Egyetemi doktori disszertáció

ATTRIBUTUMOS FATRANSZFORMÁCIÓK

Fülöp Zoltán

József Attila Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szeged, 1981

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Jól ismert az a tény, hogy a faautomata az automatának, vagyis a csupa egyváltozós müveletekkel rendelkező univerzális algebrának az általánositása. Az általánositás abban áll, hogy faautomata esetében többváltozós müveleteket is megengedünk. Ezáltal a nyelveket felismerő eszközből (többváltozós) polinomszimbólum halmazokat, más szóval erdőket felismerő eszközt kapunk. Másrészt az is kiderült, hogy a faautomatákkal felismerhető erdők és a számitástudományban központi szerepet játszó környezetfüggetlen nyelvtanok derivációs fáinak halmazai lényegében megegyeznek egymással (ld. [21]). Igy a faautomata a gyakorlat által felvetett bizonyos problémák pontos matematikai leirásának eszközévé vált.

Ugyancsak ismeretes, hogy a fatranszformátorok a szekvenciális gépek általánositásainak tekinthetők, tehát bizonyos tipusu polinomszimbólumokat (a továbbiakban fákat) dolgoznak fel és transzformálnak át fákba. Ezek az általánositások azonban korántsem olyan egyértelmüek mint a faautomaták esetében, mert a fatranszformátoroknak már számos tipusa került bevezetésre. Többek között, értelmeztek felszálló fatranszformátort amely a gyökerétől a levelei felé haladva transzformálja át a fákat, valamint leszálló fatranszformátort amelyik ellenkező irányban dolgozik (ld. [9], [22]). A fatranszformátorokkal kapcsolatos vizsgálatok sem öncéluak mert ezekkel az eszközökkel leirhatók a forditóprogramok bizonyos fázisai.

Az attributumnyelvtan fogalmát D.E. Knuth vezette be [27] munkájában. Célja egy olyan generativ eszköz megadása volt amellyel jelentést, szemantikát lehet rendelni környezetfüggetlen nyelvtan által generált mondatokhoz. Lényegében általánositotta a környezetfüggetlen nyelvtan fogalmát azzal, hogy a nyelvtan nemterminális szimbólumaihoz un. attributumokat rendelt, amelyek értékeket vehetnek fel bizonyos halmazokból, meghatározott szabályok szerint. Ezáltal minden mondathoz hozzárendelhetők jelentésként azok az értékek amelyeket a mondat derivációs fáinak gyökereinél lévő kezdőszimbólumnak valamilyen kitüntetett attributuma vesz fel.

Dolgozatunk három fejezetből áll. Mindegyik fejezet elején megtalálhatók azok a fogalmak, amelyek szükségesek számunkra az egyes témakörök tárgyalásához. Ezek általában megegyeznek az irodalomban található megfelelő fogalmakkal, mig a dolgozat további részein bevezetésre kerülőket - ugy tünik - mi használtuk először.

Az első fejezetben a nemcirkuláris attributumnyelvtan (ld. [27]) derivációs fáiban szereplő nemterminálisok attributumainak kiértékelési lehetőségeivel foglalkozunk. Bevezetjük a K-vizsgáló attributumnyelvtan fogalmát, (ahol K természetes szám,) értve alatta olyan attributumnyelvtant amelynek minden derivációs fája kiértékelhető oly módon, hogy közben bármely részfát legfeljebb K-szor vizsgálunk meg attributumok kiértékelése céljából. Kiderül, hogy ez minden attributumnyelvtannak eldönthető tulajdonsága akármilyen is K, és ugyanez érvényes a szigorubb egyenletesen K-vizsgáló tulajdonságra is. Ezeket az eredményeinket a [10] és [31]-ben található, lényegében hasonló eredmények szerzőitől függetlenül értük el.

A következő fejezetben bevezetjük az attributumos fatranszformátor fogalmát, mint az attributumnyelvtanok esetén felmerülő bizonyos problémák tanulmányozására szolgáló matematikai eszközt. Ezt ugy érjük el, hogy az attributumnyelvtan derivációs fái helyett valamilyen tipusu fákat veszünk és az attributumok lehetséges értékeinek ugyancsak fákat engedünk meg. Ha most kiszámoljuk valamely fa gyökerénél lévő szimbólum valamelyik kitüntetett attributumának értékét, akkor ujra fát kapunk, amelyet az eredeti fa transzformáltjának tekintünk. Megmutatjuk, hogy az attributumos fatranszformációk (tehát az attributumos fatranszformátorok alkalmazásával nyerhető fatranszformációk) általánositásai a felszálló fatranszformációknak, mig ugyanez nem mondható el a leszálló fatranszformációkról. Ugyanitt néhány egyszerübb eredményt közlünk az attributumos fatranszformációk kompozicióit illetően.

Az (egyenletesen) K-vizsgáló attributumnyelvtan fogalmához hasonlóan bevezethető az (egyenletesen) K-vizsgáló attributumos fatranszformátor, sőt itt értelmezhető a még speciálisabb szuperegyenletesen K-vizsgáló osztály is. Rámutatunk, hogy minden K-vizsgáló attributumos fatranszformáció indukálható egy leszálló (felszálló) fatranszformátor, majd egy 1-vizsgáló attributumos fatranszformátor egymás utáni alkalmazásával is. Sőt, ha a K-vizsgáló helyett egyenletesen K-vizsgálót mondunk akkor a leszálló fatranszformátor helyett vehető determinisztikus leszálló fatranszformátor, ha pedig szuperegyenletesen K-vizsgálót akkor homomorfizmus, amely egy igen speciális leszálló(felszálló) fatranszformátor. Ennek következményeként bizonyitást nyer, hogy tetszőleges számu szuperegyenletesen K-vizsgáló fatranszformáció kompoziciója mindig előáll eggyel több l-vizsgáló attributumos fatranszformáció kompoziciójaként (akármilyen is K).

Végül, dolgozatunk harmadik fejezetében a [17]-ben bevezetett makrofatranszformátoroknak a determinisztikus, teljesen definiált osztályával foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy minden ilyen fatranszformátornak az alkalmazása megegyezik egy homomorfizmusnak és egy teljesen definiált, l-vizsgáló attributumos fatranszformátornak az egymás utáni alkalmazásával. Tételünknek egy érdekes következménye is van, amely szerint tetszőleges számu, szuperegyenletesen K-vizsgáló attributumos fatranszformáció kompoziciója indukálható ugyanannyi, a fenti tulajdonságokkal rendelkező makrofatranszformátor egymás utáni alkalmazásával is.

Megemlitjük még, hogy dolgozatunk korántsem adja a témakörök teljes kidolgozását, sőt az eredményeink számos uj problémát is felvetnek.

I. ATTRIBUTUMOK KIÉRTÉKELÉSE

1. Alapvető fogalmak, jelölések

Legyen H tetszőleges halmaz. A dolgozatban P(H)-val ($\overline{P}$(H)-val) jelöljük H összes (véges) részhalmazainak halmazát; $|H|$-val a H és $\|H\|$-val pedig P(H) számosságát. H^* jelöli a H elemeiből képzett összes véges hosszusägu jelsorozatok, vagy szavak halmazát, beleértve a mindig λ-val jelölt üres szót is amely egyetlen H-beli elemet sem tartalmaz. Ha H^* elemei közül elhagyjuk λ-t akkor az igy kapott halmazt H^+-al fogjuk jelölni. Tetszőleges w ($\in H^*$) szó hosszát $|w|$-vel jelöljük és értjük alatta H elemeinek w-ben multiplicitással együtt való előfordulásainak számát. Ismeretes, hogy H^* halmaz a szavak egymás után történő irásával - mint kétváltozós müvelettel - együtt félcsoportot alkot, sőt λ a félcsoport egységeleme lesz. Az igy kapott félcsoportot ugyancsak H^*-al szokás jelölni. Legyen $w \in H^*$. Azt mondjuk, hogy u a w-nek prefixe, ha teljesül w=uv valamely v ($\in H^*$)-re.

Az egyelemü $\{h\}$ halmaz helyett gyakran egyszerüen h-t irunk. A természetes számok halmazát $\mathbb{N}$-el fogjuk jelölni.

Környezetfüggetlen nyelvtan jelölésére (ld. [1]) a G=(N,T,P,Z) irásmódot használjuk, ahol N a nemterminális szimbólumok, T a terminális szimbólumok, P a produkciós szabályok halmaza, Z ($\in$ N) pedig a kezdőszimbólum. Ha P valamely p elemének szerkezetére is szükségünk van, akkor a

$p{:}X_o \to w_oX_1w_1 \ldots X_nw_n$ jelölést használjuk ($n=n(p)$ vagyis n a p függvénye; $X_i \in N$; $w_i \in T^*$; $i=0,\ldots,n$). Jelöljük a G-beli derivációt (ld. [1]) $\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ -vel. Minden egyes $X \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \omega$ derivációhoz ($X \in N$, $\omega \in (N \cup T)^*$) jól ismert módon hozzárendelhető egy nemterminális szimbólumokkal és terminális szavakkal cimkézett, rendezett t fa, melynek root(t) gyökere X, fr(t) határa pedig ω. Ha $fr(t) \in T^*$ akkor t-t derivációs fának nevezzük, G derivációs fáinak halmazát pedig D(G)-vel jelöljük.

Legyen $t \in D(G)$. A t dp(t) mélysége 1, rn(t) rangja 1, részfáinak sub(t) halmaza $\{t\}$ és a t-beli utak path(t) halmaza $\{\lambda\}$, ha t közvetlen derivációt reprezentál, vagyis

$$\begin{array}{c} X_o \\ | \\ w \end{array} \qquad (1)$$

$$(p{:}X_o \to w \in P)$$

alaku. Különben, ha t

$$\begin{array}{c} X_o \\ \swarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \searrow \\ w_o \quad t_1 \quad w_1 \quad \ldots \quad t_n \quad w_n \end{array} \qquad (2)$$

$$(p{:}X_o \to w_oX_1w_1 \ \ldots \ X_nw_n \in P;\ t_i \in D(G);\ root(t_i) = X_i;\ i=1,\ldots,n)$$

alaku, akkor $dp(t)=1+\max\{ dp(t_i) \mid i=1,\ldots,n\}$, $rn(t)=1+\sum_{i=1}^{n} rn(t_i)$, $sub(t)=\{t\} \cup (\cup(sub(t_i) \mid i=1,\ldots,n))$ és $path(t)=\{\lambda\} \cup \{iy \mid i=1,\ldots,n;\ y \in path(t_i)\}$. Ugyanezen t-re a path(t) minden x eleme kijelöl egy nemterminális cimkét és egy részfát t-ben, nevezetesen ha t (1) alaku - tehát $x=\lambda$ - akkor $lb_t(x)=X_o$ és $str_t(x)=t$. Különben, ha t (2) alaku, akkor ugyanez $x=\lambda$

esetén, mig $lb_t(x)=lb_{t_i}(y)$ és $str_t(x)=str_{t_i}(y)$ ha $x=iy$ valamely $i(=1,\ldots,n)$-re és $y(\in path(t_i))$-re.

A továbbiakban a dolgozatunkban szereplő minden környezetfüggetlen nyelvtanról feltesszük, hogy összefüggő azaz bármely nemterminális szimbólum elérhető a kezdőszimbólumtól derivációkkal, továbbá bármely nemterminálisból deriválható terminális szó.

<u>1.1. Definició.</u> Attributumnyelvtannak nevezzük a $\mathcal{G}=(G,A,V,\alpha,\Sigma)$ rendszert, ahol

(a) $G=(N,T,P,Z)$ környezetfüggetlen nyelvtan;

(b) A az attributumok véges halmaza amely az egymástól diszjunkt szintetizált attributumok A_s és örökölt attributumok A_i halmazának egyesitéseként áll elő (Megjegyezzük, hogy ezen halmazok s és i indexei a synthesized és inherited elnevezésekből erednek, nem tévesztendők össze az ugyanezen betükkel történő, de természetes számokat jelölő más indexezésekkel.);

(c) $V=\{V_a \mid a\in A\}$ halmaz, amelynél minden $a(\in A)$-ra V_a-t az a lehetséges értékei halmazának nevezzük (Használni fogjuk a $\overline{V}=\bigcup(V_a \mid a\in A)$ jelölést.);

(d) $\alpha:N\to P(A)$ leképezés, amelyre $\alpha(Z)\cap A_i=\emptyset$ (A továbbiakban tetszőleges $X(\in N)$-re bevezetjük az $S(X)=\alpha(X)\cap A_s$ és $I(X)=\alpha(X)\cap A_i$ jelöléseket.);

(e) Σ az un. szemantikai szabályok halmaza, az alábbi módon értelmezett. Minden $p(:X_o\to w_oX_1w_1\ \ldots\ X_nw_n)\in P$-re, $i(=0,\ldots,n)$-re és

$a \in \begin{Bmatrix} S(X_i) & \text{ha } i=0 \\ I(X_i) & \text{ha } 1\leq i\leq n \end{Bmatrix}$ -ra Σ tartalmaz pontosan egy

$(a,i)_p=f\,((a_1,i_1),\ldots,(a_m,i_m))$ alaku elemet, ahol

(i) $m\geq 0$; $0\leq i_1,\ldots,i_m\leq n$ a (p,i,a) hármas függvényei;

(ii) $a_j \in \begin{cases} I(X_{i_j}) & \text{ha } i_j=0 \\ S(X_{i_j}) & \text{ha } 1\leq i_j\leq n \end{cases}$ $(j=1,\ldots,m)$;

(iii) $f:V_{a_1}x\ldots xV_{a_m}\rightarrow V_a$, kiszámitható függvény.

(Egy ilyen szemantikai szabály azt mutatja meg, hogyan kell a p szabály környezetében X_i a attributumának értékét kiszámitani X_{i_1}-nek $a_1,\ldots,X_{i_m}$-nek a_m attributuma értékének ismeretében.)

Tekintsük $\mathcal{G}$, fenti attributumnyelvtant és D(G)-nek egy t elemét. A t-hez tartozó DG(t) irányitott gráfot (ld. [27]-ben: függőségi gráf) az alábbi módon értelmezzük:

(a) Legyen $dp(t)=1$ tehát t (1) alaku. Ekkor DG(t) szögpontjainak $\overline{DG}(t)$ halmaza az $\{(a,\lambda)\mid a\in\alpha(X_o)\}$ halmaz és valahányszor $(a,0)_p=f\,((a_1,0),\ldots,(a_m,0))$ Σ-ban van mindannyiszor irányitsunk élet $(a_1,\lambda),\ldots,(a_m,\lambda)$ szögpontokból (a,λ)-ba.

(b) Legyen most $dp(t)>1$ vagyis t (2) alaku. Ekkor $\overline{DG}(t)=$ $=\{(a,\lambda)\mid a\in\alpha(X_o)\}\cup\{(a,iy)\mid i=1,\ldots,n;\ (a,y)\in\overline{DG}(t_i)\}$ mig DG(t) éleit a következőképpen kapjuk:

(i) minden $i(=1,\ldots,n)$-re valahányszor él vezet $DG(t_i)$-ben (a,x)-ből (b,y)-ba mindannyiszor irányitsunk élet DG(t)-ben (a,ix)-ből (b,iy)-ba;

(ii) minden $(a,i)_p=f((a_1,i_1),\ldots,(a_m,i_m))$ $(\in\Sigma)$ esetén irányitsunk élet minden

$$j(=1,\ldots,m)\text{-re} \begin{Bmatrix} (a_j,\lambda)\text{-ból, ha } i_j=0 \\ (a_j,i_j)\text{-ből, ha } 1\leqq i_j\leqq n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} (a,\lambda)\text{ -ba ha } i=0 \\ (a,i)\text{-be ha } 1\leqq i\leqq n \end{Bmatrix}.$$

1.2 Definició. Tetszőleges $\mathcal{G}=(G,A,V,\alpha,\Sigma)$ attributumnyelvtanról akkor mondjuk, hogy cirkuláris, ha valamely t $(\in D(G))$-re $DG(t)$-ben van irányitott kör (zárt, irányitott hurok).

Az attributumnyelvtanokkal kapcsolatos legelső eredmény [27] -ben található: tetszőleges attributumnyelvtanról eldönthető, hogy cirkuláris-e.

Legyen $\mathcal{G}$ a fenti attributumnyelvtan, $X\in N$ és $B\subseteqq\alpha(X)$. Azt mondjuk, hogy $\varphi:B\rightarrow\overline{V}$ megengedett leképezés X-nél, ha minden b $(\in B)$-re teljesül a $\varphi(b)\in V_b$ tartalmazás.

1.3 Definició. Legyen $\mathcal{G}=(G,A,V,\alpha,\Sigma)$ attributumnyelvtan, $t\in D(G)$ melyre $root(t)=X_o$, $\varphi:I(X_o)\rightarrow\overline{V}$ megengedett X_o-nál. Azt mondjuk, hogy megengedett leképezések

$$h=\langle h_x(:\alpha(X)\rightarrow\overline{V}) \mid x\in path(t),\ X=lb_t(x)\rangle$$

rendszere t kiszámitása φ-nél, ha teljesülnek rá a következők:

(a) Ha t (1) alaku akkor

(i) minden a $(\in I(X_o))$-ra $h_\lambda(a)=\varphi(a)$,

(ii) minden a $(\in S(X_o))$-ra $h_\lambda(a)=f(h_\lambda(a_1),\ldots,h_\lambda(a_m))$ amennyiben $(a,0)_p=f((a_1,0),\ldots,(a_m,0))$ Σ-ban van;

(b) Ha t (2) alaku akkor

(i) minden a $(\in I(X_0))$ -ra $h_\lambda(a)=\varphi(a)$,

(ii) minden a $(\in S(X_0))$ -ra $h_\lambda(a)=f(h_{x_1}(a_1),\dots,h_{x_m}(a_m))$ ahol $(a,0)_p=f((a_1,i_1),\dots,(a_m,i_m))\in\Sigma$ és

$$x_j=\begin{cases}\lambda & \text{ha } i_j=0\\ i_j & \text{ha } 1\leq i_j\leq n\end{cases}\qquad (j=1,\dots,m),$$

(iii) minden $i(=1,\dots,n)$-re, a $(\in I(X_i))$ -ra $h_i(a)=f(h_{x_1}(a_1),\dots,h_{x_m}(a_m))$ ahol $(a,i)_p=f((a_1,i_1),\dots,(a_m,i_m))\in\Sigma$ és $x_j=\begin{cases}\lambda & \text{ha } i_j=0\\ i_j & \text{ha } 1\leq i_j\leq n\end{cases}$ $(j=1,\dots,m)$,

(iv) minden $i(=1,\dots,n)$-re h^i kiszámitás t_i-n φ_i-nél ahol $h^i=\langle h_y \mid h_{iy}\in h\rangle$ vagyis h-nak t_i-re való megszoritása, továbbá, $\varphi_i(a)=h_i(a)$ minden a $(\in I(X_i))$ -ra.

A kiszámitás tehát megadja a derivációs fa minden (nemterminális által cimkézett) szögpontjában a cimkéző nemterminális attributumainak a szemantikai szabályok által meghatározott értékeit, a gyökér örökölt attributumainak valamely előre megadott értékei esetén. Minthogy $I(Z)=\emptyset$, igy minden olyan t esetén, melyre $root(t)=Z$, egyszerüen csak t kiszámitásáról fogunk beszélni.

2. *A K-vizsgáló tulajdonság és eldönthetősége*

Tekintsük a tetszőleges $\mathcal{G}=(G,A,V,\alpha,\Sigma)$ attributumnyelvtant és K természetes számot a továbbiakban rögzitettnek.

2.1 Definició. Tetszőleges X ($\in N$) esetén Φ_X halmazt a következőképpen értelmezzük:

$(e_1,\ldots,e_\ell)\in\Phi_X \Longleftrightarrow$ (a) $\ell\leqq K$;

(b) $e_j=(I_j;\ n_{j_1},\ldots,n_{j_{k_j}};S_j)$ $(j=1,\ldots,\ell)$;

(c) $I(X)=\cup(I_j\,|\,j=1,\ldots,\ell)$, $S(X)=$ $=\cup(S_j\,|\,j=1,\ldots,\ell)$, $I_k\cap I_j=S_k\cap S_j=\emptyset$ ha $k\neq j$, $(k,j=1,\ldots,\ell)$;

(d) minden $j(=1,\ldots,\ell)$-re $k_j\geqq 0$;

(e) valamely $X\to w_0X_1w_1\ldots X_nw_n$ ($\in P$)-re $1\leqq n_{j_1},\ldots,n_{j_{k_j}}\leqq n$ $(j=1,\ldots,\ell)$;

(f) minden $i(=1,\ldots,n)$ legfeljebb K-szor fordul elő az

$$n_{1_1}\ldots n_{1_{k_1}}n_{2_1}\ldots n_{\ell_1}\ldots n_{\ell_{k_\ell}} \qquad (1)$$

sorozatban.

Mivel (1) sorozat az $e_1,\ldots,e_\ell$ -beli sorozatok egymás után irásával keletkezett, igy beszélhetünk arról, hogy mondjuk e_j $(j=1,\ldots,\ell)$ tartalmazza az $i(=1,\ldots,n)$ $k(\leqq K)$-adik előfordulását, ahol ez az előfordulás (1)-ben értendő.

Alkalmazni fogjuk az alábbi jelölést:

$$\Phi=\cup(\Phi_X\,|\,X\in N).$$

<u>2.2 Definició.</u> Legyen $t \in D(G)$. Tekintsük $\pi : \mathrm{path}(t) \longrightarrow \Phi$ leképezést melyre minden x ($\in \mathrm{path}(t)$) esetén $\pi(x) \in \Phi_X$ ahol $X = lb_t(x)$. Azt mondjuk, hogy π K stratégia - vagy röviden: stratégia - t-n, ha teljesülnek rá a következők ($\pi(x)$ helyett π_x-et irva):

(a) Legyen $dp(t)=1$ tehát t

$$\begin{array}{c} X_0 \\ | \\ w \end{array} \qquad (2)$$

$(p: X_0 \rightarrow w \in P)$

alaku. Tételezzük fel, hogy $\pi_\lambda = (e_1, \dots, e_\ell)$ és $e_j = (I_j; S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$. Minden $j(=1,\dots,\ell)$-re, $a(\in S_j)$-ra ha $(a,0)_p = f((a_1,0),\dots,(a_m,0))$ Σ-ban van akkor $a_1,\dots,a_m \in I_1 \cup \dots \cup I_j$.

(b) Legyen most $dp(t)>1$ tehát t

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X_0 & & & \\ w_0 & t_1 & w_1 & \dots & t_n & w_n & \end{array} \qquad (3)$$

$(p: X_0 \rightarrow w_0 X_1 w_1 \dots X_n w_n \in P,\ t_i \in D(G),\ \mathrm{root}(t_i) = X_i,\ i=1,\dots,n)$

alaku. Tételezzük fel, hogy a $\pi_\lambda = (e_1,\dots,e_\ell)$, $e_j = (I_j; n_{j_1},\dots,n_{j_{k_j}}; S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$ továbbá a $\pi_i = (e_1^i,\dots,e_{\ell_i}^i)$, $e_k^i = (I_k^i;\dots;S_k^i)$ $(i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,\ell_i)$ jelölések érvényesek. Ekkor

(i) minden $i(=1,\dots,n)$ pontosan ℓ_i-szer fordul elő (1) sorozatban;

(ii) minden $j(=1,\dots,\ell)$-re, a $(\in S_j)$-ra ha $(a,0)_p = f((a_1,i_1),\dots,(a_m,i_m))$ Σ-ban van akkor minden $s(=1,\dots,m)$-re

$$a_s \in \begin{cases} I_1 \cup \ldots \cup I_j & \text{ha } i_s=0 \\ S_1^{i_s} \cup \ldots \cup S_r^{i_s} \text{ ahol } r \text{ az} & \text{ha } 1 \leqq i_s \leqq n \\ \text{a szám, ahányszor } i_s \text{ elő-} & \\ \text{fordul az } n_{1_1} \ldots n_{1_{k_1}} \ldots n_{j_1} \ldots n_{j_{k_j}} & \\ \text{sorozatban} & \end{cases}$$

(iii) minden $i(=1,\ldots,n)$-re, $k(=1,\ldots,\ell_i)$-re, $a\ (\in I_k^i)$-ra, ha $(a,i)_p = f((a_1,i_1),\ldots,(a_m,i_m)) \in \Sigma$ akkor minden $s(=1,\ldots,m)$-re

$$a_s \in \begin{cases} I_1 \cup \ldots \cup I_r \text{ ahol } r \text{ jelenti} & \\ \text{azt a számot amelyre } e_r \text{ tar-} & \text{ha } i_s=0 \\ \text{tarmazza } i \text{ k-adik előfordu-} & \\ \text{lását} & \\ S_1^{i_s} \cup \ldots \cup S_{r'}^{i_s} \text{ ahol } r' \text{ jelenti} & \\ \text{azt a számot ahányszor } i_s & \text{ha } 1 \leqq i_s \leqq n \\ \text{előfordul (1)-ben az } i \text{ k-adik} & \\ \text{előfordulása előtt} & \end{cases}$$

(iv) minden $i(=1,\ldots,n)$-re π^i stratégia t_i-n, ahol $\pi^i_y = \pi_{iy}$ $(y \in path(t_i))$ vagyis π-nek a t_i-re való megszoritása.

Mint ahogy azt mindjárt látni fogjuk, tetszőleges t derivációs fán vett stratégia algoritmusként realizálható t kiszámitásának a megadására. Ezen algoritmus minden x $(\in path(t))$-re kiszámitja $h_x : \alpha(X) \to \overline{V}$ -nek $(X = lb_t(x))$ az $\alpha(X)$ elemein felvett értékeit ugy, hogy ezen h_x-ek összessége éppen t kiszámitása lesz (valamilyen φ-nél).

