)-nek is megoldása,

$$\psi_{ps}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\kappa}{p_0}\right)^{1/2} (1 \pm \frac{\epsilon \not{k} \not{A}}{2k \cdot p}) u_{ps}^{(\pm)} \exp[\mp i(p \cdot x + \int_{\xi_0}^{\xi} I_p^{(\pm)}(\xi') d\xi')]. \quad (6.6)$$

(Később látni fogjuk, hogy a (6.6)-ban bevezetett normálási faktor Dirac-deltás ortogonalitásnak felel meg.) A (6.6) állapotokat Volkov után több szerző is megkapta különböző módszerek segítségével (Alperin 1944, Beers és Nickle 1972, Mitter 1975). Megjegyezzük még, hogy a Dirac-mátrixok Majorana-ábrázolását használva a Volkov-állapotok a másodrendű Dirac-egyenlet közbeiktatása nélkül is származtathatók (Bergou és Varró 1980a).

A hatvanas évek első felétől kezdődően a Volkov-állapotokat sokan alkalmazták a szabad elektronok többfotonos szórásfolyama-

tai szemiklasszikus leírásához (pl. Goldman 1964, Brown és Kibble 1964, Nyikisov és Ritusz 1964, Gyeniszov és Fjodorov 1967, Bös és munkatársai 1979a,b) oly módon, hogy e megoldásrendszeret használták bázisul különböző perturbációszámításokban, anélkül, hogy az ortogonalitást vagy teljességet bebizonyították volna. A (6.6) hullámfüggvények

$$\int \bar{\Psi}_{ps}^{(\pm)}(x) \gamma_0 \Psi_{p's'}^{(\pm)}(x) d^3r = \delta_3(p-p') \delta_{ss'}, \quad (6.7a)$$

$$\int \bar{\Psi}_{ps}^{(\pm)}(x) \gamma_0 \Psi_{p's'}^{(\mp)}(x) d^3r = 0, \quad (\bar{\Psi} \equiv \Psi^+ \gamma_0) \quad (6.7b)$$

ortogonalitásainak bizonyítását elsőként Ritusz (1979) közölte, azonban számításai során az  $u_{ps}^{(\pm)}$  bispinorok konkrét reprezentációját erősen kihasználta. A következőkben mi egy reprezentációfüggetlen bizonyítást adunk.

Tekintsük pl. az

$$\int \bar{\Psi}_{ps}^{(+)} \gamma_0 \Psi_{p's'}^{(+)} d^3r = \int d^3r u_{ps}^{(+)} \left(1 - \frac{\epsilon \kappa \mathcal{A}}{2k \cdot p}\right) \gamma_0 \left(1 + \frac{\epsilon \kappa \mathcal{A}}{2k \cdot p}\right) u_{p's'}^{(+)} \cdot e^{i\{(p-p') \cdot x + \int [I_p^{(+)}(\xi) - I_{p'}^{(+)}(\xi)] d\xi\}} \quad (6.8)$$

ortogonalitási integrált.  $(\bar{\Psi}_{ps}^{(\pm)})$  kiszámításánál figyelembe vettük, hogy  $\gamma_0 \gamma_\mu^+ \gamma_0 = \gamma_\mu$ .  $\Psi_{ps}^{(\pm)}$  (6.1)-be való behelyettesítésével meggyőződhetünk az alábbi képletek helyességéről (a könnyebb áttekinthetőség érdekében a (+) felső indexet nem tüntetjük fel).

$$(\not{p} + \kappa I_p) \Psi_{ps} = \kappa \Psi_{ps}, \quad \bar{\Psi}_{ps} (\not{p} + \kappa I_p) = \bar{\Psi}_{ps} \kappa, \quad (\Pi_p \equiv p - \epsilon A). \quad (6.9a)$$

(6.9a)-t használva belátható, hogy tetszőleges  $\{a^\mu\}$  négyesvektor esetében érvényes a

$$\bar{\Psi}_{ps} \not{a} \Psi_{p's'} = \frac{1}{2\kappa} \bar{\Psi}_{ps} [(\Pi_p + \kappa I_p + \Pi_{p'} + \kappa I_{p'}) \cdot a - i\sigma_{\mu\nu} (\Pi_p + \kappa I_p - \Pi_{p'} - \kappa I_{p'})^{\mu\nu} a^\nu] \Psi_{p's'}, \quad (6.9b)$$

Gordon-féle felbontás (Bjorken és Drell 1964), ha  $a^\nu = \delta_{\nu,0}$ , akkor

$$\bar{\Psi}_{ps} \gamma_0 \Psi_{p's'} = \frac{1}{2\kappa} \bar{\Psi}_{ps} \{p_0 + p'_0 + \kappa_0 (I_p + I_{p'}) - i\sigma_{j0} [p - p' + \kappa (I_p - I_{p'})]^j\} \Psi_{p's'}, \quad (6.9c)$$



Mivel (6.8)-ban  $\mathbb{A}$  és  $I_{p,p'}$  csak  $\underline{r}$   $\underline{k}$  irányu komponensétől függ, ezért  $\underline{r}$   $\underline{k}$ -ra merőleges komponenseire a kijelölt integrálás azonnal elvégezhető. Ha pl.  $\underline{k} = (0, 0, k_z = k_0)$ , akkor a (6.9c) és (6.5) képleteket is figyelembe véve (6.8) a következő alakra hozható

$$\int \bar{\Psi}_{ps} \gamma_{op} \psi_{p's'} d^3r = \frac{(2\pi)^2}{2\kappa} \delta(p_x - p'_x) \delta(p_y - p'_y) e^{i(p_0 - p'_0)x_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i(p'_z - p_z)\zeta} \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-1} \cdot \bar{u}_{ps} \left(1 - \frac{\epsilon \mathbb{A}}{2k \cdot p}\right) \left\{ p_0 + p'_0 + k_0 \frac{k \cdot (p+p')}{2k \cdot pk \cdot p'} (2\epsilon p \cdot A - \epsilon^2 A^2) - i\sigma_{30} [p_z - p'_z + k_0 \frac{k \cdot (p'-p)}{2k \cdot pk \cdot p'} (2\epsilon p \cdot A - \epsilon^2 A^2)] \right\} \left(1 + \frac{\epsilon \mathbb{A}}{2k \cdot p}\right) u_{p's'} \cdot \quad (6.10)$$

(6.10)-ben bevezettük a

$$\zeta \equiv z + \frac{k \cdot (p'-p)}{2k \cdot pk \cdot p'} \frac{1}{p'_z - p_z} \int^{\xi} d\xi' (2\epsilon p \cdot A - \epsilon^2 A^2) \quad (6.10a)$$

új integrációs változót. A (6.10a) definíciós egyenletből könnyen belátható, hogy

$$\frac{k_0}{2k \cdot pk \cdot p'} (2\epsilon p \cdot A - \epsilon^2 A^2) = \frac{p'_z - p_z}{k \cdot (p'-p)} \left(1 - \frac{d\zeta}{dz}\right). \quad (6.10b)$$

Ha (6.10) { } zárójelében (6.10b)-t a megfelelő helyeken felhasználjuk, valamint figyelembe vesszük a Dirac-delták által kifejezett  $p_x = p'_x$ ,  $p_y = p'_y$  egyenlőségeket, s azt, hogy mind  $p$  mind  $p'$  a szabad tömeghéjon van, akkor (6.10)-et lényegesen egyszerűbb szerkezetűvé tehetjük,

$$\int \bar{\Psi}_{ps} \gamma_{op} \psi_{p's'} d^3r = \frac{(2\pi)^2}{2\kappa} \delta(p_x - p'_x) \delta(p_y - p'_y) e^{i(p_0 - p'_0)x_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i(p'_z - p_z)\zeta} \bar{u}_{ps} \left[ \frac{p_z - p'_z}{k \cdot (p'-p)} k \cdot (p+p') - (p_z - p'_z) i\sigma_{30} - (p_z - p'_z) \frac{k \cdot (p+p')}{2k \cdot pk \cdot p'} (1 + i\sigma_{30}) \epsilon \mathbb{A} \right] u_{p's'} \cdot \quad (6.10c)$$

Mivel a tekintett  $\{k^\mu\} = (k_0, 0, 0, k_0)$  esetben  $1 + i \sigma_{30} = (\gamma_0/k_0)\not{k}$ , ezért (6.10c) [ ] zárójelében a harmadik tag  $\not{k}^2 = k^2 = 0$  miatt zérus. A  $\zeta$  szerinti integrálás elvégzése után a

$$\delta(p'_z - p_z) \frac{p_z - p'_z}{k \cdot (p' - p)} k \cdot (p + p') = \delta(p'_z - p_z) \lim_{p_z \rightarrow p'_z} \frac{p_z - p'_z}{k \cdot (p' - p)} k \cdot (p + p') = 2p_0 \delta(p_z - p'_z)$$

összefüggés alapján a (6.8)-ban kijelölt ortogonalitási integrálra (6.10c) szerint végül a következő formulát nyerjük

$$\int \bar{\Psi}_{ps}(x) \gamma_0 \Psi_{p',s'}(x) d^3r = (2\pi)^3 (p_0/k) \delta_3(p - p') \delta_{ss'} \quad (6.11)$$

A Volkov állapotokat tehát ugyanugy kell normálnunk mint a szabad sikhullámokat (amint ezt (6.6)-ban feltüntettük). Hasonlóan bizonyítható a (6.7a-b)-ben szereplő többi összefüggés is.

