GRÁF-TULAJDONSÁGOK LOKÁLIS FELISMERHETŐSÉGÉRŐL ÉS DEFINIÁLHATÓSÁGÁRÓL

Turán György

Szeged, 1980.

1.1. Bevezetés

Legyen adva egy gráf, és a gráf minden csucsában egy-egy véges automata, melyek a gráf élein keresztül kommunikálnak egymással, azaz minden automata csak a vele szomszédos csucsokban elhelyezett automaták állapotát "látja". A - korlátos fokszámu - gráfok mely tulajdonságaihoz létezik olyan automata, melynek egy-egy példányát egy gráf csucsaiban elhelyezve, az igy kapott rendszer a tulajdonság felismerésére képes? Másképpen fogalmazva, gráfok tulajdonságainak eldöntésére lokális, vagy "rövidlátó" algoritmusokat [15] keresünk.

Ennek a továbbiakban lokális gráf-automatának nevezett modellnek két vonását emeljük ki, melyek a hasonló modellektől megkülönböztetik.

Először is, a feladat az automaták hálózatának, a gráfnak "felderitése" - ebben különbözik a sejtautomatáktól, ahol az automaták kapcsolódási rendszere adott, és a változó bemenet az automaták kezdőállapotaiba van kódolva. Mindkét modellben közös a párhuzamositás lehetősége, mivel az egyes automaták egymással párhuzamosan is végezhetnek hasznos munkát. A gráf-automata algoritmusok egyik lehetséges alkalmazási területe éppen a meglévő algoritmusok párhuzamositása. /A sejtautomatákkal közös az a probléma is, hogy a párhuzamosságért cserébe az információ továbbitásnak a lokalizáltságból származó körülményességével kell fizetni./

Másodszor, az egyes automaták végesek - ez különbözteti meg a lokális gráf-automatákat az un. osztott számitógéprendszerekkel /distributed system/ kapcsolatos rokon modellektől. Ez a megszoritás megakadályozza azt, hogy minden processzornak saját "neve" legyen, azaz egy csucs a többi csucs számára nem azonosítható. A lehetséges algoritmusok számára ez igen lényeges korlátozást jelent.

A lokális gráf-automata modell - tudomásom szerint - első részletesebb tárgyalása Rosenstiehl, Fiksel és Holliger [15] cikkében található, ahol a szerzők néhány alapvető rendezési és szinkronizációs konstrukciót dolgoztak ki. Wu és Rosenfeld [18] cikke ujabb, hasonló elveken alapuló algirtmusokat tartalmaz. Angluin [1] cikke pedig áttekinti a modell egyes változatait, elsősorban a gráfok szimmetriáival kapcsolatos kérdések szempontjából.

A további vizsgálatot talán az indokolja, hogy az eddigiekből nem látszik világosan, hogy valójában milyen széles tulajdonság-osztályról is van szó? Ugy tünik, hogy ez az automata-fajta a gráf-tulajdonságoknak egy elég természetes osztályát jelöli ki.

A lehetséges karakterizációkkal kapcsolatban Lovász László vetette fel a logikai karakterizáció problémáját. Ez a következőt jelenti: milyen logikai keretben definiálhatók a lokális gráf-automatával felismerhető tulajdonságok?

Nyelvosztályok karakterizációját illetően általában az automataelméleti, grammatikai és algebrai karakterizációk összehasonlítása áll előtérben. A számítástudomány sok alapvető eredménye tartozik ebbe a körbe, pl. a Chomsky-féle hierarchia automataelméleti jellemzése, az absztrakt nyelvcsaládok /AFL/ elmélete, az automaták és nyelvek szintaktikus félcsoportjának vizsgálatai, stb.

Logikai karakterizációra két példát említünk.

Büchi tétele /ld. [11]/ szerint, ha egy nyelv szavait véges rendezett halmazon értelmezett monadikus strukturáknak tekintjük /ahol a részhalmazok az abc betűinek felelnek meg/, akkor egy nyelv pontosan akkor reguláris, ha monadikus másodrendű formulával definiálható.

Fagin tétele [5] azt mondja ki, hogy véges strukturák egy osztálya pontosan akkor NP-beli /a természetes kódolással/, ha egzisztenciális másodrendű formulával definiálható – másszóval, ha un. pszeudoelemi strukturaosztály.

Visszatérve a lokális gráf-automatákra, a felismerhető tulajdonságok vizsgálata azt mutatja, hogy ezek általában olyan tulajdonságok, melyek a gráfok részgráfjairól mondanak valamit: Például, Hamilton-kör létezése a gráfban olyan részgráf létezését jelenti, mely összefüggő és melyben minden csucs másodfoku.

Ez olyan másodrendű formulákkal való definiálhatóságot jelentene, melyekben másodrendű változóként egyváltozós /monadikus/ relációkon kívül olyan kétváltozós /diadikus/ relációk is szerepelhetnek, melyek részrelációi a gráf **élei által reprezentált relációnak** /ezeket a továbbiakban <u>gyenge diadikus</u> másodrendű formuláknak nevezzük/.

A gyenge diadikus másodrendű formulákkal definiálható tulajdonságokról /másszóval a <u>részgráfok nyelvén</u> definiálható tulajdonságokról/ azt mutatjuk meg, hogy a lokális gráf-automatával felismerhető tulajdonságok osztályának /a továbbiakban <u>$\mathcal{L}$-osztály/ valódi</u> részét alkotják /a két osztály között elhelyezkedő tulajdonság: automorfizmus létezése a gráfban/.

A $\mathcal{L}$-osztályt helyigény szempontjából jellemezve azt mutatjuk meg, hogy valódi része a $\mathcal{DLBA}^*$-osztálynak /ez a bemenet leírásához szükséges helyen felismerhető gráftulajdonságok osztálya/.

A dolgozat két részből áll: az első részben automatákat konstruálunk gráftulajdonságok lokális gráf-automatával történő felismerésére, a második részben pedig definiálhatósággal kapcsolatos kérdésekkel foglalkozunk.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk az egyes fejezetek tartalmát:

Az első fejezet hátralevő részében a legfontosabb definiciókat adjuk meg, a definiciókat indokló és magyarázó megjegyzésekkel.

A második fejezetben automatát konstruálunk gráf síkbarajzolhatóságának eldöntésére /ez az algoritmus polinomiális: [18] ilyen algoritmus létezését nyitott kérdésként említi, megjegyzi, hogy Tarjan lineáris algoritmusa nem vihető át lokális gráf-automatára/, az algoritmus [3] algoritmusának adaptációja. Algoritmust adunk tetszőleges, a részgráfok nyelvén definiálható tulajdonság eldöntésére, ezenkívül bizonyos particiós gráftulajdonságok, automorfizmus létezése, és gyenge direkt szorzatként való előállithatóság eldöntésére. Megoldjuk az un. kitüntetett csucs problémát: lokális gráf automatával, mely gráfokon tudjuk bárhonnan elindulva végül mindig ugyanazt a csucsot azonositani?

A harmadik fejezet a definiálhatósággal foglalkozik. Először a felhasznált matematikai logikai segédeszközöket ismertetjük: a modellelméletben sokat használt <u>Fraissé-Ehrenfeucht-</u>

-féle játékok módszerét, és az ultraszorzást. Alkalmazásként megmutatjuk, hogy az n szögpontu gráfokon Hamilton-kör létezését definiáló elsőrendű formula legalább $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ kvantort tartalmaz, és más bizonyitást adunk Pósa Lajos [14] egy tételére, mely szerint az összefüggőségre vonatkozó kvantorszám $\log n$ nagyságrendű. Ezután a monadikus, egzisztenciális gyenge diadikus, gyenge diadikus és diadikus másodrendű formulákkal definiálható tulajdonság-osztályok közötti valódi tartalmazási relációkat igazoljuk, természetes gráftulajdonságok /összefüggőség, teljes párositás, Hamilton-kör és automorfizmus létezése/ adott keretben való definiálhatatlanságán keresztül.

A fejezet utolsó részében a Fraissé-Ehrenfeucht-módszer további alkalmazásaként a környezetfüggetlen nyelvek egy logikai karakterizációját adjuk meg. Belátjuk, hogy egy nyelv pontosan akkor környezetfüggetlen, ha $\exists R(\Psi_0 \wedge \Psi_1)$ alakban definiálható, ahol R kétváltozós reláció, Ψ_0 egy konkrét elsőrendű formula, Ψ_1 pedig R-re vonatkozóan gyenge diadikus másodrendű formula, azaz a változóként szereplő kétváltozós relációk R részrelációira vannak megszoritva.

A negyedik fejezetben a korábbiak alapján az $\mathcal{L}$ osztálynak egyes egyéb osztállyal való kapcsolatát vizsgáljuk [17]-nek a helyigény-hierarchiára vonatkozó tételéből röviden megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}$ az emlitett $\mathcal{DXBA}^*$-osztály valódi része, vagy, ami ezzel ekvivalens, hogy "névhasználat", azaz véges automata helyett $\log n$ méretü memória bevezetése növeli az automata felismerő képességét. Végül néhány megoldatlan problémát emlitünk.

Ezuton szeretném őszintén megköszönni Lovász László akadémikusnak számomra igen fontos és megtisztelő támogatását és figyelmét, Gécseg Ferenc egyetemi tanárnak azt, hogy munkám folytatását lehetővé tette, valamint Pósa Lajosnak, hajdan volt egyetemi témavezetőmnek értékes megjegyzéseit és tanácsait.

1.2. Definiciók

1.1. Definició: gráfon véges, irányitatlan, összefüggő, hurok és többszörös élek nélküli gráfot értünk, $G=(V,E)$, ahol V a csucsok, E az élek halmaza. d-gráf az olyan gráf, amelyben minden csucs foka legfeljebb d / ahol d tetszőleges, előre rögzitett szám /. A definiciókban és az egész 2. fejezetben gráf alatt végig d-gráfot értünk.

1.2. Definició: a $G=(V,E)$ gráf $v\in V$ csucsára vonatkozó ρ_v iránytünek nevezzük v szomszédainak egy permutációját. A G gráf iránytürendszerének nevezzük a $\rho=\{\rho_v : v\in V\}$ halmazt.

1.3. Definició: alapgráf a $G_1=\{G,\rho,C\}$ hármas, ahol G gráf, ρ a G iránytürendszere, $C: V\to C_1\cup C_2$ pedig G csucsainak cimkézése, C_1, C_2 véges halmazok, $C_1\cap C_2=\emptyset$ és pontosan egy csucs cimkéje C_1-beli / ez a kitüntetett csucs/. / Ld. 1.2. Megj./

1.4. Definició: alapautomata az

$$\mathcal{A}=(\bar{Q}, Q, \bar{K}, K, \bar{V}, V, \bar{A}, A, \bar{R}, R, B, \sigma)$$

12-es, ahol

$(\bar{Q})$	Q	a	/ kitüntetett /	állapotok,
$(\bar{K})$	K	a	"	kezdőállapotok,
$(\bar{V})$	V	a	"	végállapotok,
$(\bar{A})$	A	a	"	elfogadó végállapotok,
$(\bar{R})$	R	a	"	elutasitó végállapotok

halmaza, B a bemenőjelek halmaza, σ pedig a determinisztikus átmenetfüggvény $(\sigma : (\bar{Q} \cup Q) \times B \to (\bar{Q} \cup Q))$ ha teljesülnek a következő feltételek:

(i) a megfelelő kitüntetett és nem-kitüntetett állapothalmazok diszjunktak ;

(ii) $\bar{K} \cup \bar{V} \subset \bar{Q}$; $\bar{K} \cap \bar{V} = \emptyset$; $\bar{A} \cup \bar{R} \subset \bar{V}$; $\bar{A} \cap \bar{R} = \emptyset$; és hasonlóan a nem-kitüntetett állapothalmazokra;

(iii) $B = \bigcup_{i=1}^{d} (\bar{Q} \cup Q)^i$

(iv) $i \neq j \Rightarrow \sigma((\bar{Q} \cup Q)^{i+1} - (\bar{K} \cup K)^{i+1}) \cap \sigma((\bar{Q} \cup Q)^{j+1} - (\bar{K} \cup K)^{j+1}) = \emptyset$

(v) $q_0, \dots, q_i \in K \Rightarrow \sigma(q_0, (q_1, \dots, q_i)) = q_0$;

(vi) $q_0, \dots, q_i \in \bar{V} \cup V \Rightarrow \sigma(q_0, (q_1, \dots, q_i)) = q_0$;

(vii) $q_0 \in \bar{Q} \Rightarrow \sigma(q_0, (q_1, \dots, q_i)) \in \bar{Q}$;

$q_0 \in Q \Rightarrow \sigma(q_0, (q_1, \dots, q_i)) \in Q$.

/Ld. 1.3. , 1.4. Megj./

1.5. Definició: lokális gráf-automata az

$$L = (G_1, \mathcal{A})$$

pár, ahol G_1 alapgráf, $\mathcal{A}$ alapautomata,

1.6. Definició: az L lokális gráf-automata egy konfigurációja egy $C : V \to \bar{Q} \cup Q$ leképezés. A C_0 konfiguráció kezdőkonfiguráció, ha minden $v \in V$ -re $C_0(v) \in \bar{K} \cup K$, és pontosan egy $v \in V$ -re $C_0(v) \in \bar{K}$. A C_t konfiguráció végkonfiguráció, ha minden $v \in V$ -re $C_t(v) \in \bar{V} \cup V$.

Egy C_{i+1} konfiguráció a C_i konfiguráció követő konfigurációja, ha minden $v \in V$ -re, ha $\rho_v = (v_1, \dots, v_j)$, akkor

$$C_{i+1}(v) = \sigma(C_i(v), (C_i(v_1), \dots, C_i(v_j))) .$$

A $C_0, \dots, C_t$ konfigurációsorozat teljes számitási sorozat, ha C_0 kezdőkonfiguráció, C_t végkonfiguráció, és C_{i+1} a C_i követő konfigurációja $(i=0,\dots,t-1)$.

L a G_1 -et elfogadja, ha létezik teljes számitási sorozat, és minden $v\in V$ -re $C_t(v)\in \bar{A}\cup A$, elutasitja, ha $C_t(v)\in \bar{R}\cup R$.

1.7. Definició: az $\mathcal{A}$ alapautomata eleget tesz a szinkronitási feltételnek, ha minden G_1 alapgráfra az $L=(G_1,\mathcal{A})$ lokális gráf-automatának van teljes számitási sorozata, és abban minden $i<t$-re és minden $v\in V$ -re $C_i(v)\notin \bar{V}\cup V$.

1.8. Definició: az $\mathcal{A}$ alapautomata az $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m$ alapautomaták szorzata, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $\bar{Q}=\bigcup_{i=1}^{m}\bar{Q}_i$; $\bar{K}=\bar{K}_1$; $\bar{V}=\bar{V}_m$;

/ hasonlóan a nem-kitüntetett állapothalmazokra/

(ii) $B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$; $\sigma=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma_i$;

valamint minden i -re $(i=1,\dots,m)$

(iii) $((\bar{Q}_i\cup Q_i)-(\bar{K}_i\cup K_i\cup\bar{V}_i\cup V_i))\cap((\bar{Q}_j\cup Q_j)-(\bar{K}_j\cup K_j\cup\bar{V}_j\cup V_j))=\emptyset$;

(iv) $\{\bar{H}_{ij}=\bar{V}_i\cap\bar{K}_j\}$ a $\bar{V}_i$ partíciója

/ hasonlóan a nem-kitüntetett állapothalmazokra/

(v) ha valamely G_1 alapgráfra C_t az $L=(G_1,\mathcal{A}_i)$ lokális gráf-automata végkonfigurációja és $v_0\in V$ -re

$$C_t(v_0)\in\bar{V}_i\cap\bar{K}_j\ ,$$

akkor minden $v\in V$ -re $(v\neq v_0)$

$$C_t(v)\in V_i\cap K_j$$

teljesül ;

(vi) $\mathcal{A}_i$ eleget tesz a szinkronitási feltételnek.

/ Ld. 1.5., 1.6. Megj./

1.9. Definició: legyen $\mathcal{A}$ alapautomata, $\mathfrak{S}$ pedig egy leképezés, mely gráfokhoz a gráf csucsain értelmezett relációk egy halmazát rendeli :

$$\mathfrak{S} : G \mapsto \mathfrak{S}_G = \{ S_G^i \}_{i \in I_G}$$

Definiáljuk a $g_{(A,G,v,\rho)} : \mathfrak{S}_G \to \mathfrak{S}_G$ leképezést.
Legyen G gráf, $v \in V$ a G gráf csucsa, $G_1 = (G, \rho, C_0)$ alapgráf, ahol C_0 az $L=(G_1, A)$ lokális gráf-automata kezdőkonfigurációja, melyre v a kitüntetett csucs, és $S \in \mathfrak{S}_G$ a C_0 -ba kódolt reláció. Legyen S' a C_t végkonfigurációba kódolt reláció, és tegyük fel, hogy C_t mindig létezik, és S' nem függ C_0 -tól / csak v -től /. Akkor $g_{A,G,v,\rho}(S) = S'$. Ezek után azt mondjuk, hogy A felsorolja $\mathfrak{S}$ -et, ha minden (G, v, ρ) hármasra és valamely $S_G^o \in \mathfrak{S}_G$-re

$$\mathfrak{S}_G = \{ g^i_{(A,G,v,\rho)}(S_G^o) \; : \; i = 0, 1, \dots, n_G \}$$

teljesül, és $g^{n_G}(S_G^o)$ -t A felismeri./Ld. 1.8. Megj./

1.10. Definició: gráfok egy tulajdonságán gráfok egy osztályát értjük, egy gráf rendelkezik a tulajdonsággal, ha benne van az osztályban.

1.11. Definició: az $\mathcal{A}$ alapautomata a $\mathcal{T}$ tulajdonságot felismeri, ha minden G gráfra és $G_1 = (G, \rho, C_0)$ alapgráfra /ahol C_0 az $\mathcal{A}$ kezdőkonfigurációja/ az $L = (G_1, \mathcal{A})$ lokális gráf-automata a G_1 -et pontosan akkor fogadja /utasitja/ el, ha $G \in \mathcal{T}$ $(G \notin \mathcal{T})$. A $\mathcal{T}$ tulajdonság lokális gráf-automatával felismerhető, ha van $\mathcal{T}$ -t felismerő alapautomata. A továbbiakban a lokális gráf-automatával felismerhető tulajdonságok osztályát $\mathcal{L}$-osztálynak nevezzük./Ld. 1.9. Megj./

1.12. <u>Definició:</u> legyen f egy gráfokon értelmezett /egész értékü/ függvény. Az A alapautomata az f függvényt <u>kiszámitja</u>, ha minden G gráfra és $G_1=(G,\rho,C_0)$ alapgráfra /ahol C_0 az A kezdőkonfigurációja/, az $L=(G_1,A)$ lokális gráf-automata végállapotában $f(G)$ kódolva van. /Ld.1.10. Megj./

1.13. <u>Definició:</u> <u>szinezett gráf</u> a $(G,G_1,\dots,G_k)$ $k+1$-es, ha G gráf, G_i pedig a G részgráfja /részgráfon itt az élek egy részhalmazát értjük/. <u>Szinezett alapgráf</u> a $G_1=(G,\rho,C)$ hármas, ha G_i csucsainak cimkéje speciális C^* halmazba tartozik. <u>Szinezett gráftulajdonság</u> a $(G,G_1,\dots,G_k)$ $k+1$-esek egy osztálya. Az automatával való felismerhetőség és kiszámithatóság definiciója a közönséges esettel analóg. /Ld.1.11 és 1.12. Megj./

1.14. <u>Definició:</u> <u>a gráfok nyelve</u> az az elsőrendü nyelv, amely az egyenlőségen kivül egyetlen kétváltozós relációjelet tartalmaz, melyet $R(x,y)$-nal jelölünk. <u>Másodrendü formula</u>, olyan formula, melyben változóként relációk is előfordulhatnak. Egy másodrendü formula <u>monadikus</u>, ha minden változóként szereplő reláció egyváltozós, <u>diadikus</u>, ha ezek legfeljebb kétváltozósak. Egy másodrendü formula <u>egzisztenciális</u>, ha $\exists R_1\dots\exists R_k\,\Phi$ alaláku, ahol Φ elsőrendü formula.

1.15. <u>Definició:</u> a gráfok nyelvén irt diadikus másodrendü formula <u>gyengén diadikus</u>, vagy a <u>részgráfok nyelvén</u> irt formula, ha diadikus másodrendü kvantorai

$$\exists R_i \left(\forall x_1 x_2 \left(R_i(x_1, x_2) \to R(x_1, x_2)\right) \wedge \ldots \right)$$

és $\forall R_i \left(\forall x_1 x_2 \left(R_i(x_1, x_2) \to R(x_1, x_2)\right) \to \ldots \right)$

alakuak.

1.16. Definició: a $\Phi(R)$ formula a $\mathcal{T}$ tulajdonságot definiálja, ha

$$G \models \Phi(R) \Leftrightarrow G \in \mathcal{T}.$$

A $\Phi(R, R')$ formula a $\mathcal{T}$ szinezett gráftulajdonságot definiálja, ha

$$(G, G') \models \Phi(R, R') \Leftrightarrow (G, G') \in \mathcal{T}.$$

Ha $\mathcal{F}$ formulák egy osztálya, akkor $\mathcal{T}$ $\mathcal{F}$-ben definiálható, ha van olyan $\Phi \in \mathcal{F}$, mely $\mathcal{T}$-t definiálja. A monadikus másodrendü formulával definiálható gráftulajdonságok osztályát $\mathcal{M}$-osztálynak, az egzisztenciális monadikus másodrendü formulával definiálható gráftulajdonságok osztályát $\mathcal{M}_e$ osztálynak, a gyengén diadikus másodrendü formulával definiálható gráftulajdonságok osztályát $\mathcal{S}$-osztálynak, az egzisztenciális, gyengén diadikus másodrendü formulával definiálható gráftulajdonságok osztályát $\mathcal{S}_e$-osztálynak, a diadikus másodrendü formulával definiálható gráftulajdonságok osztályát $\mathcal{D}$-osztálynak nevezzük. / Szinezett gráftulajdonságokra ugyanezen elnevezéseket használjuk./

1.3. Megjegyzések

1.1. Megjegyzés: mivel a továbbiakban véges automatákra szoritkozunk, a fokszámok korlátossága lényeges feltétel. Az általunk használt modellnek létezik egy olyan bővitése, melyben ez a feltétel nem szerepel, és a fellépő kérdések hasonlóak: a bővitett modellben nem azt követeljük meg, hogy minden csucsban ugyanolyan automata müködjön, hanem azt, hogy azonos foku csucsokhoz azonos automata tartozzon, fokszámkorlátozás nélkül /Angluin [1]/. Az algoritmusok erre a modellre általában változtatás nélkül átvihetők.

1.2. Megjegyzés: kitüntetett csucs létezésének feltételezése nélkül /vagyis, ha az automaták azonos állapotból indulnak/ az itt tárgyaltaktól különböző problémákhoz jutunk, melyekben a gráfok szimmetrietulajdonságai játszanak fontos szerepet /Angluin [1]/. Megjegyezzük, hogy pl. egy reguláris gráf csucsai állandóan azonos állapotban maradnak.

1.3. Megjegyzés: a (iii) feltétel azt fejezi ki, hogy egy automata bemenetét szomszédainak állapotai alkotják. A (iv) feltétel azt fejezi ki, hogy tulajdonképpen csak az azonos foku csucsokban müködik ugyanaz az automata - de a fokszámok korlátossága miatt mindegy, hogy d darab automatáról, vagy csak egyről beszélünk. Az (v), (vi) feltételek a sejtautomatáknál szokásos stabilitási feltételek. Az automatákról feltettük, hogy determinisztikusak: a nem-determinisztikus modellel való kapcsolat ugyanolyan tisztázatlan, mint a determinisztikus és nem-determinisztikus modellek kapcsolata általában.

1.4. Megjegyzés: a modellről feltettük, hogy szinkronikusan működik, azaz minden automata egyszerre változtat állapotot. Ez a megkötés nem szükségszerü, csak kényelmes: aszinkron rendszerrel szinkron rendszer szimulálható /az egyes automaták egy mod3 számláló segitségével "várják be egymást", ld. Angluin [1], Rosenstiehl [15]/.

1.5. Megjegyzés: a szinkronitási feltétel azt jelenti, hogy valamennyi automata egyszerre jut végállapotba. Ez semmiféle megszoritást nem jelent, de az automaták szorzása során kényelmes kikötés. Tetszőleges automatát módosithatunk ugy, hogy eleget tegyen a szinkronitási feltételnek, ha felhasználjuk az un. "firing-squad" probléma ismert megoldását /Rosenstiehl [15]/.

1.6. Megjegyzés: a (iii) feltétel azt mondja ki, hogy az automaták közbülső állapotai különbözőek, ez a szinkronitási feltétellel együtt azt jelenti, hogy egyszerre csak egy automata müködik. A (iv) feltétel azt jelenti, hogy az egyes automaták egy determinisztikus program szerint váltják egymást /az (v) feltétel a (iv)-re vonatkozó konzisztenciát jelent/. Ez a program felfogható olyan véges automatának, melynek állapotai $\{1,2,\dots,m\}$ bemenethalmaza $\bigcup_{i=1}^{m} \overline{V}_i$

Megforditva: adott /diszjunkt állapothalmazu/ $A_1,\dots,A_m$ alapautomatákhoz, és a fenti tulajdonságu véges automatához /a megfelelő kezdő-, és végállapothalmazok azonositása után/ az (i)-(ii) feltételekkel /mint definicióval/

olyan A alapautomatát rendelhetünk, mely az $A_1, \dots, A_m$ alapautomaták szorzata. Ez szemléletes és kényelmes módja automaták egyszerübb automatákból történő felépitésének, a továbbiakban automatákat általában ilyen szorzatként fogunk megadni.

1.7. Megjegyzés: a definiciók megadásánál arra törekedtünk, hogy a definiciók lehetőséget adjanak az egyes konstrukciók pontos megadására - a továbbiakban a terjedelem korlátozására és a tulságos formalizmus elkerülésére törekszünk, és ahol szemléletesen világos, hogy miről van szó, az automatákat nem a definicióknak megfelelően, hanem "csak" vázlatosan fogjuk megadni.