2.3 Definició. Legyen $t \in D(G)$ melyre $\mathrm{root}(t)=X_0$, $\varphi : I(X_0) \to \bar{V}$ X_0-nál megengedett, π pedig stratégia t-n. Tételezzük fel, hogy π-re érvényesek a 2.2 definició jelölései. Ekkor π-nek t-n való realizálását φ-nél a következőképpen értelmezzük:

(a) Legyen t (2) alaku. Először definiáljuk azt, hogy mit értünk tetszőleges $j(=0,1,\dots,\ell)$-re az $e_1,\dots,e_j$ sorozat t-n való realizálásán φ-nél, w-vel, ahol $w \in \mathbb{N}^*$. Nem jelent ez semmilyen tevékenységet, ha $j=0$. Különben, ha $j > 0$ akkor értjük alatta $e_1,\dots,e_{j-1}$ sorozat t-n, φ-nél, w-vel való realizálását, majd e_j-nek t-n φ_j-nél w-vel való realizálását ahol $\varphi_j = \varphi | I_j$ vagyis φ-nek I_j-re való megszoritása . Ez utóbbi a következő tevékenységeket jelenti:

(i) minden $a\ (\in I_j)$-re legyen $h_w(a) = \varphi_j(a)$;

(ii) minden $a\ (\in S_j)$-re legyen $h_w(a)=f(h_w(a_1),\dots,h_w(a_m))$, ahol $(a,0)_p=f((a_1,0),\dots,(a_m,0))$ Σ-ban van.

Ezek után π-nek, t-n, φ-nél való realizálásán az $e_1,\dots,e_\ell$ sorozat t-n, φ-nél, λ-val való realizálását értjük. (Megjegyezzük, hogy w-nek a felvételére csak a következő, indukciós lépés jobb megfogalmazhatósága érdekében van szükség.)

(b) Legyen most t (3) alaku. Ekkor $e_1,\dots,e_j$ t-n való realizálásán φ-nél w-vel $(j=0,1,\dots,\ell)$ ugyanazt értjük mint (a) esetben, de most e_j-nek, t-n, φ-nél, w-vel való realizálása a következő tevékenységeket jelenti:

(i) minden $a\ (\in I_j)$-re legyen $h_w(a) = \varphi_j(a)$;

(ii) rendre, minden $q = 1,\dots,k_j$ -ra realizáljuk $e_{r_q}^{(n_{j_q})}$-t $t_{n_{j_q}}$-n, $\varphi_{r_q}^{(n_{j_q})}$-nál, wn_{j_q}-val. Most r_q azt a számot jelenti, ahányadik előfordulásánál tartunk n_{j_q}-nak az $n_{1_1}\dots n_{1_{k_1}}\dots n_{j_1}\dots n_{j_{k_j}}$ sorozatban. Továbbá, $\varphi_{r_q}^{(n_{j_q})} : I_{r_q}^{(n_{j_q})} \to \bar{V}$ olyan megengedett leképezés $X_{n_{j_q}}$-nál melyre minden $a\ (\in I_{r_q}^{(n_{j_q})})$ esetén teljesül $\varphi_{r_q}^{(n_{j_q})}(a) = f\,(h_{wx_1}(a_1),\dots,h_{wx_m}(a_m))$ ahol $(a, n_{j_q})_p = f\,((a_1,i_1),\dots,(a_m,i_m))$ Σ-ban van és

$$x_s = \begin{cases} \lambda & \text{ha } i_s = 0 \\ i_s & \text{ha } 1 \leq i_s \leq m \end{cases} \qquad (s=1,\dots,m);$$

(iii) minden $a\ (\in S_j)$-re legyen $h_w(a) = f(h_{wx_1}(a_1),\dots, h_{wx_m}(a_m))$ ahol $(a,0)_p = f\,((a_1,i_1),\dots,(a_m,i_m))$ Σ-ban van és $x_s = \begin{cases} \lambda & \text{ha } i_s = 0 \\ i_s & \text{ha } 1 \leq i_s \leq n \end{cases} \qquad (s=1,\dots,m).$

Magának π-nek t-n φ-nél való realizálásán ismét az $e_1,\dots,e_\ell$ sorozat t-n, φ-nél, λ-val való realizálását értjük.

Intuitive nyilvánvaló, egyébként pedig dp(t) szerinti teljes indukcióval igazolható, hogy tetszőleges $t\ (\in D(G))$ π stratégiájának t-n való realizálása minden $x(\in \text{path}(t))$ és a ($\in \alpha(X)$) esetén definiál egy $h_x(a)$ ($\in V_a$) értéket ($X=lb_t(x)$). Meg kell azonban mutatnunk, hogy ezen $h_x(a)$ értékek mindig kiszámithatók lesznek, vagyis azok az értékek amelyektől függenek, a realizálás során, a $h_x(a)$ kiszámitása előtt már kiszámitódtak. Ezt röviden igy fejezzük ki:

2.4 Lemma. Legyen $t \in D(G)$ melyre $root(t)=X_o$, $\varphi : I(X_o) \to \overline{V}$ X_o-nál megengedett és π stratégia t-n. Ekkor π realizálható t-n φ-nél.

Bizonyitás. Tételezzük fel, hogy érvényesek a 2.2 definició jelölései. Elegendő lesz igazolni a következő állitást: tetszőleges w ($\in \mathbb{N}^*$)-re, j($=0,\ldots,\ell$)-re az $e_1,\ldots,e_j$ sorozat realizálható t-n φ-nél, w-vel. Az igazolás dp(t) szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) Legyen dp(t)=1 tehát t (2) alaku. Most j szerinti indukcióval haladhatunk tovább. Minthogy j=0 esetén nincs mit igazolni tételezzük fel, hogy j>0 és $e_1,\ldots,e_{j-1}$ realizálható t-n φ-nél w-vel. Ezek után a 2.3 definició (a) részének (i) pontjában szereplő értékadások nyilvánvalóan végrehajthatók, mig az ugyanott, (ii) pontban szereplő értékadások végrehajthatók a 2.2 definició (a) részben szereplő feltételek miatt.

(b) Tételezzük fel, hogy t (3) alaku és minden dp(t)-nél kisebb mélységü fára a megfelelő állitás érvényes. Ismét j szerinti teljes indukcióval haladhatunk tovább. Minthogy j=0 esetén ismét nincs mit igazolni tételezzük fel, hogy j-1-re már igazoltuk az állitást. Tekintsük a 2.3 definició (b) részét. Az (i) pontban szereplő értékadások nyilvánvalóan végrehajthatók ezért térjünk át az (ii) pontra. Az itt szereplő realizálások során minden $q(=1,\dots,k_j)$ esetén $\varphi_{r_q}^{(n_{j_q})}$ kiszámitható. Ez következik j-re vonatkozó indukció feltevésből valamint a 2.2 definició (b) részének (iii) pontjából. Másrészt $e_{r_q}^{(n_{j_q})}$ realizálható $t_{n_{j_q}}$-n $\varphi_{r_q}^{(n_{j_q})}$-nál, wn_{j_q}-val a t mélységére vonatkozó indukció feltevés miatt. (Ha teljesen pontosak akarnánk lenni akkor még egy teljes indukciót kellene alkalmaznunk q szerint.) Végül, az (iii) pontban előirt értékadások is végrehajthatók. Ez pedig következik a j-re vonatkozó indukció feltevésünkből, q-ra vonatkozó fenti megállapitásunkból valamint a 2.2 definició (b) részének (ii) pontjából.□

Hátra van még annak igazolása, hogy a stratégia realizálása valóban megadja a fa kiszámitását. Ezt mondja ki a következő lemma amelyet t magassága szerinti teljes indukcióval igazolhatunk, figyelembe véve a realizálás definicióját.

2.5 Lemma. Legyen $t \in D(G)$ melyre $root(t)=X_0$, $\varphi : I(X_0) \to \bar{V}$ X_0-nál megengedett, π pedig stratégia t-n. Ekkor π-nek t-n való realizálása φ-nél, megadja t φ-nél való kiszámitását.□

A stratégia, valamint Φ halmaz definiciója miatt könynyen igazolható a következő tény: tetszőleges $t\ (\in D(G))$-re és π t-n vett stratégiára, π-nek a t-n való realizálása során t minden részfájába legfeljebb K-szor "lépünk be" attributumokat kiértékelni, vagyis t-t K-vizsgáló módon értékeljük ki. Mivel a gyakorlatban általában csak olyan derivációs fák kiértékelése után érdeklődünk, melyeknek gyökere a kezdőszimbólum, ezért célszerü bevezetni a következő fogalmat.

<u>2.6 Definició.</u> Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ K-vizsgáló, ha minden t ($\in D(G)$)-n, melyre root(t)=Z létezik stratégia.

Tekintsük D(G)-nek valamely t elemét, legyen π stratégia t-n továbbá $x \in path(t)$. Vezessük be a $t'=str_t(x)$ jelölést. Ekkor a $\pi^x : path(t') \to \Phi$ leképezés - amely a $\pi^x_y = \pi_{xy}$ ($y \in path(t')$) egyenlőségek által van definiálva - nyilvánvalóan stratégia lesz t'-n. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy G összefüggő, akkor nyilvánvaló lesz a

<u>2.7 Lemma.</u> G akkor és csakis akkor K-vizsgáló, ha minden derivációs fáján létezik stratégia.□

A következőkben szeretnénk megmutatni, hogy a K-vizsgáló tulajdonság eldönthető. Ehhez szükségünk lesz az alábbi két lemmára. Előbb azonban vezessük be a

$$\Pi(t) = \{\pi \mid \pi \text{ stratégia t-n}\} \text{ és}$$

$$\Pi(t,\lambda) = \{(e_1,\ldots,e_\ell) \mid \pi_\lambda = (e_1,\ldots,e_\ell) \text{ valamely } \pi\ (\in \Pi(t))\text{-re}\}$$

jelöléseket.

<u>2.8 Lemma.</u> Legyen $t \in D(G)$ továbbá x,x' ($\in path(t)$) olyan, hogy teljesülnek a következők:

(i) $x'=xy$ valamely y ($\in \mathbb{N}^+$)-ra;

(ii) $lb_t(x)=lb_t(x')=X$ valamely X ($\in N$)-re;

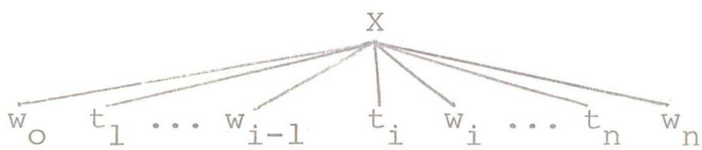
(iii) $\Pi(t_x,\lambda) = \Pi(t_{x'},\lambda)$ ahol $t_x=str_t(x)$, $t_{x'}=str_t(x')$.

Tekintsük t' derivációs fát, amelyet ugy nyerünk t-ből, hogy abban t_x részfát $t_{x'}$-vel helyettesitjük.
Állitjuk, hogy $\Pi(t,\lambda) = \Pi(t',\lambda)$.

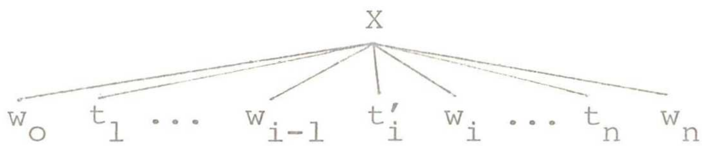
<u>Bizonyitás.</u> Elegendő lesz, ha megmutatjuk a következőt: x-nek minden u prefixére $\Pi(t_u,\lambda) = \Pi(t'_u,\lambda)$ ahol $t_u = str_t(u)$, $t'_u = str_{t'}(u)$. Ezen állitás helyessége $|u|$ szerinti teljes indukcióval igazolható.

Amikor $|u|$ maximális vagyis u=x akkor $\Pi(t'_u,\lambda) = \Pi(t_{x'},\lambda)$ igy (iii) szerint nyilvánvaló amit bizonyitani akarunk.

Tételezzük fel, hogy x-nek valamely ui ($i \in \mathbb{N}$) alaku prefixére igaz az állitás. Meg fogjuk mutatni, hogy u-ra is igaz. Tételezzük fel, hogy t_u a következő alaku:



ahol $t_j = str_t(uj)$; $root(t_j) = X_j$; $j=1,\dots,n$; $p: X \to w_o X_1 w_1 \dots$ $\dots X_n w_n \in P$. Ekkor t'_u



alaku, ahol $t'_i = str_{t'}(ui)$. Legyen $(e_1,\dots,e_\ell) \in \Pi(t_u,\lambda)$ tehát $\pi_\lambda = (e_1,\dots,e_\ell)$ valamely $\pi (\in \Pi(t_u))$-re. Ekkor definició szerint π^j,(vagyis π t_j-re való megszoritása) stratégia t_j-n, továbbá $(e_1,\dots,e_\ell)$-re és π_j elemekre teljesülnek a 2.2 definició (b) pontjában megadott feltételek (j=1,...,n). Indukció feltevésünk szerint $\Pi(t_i,\lambda) = \Pi(t'_i,\lambda)$ következésképpen létezik $\bar{\pi}^i$ $(\in \Pi(t'_i))$ amelyre $\bar{\pi}^i_\lambda = \pi^i_\lambda$. Állitjuk, hogy $\pi' \in \Pi(t'_u)$, ahol

(i) $\pi'_\lambda = (e_1,\ldots,e_\ell)$;

(ii) $\pi'_{jy} = \pi_{jy}$ $(j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n;\ y \in \text{path}(t_j))$;

(iii) $\pi'_{iy} = \bar{\pi}^i_y$ $(y \in \text{path}(t_i))$.

Valóban, π'-nek t_j-re való megszoritása megegyezik π^j-vel, ha $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$, mig π'-nek t_i-re való megszoritása $\bar{\pi}^i$; következésképpen π'-nek t_j-re való megszoritása stratégia t_j-n minden $j(=1,\ldots,n)$-re. Másrészt $(e_1,\ldots,e_\ell)$ -re és π'_j-re teljesülnek a 2.2 definició (b) részének feltételei minden $j(=1,\ldots,n)$-re, mert $\pi'_j = \pi_j$ ha $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$ és $\pi'_i = \bar{\pi}^i_\lambda = \pi^i_\lambda = \pi_i$, továbbá t'_u gyökerénél is p szabályt alkalmaztuk. Következésképpen $(e_1,\ldots,e_\ell) \in \Pi(t'_u,\lambda)$ tehát $\Pi(t_u,\lambda) \subseteq \Pi(t'_u,\lambda)$. A megforditott irányu tartalmazás teljesen hasonlóan látható igy annak igazolását elhagyjuk.□

Vezessük most be a

$$T=\{t\ (\in D(G))\ |\ \Pi(t)=\emptyset\}$$

jelölést. Mindenekelőtt, nyilvánvaló a következő: $\mathcal{G}$ akkor és csakis akkor K-vizsgáló, ha $T=\emptyset$.

<u>2.9 Lemma.</u> Legyen $M=\max\{\|\Phi_X\|\ |\ X \in N\}$ és $L=M.|N|$. Állitjuk, hogy T akkor és csakis akkor nem üres, ha van L-nél nem nagyobb mélységü eleme.

<u>Bizonyitás.</u> Tételezzük fel, hogy $T \neq \emptyset$ és mégis minden elemének mélysége nagyobb mint L. Legyen t a T-nek minimális rangu eleme. Minthogy $dp(t)>L$ igy léteznek $x_0,x_1,\ldots,x_M$ $(\in \text{path}(t))$ elemek amelyekre teljesül:

(i) minden $j(=0,1,\ldots,M-1)$-re $x_{j+1}=x_jy_j$ valamely $y_j\ (\in \mathbb{N}^+)$-re;

(ii) minden $j(=0,1,\ldots,M)$-re $lb_t(x_j)=X$ valamely $X\ (\in N)$-re.

Vezessük be a $t_j=str_t(x_j)$ jelöléseket $(j=0,\dots,M)$. Mivel $\Pi(t_j,\lambda)\subseteq\Phi_X$ $(j=0,\dots,M)$ és $M\geq\|\Phi_X\|$ igy van olyan $0\leq k<\ell\leq M$ melyekre $\Pi(t_k,\lambda)=\Pi(t_\ell,\lambda)$. Alkalmazzuk most a 2.8 lemmát t-re x_k-ra és x_ℓ-re. Adódik, hogy van olyan t' $(\in D(G))$ melyre $rn(t')<rn(t)$ és $\Pi(t',\lambda)=\Pi(t,\lambda)=\emptyset$ tehát $\Pi(t')=\emptyset$, ami lehetetlen t választása miatt.

Minthogy az állitás másik iránya nyilvánvaló igy a bizonyitást befejeztük.□

<u>2.10 Tétel.</u> $\mathcal{G}$-ről eldönthető, hogy K-vizsgáló avagy nem.

<u>Bizonyitás.</u> Következik 2.9 lemmából valamint abból a tényből, hogy minden t $(\in D(G))$-re $\Pi(t)$ algoritmikusan megkonstruálható véges halmaz.□

Az alábbiakban bevezetjük a K-vizsgáló attributumnyelvtanoknak egy szükebb osztályát, amelynek további tanulmányozása érdekes lehet effektivebb attributumkiértékelés szempontjából.

Legyen adott a $\varrho=\{\varrho_X \mid X\in N\}$ rendszer, ahol minden X $(\in N)$ esetén a ϱ_X diszjunkt particionálása $\alpha(X)$ elemeinek legfeljebb K komponensre, vagyis

$$\varrho_X=(A_1^X,\dots,A_{\ell_X}^X),\quad \ell_X\leq K. \tag{4}$$

Definiáljuk $\Phi_X(\varrho)$ halmazt a következőképpen:

$(e_1,\dots,e_\ell)\in\Phi_X(\varrho)\iff$(a) $(e_1,\dots,e_\ell)\in\Phi_X$

$(e_j=(I_j;n_{j_1},\dots,n_{j_{k_j}};S_j)$, $j=1,\dots,\ell)$;

(b) $\ell=\ell_X$ és minden $j(=1,\dots,\ell)$-re teljesül $A_j^X=I_j\cup S_j$.

Vezessük még be a $\Phi(\varrho)=\cup(\Phi_X(\varrho) \mid X\in N)$ jelölést.

<u>2.11 Definició.</u> Legyen $t\in D(G)$ és π:path(t)$\rightarrow \Phi(\varrho)$.
Azt mondjuk, hogy π ϱ-egyenletes K stratégia t-n, ha

(a) π stratégia t-n,

(b) minden x ($\in$ path(t))-re $\pi_x \in \Phi_X(\varrho)$, ahol $X=lb_t(x)$.

<u>2.12 Definició.</u> Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ ϱ-egyenletesen K-vizsgáló, ha minden t ($\in D(G)$)-n létezik ϱ-egyenletes stratégia.

<u>2.13 Definició.</u> $\mathcal{G}$ egyenletesen K-vizsgáló, ha ϱ-egyenletesen K-vizsgáló valamely ϱ-ra.

Definicióink értelmében nyilvánvaló a következő: tetszőleges attributumnyelvtan akkor és csakis akkor 1-vizsgáló, ha egyenletesen 1-vizsgáló.

Eddigi eredményeinkből következni fog $\mathcal{G}$ ϱ-egyenletesen K-vizsgáló, valamint egyenletesen K vizsgáló tulajdonságainak eldönthetősége is. Ennek igazolása végett vezessük be a

$$\Pi(t,\varrho)=\{\pi \mid \pi \ \varrho\text{-egyenletes stratégia t-n}\} \text{ és}$$
$$\Pi(t,\varrho,\lambda)=\{(e_1,\dots,e_\ell) \mid \pi_\lambda=(e_1,\dots,e_\ell) \text{ valamely } \pi(\in\Pi(t,\varrho)) \text{ -re}\}$$

jelöléseket. Ha most a 2.8 lemma (iii) feltételét $\Pi(t_x,\varrho,\lambda)=\Pi(t_{x'},\varrho,\lambda)$ -ra változtatjuk, akkor az analóg $\Pi(t,\varrho,\lambda)=\Pi(t',\varrho,\lambda)$ állítást tudjuk igazolni, mégpedig az ott szereplő bizonyitást követve. Másrészt, bevezetve a

$$T(\varrho)=\{t \ (\in D(G)) \mid \Pi(t,\varrho)=\emptyset\}$$

jelölést, T helyett $T(\varrho)$ -t véve, érvényes marad a 2.9 lemma még akkor is, ha a kisebb $M(\varrho)=\max\{\ \|\Phi_X(\varrho)\| \mid X\in N\}$ konstanssal számolunk.

2.14 Következmény. Tetszőleges (4) alaku ϱ-ra eldönthető, hogy $\mathcal{G}$ ϱ-egyenletesen K-vizsgáló, vagy nem.□

Mivel (4) alaku diszjunkt particionálások száma nyilvánvalóan véges, igy érvényes

2.15 Következmény. $\mathcal{G}$-ről eldönthető, hogy egyenletesen K-vizsgáló, vagy nem.□

A következőkben felső korlátot fogunk adni $\mathcal{G}$ lehetséges vizsgálatainak a számára.

2.16 Definició. Legyen $t \in D(G)$ és π stratégia t-n. Tételezzük fel, hogy tetszőleges x ($\in path(t)$) -re érvényesek a következő jelölések: $\pi_x=(e_1^x,\dots,e_{\ell_x}^x)$, $e_j^x=(I_j^x;\dots;S_j^x)$ $(j=1,\dots,\ell_x)$. Azt mondjuk, hogy π redukált a szintetizált attributumokra, ha minden x ($\in path(t)$) -re, $j(=1,\dots,\ell_x-1)$-re $S_j^x \neq \emptyset$. Ugyanez a π redukált az örökölt attributumokra, ha minden x ($\in path(t)$)-re $j(=2,\dots,\ell_x)$-re $I_j^x \neq \emptyset$. Végül π redukált, ha redukált a szintetizált és redukált az örökölt attributumokra.

2.17 Lemma. Legyen $t \in D(G)$, π stratégia t-n. Ekkor effektiven konstruálható $\bar{\pi}$ stratégia t-n amely redukált a szintetizált attributumokra.

Bizonyitás.

(a) Legyen $dp(t)=1$ tehát t (2) alaku, és $\pi_\lambda=(e_1,\dots,e_\ell)$ ahol $e_j=(I_j;S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$. Tekintsük a maximális hosszuságu $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_m \leq \ell$ sorozatot, amelyre minden $j(=1,\dots,m)$ esetén $S_{p_j} \neq \emptyset$. Konstruáljuk meg $\bar{\pi}_\lambda=(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$ -t ahol

(i) $\bar{\ell} = \begin{cases} m & \text{ha } p_m = \ell \\ m+1 & \text{ha } p_m < \ell \end{cases}$

(ii) $\bar{e}_j = (\bar{I}_j; \bar{S}_j)$-re $(j=1,\ldots,\bar{\ell})$ teljesülnek:

$\bar{I}_j = \bigcup (I_r \mid r = p_{j-1}+1,\ldots,p_j)$,

$\bar{S}_j = \bigcup (S_r \mid r = p_{j-1}+1,\ldots,p_j)$ ahol $p_0 := 0$, $p_{m+1} := \ell$.

(b) Legyen most t (3) alaku. Vegyük fel a következő jelöléseket: $\mathcal{T}_\lambda = (e_1,\ldots,e_\ell)$, $e_j = (I_j; n_{j_1},\ldots,n_{j_{k_j}}; S_j)$ $(j=1,\ldots,\ell)$; $\mathcal{T}_i = (e_1^i,\ldots,e_{\ell_i}^i)$, $e_k^i = (I_k^i;\ldots;S_k^i)$ $(i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,\ell_i)$. Tételezzük fel, hogy $\mathcal{T}^i$-ből ($\mathcal{T}$-nek t_i-re való megszoritásából) már megkonstruáltuk $\bar{\mathcal{T}}^i$-t, ahol $\bar{\mathcal{T}}_\lambda^i = (\bar{e}_1^i,\ldots,\bar{e}_{\bar{\ell}_i}^i)$ és $\bar{e}_k^i = (\bar{I}_k^i;\ldots;\bar{S}_k^i)$ $(i=1,\ldots,n;$ $k=1,\ldots,\bar{\ell}_i)$. Tetszőleges $i(=1,\ldots,n)$-re $1 \leq p_1^i < \ldots < p_{m_i}^i \leq \ell_i$ jelölje a maximális hosszuságu olyan sorozatot, amelynél $S_k^i \neq \emptyset$ ha $k=1,\ldots,m_i$. Ekkor teljesülni fognak a következők:

(i) $\bar{\ell}_i = \begin{cases} m_i & \text{ha } p_i = \ell_i \\ m_i+1 & \text{ha } p_i < \ell_i \end{cases}$

(ii) $\bar{I}_k^i = \bigcup (I_r^i \mid r = p_{k-1}^i+1,\ldots,p_k^i)$

$\bar{S}_k^i = \bigcup (S_r^i \mid r = p_{k-1}^i+1,\ldots,p_k^i)$ $(p_0^i = 0; p_{m_i+1}^i = \ell_i;\ k=1,\ldots,\bar{\ell}_i)$.

Konstruáljuk meg $(e_1,\ldots,e_\ell)$-ből $(e_1',\ldots,e_\ell')$-t a következőképpen: minden $i(=1,\ldots,n)$-re hagyjuk el i-nek a $p_1^i,\ldots,p_{m_i}^i$-ediktől különböző előfordulásait $(e_1,\ldots,e_\ell)$ megfelelő elemeiből, ha $p_i = \ell_i$, egyébként pedig, ha $p_i < \ell_i$, akkor a $p_1^i,\dots,p_{m_i}^i$, ℓ_i-ediktől különböző előfordulásait. Ekkor e_j' felvehető $(I_j;n_{j_1}',\dots,n_{j_{k_j'}}';S_j)$ alakban $(j=1,\dots,\ell)$ és minden $i(=1,\dots,n)$ pontosan $\bar{\ell}_i$-szer fordul elő az

$$n_{1_1}'\dots n_{1_{k_1'}}'\ n_{2_1}'\dots n_{\ell_{k_\ell'}}' \tag{5}$$

sorozatban. Tetszőleges $j(=1,\dots,\ell)$ esetén az $n_{j_1}'\dots n_{j_{k_j'}}'$ sorozatot jelöljük röviden $\underline{n}_j'$-vel.