A Volkov-állapotok  $t=t'$  hipersikonon vett

$$\sum_{s=1,2} \int d^3p [\psi_{ps}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{ps}^{(+)}(x') \gamma_0 + \psi_{ps}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{ps}^{(-)}(x') \gamma_0]_{t=t'} = \delta_3(\underline{r} - \underline{r}') \quad (6.12)$$

teljességét sajnos mind ez ideig nem sikerült expliciten igazolni. Megjegyezzük, hogy az un. fényszerű formalizmus (Neville és Rohrlich 1971a,b, Mitter 1975) segítségével megmutatható, hogy a  $k \cdot x \equiv \xi = \text{konstans}$  hipersikon (6.7a-b)-vel analóg ortogonalitási relációk érvényesek, sőt ezen a hipersikonon a Volkov-állapotok teljes rendszert képeznek (Bergou és Varró 1980a), azonban az erre vonatkozó részleteket itt nem közöljük, egyrészt helykimélés céljából, másrészt azért, mert ezeket az eredményeket a későbbiekben nem fogjuk felhasználni.

Ha a (6.2a) másodrendű Dirac-egyenletben a spin-elektromágneses tér kölcsönhatást leíró  $\frac{1}{2} e \sigma F$  tagtól eltekintünk, akkor a Klein-Gordon egyenlethez jutunk, amelynek  $\Phi_p^{(\pm)}$  megoldásai (6.5)-ből a bispinor amplitudók elhagyásával kaphatók,

$$\Phi_p^{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (2p_0)^{1/2}} \exp\{\mp i [p \cdot x + \int_p^\xi I_p^{(\pm)}(\xi') d\xi']\} \quad (6.13)$$

Érdekes, hogy  $\Phi_p^{(+)} \sim \exp[-\frac{i}{\hbar} S(x, p)]$  alakú, ahol  $S$  az első fejezetben látott (1.21) klasszikus hatásfüggvény ( $p \equiv \hbar p$ ), tehát ez esetben a WKB-közelítés teljesen pontos. A  $\Phi_p^{(\pm)}$  megoldások ortogonális rendszert képeznek a következő értelemben (Eberly 1969).

$$\int \Phi_p^{(\pm)*}(x) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \Phi_{p'}^{(\pm)}(x) d^3x = \delta_3(p-p'). \quad (6.14a)$$

$$\int \Phi_p^{(\pm)*}(x) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \Phi_{p'}^{(\mp)}(x) d^3x = 0, \quad (6.14b)$$

ahol  $f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 g \equiv f (\partial g / \partial x_0) - (\partial f / \partial x_0) g$ .

Megjegyezzük, hogy (6.13)-ból nemrelativisztikus határesetben a (3.7) faktort tartalmazó (3.5) megoldást kapjuk.

6B. Az elektron relativisztikus hullámegyenleteinek peremértékproblémája elektromágneses síkhullámtérben. Green-függvények

A (6.1) egyenlet peremértékproblémájának megfogalmazása a következő (Jauch és Rohrlich 1955): (6.1)  $\psi(x)$  megoldása legyen adott egy térszerű hipersikonon (pl. a  $t = t_1$  időpontban a hármas térben). Határozzuk meg  $\psi(x)$ -et a teljes téridőben ( $\forall t \geq t_1$  időpontban a hármastérben). A feladat (6.1) Green-függvényeivel (propagátoraival) oldható meg.

A (6.1) egyenlet  $G(x,y;A)$  Green-függvényei definíció szerint az alábbi inhomogén egyenletet elégítik ki

$$(\not{\partial}_x - \kappa)G(x,y;A) = \delta_4(x-y). \quad (6.15)$$

Hasonlóan a hullámfüggvényekhez, ha  $g(x,y;A)$  kielégíti a

$$(\Pi_x^2 - \kappa^2 - \frac{1}{2} \epsilon \sigma F(x))g(x,y;A) = \delta_4(x-y) \quad (6.15a)$$

másodrendű egyenletet, akkor  $(\not{\partial}_x + \kappa)g(x,y;A)$  megoldása (6.15)-nek. (6.15) megoldását először Brown és Kibble (1964) közölték a következő formában:

$$G(x,y;A) = (\not{\partial}_x + \kappa) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{-i[p \cdot (x-y) + \int_{\eta}^{\xi} J_p(\xi') d\xi']\}}{p^2 - \kappa^2} \quad (6.15b)$$

ahol

$$\xi \equiv k \cdot x, \quad \eta \equiv k \cdot y, \quad J_p(\xi) \equiv I_p(\xi) - \frac{\epsilon}{4p \cdot k} \sigma F(\xi) \quad (6.15c)$$

A  $(\not{\partial}_x + \kappa)$ -val való beszorzás elvégzése után egy explicitebb alakot kaphatunk

$$G(x, y; A) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(1 + \frac{\epsilon K A(\xi)}{2k \cdot p}\right) \frac{p + \kappa}{p^2 - \kappa^2} \left(1 - \frac{K A(\eta)}{2k \cdot p}\right) \exp\{-i[p \cdot (x-y) + \int_{\eta}^{\xi} I_p(\xi') d\xi']\} \quad (6.15d)$$

(erre az alakra vonatkozólag lásd pl. Beers és Nickle 1972, Mitter 1975, Ritusz 1972). Könnyen igazolható, hogy ha (6.13d)-ben a  $p_0$  szerinti integrálást a Feynman-féle peremfeltételnek (pl. Bjorken és Drell 1964) megfelelő konturon végezzük, akkor az így kapott propagátor kifejezhető a (6.6) állapotok diadikus integráljaival,

$$G_F(x, y; A) = G^{(+)}(x, y; A) + G^{(-)}(x, y; A), \quad (6.16a)$$

ahol

$$G^{(\pm)}(x, y; A) \equiv \mp i \sum_{s=1,2} \int d^3 p \psi_{ps}^{(\pm)}(x) \bar{\psi}_{ps}^{(\pm)}(y) \Theta(\pm x_0 \mp y_0), \quad (6.16b)$$

és  $\Theta$  az egység ugrás függvény,

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6.16c)$$

A (6.7a-b) ortogonalitásokat felhasználva egyszerűen belátható, hogy a (6.16a) propagátor (6.1) pozitív ill. negatív energiás megoldásait időben előre ill. visszafelé terjeszti,

$$\psi^{(\pm)}(x) \Theta(\pm x_0 \mp y_0) = \pm i \int d^3 y G_F(x, y; A) \gamma_0 \psi^{(\pm)}(y). \quad (6.17)$$

(6.17) a Feynman-féle peremértékprobléma megoldását jelenti.

Ha (6.15a)-ban az  $\frac{1}{2} \epsilon \sigma F$  tagot elhanyagoljuk, akkor az inhomogén Klein-Gordon-egyenlethez jutunk, amelynek  $\mathcal{G}(x, y; A)$  megoldása (6.15d)-ből a megfelelő mátrixamplitudók elhagyásával kapható,

$$\mathcal{G}(x, y; A) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{-i[p \cdot (x-y) + \int_{\eta}^{\xi} I_p(\xi') d\xi']\}}{p^2 - \kappa^2}. \quad (6.18)$$

Könnyen belátható, hogy a Feynman-féle peremfeltételhez tartozó  $\mathcal{G}_F$  propagátor ( $G_F$  (6.16a) alakjával teljesen analóg módon) a (6.13)-beli hullámfüggvények diád-integráljaként állítható elő,

$$\mathcal{G}_F(x, y; A) = \mathcal{G}^{(+)}(x, y; A) + \mathcal{G}^{(-)}(x, y; A), \quad (6.19a)$$

ahol

$$\mathcal{G}^{(\pm)}(x, y; A) \equiv -i \int d^3 p \Phi_p^{(\pm)}(x) \Phi_p^{(\pm)*}(y) \Theta(\pm x_0 \mp y_0). \quad (6.19b)$$

(6.19a-b) és (6.14a-b) alapján be lehet bizonyítani, hogy  $\mathcal{G}_F$  a pozitív ill. negatív energiás állapotokat időben előre ill. visszafelé terjeszti,

$$\Phi^{(\pm)}(x)\theta(\pm x_0 \mp y_0) = i \int d^3y \mathcal{G}_F(x, y; A) i \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \Phi^{(\pm)}(y). \quad (6.20)$$

A fenti formális részletek befejezésekképpen megvizsgáljuk, hogy a fényvel való kölcsönhatás hogyan módosítja a szabad elektronok impulzustérbeli terjedését. Az egyszerűség kedvéért a skálár elektronok (6.18) propagátorát tanulmányozzuk az

$$A = a_0 (\epsilon e^{-ik \cdot x} + \epsilon^* e^{ik \cdot x}), \quad (6.21)$$

$$(k^2 = \epsilon^2 = \epsilon^{*2} = k \cdot \epsilon = 0, \quad \epsilon^* \cdot \epsilon = -1) \quad (6.21a)$$

vektorpotenciál esetében (ekkor  $A^2 = -2a_0^2 = \text{állandó}$ ). Az impulzustérbe az alábbi kettős Fourier-transzformációval térhetünk át;

$$\mathcal{G}(p, q; A) = \int d^4x d^4y \mathcal{G}(x, y; A) e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \quad (6.22)$$

Az (1.37) Jacobi-Anger-formula segítségével  $\mathcal{G}(p, q; A)$ -ra a következő kifejezés adódik (Eberly 1968):

$$\mathcal{G}(p, q; A) = (2\pi)^4 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta_4(p + \ell k - q) e^{i\ell\varphi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{J_{\ell+r}(\zeta) J_r(\zeta)}{(p - rk)^2 - \kappa_*^2}, \quad (6.23)$$

ahol

$$\zeta \equiv 2 \frac{\epsilon a_0}{k \cdot p} |p \cdot \epsilon|, \quad \varphi \equiv \arg(p \cdot \epsilon^*), \quad (6.23a)$$

és

$$\kappa_*^2 \equiv \kappa^2 + 2\epsilon^2 a_0^2 \quad (6.23b)$$

( $J$ -k egészrendű Bessel-függvények). (6.23) szerint az impulzustérbeli Green-függvénynek végtelen sok nemdiagonális összetevője és pólusa van, amely fotonok abszorpciójának és emissziójának felel meg. A szabad tömeghég reláció helyébe a

$$(p - rk)^2 = \kappa_*^2, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.23c)$$

összefüggés lép, ez azt jelenti, hogy az elektronnak egy meghatározott intenzitásfüggő ( $\hbar\kappa_*/c$ ) tömege van, azonban a négyesimpulzusa a (6.23c) nivószerkezetet mutatja. Ez az optikailag indukált szintszerkezet.