1.8. Megjegyzés: ez a definició az "A automata felsorolja a gráf csucsainak részhalmazait" jellegü állitások pontositására szolgál. Szemléletes jelentése a következő: ha az automata bekapcsolásakor a csucsok egy részhalmaza speciális állapotban van, az automata megállásakor a csucsok egy másik részhalmaza lesz speciális állapotban, ha most erről a részhalmazról indulunk, az ujabb megálláskor egy harmadik, stb., végül valamikor mindegyik részhalmaz kerül speciális állapotba, és amikor az utolsó részhalmaz kerül sorra, speciális végállapot jelzi, hogy a felsorolás befejeződött. A "konfigurációba kódolt reláció" kifejezést nem definiáljuk, ezt adott esetben mindig külön fogjuk meghatározni. Pl. csucsok részhalmazainak felsorolásánál az éppen soron következő részhalmaz csucsai valamely speciális állapothalmazbeli állapotot kapnak. Mentegetőzésképpen: erre a definicióra azért van szükség, mert az algoritmusok sokszor különböző relációk felsorolhatóságán mulnak /pl. az un. NP-teljes problémák lényegében mást nem tesznek lehetővé/, igy a későbbiekben a megfogalmazás egyszerüsödik, ha a "felsorolást" nem kell minden reláció esetében külön definiálni.

1.9. <u>Megjegyzés:</u> az 1. Def. után tett megjegyzés értelmében itt d-gráfok osztályairól van szó. Tetszőleges $\mathcal{T}$ gráftulajdonság felismerhetőségén értelemszerüen azt értjük, hogy minden d-re a $\mathcal{T}$-beli d-gráfok osztálya felismerhető. Ez vonatkozik pl. a Hamilton-kört tartalmazó gráfok osztályára.

1.10. <u>Megjegyzés:</u> a későbbiekben a gráf csucsain rendezést fogunk definiálni, ezután a lokális gráf-automata $|V|$ helyigényü Turing-gép szimulálására képes, igy $f(G)$ kódolásán pl. érthetjük bináris alakjának a szimulált memóriában való felirását /mindig $f(G)=O(|V|)$, igy ez lehetséges/.

1.11. <u>Megjegyzés:</u> a szinezett gráfokra azért van szükség, mert az egyes algoritmusok során olyan automatákat is definiálni fogunk, melyeknek kezdőállapotában nem csak a gráf, hanem annak néhány részstrukturája is kódolva van. Másrészt a szinezett gráfok lehetőséget adnak kiszámitási feladatok eldöntési feladatként való átfogalmazására: $f(G)$ akkor és csak akkor számitható ki lokális gráf-automatával, ha $\mathcal{T}=\{(G,k): k\leq f(G)\}$ eldönthető, ahol k-t k-elemü részhalmaz formájában kódolva szinezett gráf-tulajdonságot kapunk.

1.12. <u>Megjegyzés:</u> az automaták egy állapotát sok esetben célszerü ugy elképzelnünk, hogy az a következő információkat tartalmazza egy i-edfoku csucsban:

"1. szomszédomnak üzenem, hogy M_1

$\vdots$

i. " " " M_i."

ahol $M_1, \dots, M_i$ egy rögzitett véges halmaz elemei. Ezzel ekvivalens elképzelés, hogy az éleknek van állapota /itt lényeges a korlátos fokszámra tett kikötésünk/, a fentiekkel összhangban egy él állapota a rajta áthaladó üzenetekből álló rendezett pár. Igy pl. egy részgráf csucsaiban a részgráf éleit is kódolhatjuk.

2. Algoritmusok

Ebben a fejezetben eldöntési és kiszámitási algoritmusokat adunk meg. Először olyan automatákat konstruálunk, melyekből a továbbiakban a 8. Def.-ban szereplő szorzás segitségével kaphatunk ujabbakat: ezek az automaták a csucsok rendezésére, egyszerü részstrukturák felsorolására szolgálnak. Ezután egy olyan algoritmust mutatunk be, mely egy gráf sikbarajzolhatóságát dönti el $O(n^2)$ ütemben. Az algoritmus Demoucron, Malgrange és Pertuiset [3] sikbarajzolhatósági algoritmusának alkalmazása lokális gráf-automatákra. A fejezet harmadik részében főleg az un. NP-teljes feladatokra adunk algoritmusokat, ezek különböző relációk felsorolásán alapulnak. Lényeges szempont, hogy milyen relációkat kell felsorolnunk: mivel a lokális gráf-automata lehetséges állapotainak száma $O(c^n)$, nem sorolhatunk fel olyan relációkat melyekből "tul sok" van. A fejezet negyedik részében az un. azonositási problémával foglalkozunk.

2.1. Felsoroló automaták

A gráfban szereplő kitüntetett csucs jelentősége abban áll, hogy segitségével a gráf csucsain rendezést definiálhatunk. Ez a rendezés azután a gráf egyéb részstrukturáinak rendezése is kiterjeszthető. A rendezés egy feszitőfa konstrukcióján keresztül valósitható meg: a feszitőfából a ρ iránytürendszer segitségével származtatható. A konstruált feszitőfa a későbbiekben információtovábbitásra szolgál, mélysége arányos a legtávolabbi csucs elérési idejével, igy célszerü - bár az algoritmusok létezése szempontjából közömbös - mélységét lehetőleg kicsire választani. A konstrukció valóban un. breadth-first feszitőfát szolgáltat, mely az adott gyökérből felépithető minimális mélységü feszitőfa. A feszitőfa felépitése már Rosenstiehl [15]-ben és Wu és Rosenfeld [19]-ben is megtalálható, központi szerepe miatt azonban röviden itt is leirjuk.

A1 automata: breadth-first feszitőfa konstrukciója

Tetszőleges $G_1=(G,\rho,C_0)$ alapgráfra /ahol C_0 az $L=(G_1,A1)$ lokális gráf-automata kezdőkonfigurációja/ az $L=(G_1,A1)$ lokális gráf-automatának létezik teljes számitási sorozata, és végkonfigurációjában a feszitőfa irányitott élei speciális végállapothalmazba jutnak. /Ld.1.10. Megj./

A konstrukció vázlata:

Az első ütemben a kitüntetett csucs automatája "felébreszti" a szomszédait. A következő ütemben ezek visszaküldenek egy "vettem" üzenetet. Az ezután következő ütemben minden felébresztett csucs felébreszti még fel nem ébresztett szomszédait. Egy olyan csucs, mely több csucsból kap ébresztést, csak az ezek közül legkisebb indexü csucsba küld visszajelzést. Ha egy csucs az elküldött ébresztés utáni ütemben "vettem" visszajelzést kap az i -edik szomszédjától, memóriájában feljegyzi: "az i -edik szomszék felé előre-él megy". Ha egy csucs "vettem" visszajelzést küld a i -edik szomszédjának, memóriájában feljegyzi: "a i-edik szomszéd felé hátra-él megy". Ha egy csucs az elküldött ébresztés utáni ütemben nem kap visszajelzést i-edik szomszédjától, memóriájában feljegyzi: "az i-edik szomszéd felé nem megy él".

Ha egy csucsból a felébresztése utáni ütemben sem indul ki előre-él, a belőle kiinduló hátra-len "levél kész" üzenetet küld és "alvó" állapotba megy át. Ha egy csucs minden belőle kiinduló előre-él végpontjából megkapta a "levél kész" vagy a "kész" üzenetek valamelyikét, a belőle kiinduló hátra-élen "kész" üzenetet küld és "alvó" állapotba megy át. /Az "alvó állpotban a csucs megőrzi a szerzett információkat./ Ha a fa gyökere minden belőle induló előre-él végpontjából megkapta a "levél kész" vagy "kész" üzenetek valamelyikét, a feszitőfa épitése befejeződött.

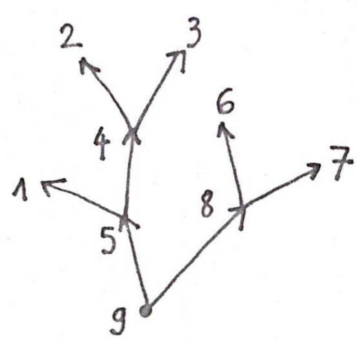
Az alábbi nyilvánvaló lemma a további felsoroló automaták konstrukcióját egyszerüsiti.

<u>Lemma:</u> legyen $\mathbb{S}_1$ $\mathbb{S}_G$ mint a 9. Def.-ban, $\mathbb{R}_{G,\rho,v}$ rendezési reláció az $\mathbb{S}_G$ halmazon, A alapautomata, $G_1=(G,\rho,C)$ ahol C az $L=(G_1,A)$ kezdőkonfigurációja. Tegyük fel, hogy $g_{(A,G,\rho,v)}(S)=S'$ /ahol S' az S reláció $\mathbb{R}_{G,\rho,v}$ szerinti rákövetkezője/ teljesül. Akkor A felsorolja $\mathbb{S}$ -et.

<u>Bizonyitás:</u> $S_G^0=\min\limits_{\mathbb{R}_{G,\rho,v}} \mathbb{S}_G$ -ről indulva $g^i(S_G^0)$ a rendezésben az $(i+1)$ -edik legkisebb elem.

<u>A2 automata: a csucsok felsorolása</u>

A fenti jelöléseket használva $\mathbb{S}_G=V$, $\mathbb{R}_{G,\rho,v}$ pedig pl. az A1 automata által meghatározott feszitőfából származó preorder rendezés, melyet az 1. ábra szemléltet.



1. ábra

Az 1. lemma szerint olyan automatát kell konstruálnunk, mely tetszőleges csucsnak megtalálja a rákövetkezőjét.

Legyen $E(v)$ a V csucs őse a fában. A V csucs W rákövetkezőjét az alábbi egyszerü program adja meg:

1) <u>ha</u> $E(v)=\phi$: $(v=MIN\,;\ STOP)$ <u>különben</u> $v_0 \leftarrow v$

2) $v_1 \leftarrow E(v)$; $v_0 \leftarrow v_1$;

3) <u>ha</u> $H_1=\{v_2 : E(v_2)=v_1 \wedge v <_{\rho_{v_1}} v_2\} \neq \phi$: $v_3 \leftarrow \min\limits_{\rho_{v_1}} H_1$; $v_0 \leftarrow v_3$;
<u>különben</u> $w \leftarrow v_1$; STOP.

4) <u>ha</u> $H_2=\{v_4 : E(v_4)=v_3\} \neq \phi$: $v_3 \leftarrow \min\limits_{\rho_{v_3}} H_2$; $v_0 \leftarrow v_3$ <u>menj</u> 4)
<u>különben</u> $w \leftarrow v_3$; STOP.

A program utasitásainak végrehajtásához csupán a v_1, v_3 csucsok iránytüire van szükség. A v_0 változó értéke az egyetlen <u>aktiv</u> csucsot jelzi. $(G1, A2)$ müködése során mindig a

V_0 -nak megfelelő csucs automatája van aktiv állapotban, és hajtja végre az aktuális /lokálisan végrehajtható/ utasitást.

A3 automata: az élek felsorolása

Ebben az esetben $S_G = E$, $R_{G,\rho,V}$ pedig a csucsok rendezéséből lexikografikus módon származó rendezés megszoritása a gráf éleire. Az 1. lemma szerint olyan automatát kell konstruálnunk, mely a gráf tetszőleges élének megtalálja a rákövetkezőjét.

Az (i,j) pár rákövetkezője $(i,j+1)$ ha $j \neq n$, és $(i+1, i+2)$ ha $j=n$ és $i<n-1$. Ezt az A2 automata meg tudja keresni, mégpedik $2D$ ütemben, ahol D a feszitőfa mélysége. Tekintsük a $j \neq n$ esetet. Az $(i,j+1)$ pár pontosan akkor éle a gráfnak, ha az i csucs szomszédai között $2D$ ütemen belül megjelenik a $(j+1)$ csucs. A $2D$ ütem mérése a feszitőfa leghosszabb utját egyszer oda-vissza bejáró "mérő-automatával" valósitható meg. /A $j=n$ eset hasonlóan intézhető el./

A4 automata: a csucsok részhalmazainak felsorolása

Ebben az esetben $S_G = 2^V$, $R_{G,\rho,V}$ pedig legyen a következő:

$$V_1 <_{R_{G,\rho,V}} V_2 \iff \begin{cases} |V_1| < |V_2|, \text{ vagy} \\ |V_1| = |V_2| = 2k+1, \text{ és } V_1 <_{R'} V_2, \text{ ahol } R' \text{ a csucsok rendezéséből adódó lexikografikus rendezés, vagy} \\ |V_1| = |V_2| = 2k, \text{ és } V_1 <_{R'} V_2, \text{ ahol } R' \text{ a csucsok rendezésének megforditásából adódó lexikografikus rendezés.} \end{cases}$$

Legyen $V_1 = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ $(a_1 < \ldots < a_k)$.

Akkor a V_1 halmaz V_1' rákövetkezőjét az alábbi módon kapjuk:

<u>ha</u> $H = \{a \mid a \in V_1 \wedge a+1 \notin V_1 \wedge a+1 \leq n\} \neq \emptyset$:

$a_0 \leftarrow \max H$

$H_1 \leftarrow \{a \mid a \in V_1 \wedge a < a_0\}$; $j \leftarrow |H_1|$;

$H_2 \leftarrow \{a_0+1, \ldots, a_0+k-j\}$;

$V_1 \leftarrow H_1 \cup H_2$

<u>különben</u> $a_0 \leftarrow \min V_1$ (<u>ha</u> $a_0 = 1$: $V_1 = \max$, <u>különben</u>:)

$a_0 \leftarrow a_0 - 1$

$V_1' \leftarrow \{a_0\} \cup V_1$.

Itt az $a+1$ /rákövetkezés/, max, mind operációk a $|V_1|$-hez tartozó $\mathbb{R}'$ rendezés szerint értendők, mely a halmaz elemszámának növekedésekor megfordul. Igy a halmazok nem egészen a szokásos lexokografikus rendezés szerint vannak felsorolva.

Könnyen látható, hogy a fenti operációk az A2 automata segitségével megvalósithatók.

<u>A5 automata: az élek részhalmazainak felsorolása</u>

Ebben az esetben $\mathbb{S}_G = 2^E$, $\mathbb{R}_{G,\beta,V}$ pedig ugyanugy származik az élek rendezéséből, mint az A4 automatánál definiált rendezés a csucsok rendezéséből. A konstrukció is ugyanaz, azzal a különbséggel, hogy itt az A3 automatát használjuk.

2.2. Sikbarajzolhatóság

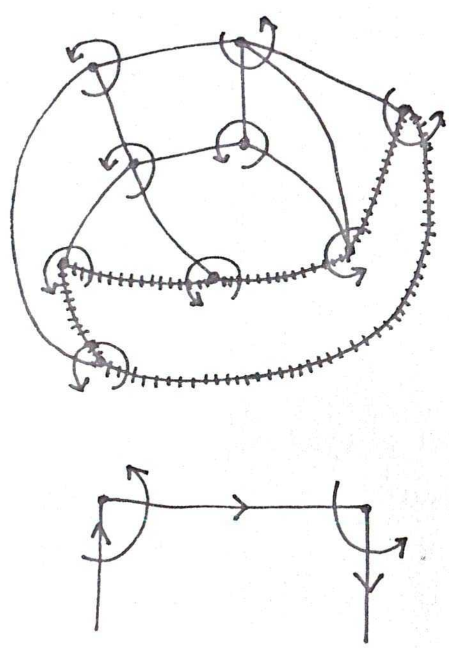
2.1. **Tétel:** van olyan lokális gráf-automata, mely egy gráf sikbarajzolhatóságát $O(n^2)$ ütemben eldönti.

Bizonyitás: Olyan automatát konstruálunk, mely a gráfot először kétszeresen összefüggő komponenseire bontja, majd az egyes komponensek sikbarajzolhatóságát dönti el, párhuzamosan. Az automatát a két részfeladatot végrehajtó automata szorzataként definiáljuk majd /ld. 5. ábra/

A kétszeresen összefüggő komponensek keresésére használhatjuk Wu és Rosenfeld [19] automatáját, mely $O(n^2)$ idő alatt müködik.

A kétszeresen összefüggő komponensek sikbarajzolhatóságának eldöntésére Demoucron, Malgrange és Pertuiset [3] algoritmusát adaptáljuk lokális gráf-automatákra.

Egy kétszeresen összefüggő gráf sikbarajzolhatóságát a következőképpen is megfogalmazhatjuk: minden csucshoz megadható a csucsból induló élek egy ciklikus sorrendje /és a sorrendhez tartozó + körüljárás/ ugy, hogy különböző csucsokhoz tartozó sorrendek konzisztensek legyenek. Ezen a következőt értjük: induljunk el egy tetszőleges élen, és uj csucsba érve azon az élen haladjunk tovább, mely az adott élet /+ körüljárás szerint/ a ciklus sorrendben követi. A ciklikus sorrendek akkor konzisztensek, ha minden igy de-

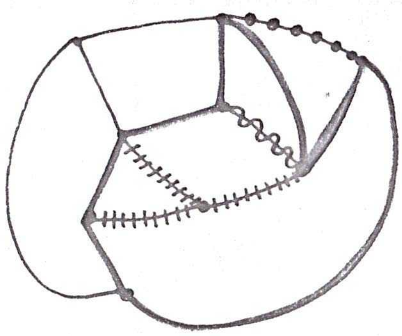


2. ábra

finiált ut egyszerü kör.

A lokális gráf-automata egy gráf sikbarajzolását a csucsokban megadott ciklikus sorrendek formájában fogja kódolni. Lapnak a fenti módon kapható egyszerü köröket nevezzük.

2.1. Definició: legyen $G=(V,E)$ gráf, $G'=(V',E')$ részgráfja ($V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$). A G gráf e_1 és e_2 éle ekvivalens, ha létezik olyan ut, melynek első éle e_1, utolsó éle e_2, és belső csucsa nincs V'-ben. Egy ekvivalencia osztályt a G gráf G'-re vonatkozó hidjának nevezünk.



3. ábra

A 3. ábra a 2. ábra gráfjának a pirossal jelzett részgráfra vonatkozó hidjait jelzi. A definiált reláció valóban ekvivalencia: ha $p_1 = e_1\widetilde{p_1}e_2$, $p_2 = e_2\widetilde{p_2}e_3$, ahol $\widetilde{p_1}$, $\widetilde{p_2}$ G'-től diszjunkt utak, akkor $p_3 = e_1\widetilde{p_1}\widetilde{p_2}e_3$ e_1-et és e_3-at összekötő kivánt tulajdonságu ut.

2.2. Definició: legyen $G=(V,E)$ gráf, $G'=(V',E')$ sikbarajzolható részgráf, legyen adva továbbá G' egy sikbarajzolása, L a sikbarajzolás egy lapja, és H a G'-re vonatkozó hid. H az L lapba rajzolható, ha a H-beli élek minden V'-beli végpontja L-en van.

Ezután a kétszeresen összefüggő gráfok sikbarajzolhatóságát eldöntő algoritmus a következő:

1/ Legyen $G' = \phi$.

2/ Válasszuk G egy K körét, legyen $G' := K$. Ha ilyen nincs, vagy $G = K$, menj 7/-re.

3/ Keressük meg a G gráf G' -re vonatkozó hidjait. Ha van olyan hid, amely egy lapba sem rajzolható, menj 4/-re. Ha ilyen nincs, de van olyan H hid, mely pontosan egy lapba rajzolható, menj 5/-re. Különben menj 6/-re.

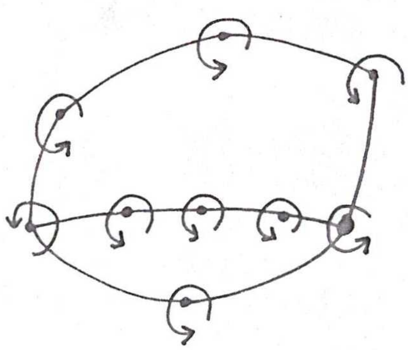
4/ G nem sikbarajzolható.

5/ Válasszunk H -ben egy P utat, melynek két végpontja G' -beli. Legyen $G' := G' + P$. Ha $G' = G$ menj 7/-re. Különben menj 3/-ra.

6/ Legyen H tetszőleges hid. Menj 5/-re.

7/ G sikbarajzolható.

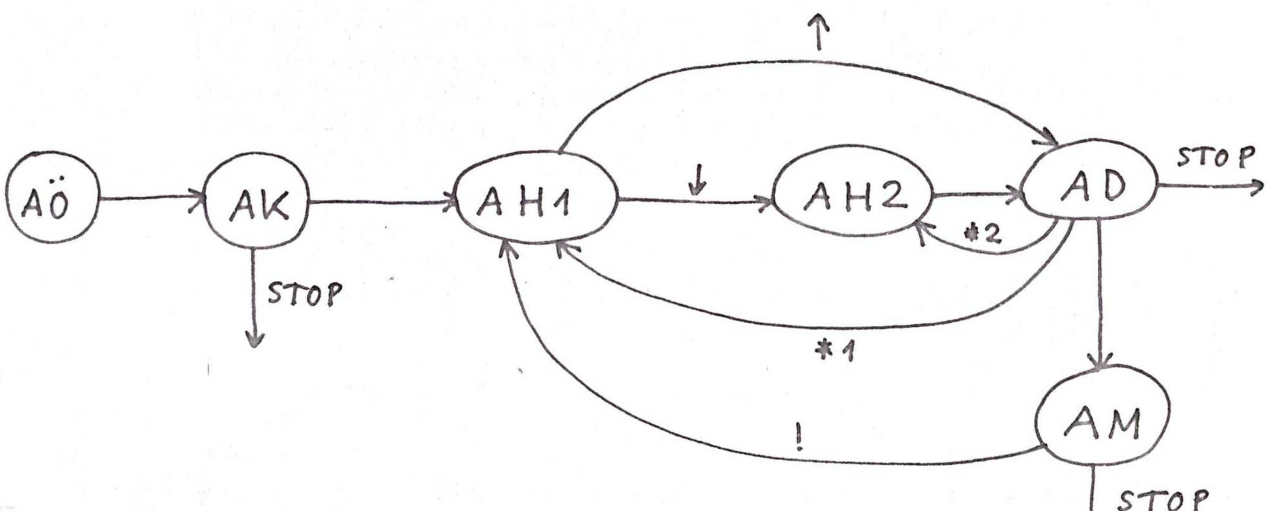
Az algoritmus során a G' gráf sikbarajzolására is szükségünk van. Igy a $G' := G' + P$ operáció azt is jelenti, hogy az uj éleket az ut két végpontjában a ciklikus sorrendben a lapot alkotó két él közé iktatjuk, az uj csucsokon pedig a két uj éllel ciklikus sorrendet kezdünk. Az uj csucsokon a körüljárást a keletkezett két lap körüljárásával konzisztensen adjuk meg.



4. ábra

Amennyiben van a gráfban olyan él, melynek mindkét végpontja G'-beli, ez az él önmagában hidat alkot. Az ettől különböző hidak tartalmaznak nem G'-beli csucsot is. Hidak keresésénél ezt a két esetet külön fogjuk vizsgálni.

Az algoritmus lényeges operációi: hidak keresése, hid lapbarajzolhatóságának eldöntése, és a $G':=G'+P$ operáció. A feladatot megoldó automatát ezen részfeladatokat megoldó automaták alábbi szorzataként állitjuk elő.



5. ábra

1/ A $(G, AÖ)$ automata alapgráfról indul. Végállapotában az elvágó élek egy speciális "halott" állapothalmazba jutnak, és minden 2-szeresen összefüggő komponensében egyetlen csucs kitüntetett állapotba kerül /ld. [19] /.

2/ A (G, AK) automata 2-szeresen összefüggő alapgráfról indul. Végállapotában egy kör speciális $\hat{V}\subset\bar{V}\cup V$ állapothalmazba jut. Ha nincs ilyen, vagy a gráf egy kör, egy másik speciális végállapothalmazba jut.

3/ A $(G, AH1)$ automata olyan alapgráfról indul, melyben egy sikbarajzolható G' részgráf és ennek egy sikbarajzolása van kódolva. Ha van olyan $(v,w) \in E$, melyre $v,w \in V'$, speciális $\uparrow$ állapothalmazba jut /és kitünteti a (v,w) élet/. Ha nincs ilyen él, valamely $\downarrow$ állapothalmazba jut.

4/ A $(G,AH2)$ automata olyan alapgráfról indul, melyben egy sikbarajzolható G' részgráf és ennek sikbarajzolása van kódolva. Végállapotában egy $v \in V'$ csucs és a hozzá tartozó hid élei speciális $\hat{V} \subset \bar{V} \cup V$ állapothalmazba jutnak.

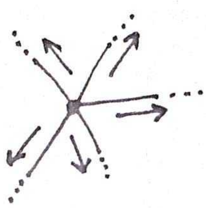
5/ A (G,AD) automata olyan alapgráfról indul, melyben egy sikbarajzolható G' részgráf, ennek egy sikbarajzolása, és egy, a G'-re vonatkozó H hid van kódolva. Ha H egy lapba sem rajzolható, valamely STOP végállapotba jut. Ha H pontosan egy lapba rajzolható, valamely $*$ állapothalmazba jut. Ha H 2 lapba rajzolható, akkor attól függően, hogy H milyen tipusu, $*1$, illetve $*2$ végállapothalmazba jut, és H élei valamely $\mathcal{H}$ "halott" végállapothalmazba jutnak, azaz a továbbiakban csak üzenettovábbitásra szolgálnak. Ha H 2 lapba rajzolható, de $G'+H=G$ "élő" éleivel, akkor szintén a $*$ végállapothalmazba jut.

6/ A (G,AM) automata olyan alapgráfról indul, melyben egy sikbarajzolható G' részgráf, ennek egy sikbarajzolása, és egy lapba rajzolható H hidja /a hozzá tartozó L lappal/ van kódolva. Végállapotában a $G'+P$ részgráf és ennek egy sikbarajzolása van kódolva. Amennyiben $G'+P=G$ speciális STOP végállapothalmazba jut, különben valamely végállapothalmazba jut.