Legyen most ismét $1 \leqq p_1 < \dots < p_m \leqq \ell$ a maximális hosszuságu olyan sorozat amelyre $S_{p_j} \neq \emptyset$, ha $j=1,\dots,m$. Konstruáljuk meg $\bar{\pi}_\lambda=(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$-t ahol

(i) $\bar{\ell}$ ugyanaz mint (a)-ban,

(ii) $\bar{e}_j=(\bar{I}_j;\underline{n}_{p_{j-1}+1}',\dots,\underline{n}_{p_j}';\bar{S}_j)$ $(p_0:=0,\ p_{m+1}:=\ell,\ \bar{I}_j$ és $\bar{S}_j$ ugyanaz mint (a)-ban, $j=1,\dots,\bar{\ell})$

A konstrukcióból, valamint abból, hogy π stratégia t-n nyilvánvalóan következik, hogy $(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$-ra és $\bar{\pi}_i$ elemekre $(i=1,\dots,n)$ teljesülnek a 2.2 definició feltételei tehát $\bar{\pi}$ stratégia t-n. Másrészt $\bar{\pi}$ zárt† a szintetizált attributumokra.□

<u>2.18 Lemma.</u> Legyen $t \in D(G)$, π stratégia t-n. Ekkor effektiven konstruálható $\bar{\pi}$ stratégia t-n amely zárt az örökölt attributumokra.

<u>Bizonyitás.</u> Tételezzük fel, hogy π-re érvényesek a 2.17 lemma jelölései. Az igazolást ujra dp(t) szerinti teljes indukcióval végezzük.

(a) Legyen t (2) alaku és $1 \leqq p_1 < \dots < p_m \leqq \ell$ a maximális hosszuságu olyan sorozat amelyre minden $j(=1,\dots,m)$ esetén $I_{p_j} \neq \emptyset$. Konstruáljuk meg $\bar{\pi}_\lambda=(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$-t a következőképpen:

† Más szóval: redukált.

(i) $\bar{\ell}=\begin{cases} m & \text{ha } p_1=1 \\ m+1 & \text{ha } p_1>1; \end{cases}$

(ii) $\bar{e}_j=(\bar{I}_j;\bar{S}_j)$ $(j=1,\dots,\bar{\ell})$, ahol

$$\bar{I}_j=\begin{cases} \cup(I_r \mid r=p_j,\dots,p_{j+1}-1) & (p_{m+1}:=\ell+1) \text{ ha } \bar{\ell}=m \\ \cup(I_r \mid r=p_{j-1},\dots,p_j-1) & (p_0:=1, p_{m+1}:=\ell+1) \text{ ha } \bar{\ell}=m+1; \end{cases}$$

$$\bar{S}_j=\begin{cases} \cup(S_r \mid r=p_j,\dots,p_{j+1}-1) & (p_{m+1}:=\ell+1) \text{ ha } \bar{\ell}=m \\ \cup(S_r \mid r=p_{j-1},\dots,p_j-1) & (p_0:=1, p_{m+1}:=\ell+1) \text{ ha } \bar{\ell}=m+1. \end{cases}$$

Ekkor $\bar{\pi}$ nyilván zárt lesz az örökölt attributumokra.

(b) Tételezzük fel, hogy t (3) alaku és π^i-ből már megkonstruáltuk $\bar{\pi}^i$-t amely redukált az örökölt attributumokra $(i=1,\dots,n)$. Ha minden $i(=1,\dots,n)$-re $1\le p_1^i<\dots<p_{m_i}^i\le \ell_i$ jelöli a maximális hosszuságu olyan sorozatot melyre minden $k(=1,\dots,m_i)$ esetén $I_k^i\ne\emptyset$ akkor teljesülnek a következők:

(i) $\bar{\ell}_i=\begin{cases} m_i & \text{ha } p_1^i=1 \\ m_i+1 & \text{ha } p_1^i>1 \end{cases}$

(ii)
$$\bar{I}_k^i=\begin{cases} \cup(I_r^i \mid r=p_k^i,\dots,p_{k+1}^i-1) & (p_{m_i+1}:=\ell_i+1) \\ & \text{ha } \bar{\ell}_i=m_i \\ \cup(I_r^i \mid r=p_{k-1}^i,\dots,p_k^i-1) & (p_0^i:=1, p_{m_i+1}^i:=\ell_i+1) \\ & \text{ha } \bar{\ell}_i=m_i+1 \end{cases}$$

$$\bar{S}_k^i=\begin{cases} \cup(S_r^i \mid r=p_k^i,\dots,p_{k+1}^i-1) & (p_{m_i+1}:=\ell_i+1) \\ & \text{ha } \bar{\ell}_i=m_i \\ \cup(S_r^i \mid r=p_{k-1}^i,\dots,p_k^i-1) & (p_0^i:=1, p_{m+1}^i:=\ell_i+1) \\ & \text{ha } \bar{\ell}_i=m_i+1, \end{cases}$$

ahol $\bar{I}_k^i$, $\bar{S}_k^i$ ugyanazt jelentik mint a 2.17 lemmában.

Először konstruáljuk meg $(e_1,\ldots,e_\ell)$-ből $(e'_1,\ldots,e'_\ell)$ -t a következőképpen: minden $i(=1,\ldots,n)$-re hagyjuk el i-nek a $p^i_1,\ldots,p^i_{m_i}$-ediktől különböző előfordulásait $(e_1,\ldots,e_\ell)$ megfelelő eleméből, ha $p^i_1=1$, különben pedig, ha $p^i_1>1$ akkor az $1,p^i_1,\ldots,p^i_{m_i}$-ediktől különböző előfordulásait. Ezáltal e'_j felvehető ugyanolyan alakban, mint a 2.17 lemmában, továbbá minden $i(=1,\ldots,n)$ $\bar{\ell}_i$-szer fordul elő (5) sorozatban. Vezessük be ujra az e'_j-ben levő számsorozat jelölésére $\underline{n}'_j$-t $(j=1,\ldots,\ell)$.

Végül legyen ismét $1\leq p_1<p_2<\ldots<p_m\leq\ell$ az (a) pontban definiált tulajdonságu sorozat. Konstruáljuk meg

$\bar{\pi}_\lambda=(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$-t ahol

(i) $\bar{\ell}$ ugyanaz mint (a) esetben;

(ii) minden $j(=1,\ldots,\bar{\ell})$-ra

$$\bar{e}_j=\begin{cases}(\bar{I}_j;\underline{n}'_{p_j},\ldots,\underline{n}'_{p_{j+1}-1};\bar{S}_j) & (p_{m+1}:=\ell+1) \text{ ha } \bar{\ell}=m\\ (\bar{I}_j;\underline{n}'_{p_{j-1}},\ldots,\underline{n}'_{p_j-1};\bar{S}_j) & (p_0:=1;p_{m+1}:=\ell+1)\\ & \text{ha } \bar{\ell}=m+1,\end{cases}$$

ahol $\bar{I}_j$ és $\bar{S}_j$ ugyanaz mint (a)-ban.

A konstrukcióból valamint abból, hogy π stratégia t-n ujra következik, hogy $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{\bar{\ell}})$-re és $\bar{\pi}_i$ elemekre $(i=1,\ldots,n)$ teljesülnek a 2.2 definició feltételei, továbbá az is nyilvánvaló, hogy $\bar{\pi}$ redukált az örökölt attributumokra.□

Ha most adott valamilyen t derivációs fán egy π stratégia, akkor ez a fenti konstrukciók tetszőleges sorrendben történő egymás utáni alkalmazásával redukálttá tehető. Sőt, ha π $\wp$-egyenletes valamilyen $\wp$-ra, akkor $\bar{\pi}$ $\bar{\wp}$-egyenletes lesz, a konstrukcióból kapott $\bar{\wp}$-ra . Érvényes lesz tehát a

2.19 Tétel. Ha $\mathcal{G}$ (egyenletesen) K vizsgáló, akkor (egyenletesen) K' vizsgáló valamely

$$K' \leqq \max\{\min(|I(X)|, |S(X)|) \mid X \in N\}+1 \text{ -re.}\square \qquad (6)$$

Ennek a tételnek az egyenletesen K-vizsgáló esetre történő megfogalmazása és a miénktől eltérő bizonyitása megtalálható [10]-ben is. Végül megemlitünk néhány következményt, amelyek eddigi eredményeinknek néhány más eredménnyel való összevetéséből származnak. [31]-ben nyert igazolást, hogy ha $\mathcal{G}$ nemcirkuláris, akkor K' vizsgáló valamely K'($\leqq$ |A|)-re. Ez a 2.19 tétellel tovább erősithető:

2.20 Következmény. Ha $\mathcal{G}$ nemcirkuláris, akkor K' vizsgáló valamely (6) alaku K'-re.□

Másrészt, [10]-ben összehasonlitást nyert az egyenletesen K' vizsgáló osztály a [25]-ben bevezetett rendezett attributumnyelvtanok osztályával: $\mathcal{G}$ akkor és csakis akkor egyenletesen K'-vizsgáló (valamilyen K'-re), ha rendezett. Továbbá, ugyancsak [25]-ben található példa olyan nemcirkuláris attributumnyelvtanra, amely nem rendezett. Következésképpen 2.20 következmény nem erősithető egyenletesen K' vizsgálóvá.

II. ATTRIBUTUMOS FATRANSZFORMÁTOROK

1. *Fogalmak, jelölések*

Az alább bevezetésre kerülő fogalmakat illetően elsősorban [21] és [22] munkákra támaszkodtunk.

Müveleti szimbólumok halmazán a páronként diszjunkt $F_0, F_1, \ldots$ szimbólumhalmazok $F = \cup(F_n | n=0,1,\ldots)$ egyesitését értjük; F_n $(n=0,1,\ldots)$ elemeit pedig n változós müveleti szimbólumoknak hivjuk. Ha F véges akkor rangolt ábécének nevezzük.

Legyen S F-el diszjunkt halmaz. Az S feletti F tipusu fák $T_F(S)$ halmazán a legszükebb olyan halmazt értjük, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

(i) $F_0 \cup S \subseteq T_F(S)$;

(ii) $f(p_1,\ldots,p_n) \in T_F(S)$ valahányszor $f \in F_n$ $(n \geq 1)$ és $p_1,\ldots,p_n \in T_F(S)$.

Amennyiben S az üres halmaz ugy $T_F(S)$ helyett a rövidebb T_F jelölést használjuk. $T_F(S)$ részhalmazait S feletti F tipusu erdőknek nevezzük, a T_F halmaz részhalmazait pedig F tipusu erdőknek. Erdőnek nevezünk egy halmazt, ha F erdő valamilyen F-re.

Tetszőleges p $(\in T_F(S))$ fa dp(p) mélységét, rn(p) rangját, root(p) gyökerét és részfáinak sub(p) halmazát a következőképpen értelmezzük: $p \in (F_0 \cup S)$ esetén $dp(p)=0$, $rn(p)=1$, $root(p)=p$ és $sub(p)=\{p\}$, különben, ha $p=f(p_1,\ldots,p_n)$ akkor $dp(p)=1+\max\{dp(p_j) | 1 \leq j \leq n\}$, $rn(p)=1+\sum_{j=1}^{n} rn(p_j)$, $root(p)=f$ és

$\mathrm{sub}(p)=\{p\} \cup (\cup(\mathrm{sub}(p_j) \mid j=1,\dots,n))$. A p nulla magasságu részfáit p leveleinek nevezzük.

Ugyanezen p-re a p-beli utak path(p) halmazán $\mathbb{N}^*$-nak a következő részhalmazát értjük: $\mathrm{path}(p)=\{\lambda\}$ ha $p \in (F_0 \cup S)$, és $\mathrm{path}(p)=\{\lambda\} \cup \{ jv \mid j=1,\dots,n,\ v \in \mathrm{path}(p_j)\}$ ha $p=f(p_1,\dots,p_n)$. Minden p-beli w ut kijelöl egy $F \cup S$-beli $lb_p(w)$ cimkét és egy sub(p)-beli $str_p(w)$ részfát, amelyeket az alábbi összefüggésekkel értelmezünk:

$$lb_p(w)=\begin{cases} \mathrm{root}(p) & \text{ha } w=\lambda \\ lb_{p_j}(v) & \text{ha } w=jv,\ p=f(p_1,\dots,p_n),\ 1\leqq j\leqq n; \end{cases}$$

$$str_p(w)=\begin{cases} p & \text{ha } w=\lambda \\ str_{p_j}(v) & \text{ha } w=jv,\ p=f(p_1,\dots,p_n),\ 1\leqq j\leqq n. \end{cases}$$

Ha adott egy F müveleti szimbólum halmaz, akkor bevezethetjük az F tipusu nemdeterminisztikus algebra fogalmát. Ez egy $\underline{A}=(A,F^{\underline{A}})$ rendszer, ahol A nemüres halmaz, $F^{\underline{A}}=\{f^{\underline{A}} \mid f \in F\}$ és tetszőleges $n\ (\geqq 0)$ esetén F_n-nek minden f elemére $f^{\underline{A}}$ az A^n halmaznak P(A)-ba való leképezése. Ha n=O akkor $f^{\underline{A}}$-t általában A-nak egy részhalmazával azonositjuk. Tetszőleges $f\ (\in F)$-re $f^{\underline{A}}$-t az f $\underline{A}$-ban való realizáltjának nevezzük. A továbbiakban, ha a félreértés veszélye nem forog fenn, $f^{\underline{A}}$-ból és $F^{\underline{A}}$-ból elhagyjuk az $\underline{A}$ indexet.

Legyen $p \in T_F$. Értelmezhető p-nek $\underline{A}$-ban való $p^{\underline{A}}$ realizáltja:

(i) ha $p=f\ (\in F_0)$ akkor $p^{\underline{A}}=f^{\underline{A}}$;

(ii) ha $p=f(p_1,\dots,p_n)$ $(n\geqq 1)$ akkor $p^{\underline{A}}=\cup (f^{\underline{A}}(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in p_i^{\underline{A}},\ i=1,\dots,n)$.

Legyen most F rangolt ábécé. Az $\underline{A}=(A,F,A')$ rendszert nemdeterminisztikus F automatának mondjuk, ha A véges halmaz, $A'\subseteq A$, az (A,F) rendszer pedig nemdeterminisztikus algebra. Ezen utóbbi algebrát ugyancsak $\underline{A}$-val jelölve értelmezhető az $\underline{A}$ automata által felismert $T(\underline{A})$ erdő:

$$T(\underline{A})=\{p\ (\in T_F)\mid p^{\underline{A}}\cap A'\neq\emptyset\}.$$

Az F tipusu automaták tehát F tipusu erdők felismerésére alkalmasak. Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ rendszer nemdeterminisztikus faautomata, ha F automata valamely F rangolt ábécére. A faautomatákkal felismerhető erdők osztályát felismerhető erdőknek nevezzük.

Ismeretes, hogy az erdők ezen osztálya megegyezik az un. reguláris erdők osztályával (ld. [21]). A dolgozatban inkább ez utóbbi elnevezést használjuk.

A továbbiakban F,G és H mindig rangolt ábécéket jelentenek, sőt még azt is feltételezzük, hogy O változós müveleti szimbólum halmazaik nem üresek.

A $T(\subseteq T_F\times T_G)$ alaku halmazokat fatranszformációknak nevezzük és $(p,q)\in T$ tartalmazás esetén azt mondjuk, hogy p képe q. Ugyanennek a T-nek dom T értelmezési tartományán a $\mathrm{dom}\,T=\{p\mid \exists q\ (p,q)\in T\}$ erdőt értjük.

Szükségünk lesz az egész dolgozatban rögzitett, megszámlálhatóan végtelen

$$Z=\{z_0,z_1,\dots\}$$

halmazra amelynek elemeit segédváltozó szimbólumoknak hivjuk. Tetszőleges $n(\geq 0)$ esetén alkalmazni fogjuk a $Z_n=\{z_1,\dots,z_n\}$ jelölést (tehát $z_0\in Z$ de $Z_0=\emptyset$).

Legyen $p\in T_F(Z_n)$ $(n\geq 0)$. Ekkor p-re a $p(z_1,\dots,z_n)$ irásmódot is használjuk. Azt mondjuk, hogy p nemtörlő, ha levelei között Z_n-nek minden eleme legalább egyszer előfordul. Lineáris p, ha Z_n-nek minden eleme legfeljebb egyszer fordul elő levelei között. $T_F(Z_n)$ lineáris és nemtörlő tulajdonságokkal rendelkező elemeinek halmazát $\hat{T}_F(Z_n)$-el jelöljük. Továbbá, ha $s_1,\dots,s_n$ valamely S halmaz elemei, akkor $p(s_1,\dots,s_n)$-el jelöljük azt a fát, amelyet ugy kapunk a fenti p-ből, hogy abban z_j levél minden egyes előfordulását s_j-vel helyettesitjük $(j=1,\dots,n)$.

Leszálló fatranszformátoroknak nevezzük az $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ rendszert, ahol A az állapotok véges, nemüres halmaza amely diszjunkt F,G és P-től, $A'(\subseteq A)$ a végállapotok halmaza és végül P

$$f(a_1z_1,\dots,a_kz_k) \to a\bar{q}(z_1,\dots,z_k) \qquad (1)$$

$(k\geq 0;\ f\in F_k;\ \bar{q}\in T_G(Z_k);\ a,a_1,\dots,a_k\in A)$ alaku un. átirási szabályok véges halmaza.

Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ teljesen definiált, ha minden $k(\geq 0)$, $f(\in F_k)$, $a_1,\dots,a_k(\in A)$esetén legalább egy (1) alaku szabály P-ben van. $\underline{A}$ determinisztikus, ha P-ben különböző szabályok bal oldalai is különbözőek. Az egyállapotu, teljesen definiált, determinisztikus leszálló fatranszformátort leszálló homomorfizmusnak nevezzük.

A $T_F(A\times T_G)$ halmazon értelmezhető a $\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}$ kétváltozós reláció amelyet közvetlen derivációnak nevezünk: tetszőleges $p,q\ (\in T_F(A\times T_G))$ esetén akkor és csakis akkor álljon fenn $p\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}q$, ha q ugy áll elő p-ből, hogy ennek valamely $f(a_1q_1,\dots,a_kq_k)$ alaku részfáját az $a\bar{q}(q_1,\dots,q_k)$ fával helyettesitjük, ahol (1) szabály P-ben van $(q_1,\dots,q_k\in T_G)$. (Az $A\times T_G$ (a,t) alaku elemei helyett at-t irtunk amit a továbbiakban is megteszünk.) Az $\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}$ reláció reflexiv, tranzitiv lezártját $\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}}$-val jelöljük és derivációnak nevezzük. Most már értelmezhetjük az $\underline{A}$ által indukált $T(\underline{A})$ fatranszformációt:

$$T(\underline{A})=\{(p,q)\mid p\in T_F, q\in T_G,\ p\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} aq \text{ valamely } a\ (\in A')\text{-ra}\}.$$

Tekintsük ujra az $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ rendszert. Azt mondjuk, hogy ez egy felszálló fatranszformátor, ha A és A' ugyanazt jelentik mint leszálló esetben, de A'-t most a kezdő állapotok halmazának nevezzük, P pedig

$$af(z_1,\dots,z_k)\longrightarrow \bar{q}(a_1z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell}) \qquad (2)$$

$(k,\ell\geqq 0;\ f\in F_k;\ 1\leqq i_1,\dots,i_\ell\leqq k;\ \bar{q}\in T_G(Z_\ell);\ a,a_1,\dots,a_\ell\in A)$ alaku átirási szabályok véges halmaza.

$\underline{A}$ determinisztikus, ha különböző P-beli szabályok bal oldalai is különbözőek és A' egyelemü halmaz. $\underline{A}$-t teljesen definiáltnak mondjuk, ha minden k (≥ 0), f $(\in F_k)$ és a $(\in A)$ esetén legalább egy (2) alaku szabály P-ben van. Az egyállapotu, teljesen definiált, determinisztikus felszálló fatranszformátort felszálló homomorfizmusnak nevezzük.

Ujra bevezethető a $\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}$-val jelölt, közvetlen levezetés reláció, de most a $T_G(A\times T_F(Z))$ halmazon. Ezen halmaz tetszőleges p,q elemeire akkor és csak akkor álljon fenn $p\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow} q$, ha q megkapható ugy p-ből, hogy p-nek valamely $af(p_1,\dots,p_k)$ részfáját a $\bar{q}(a_1p_{i_1},\dots,a_\ell p_{i_\ell})$ fával helyettesitjük, ahol (2) szabály P-ben van $(p_1,\dots,p_k\in T_F(Z))$. A közvetlen deriváció reflexiv, tranzitiv lezártját most is $\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}}$-val jelöljük és derivációnak nevezzük, az $\underline{A}$ által indukált $T(\underline{A})$ transzformációt pedig a

$$T(\underline{A})=\{(p,q)\mid p\in T_F, q\in T_G,\ ap\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} q \text{ valamely } a\ (\in A')\text{-ra}\}$$

egyenlőséggel értelmezzük. (Vegyük észre, hogy $\underset{A}{\Rightarrow}$-t elegendő lett volna a $T_G(A \times T_F)$ halmazon értelmezni, azonban az itt bevezetett általánosabb derivációra szükségünk lesz a 3.4 tételben.)

A dolgozatban a leszálló (felszálló) fatranszformátorok által indukálható fatranszformációk osztályát leszálló (felszálló) fatranszformációknak nevezzük és $\mathcal{L}$ $(\mathcal{F})$-el jelöljük. Ezen jelölések előtt a $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ jelek a megfelelő fatranszformátorok teljesen definiált, determinisztikus tulajdonságaira utalnak.

Jól ismert eredmény, hogy a leszálló homomorfizmusok által indukálható fatranszformációk osztálya megegyezik a felszálló homomorfizmusok által indukálható fatranszformációk osztályával. Igy, mindkét osztály jelölésére $\mathcal{H}$-t fogjuk használni.

Végül megemlitjük, hogy értelmezhetők olyan faautomaták, fatranszformátorok, amelyek többváltozós polinom szimbólumok feldolgozására is alkalmasak (ld. [21], [22]). Ezáltal lehetőség nyilik - többek között - faautomaták által felismert nyelvek, transzformációs nyelvek vizsgálatára. Könnyü látni, hogy dolgozatunk eredményei ilyen általánosabb objektumokra is átfogalmazhatók, ezért - és a jelölésbeli egyszerüség kedvéért-csak a jelen, speciálisabb eset vizsgálatára szoritkoztunk.

2. *Attributumos fatranszformációk összehasonlitása leszálló és felszálló fatranszformációkkal.*

2.1 Definició. Attributumos fatranszformátornak nevezzük az $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ rendszert, ahol

(a) A az attributumok véges halmaza amely egyesitése az egymástól diszjunkt szintetizált attributumok A_s halmazának és örökölt attributumok A_i halmazának;

(b) $A_s' \subseteq A_s$;

(c) $rt: A_i \to \overline{P}(T_G)$ leképezés ($A_i=\emptyset$ esetén nem specifikáljuk $\underline{A}$-ban);

(d) P véges halmaza az

$$af(z_1,\dots,z_k) \leftarrow \overline{q}(a_1 z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell}) \qquad (1)$$

$(a \in A_s; k,\ell \geq 0; f \in F_k; \overline{q} \in T_G(Z_\ell); 0 \leq i_1,\dots,i_\ell \leq k; a_r \in \begin{cases} A_i & \text{ha } i_r=0 \\ A_s & \text{ha } 1 \leq i_r \leq k \end{cases};$ $r=1,\dots,\ell)$ alaku és

$$a(z_i,f) \leftarrow \overline{q}(a_1 z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell}) \qquad (2)$$

alaku átirási szabályoknak ($a \in A_i$; $f \in F_k$ valamely $k(\geq 1)$-ra; $1 \leq i \leq k$; $\ell \geq 0$; $\overline{q} \in T_G(Z_\ell)$; $0 \leq i_1,\dots,i_\ell \leq k$;

$$a_r \in \begin{cases} A_i & \text{ha } i_r=0 \\ A_s & \text{ha } 1 \leq i_r \leq k \end{cases}; \; r=1,\dots,\ell).$$

$\underline{A}$-t determinisztikusnak mondjuk, ha

(a) P különböző elemeinek bal oldalai is különbözőek;

(b) A_s' egyelemü halmaz;

(c) minden $a\,(\in A_i)$-ra $rt(a)$ legfeljebb egyelemü halmaz.

Teljesen definiáltnak nevezzük $\underline{A}$ attributumos fatranszformátort, ha

(a) minden $a\ (\in A_s)$, $k\ (\geq 0)$ és $f\ (\in F_k)$ esetén legalább egy (1) alaku szabály P-ben van;

(b) minden $a\ (\in A_i)$, $k\ (\geq 1)$, $f\ (\in F_k)$ és $1 \leq i \leq k$ esetén legalább egy (2) alaku szabály P-ben van;

(c) $rt(a)$ semmilyen $a\ (\in A_i)$-ra nem az üres halmaz.

Most értelmezzük, hogyan lehet attributumos fatranszformátorral (röviden AT transzformátorral) fatranszformációt indukálni. Tekintsük a 2.1 -ben definiált AT transzformátort, legyen $p \in T_F$ és $\varphi : A_i \to \overline{P}(T_G)$. Ekkor $T_G(A \times path(p))$ halmazon értelmezhető a közvetlen levezetés p-ben φ-nél reláció, amelyet $\underset{\underline{pA}}{\Leftarrow}$ φ-nél szimbólumokkal jelölünk: tetszőleges q,r elemeire $T_G(A \times path(p))$ -nek akkor és csakis akkor álljon fenn $q \underset{\underline{pA}}{\Leftarrow} r$ φ-nél, ha r ugy áll elő q-ból, hogy ennek valamely (a,w) levelét ($a \in A$, $w \in path(p)$) helyettesitjük a

(a) $\overline{q}\,((a_1,w_1),\dots,(a_\ell,w_\ell))$ fával, amennyiben

(i) $a \in A_s$,

(ii) $lb_p(w)=f\ (\in F_k,\ k \geq 0)$,

(iii) (1) szabály P-ben van,

(iv) $w_r = \begin{cases} w & \text{ha } i_r=0 \\ wi_r & \text{ha } 1 \leq i_r \leq k \end{cases}$ $(r=1,\dots,\ell)$;

(b) $\overline{q}\,((a_1,w_1),\dots,(a_\ell,w_\ell))$ fával, amennyiben

(i) $a \in A_i$,

(ii) $w=vi$ valamely $i\,(\in \mathbb{N})$-re,

(iii) $lb_p(v)=f\ (\in F_k,\ k \geq 1,\ 1 \leq i \leq k)$,

(iv) (2) szabály P-ben van,

(v) $w_r = \begin{cases} v & \text{ha } i_r=0 \\ vi_r & \text{ha } 1\leq i_r \leq k \end{cases}$ $(r=1,\dots,l)$;

(c) $\varphi(a)$ valamely elemével, amennyiben $a \in A_i$ és $w=\lambda$.