6C. Szórásszámítás. Furry-kép

A (6.16) Green-függvény segítségével elegánsan leírhatjuk a szabad elektron intenzív fényben lejátszódó szórásfolyamatait. Tekintsünk egy  $V(x)$  potenciálon való szóródást. Az elektron  $\underline{\psi}(x)$  állapota most a

$$(\not{A}-\kappa)\underline{\psi}(x) = \epsilon \not{V}(x)\underline{\psi}(x) \tag{6.24}$$

Dirac-egyenletet elégíti ki, amely (6.15)-öt figyelembe véve átírható a következő integrálegyenletté

$$\underline{\psi}(x) = \psi_i(x) + \epsilon \int d^4y G_F(x,y;A) \not{V}(y)\underline{\psi}(y), \tag{6.25}$$

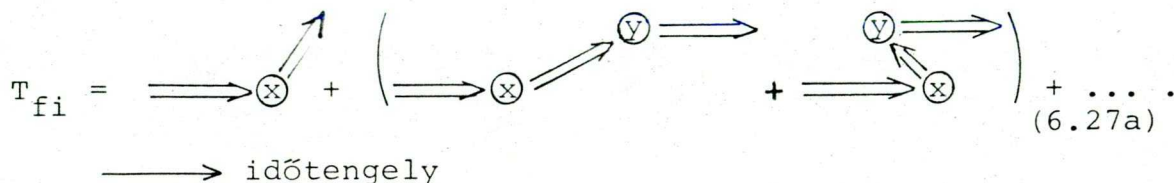
ahol a  $\psi_i$  kezdeti állapot a (6.1) egyenlet megoldása. (6.25)-öt szukcesszív approximációval oldhatjuk meg, eszerint

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) = & \psi_i(x) + \epsilon \int d^4y G_F(x,y;A) \not{V}(y)\psi_i(y) + \\ & + \epsilon^2 \int d^4y d^4z G_F(x,y;A) \not{V}(y) G_F(y,z;A) \psi_i(z) + \dots \end{aligned} \tag{6.26}$$

Pl. egy  $\psi_i^{(+)} \rightarrow \psi_f^{(+)}$  folyamat szórásmátrixa  $S_{fi} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int d^3x \bar{\psi}_f^{(+)} \gamma_0 \underline{\psi}$ . A (6.26), (6.16a-b) és (6.7a-b) összefüggéseket használva egyszerűen belátható, hogy pl. a pozitív frekvenciás Volkov-állapotok között a  $V(x)$  potenciál hatására bekövetkező nemtriviális átmenetek  $T_{fi} \equiv (S-1)_{fi}$  valószínűségi amplitudója az alábbi alakra hozható

$$\begin{aligned} T_{fi} = & -i\epsilon \int d^4x \bar{\psi}_f^{(+)}(x) \not{V}(x) \psi_i^{(+)}(x) + \\ & + (-i\epsilon^2) \int d^4x d^4y \bar{\psi}_f^{(+)}(x) \not{V}(x) G_F(x,y;A) \not{V}(y) \psi_i^{(+)}(y) + \dots \end{aligned} \tag{6.27}$$

$T_{fi}$  kiszámítására az imént bemutatott eljárás tulajdonképpen egy speciális - a Volkov állapotokkal felépített - Furry képbeli perturbációszámítás.  $T_{fi}$  V-ben különböző rendű járulékait gráfokkal szemléltethetjük, teljesen hasonlóan a szokásos Feynman-gráfokhoz:



(6.27a)-ban az időtengely irányába mutató kettős nyilak Volkov állapotban levő elektront reprezentálnak, a vonalak töréshelyei a potenciállal való kölcsönhatásnak felelnek meg, s a kölcsönhatási pontok közötti belső vonalakat irányítástól függően a  $G^{(+)}$  vagy  $G^{(-)}$  propagátorokhoz rendeljük.

A lézerefényben végbemenő szórás folyamatok konzekvens kvantumelektrodinamikai tárgyalását tehát Furry-képben célszerű elvégezni, úgy, hogy az elektromágneses tér vektorpotenciáljának a lézerefényt leíró klasszikus részét az elektronok  $\psi$  téroperátorában eleve egzaktul figyelembe vesszük. A következőkben röviden áttekintjük ennek az eljárásnak a formális vonatkozásait.

Az elektrontér és az elektromágneses tér kölcsönhatási Hamilton-operátora

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{c} \int j(x) \cdot [A(x) + a(x)] d^3x, \quad (6.28)$$

amelyben  $A(x)$  a lézerefény potenciálja. A Furry-képbe az

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{c} \int j(x) \cdot A(x) d^3x K \quad (6.29)$$

egyenletet kielégítő  $K$  kanonikus transzformációval térhetünk át (Jauch és Rohrlich 1955). Ebben a képben az állapotok az alábbi Schrödinger-egyenletnek tesznek eleget

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |> = \frac{1}{c} \int j_F(x) \cdot a(x) d^3x |>, \quad (6.30a)$$

ahol

$$j_F(x) \equiv K^{-1} j(x) K = ce \bar{\Psi}_F(x) \gamma \Psi_F(x). \quad (6.30b)$$

$\Psi_F(x)$  a szabad  $\psi(x)$  téroperátorból a

$$\Psi_F(x) = K^{-1} \psi(x) K \quad (6.30c)$$

transzformációval származtatható és kielégíti a (6.1) Dirac-egyenletet,

$$(\not{\nabla}_x - \kappa) \Psi_F(x) = 0. \quad (6.30d)$$

$\Psi_F(x)$  a (6.6) Volkov állapotok szuperpozíciója,

$$\Psi_F(x) = \sum_{s=1,2} \int d^3p [a_s(\underline{p}) \psi_{ps}^{(+)}(x) + b_s^+(\underline{p}) \psi_{ps}^{(-)}(x)] = \psi_F^{(+)}(x) + \psi_F^{(-)}(x), \quad (6.31)$$

ahol  $a_s(\underline{p})$ -k ill.  $b_s^+(\underline{p})$ -k a szokásos elektronabszorpciós és pozitronemissziós fermionoperátorok.  $a_s(\underline{p})$ -k pl. a következő antikommutációs törvénynek engedelmeskednek

$$\{a_s(\underline{p}), a_s^+(\underline{p}')\} = \delta_3(\underline{p}-\underline{p}') \delta_{ss}, \quad \{a_s(\underline{p}), a_s(\underline{p}')\} = 0. \quad (6.31a)$$

(6.31) és (6.31a) felhasználásával az elektronok  $G^{(+)}$  Green-függvénye a  $\Psi_F$  téroperátorral a következőképpen fejezhető ki

$$\Theta(x_0 - y_0) \{ \Psi_F^{(+)}(x), \bar{\Psi}_F^{(+)}(y) \} = iG^{(+)}(x, y; A). \quad (6.31b)$$

A rendszer S-operátora (6.30a) alapján

$$S = P \exp\{-i\epsilon \int d^4x [\bar{\Psi}_F(x) \gamma \Psi_F(x)] \cdot a(x)\}, \quad (6.32)$$

ahol P a Dyson-féle szimbólum. (6.32) kifejtésével közvetlenül belátható, hogy a  $T_{fi} = \langle f | (S-1) | i \rangle$  átmeneti amplitudók meg-egyeznek (6.27)-tel ha  $|f\rangle$  és  $|i\rangle$  egyelektron állapotok és  $a(x) = V(x)$  nem kvantált vektorpotenciál.

Az itt bemutatott Furry-kép alkalmas szabad elektronok intenzív lézerfényben lezajló spontán sugárzásos folyamatainak leírására, sugárzási korrekciók kiszámítására is. Jelen dolgozatban csak a Furry-képbeli elsőrendű folyamatokkal foglalkozunk, ezért az imént vázolt teljes kvantumelektrodinamikai apparátusra valójában nincs szükségünk.