A (G,AK) automatáról könnyen látható, hogy megvalósitható, és egyszeri müködése $O(n)$ lépést igényel, ahol $n=|V|$. A $(G,AH1)$ automata a feszitőfa segitségével $O(D)$ idő alatt müködik, ahol D a feszitőfa mélysége /a v,w csucsok "üzenetet küldenek" a gyökér felé, a gyökér a legkorábban érkezett üzenetet választja és erről értesitést küld - ha nincs v, w csucs, ez az A3 automatánál leirt módszerrel deríthető ki/.

A $(G, AH2)$ automata $O(v_i)$ idő alatt müködik, ahol v_i a v csucshoz tartozó hid csucsainak száma. Itt V gyökerü feszitőfa épitéséről van szó, és G' csucsait "határnak" tekintjük. A $(G, AH2)$ automata egy teljes ciklusa /az összes $v \notin G'$ csucsot tartalmazó hidak felsorolása/ $O(n)$ ütem.

A (G, AD) automata ugy müködik, hogy a H hid egy G'-beli csucsából induló legfeljebb d lapot körbejárja, és mindegyik lapról ellenőrzi, hogy H összes G'-beli csucsát tartalmazza-e. Ez $O(n)$ lépést vesz igénybe.



6. ábra

Végül a (G, AM) automata a H hidban egy G'-beli csucsból G'-be vezető utat keres /a 2-szeres összefüggőség miatt ilyen ut létezik/. Ez a keresés megint $O(n)$ lépést vesz legfeljebb igénybe.

A (G, AM) automata $O(n)$-szer müködik, mert minden müködése legalább egy éllel növeli a G' gráfot. Igy az egész algoritmus müveletigénye $O(n^2)$.

Megjegyezzük, hogy a definiciókban megkövetelt szinkronizáció is $O(n)$ lépést igényel /Rosenstiehl és tsai [15]/.

Ezzel a 2.1.tétel állitását igazoltuk.

2.3. Nem-polinomiális algoritmusok

A gráfokra vonatkozó eldöntési és optimalizálási feladatok jelentős része un. NP-teljes feladat. Ezen feladatok közös vonása, hogy általában valamilyen tulajdonságu reláció /részgráf, a csucsok egy permutációja, stb./ keresésé-ből állnak, és egy adott relációról "könnyü" eldönteni, hogy rendelkezik-e az adott tulajdonsággal. Általános tapasztalati tény, hogy az ismert legjobb algoritmusok is lényegében - heurisztikus meggondolásokkal gyorsitva - az összes keresett reláció felsorolásán, "végigpróbálgatásán" alapulnak. Ennél többre természetesen most sem számithatunk, hiszen a vizsgált modell a szokásosnak megszoritása. Esetünkben azonban ujabb nehézségek is fellépnek. Az összes permutáció felsorolása például $n!$ közbülső állapotot igényel / n csucsu gráfra/, igy ez lokális gráf-automatával nem lehetséges. Egy problémát akkor tudunk megoldani, ha a keresést /a 9. Def. értelmében/ valamely felsorolható relációosztályra /pl. a permutációk esetében néha a fa-permutációkra/ tudjuk korlátozni.

2.2. <u>Tétel:</u> legyen $\mathcal{T}$ gráf-tulajdonság és

$$\mathcal{T} \Leftrightarrow Q_1 S_1 \dots Q_k S_k \, \Phi(R, S_1, \dots, S_k)$$

ahol Q_i $\exists$ vagy $\forall$ kvantor, $\mathfrak{S}_i$ lokális gráf-automatával felsorolható leképezés , Φ pedig $\mathcal{L}$-beli szinezett gráf--tulajdonság. Akkor $\mathcal{T} \in \mathcal{L}$.

<u>Bizonyitás:</u> legyen A_i az $\mathfrak{S}_i$ leképezést felsoroló automata.

Legyen $\exists A_i$, $\forall A_i$ ezek módositott változata:

$\exists A_i$:

	$\uparrow_0$	$\downarrow_0$
$\overline{FIN}$	$\uparrow_1$	$\downarrow_1$
$V-\overline{FIN}$	$\uparrow_1$	$*_1$

$\forall A_i$:

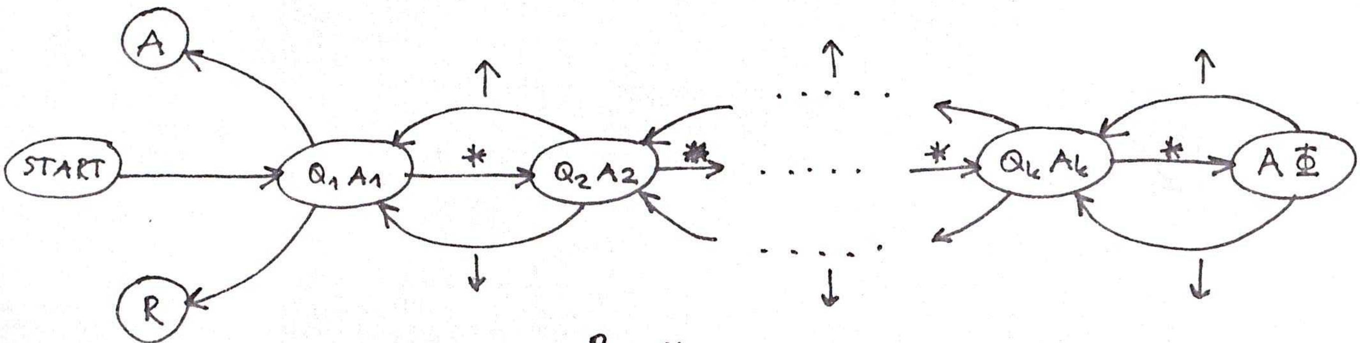
	$\uparrow_0$	$\downarrow_0$
$\overline{FIN}$	$\uparrow_1$	$\downarrow_1$
$V-\overline{FIN}$	$*_1$	$\downarrow_1$

7. ábra

Itt $\{\uparrow_0, \downarrow_0\}$ a kezdőállapotok, $\{\uparrow_1, \downarrow_1, *_1\}$ a végállapotok egy particiója. A $\exists A_i$ automata müködése: ha $\uparrow_0$-beli kezdőállapotból indul, minden müködés nélkül azonnal $\uparrow_1$-beli végállapotba jut. Ha $\downarrow_0$-beli kezdőállapotból indul, és ez a felsorolás szerint utolsó $\mathfrak{S}_i$-beli relációt kódolja, azonnal $\downarrow_1$-beli végállapotba jut; ellenkező esetben müködni kezd /ekkor lehetséges végállapotait $*_1$-gyel jelöltük/. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy igenlő válasz esetén leállitja a keresést, tagadó válasz esetén tovább folytatja a felsorolást, amig ez lehetséges. A $\forall A_i$ automata interpretációja hasonló. /A továbbiakban $\downarrow_0, \downarrow_1$-ra nem használunk külön jelölést./

Az $A\Phi$ automata az $S_1, \dots, S_k$ relációkkal szinezett alapgráfról indul, és $\uparrow$-beli, illetve $\downarrow$-beli végállapotba kerül aszerint, hogy az alapgráf rendelkezik-e a Φ tulajdonsággal.

Ezután tekintsük a következő automata-szorzatot:



8. ábra

A kvantorok számára vonatkozó indukcióval láthatjuk be, hogy ez az automata valóban eldönti a $\mathcal{T}$ tulajdonságot.

2.1. Következmény: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$

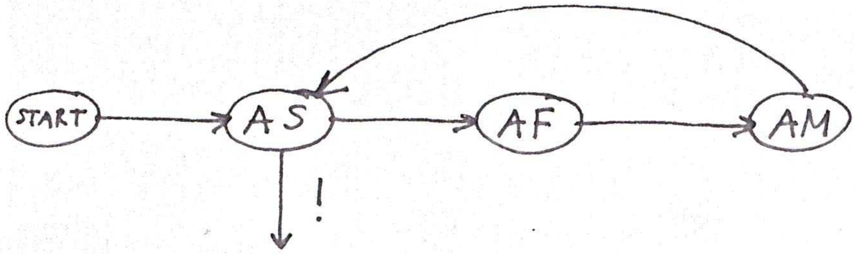
Bizonyitás: $\mathcal{S}$-beli tulajdonságok esetén $\mathcal{S}_i = V, 2^V, 2^E$ ezekről láttuk, hogy felsorolhatóak, Φ pedig egy rögzitett k csucsu szinezett részgráfra vonatkozó kvantormentes zárt formula, igy lokális gráf-automatával eldönthető.

2.1. Lemma legyen $\mathcal{S}$ felsorolható leképezés, f_1 pedig a (G, S) párokon értelmezett lokális gráf-automatával kiszámitható függvény /ahol $S \in \mathcal{S}_G$/. Akkor

$$f(G) = \min_{S \in \mathcal{S}_G} f_1(G, S)$$

is lokális gráf-automatával kiszámitható függvény.

Bizonyitás: legyen AF olyan automata, mely az $f_1(G, S)$ függvényt kiszámitja, AM két kódolt szám minimumát képző automata, AS a $\mathcal{S}$-et felsoroló automata. Az ábrán jelölt $!$ állapot az utolsó $\mathcal{S}_G$ -beli relációhoz tartozó végállapotot jelzi.



9. ábra

A 2.1.Lemma következményeként nyilvánvalóan kiszámit-hatók az olyan tipusu optimalizálási feladatok, amelyeknél bizonyos tulajdonságu csucs- vagy élhalmazok közül keresünk maximálisat /ill. minimálisat. Néhány példa /Garey-Johnson [8]/:

minimális lefedő ponthalmaz, domináns ponthalmaz, "feed-back" ponthalmaz,

maximális független ponthalmaz, sikbarajzolható részgráf, k-reguláris részgráf,

maximális élszámu párositás, vágás, kör, stb.

A lokális gráf-automatával való felismerhetőség szempontjából érdekesek azok az optimalizálási feladatok, melyekben a gráf csucsainak vagy éleinek valamilyen szempontból optimális <u>particióját</u> keressük. Mivel az összes particiók száma $\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(n)^{n+\frac{1}{2}} e^{\lambda(n)-n-1}$, ahol $\lambda(n) \log \lambda(n) = n$, <u>nem létezhet</u> olyan automata, mely a csucsok összes particióját felsorolja.

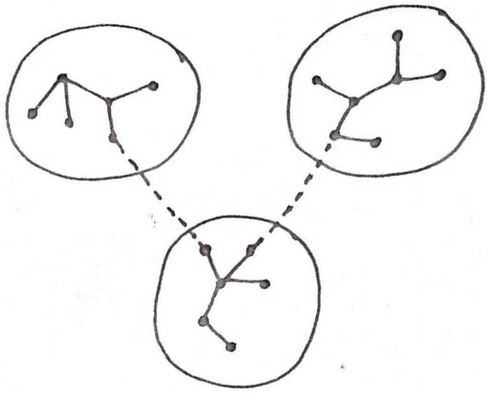
Az alábbiakban a particiók optimumaként definiált feladatok egy osztályáról mutatjuk meg, hogy lokális gráf-automatával kiszámithatóak.

2.3. **Definició:** a $G=(V,E)$ gráf csucsainak egy $\mathcal{P}=(H_1,\dots,H_m)$ particiója **összefüggő**, ha a H_i részhalmazok által feszitett részgráfok összefüggőek.

2.2. **Lemma:** az összefüggő particiók felsorolhatók.

2.1. **Megjegyzés:** összefüggő partició **kódolásán** a H_i részhalmazok által feszitett részgráfok egy-egy feszitőfájának megadását fogjuk érteni.

Bizonyitás: Tekintsük a H_i halmazok F_i feszitőfáit. Az $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ élhalmazt a G gráf F feszitőfájává egészithetjük ki. Legyen $E'=F-\bigcup_{i=1}^{m} F_i$. Akkor a $\mathcal{P}$ összefüggő particiót az (F,E') párral azonosithatjuk, ahol F feszitőfa, E' pedig éleinek egy részhalmaza. Igy az (F,E') párokat felsorolva /megint lexikografikusan/ az összefüggő particiók felsorolását kapjuk /esetleg egy particiót többször is/.



10. ábra

2.4. **Definició:** legyen $\mathcal{P}=(V_1,\dots,V_k)$ a $G=(V,E)$ gráf csucsainak egy összefüggő particiója. G-nek $\mathcal{P}$-re vonatkozó **kontrakciója** $G'=(V',E')$, ahol

$$V'=\{1,\dots,k\},\quad E'=\{(i,j): \exists v_i\in V_i,\ v_j\in V_j : (v_i,v_j)\in E\}.$$

Jelölésben $G'=G/(V_1,\dots,V_k)$.

2.2. **Következmény:** lokális gráf-automatával kiszámithatók az alábbi függvények:

a/ $\chi(\bar{G})$, ahol χ a kromatikus szám

b/ $\min\{k:\ V=V_1\cup\ldots\cup V_k,\ V_i\cap V_j=\emptyset\ ,\ |V_i|\geq \ell,\ G(V_i,E_i)\in \mathcal{J}$

ahol $G(V_i,E_i)$ /a V_i által feszitett/ összefüggő részgráf, $\mathcal{J}^*\in\mathcal{L}$ tetszőleges.

c/ $\min\{k: V=V_1\cup\ldots\cup V_k$, V_i összefüggő, $G/(V_1,\ldots,V_k)\in \mathcal{J}^*\}$

ahol $\mathcal{J}^*\in\mathcal{L}$ tetszőleges.

Bizonyitás:

a/ $\chi(\bar{G})=\min\{k: V=V_1\cup\ldots\cup V_k,\ V_i\cap V_j=\emptyset,\ G(V_i,E_i)$ teljes gráf$\}$ igy ez a b/ speciális esete

b/ Legyen $\mathcal{S}: G\longrightarrow\{S_G=(V_1,\ldots,V_k)$ összefüggő particiók$\}$

és

$$f(G,S(V_1,\ldots,V_k))=\begin{cases} k, & \text{ha } |V_i|\geq \ell \text{ és } G(V_i,E_i)\in\mathcal{J}^* \\ \infty & \text{különben}\end{cases}$$

akkor $\mathcal{S}, f$ eleget tesznek a 2.1.Lemma feltételeinek

c/ Legyen $\mathcal{S}$ mint a b/-ben,

és

$$f(G,S(V_1,\ldots,V_k))=\begin{cases} k, & \text{ha } G/(V_1,\ldots,V_k)\in\mathcal{J}^* \\ \infty & \text{különben}\end{cases}$$

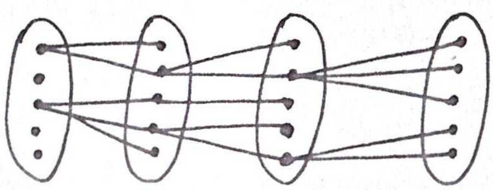
ekkor ujra alkalmazhatjuk a 2.1.Lemmát. A $G/(V_1,\ldots,V_k)$ gráf vizsgálatánál a V_i-beli legkisebb indexü csucs szimulál $\mathcal{J}^*$-ot eldöntő automatát.

2.5. Definició: a $G=(V,E)$ gráfra $V'\subseteq V$ domináns halmaz, ha minden $w\in V-V'$-re létezik $v\in V'$, hogy $(v,w)\in E$. Egy gráf domatikus száma az a legnagyobb k , melyre

$V=V_1\cup\ldots\cup V_k,\ V_i\cap V_j=\emptyset$, és V_i domináns halmaz minden i-re.

2.3. Lemma: a domatikus szám lokális gráf-automatával kiszámitható.

Bizonyitás: bár a tulajdonság definiciójában nem összefüggő particiók szerepelnek, a probléma átfogalmazható ilyen alakura.



11. ábra

Mivel V_i dominánс halmaz, V_{i+1} minden csucsából megy él V_i -be. Egy-egy ilyen élet választva minden V_{i+1}-beli csucshoz $(i \geq 1)$ olyan fákat kapunk, melyek gyökere V_1-beli, a V_i -beli csucsokat pedig az jellemzi, hogy a gyökértől vett távolságuk pontosan $(i-1)$.

Igy az adott erdőből a $\{V_1, \dots, V_k\}$ partició rekonstruálható. Egy erdőt az (F, E', V') hármas határoz meg, ahol F feszitőfa, E' az F éleinek részhalmaza, V' pedig a gyökerek halmaza. Innen az állitás a 2.2.Tételt és a 2.1.Lemmát felhasználva következik.

Most néhány az eddigitől eltérő jellegü gráftulajdonság eldöntésére adunk algoritmust.

2.6. Definició: legyen $G=(V,E)$ gráf, $f: V \longrightarrow \mathbb{N}$ injekció. Legyen

$$B(G) = \min_{f} \max_{(v,w)\in E} \{|f(v)-f(w)|\}.$$

$B(G)$ -t a G gráf <u>szélességének /bandwidth/</u> nevezzük.

Legyen

$$\mathcal{B}_k = \{G \mid B(G) \leq k\}.$$

A szélesség a gyakorlatban sokat használt gráf-tulajdonság. Mátrixok sor- és oszlopcserékkel való "majdnem" diagonális alakra hozásánál van szerepe.

2.3 **Tétel:** $\mathcal{B}_k \in \mathcal{L}$, minden k-ra.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $G \in \mathcal{B}_k$, és legyen f olyan, hogy $\forall (v,w) \in E$ -re $|f(v)-f(w)| \leq k$. Definiáljuk éleinek egy szinezését:

$$(v,w) \in C_i \iff f(v)-f(w) = i$$

azaz G éleit a "hosszuknak" megfelelően szineztük, s $(-k,-k+1,\dots,k-1,k)$ szinekkel. Tekintsük a G-gráf tetszőleges $K=(e_1,\dots,e_\ell)$ körét. Legyen

$$a_i = |\{e_j \in C_i\}|,$$

akkor C_i definiciója miatt

$$(1) \qquad \sum_{i=-k}^{k} i \cdot a_i = 0$$

Legyen $P=(e_1,\dots,e_\ell)$ ut, az a_i számokat hasonlóan definiálva ekkor

$$(2) \qquad \sum_{i=-k}^{k} i \cdot a_i \neq 0$$

teljesül. Továbbá $v=f^{-1}(1)$-re, illetve $u=f^{-1}(m)$-re

$$(3) \qquad (v,w) \in E \Rightarrow (v,w) \in C_{-1} \cup C_{-2} \cup \dots \cup C_{-k}$$

$$(4) \qquad (u,z) \in E \Rightarrow (u,z) \in C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$$

Ezen feltételek azonban elégségesek is: ha létezik (1)-(4)-nek eleget tevő C szinezés, akkor $G \in \mathcal{B}_k$. Ennek igazolására megadunk egy megfelelő f függvényt.

Legyen $f^{-1}(1)=v$, ahol v a (3)-nek eleget tevő csucs. Legyen $w\in V$, és $P=(e_1,\dots,e_\ell)$ v-t és w-t összekötő ut. Legyen

$$f(w)=\sum_{i=1}^{\ell} c(e_i)$$ ahol $c(e_i)$ az e_i él szine.

Akkor (1) miatt $f(w)$ definiciója egyértelmü, és (2) miatt $u\neq w \Rightarrow f(u)\neq f(w)$. Továbbá definició szerint $(u,w)\in E$-re $|f(u)-f(w)|=|c(u,w)|\le k$.

Az eddigiekből azt látjuk, hogy

$$G\in \mathcal{B}_k \Longleftrightarrow \exists E_1\dots\exists E_{2k}\,\forall K\,\forall P \begin{cases} E=E_1\cup\dots\cup E_k, & E_i\cap E_j=\emptyset, \\ K\text{-ra} & \sum i a_i=0 \\ P\text{-re} & \sum i a_i\neq 0\ , (3), (4 \end{cases}$$

Az ekvivalens átfogalmazásra a 2.2.Tétel alkalmazható.

2.7.**Definició:** legyen $G=(V,E)$ gráf, $G_1=(G,\rho,C)$ alapgráf, F pedig a G egy feszitőfája. A V csucsok (F,ρ)-ból származtatott permutációján a megfelelő preorder sorrendet értjük. A csucsok egy π permutációja fa-permutáció, ha valamely (F,ρ) párból származik. /A továbbiakban π és (F,ρ) közt nem teszünk különbséget./

2.2.**Megjegyzés:** egy (F,ρ) fa-permutáció kódolásán azt értjük, hogy F mint élhalmaz van kódolva, $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ pedig csucsonként /ez azt jelenti, hogy $O(d\cdot d!)$ állapothalmazu automatára van szükségünk/.

2.4.**Lemma:** a fa-permutációk felsorolhatók.

Bizonyitás: Ebben az esetben $\mathfrak{S}_G=\{(F,\rho')$: F feszitőfa, ρ' iránytürendszer$\}$.

$R_{G,\rho,V}$ pedig a feszitőfák és iránytürendszerek rendezéséből lexikografikusan származik. A feszitőfákon az élhalmazok rendezésének megszoritása ad rendezést. Az iránytürendszereken az iránytük rendezéséből kapunk rendezést lexikografikus rendezése.

Legyen AI olyan automata, mely az iránytüket felsorolja, AF pedig olyan automata, mely adott részgráfról eldönti, hogy feszitőfa-e. Akkor a keresett AF1 automata az AI, AF, $A2$ és $A5$ automaták alkalmas szorzataként áll elő.

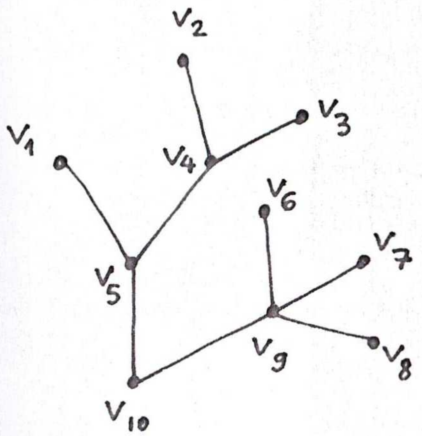
2.8. Definició: $\mathcal{A}ut = \{G : G$-nek van valódi automorfizmusa $\}$

2.4. Tétel: $\mathcal{A}ut \in \mathcal{L}$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}ut$ másodrendü diadikus formulával definiálható, $\exists R_1 \Phi$ alakban, ahol R_1 a csucsok közti kölcsönösen egyértelmü megfeleltetés. Mivel R_1 nem feltétlenül gyenge diadikus reláció, a 2.1. Következmény közvetlenül nem alkalmazható. Igy egyéb megközelitést keresünk.

2.5. Lemma: legyen $G=(V,E) \in \mathcal{A}ut$, $G_1=(G,\rho,C)$ alapgráf, $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ a csucsok G_1-ből származtatott rendezése, σ pedig a G automorfizmusa. Legyen $\pi' = (\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_n))$. Akkor π' fa-permutáció.

Bizonyitás: legyen (F,ρ) a π-t származtató alapfa. Legyen $\sigma(F)$ az F feszitőfa képe. Mivel σ automorfizmus, ha $(v_i, v_j) \in E$, akkor $(\sigma(v_i), \sigma(v_j)) \in E$ is tel-

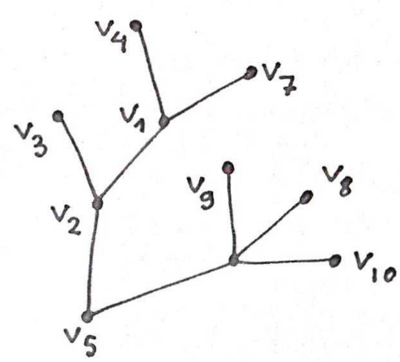


jesül. $\sigma(F)$ összefüggő és körmentes, valamint minden csucsban tartalmaz élt, azaz szintén feszitőfa, mégpedig F -fel izomorf.

A ρ iránytürendszer egy $\sigma(\rho)$ iránytürendszert határoz meg $\sigma(G)$-n a természetes módon: ha v szomszédainak sorrendje $(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell})$, akkor $\sigma(v)$ szomszédainak sorrendje $(\sigma(v_{i_1}), \dots, \sigma(v_{i_\ell}))$.

A preorder rendezés definiciójából következik, hogy ekkor π' a $(\sigma(F), \sigma(\rho))$ alapfa által meghatározott rendezés.

$$
\left.
\begin{array}{l}
v_1 \longrightarrow v_3 \\
v_2 \longrightarrow v_4 \\
v_3 \longrightarrow v_7 \\
v_4 \longrightarrow v_1 \\
v_5 \longrightarrow v_2 \\
v_6 \longrightarrow v_9 \\
v_7 \longrightarrow v_8 \\
v_8 \longrightarrow v_{10} \\
v_9 \longrightarrow v_6 \\
v_{10} \longrightarrow v_5
\end{array}
\right. \quad : \sigma
$$



12. ábra

<u>A24.Tétel bizonyitása:</u> először olyan $A4$ automata konstrukcióját vázoljuk, mely adott $\pi = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ fa-permutáció esetén eldönti, hogy a $\sigma(v_j) = v_{i_j}$ leképezés automorfizmus-e. Az $A4$ automata egy $A3$ automatából, és az $A3$ müködésével párhuzamosan a π-hez tartozó (F, ρ) alapfán $A3$ -at szimuláló $A3'$ automatából áll. Egy-egy

üzenetekkel egyezteti, hogy az egymásnak megfeleltetendő élpárok a gráfnak mindketten élei, vagy nem-élei. Ha eltérést tapasztalnak, π nem automorfizmus.

Az AU automatát az 2.4. Lemmában szereplő $AF1$ automatával szorozva olyan automatát kapunk mely eldönti Aut -ot.