A $\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}$ φ-nél reláció n-edik hatványát $(n \geq 0)$ $\overset{n}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}$ φ-nél, tranzitiv lezártját $\overset{+}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}$ φ-nél, reflexiv és tranzitiv lezártját $\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}$ φ-nél szimbólumokkal jelöljük, továbbá ez utóbbi relációt p-ben φ-nél való levezetésnek (vagy derivációnak) nevezzük.

<u>2.2 Definició.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ AT transzformátor. Ekkor az $\underline{A}$ által indukált $T(\underline{A})$ transzformáción a

$T(\underline{A})=\{(p,q) \mid p \in T_F,\ q \in T_G,\ (a,\lambda) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} q$ rt-nél valamely $a\ (\in A_s')$-re$\}$

relációt értjük.

A továbbiakban, ha $\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}$-t irunk, akkor ezen mindig a $\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}$ rt-nél relációt értjük; ha nem okoz félreértést, akkor az $\underline{A}$ indexet is elhagyjuk.

Az AT transzformátorokkal indukálható fatranszformációkat attributumos fatranszformációknak nevezzük, az összes ilyenek osztályát pedig $\mathcal{A}$-val jelöljük. Amennyiben csak olyan AT transzformátorokra szoritkozunk, melyekben $A_i=\emptyset$ akkor az általuk indukálható fatranszformációk osztályát $\mathcal{A}_s$-el jelöljük. Ha még azt is megköveteljük az AT transzformátoroktól, hogy teljesen definiáltak (determinisztikusak) legyenek akkor az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}_s$ jelölések elé még $\mathcal{T}$ $(\mathcal{D})$ jeleket is irunk.

<u>2.3 Példa.</u> Tekintsük $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ AT transzformátort, ahol

(a) $F=F_0 \cup F_1$, $F_0=\{e\}$, $F_1=\{f\}$;

(b) $G=G_o \cup G_1$, $G_o=\{e\}$, $G_1=\{g,h\}$;

(c) $A=A_s \cup A_i$, $A_s=A_s'=\{a\}$, $A_i=\{b\}$;

(d) $P=\{af(z_1) \leftarrow g(az_1)$, $ae \leftarrow bz_o$, $b(z_1,f) \leftarrow h(bz_o)\}$;

(e) $rt(b)=e$.

Ekkor nyilvánvalóan $T(\underline{A})=\{(f^n(e), g^n h^n(e)) \mid n \geq 0\}$, továbbá $T(\underline{A}) \in \mathcal{TDA}$. □

Tetszőleges $\underline{A}$ 2.1-ben definiált AT transzformátor és p $(\in T_F)$ esetén $A \times path(p)$ elemeit p-beli attributum előfordulásoknak nevezzük.

<u>2.4 Definició.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ AT transzformátor. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ cirkuláris, ha van olyan p $(\in T_F)$, a $(\in A)$, w $(\in path(p))$ és q $(\in T_G(A \times path(p)))$ amelyekre $(a,w) \overset{+}{\underset{p}{\Leftarrow}} q$ és q levelei között előfordul (a,w).

A cirkularitásnak ezen definiciója természetes megfelelője az attributumnyelvtanok esetében értelmezett hasonló fogalomnak. Erre való utalást találunk [20]-ban. Mi a dolgozat hátralévő részében AT transzformátoron mindig nemcirkuláris AT transzformátort értünk. Megemlitjük még, hogy az attributumnyelvtanok cirkularitásának eldönthetőségére vonatkozó tételnek AT transzformátorokra való megfelelő átfogalmazásával tetszőleges AT transzformátorról el tudjuk dönteni, hogy cirkuláris-e vagy nem.

Vegyük ujra a 2.1-ben definiált AT transzformátort és tételezzük fel, hogy érvényes $\alpha : (a,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q$ deriváció. Ekkor α-nak $lt(\alpha)$ hosszán a legkisebb olyan n egész számot értjük amelyre $(a,w) \overset{n}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q$.

A következőkben megvizsgáljuk az általunk bevezetett AT transzformátorok és a felszálló (leszálló) fatranszformátorok transzformáció indukáló kapacitásainak egymáshoz való viszonyát.

A deriváció hossza szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható a

2.5 Lemma. Legyen $\underline{A}=(F,A,G,A'_s,P)$ AT transzformátor (tehát $A_i=\emptyset$). Tetszőleges $p\ (\in T_F)$, $a\ (\in A)$, $w\ (\in \mathrm{path}(p))$, $q(\in (T_G))$-re és $w=uv$ felbontásra érvényes a következő ekvivalencia:
$(a,w) \xleftarrow[p]{*} q$ akkor és csakis akkor, ha $(a,v) \xleftarrow[\mathrm{str}_p(u)]{*} q$. □

A következő tétel implicit módon már több helyen említésre került (ld. [8], [17]), de azért a teljesség kedvéért pontosan megfogalmazzuk.

2.6 Tétel. $\mathcal{F}=\mathcal{A}_s$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}_s$ tartalmazás igazolása végett vegyünk egy tetszőleges $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ felszálló fatranszformátort. Tekintsük $\underline{B}=(F,B,G,B'_s,P')$ AT transzformátort, ahol

(a) $B=B_s=A$,

(b) $B'_s=A'$,

(c) $P'=P$.

Tetszőleges $p\ (\in T_F)$, $a\ (\in A)$ és $q\ (\in T_G)$ esetén $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval, a 2.5 lemma felhasználásával könnyen igazolható:

$$ap \xRightarrow[\underline{A}]{*} q \iff (a,\lambda) \xleftarrow[p\underline{B}]{*} q,$$

amiből nyilvánvalóan következik, hogy $T(\underline{A})=T(\underline{B})$, tehát $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}_s$. Ha most vesszük $\underline{B}$ AT transzformátort és megkonstruáljuk az (a), (b), (c) egyenlőségek által definiált $\underline{A}$ felszálló fatranszformátort akkor a fentiek értelmében ujra $T(\underline{A})=T(\underline{B})$. Következzésképpen $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{F}$.□

Nyilvánvaló, hogy előző tételünkben $\underline{A}$ akkor és csakis akkor determinisztikus, ha $\underline{B}$ is az, tehát érvényes

<u>2.7 Következmény.</u> $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{D}\mathcal{A}_s$.□

Ugyancsak könnyen igazolható, hogy a 2.3 példában szereplő $T(\underline{A})$ nem indukálható felszálló fatranszformátorral, amit az eddigiekkel együtt ugy fogalmazhatunk meg, hogy az AT transzformátorok a felszálló fatranszformátorok általánositásai:

<u>2.8 Következmény.</u> $\mathcal{F} \subsetneqq \mathcal{A}$ és $\mathcal{D}\mathcal{F} \subsetneqq \mathcal{D}\mathcal{A}$.□

A következőkben látni fogjuk, hogy leszálló esetben nem érvényesek a megfelelő tartalmazások.

<u>2.9 Tétel.</u> A $\mathcal{D}\mathcal{L}$ és $\mathcal{D}\mathcal{A}$ osztályok összehasonlithatatlanok.

<u>Bizonyitás.</u> Könnyü látni, hogy a 2.3 példában szereplő, $\mathcal{D}\mathcal{A}$-beli $T(\underline{A})$ transzformáció nem indukálható leszálló fatranszformátorral vagyis $T(\underline{A}) \notin \mathcal{D}\mathcal{L}$.

Most megadunk egy $\mathcal{D}\mathcal{L}$-beli fatranszformációt és bebizonyitjuk, hogy nincs $\mathcal{D}\mathcal{A}$-ban.

Tekintsük az $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ leszálló fatranszformátort, ahol

(a) $F=F_o \cup F_1$, $F_o=\{e_1,e_2\}$, $F_1=\{f,g\}$;

(b) $G=G_o \cup G_1$, $G_o=\{e_1,e_2\}$, $G_1=\{f_1,f_2,g\}$;

(c) $A=A'=\{a_1,a_2\}$;

(d) P elemei a következők:

$$e_1 \to a_1 e_1, \qquad e_2 \to a_2 e_2,$$
$$g(a_1 z_1) \to a_1 g(z_1), \quad g(a_2 z_1) \to a_2 g(z_1),$$
$$f(a_1 z_1) \to a_1 f_1(z_1), \quad f(a_2 z_1) \to a_2 f_2(z_1).$$

Minthogy $\underline{A}$ determinisztikus, igy $T(\underline{A}) \in \mathcal{DL}$. Tekintsük az

$$R=\{f^n g^m(e_1) \mid n,m \geq 0\} \cup \{f^n g^m(e_2) \mid n,m \geq 0\}$$

F tipusu erdőt és $T(\underline{A})$-nak az R-re való megszoritását vagyis $T(\underline{A})|_R$-t. Nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$T(\underline{A})|_R=\{(f^n g^m(e_1), f_1^n g^m(e_1)) \mid n,m \geq 0\} \cup$$
$$\cup \{(f^n g^m(e_2), f_2^n g^m(e_2)) \mid n,m \geq 0\}.$$

Tételezzük fel, hogy $T(\underline{A})$ indukálható valamely $\underline{B}=(F,B,G,b_o,P',rt)$ determinisztikus AT transzformátorral. Ekkor $T(\underline{A})|_R=T(\underline{B})|_R$ egyenlőségnek is teljesülnie kell. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$K=|B_s|,$$
$$L=|B_i|,$$

$N=\max\{dp(q) \mid q$ valamely szabály jobboldala P'-ben$\}$.

Legyen továbbá $n > 2NL(K+L)$ tetszőleges, de rögzitett egész szám és tekintsük a $p_{1_j}=f^n g^j(e_1)$, $q_{1_j}=f_1^n g^j(e_1)$, $p_{2_j}=f^n g^j(e_2)$, $q_{2_j}=f_2^n g^j(e_2)$ $(j=0,1,\ldots,L)$ fákat. Ekkor minden $j(=0,1,\ldots,L)$-re teljesülni fog (p_{1_j},q_{1_j}), $(p_{2_j},q_{2_j}) \in T(\underline{A})$. Tekintsük valamely tetszőleges, de rögzitett $j(=0,1,\ldots,L)$ indexet és irjunk p_{1_j}, q_{1_j}, p_{2_j}, q_{2_j} helyett rendre p_1, q_1, p_2, q_2-t. (A továbbiakban, mivel $T_F(Z)$-nek minden p elemére path(p) minden eleme 1^ℓ alaku valamilyen $\ell(\geq 0)$-ra, ezen elemek helyett magát ℓ-t irjuk. Továbbá, ha $t \in T_F(Z_1)$, t' pedig fa, akkor tt'-t irunk $t(t')$ helyett és t^n-t $\underbrace{tt\ldots t}_{n\text{-szer}}$ helyett $(n \geq 1)$.)

Feltevésünk értelmében $(p_1,q_1) \in T(\underline{B})$ azaz $(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_1}{\Leftarrow}} q_1$. Ez a deriváció azonban felirható

$$(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_1}{\Leftarrow}} q((a,n+j)) \overset{*}{\underset{p_1}{\Leftarrow}} q_1 \qquad (3)$$

alakban is valamely $q\ (\in T_G(Z_1))$ -re és a $(\in B_s)$-re, mert ellenkező esetben $(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_2}{\Longleftarrow}} q_1$ is teljesülne ami nyilvánvaló ellentmondás. Feltehető még, hogy (3)-ban $(a,n+j)$ az első olyan attributum előfordulás, amelynek második komponense $n+j$ vagyis minden $\bar{q}\ ((b,w))\ (\in T_G(B \times \text{path}(p_1)))$ esetén a

$$(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} \bar{q}\ ((b,w)) \overset{+}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} q\ ((a,n+j)) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} q_1$$

derivációkból következik $w < n+j$. Továbbmenve, az is igaz, hogy (3)-ban $q=z_1$ azaz

$$(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} (a,n+j) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} q_1. \tag{4}$$

Ellenkező esetben az $(a,n+j)$-re tett előző megjegyzésünk miatt $(b_o,0) \overset{*}{\underset{p_2}{\Longleftarrow}} q\ ((a,n+j))$ is teljesülne. Ez pedig azt jelentené, hogy az $(a,n+j) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} \bar{q}_1\ (\in T_G)$ és $(a,n+j) \overset{*}{\underset{p_2}{\Longleftarrow}} \bar{q}_2\ (\in T_G)$ derivációkra - amelyeknek létezniük kell mert $p_1, p_2 \in \text{dom}\ T(\underline{B})$ és $\underline{B}$ determinisztikus - érvényesek lennének a $q(\bar{q}_1)=q_1$ és $q(\bar{q}_2)=q_2$ előállitások ami megint csak ellentmondás.

Vizsgáljuk tovább $(a,n+j) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} q_1$ derivációt. Mivel q_1 fában az f_1 müveleti szimbólumok száma n és $n > 2NL(K+L)$ igy valamely $c\ (\in B_i)$-re és $r\ (\in T_G(Z_1))$ -re

$$(a,n+j) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} r\ ((c,n-L)) \overset{*}{\underset{p_1}{\Longleftarrow}} q_1$$

ahol $r=z_1$ vagy r csak f_1 müveleti szimbólumokat tartalmazhat. Fenti összefüggés tovább finomitható, nevezetesen léteznek olyan $r_\ell (\in T_G(Z_1))$ fák és $c_\ell\ (\in B_i)$ attributumok $(\ell=0,1,\dots,L)$ amelyekre

$$(a,n+j) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} r_o((c_o,n)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} r_1((c_1,n-1)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} \dots$$
$$\underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} r_L((c_L,n-L)) = r((c,n-L)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_1 \qquad (5)$$

továbbá minden $\overline{q}((b,w))$ fára, ha

$$(a,n+j) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} \overline{q}((b,w)) \underset{p_1}{\overset{+}{\Longleftarrow}} r_\ell((c,n-\ell)) \qquad (\ell=0,1,\dots,L)$$

akkor $w>n-\ell$. Minthogy $|B_i|=L$ igy léteznek olyan $0\leq k<\ell\leq L$ indexek melyekre $c_k=c_\ell$. Ez utóbbiakat egyszerüen $\overline{c}$-sal jelölve (5) felirható

$$(a,n+j) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} r_k((\overline{c},n-k)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} r_\ell((\overline{c},n-\ell)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_1$$

alakban is. Bevezetve az $u=n-k$, $v=\ell-k$, $t=r_k$ jelöléseket, létezik olyan t' ($\in T_G(Z_1)$) amellyel megelőző relációink

$$(a,n+j) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t((\overline{c},u)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} tt'((\overline{c},u-v)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_1 \qquad (6)$$

alakban irható. Vegyük észre, hogy $t=z_1$ vagy t csak f_1 müveleti szimbólumokat tartalmazhat ami érvényes t'-re is, mindkét esetben r hasonló tulajdonsága miatt.

Legyen m a legnagyobb olyan nemnegativ egész melyre $u-mv\geq 0$. Ekkor (6)-ból és a megelőzőekből következik, hogy

$$(a,n+j) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t(t')^m((\overline{c},u-mv)) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_1. \qquad (7)$$

Vezessük még be az $y=u-mv$ jelölést. Tekintsük azt a t'' ($\in T_G(Z_1)$) fát amelyre $(\overline{c},u) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t''((d,u-y))$ ($d\in B_i$) és amelyre minden $\overline{q}((b,w))$ esetén a $(\overline{c},u) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} \overline{q}((b,w)) \underset{p_1}{\overset{+}{\Longleftarrow}} t''((d,u-y))$ deriváció maga után vonja, hogy $w>u-y$. Ekkor t'' definiciója miatt $(\overline{c},u-mv) \underset{p_1}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t''((d,0))$ továbbá $t''=z_1$ vagy t'' csak f_1 müveleti szimbólumokat tartalmazhat csakugy mint t'. Ezen utóbbi levezetést összevetve (4) és (7)-el nyerjük, hogy

$$(b_o,o) \underset{p_l}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t(t')^m t''((d,o)) \underset{p_l}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_l . \qquad (8)$$

Természetesen t,t',t'',m és d mindegyike függ j-től. Minthogy j tetszőleges volt (8)-ból kapjuk, hogy minden $j(=0,1,\dots,L)$-re van olyan t_j $(\in T_G(Z_1))$ legfeljebb f_1 müveleti szimbólumokat tartalmazó fa és d_j $(\in B_i)$ attributum melyre

$$(b_o,o) \underset{p_{l_j}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t_j((d_j,o)) \underset{p_{l_j}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_{l_j} .$$

Mivel $d_o,\dots,d_L$ attributumok között van két megegyező, mondjuk $d_{\bar{k}}$ és $d_{\bar{\ell}}$ ahol $\bar{k}\neq\bar{\ell}$, azt kapjuk, hogy $q_{l_{\bar{k}}}$ és $q_{l_{\bar{\ell}}}$ fák felirhatók $t_{\bar{k}}(s)$ és $t_{\bar{\ell}}(s)$ alakban, ahol $s=rt(d_{\bar{k}})=rt(d_{\bar{\ell}})$ ami nyilvánvaló ellentmondás - következésképpen $T(\underline{A})=T(\underline{B})$ feltevés helytelen volt.□

Megelőző tételünk bizonyitását követve hasonlóan igazolható, hogy a tételben szereplő $T(\underline{A})$ nem indukálható teljesen definiált attributumos fatranszformátorral sem (még akkor sem, ha az nem determinisztikus). Mivel az emlitett $\underline{A}$ teljesen definiált volt igy érvényes a következő:

<u>2.10 Következmény.</u> $\mathcal{TL}$ és $\mathcal{TA}$ osztályok összehasonlithatatlanok.□

Nem sikerült igazolnunk azt a sejtést, hogy $\mathcal{L}$ és $\mathcal{A}$ osztályok összehasonlithatatlanok. (A 2.9 tételben szereplő $T(\underline{A})$ benne van $\mathcal{A}$ osztályban, hiszen már $\mathcal{F}$ osztályban is benne van mivel $\underline{A}$ lineáris és nemtörlő (ld. [22]).)

3. *Attributumos fatranszformációk kompoziciói*

Legyenek $T_1(\subseteq T_F \times T_G)$ és $T_2(\subseteq T_G \times T_H)$ tetszőleges fatranszformációk. T_1-nek és T_2-nek a $T_1 \circ T_2$ kompozicióján értjük a

$$T_1 \circ T_2 = \{(p,q) \mid \exists r\, ((p,r) \in T_1 \text{ és } (r,q) \in T_2)\}$$

relációt. Fatranszformációk $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ osztályainak kompoziciója a

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 = \{T_1 \circ T_2 \mid T_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ és } T_2 \in \mathcal{C}_2\}$$

osztályt értjük. Továbbá, ha $\mathcal{C}$ fatranszformációknak egy osztálya akkor legyen $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^{n-1} \circ \mathcal{C}$, ha n (>1) egész. Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ zárt a kompozicióra, ha bármely két elemének kompoziciója ujra $\mathcal{C}$-ben van, vagyis $\mathcal{C} \circ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. Előfordul, hogy valamely $\mathcal{C}$ osztály esetén keresünk olyan - általában egszerübb strukturáju - $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ osztályokat, melyekre $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2$. Ilyenkor $\mathcal{C}$ dekompoziciójáról beszélünk. Megforditva, ha valamely $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ osztályok esetén olyan $\mathcal{C}$ osztályt keresünk amelyre $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$ akkor $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ kompozicióját vizsgáljuk.

<u>3.1 Lemma.</u> Legyen $\underline{A} = (F, A, G, A_s', P, rt)$ tetszőleges AT transzformátor. Akkor létezik olyan N konstans, hogy minden (p,q) $(\in T(\underline{A}))$ esetén $rn(q) \leq N^{rn(p)}$.

<u>Bizonyitás.</u> Vezessük be a

$$K = |A_s| ,$$

$$L = |A_i| ,$$

$M=\max\{dp(q) \mid q$ valamely szabály jobboldala P-ben$\}$ jelöléseket. Legyen (p,q) $(\in T(\underline{A}))$ tetszőleges azaz teljesüljön $(a,\lambda) \overset{*}{\underset{p}{\Leftarrow}} q$ valamely a $(\in A_s')$-re. Mivel $\underline{A}$ nemcirkuláris igy ez a deriváció legfeljebb $(K+L)rn(p)$ hosszuságu, tehát $dp(q) \leq$ $\leq (K+L)Mrn(p)$. Nyilvánvalóan létezik továbbá olyan R konstans, hogy minden q $(\in T_G)$-ra $rn(q) \leq R^{dp(q)}$. Utóbbi két egyenlőtlenségből adódik, hogy az $N=R^{(K+L)M}$ választás megfelelő lesz.□

<u>3.2 Tétel.</u> Tetszőleges $n(\geq 1)$ esetén $\mathcal{DA}^n \subsetneqq \mathcal{H} \circ \mathcal{DA}^n$.

<u>Bizonyitás.</u> A $\mathcal{DA}^n \subseteq \mathcal{H} \circ \mathcal{DA}^n$ tartalmazás nyilvánvaló. A valódi tartalmazás igazolása végett vegyük tetszőleges, de rögzitett n-re a $\mathcal{H} \circ \mathcal{DA}^n$ alábbi módon definiált elemét.

Legyen $\underline{A}=(F,a_o,G,a_o,P)$ homomorfizmus, ahol

(a) $F=F_o \cup F_1$, $F_o=\{e\}$, $F_1=\{f\}$;

(b) $G=G_o \cup G_2$, $G_o=\{e\}$, $G_2=\{g\}$;

(c) $P=\{a_o f(z_1) \to g(a_o z_1, a_o z_1), a_o e \to e\}$.

Amennyiben a továbbiakban q_m-el jelöljük az m magasságu kiegyensulyozott G tipusu fát, ugy nyilvánvaló:

$$T(\underline{A})=\{(f^m(e),q_m) \mid m \geq 0\}. \qquad (1)$$

Legyen továbbá $\underline{B}=(G,B,G,b,P',rt)$ AT transzformátor, ahol

(a) G ugyanaz mint előbb;

(b) $B=B_s \cup B_i$, $B_s=\{b\}$, $B_i=\{c\}$;

(c) $rt(c)=e$;

(d) P' elemei a következők: $bg(z_1,z_2) \leftarrow g(bz_1,bz_1)$, $be \leftarrow$ $\leftarrow g(cz_o,cz_o)$, $c(z_1,g) \leftarrow bz_2$, $c(z_2,g) \leftarrow cz_o$;

tehát $\underline{B}$ determinisztikus. Bevezetve az $R=\{q_m \mid m \geq 0\}$ jelölést könnyen igazolható

$$T(\underline{B})|_R=\{(q_m,q_{m'})\mid m\geqq 0,\ m'=2^{m+1}-1\} \tag{2}$$

ha figyelembe vesszük, hogy az m magasságu kiegyensulyozott G fának a rangja $2^{m+1}-1$.