(6.27) alkalmazásaként vizsgáljuk meg (Bergou és Varró 1980a) egy  $V_0(\underline{r})$  skalárpotenciállal jellemzett ion hatására a szabad elektron lézerfényben lejátszódó többfotonos kényszerített fékezési sugárzását (ezt a folyamatot nemrelativisztikus elektronokra a 3. és 4. fejezetben már részletesen tárgyaltuk). A (6.6) Volkov-állapotok közötti átmenet  $V_0(\underline{r})$ -ben elsőrendű valószínűségi amplitudója

$$T_{fi} = -i\epsilon \int d^4x \bar{\Psi}_{p',s}^{(+)}(x) \gamma_0 V_0(\underline{r}) \Psi_{ps}^{(+)}(x) \quad (= \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{ x}) \quad (6.33)$$

(6.33)-at az egyszerűség kedvéért a (6.21) cirkulárisan polarizált vektorpotenciál esetében értékeljük ki.

Az (1.37) Jacobi-Anger-formula segítségével  $T_{fi}$  parciális amplitudók inkohereus szuperpozíciójaként állítható elő,



$$T_{fi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{fi}^{(n)}, \quad T_{fi}^{(n)} \equiv -2\pi i \delta(p'_0 - p_0 + (\zeta - n)k_0) t_{fi}^{(n)}, \quad (6.34a)$$

ahol

$$\zeta \equiv \frac{\epsilon^2 A_0^2}{2} \left( \frac{1}{p' \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k} \right), \quad t_{fi}^{(n)} = \frac{\epsilon \kappa}{(2\pi)^3 (p'_0 p_0)^{1/2}} V_0(Q_n) \bar{u}_{p's}^{(+)} M_n u_{ps}^{(+)}, \quad (6.34b)$$

és

$$Q_n \equiv p - p' + (n - \zeta)k, \quad (6.34c)$$

$$M_n \equiv \left( \gamma_0 + \frac{\epsilon^2 A_0^2 k_0}{k \cdot p k \cdot p'} \kappa \right) B_n + \frac{\epsilon A_0}{2} \left( \frac{\gamma_0 \kappa}{k \cdot p} + \frac{\kappa \gamma_0}{k \cdot p'} \right) (\not{e} B_{n-1} + \not{e}^* B_{n+1}), \quad (6.34d)$$

valamint

$$B_n \equiv J_n(|z|) e^{-in\chi} \quad z \equiv 2\epsilon A_0 \left( \frac{\epsilon \cdot p'}{k \cdot p'} - \frac{\epsilon \cdot p}{k \cdot p} \right) = |z| e^{-i\chi} \quad (6.34e)$$

$V_0(Q_n)$  a szórópotenciál  $Q_n$  átadott impulzushoz tartozó Fourier-komponense,  $J_n$   $n$ -edrendű Bessel-függvény.

A (6.34a)-ban szereplő Dirac-delták az  $n$ -fotonos abszorpciókhoz ( $n > 0$ ) ill. emissziókhöz ( $n < 0$ ) tartozó energiamegmaradást fejezik ki.  $T_{fi}^{(n)}$ -ből egy  $n$ -edrendű folyamat differenciális hatáskeresztmetszete a szokásos módon számítható, mi itt csak a végeredményt adjuk meg (polarizálatlan elektronok esetében):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega} &= \frac{|p'|}{|p|} J_n^2(|z|) \frac{d\sigma_B^{(n)}}{d\Omega} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_0 p'_0 + p \cdot p'}{\kappa^2} \right) \left( \frac{p'_0}{\kappa} \right) + \\ &+ \frac{|p'|}{|p|} \frac{d\sigma_B^{(n)}}{d\Omega} \left( \frac{p'_0}{\kappa} \right) (\alpha_n v + \beta_n v^2 + \gamma_n v^3 + \delta_n v^4) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Az  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  és  $\delta_n$  együtthatók a  $v = \frac{ea_0}{2mc}$  intenzitás paramétertől a  $J_n$  és  $J_{n+1}$  Bessel-függvényeken keresztül függenek, tehát korlátosak, pontos alakjukat bonyolultságuk miatt itt nem közöljük. (6.35) jobb oldalának első tagja a (3.22) nemrelativisztikus kifejezés közvetlen általánosítása relativisztikus elektronokra dipólközelítésen túl. A második tag a spin-lézerfény kölcsönhatásból ered, s az elsőhöz képest elég széles intenzitás-tartományban ( $n\hbar\omega/2mc^2$ ) rendű korrekciót jelent, amely optikai frekvenciáknál csak  $n \sim 10^5$  rendű folyamatoknál számottevő. Ha ezt a tagot elhagyjuk, akkor (6.35) átmegy a Schlessinger és Wright (1979, 1980) által skalár elektronokra kapott hatáskeresztmetszetbe.

#### 6D. Intenzív Compton-szórás skalár elektronon

Az intenzív Compton-szórást először Alperin (1944) tanulmányozta a (6.1) Dirac-egyenlet általa kapott (a Volkov-állapotokkal unitér-ekvivalens) egzakt megoldásai segítségével, az átmeneti áramok módszerét használva. Munkája azonban abban az időben nem talált visszhangra. A lézerek megjelenése után az intenzív tér elektrodinamika erőteljes fejlődésnek indult, s szinte egy időben számos dolgozat jelent meg az intenzív Compton-szórásról (Goldman 1964, Brown és Kibble 1964, Nyikisov és Ritusz 1964, Narozsnyij, Nyikisov és Ritusz 1964, Frantz 1965, Kibble 1965), amelyekben a szerzők a Volkov-állapotokra alapozva publikáltak szemiklasszikus számításokat. (Fried (1963) a másodharmonikus keltés leírásához a Bloch-Nordsieck-modellt használta.) Mindezek mellett úgy érezzük, hogy szükség van a skalár elektronon történő intenzív fényszórás analízisére is, mivel ez az előbb említett munkák egyikében sem található meg. Az elektron Klein-Gordon-egyenlettel való leírása formuláink spintől eredő bonyolultságának kiküszöbölése mellett azért is hasznosnak ígérkezik, mert a spinnek a klasszikus mechanikában nincs megfelelője, s ugyanakkor a skalár elektronok vizsgálata során adódó kvantummechanikai eredmények könnyebben összevethetők a kapcsolódó klasszikus formulákkal.

A  $k'$  hullámszámu és  $\epsilon'$  polarizációju szórt fényt az

$$a(x) = \left(\frac{4\pi\hbar c}{2k'_0}\right)^{1/2} \epsilon' (ae^{-ik' \cdot x} + a^+ e^{ik' \cdot x}) \quad (6.36)$$

kvantált vektorpotenciállal jellemezzük, a ill.  $a^+$  foton abszorpció és emissziós operátorok. A perturbált rendszer állapotai az

$$((i\partial - \epsilon A)^2 - \kappa^2)\Phi = W\Phi \quad (6.37)$$

Klein-Gordon-egyenletet elégítik ki, ahol

$$W = W(x) \equiv 2\epsilon a(x) \cdot (i\partial - \epsilon A(x)) - \epsilon^2 a^2(x), \quad (6.37a)$$

és lineárisan polarizált lézerefény esetében

$$A(x) = A_0 \epsilon \cos k \cdot x. \quad (6.37b)$$

A Green-függvény definíciója alapján (6.37) könnyen átirható a következő integrálegyenletre:

$$\Phi(x) = \Phi_i(x) + \int d^4x \mathcal{G}(x,y;A)W(y)\Phi(y), \quad (6.38)$$

$\Phi_i(x)$  (6.13) típusu elektronállapot. A (6.19a-b) és (6.14a-b) formulák alkalmazásával (6.38)-ból egy foton emissziójának átmeneti amplitudójára Born-közelítésben az alábbi kifejezés adódik,

$$T_{fi} = -i \int dy \Phi_{pf}^{(+)*}(y) \langle 1 | W(x) | 0 \rangle \Phi_{pi}^{(+)}(x), \quad (6.39)$$

ahol

$$\langle 1 | W(x) | 0 \rangle = 2\epsilon \left( \frac{4\pi\hbar c}{2k'_0} \right)^{1/2} \epsilon' \cdot (i\partial - A(x)) e^{ik' \cdot x}. \quad (6.39a)$$

(6.39)-be  $\Phi_{pf,i}^{(+)}$ -k (6.13)-ból (6.37b)-vel számított konkrét alakját beírva  $T_{fi}$ -t az (1.37) Jacobi-Anger-formula segítségével parciális amplitudók inkoherens szuperpozíciójaként állíthatjuk elő,

$$T_{fi} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_{fi}^{(\ell)},$$

$$T_{fi}^{(\ell)} = -2\pi i \delta_4(p_f + k' - p_i - \ell k + \frac{\epsilon^2 A_0}{4} \frac{(p_i - p_f) \cdot k}{p_f \cdot k p_i \cdot k}) t_{fi}^{(\ell)}, \quad (6.40)$$

$$t_{fi}^{(\ell)} \equiv \frac{2\epsilon\kappa(4\pi\hbar c)^{1/2}}{(2\kappa)^{1/2} (2p_f^0)^{1/2} (2k'_0)^{1/2}} \{v(\underline{\epsilon} \underline{\epsilon}') \frac{1}{2} (C_{\ell+1} + C_{\ell-1}) -$$

$$- (\underline{n} \underline{\epsilon}') \frac{v^2}{4} [C_{\ell} + \frac{1}{2} (C_{\ell+2} + C_{\ell-2})]\}, \quad (6.40a)$$