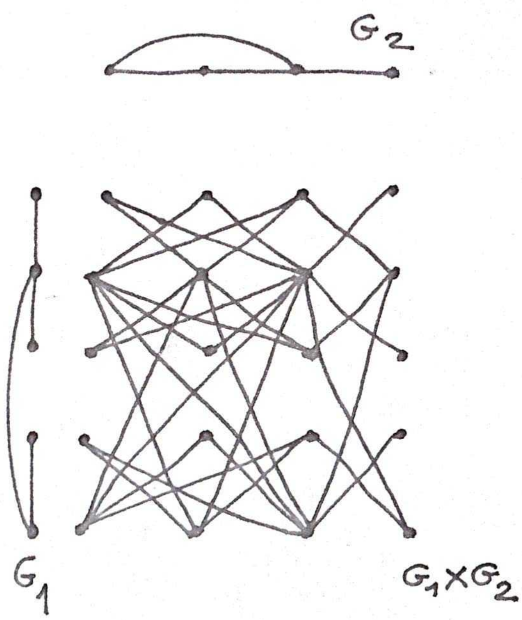
2.9. Definició: a $G_1=(V_1,E_1)$ és $G_2=(V_2,E_2)$ gráfok gyenge direkt szorzatán azt a $G=(V,E)$ gráfot értjük, melyre

$$V = V_1 \times V_2$$

$$E = \{ ((v_1,v_2),(w_1,w_2)) : (v_1,w_1)\in E_1 \wedge (v_2,w_2)\in E_2 \}.$$

Legyen $XG = \{ G : \exists G_1, G_2 : G_1 \times G_2 = G \}$.

Két gráf gyenge direkt szorzatát a 13. ábra szemlélteti.



13. ábra

Megjegyezzük, hogy a "kinálkozó" partició éppen független halmazokból áll, igy az összefüggő particiók felsorolása és ezzel együtt a 2.2. Lemma közvetlenül nem alkalmazható. A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi lemmákra. A $G=(V,E)$ gráf éleinek egy $E = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ particiója összefüggő él-partició, ha minden i -re az E_i élhalmazok összefüggő gráfot alkotnak.

2.6. Lemma: /ld. Lovász [12]/: $G_1 \times G_2$ akkor és csak akkor összefüggő, ha G_1, G_2 összefüggőek és legalább egyikük tartalmaz páratlan kört.

2.7. Lemma: az összefüggő él-particiók felsorolhatók.

2.3. Megjegyzés: egy él-partició kódolásán az egy halmazba tartozó élek összetartozásának közös csucsukban való tárolását értjük.

Bizonyitás: legyen $E = E_1 \cup \ldots \cup E_k$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, és legyen az élek szokásos rendezésében $e_i = \min E_i$, valamint $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Igy minden él-partició halmazait egyértelmüen rendeztük. A felsorolás ezután az $A4$ automatánál használt módszerrel elvégezhető.

2.3. Következmény: lokális gráf-automatával kiszámitható

$$\max \{ k : E = E_1 \cup \ldots \cup E_k,\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ E_i \text{ öf.},\ G(V_i, E_i) \in \mathcal{T}^* \}$$

ahol $\mathcal{T}^* \in \mathcal{L}$ tetszőleges tulajdonság.

Most visszatérünk a gyenge direkt szorzat vizsgálatára.

2.5. Tétel: $XG \in \mathcal{L}$.

Bizonyitás: tegyük fel, hogy $G = G_1 \times G_2$. A 2.6. Lemma szerint pl. G_2 tartalmaz páratlan kört. Legyenek $e_1, \ldots, e_k$ a G_1 gráf élei és

$$E_i = e_i \times G_2 \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Ekkor E_i összefüggő, mivel G_2-ről feltettük, hogy tartalmaz páratlan kört. Másrészt nyilván $(E_1, \ldots, E_k)$ a G éleinek egy particiója, azaz $(E_1, \ldots, E_k)$ összefüggő él-partició.

Nézzük meg, hogy $(E_1, \ldots, E_k)$ milyen további tulajdonságokkal rendelkezik.

A gyenge szorzat definiciója alapján az E_i által alkotott gráf páros gráf.

Legyen G_2 páratlan köre K_2, K_2 egy éle e, F_2 pedig a G_2 egy olyan feszitőfája, melyre $(K_2 - e) \subseteq F_2$. /Ld. a 13. ábrát./

A G_1 gráf tetszőleges e_i élére.

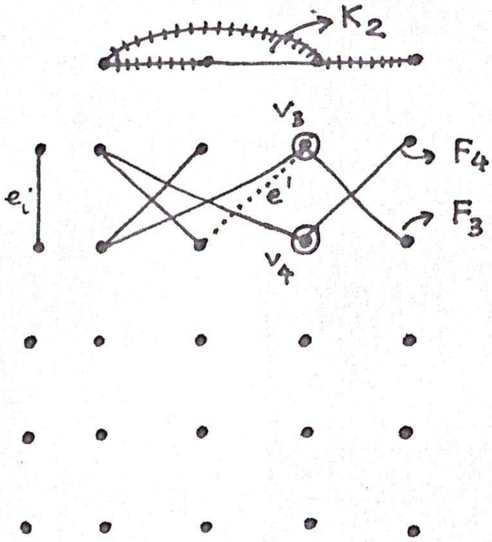
$$e_i \times F_2$$

két F_2-vel izomorf F_3, F_4 fából áll, melyeket

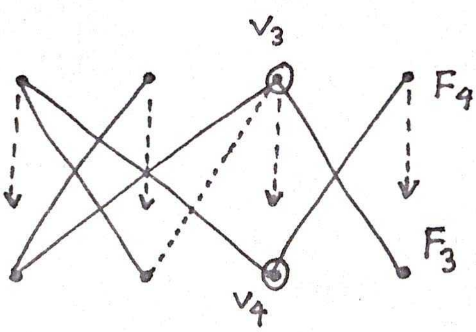
$$e_i \times e$$

egyik e' éle az $e_i \times G_2$ gráf egy F_0 feszitőfájává egészit ki.

Könnyen látható, hogy léteznek olyan v_3, v_4 csucsok és ρ_3, ρ_4 iránytürendszerek F_3 -on és F_4 -en, hogy az általuk származtatott sorrendben a megfelelő indexü csucsok "egymás alattiak" legyenek /ld. 15. ábra/ Ha v_i, v_j ill. w_i, w_j az F_3 ill. F_4 fa i-edik és j-edik csucsa, akkor igazak a következők:



14. ábra



15. ábra

(1) $(v_i, v_j) \in G \iff (w_i, w_j) \in G$

(2) $(v_i, w_j) \in G \iff (w_i, v_j) \in G$

(3) $(v_i, w_i) \notin G$.

Legyen

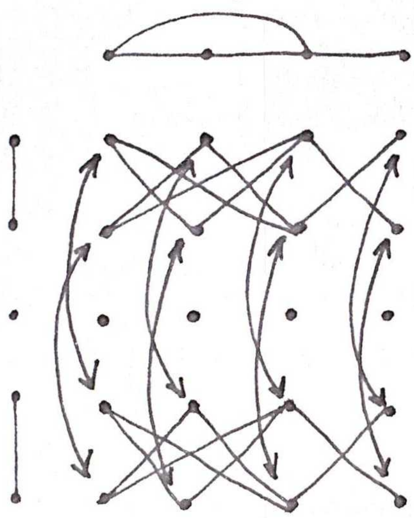
$$H_1 = \{v : v \in F_3,\ d(v, v_3)\ F_3\text{-ban páros}\} \cup$$
$$\cup \{v : v \in F_4,\ d(v, v_4)\ F_4\text{-ben páratlan}\}$$

$$H_2 = \{v : v \in F_4,\ d(v, v_4)\ F_4\text{-ben páros}\} \cup$$
$$\cup \{v : v \in F_3,\ d(v, v_3)\ F_3\text{-ban páratlan}\}.$$

Akkor, mivel $e_i \times G_2$ páros gráf,

(4) H_1, H_2 független halmazok.

Az eddigi feltételek csak azt biztositják, hogy az E_i által alkotott gráf előáll $e_i \times G_2^{(i)}$ gyenge direkt szorzatként, még azt is biztositanunk kell, hogy a $G_2^{(i)}$ gráf i-től független. Tekintsük a G_1 gráf e_i, e_j éleit. Ekkor az $e_i \times G_2$ és az $e_j \times G_2$ gráfok között az (F_3^i, F_4^i) és (F_3^j, F_4^j) fák közti sorrendtartó leképezés automorfizmus.



Továbbá igaz az is, hogy a (H_1^i, H_2^i), (H_1^j, H_2^j) halmazokra

(5) $(H_1^i \cup H_2^i) \cap (H_1^j \cup H_2^j) = \emptyset$

vagy

$$H_{\varepsilon_1}^i = H_{\varepsilon_2}^j \text{ és } H_{(3-\varepsilon_1)}^i \cap H_{(3-\varepsilon_2)}^j = \emptyset$$

teljesül.

16. ábra

Az eddigi feltételeket összefoglalva: ha $G = G_1 \times G_2$, akkor van olyan $(E_1, \dots, E_k)$ összefüggő élpartició, és minden i-re E_i-nek olyan $F^i = (F_3^i \cup F_4^i \cup e^i)$ feszitőfája és ϱ_i iránytürendszere, hogy az (1)-(5) feltételek teljesülnek. Ezek a feltételek elégségesek is, mert az (1), (2), (5) feltételekből a G_1, G_2 gráfok meghatározhatók.

Másrészt az 4. és 7. Lemmák alapján az élparticiók, feszitőfák és iránytürendszerek felsorolhatók, és a feltételek teljesülése lokális gráf-automatával ellenőrizhető.

2.4. Azonositási probléma

Gráfok mely osztályához létezik olyan automata, mely egy, az adott osztályhoz tartozó G gráfból származtatott bármely alapgráfról inditva végül mindig ugyanazt a $v \in V$ csucsot juttatja kitüntetett állapotba? Másképpen fogalmazva: mely gráfokon tudhat egy automata bárhonnan inditva mindig ugyanoda eltalálni? Az alábbiakban erre a kérdésre adunk választ.

Legyen

$$\mathcal{AS} = \{ G : \exists v \in V : \forall \sigma \in \mathcal{A}ut(G) : \sigma(v) = v \},$$

ahol $\mathcal{A}ut(G)$ a G gráf automorfizmusainak halmaza.

2.8. **Lemma:** ha $G \notin \mathcal{AS}$, akkor $\{G\}$-re az azonositási probléma nem oldható meg.

Bizonyitás: legyen a tetszőleges kiindulóponttól "megtalált" csucs v_0. Mivel $G \notin \mathcal{AS}$, van olyan $\sigma \in \mathcal{A}ut(G)$, melyre $\sigma(v_0) = v_1 \neq v_0$. Legyen G_0 tetszőleges alapgráf, G_1 pedig $\sigma(G_0)$, azaz a cimkézésre $C_1(\sigma(v)) = C_0(v)$ $\forall v \in V$-re, és hasonlóan, ha (v, w) a v csucsban az i-edik él, akkor G_1-ben $(\sigma(v), \sigma(w))$ a $\sigma(v)$ csucsban legyen i-edik él. Ekkor G_1-ről inditva, az automata $\sigma(v_0) = v_1$-et találja meg, vagyis ellentmondásra jutottunk.

A továbbiakban felhasználjuk Pósa [14] alábbi tételét.

2.6. **Tétel:** Pósa [14]: létezik olyan (diadikus) másodrendü $\Phi(x_1, x_2)$ formula, mely tetszőleges G automorfizmusmentes gráf csucsain rendezést definiál.

<u>Bizonyitás:</u> a csucsokat tetszőleges sorrendben véve, irjuk fel a gráf adjacenciamátrixát. Különböző permutációkhoz különböző mátrixok tartoznak, különben a permutációkban egymásnak megfelelő csucsokat egymásra képezve a gráf a-automorfizmusát kapnánk. Igy van egy permutáció, melyhez a /pl. sorfolytonosan leolvasott/ legkisebb mátrix tartozik. Ez a permutáció definiálható /diadikus/ másodrendü formulával, mégpedig

$$\Phi_0(R_1) \leftrightarrow [R_1 \text{ lin.rend.} \wedge \forall R_2 (R_2 \text{ lin. rend.} \rightarrow (\exists R_3 \text{ párositás}: \Psi))$$

alakban, ezekután $\Phi(x_1, x_2)$ pedig

$$\Phi(x_1, x_2) = \exists R_1 (\Phi_0(R_1) \wedge R_1(x_1, x_2))$$

alakban adódik.

A tétel alkalmazásánál ugyanaz a nehézség lép fel, mint az automorfizmusmentesség eldöntésénél: a definiáló formula nem gyengén diadikus. Az azonositási probléma megoldásában ujra az ott alkalmazott észrevételt használjuk.

2.7.<u>Tétel:</u> $\mathcal{AS}$ -ra az azonositási probléma megoldható, azaz létezik olyan automata, melyre tetszőleges $G \in \mathcal{AS}$ gráfra, minden $G_1 = (G, \rho, C_0)$ alapgráfra /ahol C_0 az A kezdőkonfigurációja/ az $L = (G_1, A)$ lokális gráf-automata végállapotában ugyanaz a v csucs kerül kitüntetett állapotba.

<u>Bizonyitás:</u> legyenek $\pi_1, \dots, \pi_m$ a G gráf fa-permutációi, $A(\pi_1), \dots, A(\pi_m)$ a hozzájuk tartozó adjacencia-mátrixok. Legyen $A = \min \{A(\pi_i)\}$, ahol a rendezés pl. sorfolytonosan olvasva értendő, és legyen továbbá

$$P = \{\pi_i : A(\pi_i) = A\} .$$

Tekintsük a $V_0 = \{ v : \forall \sigma \in Aut(G) : \sigma(v) = v \}$

halmazt, mely feltételeink szerint nem üres. Azt állitjuk, hogy minden $v \in V_0$ -ra

(*) $\quad \pi_i, \pi_j \in P \Longrightarrow \pi_i(v) = \pi_j(v)$

teljesül. Tegyük fel, hogy $\pi_i, \pi_j \in P$, és

$$\pi_i(v) \neq \pi_j(v)$$

akkor a $v \longmapsto \pi_i^{-1}(\pi_j(v))$ leképezés automorfizmus /mert $A(\pi_i) = A(\pi_j)$ / és v -t nem hagyja fixen.

Az is igaz, hogy a (*) feltétel csak $v \in V_0$ -ra teljesül. Ha $v \notin V_0$, legyen σ olyan, hogy $\sigma(v) \neq v$ és $\pi \in P$ tetszőleges. Akkor $\pi\sigma \in P$, és

$$\pi(v) \neq \pi\sigma(v) .$$

Vagyis P rendezést definiál V_0 csucsain. Az azonositandó csucs az ezen rendezésben minimális elem. A keresett automata a fa-permutációkat felsoroló AF1 automatából a szokásos konstrukciókkal kapható.

3. Definiálhatóság

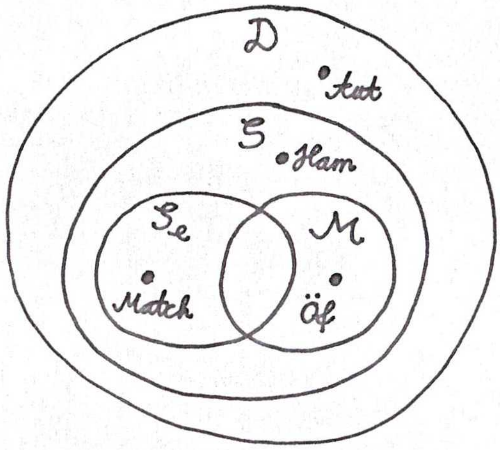
A fejezet első részében gráf-tulajdonságok, második részében környezetfüggetlen nyelvek definiálhatóságával foglalkozunk. A gráf-tulajdonságokkal kapcsolatban elsősorban negativ állitásokat keresünk. A definiálhatóságra vonatkozó negativ eredmények összefügghetnek bonyolultságra vonatkozó negativ eredményekkel: közös vonásuk, hogy adott probléma-osztálynak valamely /logikai v. algoritmikus/ kereben való elhelyezhetetlenségét mutatják. Közvetlen kapcsolatot mutat Fagin már idézett tétele: ha például belátnánk, hogy a Hamilton-kört nem tartalmazó gráfok osztálya nem definiálható egzisztenciális másodrendü formulával, ez egyben az $NP \neq NP^c$ sejtést is igazolná.

Két módszert használunk fel: az un. Fraissé-Ehrenfeucht-játékokat és az ultraszorzást. Ezek segitségével az $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}_e$, $\mathcal{S}$ és $\mathcal{D}$ osztályok közti valódi tartalmazási relációkat állapitunk meg.

Először példákat mutatunk definiálhatóságra, majd a felhasznált matematikai logikai segédeszközöket ismertetjük. Ezután igazoljuk a gráf-tulajdonságok definiálhatóságára vonatkozó negativ állitásokat. Ezeket /a 3.2.,3.3. Tételek kivételével, melyek egyéb osztályokkal foglalkoznak/, a 17. ábra foglalja össze.

Ebben a fejezetben gráfon véges, hurok és többszörös élek nélküli gráfot értünk /és nem tesszük fel, hogy a fokszámok korlátosak/.

A következő jelöléseket használjuk: $\mathcal{H}am = \{G : G$ tart. Hamilton-kört$\}$, $\mathcal{M}atch = \{G : G$ tart. teljes párositást$\}$, $\mathcal{Ö}f = \{G : G$ összefüggő$\}$, $\mathcal{A}ut = \{G : G$-nek van automorfizmusa$\}$.



17. ábra

A fejezet második részében a környezetfüggetlen nyelvek egy logikai karakterizációját adjuk meg, a Fraissé-Ehrenfeucht-játék alkalmas változatának segitségével.

3.1. Példák

3.1. Lemma: $\mathcal{H}am \in \mathcal{S}$.

<u>Bizonyitás:</u> megadjuk a definiáló formulát.

$$\Phi_1(R_1) = \Big[\forall x_1 x_2 (R_1(x_1,x_2) \to R(x_1,x_2)) \wedge \forall x_1 \exists x_2 x_3 \forall x_4 ((x_2 \neq x_3) \wedge R_1(x_1,x_2) \wedge$$
$$\wedge R_1(x_1,x_3) \wedge \big(R_1(x_1,x_4) \to (x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4$$

$$\Phi_2(R_1) = \Big[\forall H \big((\exists x_1 H(x_1) \wedge \exists x_1 \neg H(x_1)) \to \exists x_2 x_3 (H(x_2) \wedge \neg H(x_3) \wedge R_1(x_2,x_3))\Big]$$

$$\Phi = \exists R_1 (\Phi_1(R_1) \wedge \Phi_2(R_1)) .$$

Φ_1 azt fejezi ki, hogy R_1 részgráf, melyben minden csucs másodfoku, azaz független körökből áll, Φ_2 pedig azt, hogy minden részhalmazt és a komplementerét köti össze R_1 -beli él.

3.2. Lemma: $\{(G, V') : V' \subset V, V' \text{ max. flen } G\text{-ben}\} \in \mathcal{S}$.

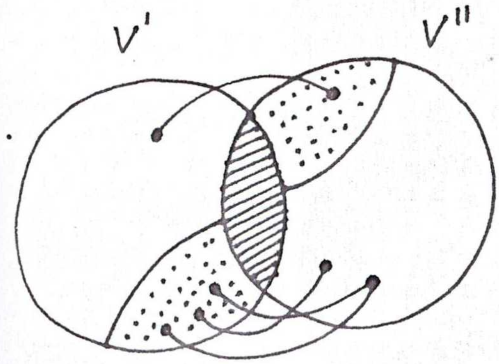
<u>Bizonyitás:</u> megadjuk a definiáló formulát.

$$\Phi_1(V') = \forall x_1 x_2 ((V'(x_1) \wedge V'(x_2)) \to \neg R(x_1, x_2))$$

$$\Phi_2(V') = \Big[\forall V'' \big(\Phi_1(V'') \to \exists R_1 (\forall x_1 x_2 (R_1(x_1,x_2) \to R(x_1,x_2)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x_3 ((V''(x_3) \wedge \neg V'(x_3)) \to \exists! x_4 (V'(x_4) \wedge R_1(x_3,x_4))) \wedge$$
$$\wedge (\forall x_3 ((V'(x_3) \wedge \neg V''(x_3)) \to \exists^{\leq 1} x_4 (V''(x_4) \wedge R_1(x_3,x_4))))\Big]$$

$$\Phi = \Phi_1(V') \wedge \Phi_2(V') .$$

Itt Φ_1 azt fejezi ki, hogy V' független halmaz, Φ_2 pedig azt, hogy minden V'' független halmazra $V''-V'$ <u>élekkel</u> párositható $V'-V''$ -be /az aláhuzott feltétel nélkül az állitás nyilvánvaló/.



18. ábra.

Ez nyilván elégséges feltétel. Szükségessége azért igaz, mert

$$(V'-V'', V''-V')$$

páros gráf. Ha a lefogó pontok minimális száma $> |V''-V'|$ akkor a pirossal jelzett halmaz $|V'|$-nél nagyobb független. Igy König tételét alkalmazva kapjuk az állitást.

A következő példában olyan elsőrendü formulát keresünk, mely az n csucsu összefüggő gráfok osztályát definiálja. Az alábbi lemma azért is érdekes, mert felhasználható logikai elméletek bonyolultságának alsó becslésénél /ld. Ferrante-Rackoff [7]/.

3.3. Lemma: / Pósa [14]/: létezik olyan, a gráfok nyelvén irt Φ_n elsőrendü formula, melyre ha a $G=(V, E)$ gráfra $|V|=n$, akkor $G \models \Phi_n \iff G$ összefüggő, és Φ_n kvantorainak száma $3\lceil \log_2(n-1)\rceil + 2$.

Bizonyitás: Ha G csucsainak száma n, akkor G pontosan akkor összefüggő, ha bármely két csucsa összeköthető legfeljebb $n-1$ hosszuságu uttal.

Legyen $\Psi_\ell(x_1, x_2)$ olyan, a gráfok nyelvén irt formula, mely pontosan akkor igaz, ha x_1 és x_2 összeköthető legfeljebb 2^ℓ hosszuságu uttal. Akkor

$$\Psi_{\ell+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 \left(\Psi_\ell(x_1, x_3) \wedge \Psi_\ell(x_3, x_2) \right).$$

Itt Ψ_ℓ kvantorainak számát Kv_ℓ -lel jelölve, $Kv_1 = 1$, és

$$Kv_{\ell+1} = 2 \cdot Kv_\ell + 1 ,$$

azaz $Kv_\ell = 2^\ell - 1$. Vegyük észre, hogy $\Psi_{\ell+1}$ másképpen is felírható.

$$\Psi_{\ell+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \left[(((x_4 = x_1) \wedge (x_5 = x_3)) \vee ((x_4 = x_3) \wedge (x_5 = x_2))) \to \Psi_\ell(x_4, x_5)\right].$$

Erre a felírásra $Kv_1 = 3$, és

$$Kv_{\ell+1} = Kv_\ell + 3$$

azaz $Kv_\ell = 3\ell$.

Ha most $2^{\ell-1}+1 < n \leq 2^\ell+1$, akkor minden n csucsu G gráfra G pontosan akkor összefüggő, ha

$$G \models \forall x_1 x_2 \, \Psi_\ell(x_1, x_2).$$

Vagyis a $\Phi_n = \forall x_1 x_2 \, \Psi_{[\log_2(n-1)]}(x_1, x_2)$ formula eleget tesz a lemma feltételeinek.

3.2. Matematikai logikai segédeszközök. Fraissé-Ehrenfeucht-játék

Most egy olyan módszert ismertetünk röviden, mely hatékony eszközt szolgáltat strukturaosztályok definiálhatóságának vizsgálatára. A módszer Fraissé-től származik, Eherenfeucht alkalmazta elemi ekvivalenciával kapcsolatban /melynek eleve csak végtelen modelleken van értelme/, véges modellekre pedig Fagin [6] használta az összefüggő gráfok osztályának egzisztenciális, monadikus másodrendü formulával való definiálhatatlanságának bizonyitására.

Tekintsük a következő játékot. Adva van két gráf, G_1 és G_2, és két játékos, I és II. Egy forduló abból áll, hogy I választ egy gráfot a kettő közül, és abban egy pontot, egy halmazt, vagy egy kétváltozós relációt. Ennek megfelelően II a másik gráfban választ - I választásával összhangban - egy pontot, egy halmazt, vagy egy kétváltozós relációt. Előre rögzitett számu n fordulót játszanak, az n. forduló után II akkor nyer, ha a választott pontok által feszitett struktura a két gráfban /az ujonnan felvett halmazokkal és relációkkal együtt/ izomorf. Ellenkező esetben I nyer.

Tehát II arra törekszik, hogy sikeresen "utánozza" I-et a másik strukturában.

A játéknak több lehetséges variációja van, attól függően, hogy lépésként milyen strukturák választását engedjük meg. Ha csak pontokat választunk, elsőrendü játékról, ha pontokat és halmazokat választunk /másodrendü/ monadikus játékról, ha pontokat, halmazokat és az élek részhalmazait választhatjuk, /másodrendü/ gyenge diadikus játékról beszélünk.

Az alkalmazások alapjául szolgáló lemmát a gyenge diadikus játékra vonatkozóan mondjuk ki.

3.1. Definició: a G_1, G_2 gráfokat n-edrendben ekvivalensnek nevezzük, /és $G_1 \cong_n G_2$ -vel jelöljük/ ha az n-fordulás játékban II -nek nyerőstratégiája van.

3.4. Lemma: $\cong_n$ ekvivalencia-reláció.

Bizonyitás: Legyen $G_1 \cong_n G_2$ és $G_2 \cong_n G_3$. Megadjuk II egy nyerőstratégiáját a (G_1, G_3) játékban. Legyen I lépése G_1-ben S_1 /pont, halmaz, vagy részhalmaz/, erre II válasza a (G_1, G_2) játékban adott nyerőstratégia szerint S_2. Tekintsük a (G_2, G_3) játékot, és tegyük fel, hogy ha itt I a G_2-ben S_2-t választja, akkor II G_3-ban nyerőstratégiája szerint S_3-t választja.

A (G_1, G_3) játékban II válasza S_1-re legyen S_3. /Hasonlóan járhatunk el, ha I G_3-ba kezd./ Akkor n forduló után II nyer, mert a G_1-ben és G_3-ban választott strukturák mindegyik a II által fiktiven G_2-ben választott strukturával izomorf.