Legyen $T=T(\underline{A})\circ\overbrace{T(\underline{B})\circ\ldots\circ T(\underline{B})}^{n\text{-szer}}$, tehát $T\in\mathcal{H}\circ\mathcal{DA}^n$. Egyszerü számolással adódik, - (1)-et és (2)-t figyelembe véve - hogy

$$T=\Big\{(f^m(e),q_{m'})\mid m\geqq 0,\ m'=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{m+1}}}}}}}_{n\text{-szer}}-1\Big\},$$

ami azt jelenti, hogy az m+1 rangu $f^m(e)$ fa T melletti képének rangja

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{m+1}}}}}}}_{n+1\text{-szer}} \tag{3}$$

tetszőleges $m(\geqq 0)$-re. Tételezzük fel, hogy $T\in\mathcal{DA}^n$. Ekkor érvényes $T=T_1\circ\ldots\circ T_n$ ahol $T_j=T(\underline{A}_j)$ valamely $\underline{A}_j$ determinisztikus AT transzformátorra $(j=1,\ldots,n)$. Továbbá, - 3.1 lemma szerint - minden $j(=1,\ldots,n)$-re létezik olyan N_j konstans, hogy minden (p,q) $(\in T_j)$-ra $rn(q)\leqq N_j^{rn(p)}$. Ez azt eredményezné, hogy minden (p,q) $(\in T)$-ra

$$rn(q)\leqq N_n^{N_{n-1}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{N_1^{rn(p)}}}}}}$$

vagyis $f^m(e)$ T melletti képének a rangja legfeljebb

$$N_n^{N_{n-1}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{N_1^{m+1}}}}}}$$

lenne tetszőleges $m(\geqq 0)$-ra, ami ellentmond (3)-nak tehát $T\notin\mathcal{DA}^n$.□

A 3.1 lemma érvényes tetszőleges AT transzformátorra, továbbá $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{D}\mathcal{A}$, igy nyilvánvaló a

<u>3.3 Következmény.</u> $\mathcal{D}\mathcal{A}^n \subsetneqq \mathcal{D}\mathcal{A}^{n+1}$, $\mathcal{A}^n \subsetneqq \mathcal{H}\circ\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}^n \subsetneqq \mathcal{A}^{n+1}$.□

<u>3.4 Tétel.</u> $\mathcal{T}\mathcal{D}\mathcal{A}\circ\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ teljesen definiált, determinisztikus AT transzformátor, $\underline{B}=(G,B,H,B',P')$ pedig felszálló fatranszformátor. Konstruáljuk meg $\underline{C}=(F,C,H,C_s',P'',rt'')$ AT transzformátort az alábbiakban megadott módon:

(a) $C=C_s\cup C_i$, $C_s=B\times A_s$, $C_i=B\times A_i$;

(b) $C_s'=B'\times\{a_o\}$;

(c) P"-t a következőképpen értelmezzük:

(i) minden $a\ (\in A_s)$, $b\ (\in B)$, $k(\geq 0)$ és $f\ (\in F_k)$ esetén amennyiben $af(z_1,\dots,z_k)\leftarrow\bar{q}(a_1z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell})\in P$ $(\ell\geq 0;\ 0\leq i_1,\dots,i_\ell\leq k;\ \bar{q}\in T_G(Z_\ell)\ ;\ a_1,\dots,a_\ell\in A)$ és $b\bar{q}\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}}q(b_1z_{j_1},\dots,b_mz_{j_m})$ $(m\geq 0;\ q\in T_H(Z_m);\ 1\leq j_1,\dots,j_m\leq\ell;\ b_1,\dots,b_m\in B)$ ugy vegyük fel P"-be a $(b,a)f(z_1,\dots,z_k)\leftarrow\bar{q}((b_1,a_{j_1})z_{i_{j_1}},\dots,(b_m,a_{j_m})z_{i_{j_m}})$ szabályt;

(ii) minden $a\ (\in A_i)$, $b\ (\in B)$, $k\ (\geq 1)$, $f\ (\in F_k)$ és $1\leq j\leq k$ esetén ha $a(z_j;f)\leftarrow\bar{q}(a_1z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell})$ szabály P-ben van $(\ell\geq 0;\ 0\leq i_1,\dots,i_\ell\leq k;\ \bar{q}\in T_G(Z_\ell)\ ;a_1,\dots,a_\ell\in A)$ továbbá teljesül $b\bar{q}\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}}q(b_1z_{j_1},\dots,b_mz_{j_m})$ deriváció $(m\geq 0;\ q\in T_H(Z_m);\ 1\leq j_1,\dots,j_m\leq\ell\ ;\ b_1,\dots,b_m\in B)$ akkor vegyük P"-be a $(b,a)(z_j,f)\leftarrow q((b_1,a_{j_1})z_{i_{j_1}},\dots,(b_m,a_{j_m})z_{i_{j_m}})$ szabályt;

(d) minden (b,a) $(\in C_i)$-ra legyen

$$rt''((b,a)) = \{q\ (\in T_H) \mid \exists \bar{q}\,(rt(a)=\bar{q} \text{ és } b\bar{q} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q)\}.$$

Tételünkben szereplő tartalmazás igazolása végett elegendő bebizonyitani a következő állitást: minden $p\ (\in T_F)$, $q\ (\in T_H)$, $a\ (\in A)$, $b\ (\in B)$ és $w\ (\in path(p))$ esetén

$$\exists q'(\in T_G)\ ((a,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q' \text{ és } bq' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q) \Leftrightarrow ((b,a),w) \overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Leftarrow}} q.$$

Az ekvivalencia $\Rightarrow$ irányu igazolását az $\alpha : (a,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q'$ deriváció hossza szerinti teljes indukcióval végezzük.

Amennyiben $lt(\alpha)=1$, ugy a következő esetek valamelyike áll fenn:

(a) $a \in A_s$, $lb_p(w)=f\ (\in F_k, k\geq 0)$, $af(z_1,\dots,z_k) \leftarrow q' \in P$;

(b) $a \in A_i$, $w=vj\ (j \in \mathbb{N})$, $lb_p(v)=f\ (\in F_k\ k\geq 1)$, $1\leq j\leq k$, $a(z_j,f) \leftarrow$ $\leftarrow q' \in P$;

(c) $a \in A_i$, $w=\lambda$, $q'=rt(a)$.

Mind a három esetben definició szerint teljesül amit bizonyitani akarunk.

Tételezzük most fel, hogy $lt(\alpha)>1$ és minden α-nál kisebb hosszuságu derivációra a megfelelő állitás érvényes. Ekkor α felirható

$$(a,w) \underset{p\underline{A}}{\Leftarrow} q_o'((a_1,w_1),\dots,(a_\ell,w_\ell)) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q_o'(q_1',\dots,q_\ell') = q' \tag{4}$$

alakban valamely $(\ell\geq 1)$-re és $q_o'\ (\in \hat{T}_G(Z_\ell))$-re. Minthogy $bq' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q$ igy valamely $m\ (\geq 0)$ és $q_o\ (\in \hat{T}_H(Z_m))$ fa esetén

$$bq_o' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q_o(b_1 z_{j_1},\dots,b_m z_{j_m}) \qquad (1\leq j_1,\dots,j_m \leq \ell) \tag{5}$$

és valamilyen $q_1,\dots,q_m$ T_H-beli fákra

$$b_s q_{j_s}' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q_s \qquad (s=1,\dots,m) \tag{6}$$

továbbá fennáll a $q_o(q_1,\dots,q_m)=q$ egyenlőség. (4)-re nézve két eset lehetséges:

$$a\in A_s,\ lb_p(w)=f\ (\in F_k,\ k\geqq 0); \qquad (7)$$

$$a\in A_i,\ w=vj \quad (j\in \mathbb{N}),\ lb_p(v)=f\ (\in F_k,\ k\geqq 1). \qquad (8)$$

A két eset közül csak az első bizonyitását részletezzük mivel a másik ehhez hasonlóan végezhető el. Ekkor (4) miatt $af(z_1,\dots,z_k)\leftarrow q_o'(a_1z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell})\in P$ ahol érvényesek a

$$w_s=\begin{cases}\lambda & \text{ha } i_s=0\\ & \\ i_s & \text{ha } 1\leqq i_s\leqq k\end{cases} \qquad (s=1,\dots,\ell)$$

egyenlőségek. Ebből (5)-el együtt, definició szerint következik a $(b,a)f(z_1,\dots,z_k)\leftarrow q_o((b_1,a_{j_1})z_{i_{j_1}},\dots,(b_m,a_{j_m})z_{i_{j_m}})\in P''$ tartalmazás. Másrészt, minthogy $1\leqq j_1,\dots,j_m\leqq \ell$, a (4)-ből kapott $(a_{j_s},w_{j_s})\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} q_{j_s}'$ $(s=1,\dots,m)$ összefüggéseket (6)-tal összevetve indukció feltevésünk miatt adódik, hogy

$$((b_s,a_{j_s}),w_{j_s})\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} q_{j_s} \qquad (s=1,\dots,m).$$

Mindez együtt a keresett $((b,a),w)\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow} q_o((b_1,a_{j_1})w_{j_1},\dots,$ $(b_s,a_{j_s})w_{j_s})\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} q_o(q_1,\dots,q_m)=q$ derivációkat adja.

A megforditott irányu állitás igazolása végett tegyük fel, hogy $\alpha: ((b,a),w)\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} q$ derivációra $lt(\alpha)=1$. A lehetséges esetek száma ismét három, amelyek közül az első kettő (7) és (8), a harmadik pedig az $a\in A_i$ és $w=\lambda$ eset. Az esetek hasonlósága miatt most is csak (7) bizonyitását részletezzük. Minthogy $lt(\alpha)=1$, igy $(b,a)f(z_1,\dots,z_k)\leftarrow q$ szabály P''-ben van, tehát az $af(z_1,\dots,z_k)\leftarrow q_o'(a_1z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell})$ $(\ell\geqq 0;$

$q'_0 \in T_G(Z_\ell)$; $0 \leqq i_1, \ldots, i_\ell \leqq k$) P-beli szabály jobboldalára teljesül $bq'_0 \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q$. Ez utóbbi miatt az $(a,w) \underset{p\underline{A}}{\Leftarrow} q'_0((a_1,w_1), \ldots,$ $(a_\ell, w_\ell)) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q'_0(q'_1, \ldots, q'_\ell)$ derivációkból származó $q' = q'_0(q'_1, \ldots, q'_\ell)$-re $bq' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q$. (Vegyük észre: kihasználtuk, hogy $\underline{A}$ teljesen definiált.)

Tételezzük most fel, hogy $lt(\alpha) > 1$ és minden α-nál kisebb hosszuságu derivációra a megfelelő állítás érvényes. Ekkor α a következő alakban irható:

$$((b,a),w) \underset{p\underline{C}}{\Leftarrow} q_0((b_1,a_1)w_1, \ldots, (b_m,a_m),w_m) \overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Leftarrow}} \tag{9}$$

$$\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Leftarrow}} q_0(q_1, \ldots, q_m) = q.$$

($m \geqq 0$; $q_0 \in \hat{T}_H(Z_m)$). Két eset lehetséges: (7) és (8), közülük csak (7) bizonyitását részletezzük. (9) szerint

$$(b,a)f(z_1, \ldots, z_k) \leftarrow q_0((b_1,a_1)z_{i_1}, \ldots, (b_m,a_m)z_{i_m}) \in P'' \tag{10}$$

ahol $w_s = \begin{cases} \lambda & \text{ha } i_s = 0 \\ i_s & \text{ha } 1 \leqq i_s \leqq k \end{cases}$ $(s=1, \ldots, m)$. Ez azt jelenti, hogy az

$af(z_1, \ldots, z_k) \leftarrow q'_0(a'_1 z_1, \ldots, a'_\ell z_{\ell'})$ P-beli szabályra
($l \geqq 0$; $q'_0 \in \hat{T}_G(Z_\ell)$, $1 \leqq 1', \ldots, \ell' \leqq k$)

$$b_0 q'_0 \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q_0(b_1 z_{j_1}, \ldots, b_m z_{j_m}) \tag{11}$$

továbbá teljesülnek az $a_s = a'_{j_s}$ és $j'_s = i_s$ $(s=1, \ldots, m)$ egyenlőségek. Következésképpen, az

$$(a,w) \underset{p\underline{A}}{\Leftarrow} q'_0((a'_1,w'_1), \ldots, (a'_\ell,w'_\ell)) \tag{12}$$

derivációra teljesül $w'_{j_s} = w_s$ $(s=1, \ldots, m)$. Alkalmazzuk (9)-re az indukció feltevést. Adódik, hogy minden $s(=1, \ldots, m)$ esetén

$\exists q_s''(\in t(T_G))((a_s,w_s) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q_s''$ és $b_s q_s'' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q_s)$.

Legyen továbbá, minden $r(=1,\dots,\ell)$-re

$$q_r' = \begin{cases} q_s'' & \text{ha } r'=i_s \text{ valamely } s(=1,\dots,m)\text{-re} \\ (a_r',w_r')\text{-ből p-ben } \underline{A}\text{-val deriválható } T_G\text{-beli fa} & \text{különben.} \end{cases}$$

(Ujra kihasználtuk, hogy $\underline{A}$ determinisztikus és teljesen definiált.) Végül megmutatjuk, hogy $q'=q_0'(q_1',\dots,q_\ell')$ választás megfelelő lesz. Valóban, (12)-ből valamint q_r' $(r=1,\dots,\ell)$ definiciójából kapjuk, hogy $(a,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q'$. Másrészt (11)-ből és ugyancsak q_r' $(r=1,\dots,\ell)$ definiciójából adódik, hogy $bq' \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} q$.

Ha állitásunkban $a=a_0$, $b\in B'$ és $w=\lambda$ akkor a tétel is bizonyitást nyer.□

<u>3.5 Következmény.</u> (a) $\mathcal{TDA}\circ\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}$;
(b) $\mathcal{TDA}\circ\mathcal{DF} \subseteq \mathcal{DA}$;
(c) $\mathcal{TDA}\circ\mathcal{DA}_s \subseteq \mathcal{DA}$;
(d) $\mathcal{TDA}\circ\mathcal{TDA}_s = \mathcal{TDA}$;
(e) $\mathcal{TDA}_s^n = \mathcal{TDA}_s$ tetszőleges $n(\geq 1)$-re.

<u>Bizonyitás.</u> (b) nyilvánvaló, (a) és (c) következik 2.6 tételből. (d) azért érvényes mert az identikus fatranszformáció $\mathcal{TDA}_s$-ban van végül (e) azért mert ha 3.4 tételben $\underline{A}$ csak szintetizált attributumokat tartalmaz akkor $\underline{C}$ is□ Végül megmutatjuk, hogy amennyiben a 3.4 tételben $\mathcal{TDA}$ osztály helyett $\mathcal{TA}$-t veszünk, akkor a tartalmazás nem marad érvényben, sőt teljesül az ennél erősebb

3.6 Tétel. $\mathcal{TF}\circ\mathcal{H}$ és $\mathcal{A}$ osztályok összehasonlithatatlanok.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy a 2.3 példában megadott $\mathcal{A}$-beli fatranszformáció nincs $\mathcal{TF}\circ\mathcal{H}$-ban.

Másrészt, tekintsük az $\underline{A}=(F,a,G,a,P)$ felszálló fatranszformátort, ahol

(a) $F=F_0\cup F_1$, $F_0=\{e\}$, $F_1=\{f\}$;

(b) $G=G_0\cup G_1$, $G_0=\{e\}$, $G_1=\{g_1,g_2\}$;

(c) $P=\{af(z_1)\to g_1(az_1)\ ,\ af(z_1)\to g_2(az_1)\ ,\ ae\to e\}$.

Világos, hogy $\underline{A}$ teljesen definiált. Vegyük továbbá $\underline{B}=(G,b,H,b,P')$ homomorfizmust, ahol

(a) G ugyanaz mint az előbb;

(b) $H=H_0\cup H_1\cup H_2$, $H_0=\{e\}$, $H_1=\{h_1\}$, $H_2=\{h_2\}$;

(c) P' elemei a következők: $bg_1(z_1)\to h_1(bz_1)$, $bg_2(z_1)\to h_2(bz_1,bz_1)$, $be\to e$.

Vezessük be a $T=T(\underline{A})\circ T(\underline{B})$ jelölést. Kihasználva, hogy mind $\underline{A}$ mind $\underline{B}$ egyállapotu, egyszerü n szerinti teljes indukcióval adódik, hogy tetszőleges $n\ (\geq 1)$-re

$$T|_{f^n(e)}=\{(f^n(e),h_1(q))\mid q\in T|_{f^{n-1}(e)}\}\cup\{(f^n(e),h_2(q,q))\mid q\in T|_{f^{n-1}(e)}\}$$

Figyelembe véve, hogy $T|_e=(e,e)$, azonnal látható, hogy minden $n\ (\geq 1)$-re az $f^n(e)$ fa képei "szimmetrikus" fák. Az is leolvasható még, hogy az $f^n(e)$ fának 2^n képe van, amelyek közül a $h_2(q,q)$ alakuaknak a száma 2^{n-1} $(q\in T_H)$.

Tételezzük most fel, hogy $T=T(\underline{C})$ valamely $\underline{C}=(F,C,H,C_s',P'',$ $rt'')$ AT transzformátorra. Legyen

$$K=|C_s|,$$

$$L=|C_i|,$$

$M=|\{q\,|\,q$ valamely szabály jobboldala P''-ben, és $h_2(q_1,q_2)$ alaku$\}|$. Vegyük valamely tetszőleges, de rögzitett n-re a $p=f^n(e)$ fa valamely $h_2(q,q)$ alaku képének egy $\underline{C}$-beli levezetését. Ez nyilvánvalóan felirható

$$(c_o,\lambda) \overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} (c,w) \underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}$$

$$\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow} h_2(q_1((c_1,v_1),\dots,(c_k,v_k)), q_2((d_1,w_1),\dots,(d_\ell,w_\ell))) \tag{13}$$

$$\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} h_2(q_1(r_1,\dots,r_k),\ q_2(s_1,\dots,s_\ell)) = h_2(q,q)$$

alakban ($c_o \in C'_s$; $k,\ell \geqq 0$; $q_1 \in \hat{T}_H(Z_k)$; $q_2 \in \hat{T}_H(Z_\ell)$; $c,c_1,\dots,c_k$, $d_1,\dots,d_\ell \in C$; $w,v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_\ell \in \mathrm{path}(p)$; $r_1,\dots,r_k$, $s_1,\dots,s_\ell \in T_H$). Vegyük észre, hogy minden $j(=1,\dots,k)$-re teljesül: amennyiben $(c_j,v_j) \overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} r'_j$ $(\in T_H)$ ugy $r_j=r'_j$. (Ellenkező esetben a $q_1(r_1,\dots,r_j,\dots,r_k)=q_1(r_1,\dots,r'_j,\dots,r_k)=q$ ellentmondáshoz jutnánk.) Hasonló okok miatt, a $(d_j,w_j) \overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}}$ $\overset{*}{\underset{p\underline{C}}{\Longleftarrow}} s'_j$ $(\in T_H)$ reláció minden $j(=1,\dots,\ell)$-re maga után vonja az $s_j=s'_j$ egyenlőséget. Ez pedig azt jelenti, hogy minden (13) alaku levezetést a (c,w) attributumelőfordulás és az őt helyettesitő szabály egyértelmüen meghatároz. Mivel előbbi legfeljebb $(K+L).(n+1)$, utóbbi legfeljebb M féleképpen választható, azt kaptuk, hogy a p fa $h_2(q,q)$ alaku képeinek száma legfeljebb $(K+L)M(n+1)$ ami nyilvánvalóan ellentmond az előzőeknek, ha n-et elegendően nagynak választjuk.$\square$

4. K-vizsgáló attributumos fatranszformációk dekompoziciói

Először bevezetünk egy jelölést. Legyen $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ AT transzformátor, $p\in T_F$ és $\varphi:A_i\to\overline{P}(T_G)$. Tetszőleges w ($\in$ path(p)) -re $\varphi_{w,p}:A_i\to\overline{P}(T_G)$ leképezést a következőképpen értelmezzük: minden a ($\in A_i$) esetén

$$\varphi_{w,p}(a)=\{q\mid (a,w)\overset{*}{\underset{p}{\Leftarrow}}q \quad \varphi\text{-nél}\}.$$

A következő lemma lényegében ezen jelölés értelmezésén alapul ezért pontos igazolásától eltekintünk bár gyakran ki fogjuk használni, legtöbbször emlités nélkül:

<u>4.1 Lemma.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,A_s',P,rt)$ AT transzformátor. Ekkor tetszőleges p ($\in T_F$), q ($\in T_G$), a ($\in A_s$), w ($\in$ path(p)) és $\varphi:A_i\to\overline{P}(T_G)$ esetén érvényes a következő ekvivalencia:

$$(a,w)\overset{*}{\underset{p}{\Leftarrow}}q \quad \varphi\text{-nél} \iff (a,\lambda)\overset{*}{\underset{str_p(w)}{\Longleftarrow}}q \quad \varphi_{w,p}\text{-nél}.\square$$

Most <u>determinisztikus</u> AT transzformátorra értelmezni fogjuk a K-vizsgáló fogalmat, hasonlóan az attributumnyelvtanoknál bevezetett megfelelő fogalomhoz.

Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátor és K természetes szám. Tetszőleges k (≥ 0)-ra és f ($\in F_k$)-ra $\Phi_{K,f}$ halmazt az alábbi módon definiáljuk:

$(e_1,\dots,e_\ell)\in\Phi_{K,f} \iff$ (a) $\ell\leq K$;

(b) $e_j=(I_j;n_{j_1},\dots,n_{j_{k_j}};S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$;

(c) $A_i=\bigcup(I_j\mid j=1,\dots,\ell)^j$, $A_s=\bigcup(S_j\mid j=1,\dots,\ell)$, $I_j\cap I_{j'}=S_j\cap S_{j'}=\emptyset$ ha $j\neq j'$ $(j,j'=1,\dots,\ell)$;

(d) minden $j(=1,\ldots,\ell)$-re $k_j \geqq 0$ és $1 \leqq n_{j_1},\ldots,n_{j_{k_j}} \leqq k$;

(e) minden $i(=1,\ldots,k)$ legfeljebb K-szor fordul elő az

$$n_{1_1}\ldots n_{1_{k_1}}\ldots n_{\ell_1}\ldots n_{\ell_{k_\ell}} \qquad (1)$$

sorozatban.

Φ_K-val jelöljük az $\cup(\Phi_{K,f} | f \in F)$ halmazt.

<u>4.2 Definició.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_0,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátor, $p \in T_F$, K pedig természetes szám. Tekintsük π:path(p) $\longrightarrow \Phi_K$ leképezést amelynél minden w ($\in$ path(p)) esetén az $f=lb_p(w)$ egyenlőség maga után vonja, hogy $\pi_w \in \Phi_{K,f}$. Azt mondjuk, hogy π K-stratégia p-n, ha teljesülnek rá a következők:

(a) Legyen dp(p)=0 vagyis p=f ($\in F_0$) továbbá $\pi_\lambda=(e_1,\ldots,e_\ell)$ és $e_j=(I_j;S_j)$ $(j=1,\ldots,\ell)$. Minden $j(=1,\ldots,\ell)$-re és a ($\in S_j$)-ra, ha P-ben van $af \leftarrow q(a_1z_0,\ldots,a_sz_0)$ alaku szabály akkor $a_1,\ldots,a_s \in I_1 \cup \ldots \cup I_j$.

(b) Legyen most dp(p) > 0 tehát $p=f(p_1,\ldots,p_k)$ $(k \geqq 1)$. Tételezzük fel, hogy a következő jelölések érvényesek:

$$\pi_\lambda=(e_1,\ldots,e_\ell),\ e_j=(I_j;n_{j_1}\ldots n_{j_{k_j}};S_j)\ (j=1,\ldots,\ell);$$
$$\pi_i=(e_1^i,\ldots,e_{\ell_i}^i),\ e_r^i=(I_r^i;\ldots;S_r^i)\ (i=1,\ldots,k,\ r=1,\ldots,\ell_i).$$

(i) minden $i(=1,\ldots,k)$ pontosan ℓ_i-szer fordul elő (1)-ben;

(ii) minden $j(=1,\ldots,\ell)$-re, a ($\in S_j$)-ra, ha $af(z_1,\ldots,z_k) \leftarrow q(a_1z_{i_1},\ldots,a_sz_{i_s}) \in P$ akkor minden $r(=1,\ldots,s)$-re

$$a_r \in \begin{cases} I_1 \cup \ldots \cup I_j & \text{ha } i_r=0 \\ S_1^{i_r} \cup \ldots \cup S_n^{i_r} \text{ ahol n azt a} & \\ \text{számot jelöli, ahányszor} & \\ i_r \text{ előfordul} & \text{ha } 1 \leq i_r \leq k; \\ n_{1_1} \ldots n_{1_{k_1}} \ldots n_{j_1} \ldots n_{j_{k_j}} & \\ \text{sorozatban} & \end{cases}$$

(iii) minden $i(=1,\ldots,k)$-re, $r(=1,\ldots,\ell_i)$-re és a $(\in I_r^i)$-ra az $a(z_i,f) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\ldots,a_s z_{i_s}) \in P$ tartalmazásból következik, hogy minden $t(=1,\ldots,s)$-re

$$a_t \in \begin{cases} I_1 \cup \ldots \cup I_n \text{ ahol n-re teljesül} & \\ \text{hogy } e_n \text{ tartalmazza i r-edik} & \text{ha } i_t=0 \\ \text{előfordulását} & \\ S_1^{i_t} \cup \ldots \cup S_{n'}^{i_t} \text{ ahol n' az a szám,} & \\ \text{ahányszor } i_t \text{ előfordul (1)-ben} & \text{ha } 1 \leq i_t \leq k. \\ \text{i-nek az r-edik előfordulása} & \\ \text{előtt} & \end{cases}$$

(iv) minden $i(=1,\ldots,k)$-re $\mathcal{T}^i$ ($\mathcal{T}$-nek a p_i-re való megszoritása) stratégia p_i-n.

<u>4.3 Definició.</u> Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátor, K pedig természetes szám. Akkor mondjuk, hogy $\underline{A}$ K-vizsgáló, ha teljesül, hogy dom $T(\underline{A})$ minden elemén létezik K-stratégia.

Az egyenletesen K-vizsgáló fogalom szintén átvihető determinisztikus AT transzformátorokra: tekintsük az előbbi

$\underline{A}$ és K esetén a $\varrho = \langle \varrho_f \mid f \in F \rangle$ rendszert, ahol minden f ($\in F$)-re ϱ_f legfeljebb K komponensre történő diszjunkt particionálása A elemeinek, tehát

$$\varrho_f = (A_1^f, \ldots, A_{\ell_f}^f) \qquad (\ell_f \leq K,\ f \in F). \tag{2}$$

Tetszőleges f ($\in F$) esetén $\Phi_{K,f}(\varrho)$ halmazt az alábbi módon értelmezzük:

$(e_1, \ldots, e_\ell) \in \Phi_{K,f}(\varrho) \iff$ (a) $(e_1, \ldots, e_\ell) \in \bar{\Phi}_{K,f}$;

(b) $\ell = \ell_f$;

(c) $e_j = (I_j; n_{j_1}, \ldots, n_{j_{k_{fj}}}; S_j)$ jelölés mellett $I_j \cup S_j = A_j^f$ $(j=1, \ldots, \ell)$;

továbbá, $\Phi_K(\varrho)$-val jelöljük az $\bigcup(\Phi_{K,f}(\varrho) \mid f \in F)$ halmazt.

<u>4.4 Definició.</u> Legyen $\underline{A} = (F, A, G, a_0, P, rt)$ determinisztikus AT transzformátor, $p \in T_F$, K természetes szám és ϱ (2) alaku. Tekintsük $\pi: path(p) \to \Phi_K(\varrho)$ leképezést. Azt mondjuk, hogy π ϱ-egyenletes K-stratégia p-n, ha

(a) π stratégia p-n,

(b) minden w ($\in path(p)$)-re $\pi_w \in \Phi_{K,f}(\varrho)$, ahol $f = lb_p(w)$.

$\underline{A}$-t ϱ-egyenletesen K-vizsgálónak mondjuk, ha teljesül, hogy dom $T(\underline{A})$ minden elemén létezik ϱ-egyenletes K-stratégia. Végül, $\underline{A}$ egyenletesen K-vizsgáló, ha ϱ-egyenletesen K-vizsgáló valamely (2) alaku ϱ-ra.

Tételezzük fel, hogy (2)-ben minden f,g ($\in F$) esetén $\varrho_f = \varrho_g$ és $\ell_f = K$ teljesül, tehát

$$\varrho = (A_1, \ldots, A_K). \tag{3}$$

4.5 Definició. $\underline{A}$ AT transzformátort szuperegyenletesen K-vizsgálónak mondjuk, ha ϱ-egyenletesen K-vizsgáló valamilyen (3) alaku ϱ-ra.