$v \equiv (\epsilon A_0 / \kappa)$  a már jól ismert intenzitásparaméter, és

$$C_{\ell} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\ell-2m}(\epsilon A_0 \frac{p_f \cdot \underline{\epsilon}}{p_f \cdot k}) J_m(-\frac{\epsilon^2 A_0^2}{8} \frac{(p_i - p_f) \cdot k}{p_i \cdot k p_f \cdot k}). \quad (6.40b)$$

(Feltettük, hogy az elektron kezdetben nyugszik, vagyis  $p_i = (\kappa, \underline{0})$ .) Belátható, hogy a (6.40)-ben szereplő Dirac-delták a

$$p_f + k' = p_i + \frac{\ell}{w} k, \quad w \equiv 1 + \frac{v^2}{4} [1 - (\underline{s} \underline{n})] \quad (6.41)$$

négyesimpulzus-megmaradást fejezik ki,  $\underline{s} = (\underline{k}' / |\underline{k}'|)$  a szórt sugárzás terjedési irányvektora, és  $\underline{n} = (\underline{k} / |\underline{k}|)$ .  $w$  az intenzitásfüggő elektrondriftből eredő Doppler-eltolódást írja le, ugyanúgy, mint a klasszikus esetben ((1.36a)). (6.41)-ből a következő frekvenciafeltétel adódik:

$$\omega' = \frac{\ell\omega}{u} \equiv \frac{\ell\omega}{1 + (2 \frac{\ell\omega}{\omega_c} + \frac{v^2}{2}) \sin^2 \frac{\Theta}{2}}, \quad (6.41a)$$

ahol  $\omega_c \equiv (mc^2/\hbar)$  az elektron Compton-frekvenciája. A Compton-eltolódástól eltekintve (6.41a) egybeesik az (1.42) klasszikus eredménnyel.  $T_{fi}^{(\ell)}$  (6.40) alakját használva egy  $\ell$ -ed rendű folyamat differenciális hatáskeresztmetszetére az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\frac{d\sigma^{(\ell)}}{d\Omega} = r_o^2 \left(\frac{2\ell}{u^2 v}\right)^2 (\underline{\alpha} \cdot \underline{\epsilon}')^2 \quad (6.42)$$

ahol  $r_o$  a klasszikus elektron sugár, és

$$\underline{\alpha} \equiv v B_\ell \underline{\epsilon} + \frac{[C_\ell + v(\underline{s} \cdot \underline{\epsilon}) B_\ell]}{[1 - (\underline{s} \cdot \underline{n})]} \underline{n}. \quad (6.42a)$$

A  $B_\ell$  és  $C_\ell$  együttthatók pontosan úgy vannak definiálva mint az első fejezet (1.40a) és (1.39b-c) képleteiben. A szórt sugárzás polarizációs irányaira kiátlagolva (6.42)-ből az (1.44) klasszikus eredménnyel csaknem azonos hatáskeresztmetszetet kapunk,

$$\begin{aligned} \sum_{\text{pol}} \frac{d\sigma^{(\ell)}}{d\Omega} &= r_o^2 \left(\frac{2\ell}{u^2 v}\right)^2 |\underline{\alpha} \times \underline{s}|^2 = \\ &= r_o^2 \left(\frac{2\ell}{u^2 v}\right)^2 [(C_\ell \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} + v B_\ell \cos\phi)^2 + (v B_\ell \sin\phi)^2]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

$\Theta$  és  $\phi$   $\underline{s}$  polárszögei, ugyanugy mint (1.44)-ben. Optikai frekvenciáknál  $(\omega/\omega_c) \sim 10^{-5}$ , ezért  $u \sim w$ , s ekkor (6.43) egybeesik (1.44)-gyel. Az intenzív fényszórást tehát a klasszikus elektrodinamika igen pontosan leírja, a kvantumkorrekciók nem játszanak lényeges szerepet.



## 7. RELATIVISZTIKUS SZABAD ELEKTRON KÖLCSÖNHATÁSA KVANTÁLT SUGÁRZÁSI TÉRREL

Dolgozatunk jelen utolsó fejezetében reprezentáció-független módszerrel egzaktul megoldjuk az elektronból és a sugárzási tér egy kvantált módusából álló rendszer Dirac-egyenletét, s röviden megvizsgáljuk a megfelelő elektronpropagátort is. Végül az intenzív Compton-szórás teljesen kvantummechanikai tárgyalását adjuk, amellyel - a szemiklasszikus külsőtér-közelítéssel ellentétben - az intenzív módus kiürülését is leírhatjuk.

### 7A. A "relativisztikus szabad elektron + kvantált e.m. módus" rendszer egzakt állapotai

A Dirac-elektronból és az elektromágneses sugárzási tér egy kvantált módusából álló rendszer mozgásegyenlete

$$(i\partial - \epsilon \mathbf{A} - \kappa)\psi = 0, \quad (7.1)$$

ahol

$$A = c \left( \frac{2\pi\hbar}{\omega V} \right)^{1/2} (\epsilon a e^{-ik \cdot x} + \epsilon^* a^+ e^{ik \cdot x}), \quad (7.1a)$$

V a kvantálási térfogat és az  $a, a^+$  amplitudók az  $[a, a^+] = 1$  felcserélési relációt elégítik ki. Az egyszerűség kedvéért cirkuláris polarizációt tételezünk fel, tehát  $\epsilon^2 = \epsilon^{*2} = 0$ ,  $\epsilon^* \cdot \epsilon = -1$ , és így  $A^2 \sim (a^+ a + \frac{1}{2})$ .  $\psi$  az elektron- és módus-állapotok szorzatterében van. A (7.1) egyenletet először Berson (1969) oldotta meg, sőt ugyancsak ő az azonos irányban terjedő tetszés szerinti számú módus szuperpozíciójára is megadta a megoldást (Berson 1970). Sajnos - mivel az  $a$  és  $a^+$  operátorok differenciáloperátor reprezentációját használta - eredményei nagyon bonyolult alakúak, s ezért konkrét szórásszámítások tárgyalásához nagyon nehézkesen alkalmazhatók. Mi a következőkben (7.1) áttekinthető, reprezentáció-független algebrai megoldását adjuk, amely az alkalmazások szempontjából sokkal előnyösebb mint a Berson-féle.

(7.1) megoldása érdekében először a

$$\psi = e^{ik \cdot x (a^+ a + \frac{1}{2})} \phi \quad (7.2)$$

transzformáció segítségével kiküszöböljük a vektorpotenciál tér- és időfüggését,

$$[i\cancel{p}-\cancel{k}(a^+a + \frac{1}{2}) -g(\cancel{p}a+\cancel{p}^*a^+)-\kappa]\Phi = 0, \quad (7.2a)$$

$$g \equiv (\alpha\lambda V^{-1})^{1/2},$$

(a g csatolási állandó kifejezésében  $\alpha \equiv (e^2/\hbar c)$  a finomszerkezeti állandó). Ezután  $\Phi$ -t a következő alakban kereshetjük,

$$\Phi = \Phi_p e^{-ip \cdot x}, \quad (7.3)$$

ahol p egyelőre tetszőleges négyesimpulzus. (7.3)-at (7.2a)-ba írva  $\Phi_p$ -re az alábbi egyenlet adódik

$$[\cancel{p}-\cancel{k}(a^+a + \frac{1}{2}) -g(\cancel{p}a+\cancel{p}^*a^+)-\kappa]\Phi_p = 0 \quad (7.3a)$$

(7.3a) diagonalizálásához a negyedik fejezetben bemutatott D-transzformációs eljárás még nem megfelelő, mert a bozonoperátoroknak különböző mátrix együtthatói vannak. Ez a probléma megoldható, ha  $\Phi_p$ -t a ((6.5) Volkov-állapotokra emlékeztető) következő alakban vesszük fel:

$$\Phi_p = [1 + \frac{g\cancel{k}}{2\cancel{k} \cdot \cancel{p}} (\cancel{p}a + \cancel{p}^*a^+)] \chi_p \equiv V \chi_p. \quad (7.4)$$

Megjegyezzük, hogy a (7.4) alak Majorana-reprezentációban (7.3a)-ból automatikusan kiadódik (Bergou és Varró 1981b).. (7.3a)-t

$V^{-1} = [1 - \frac{g\cancel{k}}{2\cancel{k} \cdot \cancel{p}} (\cancel{p}a + \cancel{p}^*a^+)]$ -val balról szorozva kapjuk, hogy

$$\{\cancel{p}-\cancel{k}[(1 + \frac{g^2}{\cancel{k} \cdot \cancel{p}})(a+a + \frac{1}{2}) + g(\frac{\cancel{p} \cdot \epsilon}{\cancel{p} \cdot \cancel{k}} a + \frac{\cancel{p} \cdot \epsilon^*}{\cancel{p} \cdot \cancel{k}} a^+)] - \kappa + \frac{g^2}{2\cancel{p} \cdot \cancel{k}} \frac{1}{2}(\cancel{p}\cancel{p}^* - \cancel{p}^*\cancel{p})\cancel{k}\} \chi_p = 0 \quad (7.4a)$$