3.5. Lemma: [11]: ha $G_1 \cong_n G_2$, akkor egy /másodrendü/ gyenge diadikus, legfeljebb n kvantort tartalmazó formula akkor és csak akkor igaz G_1- en, amikor G_2-n.

<u>Bizonyitás:</u> tegyük fel, hogy a Φ formula igaz G_1-en, de nem igaz G_2-n. Az n-fordulás gyenge diadikus játékban nyerőstratégiát fogunk megadni I számára, és ezzel ellentmondásra jutunk az $\cong_n$ definiciójával. Az egyszerüség kedvéért a lemmát a

$$\Phi = \exists S_1 \forall S_2 \exists S_3 \Psi(S_1, S_2, S_3)$$

esetre igazoljuk, általános kvantorszerkezetre a bizonyitás teljesen hasonló, de tulságos formalizmust igényelne.

Feltételünk szerint:

$$G_1 \models \exists S_1 \forall S_2 \exists S_3 \ \Psi(S_1, S_2, S_3)$$

$$G_2 \models \forall S_1 \exists S_2 \forall S_3 \neg \Psi(S_1, S_2, S_3)$$

ahol S_i elsőrendü, vagy gyenge diadikus másodrendü változó.

Az első fordulóban I a G_1 gráfban olyan S_1 strukturát választ, melyre $\forall S_2 \exists S_3 \Psi(S_1, S_2, S_3)$ teljesül. II válasza G_2 -ben legyen S_1'.

Mivel G_2 -n Φ hamis, S_1' -höz létezik olyan S_2, melyre G_2 -ben $\forall S_3 \neg \Psi(S_1', S_2, S_3)$ teljesül.

A második fordulóban I a G_2 gráfban választja ezt az S_2 strukturát. II válasza G_1-ben legyen S_2'.

Mivel G_1 -n Φ igaz, S_1 -hez és S_2'-hez van olyan S_3, melyre $\Psi(S_1, S_2', S_3)$ teljesül.

A harmadik fordulóban I a G_1 gráfban választja ezt az S_3 strukturát. II válasza G_2-ben legyen S_3'. Mivel G_2-ben $\forall S_3 \neg \Psi(S_1', S_2, S_3)$, igy végül

$$G_1 \models \Psi(S_1, S_2', S_3)$$

$$G_2 \models \neg \Psi(S_1', S_2, S_3')$$

ami ellentmond a választott részstrukturák izomorfizmusának.

3.1. Megjegyzés: a bizonyitásból jól látható, hogy a változók jellegéről semmit nem használtunk ki. Szóról szóra elmondhattuk volna ugyanezt a másik két fajta játékra /és akkor természetesen a megfelelő formulákra/, sőt, olyan általánositott kvantorokra is, ahol egyes változók speciális struktúrák lehetnek, feszitőfák, független halmazok, stb. Megkövetelhettük volna azt is, hogy II-nek csak olyan játékokban legyen nyerőstratégiája,ahol meg van kötve, hogy I az i-edik fordulóban G_{ε_i}-be játszik adott tipusu változóval, ebben az esetben a tételben olyan formulák szerepelnek, melyek i-edik helyén rögzitett kvantor van /$\exists$, ha I abba a gráfba játszik, ahol Φ igaz, ellenkező esetben $\forall$/. Fagin [6] ilyen speciális játékkal bizonyitja azt a tételét, melyet a bevezetésben emlitettünk.

Ultraszorzat

Az ultraszorzás a modellelmélet egyik alapvető operációja új modellek konstruálására. Az alábbiakban egyszerüség kedvéért a gráfok esetére szoritkozva ismertetjük a fogalmat.

3.2. Definició: egy H halmaz $\mathcal{U} = \{H_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ részhalmazrendszerét ultrafilternek nevezzük, ha
- $\emptyset \notin \mathcal{U}$
- $X \in \mathcal{U}, X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{U}$
- $X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{U}$
- $\forall X$-re $X \in \mathcal{U}$ vagy $H - X \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ principális ultrafilter, ha $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma = \emptyset$.

3.2. Megjegyzés: be lehet látni, hogy minden végtelen halmazon létezik principális ultrafilter.

3.3. Definició: legyen $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots$ gráfok egy sorozata, $\mathcal{U}$ ultrafilter $\mathbb{N}$-en. A $G_1, G_2, \ldots$ gráfok ultraszorzata a következő $G = (V, E)$ gráf.

$$V = \mathop{\times}_{i=1}^{\infty} V_i \Big/ \mathcal{U}$$

, azaz a Descartes-szorzat két elemét ekvivalensnek tekintjük, ha azon koordináták halmaza, melyen megegyeznek, $\mathcal{U}$-beli.

E definiciója:

$$((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$\{i : (x_i, y_i) \in E_i\} \in \mathcal{U},$$

ahol $x_i, y_i \in V_i$. Jelölésben $G = \mathop{\times_{\mathcal{U}}}\limits_{i=1}^{\infty} G_i$.

3.3.Megjegyzés: az igy kapott gráf csucsainak száma kontinuum.

Az ultraszorzatok alapvető tulajdonságát mondják ki az alábbi tételek /ld. pl. Chang-Keisler [2]/:

3.1.Tétel: legyen $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ elsőrendü formula a gráfok nyelvén, szabad változói $x_1, \dots, x_n$. Legyen továbbá

$\widetilde{x}_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots), \dots, \widetilde{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$.

Akkor

$$\{i : G_i \models \Phi(x_i^1, \dots, x_i^n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow G \models \Phi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) .$$

Ennek a tételnek a "pszeudoelemi" változatára lesz szükségünk.

3.6.Lemma: legyen $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ egzisztenciális másodrendü formula, melynek szabad változói elsőrendüek, $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n$ a fenti. Ekkor

$$\{i : G_i \models \Phi(x_i^1, \dots, x_i^n)\} \in \mathcal{U} \Rightarrow G \models \Phi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) .$$

Bizonyitás vázlata: legyen a Φ formula $\exists R_1 \dots \exists R_k \Psi$ alaku, ahol Ψ elsőrendü formula. Akkor azon G_i gráfokon, amelyeken Φ igaz, felvehetjük a Ψ -t kielégitő R_i relációkat. Ezen relációk ultraszorzatait tekintve G -n, a kapott $(R, R_1, \dots, R_k)$ relációstruktura ki fogja elégiteni Ψ -t /itt R a gráf éleit jelenti/.

3.3. Gráf-tulajdonságok definiálhatósága

A definiálhatósággal kapcsolatos negativ állitások igazolásához célszerü olyan gráfokat találnunk, melyek /a játékoknál definiált értelemben/ ekvivalensek. Ilyen gráfokat konkrétan megadni általában elég nehéz, azonban erre nincs is szükség. Ekvivalens gráfok létezését az alábbi lemma biztositja, mely [11] egy lemmájával analóg. Az $\cong_n$ reláció alatt a gyenge diadikus játékra vonatkozó ekvivalenciát értjük.

3.7. Lemma: $\cong_n$ ekvivalenciaosztályainak száma legfeljebb $F(n)$, ahol

$$F(n) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n \left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} 2^{\binom{i}{2}}\left(2^{\binom{i}{2}}+1\right)^{n-m} i!\,S(m,i)\right)$$

ahol $S(m,i)$ másodfaju Stirling-szám.

Bizonyitás: tegyük fel, hogy valamely G gráfban n forduló után a $P_1,\dots,P_m$ pontok és az $R_1,\dots,R_{n-m}$ relációk kerültek kiválasztásra /ahol R_i monadikus vagy gyenge diadikus reláció, és a P_j pontok, valamint az R_i relációk közt egyenlők is lehetnek, hiszen pl. ugyanaz a pont több fordulóban is választható/. A választott pontok által feszitett $(R, R_1,\dots,R_k)$ tipusu strukturák /itt R a gráf összekötöttségi relációja/ száma legfeljebb

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{\binom{i}{2}}\left(2^{\binom{i}{2}}+1\right)^{n-m} i!\,S(m,i)\,.$$

Ugyanis ha $P_1, \dots, P_m$ közt i darab különböző pont van, ezek $2^{\binom{i}{2}}$ különböző részgráfot feszithetnek, mindegyik R_i is legfeljebb $2^{\binom{i}{2}}$-féle lehet /ha R_i monadikus, 2^i adódik, de $2^i \leq 2^{\binom{i}{2}+1}$ /. Az m pontot i részre $S(m,i)$ különböző módon particionálhatjuk, és minden particiót $i!$ különböző módon rendezhetünk.

Igy m-re összegezve egy $f(n)$ felső becslést kapunk az n forduló után elérhető részstrukturák számára, ahol

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} 2^{\binom{i}{2}} \left(2^{\binom{i}{2}+1}\right)^{n-m} i!\, S(m,i).$$

Alkalmazzunk "visszafelé való indukciót". Tegyük fel, hogy $n-1$ forduló után a $P_1, \dots, P_{m'}$ pontok, és az $R_1, \dots, R_{n-1-m'}$ halmazok kerültek kiválasztásra. Rendeljük hozzá $(P_1, \dots, P_{m'}, R_1, \dots, R_{n-1-m'})$-höz a következő lépésben elérhető végkonfigurációk halmazát. Ez legfeljebb $2^{f(n)}$ féle módon lehetséges.

És igy tovább, minden $(P_1, \dots, P_i, R_1, \dots, R_j)$ választáshoz hozzárendelhetünk egy $(n+1-i-j)$-edrendü halmazstrukturát, mégpedig legfeljebb

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{f(n)}}}}}}\right\} n-i-j$$

félét. Igy a kezdőállapothoz, és ezzel a G gráfhoz

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{f(n)}}}}}}\right\} n$$

féle halmazstrukturát rendelhetünk. Azt állitjuk, hogy ha a G_1, G_2 gráfokra a hozzájuk rendelt halmazstruktura megegyezik, akkor a (G_1, G_2) játékban II-nek nyerőstratégiája van. Ez valóban indukcióval látható: I egy választása egy eggyel alacsonyabb rendü halmazstruktura választását jelenti G_i-ben, ehhez G_{3-i} -ben tartozik egy olyan választás, mely ugyanazt az eggyel alacsonyabb rendü halmazstrukturát származtatja. /Könnyen látható, hogy pont választásának csak pont választása felelhet meg, és halmaz választásának csak halmaz választása./

3.4. Megjegyzés: ha elsőrendü játékra szoritkozunk, a megfelelő ekvivalenciaosztályok számára ugyanigy kapunk felső becslést csupán $f(n)$ lesz

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\binom{i}{2}} i!\, S(n,i)$$

alaku.

3.5. Megjegyzés: a lemma a következő, talán meglepő módon is fogalmazható: akárhogy adunk meg $F(n)+1$ darab gráfot, ezek közt mindenképpen akad kettő, melyeket semmilyen legfeljebb n-kvantoros formulával sem tudunk megkülönböztetni. /Itt megint hasonló állitás érvényes bármilyen tipusu strukturaosztályra, és bármilyen kvantorra./

Legyen $\mathcal{T}$ gráftulajdonság, $\mathcal{T}_n = \{G : G \in \mathcal{T}\} \cap \{G : |V| = n\}$, azaz $\mathcal{T}_n$ a $\mathcal{T}$-beli n-csucsu gráfok halmaza. $\mathcal{T}_n$ természetesen elsőrendü formulával definiálható minden rögzitett n-re, hiszen csak véges sok gráfot tartalmaz. Kérdés azonban, hogy hány kvantor szükséges egy definiáló formulához? Nyilván n kvantor mindig elégséges, hiszen

$$\exists x_1 \ldots x_n \left[\bigwedge_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} (x_i \neq x_j) \wedge \bigvee_k \varphi_k \right]$$

definiáló formula, ahol φ_k $(k=1,\ldots,m)$ az összes $\mathcal{T}_n$ -beli gráfok teljes leirása. Az alábbiakban alsó becsléseket adunk a definiáló formulák kvantorainak számára, melyet $K_n(\mathcal{T})$-vel jelölünk.

3.2.<u>Tétel:</u> $K_n(\mathcal{H}am) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

<u>Bizonyitás:</u> legyen Φ m_0 kvantoros elsőrendü definiáló formula, melyre tehát minden n-csucsu gráfra teljesül, hogy

$$G \models \Phi \iff G \in \mathcal{H}am .$$

Legyen továbbá G_1 és G_2 két n-csucsu gráf, melyekre $G_1 \in \mathcal{H}am$, $G_2 \notin \mathcal{H}am$, és az elsőrendü játékban $G_1 \cong_{m_1} G_2$. Akkor a 3.5. Lemma szerint minden legfeljebb m_1 kvantoros Ψ formulára

$$G_1 \models \Psi \iff G_2 \models \Psi ,$$

vagyis a Φ-re tett feltevésünk miatt $m_1 < m_0$.

Igy állitásunkat beláttuk, ha meg tudunk adni egy $G_1 = (V_1, E_1)$ és egy $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfot ugy, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek:

(i) $|V_1| = |V_2| = n$

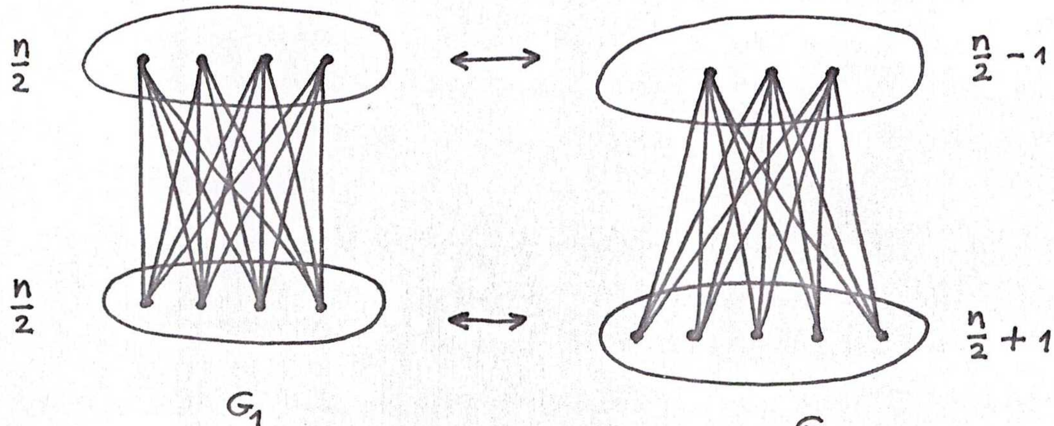
(ii) $G_1 \in \mathcal{H}am$, $G_2 \notin \mathcal{H}am$

(iii) $G_1 \cong_{m_1} G_2$ az elsőrendü játékban, ahol

$$m_1 = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor - 1 .$$

Legyen először n páros. Jelölje $B(i,j)$ az $i+j$ csucsu, egy i és egy j elemü független halmazból álló teljes páros gráfot.

Legyen
$$G_1 = B\left(\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{2}\right)$$
$$G_2 = B\left(\tfrac{n}{2}-1, \tfrac{n}{2}+1\right).$$



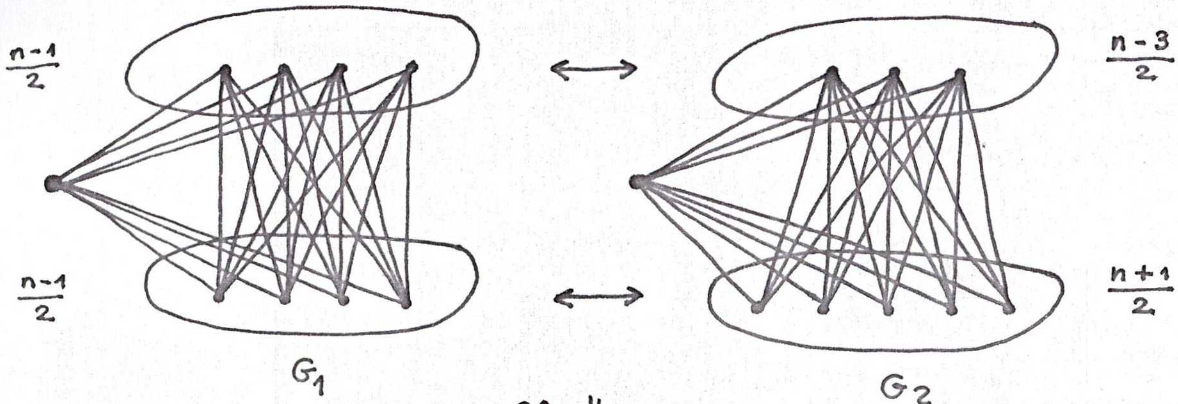
19. ábra.

Akkor nyilván $G_1 \in \mathcal{H}am$, másrészt $G_2 \notin \mathcal{H}am$, mert a Hamilton-kör csucsai felváltva tartalmaznának alsó és felső pontokat.

Be kell még látnunk, hogy a (iii) feltétel is teljesül. Ehhez megadjuk II. egy nyerőstratégiáját. II. az ábrán jelzett módon megfelelteti egymásnak G_1 és G_2 komponenseit. Ha I. az egyik gráf valamely komponenséből választ pontot, ugy II. a másik gráf ezen komponensnek megfelelő komponenséből választ pontot. /Ha I. már választott pontot választ ujra, akkor II. is ennek megfelelően ismétel./

Igy a játék során a két gráfban választott részgráf két izomorf teljes páros gráf lesz, egészen addig, amig II. folytatni tudja stratégiáját. Először akkor akadhat el, amikor a legkisebb komponens már megtelt. Igy $\frac{n}{2}-1$ fordulón át sikeresen követheti nyerőstratégiáját.

Ha n páratlan, tekintsük a 20. ábra gráfjait.



20. ábra.

Megint nyilván $G_1 \in \mathcal{H}am$, másrészt $G_2 \notin \mathcal{H}am$, mert ha G_2 tartalmazna Hamilton-kört, akkor $B(\frac{n-3}{2}, \frac{n+1}{2})$ tartalmazna Hamilton-utat, de tetszőleges ut csak eggyel több alsó csucsot tartalmazhat, mint felső csucsot.

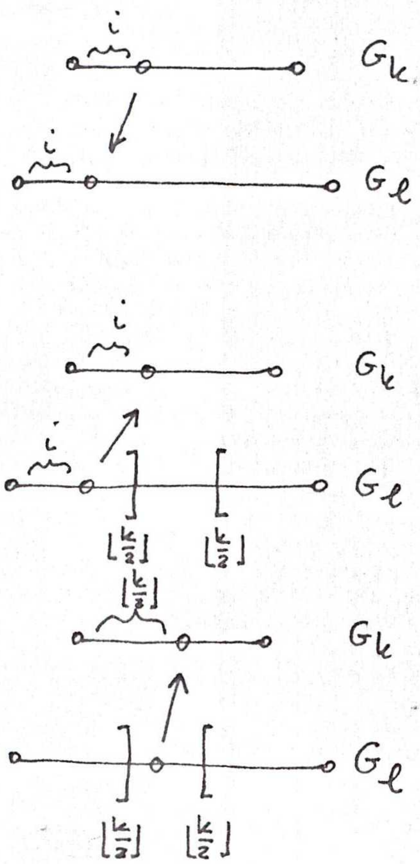
II. nyerőstratégiája csak annyiban módosul, hogy ha I. a kitüntetett csucsot választja az egyik gráfban, akkor II. a kitüntetett csucsot választja a másik gráfban. Igy itt II.-nek $\frac{n-3}{2}$ fordulón át van nyerőstratégiája.

3.1. <u>Következmény:</u> $K_n(\mathcal{M}atch) \geq \frac{n}{2}$, ha n páros. A fenti bizonyitás erre az esetre is alkalmazható. /Ha n páratlan, $K_n(\mathcal{M}atch) = 1$./

Ezután az összefüggőségre vonatkozó K_n mennyiséget vizsgáljuk. Előbb két lemmát igazolunk.

3.8. <u>Lemma:</u> legyen G_k k-hosszuságu, G_ℓ ℓ-hosszuságu lánc $(k < \ell)$, és tegyük fel, hogy az elsőrendü játék első két fordulójában a négy végpont lett kiválasztva. Akkor II.-nek további $\lfloor \log_2 k \rfloor - 2$ fordulón keresztül nyerőstratégiája van.

<u>Bizonyitás:</u> Megadjuk II. nyerőstratégiáját. Ha I. a G_k-ban választ pontot, legyen ennek a közelebbi végponttól vett



21. ábra.

távolsága i. Akkor II. a G_ℓ-ben az egyik végponttól i távolságra választ pontot. A keletkező két szakaszpár közül az egyik izomorf szakaszokból áll, a másikon a rövidebbik szakasz hossza is $\geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$, igy indukcióval az állitás igaz.

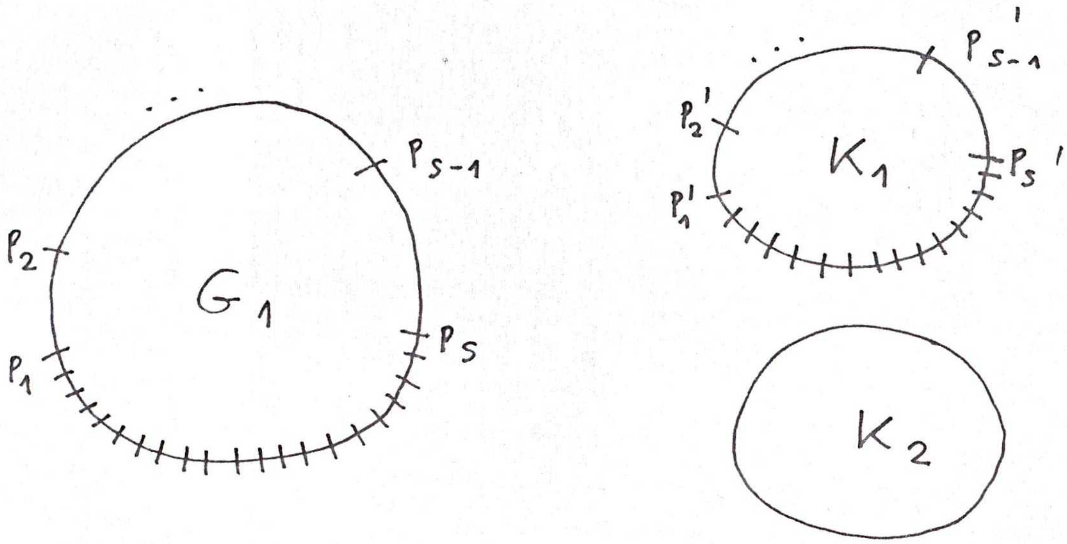
Ha I. a G_ℓ-ben választ pontot, és ez az egyik végponthoz $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$-nél közelebb van, II. a G_k-ban az egyik végponttól ugyanilyen távolságra választ pontot. A fentiek erre az esetre is vonatkoznak.

Ha I. a G_ℓ-ben a végpontoktól $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$-nél nagyobb távolságra választ pontot, akkor II. G_k /egyik/ középső pontját választja. A keletkező részszakaszok hossza $\geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, igy az indukciós feltevés megint alkalmazható. / ha $k = 8$, II.-nek 2 fordulón át van nyerőstratégiája./

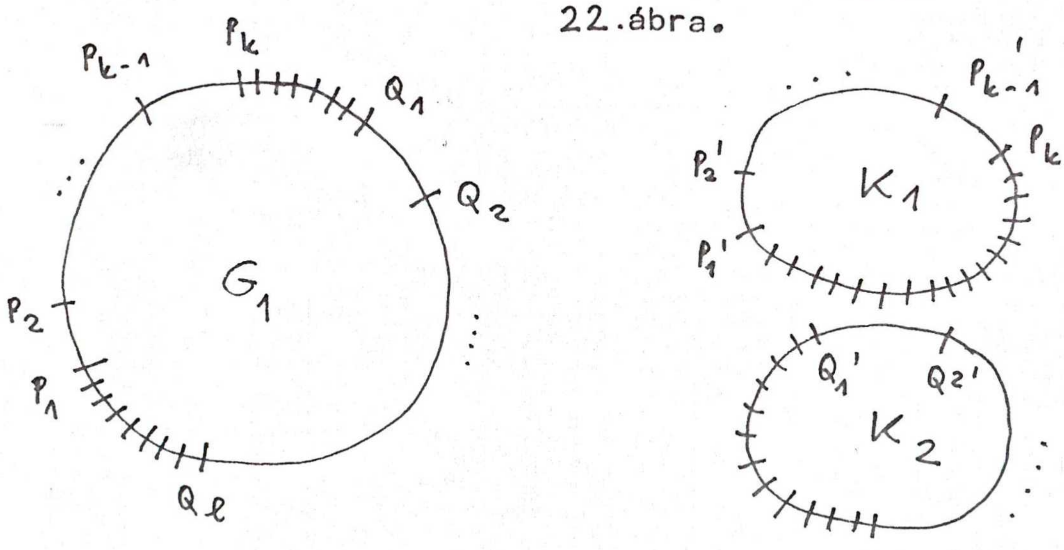
3.9. <u>Lemma</u>: legyen G_1 n hosszuságu kör, G_2 pedig két $\frac{n}{2}$ hosszuságu körből álló gráf. Akkor $G_1 \cong_m G_2$ az elsőrendü játékban, ahol $m = \lfloor \log_2 n \rfloor - 2$.

<u>Bizonyitás</u>: tekintsük a játék állását S lejátszott forduló után. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy a választott pontok különbözőek. A G_2 gráf két komponensét

K_1, K_2 -vel, a K_1-ben választott pontokat P_i'-vel, az ezeknek megfelelő G_1 -beli pontokat P_i-vel, a K_2-ben választott pontokat / ha vannak ilyenek/ Q_j'-vel, az ezeknek megfelelő G_1 -beli pontokat Q_j-vel jelöljük. A pontok indexe most nem a forduló sorszámának, hanem a körökön vett sorrendjüknek felel meg.



22.ábra.



23. ábra.