Rámutatunk, hogy a K-vizsgáló tulajdonság eldönthető tulajdonsága az AT transzformátoroknak ugyanugy mint az attributumnyelvtanoknak. Felhasználjuk Bartha [3]-ban található egyik alapvető eredményét, mely szerint tetszőleges $\underline{A}$ AT transzformátor esetén dom $T(\underline{A})$ reguláris erdő.

4.6 Tétel. Tetszőleges $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátorról és K természetes számról eldönthető, hogy $\underline{A}$ K-vizsgáló vagy nem.

Bizonyitás. Tekintsük $\underline{B}=(B,F,B')$ F automatát, ahol

(a) $B=B'=\Phi_K$

(b) F szimbólumait a következőképpen realizáljuk $\underline{B}$-ben: tetszőleges $k(\geqq 0)$; $f\ (\in F_k)$; $\underline{e}\in\Phi_{K,f}$; $\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\in\Phi_K$ esetén:

$\underline{e}\in f^{\underline{B}}(\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k) \Longleftrightarrow$ f-re, $\underline{e}$-re és $\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k$-ra teljesülnek azok a feltételek, amelyek a 4.2 definicióban teljesültek f-re π_λ-ra és $\pi_1,\dots,\pi_k$-ra.

Tetszőleges $p\ (\in T_F)$-re és $\underline{e}\ (\in B)$-re $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval igazolható a következő állitás: $\underline{e}\in p^{\underline{B}}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha p-nek valamilyen π stratégiájára $\pi_\lambda=\underline{e}$.

Valóban, ha $dp(p)=0$ vagyis $p=f\ (\in F_o)$, ugy $\underline{e}$ akkor és csakis akkor eleme $f^{\underline{B}}$-nek, ha f-re és $\underline{e}$-re teljesülnek azok a feltételek, amelyek a 4.2 definició (a) részében teljesültek f-re és π_λ-ra, vagyis, ha $\pi_\lambda = \underline{e}$ egyenlőséggel definiált π stratégia p(=f)-n.

Legyen most $dp(p) > 0$ vagyis $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k \geq 1)$. Legyen $\underline{e} \in p^{\underline{B}}$ vagyis $\underline{e} \in f^{\underline{B}}(\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k)$ valamilyen $\underline{e}^j (\in p_j^{\underline{B}})$-re $(j=1,\dots,k)$. Indukció feltevésünk szerint ezen utóbbi tartalmazások akkor és csakis akkor érvényesek, ha p_j-n létezik olyan π^j stratégia, melyre $\pi_\lambda^j = \underline{e}^j$ $(j=1,\dots,k)$. Másrészt $\underline{e} \in f^{\underline{B}}(\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha f-re $\underline{e}$-re $\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k$-ra ugyanazok érvényesek mint a 4.2 definició (b) pontjában f-re, π_λ-ra és $\pi_1,\dots,\pi_k$-ra. Más szóval pontosan akkor, ha π^j $(j=1,\dots,n)$ $\pi_\lambda = \underline{e}$-vel kiegészitve stratégia p-n.

Fenti állitásunkat valamint $\underline{B}$ definicióját tekintve azonnal adódik, hogy tetszőleges p $(\in T_F)$-n akkor és csakis akkor létezik stratégia, ha $p \in T(\underline{B})$. Következésképpen $\underline{A}$ akkor és csakis akkor K-vizsgáló, ha dom $T(\underline{A}) \subseteq T(\underline{B})$. Jól ismert az a tény, hogy reguláris erdőkre ilyen tartalmazási reláció érvényessége eldönthető (ld. például [20]), tehát akkor az is, hogy $\underline{A}$ K-vizsgáló vagy nem.$\square$

Legyen most ς (2) alaku. Ha a 4.6 tételben, $\underline{B}$ konstrukciójában Φ_K helyett $\Phi_K(\varsigma)$ -t és $\Phi_{K,f}$ helyett $\Phi_{K,f}(\varsigma)$ -t irunk akkor olyan $\underline{B}(\varsigma)$ faautomatát kapunk amelyre érvényes lesz: tetszőleges p $(\in T_F)$-n akkor és csakis akkor létezik ς-egyenletes K-stratégia, ha $p \in T(\underline{B}(\varsigma))$.

4.7 Következmény. Tetszőleges $\underline{A}$ AT transzformátorról, K természetes számról és (2) alaku ς-ról eldönthető, hogy $\underline{A}$ ς-egyenletesen K-vizsgáló vagy nem.□

Mivel rögzitett K-ra (2) és (3) particionálás csak véges sok létezik, igy nyilvánvaló a

4.8 Következmény. Tetszőleges $\underline{A}$ AT transzformátorról, K természetes számról eldönthető, hogy $\underline{A}$ (szuper-) egyenletesen K-vizsgáló vagy nem.□

Definicióink miatt az attributumnyelvtanoknál mondotthoz hasonló észrevétel érvényes: tetszőleges $\underline{A}$ attributumos fatranszformátor akkor és csakis akkor l-vizsgáló, ha (szuper-) egyenletesen l-vizsgáló.

Most bevezetünk egy olyan fogalmat, amellyel jól tanulmányozhatók az l-vizsgáló AT transzformátorok. A fogalomnak attributumnyelvtanokra vonatkozó megfelelője [12]-ben található. Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátor, f pedig F_k-nak eleme valamilyen $k\,(\geq 1)$-re. Ekkor az ($\underline{A}$-ra vonatkozóan,) f-hez tartozó BG_f irányitott gráfot a következőképpen értelmezzük. Szögpontjainak $\overline{BG}_f$ halmaza legyen az $\{1,\dots,k\}$ halmaz, továbbá akkor és csakis akkor irányitsunk élet $j(=1,\dots,k)$ szögpontból $i(=1,\dots,k)$-ba, ha P-ben van $a(z_i,f)\leftarrow q(a_1 z_{i_1},\dots,a_\ell z_{i_\ell})$ alaku szabály ($\ell\geq 0$; $q\in\hat{T}_G(Z_\ell)$) és még $i_r=j$ is tejesül valamely $r(=1,\dots,\ell)$-re. A szóban forgó $\underline{A}$-ról és igy a dolgozatban szereplő minden további AT transzformátorról feltehető a következő: minden $k\,(\geq 0)$-ra F_k minden f eleme előfordul valamilyen dom $T(\underline{A})$-beli fában, vagyis ez utóbbi halmaznak van olyan eleme amelynek van $f(p_1,\ldots,p_k)$ alaku részfája. Ezért érvényes lesz a következő: $\underline{A}$ akkor és csakis akkor 1-vizsgáló, ha BG_f nem tartalmaz zárt, irányitott hurkot semmilyen f ($\in F$)-re. Az állítás igazolása az attributumnyelvtanokra vonatkozó, megfelelő állitás (ld. [12]) AT transzformátorokra vonatkozó átfogalmazásával történhet.

A továbbiakban a K-vizsgáló attributumos fatranszformátorok által indukálható fatranszformációk osztályát $\mathcal{DA}_{K\text{-}V}$-vel jelöljük, mig a (szuper-) egyenletesen K-vizsgáló fatranszformátorok által indukálható fatranszformációk osztályát ($\mathcal{DA}_{SEK\text{-}V}$) $\mathcal{DA}_{EK}$-vel. (A K-vizsgáló fogalom csak determinisztikus esetben értelmezett.)

<u>4.9 Tétel.</u> Tetszőleges K (≥ 1)-ra $\mathcal{DA}_{K\text{-}V} \subsetneq \mathcal{L} \circ \mathcal{DA}_{1\text{-}V}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen K (≥ 1) tetszőleges és $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ K-vizsgáló AT transzformátor. Tekintsük $\underline{B}=(F,B,\overline{F},B',P')$ leszálló fatranszformátort, ahol

(a) $B=B'=\Phi_K$;

(b) $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle \in \overline{F}_m \iff$ (i) $f \in F_k$ ($k \geq 0$);

$m(\geq 0)$ (ii) $\underline{e} \in \Phi_{K,f}; \underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k \in \Phi_K$;

(iii) $m=\ell_1+\ldots+\ell_k$ ahol $\ell_1,\ldots,\ell_k$ rendre $\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k$ elemeinek a száma;

(iv) f-re $\underline{e}$-re $\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k$-ra teljesülnek azok a feltételek, amelyek a 4.2 definicióban tejesülnek f-re π_1-ra $\pi_1,\ldots,\pi_k$-ra.

(c) valahányszor $\langle f,\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle \in \overline{F}_m$ valamely $m\,(\geqq 0)$-ra mindannyiszor legyen

$$f(\underline{e}^1 z_1,\ldots,\underline{e}^k z_k) \to \underline{e}\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle(\overbrace{z_1,\ldots,z_1}^{\ell_1\text{-szer}},\ldots,\overbrace{z_k,\ldots,z_k}^{\ell_k\text{-szor}})$$

szabály P'-ben.

Továbbá, adjuk meg $\underline{C}=(\overline{F},C,G,c_o,P'',rt'')$ AT transzformátort a következőképpen:

(a) $C_s=A_s$, $C_i=A_i$, $c_o=a_o$, $rt''=rt$;

(b) legyen $m\geqq 0$ és $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle$ az $\overline{F}_m$ valamely eleme. Tételezzük fel, hogy érvényesek az $\underline{e}^i=(e^i_1,\ldots,e^i_{\ell_i})$ és $e^i_r=(I^i_1;\ldots;S^i_r)$ jelölések, ha $i=1,\ldots,k$, $r=1,\ldots,\ell_i$.
Minden $a\in(C_s=A_s)$ esetén vegyük fel P''-be az

$$a\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle(z_1,\ldots,z_m)\leftarrow q(a_1 z_{i_1},\ldots,a_s z_{i_s})$$

szabályt, ha a következők teljesülnek:

(i) $af(z_1,\ldots,z_k)\leftarrow q(a_1 z_{j_1},\ldots,a_s z_{j_s})\in P$;

(ii) $i_r=\begin{cases} j_r(=0) & \text{ha } a_r\in A_i \\ \ell_1+\ldots+\ell_{j_r-1}+n & \text{ha } a_r\in S^{j_r}_n \end{cases}$ $(r=1,\ldots,s)$.

Minden $j(=1,\ldots,k)$, $n(=1,\ldots,\ell_j)$ esetén vegyük fel P''-be az

$$a(z_i,\ \langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle)\leftarrow q(a_1 z_{i_1},\ldots,a_s z_{i_s})$$

szabályt, ha a következők teljesülnek:

(i) $a\in I^j_1\cup\ldots\cup I^j_n$

(ii) $i=\ell_1+\ldots+\ell_{j-1}+n$

(iii) $a(z_j,f)\leftarrow q(a_1 z_{j_1},\ldots,a_s z_{j_s})\in P$;

$$\text{(iv)}\quad i_r = \begin{cases} j_r (=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ \ell_1+\ldots+\ell_{j_r-1}+n' & \text{ha } a_r \in S_{n'}^{j_r} \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s).$$

Most néhány állitást bizonyitunk az igy megkonstruált $\underline{B}$ és $\underline{C}$ fatranszformátorokra, melyek összessége az eredeti tételünk bizonyitását adja. Állitásainkat lemmákban mondjuk ki.

<u>4.9.1 Lemma.</u> $\underline{C}$ 1-vizsgáló.

<u>Bizonyitás.</u> Vegyünk valamely $m(\geq 1)$-re egy $\overline{F}_m$-beli $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle$ elemet és tekintsük $BG_{\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle}$-t. Legyen $i,i' \in \overline{BG}_{\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle}$. Ekkor i és i' egyértelmüen előállitható

$$i=\ell_1+\ldots+\ell_{j-1}+n$$

$$i'=\ell_1+\ldots+\ell_{j'-1}+n'$$

alakban† valamely $j,j'(=1,\ldots,k)$, $n(=1,\ldots,\ell_j)$ és $n'(=1,\ldots,\ell_{j'})$-re. Elegendő igazolni a következőt: ha i'-ből irányitott ut vezet i-be $BG_{\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle}$-ban akkor j'-nek az n'-edik előfordulása megelőzi j-nek az n-edik előfordulását az

$$n_{1_1}\ldots n_{1_{k_1}}\ldots n_{\ell_1}\ldots n_{\ell_{k_\ell}}$$

sorozatban, amely az $\underline{e}$-beli sorozatok egymás után irásával keletkezett. Az igazolás i'-ből i-be vezető leghosszabb ut hossza szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) Tételezzük fel, hogy a leghosszabb ut hossza egy. Ekkor létezik $a(z_i,\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\ldots,a_s z_{i_s})$ alaku elem P''-ben és még $i'=i_r$ is teljesül valamely $r(=1,\ldots,s)$-re. Következésképpen - P'' definiciója miatt - $a(z_j,f)\leftarrow q(a_1 z_{j_1},\ldots,$

---

† Ahol $\ell_1,\ldots,\ell_k$ rendre $\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k$ elemeinek a száma.

$a_s z_{j_s}) \in P$, ahol $a \in I_1^j \cup \ldots \cup I_{n'}^j$; $j'=j_r$ és $a_r \in S_{n'}^{j_r}$. Tételezzük fel, hogy $a \in I_{\bar{n}}^j$, ahol $\bar{n} \leq n$. Ekkor a szóban forgó P"-beli elem definiciója miatt j'-nek az n'-edik előfordulása megelőzi j-nek az $\bar{n}$-adik előfordulását, ami nyilvánvalóan megelőzi j-nek az n-edik előfordulását.

(b) Ha i'-ből i-be vezető leghosszabb ut hossza egynél nagyobb akkor van olyan $i"=\ell_1+\ldots+\ell_{j"-1}+n"$ amelyre teljesül, hogy i"-ből i-be él vezet $BG_{\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle}$-ban és az i'-ből i"-be vezető leghosszabb ut hossza kisebb mint a szóban forgó uté. Az (a) esethez hasonlóan igazolható, hogy j" n"-edik előfordulása megelőzi j-nek az n-edik előfordulását. Másrészt indukció feltevés szerint j' n'-edik előfordulása megelőzi j" n"-edik előfordulását.

Ezzel igazoltuk, hogy i-ből nem vezet irányitott ut i-be semmilyen $i \in \overline{BG}_{\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle}$-ra vagyis, hogy $\underline{C}$ l-vizsgáló. □ (4.9.1)

4.9.2 Lemma. Legyen $p \in T_F$ és $\underline{e} \in B$. A $p \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \underline{e}\bar{q}$ deriváció akkor és csakis akkor teljesül valamilyen $\bar{q}$ $(\in T_{\bar{F}})$-ra, ha p-n van olyan π K-stratégia, amelyre $\pi_\lambda=\underline{e}$.

Bizonyitás. Az igazolás dp(p) szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) Legyen dp(p)=0 vagyis $p=f$ $(\in F_0)$. Ekkor $p \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \underline{e}\bar{q}$ azt jelenti, hogy $f \to \underline{e}\langle f;\underline{e}\rangle \in P'$ és $\bar{q}=\langle f;\underline{e}\rangle$. Ezen szabály viszont akkor és csakis akkor van P'-ben, ha $\langle f;\underline{e}\rangle \in \bar{F}_0$ vagyis, ha a $\pi_\lambda=\underline{e}$ egyenlőség által értelmezett π stratégia p-n.

(b) Tételezzük fel, hogy $dp(p)>0$ vagyis $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k\geq 1)$. Ekkor a szóban forgó deriváció

$$f(p_1,\dots,p_k)\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} f(\underline{e}^1\bar{q}_1,\dots,\underline{e}^k\bar{q}_k)\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}\underline{e}\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle(\underbrace{\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_1}_{\ell_1},\dots,\underbrace{\bar{q}_k,\dots,\bar{q}_k}_{\ell_k})$$

alakban irható. Indukció feltevésünk szerint $p_i\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}}\underline{e}^i\bar{q}_i$ derivációk akkor és csakis akkor teljesülnek, ha p_i-n van olyan π^i K-stratégia amelyre $\pi^i_\lambda=\underline{e}^i$ $(i=1,\dots,k)$. Másrészt az $f(\underline{e}^1z_1,\dots,\underline{e}^kz_k)\rightarrow\underline{e}\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle(z_1,\dots,z_1,\dots,z_k,\dots,z_k)$ szabály pontosan akkor van P'-ben, ha f-re, $\underline{e}$-re, $\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k$-ra teljesülnek azok a feltételek, amelyek a 4.2 definicióban teljesültek f-re, $\tilde{\pi}_\lambda$-ra, $\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_k$-ra, vagyis, ha π^i $(i=1,\dots,k)$ a $\tilde{\pi}_\lambda=\underline{e}$ -vel kiegészitve stratégia p-n.□ (4.9.2)

A következő lemma állitása a stratégia értelmezése, valamint a 4.9.2 lemma miatt nyilvánvaló, de azért formálisan is elvégezzük igazolását.

<u>4.9.3 Lemma.</u> Legyen $p\in T_F$, $\bar{q}\in T_{\bar{F}}$, $\underline{e}(=(e_1,\dots,e_\ell))\in B$, ahol $e_j=(I_j;n_{j_1},\dots,n_{j_{k_j}};S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$. Legyen továbbá $j(=1,\dots,\ell)$ tetszőleges, $a\in S_j$ és $\varphi:A_i\longrightarrow T_G$ parciális leképezés. Tételezzük fel, hogy $p\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}}\underline{e}\bar{q}$ és $(a,\lambda)\overset{*}{\underset{\underline{pA}}{\Leftarrow}} q$ φ-nél valamely q $(\in T_G)$-re.

Akkor, ezen deriváció során, valahányszor egy (d,λ) levelet $(d\in A_i)$ helyettesitettünk $\varphi(d)$-vel ugy mindannyiszor teljesül a $d\in I_1\cup\dots\cup I_j$ tartalmazás.

<u>Bizonyitás.</u>

(a) Legyen $dp(p)=0$ vagyis $p=f$ $(\in F_0)$. Ekkor feltevésünk szerint $f\rightarrow\underline{e}\langle f;\underline{e}\rangle\in P'$, $\bar{q}=\langle f;\underline{e}\rangle$ és az $af\leftarrow q'(a_1z_0,\dots,a_sz_0)$

P-beli szabályra $q=q'(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_s))$. Minthogy $\langle f;\underline{e}\rangle\in\overline{F}_o$, igy $a_1,\dots,a_s\in I_1\cup\dots\cup I_j$.

(b) Tételezzük fel, hogy $dp(p)>0$ tehát $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k\geq 1)$. Feltevésünk értelmében

$$p\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} f(\underline{e}^1\overline{q}_1,\dots,\underline{e}^k\overline{q}_k)\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}\underline{e}\langle f;\underline{e},\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k\rangle(\overline{q}_1,\dots,\overline{q}_1,\dots,\overline{q}_k,\dots,\overline{q}_k).$$

Tételezzük fel, hogy tetszőleges $i(=1,\dots,k)$ esetén $\underline{e}^i=(e^i_1,\dots,e^i_{\ell_i})$ és $r(=1,\dots,\ell_i)$ esetén $e^i_r=(I^i_r;\dots;S^i_r)$ jelölések érvényesek.

(b1) Állitás. Legyen $i(=1,\dots,k)$, $r(=1,\dots,\ell_i)$, $b\in I^i_r$ tetszőleges. Tételezzük fel, hogy e_n tartalmazza i-nek r-edik előfordulását, továbbá

$$\beta:(b,i)\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} t\quad \varphi\text{-nél}$$

valamely $t(\in T_G)$-re. Akkor, ezen deriváció során valahányszor egy (c,λ) levelet $(c\in A_i)$ helyettesitünk $\varphi(c)$-vel, mindannyiszor teljesül $c\in I_1\cup\dots\cup I_n$ tartalmazás.

Nyilvánvaló ez, ha $lt(\beta)=1$. Különben, ha $lt(\beta)>1$ akkor β felirható

$$(b,i)\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow} t'((b_1,v_1),\dots,(b_s,v_s))\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} t'(t_1,\dots,t_s)=t\quad \varphi\text{-nél}$$

alakban, ahol $b(z_i,f)\leftarrow t'(b_1z_{i_1},\dots,b_sz_{i_s})$ P-ben van, továbbá

$$v_r=\begin{cases}\lambda & \text{ha } i_r=0\\ i_r & \text{ha } 1\leq i_r\leq k\end{cases}\qquad (r=1,\dots,s).$$

Legyen most $r(=1,\dots,s)$ olyan, hogy $i_r=0$, vagyis $b_r\in A_i$. Ekkor $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle$ elem definiciója miatt teljesül az állitott tartalmazás. Különben, ha $r(=1,\dots,s)$-re $1\leq i_r\leq k$ teljesül akkor $b_r\in A_s$, tehát $b_r\in S^{i_r}_{r'}$ valamely $r'(=1,\dots,\ell_{i_r})$-re. Minthogy a fentiek miatt fennálló

$$(b_r,\lambda) \xLeftarrow[p_{i_r}\underline{A}]{*} t_r \quad \varphi_{i_r,p}\text{-nél}$$

relációra $dp(p_{i_r}) < dp(p)$, igy ezen deriváció során valahányszor (d,λ) levelet helyettesitünk $\varphi_{i_r,p}(d)$-vel $(d \in A_i)$, mindannyiszor $d \in I_1^{i_r} \cup \ldots \cup I_{r'}^{i_r}$. Másrészt, feltételezve, hogy $e_{n'}$ tartalmazza i_r-nek r'-edik előfordulását, $(1 \leq n' \leq \ell)$ a $\gamma:(d,i_r) \xLeftarrow[p\underline{A}]{*} \varphi_{i_r,p}(d)$ φ-nél derivációra fennálló $lt(\gamma) < lt(\beta)$ miatt érvényes lesz, hogy valahányszor γ során egy (c,λ) helyettesitünk $\varphi(c)$-vel, mindannyiszor $c \in I_1 \cup \ldots \cup I_{n'}$. Végül - mivel $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle$ elem definiciója miatt i_r-nek r'-edik előfordulása megelőzi i-nek r-edik előfordulását - $n' \leq n$, tehát $c \in I_1 \cup \ldots \cup I_n$. □ (b1)

A (b1) állitásban igazoltakat figyelembe véve, maga az indukciós lépés is könnyen igazolható. □ (4.9.3)

<u>4.9.4 Lemma.</u> Legyenek érvényesek a 4.9.3 lemma jelölései. Tételezzük fel, hogy $p \xRightarrow[\underline{B}]{*} \underline{e}\bar{q}$ és $(a,\lambda) \xLeftarrow[\bar{q}\underline{C}]{*} q$ φ-nél valamely q $(\in T_G)$-ra. Akkor ezen deriváció során, valahányszor egy (c,λ) levelet helyettesitünk $\varphi(c)$-vel $(c \in C_i)$ mindannyiszor teljesül $c \in I_1 \cup \ldots \cup I_j$ tartalmazás.

<u>Bizonyitás.</u> Hasonlóan az előző lemmához, a pontos igazolás $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval végezhető el, kihasználva $\underline{C}$ definicióját. □ (4.9.4)

<u>4.9.5 Lemma.</u> Legyen $p \in T_F$, $q \in T_G$, $a \in A_s(=C_s)$ és $\varphi: A_i \to T_G$ parciális leképezés. Ekkor az

$$(a,\lambda) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} q \qquad \varphi\text{-nél}$$

reláció akkor és csakis akkor áll fenn, ha minden $\overline{q}$ ($\in T_{\overline{F}}$)-ra, $\underline{e}$ ($\in B$)-re, amelyekre $p \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \underline{e}\overline{q}$, érvényes, hogy

$$(a,\lambda) \overset{*}{\underset{\overline{q}\underline{C}}{\Longleftarrow}} q \qquad \varphi\text{-nél}.$$

Bizonyitás. A szükségesség igazolását dp(p) szerinti teljes indukcióval végezzük.

(a) Legyen dp(p)=0 tehát $p=f$ ($\in F_o$). Ekkor az $af \leftarrow q'(a_1z_o,\dots, a_sz_o)$ P-beli szabályra teljesül $q=q'(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_s))$. A $p \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \underline{e}\overline{q}$ most azt jelenti, hogy $f \to \underline{e}\langle f;\underline{e}\rangle \in P'$ és $\overline{q}=\langle f;\underline{e}\rangle$, tehát $\langle f;\underline{e}\rangle \in \overline{F}_o$. Következésképpen a $\langle f;\underline{e}\rangle \leftarrow q'(a_1z_o,\dots,a_sz_o) \in$ $\in P''$.

(b) Tételezzük most fel, hogy dp(p) > 0 tehát $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k \geq 1)$ és minden p-nél kisebb mélységü fára a megfelelő állítást már igazoltuk. Tekintsük $p \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \underline{e}\overline{q}$-t amely most a következő formáju:

$$\begin{aligned} &p \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} f(\underline{e}^1\overline{q}_1,\dots,\underline{e}^k\overline{q}_k) \underset{\underline{B}}{\Longrightarrow} \\ &\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow} \underline{e}\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle(\overline{q}_1,\dots,\overline{q}_1,\dots,\overline{q}_k,\dots,\overline{q}_k)=\underline{e}\overline{q} \end{aligned} \tag{4}$$

ahol $\underline{e}=(e_1,\dots,e_\ell)$, $e_j=(I_j;n_{j_1},\dots,n_{j_{k_j}};S_j)$ $(j=1,\dots,\ell)$, $\underline{e}^i=(e^i_1,\dots,e^i_{\ell_i})$, $e^i_j=(I^i_j;\dots;S^i_j)$ $(i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,\ell_i)$.

(b1) Állitás. Legyen $b \in A_i(=C_i)$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq n \leq \ell_j$, $t \in T_G$ és tételezzük fel, hogy

(i) $b \in I^j_1 \cup \dots \cup I^j_n$;

(ii) $\beta : (b,j) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} t \quad \varphi$-nél;

(iii) $i=\ell_1+\dots+\ell_{j-1}+n$.

Ekkor $(b,i) \overset{*}{\underset{\underline{qC}}{\Longleftarrow}} t$ φ-nél.