Ezzel elértük, hogy a bozonoperátoroknak közös mátrixkoefficiense van, és így (7.4a)-ból az a-ban és  $a^+$ -ban lineáris tagokat a

$$D_\sigma \equiv e^{\sigma a^+ - \sigma^* a} \quad (7.5)$$

transzformációval a már ismert módon eliminálhatjuk. Ha

$$\sigma = - \frac{\cancel{p} \cdot \epsilon^*}{\cancel{p} \cdot \cancel{k} + g^2}, \quad (7.5a)$$

akkor a megoldás

$$\chi_p = w D_\sigma |n\rangle, \quad (7.6)$$

ahol  $|n\rangle$  fotonszámsajátállapot, és a  $w$  bispinor kielégíti a következő egyenletet

$$[\not{p} - \not{k} (1 + \frac{g^2}{p \cdot k}) (n + \frac{1}{2} - |\sigma|^2) + \frac{g^2}{2p \cdot k} \frac{1}{2} (\not{\epsilon} \not{\epsilon} - \not{\epsilon}^* \not{\epsilon}^*) \not{k} - \not{\kappa}] w = 0. \quad (7.6a)$$

Az un. projekciós technikát (Mitter 1975) használva bebizonyítható (Bergou és Varró 1981b), hogy

$$\frac{1}{2} (\not{\epsilon} \not{\epsilon}^* - \not{\epsilon}^* \not{\epsilon}^*) \not{k} w = -\not{k} w. \quad (7.6b)$$

Ennek alapján (7.6a)-t a következő alakra hozhatjuk

$$(\not{q} - \not{\kappa}) w = 0, \quad (7.6c)$$

ahol

$$q \equiv p - k g_p(n), \quad g_p(n) \equiv (1 + \frac{g^2}{p \cdot k}) (n + \frac{1}{2} - |\sigma|^2) + \frac{g^2}{2p \cdot k}. \quad (7.6d)$$

$k^2 = 0$  és  $k \cdot \epsilon = 0$  alapján megmutatható, hogy

$$p = q + k g_q(n). \quad (7.6e)$$

(7.6c) szerint  $q$  a szabad tömeghéjon levő négyesimpulzus és (6.3a)-nak megfelelően  $w = u_{qs}^{(+)}$  szabad bispinor. (7.2), (7.3), (7.6) és (7.6e) szerint (7.1) megoldásának végső alakja

$$\psi = e^{ik \cdot x (a^\dagger a + \frac{1}{2})} [1 + \frac{gk}{2q \cdot k} (\not{\epsilon} a + \not{\epsilon}^* a^\dagger)] u_{qs} D_\sigma |n\rangle e^{-i[q + k g_q(n)] \cdot x}. \quad (7.7)$$

(7.7) statisztikus tulajdonságai vizsgálatához itt nincs helyünk, csak annyit jegyzünk meg, hogy  $q$  ill.  $n$  lényegében az elektron négyesimpulzusának ill. a fotonszámnak a várható értéke a  $\psi$  állapotban.

Az imént bemutatott diagonalizálási eljárással a megfelelő, inhomogén Dirac- ill. Klein-Gordon-egyenlet is megoldható. Illusztrációképpen most megadjuk a "skalár elektron + kvantált e.m. módus" rendszer propagátorát,

$$\hat{G}(x, y) = e^{ik \cdot x (a^\dagger a + \frac{1}{2})} \left( \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_\sigma \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - 2p \cdot k f_p (a^\dagger a) - \kappa^2} D_\sigma^{-1} \right) e^{-ik \cdot y (a^\dagger a + \frac{1}{2})}, \quad (7.8)$$

ahol  $f_p(a^+a) \equiv (1 + \frac{g^2}{p \cdot k}) (a^+a + \frac{1}{2} - |\sigma|^2)$ , a többi jelölés ugyanaz mint fentebb volt.

$\hat{\mathcal{L}}_y$  impulzusreprezentációbeli  $\langle \ell+n | \hat{\mathcal{L}}_y(p,q) | n \rangle$  mátrix elemeiről a (4.17) Hilb-formula alkalmazásával belátható, hogy az  $n, V \rightarrow \infty$  ( $(n/V) \equiv \rho$  állandó) határesetben megegyeznek a megfelelő szemiklasszikus Green-függvény ((6.23)) nemdiagonális mátrixelemeivel

$$\lim_{\substack{n, V \rightarrow \infty \\ \rho = \text{állandó}}} \langle \ell+n | \hat{\mathcal{L}}_y(p,q) | n \rangle = (2\pi)^4 \delta_4(p+\ell k-q) e^{i\ell\varphi} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{J_{\ell+r}(\zeta) J_r(\zeta)}{(p-rk)^2 - \kappa_*^2}, \quad (7.9)$$

$$\zeta, \varphi, \kappa_* \equiv (6.23a-b), \quad a_0 \leftrightarrow \frac{c}{\omega} (2\pi\rho\hbar\omega)^{1/2}. \quad (7.9a)$$

A klasszikus lézerfénybeli elektronátmenetek, tehát a kvantált módus magasan gerjesztett állapotai közötti átmeneteknek felelnek meg. Fried és Eberly (1964) valamint Reiss és Eberly (1966) a Feynman diagramok szemiklasszikus határesetben való összegzésekor (7.9)-cel ekvivalens eredményt kaptak (lásd még Eberly és Reiss 1966). A másik szélsőséges eset a vákuum-vákuum átmenet, amelynek leírására (7.8) szintén alkalmas (ellentétben a szemiklasszikus Green-függvénnyel). A vákuumban mozgó skalár elektron propagátora

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{L}}_y(p,q) | 0 \rangle = (2\pi)^4 \delta_4(p-q) e^{-|\sigma|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|\sigma|^{2m}/m!)}{(p-m\tilde{k})^2 - \kappa_{**}^2}, \quad (7.10)$$

ahol

$$\tilde{k} \equiv k(1 + \frac{g^2}{p \cdot k}), \quad \kappa_{**}^2 = \kappa^2 + 2(p \cdot k + g^2) |\sigma|^2 + g^2. \quad (7.10a)$$

(7.10) alapján a  $(p-m\tilde{k})^2 = \kappa_{**}^2$  egyenlet által meghatározott pólusok a virtuális fotonokkal való kölcsönhatásról adnak számot.

## 7B. Kvantált elektromágneses sugárzás nemlineáris Compton-szórása

A Compton-szórás tárgyalásakor a szabad elektron és a sugárzási tér két módusának kölcsönhatását kell figyelembe vennünk. Az imént megkapott (7.7) egzakt megoldások birtokában a  $\{k, \epsilon\}$  módussal vett kölcsönhatást tetszőleges rendben tanulmányozhatjuk, tehát leírhatunk olyan folyamatokat, amelyek során a  $\{k, \epsilon\}$  módus fotontartalma tetszés szerinti értékkel változhat, miközben a szórt fény  $\{k', \epsilon'\}$  módusában egy "uj" foton jelenik meg. Ez a



nemlineáris Compton-szórás, amelyet a 6. fejezetben skalár elektronokra szemiklasszikus módszerrel vizsgáltunk. Az alább közlendő eljárás a módus kiürüléséről is számot ad (erre a szemiklasszikus külsőtér-közelítés nem alkalmas).

A nemlineáris Compton-szórás átmeneti amplitudója

$$T_{fi} = -ig' \int d^4x \bar{\Psi}_f \not{\epsilon}' e^{ik' \cdot x} \Psi_i, \quad (7.11)$$

ahol  $g' = (\alpha \lambda' v^{-1})^{1/2}$   $g$ -vel analóg módon definiált csatolási állandó, amely a  $\{k', \epsilon'\}$  módussal való kölcsönhatást írja le.  $\Psi_i$  és  $\Psi_f$  (7.7) típusu kezdeti és végállapot. Az integrálás elvégzése után  $T_{fi}$  a következő alakra hozható,

$$T_{fi} = -ig' (2\pi)^4 \delta_4(p' + k - p') t_{fi}, \quad t_{fi} = \bar{\Phi}_{p'} \not{\epsilon}' \Phi_p. \quad (7.12a-b)$$

A (7.12a)-ban szereplő Dirac-delták a négyesimpulzus megmaradást fejezik ki, részletesen kiírva

$$q' + kg_{q'}(n') + k' = q + kg_q(n). \quad (7.13)$$

(7.13)-ból a szórt sugárzás  $\omega'$  frekvenciája egy másodfoku egyenlet megoldásaként adódik, amely meglehetősen komplikált formájú. Ha az egyenletben a  $g^2$  rendű tagot elhagyjuk, akkor  $\omega'$ -t egy lineáris egyenletből határozhatjuk meg,

$$\omega' = \frac{\ell \omega + \omega_c (v^2/4) \delta}{1 + (2\ell \frac{\omega}{\omega_c} + \frac{v^2}{2}) \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (7.13a)$$

ahol  $\delta \equiv (n - n')/n$  a kiürülési tényező,  $\ell = n - n'$  a folyamat rendje,  $\theta = (\underline{k} \nabla \underline{k}')$  a szórási szög,  $\omega_c$  az elektron Compton-frekvenciája és  $v = (g/\kappa) (2n + 1)^{1/2}$  a kezdeti fotonszám várható értéknek megfelelő intenzitásparaméter. Ha a móduskiürülés elhanyagolható ( $\delta \sim 0$ ) akkor (7.13a) egybeesik a (6.41a) frekvenciafeltétellel (ha ott  $v$ -t a klasszikus  $A_0 = \frac{c}{\omega} (2\pi n \rho)^{1/2}$  amplitudóju vektorpotenciálból számolható  $\frac{eA_0}{mc^2}$  intenzitásparaméternek tekintjük). A (7.12b)-ben definiált  $t_{fi}$  amplitudó a normálási faktoroktól eltekintve a következőképpen írható

$$t_{fi} = \bar{u}_{q's'} M u_{qs}, \quad (7.14)$$

ahol

$$M \equiv B_0 \psi'' + \frac{g}{2q' \cdot k} (\psi_{B_-} + \psi^*_{B_+}) \psi \psi'' + \frac{g}{2q \cdot k} \psi'' \psi (\psi_{B_-} + \psi^*_{B_+}), \quad (7.14a)$$

$$\epsilon'' \equiv \epsilon' - \frac{k \cdot \epsilon'}{k \cdot k'} k, \quad B_0 \equiv \langle n' | D_{\sigma}^{-1} | n \rangle, \quad (7.14b-c)$$

$$B_- \equiv \langle n' | D_{\sigma}^{-1} a | n \rangle, \quad B_+ \equiv \langle n' | D_{\sigma}^{-1} a^+ | n \rangle \quad (7.14d-e)$$