II stratégiájában először is arra törekszik, hogy / a 22., 23. ábráknak megfelelően/ az egymásnak megfelelő pontpárok sorrendje az egyes körökön megegyezzen, és ha G_2 mindkét komponensén vannak választott pontok, akkor ezek

G_1 -beli megfelelői külön köriveken helyezkedjenek el. Ezenkivül kitüntetett köriveket tart számon, ezek az ábra esetében / amikor G_2-ben csak K_1-beli pontok lettek kiválasztva/ egymásnak megfelelő pontok közti ivek, a ábr esetében / amikor K_1-ből és K_2-ből lettek kiválasztva pontok/ G_1 -ben a P_1Q_ℓ, P_kQ_1 , G_2 -ben a $P_1'P_k', Q_1'Q_\ell'$ ivek / ha pl. $k=2$, akkor a két $P_1'P_k'$ iv közül a hosszabb./

II a következő feltételek érvényben tartására törekszik: s lejátszott forduló után

1/ $P_iP_{i+1} \cong_{m_s} P_i'P_{i+1}' \quad (i=1,\dots,k-1)$

$Q_jQ_{j+1} \cong_{m_s} Q_j'Q_{j+1}' \quad (j=1,\dots,\ell-1)$

ahol $m_s = \lfloor \log_2 n \rfloor - s - 2$;

2/ a kitüntetett körivek hossza $\geq \lfloor \frac{n}{2^s} \rfloor$.

Tegyük fel, hogy s forduló után s feltételek teljesülnek. Az $s+1$. fordulóban I lehetséges lépései a következőek:

A/ I a $P_iP_{i+1}, P_i'P_{i+1}' \quad (i=1,\dots,k-1)$,

$Q_jQ_{j+1}, Q_j'Q_{j+1}' \quad (j=1,\dots,\ell-1)$

szakaszok valamelyikéről választ pontot ;

B/ I kitüntetett szakaszról választ pontot.

Az A/ esetben II a választott szakasznak megfelelő szakaszról az 1/ szerint létező nyerőstratégiájának megfelelően választ pontot, ekkor a pontok kivánt sorrendje, valamint az 1/,2/ feltételek továbbra is érvényben maradnak.

A B/ esetben további két aleset lehetséges.

B.1./ $\ell = 0$ /azaz G_2-ben csak K_1-beli pontok lettak kiválasztva, a 22. ábra esete/. Legyen a választott P pont G_1-beli, és legyen $d(P, P_1) \leq d(P_s, P)$, ahol d a megfelelő körívek hossza.

B.1.1./ $d(P, P_1) < \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor$. Ekkor II a K_1-beli kitüntetett köriven azt a P' pontot választja, melyre

$$d(P', P_1') = d(P, P_1)$$

és az uj kitüntetett körivek (P_s, P), illetve (P_s', P'). Ekkor $(P, P_1) \cong (P', P_1')$ / a két iv izomorf/, és

$$\min\left(d(P_s, P), d(P_s', P')\right) \geq \left\lfloor \frac{n}{2^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor$$

miatt 1/ és 2/ továbbra is érvényben marad.

B.1.2./ $d(P, P_1) \geq \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor$. Ekkor II a K_1-beli kitüntetett körív P' felezőpontját választja, és az uj kitüntetett körivek (P_s, P), illetve (P_s', P'). Most

$$\min\left(d(P, P_1), d(P', P_1'), d(P_s, P), d(P_s', P')\right) \geq \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor$$

igy egyrészt teljesül s 2/ feltétel, másrészt a 3.8. lemmából az 1/ feltétel is teljesül.

Ha a választott pont K_1-beli, hasonlóan járhatunk el.

B.2./ $\ell \neq 0$. Ekkor a fentiekhez hasonlóan járhatunk el, azzal a kiegészitéssel, hogy ha a választott pont G_1-beli, akkor II pontosan akkor választ K_1-beli pontot, ha P a kitüntetett körív P_i $(i=1, k)$ végpontjához van közelebb.

Megjegyezzük, hogy az <u>első</u> K_2-beli pont választásakor a stratégia szerint II G_1-ben a P_1P_s kitüntetett körív Q felezőpontjával válaszol, ekkor a G_1-ben keletkező két uj kitüntetett körivre

$$\min\left(d(P_s,Q),\ d(Q,P_1)\right) \geq \left\lfloor \frac{n}{2^{s+1}} \right\rfloor ,$$

azaz a 2/ feltétel továbbra is teljesülni fog. Ezenkivül az első két forduló után nyilván teljesülnek a feltételek.

Innen $s=\lfloor \log_2 n\rfloor - 2$ választással kapjuk a lemma állitását.

Ezután kimondhatjuk Pósa [14] tételét, melyet ő a Fraissé-Ehrenfeucht-játékoktól különböző módszerrel bizonyitott.

3.3. Tétel:/Pósa [14] /: $\lfloor \log_2 n\rfloor - 1 \leq K_n(\ddot{O}f) \leq 3\lceil \log_2(n-1)\rceil + 2$.

Bizonyitás: a második egyenlőtlenséget a 3.3. Lemma igazolja.

Az első egyenlőtlenség a 3.2. Tétel bizonyitásánál használt gondolatmenettel következik a 3.9. Lemmából.

Megjegyezzük, hogy a 3.3. Tétel felső becslése sz alábbi, kicsit erősebb formában is igaz.

3.2. Következmény: $K_n(\ddot{O}f) \leq \frac{5}{2}\lceil \log_2(n-1)\rceil + 2$

Bizonyitás: a 3.3. Lemma bizonyitásában $\Psi_\ell(x_1,x_2)$ azt jelentette hogy x_1 és x_2 legfeljebb 2^ℓ hosszuságu uttal összeköthetők. Jelölje $\Psi_\ell^{(s)}(x_1,x_2)$ azt a formulát , mely pontosan akkor igaz, ha x_1 és x_2 legfeljebb s^ℓ hosszuságu uttal köthetők össze. Akkor

$$\Psi_{\ell+1}^{(s)}(x_1,x_2) = \exists x_3 \ldots x_{s+1} \forall x_{s+2} x_{s+3} \left[\left((x_{s+2}=x_1 \wedge x_{s+3}=x_3) \vee \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \vee\ (x_{s+2}=x_{s+1} \wedge x_{s+3}=x_2)\right) \rightarrow \Psi_\ell^{(s)}(x_{s+2},x_{s+3})\right] .$$

Innen a kvantorok számát Kv -vel jelölve $Kv_{\ell+1} = Kv_\ell + (s+1)$, azaz tetszőleges n -re $\lceil \log_s(n-1)\rceil(s+1)+2$ kvantorra van szükség az összefüggőség leirásához. A fenti állitás $s=4$ -re adódik.

A következőkben a bevezetésben emlitett tartalmazási relációkról látjuk, be, hogy valódiak, a 3.4-6. Tételek egy-egy ellenpéldáje segitségével. Itt jegyezzük meg, hogy $\mathit{Match} \in \mathcal{S}_e$ nyilván igaz, $\mathit{Ham} \in \mathcal{S}$ a 3.1. Lemmából, $\ddot{O}f \in \mathcal{M}$ a 3.6. Tétel következményéből, és $\mathit{Aut} \in \mathcal{D}$ a 2.4. Tételt követő megjegyzésből. Az $\mathcal{M}_e \subseteq \mathcal{S}_e$, $\mathcal{M}_e \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ tartalmazási relációk a definiciók nyilvánvaló következményei. Igy a továbbiakban csak a negativ jellegü állitások igazolásával foglalkozunk.

3.4.<u>Tétel</u>: $\mathit{Ham} \notin \mathcal{M}$.

<u>Bizonyitás</u>: tegyük fel, hogy a Φ monadikus másodrendü formula definiálja a Hamilton-kört tartalmazó gráfok osztályát és

legyen Φ kvantorainak száma n. Legyen G_1 és G_2 két gráf, melyekre

(1) $G_1 \in \mathcal{Ham}$ $\quad (\Leftrightarrow G_1 \models \Phi)$

(2) $G_2 \notin \mathcal{Ham}$ $\quad (\Leftrightarrow G_2 \not\models \Phi)$

és (3) $G_1 \cong_n G_2$ a <u>monadikus másodrendü</u> játékban. Akkor az ekvivalenciából

$$G_1 \models \Phi \Leftrightarrow G_2 \models \Phi$$

azaz ellentmondásra jutottunk. Igy a tételt beláttuk, ha meg tudunk adni az (1)-(3) feltételeknek eleget tevő G_1, G_2 gráfokat.

A 3.7. Lemma monadikus játékra vonatkozó változatában az n-edrendü ekvivalenciaosztályok számára

$$r = {\underbrace{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n}}^{\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} 2^{\binom{i}{2}}(2^{i})^{n-m}\, i!\, S(m,i)\right)}$$

alakban kapunk felső becslést. Tekintsük a $C_1, C_2, \dots, C_{r+1}$ gráfokat, ahol C_i teljes gráf. A 3.7. Lemma szerint ezek közt van két ekvivalens, azaz $C_i \cong_n C_j$ a monadikus másodrendü játékban.

Legyen $G_1 = (C_i, C_i)$, $G_2 = (C_i, C_j)$, azaz mindkettő két diszjunkt teljes gráfból álló gráf. Akkor $G_1 \cong_n G_2$, hiszen megadhatjuk II. egy nyerőstratégiáját: G_1 egyik komponensének G_2 C_i-komponensét, G_1 másik komponensének G_2 C_j-komponensét felelteti meg, és a két gráfpáron külön-külön játszik, a (C_i, C_j) páron tudjuk, hogy van nyerőstratégiája, a (C_i, C_i) páron pedig a nyilvánvaló nyerőstratégiát alkalmazhatja.

Ha $G_1 \cong_n G_2$, akkor $\overline{G_1} \cong_n \overline{G_2}$. Ez általában igaz a monadikus másodrendü játékra, hiszen komplementerképzéssel az n-edik forduló után adódó gráfok izomorfizmusa nem változik. /A gyenge diadikus játékra nem igaz, hogy $G_1 \cong_n G_2 \longrightarrow \overline{G_1} \cong_n \overline{G_2}$ - ezt éppen az itt használt két gráf mutatja./

De $\overline{G_1} = B(i,i)$, $\overline{G_2} = B(i,j)$, ahol B teljes páros gráfot jelöl.

A 3.2.tétel bizonyitásánál láttuk, hogy $\overline{G_1} \in \mathit{Ham}$, $\overline{G_2} \notin \mathit{Ham}$. Azaz a $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ gráfok eleget tesznek az (1)-(3) feltételeknek.

3.3 Következmény: $\mathit{Match} \notin \mathcal{M}$.

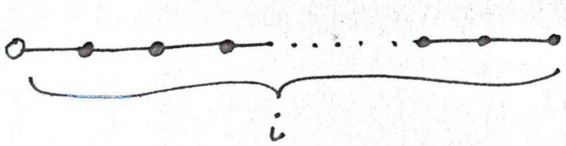
Bizonyitás: a fenti gondolatmenet itt is alkalmazható.

3.5. Tétel: $\mathit{Aut} \notin \mathcal{S}$.

Bizonyitás: tegyük fel, hogy Φ gyenge diadikus másodrendü formula, mely az Aut osztályt definiálja, és Φ kvantorainak száma n. Akkor a 3.4. Tétel bizonyitásának gondolatmenetét használva ellentmondásra jutunk, ha meg tudunk adni olyan G_1, G_2 gráfokat, melyekre $G_1 \in \mathit{Aut}$, $G_2 \notin \mathit{Aut}$, és $G_1 \cong_n G_2$ a gyenge diadikus játékban.

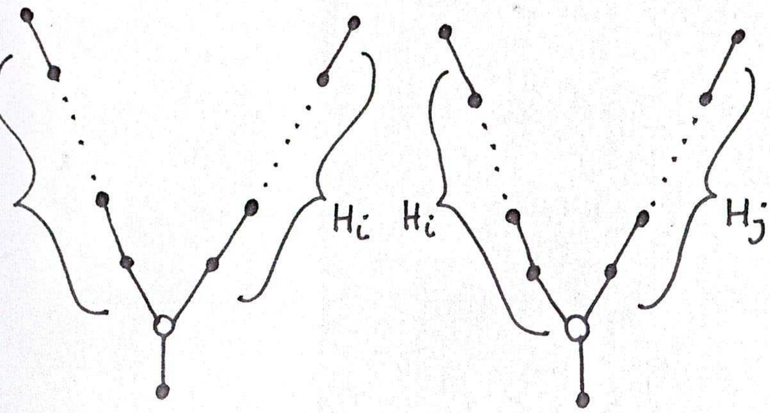
A 3.7. Lemma érvényes marad akkor is, ha a Fraissé--Ehrenfeucht játékot nem gráfokon, hanem szinezett gráfokon definiáljuk. Ha olyan gráfokat tekintünk, melyek csucsait 2 szinnel szinezhetjük, $F(n)$ csak annyiban változik, hogy a kitevőben egy ujabb 2^i szorzó lép fel.

Legyen H_i az 24. ábrán látható szinezett gráf.



24. ábra

Tekintsük a $H_1, \dots, H_{F(n)+1}$ szinezett gráfokat, ezek közt a 3.7. Lemma szerint van két ekvivalens: $H_i \cong_n H_j$ a gyenge diadikus játékban.



25. ábra

Legyen G_1' és G_2' a 25. ábrán látható két szinezett gráf.

Akkor belátható, hogy $G_1' \cong_n G_2'$ a gyenge diadikus játékban. II. nyerőstratégiája a következő: a két gráf bal és jobb szárát megfelelteti egymásnak és a két páron különkülön játszik, a (H_i, H_j)-n létező nyerőstratégiának, illetve a (H_i, H_i)-n létező természetes stratégiának megfelelően. /A gráfok szinezése biztositja, hogy a két stratégia konzisztens, a kitüntetett csucsra mindkét láncon ugyanaza a válasz./ A szinezést elhagyva, G_1'-ből és G_2'-ből a G_1, G_2 gráfokat kapjuk. Nyilván ekkor is $G_1 \cong_n G_2$ a gyenge diadikus játékban. Továbbá $G_1 \in \mathcal{A}ut$, hiszen a "függőleges tengelyre való tükrözés" automorfizmusa. Végül $G_2 \notin \mathcal{A}ut$, hiszen egy automorfizmusnál a harmadfoku pont kell, hogy maradjon, és a két lánc nem cserélhet helyet, hiszen $i \neq j$. Ezzel a tétel állitását igazoltuk. Megjegyezzük még, hogy a gyenge diadikusságra azért van szükség, hogy II. nyerőstratégiája megadható legyen a két szár-páron létező nyerőstratégia alapján.

Az alábbi tétel bizonyitása Lovász [13] monadikus esetre adott bizonyitásának alkalmazása a gyenge diadikus esetre.

3.6.Tétel: $\mathcal{H}am \notin \mathcal{S}_e$.

Bizonyitás: tegyük fel, hogy a Φ egzisztenciális, gyenge diadikus formula definiálja a $\mathcal{H}am$ osztályt, és legyen

$$\Phi = \exists R_1 \dots \exists R_k \ \Psi$$

alaku, ahol $R_{s_1}, \dots, R_{s_\ell}$ egyváltozós, $R_{t_1}, \dots, R_{t_{k-\ell}}$ kétváltozós relációk, Ψ pedig elsőrendü formula. Tekintsük a $G_1^1, G_2^1, \dots$ gráfsorozatot, ahol G_i^1 i-hosszuságu kör, azaz $G_i^1 \models \Phi$.

Legyen H_i^1 az az $(R, R_1, \dots, R_k)$ tipusu struktura, melyet G_i^1-ből a Φ-t kielégitő valamely $R_1, \dots, R_k$ relációk hozzávételével kapunk.

26.ábra.

Tekintsük G_i^1 egy j hosszuságu ivét. Ez az iv a csucsoknak az $R_1, \dots, R_k$ relációkhoz való viszonyát tekintve legfeljebb

$$(2^j)^\ell (2^{j+1})^{k-\ell} \leq 2^{k(j+1)}$$

féle lehet. Az i hosszuságu körön felvehetünk $\left\lfloor \frac{i}{j+2} \right\rfloor$ db diszjunkt j hosszuságu ivet, ezek között tehát lesz legalább

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{i}{j+2} \right\rfloor \frac{1}{2^{k(j+1)}} \right\rfloor$$

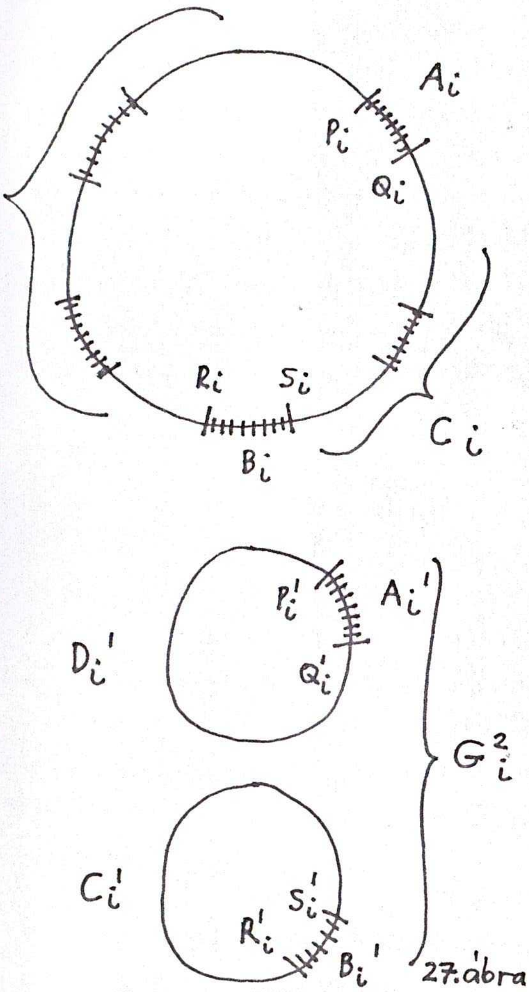
db /az $R, R_1, \dots, R_k$ relációk szempontjából/ izomorf iv.

Legyen

$$j = \left\lfloor \frac{1}{4k} \log_2 i \right\rfloor$$

ekkor elég nagy i-re az izomorf ivek száma $> i^{1/2}$.

Tekintsük ezeket az izomorf iveket /ld. 27. ábra/ Válasszunk ezek közül kettőt, melyek között mindkét keletkező félköriven található egy izomorf iv /az ábrán A_i, B_i /. Az A_i, B_i választása után a körön keletkező 4 ívet jelöljük A_i, B_i, C_i, D_i -vel. <u>Képezzük a 27. ábrán látható G_i^2 gráfot.</u> C_i és D_i egyaránt $\geq \left\lfloor \frac{1}{4k} \log_2 i \right\rfloor$ hosszuságu ivek. Értelmezzük G_i^2 -n az $R_1, \dots, R_k$ relációkat ugy, hogy A_i és $A_i', \dots,$ D_i és D_i' ezen relációkra vonatkozóan is izomorfak legyenek. Feltételezésünk szerint



27.ábra.

$$G_i^2 \not\models \Phi \quad \text{azaz}$$

$$\forall R_1 \dots \forall R_k : G_i^2 \not\models \neg\Psi .$$

Jelöljük az $R_1, \dots, R_k$ relációkkal kibővitett G_i^1, G_i^2 gráfokat H_i^1-vel, illetve H_i^2-vel. Akkor

$$\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}{}_{\mathcal{U}} \; H_i^1 \models \Psi$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}{}_{\mathcal{U}} \; H_i^2 \models \neg\Psi$$

Ha tehát igazoljuk, hogy $\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}{}_{\mathcal{U}} H_i^1 \cong \mathop{\times}_{i=1}^{\infty}{}_{\mathcal{U}} H_i^2$, akkor ellentmondásra jutottunk.

/Mind G_i^1 -n, mind G_i^2 -n igaz a

$$\forall x_1 \exists x_2 x_3 \Big[(x_2 \neq x_3) \wedge R(x_1, x_2) \wedge R(x_1, x_3) \wedge \forall x_4 \big(R(x_1, x_4) \to (x_4 = x_2 \vee x_4 = x_3)$$

formula, azaz mindkét ultraszorzat mindkét irányban végtelen utakból áll./

Az alábbiakban $\overset{\infty}{\underset{i=1}{X_u}} H_i^1$ -et S^1 -gyel, $\overset{\infty}{\underset{i=1}{X_u}} H_i^2$-t S^2 -vel jelöljük.

Legyen $v^1 \in S^1$, és

$$d_i(v^1) = \min(d(v_i^1, P_i), d(v_i^1, Q_i), d(v_i^1, R_i), d(v_i^1, S_i))$$

ahol d a gráfon vett távolságot jelenti. Legyen

$$V_1^1 = \{v^1 \in S^1 : \forall m \in \mathbb{N} : \{i : d_i(v^1) = m\} \notin \mathcal{U}\}$$

$$V_2^1 = \{v^1 \in S^1 : \exists m \in \mathbb{N} : \{i : d_i(v^1) = m\} \in \mathcal{U}\} .$$

Ha $v^1 \in V_2^1$, akkor az $A_i, \dots, D_i$ ivek hosszának végtelenhez tartása miatt az $\{i : d(v_i^1, P_i) = m\}, \dots, \{i : d(v_i^1, S_i) = m\}$ halmazok közül pontosan egy $\mathcal{U}$ -beli, eszerint particionálva V_2^1 -t kapjuk a $V_{2,P}^1, \dots, V_{2,S}^1$ halmazokat.

Hasonlóan definiáljuk a $V_1^2, V_{2,P}^2, \dots, V_{2,S}^2$ halmazokat.

A csucsokat tehát aszerint particionáltuk, hogy minden m -re "majdnem minden" / $\mathcal{U}$ -beli/ indexhalmazon "kritikus" csucstól m -nél távolabb vannak-e, vagy ha nem , az adott m_0 -ra mely "tipusu" csucstól vannak "majdnem minden" i -re m_0 távolságra.

Továbbá legyen $v^1 \in S^1$-re $I_A(v^1) = \{i : v_i^1 \in A_i\}, \dots ,$ $I_D(v^1) = \{i : v_i^1 \in D_i\}$. Megint ezen halmazok közül pontosan egy lesz $\mathcal{U}$ -beli. Legyen

$$V_A^1 = \{v^1 \in S^1 : I_A(v^1) \in \mathcal{U}\}$$

$$\vdots$$

$$V_D^1 = \{v^1 \in S^1 : I_D(v^1) \in \mathcal{U}\} .$$

Hasonlóan kapjuk a $V_A^2, \dots, V_D^2$ halmazokat.

Azaz a csucsokat most aszerint particionáltuk, hogy majdnem minden m -re milyen tipusu körivhez tartozó csucsot tartalmaznak.

Legyen f az a G_i^1 és G_i^2 közti bijekció, mely A_i és A_i' ,...., D_i és D_i' között izomorfizmus. Ez S^1 és S^2 között egy F bijekciót határoz meg.

Belátható, hogy a V_1^1 , V_2^1 halmazok S^1 végtelen utjainak egy particióját adják. Valóban, mert pl. ha $v^1 \in V_1^1$ és w^1 -re

$$(v^1, w^1) \in E(\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}{}_{\mathcal{U}} G_i^1),$$

akkor $\{i : |d_i(v^1) - d_i(w^1)| \leq 1\} \in \mathcal{U}$ alapján $w^1 \in V_1^1$ is következik. Hasonlóan látható be az állitás V_2^1 -re, valamint a V_1^2, V_2^2 halmazokra is.

Igy elég igazolnunk hogy a két ultraszorzat a V_1^1, V_1^2, illetve a V_2^1, V_2^2 halmazokra megszoritva izomorf.

A V_1^1, V_1^2 halmazok között F izomorfizmus, hiszen ha $v^1 = (v_1^1, v_2^1, ..) \in V_1^1$, akkor a v^1 -et tartalmazó uton minden m-re v^1 m sugaru környezete v_i^1 G_i^1-beli szomszédainak szorzatából áll, és ezek az m hosszuságu ivek $F(v^1)$-re is ugyanazok / mivel $v^1 \in V_1^1$, $A_i, \ldots, D_i$ hossza $\to \infty$, és G_i^1, G_i^2 megfelelő ivei izomorfak /.

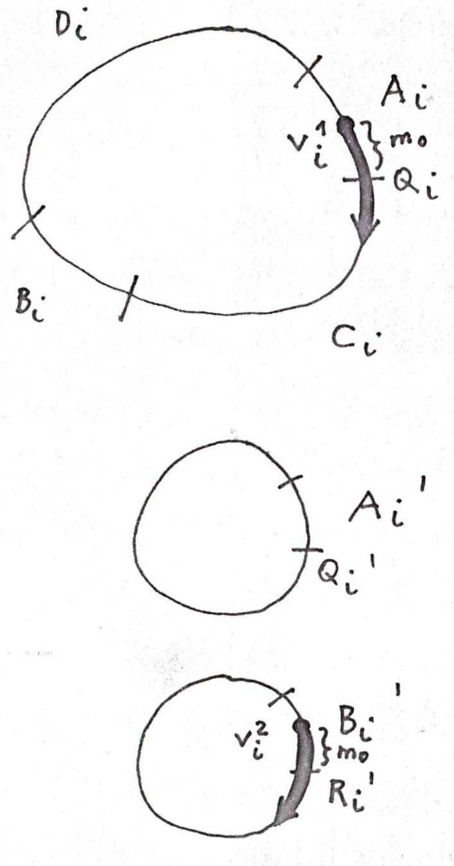
Legyen ezután $v^1 \in V_2^1$. Tegyük fel, hogy

$$v^1 \in V_{2,P}^1 \cap V_A^1 .$$

Ekkor a v^1 -en áthaladó ut első m_0 hosszuságu szakaszán v_i^1 A_i-beli szomszédainak szorzata, majd ezután D_i -beli szomszédainak szorzata következik, az ut másik irányában pedig az A_i -beli szomszédok szorzata. Igy F ezen uthoz is vele izomorfat rendel.

Hasonló állitás igaz a $v^1 \in V_{2,P}^1 \cap V_D^1$ esetben, és ugyanilyen meggondolással a $v^1 \in V^1_{2,S}$ esetben is.