A bizonyitás $lt(\beta)$ szerinti teljes indukcióval végezhető el. Amikor $lt(\beta)=1$ vagyis $b(z_j,f) \leftarrow t \in P$ akkor (P'' definiciója miatt) $b(z_i, \langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle) \leftarrow t \in P''$.

Legyen most $lt(\beta)>1$ és tételezzük fel, hogy minden β-nál rövidebb derivációra a megfelelő állitás érvényes. Minthogy most β felirható

$$(b,j) \underset{\underline{pA}}{\Longleftarrow} t'((b_1,w_1),\ldots,(b_s,w_s)) \overset{*}{\underset{\underline{pA}}{\Longleftarrow}} t'(t_1,\ldots,t_s) = t \quad \varphi\text{-nél} \tag{5}$$

alakban, igy teljesülnek a következők:

$$b(z_j,f) \leftarrow t'(b_1 z_{j_1},\ldots,b_s z_{j_s}) \in P,$$

$$w_r = \begin{cases} \lambda & \text{ha } j_r=0 \\ j_r & \text{ha } 1 \leq j_r \leq k \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s).$$

Következésképpen P'' definiciója miatt

$$b(z_i,\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle) \leftarrow t'(b_1 z_{i_1},\ldots,b_s z_{i_s}) \in P'', \text{ ahol}$$

$$i_r = \begin{cases} j_r = 0 & \text{ha } b_r \in A_i \\ \ell_1+\ldots+\ell_{j_r-1}+n' & \text{ha } b_r \in S_{n'}^{j_r} \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s). \tag{6}$$

Tekintsünk tetszőleges $r(=1,\ldots,s)$ indexet melyre $b_r \in A_s$, tehát $1 \leq j_r \leq k$. Mivel (5) miatt $(b_r,w_r) \overset{*}{\underset{\underline{pA}}{\Longleftarrow}} t_r$ φ-nél, igy

$$(b_r,\lambda) \overset{*}{\underset{p_{j_r}\underline{A}}{\Longleftarrow}} t_r \quad \varphi_{j_r,p}\text{-nél} \tag{7}$$

Továbbá - $p_{j_r} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \underline{e}^{(j_r)} q_{j_r}$ és $dp(p_{j_r}) < dp(p)$ miatt - a (b)-nél tett indukció feltevés értelmében

$$(b_r,\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_r}\underline{C}}{\Longleftarrow}} t_r \quad \varphi_{j_r,p}\text{-nél.} \tag{8}$$

Tételezzük fel valamely $c\ (\in A_i)$-ről, hogy (7)-ben szerepelt mint egy (c,λ) levél helyettesitése $\varphi_{j_r,p}(c)$-vel. Tekintve, hogy $\underline{A}$ nemcirkuláris, a $\gamma:(c,j_r)\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}\varphi_{j_r,p}(c)$ derivációra $lt(\gamma)<lt(\beta)$, továbbá, - a 4.9.3 lemma miatt - $c\in I_1^{j_r}\cup\ldots\cup I_n^{j_r}$. Ilyen módon (b1) állitásra vonatkozó indukciós feltevés miatt

$$(c,i_r)\overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}}\varphi_{j_r,p}(c)\ (:=\varphi_{i_r,\bar{q}}(c))\qquad \varphi\text{-nél.}$$

Minthogy $lb_{\bar{q}}(i_r)=\bar{q}_{j_r}$ igy utóbbi levezetési relációnkat (8)-cal összevetve adódik, hogy $(b_r,i_r)\overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}}t_r$ φ-nél.

Ha pedig $r(=1,\ldots,s)$ olyan index melyre $b_r\in A_i$ vagyis $j_r=i_r=0$, ugy nyilvánvalóan $(b_r,\lambda)\overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}}t_r$ φ-nél. Mindkét esetet figyelembe véve, (6)-tal együtt kapjuk, hogy $(b,i)\overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}}t'(t_1,\ldots,t_s)=t$. □ (b1)

Térjünk vissza a szükségesség igazolásához (a (b1)-ben használt jelöléseket ujra felhasználjuk). Szóban forgó derivációnk

$$(a,\lambda)\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}q'((a_1,w_1),\ldots,(a_s,w_s))\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}}q'(q_1,\ldots,q_s)=q \qquad (9)$$

$$\varphi\text{-nél}$$

alakban irható, ahol $af(z_1,\ldots,z_k)\leftarrow q'(a_1z_{j_1},\ldots,a_sz_{j_s})\in P$,

$$w_r=\begin{cases}\lambda & \text{ha}\quad j_r=0\\ j_r & \text{ha}\quad 1\leq j_r\leq k\end{cases}\qquad (r=1,\ldots,s).$$

Következésképpen

$$a\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle(z_1,\ldots,z_m)\leftarrow q(a_1z_{i_1},\ldots,a_sz_{i_s})\in P'', \qquad (10)$$

ahol $m=\ell_1+\ldots+\ell_k$,

$$i_r = \begin{cases} j_r(=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ \ell_1+\ldots+\ell_{j_r-1}+n & \text{ha } a_r \in S_n^{j_r} \end{cases} \quad (r=1,\ldots,s).$$

Legyen most is $r(=1,\ldots,s)$ olyan index melyre $1 \leq j_r \leq k$. Ekkor (9)-ből következik, hogy $(a_r, j_r) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} q_r$ φ-nél, tehát

$$(a_r,\lambda) \overset{*}{\underset{p_{j_r}\underline{A}}{\Longleftarrow}} q_r \qquad \varphi_{j_r,p}\text{-nél.}$$

Minden olyan $c(\in A_i)$-re amely előfordul utóbbi derivációban mint (c,λ) levél helyettesitése, érvényes $c \in I_1^{j_r} \cup \ldots \cup I_n^{j_r}$ tartalmazás (4.9.3 lemma miatt), tehát (b1) állitás értelmében teljesül

$$(c,i_r) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} \varphi_{j_r,p}(c)\,(:= \varphi_{i_r,\bar{q}}(c)) \qquad \varphi\text{-nél.}$$

Másrészt, $dp(p_{j_r}) < dp(p)$ miatt $(a_r,\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_r}\underline{C}}{\Longleftarrow}} q_r$ $\varphi_{j_r,p}$-nél és mivel $lb_{\bar{q}}(i_r)=j_r$ igy $(a_r,i_r) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} q_r$ φ-nél.

Ha most $r(=1,\ldots,s)$ olyan, hogy $j_r=i_r=0$, akkor nyilvánvalóan $(a_r,\lambda) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} q_r$ φ-nél. Mindez (10)-zel együtt a keresett $(a,\lambda) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} q'(q_1,\ldots,q_s)=q$ φ-nél relációt adja.

Az ekvivalencia $\Longleftarrow$ irányu igazolása szintén $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) $dp(p)=0$ esetén az $\Longrightarrow$ irány (a) pontjának megforditásával bizonyithatunk.

(b) Tételezzük fel, hogy $dp(p) > 0$ tehát $p=f(p_1,\ldots,p_k)$ és tekintsük (4) derivációt illetve jelöléseket.

<u>(b1) Állitás.</u> Legyen $b \in C_i(=A_i)$, $1 \leq i \leq m(=\ell_1+\ldots+\ell_k)$, $t \in T_G$ és tételezzük fel, hogy

(i) $i=\ell_1+\ldots+\ell_{j-1}+n$ valamely, egyértelmüen meghatározott $j(=1,\ldots,k)$, $n(=1,\ldots,\ell_j)$-re.

(ii) $b \in I_1^j \cup \ldots \cup I_n^j$

(iii) $\beta : (b,i) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} t$ φ-nél.

Állitjuk, hogy $(b,j) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} t$ φ-nél.

A bizonyitást ujra $lt(\beta)$ szerinti teljes indukcióval végezhetjük. Ha $lt(\beta)=1$, tehát $b(z_i, \langle f; \underline{e}, \underline{e}^1, \ldots, \underline{e}^k \rangle) \leftarrow t$ szabály P"-ben van, akkor ez utóbbi definiciója miatt $b(z_j, f) \leftarrow t$ P-ben van.

Legyen most $lt(\beta)>1$ és tételezzük fel, hogy minden β-nál rövidebb derivációra igazoltuk a megfelelő állitást. Minthogy β most felirható

$$(b,i) \underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow} t'((b_1,w_1),\ldots,(b_s,w_s)) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} t'(t_1,\ldots,t_s)=t \quad \varphi\text{-nél}$$

alakban, igy teljesül, hogy $b(z_i, \langle f; \underline{e}, \underline{e}^1, \ldots, \underline{e}^k \rangle) \leftarrow t'(b_1 z_{i_1}, \ldots, b_s z_{i_s}) \in P"$, ahol

$$w_r = \begin{cases} \lambda & \text{ha } i_r = 0 \\ i_r & \text{ha } 1 \leq i_r \leq m \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s).$$

Ekkor P" definiciója miatt

$$b(z_j, f) \leftarrow t'(b_1 z_{j_1}, \ldots, b_s z_{j_s}) \in P \tag{11}$$

$$j_r = \begin{cases} i_r(=0) & \text{ha } b_r \in C_i \\ \text{az } i_r = \ell_1 + \ldots + \ell_{j_r - 1} + n', \\ 1 \leq n' \leq \ell_{j_r} \text{ relációk által} & \text{ha } b_r \in C_s \\ \text{definiált} \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s).$$

Legyen most $r(=1,\ldots,s)$ olyan, hogy $1 \leq i_r \leq m$ tehát $b_r \in C_s$. A fentiek szerint $(b_r, i_r) \overset{*}{\underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow}} t_r$ φ-nél, tehát $lb_{\overline{q}}(i_r) = \overline{q}_{j_r}$ miatt

$$(b_r,\lambda) \underset{q_{j_r}\underline{C}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t_r \quad \varphi_{i_r,\bar{q}} \text{-nál.} \tag{12}$$

Minthogy $p_{j_r} \underset{\underline{B}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \underline{e}^{(j_r)} q_{j_r}$ és $dp(p_{j_r}) < dp(p)$ igy (b)-nél mondott indukció feltevés miatt

$$(b_r,\lambda) \underset{p_{j_r}\underline{A}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t_r \quad \varphi_{i_r,\bar{q}} \text{-nál.} \tag{13}$$

Tételezzük fel, hogy c ($\in C_i$) ténylegesen előfordul (12)-ben mint (c,λ) helyettesitése $\varphi_{i_r,\bar{q}}(c)$-vel. A $\gamma:(c,i_r) \underset{q\underline{C}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} \varphi_{i_r,\bar{q}}(c)$ derivációra $lt(\gamma)<lt(\beta)$ (hiszen $\underline{C}$ 1-vizsgáló, tehát nemcirkuláris), továbbá $c \in I_1^{j_r} \cup \ldots \cup I_n^{j_r}$ (mivel $b_r \in S_n^{j_r}$) igy indukció feltevésünk miatt $(c,j_r) \underset{p\underline{A}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} \varphi_{i_r,\bar{q}}(c)$ $(:= \varphi_{j_r,p}(c))$. Következésképpen (13)-ból a $(b_r,j_r) \underset{p\underline{A}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t_r$ φ-nél relációt kapjuk.

Ha pedig $r(=1,\ldots,s)$ olyan, hogy $i_r=j_r=0$ ugy a $(b_r,\lambda) \underset{p\underline{A}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t_r$ φ-nél reláció nyilvánvaló. Következésképpen (11)-ből a $(b,j) \underset{p\underline{A}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} t'(t_1,\ldots,t_s)=t$ φ-nél levezetést kapjuk. □ (b1)

Térjünk vissza az elegendőség igazolásához. Tekintsük az

$$(a,\lambda) \underset{q\underline{C}}{\Longleftarrow} q'((a_1,w_1),\ldots,(a_s,w_s)) \underset{q\underline{C}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q'(q_1,\ldots,q_s)=q \quad \varphi\text{-nél}$$

alakban irt, szóban forgó levezetést, ahol

$a\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\ldots,\underline{e}^k\rangle\ (z_1,\ldots,z_m) \leftarrow q'(a_1 z_{i_1},\ldots,a_s z_{i_s}) \in P'', w_1,\ldots,w_s$

pedig ugy van értelmezve mint (b1) állitásban. A P" halmaz definiciója miatt

$$af(z_1,\ldots,z_k) \leftarrow q'(a_1 z_{j_1},\ldots,a_s z_{j_s}) \in P \tag{14}$$

ahol $j_1,\ldots,j_s$-et (11) definiálja. Legyen $r(=1,\ldots,s)$ olyan, hogy $1 \leq i_r \leq m$ tehát $a_r \in C_s$. Ekkor $(a_r,\lambda) \underset{q_{j_r}\underline{C}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q_r$ $\varphi_{i_r,\bar{q}}$-nál. Minden olyan c ($\in C_i$) amely előfordul (c,λ) helyettesitéssel az utóbbi derivációban, kielégiti a $c \in I_1^{j_r} \cup \ldots \cup I_n^{j_r}$ tartalmazást, (hiszen (11) szerint $a_r \in S_n^{j_r}$) igy (b1) állitás szerint $(c,j_r) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} \varphi_{i_r,\bar{q}}(c)$ $(:= \varphi_{j_r,p}(c))$. Másrészt - mivel $p_{j_r} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} \underline{e}^{(j_r)} q_{j_r}$ és $dp(p_{j_r}) < dp(p)$ - $(a_r,\lambda) \overset{*}{\underset{p_{j_r}\underline{A}}{\Leftarrow}} q_r$ $\varphi_{i_r,q}$-nál ami az előzővel együtt azt jelenti, hogy $(a_r,j_r) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q_r$ φ-nél. Ha pedig $r(=1,\dots,s)$ olyan, hogy $i_r=j_r=0$, akkor nyilvánvalóan $(a_r,\lambda) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q_r$ φ-nél. Következésképpen $(a,\lambda) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Leftarrow}} q'(q_1,\dots,q_s)=q$ φ-nél. □ (4.9.5)

A 4.9.1, 4.9.2 és 4.9.5 lemmák együtt a $\mathcal{DA}_{K-V} \subseteq \mathcal{L}\circ\mathcal{DA}_{1-V}$ tartalmazást bizonyitják. A tartalmazás valódisága 3.2 tétel miatt nyilvánvaló, mivel az abban szereplő $\underline{B}$ 1-vizsgáló.□

4.10 Tétel. Tetszőleges $K(\geq 1)$-re $\mathcal{DA}_{K-V} \subsetneq \mathcal{F}\circ\mathcal{DA}_{1-V}$.

Bizonyitás. Változtassuk meg a 4.9 tételben szereplő $\underline{B}$ leszálló fatranszformátor konstrukciójánál lévő (c) pontot a következőképpen: valahányszor $\langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle \in \bar{F}_m$ valamely $m(\geq 0)$-re mindannyiszor legyen az

$$\underline{e}f(z_1,\dots,z_k) \to$$
$$\to \langle f;\underline{e},\underline{e}^1,\dots,\underline{e}^k\rangle\,(\overbrace{\underline{e}^1 z_1,\dots,\underline{e}^1 z_1}^{\ell_1\text{-szer}},\dots,\overbrace{\underline{e}^k z_k,\dots,\underline{e}^k z_k}^{\ell_k\text{-szor}})$$

szabály P'-ben. Ezáltal $\underline{B}$ felszálló fatranszformátor lesz. A 4.9.1 - 4.9.5 lemmák felszálló $\underline{B}$-re való átfogalmazásai pedig az ott szereplőkhoz hasonlóan igazolhatók, ezért a részletes bizonyitást nem végezzük el. □

4.11 Tétel. Tetszőleges $K(\geq 1)$-ra $\mathcal{DA}_{EK-V} \subsetneq \mathcal{DL}\circ\mathcal{DA}_{1-V}$.

Bizonyitás. Legyen $K(\geq 1)$ tetszőleges egész és $\underline{A}=(F,A,G,a_0,P,rt)$ determinisztikus AT transzformátor amely ρ-egyenletesen K-vizsgáló valamely $\varrho = \langle \varrho_f \mid f \in F \rangle$-re, ahol $\varrho_f = (A_1^f, \ldots, A_{\ell_f}^f)$ $(f \in F,\ \ell_f \leqq K)$. Tekintsük $\underline{B} = (F, B, \overline{F}, B', P')$ leszálló fatranszformátort, ahol

(a) $B = B' = \varrho$

(b) $\langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \ldots, \varrho_{f_k} \rangle \in \overline{F}_m \iff$ (i) $f \in F_k$; $k \geqq 0$;
$(m \geqq 0)$ (ii) $f_1, \ldots, f_k \in F$;
(iii) $m = \ell_{f_1} + \ldots + \ell_{f_k}$;
(iv) f-re, valamely $\underline{e} = \Phi_{K,f}(\varrho)$-ra és valamely $\underline{e}^j \in \Phi_{K,f_j}(\varrho)$-ra $(j=1,\ldots,k)$ teljesülnek azok a feltételek, amelyek a 4.2 definicióban teljesültek f-re π_λ-ra $\pi_1, \ldots, \pi_k$-ra;

(c) minden $m(\geqq 0)$ és $\langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \ldots, \varrho_{f_k} \rangle \in \overline{F}_m$ esetén az

$$f(\varrho_{f_1} z_1, \ldots, \varrho_{f_k} z_k) \to \varrho_f \langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \ldots, \varrho_{f_k} \rangle (\overbrace{z_1, \ldots, z_1}^{\ell_{f_1}}, \ldots, \overbrace{z_k, \ldots, z_k}^{\ell_{f_k}})$$

szabály P'-ben van.

Mindenekelőtt vegyük észre: $\underline{B}$ nyilvánvalóan determinisztikus. Konstruáljuk meg $\underline{C} = (\overline{F}, C, G, c_o, P'', rt'')$ AT transzformátort a következőképpen:

(a) $C_s = A_s$, $C_i = A_i$, $c_o = a_o$, $rt'' = rt$;

(b) legyen $m(\geqq 0)$ és $\langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \ldots, \varrho_{f_k} \rangle \in \overline{F}_m$. Jelöljük minden $j(=1,\ldots,k)$, $r(=1,\ldots,\ell_j)$ esetén $A_r^{f_j}$ elemei közül az örököltteket $I_r^{f_j}$-el, a szintetizáltakat $S_r^{f_j}$-el.

Minden $a \in C_s (=A_s)$ esetén vegyük fel P"-be az

$$a\langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \dots, \varrho_{f_k}\rangle (z_1,\dots,z_m) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\dots,a_s z_{i_s})$$

szabályt, ha a következők teljesülnek:

(i) $af(z_1,\dots,z_k) \leftarrow q(a_1 z_{j_1},\dots,a_s z_{j_s}) \in P$;

(ii) $i_r = \begin{cases} j_r (=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ \ell_{f_1}+\dots+\ell_{f_{j_r}-1}+n & \text{ha } a_r \in S_n^{f_{j_r}} \end{cases} \quad (r=1,\dots,s).$

Minden $j(=1,\dots,k)$, $n(=1,\dots,\ell_{f_j})$ esetén vegyük fel P"-be az

$a(z_i, \langle f; \varrho_f, \varrho_{f_1}, \dots, \varrho_{f_k}\rangle) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\dots,a_s z_{i_s})$ szabályt, ha

(i) $a \in I_1^{f_j} \cup \dots \cup I_n^{f_j}$;

(ii) $i = \ell_{f_1}+\dots+\ell_{f_{j-1}}+n$;

(iii) $a(z_j, f) \leftarrow q(a_1 z_{j_1},\dots,a_s z_{j_s}) \in P$;

(iv) $i_r = \begin{cases} j_r (=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ \ell_{f_1}+\dots+\ell_{f_{j_r}-1}+n' & \text{ha } a_r \in S_{n'}^{f_{j_r}} \end{cases} \quad (r=1,\dots,s).$

A 4.9.1 - 4.9.5 lemmák mindegyike átfogalmazható jelen esetre. Például a 4.9.2 lemma átfogalmazása a következő. Legyen $p \in T_F$. A $p \overset{*}{\underset{\overline{B}}{\Rightarrow}} \varrho_f \overline{q}$ reláció akkor és csakis akkor teljesül valamely $\overline{q}$ $(\in T_{\overline{F}})$-ra, ha root(p)=f és p-n létezik ϱ-egyenletes K-stratégia.

A lemmák átfogalmazásainak bizonyitásai a 4.9 tételben szereplő bizonyitások átfogalmazásaival történhet, amelyektől eltekintünk. □

4.12 Tétel. Tetszőleges K természetes számra teljesül a $\mathcal{DA}_{SEK-V} \subsetneqq \mathcal{H} \circ \mathcal{DA}_{1-V}$ tartalmazás.

Bizonyitás. Legyen $K(\geq 1)$ tetszőleges és tételezzük fel, hogy $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ AT transzformátor szuperegyenletesen K-vizsgáló. Más szóval $\underline{A}$ ϱ-egyenletesen K-vizsgáló, ahol $\varrho=(A_1,\dots,A_K)$. Tekintsük a $\underline{B}=(F,b_o,\overline{F},b_o,P')$ K-szorzó homomorfizmust, tehát

(a) $\overline{f} \in \overline{F}_{K\cdot k} \Leftrightarrow f \in F_k \quad (k \geq 0)$;

(b) tetszőleges $k(\geq 0)$-ra és $f(\in F_k)$-re a

$$b_o f(z_1,\dots,z_k) \rightarrow \overline{f}(\overbrace{b_o z_1,\dots,b_o z_1}^{K\text{-szor}},\dots,\overbrace{b_o z_k,\dots,b_o z_k}^{K\text{-szor}})$$

szabály P'-ben van.

Jelöljük tetszőleges $j(=1,\dots,K)$ esetén A_j elemei közül az örökölteket I_j-vel, a szintetizáltakat S_j-vel. Konstruáljuk meg $\underline{C}=(\overline{F},C,G,c_o,P'',rt'')$ AT transzformátort a következőképpen:

(a) $C_s=A_s$, $C_i=A_i$, $c_o=a_o$, $rt''=rt$;

(b) legyen $k\geq 0$ és $\overline{f} \in F_{K\cdot k}$. Minden a $(\in C_s=A_s)$ esetén vegyük fel P''-be az $a\overline{f}(z_1,\dots,z_{K\cdot k}) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\dots,a_s z_{i_s})$ szabályt, ha

(i) $af(z_1,\dots,z_k) \leftarrow q(a_1 z_{j_1},\dots,a_s z_{j_s}) \in P$;

(ii) $i_r = \begin{cases} j_r(=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ K\cdot(j_r-1)+n & \text{ha } a_r \in S_n \end{cases} \quad (r=1,\dots,s).$

Minden $j(=1,\dots,k)$-re, $n(=1,\dots,K)$-re vegyük fel P''-be az $a(z_i,\overline{f}) \leftarrow q(a_1 z_{i_1},\dots,a_s z_{i_s})$ szabályt, ha a következők teljesülnek:

(i) $a \in I_1 \cup \ldots \cup I_n$;

(ii) $i = K(j-1)+n$;

(iii) $a(z_j, f) \leftarrow q(a_1 z_{j_1}, \ldots, a_s z_{j_s}) \in P$;

(iv) $i_r = \begin{cases} j_r (=0) & \text{ha } a_r \in A_i \\ K(j_r - 1)+n' & \text{ha } a_r \in S_{n'} \end{cases}$ $(r=1,\ldots,s)$.

Vegyük észre a következőt: abból, hogy $\underline{A}$ ρ-egyenletesen K-vizsgáló, következik, hogy minden $k (\geq 0)$, $f \in F_k$ esetén megadható olyan, az $1,\ldots,k$ számokból képzett

$$n_{1_1} \ldots n_{1_{k_1}} \ldots n_{K_1} \ldots n_{K_{k_K}}$$

sorozat, amelyre

(a) az $1,\ldots,k$ számok mindegyike pontosan K-szor fordul elő,

(b) az $\underline{e}^f = (e_1^f, \ldots, e_K^f)$ és $e_j^f = (I_j; n_{j_1}, \ldots, n_{j_{k_j}}; S_j)$ $(j=1,\ldots,K)$ egyenlőségek által értelmezett $\underline{e}^f$ elemek $\{\underline{e}^f \mid f \in F\}$ halmazára érvényes: tetszőleges p $(\in T_F)$-re $\pi: \text{path}(p) \to \{\underline{e}^f \mid f \in F\}$ stratégia p-n, ha $lb_p(w) = f$-ből $\pi_w = \underline{e}^f$ következik $(w \in \text{path}(p))$.

A szóban forgó sorozatok megkonstruálása a [10]-ben található, un. simple multi visit attributumnyelvtanokra vonatkozó konstrukció jelen esetre vonatkozó átfogalmazásával történhet. Magának a tételnek a bizonyitását ujra a 4.9 tétel bizonyitásának gondolatmenetével végezhetjük. □

Utóbbi tételünknek van egy érdekes következménye. Előbb azonban szükségünk van az alábbira.

4.13 Lemma. $\mathcal{TDA}_{1-V} \circ \mathcal{H} = \mathcal{TDA}_{1-V}$.

Bizonyitás. Legyen $\underline{A}$ teljesen definiált, 1-vizsgáló AT transzformátor, $\underline{B}$ pedig homomorfizmus. Ekkor 3.6 tétel szerint van olyan $\underline{C}$ AT transzformátor, melyre $T(\underline{A}) \circ T(\underline{B}) = T(\underline{C})$. Legyen $k \geq 1$ és $f \in F_k$. $\underline{C}$-nek a 3.6 tételben szereplő konstrukciója miatt nyilvánvalóan teljesül a következő: ha f-nek $\underline{C}$-re vonatkozó BG_f gráfjában él vezet i-ből j-be $i,j (\in \overline{BG_f})$ akkor f-nek $\underline{A}$-ra vonatkozó BG_f gráfjában is él vezet i-ből j-be. Következésképpen $\underline{C}$ 1-vizsgáló.□

4.14 Következmény. Tetszőleges $K (\geq 1)$ egészre teljesül a $\mathcal{TDA}^n_{SEK-V} \subsetneqq \mathcal{H} \circ \mathcal{TDA}^n_{1-V}$ és igy $\mathcal{TDA}^n_{SEK-V} \subsetneqq \mathcal{TDA}^{n+1}_{1-V}$ $(n \geq 1)$ tartalmazás.□

III. MAKROFATRANSZFORMÁTOROK

1. Fogalmak, jelölések

Tetszőleges n,m $(\in \mathbb{N})$ esetén $[n,m]$-el fogjuk jelölni az $\{i \mid n \leq i \leq m\}$ halmazt. Felvesszük segédváltozóknak egy ujabb, megszámlálhatóan végtelen halmazát, az $Y=\{y_1,y_2,\ldots\}$ halmazt, amelyet Z-től, a vizsgált rangolt ábécéktől és állapothalmazoktól diszjunktnak tételezünk fel. Tetszőleges $m(\geq 0)$-ra Y_m jelöli az $\{y_1,\ldots,y_m\}$ halmazt. Tetszőleges p $(\in T_F(Y_m \cup Z_n))$ és valamely S halmaz $s_1,\ldots,s_n$ elemei esetén $p(s_1,\ldots,s_n)$-el jelöljük azt a $T_F(Y_m \cup S)$-beli fát, amelyet ugy kapunk p-ből, hogy p-ben z_j levél minden egyes előfordulásának helyébe s_j-t helyettesitünk $(j=1,\ldots,n)$. Továbbá, $\hat{T}_F(Y_m \cup Z_n)$-el jelöljük $T_F(Y_m \cup Z_n)$ azon elemeinek a halmazát, amelyekben a Z_n halmaz minden eleme pontosan egyszer fordul elő levélként.