(A (7.14a-e) képletek laboratóriumi rendszerben érvényesek, ahol  $q = (\kappa, \underline{0})$ , tehát (7.5a) szerint  $\sigma = 0$ , vagyis  $D_{\sigma} = 1$ .) Az  $n, V \rightarrow \infty$  ( $n/V \equiv \rho, \ell$  rögzített) határesetben (ekkor  $\delta = 0$ ) a fent definiált  $B$  együtthatók teljesen megegyeznek a megfelelő szemiklasszikus kifejezésekkel (az utóbbiakat illetően lásd pl. Brown és Kibble 1964), ezért ezt az esetet itt tovább nem vizsgáljuk.

A másik szélsőséges esetben a  $\{k, \epsilon\}$  módus kiürülése maximális ( $n' = 0 \rightarrow \delta = 1$ ), ekkor

$$\begin{aligned} \langle |t_{fi}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left( \frac{n\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{n\omega} - 2 + 4 |\underline{\epsilon} \underline{\epsilon}'|^2 \right) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{n!} \left( \frac{ng}{\kappa} \right)^{2n} |\underline{s} \underline{\epsilon}|^{2(n-1)} \exp \left\{ - \left( \frac{ng}{\kappa} \right)^2 |\underline{s} \underline{\epsilon}|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

ahol  $\langle \rangle$  a kezdeti elektronspinekre vett átlagolást és a végső spinekre vett összegzést jelent és  $\underline{s} \equiv \underline{k}' / |\underline{k}'|$ . (7.15) jobb oldala a folyamatra vonatkozó  $\frac{1}{4} \left( \frac{n\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{n\omega} - 2 + 4 |\underline{\epsilon} \underline{\epsilon}'|^2 \right)$  Klein-Nishina faktortól az

$$\frac{1}{|\underline{s} \underline{\epsilon}|^2} \frac{(\mu^2 n^2)^n}{n!} e^{-\mu^2 n^2} \quad (\mu \equiv \frac{g}{\kappa} |\underline{s} \underline{\epsilon}|) \quad (7.15a)$$

szorzóval különbözik, s ez a móduskiürülés egzakt figyelembevételének következménye. Megjegyezzük, hogy az  $e^{-\mu^2 n^2}$  tényező (amely az  $n$ -fotonos Compton-szórás szokásos perturbatív tárgyalásakor nem adódik ki) biztosítja, hogy az átmeneti valószínűség  $n \rightarrow \infty$  határesetben is véges maradjon.

A jelen fejezet alapján is megállapíthatjuk, hogy a  $\{k, \epsilon\}$  módus magasan gerjesztett állapotai közötti átmenetek - ha a kiürülés elhanyagolható - szemiklasszikus módszerrel kielégítően tárgyalhatók, de ha a kiürülés számottevő, akkor a külső térközelítést el kell vetnünk és a Volkov-állapotok helyett a (7.7) típusu állapotokkal kell számolnunk.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Dolgozatunk első fejezetében a szabad elektronon történő fényszórás egzakt klasszikus elektrodinamikai tárgyalása segítségével illusztráltuk, hogy a szórásfolyamatokban a beeső fény intenzitása jelentős szerepet játszhat. Láttuk, hogy a szórt fényben megjelenő felharmonikusok frekvenciái az elektron-drift következtében intenzitásfüggő eltolódást szenvednek, és hogy pl. az alapharmonikus pontos differenciális hatáskeresztmetszete - a beeső fény intenzitásától függően - számottevően elérhet a szokásos Thomson-féle hatáskeresztmetszettől.

A második fejezetben az intenzív fényt reprezentáló külső monokromatikus elektromágneses sikhullám hatásainak kitett pontoszerű elektron kvantált sugárzási terét analizáltuk, s egyben az első fejezet klasszikus eredményeinek mélyebb megalapozását adtuk.

Ezek után rátértünk a lézerefénnyel kölcsönható nemrelativisztikus szabad elektronok kvantummechanikai tanulmányozására. Először dipólközelítésben, majd egzaktul megoldottuk a megfelelő Schrödinger-egyenletet, s a megoldások segítségével megvizsgáltuk a "szabad elektronok optikailag indukált sávszerkezete" létezésének fizikai feltételeit. Ennek kapcsán elemeztük a Schrödinger-egyenlet az intenzív tér elektrodinamika problémáira való alkalmazhatóságát. A fejezet második részében a szabad elektron lézerefény jelenlétében lehetséges többfotonos átmeneteinek leírására általánosan használt szemiklasszikus módszer működésének illusztrálása érdekében kiszámítottuk a sztatikus háttérpotenciálon szóródó elektron nemlineáris kényszerített fékezési sugárzásának differenciális hatáskeresztmetszetét. Elemeztük a kapcsolódó kísérleti eredményeket is, amelyek - legalábbis kvalitatív - leírására az elmélet alkalmasnak bizonyult. Rámutattunk, hogy a szórásfolyamathoz tartozó megmaradási törvények tulajdonképpen az elektron kvantummechanikai rezonanciáit fejezik ki, s így fotonokkal való értelmezésük felesleges.

A negyedik fejezetben egzaktul megoldottuk a "nemrelativisztikus elektron + foton" rendszer mozgásegyenletét dipólközelítésben, s az így kapott állapotokat használva először megvizs-

gáltuk, hogy az elektronnal való kölcsönhatás hogyan befolyásolja a vizsgált e.m. módus fotonstatisztikáját. Ezután kiszámítottuk a kvantált sugárzási térben lejátszódó többfotonos kényszerített fékezési sugárzás differenciális hatáskeresztmetszetét. Így sikerült megalapoznunk a nemlineáris folyamatokra vonatkozó szemiklasszikus eredmények interpretálásakor általánosan elfogadott (de eddig megalapozatlanul használt) intuitív foton-képet. Egyben az intenzív módus kiürülését is figyelembe véve a szemiklasszikus külső tér közelítésnél pontosabb leírást adtunk.

Az ötödik fejezetben a szabad elektronok többfotonos folyamataival kapcsolatos eddig végzett kísérletek eredményeinek elméleti diszkutálása után a lézerfényben lezajló elektron-elektron szórást vizsgáltuk. Meghatároztuk az elektronok kölcsönhatását leíró effektív potenciál analitikus alakját, amely számot ad a lézerfényben levő elektronok (több kutató által már régóta sejtett) vonzásáról. Röviden kitértünk a rugalmas szórásnál szokásosan szereplő Rutherford-rezonancia mellett fellépő belső rezonanciák elemzésére is.

A hatodik fejezetben az e.m. síkhullámokkal kölcsönható szabad relativisztikus elektronok Dirac- és Klein-Gordon-egyenleteinek megoldásait, a Volkov-féle állapotokat, és a megfelelő Green-függvényeket (propagátorokat) tanulmányoztuk. Bebizonyítottuk a Volkov-állapotok térszerű hipersikon vett ortogonalitását. Ezt követően az intenzív tér elektrodinamika konzekvens, Furry-képbeli felépítését vázoltuk, majd meghatároztuk a relativisztikus elektronok nemlineáris kényszerített fékezési sugárzása és a skalár elektronon történő intenzív Compton-szórás differenciális hatáskeresztmetszetét. Ezek az eredmények a harmadik ill. első fejezetben kapott megfelelő formulák általánosítását jelentik.

A hetedik fejezetben reprezentáció-független módszerrel egzaktul megoldottuk az elektronnól és az e.m. sugárzási tér egy kvantált módusából álló rendszer Dirac- és Klein-Gordon-egyenletét, s röviden megvizsgáltuk a propagátorokat is. Végül a kvantált fény többfotonos Compton-szórásának tárgyalása során elemeztük móduskiürülés szerepét, valamint a Klein-Nishina-képlet általánosítását adtuk.

Befejezésképpen felsoroljuk az intenzív tér elektrodinamika néhány főbb, eddig még megoldatlan problémáját.

a) Az e.m. síkhullámokkal kölcsönható elektron mozgásegyenleteihez tartozó kezdetiértékproblémára eddig még nem sikerült megnyugtató megoldást találni.

b) Nincs még bebizonyítva a Volkov-állapotok térszerű hipersíkon vett teljessége.

c) A fény-elektron kölcsönhatás leírásakor az intenzív tér elektrodinamikában eddig a fényt térben és időben végtelen kiterjedésű síkhullámmal reprezentálták. A valóságban rendelkezésre álló fényforrásokat figyelembe véve ez első pillantásra nagymértékű idealizációnak tűnik.