Nézzük most a $v^1 \in V^1_{2,Q} \cap V^1_A$ esetet. Ekkor a v^1-en áthaladó ut az egyik irányban m_0 szakaszon v^1_i A_i-beli szomszédainak szorzatát, majd ezután v^1_i C_i-beli szomszédainak szorzatát, a másik irányban pedig az A_i-beli szomszédok szorzatát tartalmazza. Legyen $v^2 = (v^2_1, v^2_2, \dots)$, ahol v^2_i a G^2_i gráf B'_i ivének R'_i-től m_0 távolságra levő pontja. Akkor a v^1-t és v^2-t tartalmazó végtelen utak a fentiek szerint izomorfak, továbbá ez a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmüen felelteti meg egymásnak a $V^1_{2,Q} \cap V^1_A$ -beli, illetve $V^2_{2,R} \cap V^2_B$ -beli elemet tartalmazó utakat.



28.ábra.

A hátralevő $v^1 \in V^1_{2,Q} \cap V^1_D$, $v^1 \in V^1_{2,}$ esetekben a fentihez hasonló módon adható meg a megfeleltetés, igy végül S^1 és S^2 izomorfizmusa adódik.

3.4. Következmény: $\ddot{O}f \in \mathcal{M} - S_e$

Bizonyitás: az $\ddot{O}f \notin S_e$ állitás igazolására a fenti bizonyitás alkalmazható. Másrészt

$$G \in \ddot{O}f \Leftrightarrow \forall H\big(((\exists x_1 H(x_1)) \wedge (\exists x_1 \neg H(x_1)) \rightarrow \exists x_1 x_2 \big(H(x_1) \wedge \neg H(x_2) \wedge R(x_1, x_2)\big)$$

ami az $\ddot{O}f \in \mathcal{M}$ állitást igazolja.

Ezzel a fejezet elején emlitett tartalmazási relációkat beláttuk.

A környezetfüggetlen nyelvek egy logikai jellemzése

Az alábbiakban arra törekszünk, hogy a reguláris nyelvek Büchi-féle jellemzéséhez hasonló jellemzést adjunk a környezetfüggetlen nyelvek osztályára. A monadikus másodrendü formuláknál bővebb formulaosztályt kell megadnunk, a diadikus másodrendü formulák osztálya viszont már tul bő: belátható, hogy az $\{a^n b^n c^n\}$ nyelv, mely nem környezetfüggetlen, definiálható diadikus másodrendü formulával. Várható, hogy a keresett formulaosztály csupán valamilyen értelemben egzisztenciális formulákat tartalmaz, hiszen tetszőleges kvantorszerkezet esetén a környezetfüggetlen nyelvek komplementer képzésre való zártságára következtethetnénk /ami nem teljesül/.

Legyen $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ ábécé, $\omega = x_1 \dots x_k \in \Sigma^*$.

Ekkor ω -t véges rendezett halmaznak tekinthetjük, melynek elemein adva van egy legfeljebb s -elemü partició, azaz ω -nak megfeleltethetünk egy

$$S_\omega = \{(1, \dots, k), \leq, H_1, \dots, H_s\}$$

strukturát, ahol $H_i \cap H_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, és $(1, \dots, k) = \bigcup_{i=1}^{s} H_i$.

Ezután nem teszünk különbséget ω és S_ω között. Az alábbiakban a $(\leq, H_1, \dots, H_s)$ nyelvet rögzitettnek tekintjük, és az $\omega \models \Phi$ jelölést a szokásos értelemben használjuk. Legyen továbbá

$$L_\Phi = \{\omega : \omega \in \Sigma^*, \omega \models \Phi\}$$

a Φ formula által definiált nyelv.

Olyan $\mathcal{F} = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ formulaosztályt keresünk, melyre teljesül a következő: minden $\Phi_i \in \mathcal{F}$ -re L_{Φ_i} környezetfüggetlen, és minden L környezetfüggetlen nyelvhez van olyan $\Phi_i \in \mathcal{F}$, hogy $L = L_{\Phi_i}$.

•

3.4.Definició: legyen $(H, \leq)$ véges rendezett halmaz. Az R H-n értelmezett szimmetrikus kétváltozós reláció nem-keresztező̋dő,ha nincs olyan $x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4$, hogy $R(x_1, x_3)$ és $R(x_2, x_4)$ teljesül. Az R maximális nem-keresztező̋dő reláció, ha nincs olyan $R' \supsetneq R$ reláció, melyre R' nem-kereszteződő.

A következő definicióban az eddig használt gyenge diadikus formula fogalmát általánositjuk több relációjelet is tartalmazó nyelv esetére.

3.5.Definició: legyen $(R, P_1, \dots, P_{s+1})$ nyelv, ahol R kétváltozós reláció, $P_1, \dots, P_{s+1}$ pedig tetszőleges változószámu relációk. Egy Φ diadikus másodrendü-formula R-re gyengén diadikus, ha a változóként szereplő kétváltozós relációkat R részrelációira szoritjuk meg, azaz az ezekhez tartozó kvantorok

$$\exists R_i \, (\forall x, y \, (R_i(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \dots)$$

illetve

$$\forall R_i \, (\forall x, y \, (R_i(x, y) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow \dots)$$

alakuak.

Esetünkben $(P_1, \dots, P_{s+1}) = (\leq, H_1, \dots, H_s)$.

/A továbbiakban kétváltozós reláció alatt mindig szimmetrikus relációt értünk, és az erre vonatkozó megszoritást a formulákban külön nem tüntetjük fel. Az állitások ezen megszoritás nélkül is változatlanok maradnak, csak a jelölések válnak körülményesebbé./

3.6.Definició: egy Φ diadikus másodrendü formula nem-kereszteződő egzisztenciális formula, ha ./.

$$\exists R(\Psi_0 \wedge \Psi_1)$$

alaku, ahol Ψ_0 rögzitett elsőrendü formula, mely azt fejezi ki, hogy R nem-kereszteződő reláció, Ψ_1 pedig tetszőleges R -re gyengén diadikus formula az $(R, \leq, H_1, \dots, H_s)$ nyelven.

A Ψ_0 formulát konkrétan is megadjuk:

$$\Psi_0 = \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \; \neg((x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4) \wedge R(x_1, x_3) \wedge R(x_2, x_4)) \; .$$

3.7. Tétel: egy L nyelv akkor és csak akkor környezetfüggetlen, ha nem-kereszteződő egzisztenciális formulával definiálható.

Az állitás bizonyitása előtt egy megjegyzést teszünk a nem-kereszteződő relációkkal kapcsolatban, és definiáljuk a Fraissé-Ehrenfeucht-játéknak a bizonyitásban használt változatát.

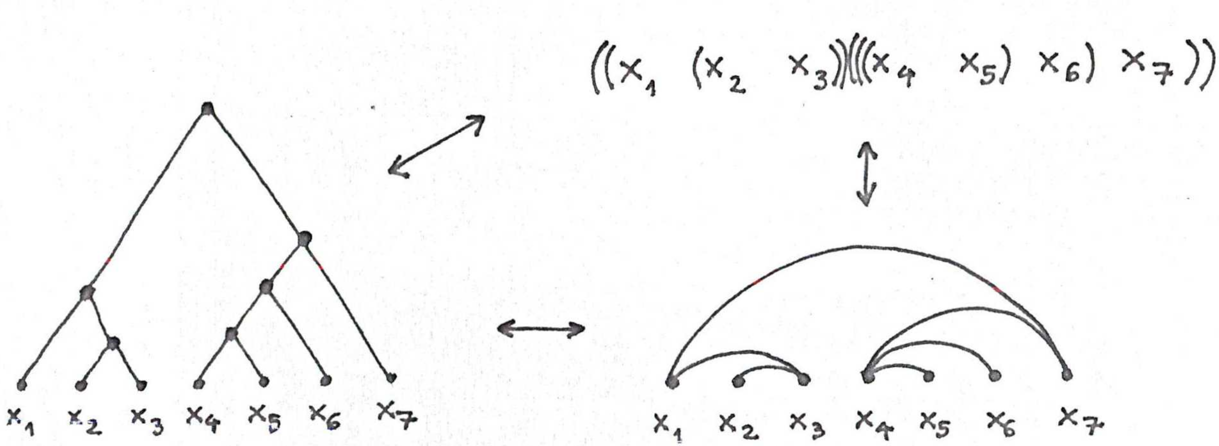
Legyen $\omega = x_1 \dots x_k$. A továbbiakban felhasználjuk, hogy temmészetes módon kölcsönösen egyértelmü megfeleltetés létesithető a következő objektumok között:

a; bináris rendezett fák az $x_1 \dots x_k$ levelekkel

b; ω teljes zárójelezései

c; maximális nem-kereszteződő relációk ω -n.

Ezt az alábbi ábra szemlélteti: $\omega = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$.



2.9. ábra

Ezen megfeleltetéseket nem formalizáljuk, csak c_i-t illetően jegyezzük meg, hogy az $\omega = x_1 \ldots x_k$ szóra, ha R maximális nem kereszteződő reláció, akkor nyilván $R(1, k)$ fennáll, és az

$$\ell = \max(\{i : R(1, i) \wedge i \neq k\} \cup \{1\})$$

$$m = \min(\{j : R(j, k) \wedge j \neq 1\} \cup \{k\})$$

jelölésekkel $m = \ell + 1$ teljesül.

Hasonló megfeleltetés létesithető az ω szóra épitett bináris erdők és az ω-n értelmezett nem-kereszteződő relációk között.

A Fraissé-Ehrenfeucht-játék most használandó változata a következő: a játék az $A_1 = (\omega_1, R_1)$, $A_2 = (\omega_2, R_2)$ strukturákon folyik, ahol $\omega_i \in \Sigma^*$, R_i pedig nem-kereszteződő reláció ω_i-n $(i = 1, 2)$. A játék lehetséges lépései: az S_{ω_i} struktura egy elemének, elemei egy részhalmazának, és R_i egy részrelációjának választása. Ezenkivül azt a megszoritást tesszük, hogy ha az I. játékos az A_i strukturában a maximális /minimális/ elemet választja, akkor a II. játékos köteles az A_{3-i} strukturában is a maximális /minimális/ elemet választani. Az n-edik forduló után II. akkor nyer, ha a választott ponthalmazok az ω_i-n adott $R_i, \leq, H_1, \ldots, H_s$ relációkkal és az ujonnan választott relációkkal együtt izomorfak. Az n-edrendü ekvivalenciát most erre a játékra vonatkoztatva használjuk. A 3.5., 3.7. lemmák megfelelői az értelemszerü módositásokkal itt is érvényesek.

/Megjegyezzük, hogy fenti megszoritás - legfeljebb - az utolsó fordulóban jelent tényleges megszoritást. A "szinezett struktura" terminológiát is használhattuk volna, de ez most elbonyolitaná a meggondolásokat./

Ezután az n-edrendű ekvivalenciára vonatkozó "additivitási" lemmát igazolunk.

3.10.Lemma: legyen $A_1=(\omega_1,R_1)$, $A_2=(\omega_2,R_2)$, ahol $\omega_i\in\Sigma^*$, R_i pedig nem-kereszteződő reláció ω_i - n , $\omega_1=x_1\ldots x_\ell$, $\omega_2=x_1'\ldots x_{\ell'}'$, $\omega_1=\omega_3\omega_4$, $\omega_2=\omega_5\omega_6$ és tegyük fel, hogy

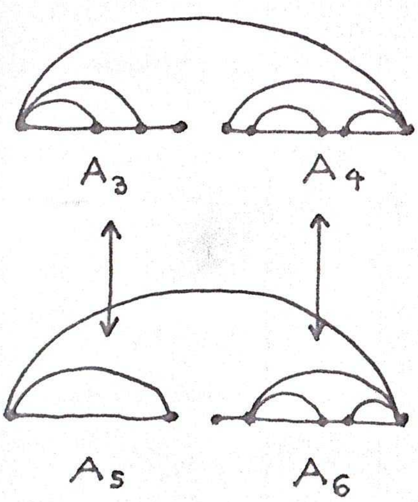
(i) $i\in\omega_3$, $j\in\omega_4\to((i=1$ és $j=\ell)$ vagy $\neg R_1(i,j))$

(ii) $i\in\omega_5$, $j\in\omega_6\to((i=1$ és $j=\ell')$ vagy $\neg R_2(i,j))$

(iii) $R_1(1,\ell)\longleftrightarrow R_2(1,\ell')$,

valamint az $A_3=A_1/\omega_3$, $A_4=A_1/\omega_4$, $A_5=A_2/\omega_5$, $A_6=A_2/\omega_6$ jelölésekkel $A_3\cong_n A_5$, $A_4\cong_n A_6$ teljesül. Akkor $A_1\cong_n A_2$.

Bizonyitás: a II. játékos nyerőstratégiája a szokásos módon az (A_3,A_5), (A_4,A_6) párokon adott nyerőstratégiák kombinációjával adódik. Feltételeink szerint - az esetleg létező $(1,\ell)$, $(1,\ell')$ élektől eltekintve - a játékosok által választható kétváltozós relációk nem tartalmazhatnak A_3, A_4 illetve A_5, A_6 közötti éleket. A játék definiciójában a végpontokra tett megszoritás és a lemma (iii) feltétele miatt az $(1,\ell)$, $(1,\ell')$ élek választása sem okoz ellentmondást.



30. ábra.

3.7.Tétel bizonyitása: a; először azt látjuk be, hogy ha L környezetfüggetlen, akkor $L=L_\Phi$, ahol Φ nem-kereszteződő egzisztenciális formula. Feltehetjük, hogy L Chomsky-féle normálalaku nyelvtannal van adva, azaz $L=L(G)$, $G=(V_N,V_T,Y_1,F)$, $V_N=(Y_1,\ldots,Y_m)$,

$V_T = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\} = \Sigma$, az F szabályok pedig $Y_i \to Y_j Y_k$, $Y_i \to \sigma_j$ alakuak.

A bizonyitás a levezetési fák nem-kereszteződő relációként való kódolásán alapul.

Legyen az $Y_i \to Y_j Y_k$ szabályra

$$\varphi_{jk}(x_1, x_2) = \exists x_3 \left((x_1 \leq x_3 < x_2) \wedge R_j(x_1, x_3) \wedge R_k(x_3', x_2) \right) ,$$

$$\varphi_0 = \forall x_1, x_2 \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \neg \left(R_i(x_1, x_2) \wedge R_j(x_1, x_2) \right)$$

/Itt x_3' az x_3 rákövetkezője, ez a $\leq$ relációval megfogalmazható, de nem irjuk ki részletesen./

Legyen

$$\Psi_2 = \forall x_1, x_2 \left((x_1 = \min \wedge x_2 = \max) \to R_1(x_1, x_2) \right) \wedge \varphi_0 \wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n} \forall x_1, x_2 \left((R_i(x_1, x_2) \wedge (x_1 < x_2)) \to \bigvee_{(j,k) \in I_i} \varphi_{jk}(x_1, x_2) \right) \wedge$$
$$\wedge \; \forall x_1 \left(\bigvee_{i=1}^{n} R_i(x_1, x_1) \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \forall x_1 \left(R_i(x_1, x_1) \to \bigvee_{j \in I_i'} H_j(x_1) \right)$$

ahol $I_i = \{(j,k) : Y_i \to Y_j Y_k \in F\}$

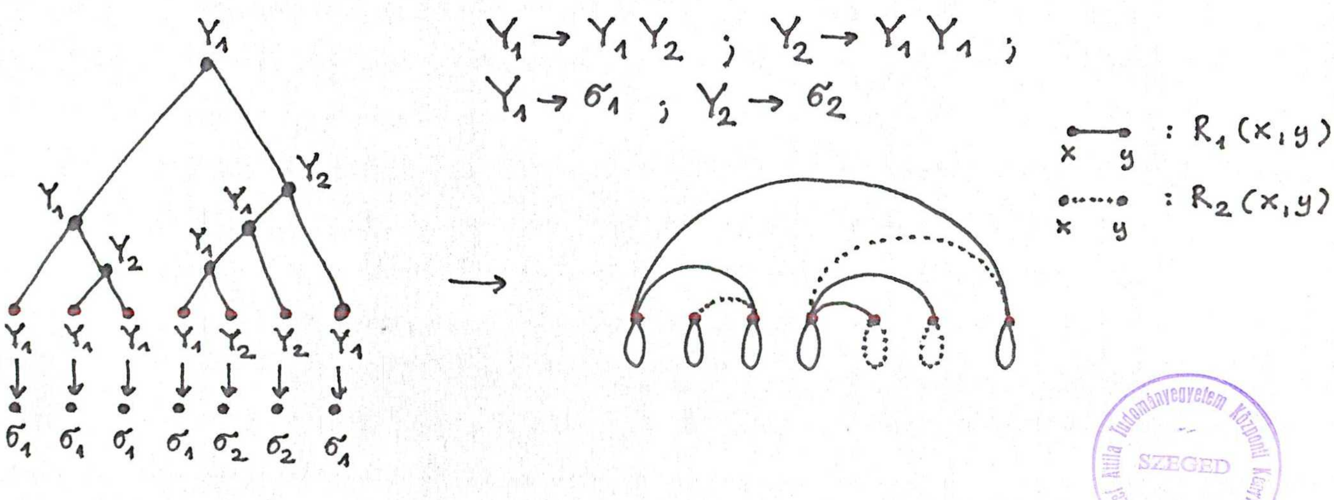
$I_i' = \{ j : Y_i \to \sigma_j \in F \}$.

Végül legyen

$$\Phi = \exists R \left(\Psi_0 \wedge \exists R_1, \dots, R_n \, \Psi_2 \right)$$

ahol Ψ_0 a 3.6. Definicióban szereplő formula.

A konstrukciót egy egyszerü nyelvtan esetében a 31. ábra szemlélteti.



31. ábra.

A Ψ_2 formula biztositja, hogy a formulát kielégitő $R_1, \dots, R_n$ relációkra $R_1 \cup \dots \cup R_n$ maximális nem-kereszteződő reláció. Igy a 81. oldalon emlitett megfeleltetés segitségével adódik, hogy $\omega \in L$ pontosan akkor, ha $\omega \models \Phi$.

b; Másodszor azt látjuk be, hogy minden Φ nem-kereszteződő egzisztenciális formulára L_Φ környezetfüggetlen.

Legyen $\Phi = \exists R(\Psi_0 \wedge \Psi_1)$, a Ψ_1 kvantorainak száma n. Az n -edrendü ekvivalenciaosztályok halmazát jelöljük $\mathcal{C}$ -vel, $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_r\}$. Ha $\omega \in \Sigma^*$, és R nem-kereszteződő reláció ω -n, akkor $A = (\omega, R)$ n -edrendü ekvivalenciaosztálya legyen $C(A)$, és végül legyen

$$\mathcal{C}_0 = \{C_i : C_i = C(A) \Rightarrow A \models \Psi_1\}.$$

Azt állitjuk, hogy $\omega \in L_\Phi$ pontosan akkor, ha van olyan R nem-kereszteződő reláció ω -n, hogy az $A = (\omega, R)$ struktúrára

$$C(A) \in \mathcal{C}_0 .$$

Ha van ilyen R reláció, akkor definició szerint $A \models \Psi_1$, amiből $\omega \models \Phi$ következik, hiszen az R reláció kielégiti Ψ_0 -t.

Másrészt, ha $\omega \models \Phi$, akkor van ω -n olyan R nem-kereszteződő reláció, mellyel $A = (\omega, R)$ -re $A \models \Psi_1$,azaz $C(A) \in \mathcal{C}_0$.

Igy a tétel igazolásához elég belátnunk, hogy

$$L_\Phi = \{\omega : \exists R \text{ nem-kereszteződő}: A = (\omega, R)\text{-re } C(A) \in \mathcal{C}_0\}$$

környezetfüggetlen.

Legyen minden $C_p \in \mathcal{C}_0$ ekvivalenciaosztályra G_p a következő nyelvtan: $G_p = (V_N, V_T, Y_1^p, F)$ ahol

$$V_N = \mathcal{C} \; ; \quad V_T = \Sigma \; ; \quad Y_1^p = C_p \; ;$$

$F = F_1 \cup F_2$, ahol

$$F_1 = \left\{ C_i \to C_j C_k : \begin{array}{l} \text{ha } \omega_1\text{-re } \exists R_1, \text{ hogy } C((\omega_1, R_1)) = C_j \text{ , és} \\ \omega_2\text{-re } \exists R_2 \text{ , hogy } C((\omega_2, R_2)) = C_k \text{ , akkor} \\ \omega = \omega_1\omega_2\text{-re és } R = R_1 \cup R_2\text{-re, vagy} \\ R = R_1 \cup R_2 \cup (\min, \max) \text{ -ra } C((\omega, R)) = C_i \end{array} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ C_i \to \sigma_j : \begin{array}{l} \text{ha } \omega = \sigma_j \text{ és } R = \emptyset \text{ vagy } R = \{(1,1)\}, \\ \text{akkor } C((\omega, R)) = C_i \end{array} \right\}$$

Ekkor azt állitjuk, hogy

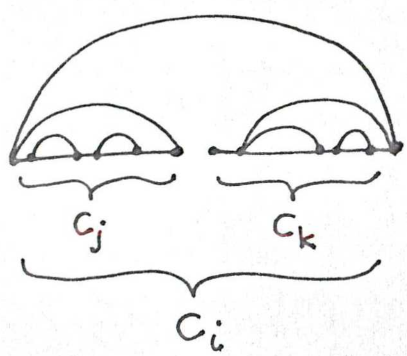
$$L_\Phi = \bigcup_{C_p \in \mathcal{C}_0} L(G_p) .$$

Ebből a tétel állitása már következik, hiszen CF az egyesitésre zárt.

Ha $A = (\omega, R)$-re $C(A) = C_i$, akkor legyen $\omega = \omega_1\omega_2$, R_1, R_2 az R megszoritásai ω_1 -re, illetve ω_2 -re, és tegyük fel, hogy erre a felbontásra a 3.10. lemma feltételeinek megfelelően ha $i \in \omega_1, j \in \omega_2$,akkor $i = \min, j = \max$ vagy $\neg R(i,j)$ teljesül. Ilyen felbontás mindig létezik, pl. a 82. oldalon definiált ℓ segitségével kapható.

A 3.10. Lemma szerint a $C((\omega_1, R_1)) = C_j$, $C((\omega_2, R_2)) = C_k$ jelölésekkel

$$C_i \to C_j C_k \in F_1 .$$

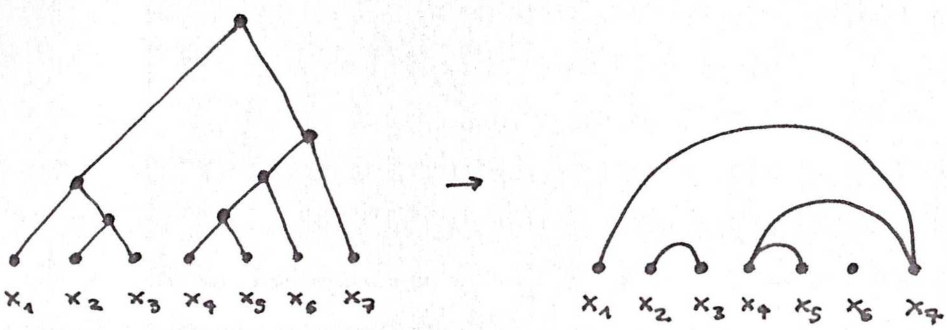


32. ábra

Legyen $\omega \in L_\Phi$; R pedig olyan nem-kereszteződő reláció ω -n, hogy $C((\omega, R)) = C_p \in \mathcal{C}_0$ teljesül. Ekkor a fenti felbontás ismételt alkalmazásával a $C_{i_1} \dots C_{i_k}$ szó egy G_p -beli levezetését kapjuk, ahol $1 \le s \le k$ -ra C_{i_s} az egyetlen betüből álló x_s szóra $(x_s, \emptyset)$ vagy $(x_s, \{(1,1)\})$ h -edrendü ekvivalencia-osztálya /attól függően, hogy $R(x_s, x_s)$ vagy $\neg R(x_s, x_s)$

teljesül/. Ezután megfelelő F_2 -beli helyettesitésekkel $C_{i_1}\dots C_{i_k}$ -ból ω -t kapjuk, vagyis igy végül ω egy G_p-beli levezetése adódik.

Végül legyen $\omega \in L(G_p)$ valamely p -re. Tekintsük ω egy G_p -beli levezetési fáját.



33. ábra

A 81. oldalon emlitett megfeleltetéshez hasonlóan ebből a levezetési fából rekonstruálható egy olyan R nem-kereszteződő reláció, mellyel $A=(\omega, R)$-re $C(A)=C_p$ teljesül, amiből $\omega \in L_\Phi$ következik. A rekonstrukciónál azt is figyelembe kell vennünk, hogy a $C_i \to C_j C_k$ szabály az $R=R_1 \cup R_2$, vagy az $R=R_1\cup R_2 \cup (min,max)$ relációkkal adódik /bár ez itt nem lényeges, megjegyezzük, hogy mindig csak az egyik eset állhat fenn, hiszen a /min, max/ él hozzávétele megváltoztatja az ekvivalencia-osztályt/.

Ezzel a 3.7. Tételt igazoltuk.

4. Osztályozás

Ebben a fejezetben az $\mathcal{L}$, $\mathfrak{S}$ osztályok, valamint az ismert bonyolultsági osztályok kapcsolatát tekintjük át, részben az eddigiek alapján, majd néhány nyitott problémát említünk.

Turing-gépen olyan modellt fogunk érteni, melyben a bemenet külön, csak olvasásra szolgáló szalagon van tárolva. Ez lehetővé teszi $o(n)$ nagyságrendü hely-bonyolultságok vizsgálatát is, mert hely-bonyolultságon a munkaszalagon felhasznált rekeszek száma értendő.

A következő jelöléseket használjuk /a részletes definiciókat ld. Garey-Johnson [8] /:

$\mathcal{NP}$ = { nem-determinisztikus Turing-géppel polinimiális idő alatt felismerhető nyelvek } ;

$\mathcal{DSPACE}(f(n))$ = { determinisztikus Turing-géppel $f(n)$ helyen felismerhető nyelvek } ;

$\mathcal{PSPACE}$ = { determinisztikus Turing-géppel polinomiális helyen felismerhető nyelvek } .

Használjuk továbbá az $\mathcal{NP}$-teljes, $\mathcal{PSPACE}$-teljes nyelv fogalmát.