Eddig még megoldatlan feladat az elektronok reálisabb (pl. Gauss) amplitudóprofilu hullámokkal való kölcsönhatásának egzakt analízise.

d) Az intenzív tér elektrodinamika jellegzetes módszere azon alapul, hogy az "elektron + intenzív módus" rendszer mozgásegyenletei egzakt megoldásainak birtokában a különböző szórásfolyamatok leírásakor az egyéb hatásokat (pl. egy ion Coulomb-terét vagy egy másik e.m. módust) perturbációszámítással kezeljük.

Fontos eredmény lenne, ha sikerülne meghatározni az "e.m. módus + Coulomb-tér + elektron" rendszer, vagy a "két (vagy több) e.m. módus + elektron" rendszer pontos állapotait.

Az imént bemutatott problémák elemzése dolgozatunk célkitűzésein túl mutat, ezek vizsgálatát a jövőben tervezzük.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezuton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Bergou Jánosnak, akivel az együtt dolgozás számomra nagy öröm, s akinek szakmai és baráti támogatását mindvégig élveztem.

Dr. Siklós Tivadarnak, a Szilárdtest-elméleti Osztály vezetőjének, aki munkámat folyamatosan figyelemmel kísérte és hasznos tanácsokkal látott el.

Dr. Kroó Norbertnek, akinek munkám iránti élénk érdeklődése számomra sokat jelentett.

Dr. Farkas Győzőnek és Horváth Zoltánnak, akikkel a szabad elektronok és intenzív fény kölcsönhatásáról sok érdekes diskussziót folytattunk.

## IRODALOMJEGYZÉK

- Abramowitz M. and Stegun I.A., 1964 Handbook of Mathematical Functions (London: Dover)
- Alperin M., 1944 ZsETF 14, 3
- Arscott F.M., 1964 Periodic differential equations (Oxford: Pergamon Press)
- Becker W., 1977 Physica 87A, 601
- Becker W., Meckbach R. and Mitter H., 1979 J. Phys. A: Math. Gen. 12, 799
- Becker W. and Mitter H., 1979 J. Phys. A: Math. Gen. 12, 2407
- Beers B. and Nickle H.H., 1972 J. Math. Phys. 13, 1592
- Bergou J., 1975 Acta Phys. Hung. 39, 185
- Bergou J., 1976 Acta Phys. Hung. 40, 55
- Bergou J., 1980 J. Phys. A: Math. Gen. 13 2817
- Bergou J. and Varró S., 1980a J. Phys. A: Math. Gen. 13, 2823
- Bergou J. and Varró S., 1980b J. Phys. A: Math. Gen. 13, 3553
- Bergou J. and Varró S., 1981a J. Phys. A: Math. Gen. 14, 1469
- Bergou J. and Varró S., 1981b J. Phys. A: Math. Gen. megjelenik a szeptemberi kötetben, Preprint KFKI-1980-54 (Budapest)
- Bergou J., Varró S. and Fedorov M.V., 1981a J. Phys. A: Math. Gen. megjelenik a szeptemberi kötetben, Preprint KFKI-1980-53 (Budapest)
- Bergou J. , Varró S. i Fjodorov M.V., 1981b közlésre elfogadva a ZsETF-ben
- Berszon I. Ja. , 1969 ZsETF 56 1627
- Berszon I. Ja. , 1970 Izv. AN Latv. SSR No3 3
- Berson I. Ya. and Valdmanis J., 1973 J. Math. Phys. 14, 1481
- Bjorken J.D. and Drell S.D., 1964 Relativistic Quantum Mechanics (New York: McGraw-Hill)
- Bloch F. and Nordsieck A., 1937 Phys. Rev. 52, 54
- Bös J., Brock W., Mitter H. and Schott Th., 1979a J. Phys. A: Math. Gen. 12, 715
- Bös J., Brock W., Mitter H. and Schott Th., 1979b J. Phys. A: Math. Gen. 12, 2573
- Brown L.S. and Goble R.L., 1968 Phys. Rev. 173, 1505
- Brown L.S. and Kibble T.W.B., 1964. Phys. Rev. 133, A705

- Bunkin F.V. i Fjodorov M.V., 1965 ZsETF 49, 1215
- Bunkin F.V., Kazakov A.E. i Fjodorov M.V., 1972 Usp. Fiz. Nauk 107, 559
- Cronström C. and Noga M., 1977 Phys. Lett. 60A, 137
- Eberly J.H., 1968 Proc. Int. Conf. on Optical Pumping and Atomic Line Shape (OPALS) 311 (Warsaw)
- Eberly J.H., 1969 Progress in Optics VII 361 (Norh-Holland)
- Eberly J.H. and Reiss H.R. 1966 Phys. Rev. 145, 1035
- Ehlotzky F., 1978 Opt. Comm. 27, 65
- Erdélyi A., 1953 Higher Transcendental Functions (New York: McGraw-Hill)
- Faisal F.H.M., 1973 J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 6, L312
- Farkas Gy., 1978 Multiphoton Processes (Proc. Int. Conf. at the University of Rochester, Rochester, N.Y., June 6-9, 1977) 81 (New York, London: J. Wiley & Sons, Inc.)
- Feynman R.P., 1962 Quantum Electrodynamics (New York: W.A. Benjamin, Inc.)
- Frantz L.M., 1965 Phys. Rev. 139B, 1326
- Fried Z., 1963 Phys. Lett. 3, 349
- Fried Z. and Eberly J.H., 1964 Phys. Rev. 136B, 871
- Glauber R.J., 1963a Phys. Rev. 130, 2529
- Glauber R.J., 1963b Phys. Rev. 131, 2766
- Goldman I.I., 1964 Phys. Lett. 8, 103
- Gontier Y. and Rahman N.K., 1974 Lett. al Nuovo Cim. 9, 537
- Gyenyiszov M.M. i Fjodorov M.V., 1967 ZsETF 53, 1342
- Jackson J.D., 1963 Classical Elektrodynamics (New York, London: J. Wiley & Sons, Inc.)
- Jauch J.M. and Rohrlich F., 1955 The Theory of Photons and Electrons (Cambridge, Mass: Addison-Wesley)
- Jung Ch., 1980 Phys Rev. A 21, 408
- Keldis L.V., 1964 ZsETF 47, 1945
- Kibble T.W.B., 1965 Phys. Rev. 138B 740
- Kohler R.H., 1966 Phys. Rev. 151, 165
- Körmendi F., 1977 J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 10, 1633
- Körmendi F., 1980 Institute for Chemistry, Technology and Metallurgy Preprint (Beograd)
- Kroll N.M. and Watson K.M., 1973 Phys. Rev. A 8, 804



- Krüger H. and Jung Ch., 1978 Phys. Rev. A 17, 1706
- Landau L.D. és Lifsic E.M., 1976 Elméleti Fizika II: Klasszikus erőterek (Budapest: Tankönyvkiadó)
- Leubner C., 1978 Astron. Astrophys. 69, 149
- Leubner C. and Strohmayer E., 1981 J. Phys. A: Math. Gen. 14, 509
- Lompré L.A., Mainfray G., Manus C. and Farkas Gy., 1979 Phys. Rev. Lett. 43, 1243
- Mandel L., 1976 Progress in Optics XIII, 27 (North-Holland)
- Mitter H., 1975 Acta Phys. Austr. Suppl. XIV 397
- Narozsnyij N.B., Nyikisov A.I. i Ritusz V.I., 1964 ZsETF 47, 931
- Neville R.A. and Rohrlich F., 1971a Nuovo Cim 1A, 625
- Neville R.A. and Rohrlich F., 1971b Phys. Rev. D3, 1692
- Neville R.A., 1976 Canad. J. Phys. 54, 2246
- Nickle H.H., 1966 J. Math. Phys. 7, 1497
- Nyikisov A.I. i Ritusz V.I., 1964 ZsETF 46, 776
- Oleinyik V.P., 1967a ZsETF 52, 1049
- Oleinyik V.P., 1967b ZsETF 53, 1997
- Oleinyik V.P. i Szinyak V.A., 1975 Opt. Comm. 14, 179
- Osborn R.K., 1972 Phys. Rev. A5, 1660
- Reiss H.R. and Eberly J.H., 1966 Phys. Rev. 151, 1058
- Ritusz V.I., 1979 Kvantovaja elektrodinamika javlenyij v intenzivnom polje (Trudü Fiz. Inszt. im. Lebegyeva 111) (Moszkva, Nauka)
- Ritusz V.I., 1972 Ann. Phys. (N.Y.) 69, 555
- Rohrlich F., 1965 Classical Charged Particle (Read. Mass: Addison-Wesley)
- Rosenberg L., 1979 Phys. Rev. A 20, 1352
- Schlessinger L. and Wright J., 1979 Phys. Rev. A 20, 1934
- Schlessinger L. and Wright J., 1980 Phys. Rev. A 22, 2529
- Tanabe K., 1973 J. Math. Phys. 14, 618
- Vachaspati, 1962 Phys. Rev. 128, 664, *ibid* 130, 2598 (1963)
- Volkov D.M., 1935 Z. für Phys. 94, 250
- Weingartshofer A., Holmes J.K., Caudle G., Clarke E.M. and Krüger H., 1977 Phys. Rev. Lett. 39, 269
- Weingartshofer A., Clarke E.M., Holmes J.K. and Jung. Ch. 1979 Phys. Rev. A 19, 2371