Gráfon ebben a fejezetben ujra d-gráfot értünk, ahol d (≥ 3) tetszőleges rögzitett szám. Ennek megfelelően egy gráf 0-1 sorozat formájában történő kódolásán a csucsokhoz tartozó d-hosszuságu adjacencialisták felsorolását értjük /azaz kisebb fokszám esetén 0-kal egészitjük ki a listát/.

Ez a kódolás minden n -szögpontu d-gráfhoz $O(dn \log n)$ hosszuságu 0-1-sorozatot rendel, és optimális abban az értelemben, hogy nincs olyan kódolás, mely minden n -szögpontu d-gráfhoz $o(n \log n)$ hosszuságu 0-1-sorozatot rendel.

$\mathcal{G}$ -osztályon ebben a fejezetben az előzőleg használt $\mathcal{G}$-osztály d -gráfokra való megszoritását értjük.

A lokális gráf-automatával felismerhető, illetve a részgráfok nyelvén definiálható gráf-tulajdonságoknak a bevezetőben emlitett kapcsolatára vonatkozik az alábbi állitás.

4.1.<u>Tétel:</u> $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{L}$.

<u>Bizonyitás:</u> $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ a 2.1. Következmény miatt. Másrészt $\mathcal{A}ut \in \mathcal{L}$ a 2.4. Tétel szerint, és $\mathcal{A}ut \notin \mathcal{G}$ a 3.5. Tétel szerint. A 3.5. Tétel ellenpélda-gráfjában minden csucs legfeljebb harmadfoku, igy a tétel d -gráfokra megszoritva is igaz marad.

A továbbiakban a szokásos bonyolultsági osztályok definicióját kissé módositanunk kell, ha az $\mathcal{L}$-osztállyal való kapcsolatukat vizsgáljuk. Egy G d -gráf kódját /a fejezet elején leirt kódolás szerint/ $k(G)$-vel jelöljük.

4.1.<u>Definició:</u> legyen $\Sigma = \{0,1\}$, $L \subseteq \Sigma^*$. L <u>d -gráftulajdonság</u>, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) minden $\omega \in \Sigma^*$-ra, ha nincs olyan G d-gráf, melyre $k(G) = \omega$, akkor $\omega \notin L$,

(ii) ha a G, G' d -gráfokra $G \cong G'$, akkor $k(G) \in L \Leftrightarrow k(G') \in L$

4.2. Definició: $DSPACE^*(f(n)) = DSPACE(f(n)) \cap \{L : L \text{ d-gráftul.}\}$

$$DLBA^* = DSPACE^*(n).$$

Nyilvánvalóan igaz az alábbi megjegyzés.

4.1. Megjegyzés: $\mathcal{L}$ tartalmaz NP -teljes feladatot és tartalmazza NP -teljes feladat komplementerét. Ehhez felhasználjuk, hogy Ham d -gráfokra megszoritva is NP -teljes feladat marad [8].

Felvethető a kérdés, hogy $\mathcal{L}$ tartalmaz-e $PSPACE$-teljes feladatot ? Az ismert $PSPACE$ -teljes gráftulajdonságok / egy kivétellel / gráfokon játszott játékokkal kapcsolatosak. / $\exists$ -kvantorokkal NP -beli problémát, **korlátos** váltakozásu kvantorszerkezettel pedig az un. polinomiális hierarchia egy osztályába tartozó problémát kapunk, mely része a $PSPACE$-osztálynak, és - a $P \neq NP$ sejtéshez hasonlóan - az sejthető, hogy valódi része. A játékok ezzel szemben n-csucsu gráfon n -szeres váltakozásu kvantorszerkezetet jelentenek./

Az alábbiakban a Geography néven ismert játékot definiáljuk.

Adva van egy G irányitott gráf, és G -nek egy V csucsa, valamint két játékos, I és II . A V csucsból indulva felváltva lépnek, mindig az utolsónak választott csucsból még ki nem választott élen továbbhaladva. Az veszt, aki először nem tud lépni.

$$Geo = \{(G, v) : \begin{array}{l} G=(V,E) \text{ irányitott gráf, } v \in V, \text{ a} \\ \text{fenti játékban I nyer} \end{array}\}$$

$$d\text{-}Geo = Geo \cap \{(G, v) : \begin{array}{l} G=(V,E) \text{ d-gráf irányitott élekkel, } v \in V \end{array}\}$$

4.1. Lemma /T.J.Schaefer [17] /: Geo PSPACE-teljes.

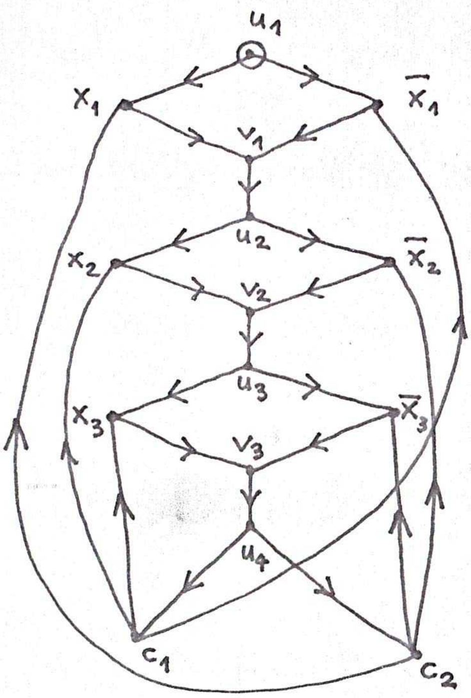
Bizonyitás vázlata [17]: ismeretes, hogy a

$$\exists x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_{2k+1} \, (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m)$$

alaku kifejezések igazságértékének eldöntése / ahol C_i a változóknak vagy negáltjaiknak egy diszjunkciója / PSPACE-teljes feladat, ezt vezetjük vissza Geo-ra. A fenti probléma ugy is fogalmazható, hogy adott CNF formulán I és II felváltva jelölik ki a változók igazságértékét, I nyer, ha végül $\uparrow$ érték adódik, különben II nyer ; eldöntendő, hogy ki nyeri a játékot. A probléma Geo-ra való visszavezetését a

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ((\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3))$$

formula esetére adjuk meg.



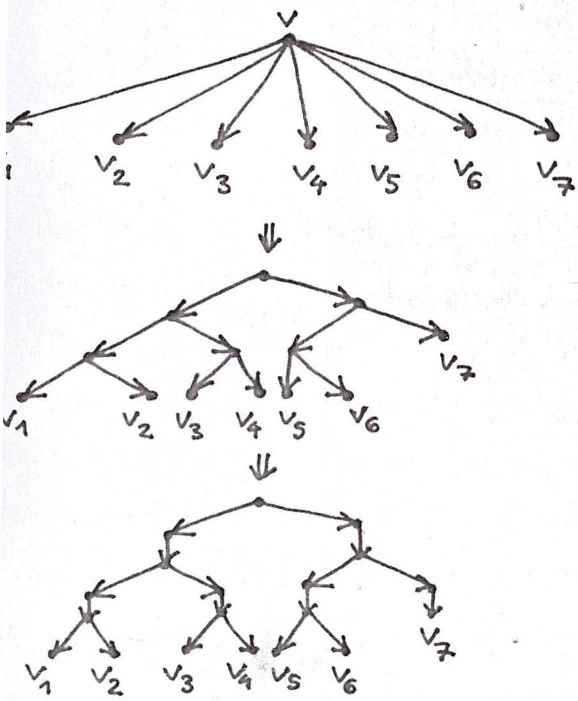
34. ábra.

Az x_i változónak az $x_i, \overline{x}_i, u_i, v_i$ csucsok, a C_i konjunkciós tagnak a c_i csucs felel meg. Az első $3(2k+1)$ lépésben x_i igazságértékeinek kijelölése történik, a $3(2k+1)$. lépésben I az u_{k+1}-re lép. Ha az eredeti formulán II nyer, akkor egy kielégitetlen konjunkciós tagnak megfelelő C_i-re léphet, ezután bármelyik C_i-beli x_j-re is lép I, II továbbléphet v_j-re, és nyer. Ellenkező esetben hasonlóan látható be, hogy I nyer.

4.2. Lemma: d-*Geo* PSPACE-teljes, ha $d \geq 4$.

Bizonyitás: csak azt a transzformációt adjuk meg, melynek segitségével egy tetszőleges $G=(V,E)$ irányitott gráfból olyan $G'=(V',E')$ irányitott gráfot kaphatunk, melyben a ki-, és befokok összege ≤ 4, és melyre

$$\mathrm{I} \text{ nyer } G\text{-n} \Longleftrightarrow \mathrm{I} \text{ nyer } G'\text{-n}.$$

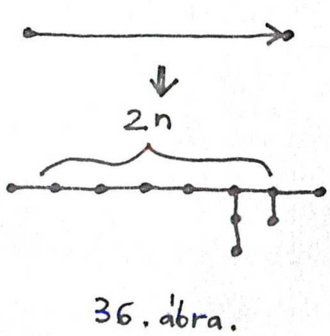


35. ábra.

A transzformációt a 35. ábra mutatja, először a V csucsból induló éleket V gyökerü bináris fával helyettesitjük, majd a bináris fát "megemeljük". Igy a V csucsból továbblépő játékos V bármelyik eredeti somszédjába eljuthat, ellenfelének mindig csak egyetlen lépése van. Ezzel a transzformációval minden csucs kifokát $\leq$ 2-re csökkentettük, ezután ugyanigy a befokokat is $\leq$ 2-re csökkenthetjük.

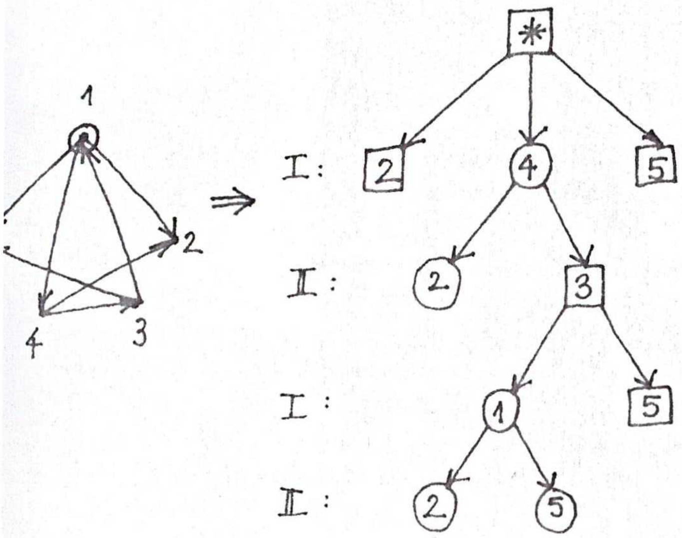
4.2. Tétel: $\mathcal{L}$ tartalmaz PSPACE-teljes feladatot.

Bizonyitás: először megjegyezzük, hogy egy irányitott d-gráf irányitatlan d-gráfként kódolható a 36. ábra transzformációjával, ezenkivül a játékban szereplő V csucsot speciális részgráffal kódolhatjuk. Ha d-*Geo**-gal jelöljük az igy kódolt d-*Geo*-beli gráfok osztályát, akkor nyilván d-*Geo* is PSPACE-teljes. Másrészt belátjuk, hogy d-*Geo*$^* \in \mathcal{L}$.



36. ábra.

Tekintsük a játék lehetséges kimeneteleit ábrázoló fát. A fa csucsain $\square$ ($\bigcirc$) jelzi, hogy a játék adott pontján I (II) nyer, a kiértékelés a szokásos módon alulról fölfelé történik.



37. ábra.

A kiértékelésnél adott ponton csak a játék addigi menetét leiró irányitott utat kell ismernünk, ez viszont / az irányitott gráf irányitatlan kódjában is / lokális gráf-automatában kódolható, igy a 2. fejezet módszereivel a keresett automata megkonstruálható.

A fejezet hátralevő részében az $\mathcal{L}$-osztályt a $DSPACE^*$-osztályokkal hasonlitjuk össze. Megadjuk azt a $DSPACE^*$-osztályt, mely megegyezik az $\mathcal{L}$-osztállyal, és ennek segitségével megmutatjuk, hogy bár a lokális gráf-automata és a lineárisan korlátozott automata egyaránt "magán a gráfon" dolgozik, a kétféle reprezentáció különbözősége miatt az utóbbi felismerő ereje nagyobb.

4.3.Tétel: $\mathcal{L} \subsetneq DLBA^*$

A tétel igazolásához előbb egy lemmát bizonyitunk.

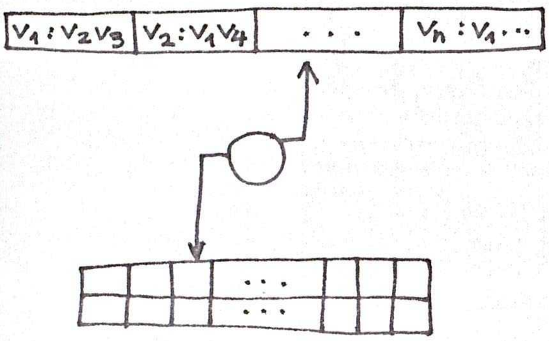
4.3.Lemma: $\mathcal{L} = DSPACE^*\left(\frac{n}{\log n}\right)$

Bizonyitás: ha egy d-gráfra $|k(G)| = n$, akkor csucsainak száma m, ahol

$$\frac{n}{\log_d n} < m < (1+\varepsilon)\frac{n}{\log_d n} .$$

Az $\mathcal{L} \supseteq DSPACE^*(\frac{n}{\log n})$ relációt az igazolja, hogy n-csucsu gráfon a csucsok rendezése után m méretü memória szimulációja lehetséges.

Másrészt, legyen adva az A alapautomata. /Megjegyezzük, hogy alapgráf kódolását a listákon belüli sorrendek megadásával végezhetjük./ Az M_A Turing-gép müködjön a következőképpen: munkaszalagjára kijelöli az $1, \dots, m$ rekeszeket, melyekben az egyes csucsok állapotait tárolja majd, illetve egy másik "csatornán" segédszámitásokat végez. Egy csucs uj állapotának kiszámitását ugy végzi el, hogy a segédszalagon kiszámitja a csucs sorszámának bináris alakját, és az adott csucshoz tartozó listát bemásolja a segédszalagra. Ezután megkeresi a listán szereplő csucsok állapotait, és ebből kiszámitja a vizsgált csucs uj állapotát. /A lista bemásolása $\sim d \log_2 n$ helyet igényel, igy elfér a munkaszalagon./ Ha M_A bemenete nem d-gráf kódja, akkor a bemenetet elutasitja. Az igy konstruált M_A nyilván ugyanazt a d-gráf-tulajdonságot ismeri fel, mint az A alapautomata, igy az $\mathcal{L} \subseteq DSPACE^*(\frac{n}{\log n})$ reláció is teljesül.



38. ábra

Felhasználjuk az alábbi tételt, melyet csak az itt felhasználandó alakjában mondunk ki.

4.4. Tétel: /Stearns-Hartmanis-Lewis [18] /: van olyan L nyelv, melyre

$$L \in DSPACE(n), \text{ de } L \notin DSPACE\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Bizonyitás: [18] Egy M_0 Turing-gépet definiálunk. Adott $w = x_1 \dots x_n$ szóra M_0 munkaszalagján kijelöl n rekeszt, a továbbiakban csak ezen a helyen dolgozik, ha valamelyik lépésben ki kellene lépnie innen, akkor elutasitja w-t és megáll. Ezzel biztositjuk, hogy az M_0 által felismert nyelv $DSPACE(n)$-beli. Kiszámitja az i-edik Turing-gép, M_i átmenetfüggvényét, ahol i az w számértéke, és elkezdi szimulálni M_i müködését az w bemeneten. Az M_i által megtett lépéseket a munkaszalag egy külön csatornáján tartja számon. Az M_0 gép az w szót elutasitja, ha M_i leirása tul sok helyet igényel, vagy az M_i által megtett lépések száma már nem fér el a munkaszalagon. M_0 szintén elutasitja az w szót, ha M_i elfogadja w-t, végül elfogadja w-t, ha szimulálása befejeződik, és M_i elutasitja w-t. Az M_0 által felismert nyelv nem $DSPACE(o(n))$-beli, hiszen ellenkező esetben M_0 képes lenne a nyelvet $o(n)$ helyen felismerő M gép szimulálására, és ekkor az M bemeneten a nyelv definiciója szerint ellentmondásra jutnánk.

Ahhoz, hogy a fenti tételt alkalmazni tudjuk, olyan, a tételben szereplő L nyelv létezését kell biztositanunk, amely d-gráftulajdonság.

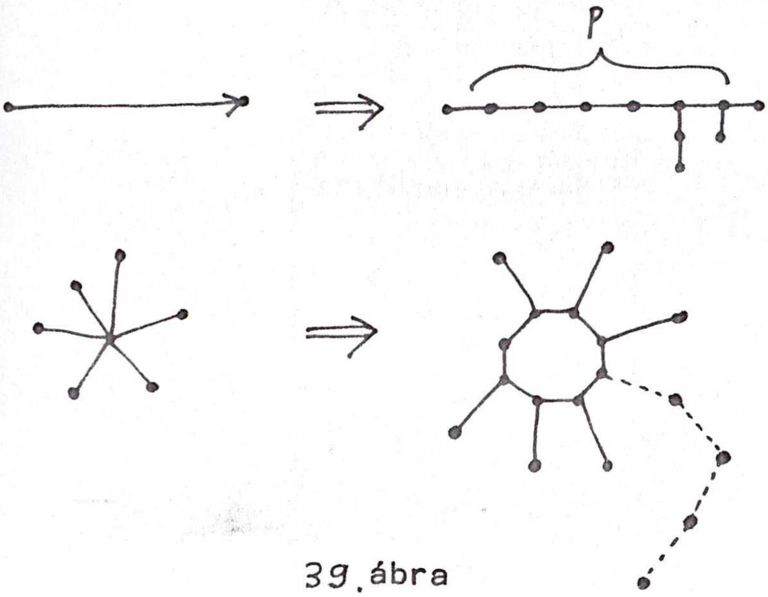
4.4. Lemma: van olyan d-gráftulajdonság, melyre $L \in DSPACE(n)$,

de $L \notin DSPACE\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Bizonyitás: a fenti tétel bizonyitását alkalmazhatjuk, csak a Turing-gépeket kell d-gráfok formájában kódolnunk, ugy, hogy minden Turing-géphez végtelen sok, az adott gépet kódoló d-gráf tartalmazzon. Egy lehetséges kódolás a következő. A Turing-gép legyen $M = \langle Q, \Sigma, q_0, F, \delta \rangle$, ahol Q az állapotok halmaza, Σ a szalag-abc, q_0 a kezdőállapot, F az elfogadó állapotok halmaza, δ az átmenetfüggvény, $(q,\sigma) \to (q',\sigma',d')$ alaku utasitások halmaza, ahol $d' \in \{\leftarrow, \rightarrow, \downarrow\}$. Irjuk át δ-t $(q,\sigma,d) \to (q',\sigma',d')$ alakra, azzal a kikötéssel, hogy minden $q \in Q$, $\sigma \in \Sigma$ -ra

$$\delta(q,\sigma,\leftarrow) = \delta(q,\sigma,\rightarrow) = \delta(q,\sigma,\downarrow) = \delta(q,\sigma) .$$

Igy a Turing-gép átmenetfüggvénye egy $G=(V,E)$ irányitott gráffal adható meg, ahol $V \subseteq Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \downarrow\}$. Ebből irányitatlan gráfot kapunk, ha az irányitott éleket a 39. ábra gráfjával helyettesitjük, ahol p-t később határozzuk meg. A csucsok fokszámát 3-ra csökkenthetjük, ha a 39. ábra helyettesitéseit elvégezzük, ahol a csucs helyébe tett kör hosszát megint csak később határozzuk meg.



39. ábra

A csucsok száma az eredeti gráfban $s \leq 3|Q||\Sigma|$. Az i-edik csucsot $s+i$ hosszuságu körrel kódoljuk, p-t pedig $3s$-nek választjuk, hogy az irányitott élekből álló körök a csucsokat kódoló köröktől megkülönböztethetők legyenek. A kezdő-, és végállapotokat speciális részgráfok hozzáillesztésével kódoljuk, valamint a csucsokhoz rendelt körök szabad csucsaiból tetszőleges hosszuságu utak létezését engedjük meg.

Ha egy Turing-gépet az igy hozzárendelt gráf kódjával kódolunk, akkor ezzel a kódolással a gép szimulálható lesz, és alkalmazhatjuk a 4.4. Tétel bizonyitását:

A 4.3. Tétel bizonyitása: legyen $\mathcal{T}$ a 4.4. Lemmában szereplő L által meghatározott gráf-tulajdonság. Erre $L \in DSPACE(n)$, és $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}$, hiszen ellenkező esetben $L \in DSPACE\left(\frac{n}{\log n}\right)$ teljesülne.

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{T}$ nem "természetes" gráf-tulajdonság, hiszen a következőképpen fogalmazható meg: egy n-szögpontu G gráfra $G \in \mathcal{T}$ pontosan akkor, ha a G által kódolt Turing-gép a saját kódját $n \log n$ helyen számolva elutasitja.

4.1. Következmény: ha a lokális gráf-automata definicióját ugy módositjuk, hogy az egyes csucsokban nem véges automatát, hanem n-szögpontu gráf esetén $\log n$-memóriáju Turing-gépet helyezünk el, akkor az igy kapott automatafajta felismerő képessége növekszik, hiszen a fenti L ekkor felismerhetővé válik. /Ez a módositás azt jelenti, hogy minden automatának annyi hely áll rendelkezésére, amivel az automatát tartalmazó csucs "nevét" le tudja irni./

Végül néhány megoldatlan problémát emlitünk:

1; "Természetes", nem $\mathcal{L}$ -beli gráftulajdonság keresése.

Egy jelölt a következő tulajdonság: $\{G: \mathrm{I}$.nyer a Kayles-játékban$\}$, ahol a játék a következő: a játékosok felváltva választanak pontokat, mindig csak olyan pont választható, mely a korábban választott pontok egyikével sincs összekötve, és az veszt, aki először nem tud lépni.

Ezenkivül a Band-with(k) tulajdonságra sem sikerült algoritmust találni abban az esetben, ha k nem rögzitett, hanem $k=k(n)\to\infty$.

2; Elemi gráfosztályok automataelméleti jellemzése .

Egy gráfosztály elemi, ha elsőrendü formulával axiomatizálható. Szavakra az elemi osztályok az un. csillag-mentes automatákkal felismerhető nyelvek. Elképzelhető, hogy a gráf valamely reprezentációján mozgó csillag-mentes automatával jellemezhető az osztály.

3; Monadikus hierarchia.

Eredetileg Fagin [6] bizonyitotta, hogy monadikus formulákra a $\exists$- és $\forall$-osztályok különböznek. Azóta is megoldatlan, hogy ez a hierarchia több kvantor esetén folytatódik-e? /Tetszőleges változószámu relációkkal az un. polinomiális hierarchia adódik, melyre ugyanez a kérdés a $P=NP$ probléma általánositása, igy "reménytelen"./

Irodalomjegyzék

[1] D. Angluin: Local and Global. Properties in Networks of Processors Proc. 12. ACM. Symp. on Th. of Comp. Los Angeles, 1980. pp. 82-93.

[2] Chang-Keisler: Model Theory /North-Holland, 1973/.

[3] Demoucron-Malgrange-Pertuiset: Graphes plein-airs, reconnaissance et construction de representations plein-airs topologiques. R. Fr.R.Op., 1964, pp. 33-47.

[4] A. Ehrenfeucht: An application of games to the completeness problem for formalized theories, Fund. Math. 1961, pp. 129-141.

[5] R. Fagin: Generalized First-order Spectra and Polynomial-Time Recognizable Sets, Compl. of Comp., SIAM-AMS. Proc. VII. 1977.

[6] R. Fagin: Monadic Generalized Spectra, Zeitschr. für M.L. 1975, pp. 89-96.

[7] Ferrante-C. Rackoff: The Computational Complexity of Logical Theories, Lect. Notes in Math. No. 718, Springer 1979.

[8] R. Garey-D.S. Johnson: Computers and Intractability /San Francisco, 1979/.

[9] F. Gécseg-I. Peák: Algebraic Theory of Automata /Ak. Kiad. 1972/

[10] P. Hájek-T. Havránek: Mechanizing Hypothesis Formation /Springer, 1978./

[11] R.E. Ladner: Application of Modell Theoretic Games to Discrete Linear Orders and Finite Automata, Inf. and Contr. 1977, pp. 261-303.

[12] L.Lovász: Combinatorial Problems and Exercises / Ak. kiadó , 1979 /

[13] L.Lovász-P.Gács : Some remarks on generalized spectra Zeitschrift für Math. Logik, 1977, pp. 547-554.

[14] Pósa Lajos / kiadatlan /

[15] Rosenstiehl-Fiksel-Holliger: Intelligent graphs, Graph Th. and Computing, Ac.Press,1972,pp.219-265.

[16] A.Salomaa: Formal Languages / Ac.Press, 1973/

[17] T.J.Schaefer: On the complexity of some two-person perfect-information games, J.Comp.Syst.Sc. 1978,pp.185-225.

[18] Stearns-Hartmanis- **Lewis** : Hierarchies of memory limited computations, IEEE Conf.Rec.Switch.Circ.Th.,1965.

[19] A.Wu - A.Rosenfeld : Cellular Graph Automata I-II. Inf.and Contr.,1979,pp.305-353.

Tartalom

1.1.	Bevezetés	1
1.2.	Definiciók	7
1.3.	Megjegyzések	13
2.	Algoritmusok	18
2.1.	Felsoroló automaták . . .	19
2.2.	Sikbarajzolhatóság . . .	24
2.3.	Nem-polinomiális algoritmusok. .	30
2.4.	Azonositási probléma . . .	45
3.	Definiálhatóság	48
3.1.	Példák	50
3.2.	Matematikai logikai segédeszközök .	53
3.3.	Gráf-tulajdonságok definiálhatósága	59
3.4.	A környezetfüggetlen nyelvek egy logikai jellemzése . . .	79
4.	Osztályozás.	88
	Irodalom	99