<u>1.1 Definició.</u> Makrofatranszformátornak (ld. [17]) nevezünk egy $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ rendszert, ha

(a) A egy olyan F-től, G-től diszjunkt rangolt ábécé, amelyben $A_0=\emptyset$ (A-t rangolt állapothalmaznak nevezzük);

(b) $A'(\subseteq A_1)$ a kezdőállapotok halmaza;

(c) P véges halmaza $a(y_1,\ldots,y_m,f(z_1,\ldots,z_k)) \rightarrow t$ alaku átirási szabályoknak, ahol $m,k \geq 0$; $a \in A_{m+1}$; $f \in F_k$ és t eleme az $RHS(a,f)$ halmaznak. Ezen utóbbi halmaz $Y_m \cup Z_k$ feletti $G \cup A$ tipusu erdő, (vagyis $T_{G \cup A}(Y_m \cup Z_k)$ részhalmaza) a következőképpen értelmezett: a legszükebb olyan halmaz amelyre:

(i) $Y_m \cup G_o \subseteq RHS(a,f)$;

(ii) $g(t_1,\dots,t_\ell) \in RHS(a,f)$ valahányszor $\ell \geq 1$, $g \in G_\ell$ és $t_1,\dots,t_\ell$ $RHS(a,f)$;

(iii) $b(t_1,\dots,t_\ell,z_j) \in RHS(a,f)$ valahányszor $\ell \geq 0$, $b \in A_{\ell+1}$, $z_j \in Z_k$ és $t_1,\dots,t_\ell \in RHS(a,f)$.

Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ determinisztikus, ha P-ben különböző szabályok bal oldalai is különbözőek és A' egyelemü halmaz.

$\underline{A}$ teljesen definiált, ha minden $m,k\,(\geq 0)$, $a\,(\in A_{m+1})$ és $f\,(\in F_k)$ esetén legalább egy $a(y_1,\dots,y_m,f(z_1,\dots,z_k))$ bal oldalu szabály P-ben van.

Értelmezhető az $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ makrofatranszformátor által indukált különböző tipusu fatranszformációk fogalma. Tekintsük evégett $R(\underline{A})$ erdőt (amelyet talán nevezhetnénk $\underline{A}$ fatermjei halmazának) mint az alábbi feltételeket kielégitő legszükebb halmazt:

(a) $T_G \subseteq R(A)$;

(b) $g(t_1,\dots,t_\ell) \in R(\underline{A})$ valahányszor $\ell \geq 1$, $g \in G_\ell$ és $t_1,\dots,t_\ell \in R(\underline{A})$;

(c) $b(t_1,\dots,t_\ell,p) \in R(\underline{A})$ valahányszor $\ell \geq 0$, $b \in A_{\ell+1}$, $p \in T_F$ és $t_1,\dots,t_\ell \in R(\underline{A})$.

$R(\underline{A})$-n értelmezhető a $\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}$ (korlátozás nélküli közvetlen levezetés) reláció. Tetszőleges $q,r\,(\in R(\underline{A}))$ esetén akkor és csakis akkor legyen $q \underset{\underline{A}}{\Longrightarrow} r$, ha r ugy áll elő q-ból, hogy ennek valamely $q'=a(q_1,\dots,q_m,f(p_1,\dots,p_k))$ $(m,k \geq 0;\ a \in A_{m+1};\ f \in F_k;$ $q_1,\dots,q_m \in R(\underline{A});\ p_1,\dots,p_k \in T_F)$ alaku részfáját a q" fával helyettesitjük, ahol

(a) $a(y_1,\ldots,y_m,f(z_1,\ldots,z_k)) \rightarrow t$ szabály P-ben van;

(b) q" ugy keletkezik t-ből, hogy abban y_j változó minden egyes előfordulásának helyére q_j fát helyettesitünk $(j=1,\ldots,m)$ és z_j minden előfordulásának helyére p_j-t $(j=1,\ldots,k)$.

A $\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}$ reláció bizonyos megszoritásai is értelmezhetők. $R(\underline{A})$-n. Igy, $q \underset{IO\underline{A}}{\Longrightarrow} r$ (q-ból közvetlenül deriválható r IO módon), ha r a fenti módon áll elő q-ból és a szóban forgó q'-re még a $q_1,\ldots,q_m \in T_G$ tartalmazások is teljesülnek. (Vagyis q'-nek már nincs helyettesithető valódi részfája.)

Még mindig ugyanezen q-ra és r-re akkor mondjuk, hogy q-ból közvetlenül deriválható r OI módon (vagyis fennáll $q \underset{OI\underline{A}}{\Longrightarrow} r$) ha r a fenti módon áll elő q-ból és q' nem valódi részfája q egyetlen helyettesithető részfájának sem, pontosabban: van olyan $\ell \geq 1$; $\bar{q}\,(\in \hat{T}_G(z_\ell))$; $1 \leq i \leq \ell$; $\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_{i-1},\bar{q}_{i+1},\ldots$ $\bar{q}_\ell\,(\in R(\underline{A}))$ amelyekre $q=\bar{q}(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_{i-1},q',\bar{q}_{i+1},\ldots,\bar{q}_\ell)$.

Jelöljük a $\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}$, $\underset{x\underline{A}}{\Rightarrow}$ relációk reflexiv, tranzitiv lezártjait rendre $\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}}$, $\overset{*}{\underset{x\underline{A}}{\Rightarrow}}$-val (x=IO,OI). Akkor az $\underline{A}$ által indukált fatranszformáción a

$$T(\underline{A})=\{(p,q)\,|\,p \in T_F, q \in T_G,\ a(p) \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} q \text{ valamely } a\,(\in A')\text{-ra}\}$$

relációt, mig az $\underline{A}$ által indukált x transzformáción a

$$T(\underline{A})_x=\{(p,q)\,|\,p \in T_F, q \in T_G,\ a(p) \overset{*}{\underset{x\underline{A}}{\Rightarrow}} q \text{ valamely } a\,(\in A')\text{-ra}\}$$

relációt értjük.

Érvényes a következő: tetszőleges $p\,(\in R(\underline{A}))$ és $q\,(\in T_G)$ esetén $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} q$ akkor és csakis akkor áll fenn, ha $p \overset{*}{\underset{OI\underline{A}}{\Longrightarrow}} q$ (bár a két levezetés lépésszáma általában nem egyezik meg). Az állitás pontos igazolása a [19]-ben található, makronyelvtanokra megfogalmazott analóg állitás jelen esetre történő átfogalmazásával végezhető. Másrészt, nem nehéz belátni: amenynyiben $\underline{A}$-ról feltételezzük, hogy teljesen definiált és determinisztikus ugy tetszőleges p $(\in R(\underline{A}))$ és q $(\in T_G)$ esetén $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p \overset{*}{\underset{IO\underline{A}}{\Longrightarrow}} q$. A pontos bizonyítástól eltekintünk. Ily módon, ha $\underline{A}$ teljesen definiált és determinisztikus, akkor $T(\underline{A})=T(\underline{A})_x$ $(x=IO,\overline{IO})$. Mivel mi csak a fenti tulajdonságu makrofatranszformátorok vizsgálatára szoritkozunk, megtehetjük, hogy csak a $\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}$, $\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}}$ relációkat vizsgáljuk.

Az ilyen makrofatranszformátorokkal indukálható fatranszformációk osztályát $\mathcal{TDM}$-el jelöljük.

Alkalmazni fogjuk még $\underline{A}=(F,A,G,A',P)$ makrofatranszformátor esetén a következő jelöléseket, elnevezéseket.

Legyen $k,m \geq 0$; $a \in A_{m+1}$; $f \in F_k$; $1 \leq j \leq k$ és $t \in RHS(a,f)$. Ekkor t j tipusu részfáinak $\overline{sub}_j(t)$ halmazán a

$\overline{sub}_j(t)=\{t'(\in sub(t))\,|\,t'=b(t_1,\ldots,t_{m'},z_j),m'\geq 0,b\in A_{m'+1},t_1,\ldots,t_{m'}\in sub(t)\}$

halmazt értjük, és $\overline{sub}(t)$-vel jelöljük az $\bigcup(\overline{sub}_j(t)\,|\,j=1,\ldots,k)$ halmazt. Ugyanezen t-nek a j-fokát $dg_j(t)$-vel jelöljük és értjük alatta t j tipusu részfáinak multiplicitások nélküli számát, tehát $dg_j(t)=|\overline{sub}_j(t)|$, mig t-nek a $dg(t)$ foka a $dg(t)=|\overline{sub}(t)|$ egyenlőséggel van értelmezve.

Megjegyezzük, hogy - mivel $j\neq j'$ esetén $\overline{sub}_j(t)\cap\overline{sub}_{j'}(t)=$ $=\emptyset$ - érvényes a $dg(t)=\sum_{j=1}^{k} dg_j(t)$ egyenlőség is.

2. Attributumos és makrofatranszformációk kapcsolata

<u>2.1 Tétel.</u> $\mathcal{TDM} \subseteq \mathcal{H} \circ \mathcal{TDA}_{1-V}$.

<u>Bizonyitás.</u> Tekintsük $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P)$ teljesen definiált, determinisztikus makrofatranszformátort. Továbbá, vegyük fel A-nak egy tetszőleges lineáris rendezését, tehát elemeinek egy ismétlések nélküli

$$a_1,\dots,a_{|A|}$$

felsorolását, és tekintsük ezt rögzitettnek. Most minden $k(\geq 0)$, $f\ (\in F_k)$ esetén vegyük sorba minden $i(=1,\dots,|A|)$-ra a P-ben lévő

$$a_i(y_1,\dots,y_m,f(z_1,\dots,z_k)) \rightarrow t_i \qquad (m=m(i)) \qquad (1)$$

szabályokat és minden $j(=1,\dots,k)$-re adjuk meg a tetszőleges

$$\Psi\langle i,f,j\rangle : \overline{\mathrm{sub}}_j(t_i) \rightarrow \left[\sum_{r=1}^{i-1} dg(t_r) + \sum_{r=1}^{j-1} dg_r(t_i) + 1, \sum_{r=1}^{i-1} dg(t_r) + \sum_{r=1}^{j} dg_r(t_i)\right]$$

de a továbbiakban rögzitett bijekciókat. (Nyilvánvalóan léteznek, mivel a jobboldali halmaz számossága $dg_j(t_i)$.)

A következőkben megadásra kerülő homomorfizmus illetve AT transzformátor függeni fog ezen lineáris rendezéstől és bijekcióktól.

Legyen $\underline{B}=(F,b_o,\overline{F},b_o,P')$ homomorfizmus, ahol

(a) $\overline{f} \in \overline{F}_n$ $(n \geq 0)$ (i) $f \in F_k$ valamely $k\ (\geq 0)$-ra;

(ii) $n=\sum_{i=1}^{|A|} dg(t_i)$ (t_i-t (1) definiálja);

(b) minden $n\ (\geqq 0)$ és $\bar{f}(\in \bar{F}_n)$ (vagyis $k(\geqq 0)$és $f(\in F_k)$) esetén a

$$b_o f(z_1,\dots,z_k) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{f}(\overbrace{b_o z_1,\dots,b_o z_1}^{dg_1(t_1)},\dots,\overbrace{b_o z_k,\dots,b_o z_k}^{dg_k(t_1)},\dots,\overbrace{b_o z_1,\dots,b_o z_1}^{dg_1(t_{|A|})},\dots,\overbrace{b_o z_k,\dots,b_o z_k}^{dg_k(t_{|A|})})$$

szabály P'-ben van.

Továbbá, konstruáljuk meg $\underline{C}=(\bar{F},C,G,P'',c_o,rt'')$ AT transzformátort az alábbiak szerint:

(a) $C_s=A$, $C_i=Y_{\bar{m}}$ ahol $\bar{m}=\max\{m \mid A_m \neq \emptyset\}$;

(b) $c_o=a_o$;

(c) minden $n(\geqq 0)$, $\bar{f}\ (\in \bar{F}_n)$ esetén (tehát $f \in F_k$ valamely $k\ (\geqq 0)$-ra) tekintsük minden $i(=1,\dots,|A|)$-ra a P-beli (1) szabályt. Minden $t'(\in \overline{sub}(t_i))$ esetén járjunk el a következőképpen (feltehető, hogy $t' \in \overline{sub}_j(t_i)$ valamely $j(=1,\dots,k)$-re, tehát $t'=b(t_1',\dots,t_{m'}',z_j)$):

(i) Tételezzük fel, hogy $dg(t')=1$, tehát $t_1',\dots,t_{m'}' \in T_G(Y_m)$. Helyettesitsük $t_1',\dots,t_{m'}'$ fák mindegyikében az y_r alaku leveleket $y_r z_o$-al $(r=1,\dots,m)$ és az igy kapott fákat ugyancsak $t_1',\dots,t_{m'}'$-vel jelölve vegyük fel P"-be az $y_r(z_d,\bar{f}) \leftarrow t_r'$ szabályokat, ahol $r=1,\dots,m'$ és $d=\psi_{\langle i,f,j\rangle}(t')$.

(P" további konstrukciójánál az y_r levelek $y_r z_o$-al való helyettesitését $(r=1,\dots,m)$ külön nem emlitjük meg, de mindig beleértjük.)

(ii) Legyen most $dg(t') > 1$. Ekkor érvényesek a következők: minden $r(=1,\dots,m')$-re van olyan $\ell_r(\geq 0)$ $\bar{t}_r\ (\in \hat{T}_G(Y_m \cup Z_{\ell_r}))$ továbbá minden $s(=1,\dots,\ell_r)$-re van olyan $j_{r_s}\ (=1,\dots,k)$ és $t'_{r_s}\ (\in \overline{sub}_{j_{r_s}}(t_i))$ amelyekre teljesül a $t'_r=\bar{t}_r(t'_{r_1},\dots,t'_{r_{\ell_r}})$ egyenlőség. Tételezzük fel, hogy

$$root(t'_{r_s})=b_{r_s}\ (\in A=C_s);$$

$$\psi\langle i,f,j_{r_s}\rangle(t'_{r_s})=d_{r_s} \qquad (r=1,\dots,m',\ s=1,\dots,\ell_r);$$

$$\psi\langle i,f,j\rangle(t')=d$$

Ekkor minden $r(=1,\dots,m')$-re vegyük fel P"-be az

$$y_r(z_d,\bar{f}) \leftarrow \bar{t}_r(b_{r_1}z_{d_{r_1}},\dots,b_{r_{\ell_r}}z_{d_{r_{\ell_r}}})$$ szabályokat.

Magára t_i-re érvényesek a következők: van olyan $\ell(\geq 0)$, $\bar{t}\ (\in \hat{T}_G(Y_m \cup Z_\ell))$ továbbá minden $s(=1,\dots,\ell)$ esetén van olyan $j_s(=1,\dots,k)$ és $t'_s(\in \overline{sub}_{j_s}(t_i))$ amelyekre teljesül a $t_i=\bar{t}(t'_1,\dots,t'_\ell)$ egyenlőség (természetesen $\ell,\bar{t},t'_1,\dots,t'_\ell$ függenek i-től). Tételezzük fel, hogy

$$root(t'_s)=b_s\ (\in A=C_s)$$

$$\psi\langle i,f,j_s\rangle(t'_s)=d_s.$$

Vegyük még fel P"-be az $a_i\bar{f}(z_1,\dots,z_n) \leftarrow \bar{t}(b_1z_{d_1},\dots,b_\ell z_{d_\ell})$ szabályt.

(d) Végül minden $\bar{F}$-beli $\bar{f}$ elem és C-beli attributum esetén, ha az attributum kiszámitási módját a (c) nem definiálja $\bar{f}$-nál, akkor legyen az tetszőleges G_o-beli konstans.

(e) $rt''(:C_i \rightarrow T_G)$ legyen tetszőleges.

Most igazolunk két lemmát, amelyekből tételünk helyessége is következik.

2.1.1 Lemma. $\underline{C}$ teljesen definiált, determinisztikus és 1-vizsgáló.

Bizonyitás. A teljesen definiáltság konstrukciónk miatt nyilvánvaló, mig $\underline{C}$ determinisztikussága következik $\underline{A}$ determinisztikusságából és ψ bijekciók értékkészleteinek megválasztásából.

Legyen most $\bar{f} \in \bar{F}_n$ valamely $n(\geqq 0)$-re tehát $f \in F_k$ valamely $k(\geqq 0)$-ra. Tételezzük fel, hogy $BG_{\bar{f}}$-ban valamely x,x' $(\in \overline{BG_{\bar{f}}})$ -re irányitott ut vezet x'-ből x-be. P" halmaz definiciója miatt nyilvánvalóan feltehető, hogy valamely $i(=1,\ldots,|A|)$-ra érvényes

$$\sum_{r=1}^{i-1} dg(t_r)+1 \leqq x,x' \leqq \sum_{r=1}^{i} dg(t_r),$$

ahol t_r-t (1) definiálja. Következésképpen, valamely $j,j'(=1,\ldots,k)$-re t $(\in \overline{sub_j}(t_i))$ -re és t' $(\in \overline{sub_{j'}}(t_i))$ -re teljesül $\psi^{-1}_{\langle i,f,j\rangle}(x)=t$ és $\psi^{-1}_{\langle i,f,j'\rangle}(x')=t'$. Állitjuk, hogy $dg(t') < dg(t)$. Állitásunk könnyen igazolható az x'-ből x-be vezető leghosszabb ut hossza szerinti teljes indukcióval.

Következésképpen x-ből nem vezet irányitott ut x-be semmilyen $x(\in \overline{BG_{\bar{f}}})$-re tehát $\underline{C}$ 1-vizsgáló. □ (2.1.1)

2.1.2 Lemma. Legyen $i(=1,\ldots,|A|)$ és tételezzük fel, hogy $a_i \in A_{m+1}$ $(m \geqq 0)$. Legyen továbbá $p \in T_F$, $q,q_1,\ldots,q_m \in T_G$ és $\varphi: C_i(=Y_{\bar{m}}) \to T_G$ olyan, hogy $\varphi(y_r)=q_r$ minden $r(=1,\ldots,m)$-re.

Állitjuk, hogy az

$$a_i(q_1,\dots,q_m,p) \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} q$$

reláció akkor és csakis akkor áll fenn, ha a $b_o p \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \bar{q}$-ból kapott $\bar{q}$ $(\in T_{\bar{F}})$-ra

$$(a_i,\lambda) \overset{*}{\underset{\bar{q}C}{\Leftarrow}} q \quad \varphi\text{-nél.}$$

Bizonyitás. A szükségesség igazolását dp(p) szerinti teljes indukcióval végezzük.

(a) Legyen dp(p)=0, tehát p=f $(\in F_o)$. Ekkor az $a_i(y_1,\dots,y_m,f) \to$ $\to t_i$ P-beli szabály jobboldalára $t_i \sim q$, ahol $\sim$ jelölés most és a továbbiakban is azt jelenti, hogy a jobboldali fát megkapjuk a baloldaliból, ha ebben y_r minden egyes előfordulása helyére q_r-t helyettesitünk $(r=1,\dots,m)$. Minthogy definició szerint $\bar{f} \in \bar{F}_o$, $b_o f \to \bar{f} \in P'$ és $a_i \bar{f} \leftarrow t_i \in P''$ igy állitásunk nyilvánvaló.

(b) Tételezzük fel, hogy $dp(p) > 0$ tehát $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k \geq 1)$ és minden p-nél kisebb mélységü fára a megfelelő állitást igazoltuk. Tekintsük az

$$a_i(q_1,\dots,q_m,p) \underset{A}{\Rightarrow} \hat{q} \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} q, \text{ és}$$

$$b_o f(p_1,\dots,p_k) \underset{B}{\Rightarrow} \bar{f}(\dots,\overbrace{b_o p_1,\dots,b_o p_1}^{dg_1(t_i)},\dots,\overbrace{b_o p_k,\dots,b_o p_k}^{dg_k(t_i)},\dots) \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \quad (2$$

$$\overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \bar{f}(\dots,\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_1,\dots,\bar{q}_k,\dots,\bar{q}_k,\dots) = \bar{q}$$

relációkat. Ekkor az $a_i(y_1,\dots,y_m,f(z_1,\dots,z_k)) \to t_i$ P-beli szabályra $t_i(p_1,\dots,p_k) \sim \hat{q}$.

(b1) Állitás. Legyen $q'(\in sub(\hat{q}))$ olyan, amelyre érvényes a $q'=b(q_1',\dots,q_{m'}',p_j)$ egyenlőség valamely $m'(\geq 0)$; $b(\in A_{m+1})$;

$1 \leq j \leq k$; $q'_1, \ldots, q'_m, (\in \mathrm{sub}(q))$ esetén. Ekkor létezik egy egyértelmüen meghatározott t' $(\in \overline{\mathrm{sub}}_j(t_i))$ amelyre $t'(p_1, \ldots, p_k) \sim q'$, tehát $t' = b(t'_1, \ldots, t'_m, z_j)$ valamely $t'_1, \ldots, t'_m, (\in \mathrm{sub}(t_i))$-re. Tekintsük a

$$q'_r \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} u'_r \; (\in T_G) \qquad (r=1, \ldots, m')$$

derivációkat, és legyen $\psi\langle i,f,j\rangle (t') = d$. Állitjuk, hogy

$$(y_r, d) \overset{*}{\underset{\underline{qC}}{\Leftarrow}} u'_r \quad \varphi\text{-nél} \quad (r=1, \ldots, m').$$

A bizonyitás $dg(t')$ szerinti teljes indukcióval történhet. Ha $dg(t') = 1$ tehát $t'_r \in T_G(Y_m)$ akkor P'' definiciója miatt $y_r(z_d, \bar{f}) \leftarrow t'_r \in P''$ $(r=1, \ldots, m')$ tehát állitásunk nyilvánvaló.

Legyen most $dg(t') > 1$ és tegyük fel, hogy minden t'-nél alacsonyabb foku fára a megfelelő állitást már igazoltuk. Ekkor minden $r(=1, \ldots, m')$ esetén létezik ℓ_r (≥ 0), $\bar{t}_r$ $(\in T_G(Y_m \cup Z_{\ell_r}))$ továbbá minden $s(=1, \ldots, \ell_r)$-re van olyan j_{r_s} $(=1, \ldots, k)$ és t'_{r_s} $(\in \overline{\mathrm{sub}}_{j_{r_s}}(t_i))$ amelyre $t'_r = \bar{t}_r(t'_{r_1}, \ldots, t'_{r_{\ell_r}})$. Tételezzük fel, hogy

$$t'_{r_s} = b_{r_s}(t'_{r_{s_1}}, \ldots, t'_{r_{s_\ell}}, z_{j_{r_s}}) \qquad (\text{ahol } \ell = \ell(r,s));$$

$$\psi\langle i,f,j_{r_s}\rangle (t'_{r_s}) = d_{r_s} \qquad (r=1, \ldots, m'; s=1, \ldots, \ell_r). \tag{3}$$

A t'_r és t'_{r_s} ezen felbontása indukálja a

$$\bar{t}_r(q'_{r_1}, \ldots, q'_{r_{\ell_r}}) \sim q'_r$$

$$q'_{r_s} = b_{r_s}(q'_{r_{s_1}}, \ldots, q'_{r_{s_\ell}}, p_{j_{r_s}}) \qquad (r=1, \ldots, m'; s=1, \ldots, \ell_r)$$

felbontásokat. Az ezekből származó

$$q'_{r_{s_1}} \xRightarrow[\underline{A}]{*} u'_{r_{s_1}} (\in T_G),\dots,q'_{r_{s_\ell}} \xRightarrow[\underline{A}]{*} u'_{r_{s_\ell}} (\in T_G); \tag{4}$$

$$b_{r_s}(u'_{r_{s_1}},\dots,u'_{r_{s_\ell}},p_{j_{r_s}}) \xRightarrow[\underline{A}]{*} u'_{r_s} (\in T_G) \tag{5}$$

derivációkra nyilvánvalóan érvényes a

$$\bar{t}_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}}) \sim u'_r \qquad (r=1,\dots,m';\ s=1,\dots,\ell_r)$$

előállitás. Minthogy $dg(t'_{r_s}) < dg(t)$ igy (4) összefüggésekre alkalmazott, (b1)-re vonatkozó indukció feltevés szerint $(y_1,d_{r_s}) \xLeftarrow[\underline{qC}]{*} u'_{r_{s_1}}\ (:=\varphi_{d_{r_s},\bar{q}}(y_1)),\dots,(y_\ell,d_{r_s}) \xLeftarrow[\underline{qC}]{*} u'_{r_s}\ (:=\varphi_{d_{r_s}\bar{q}}(y_\ell))$ φ-nél. Másrészt, (5)-re alkalmazott (b)-re vonatkozó indukció feltevés szerint a $b_0 p_{j_{r_s}} \xRightarrow[\underline{B}]{*} \bar{q}_{j_{r_s}}$ fára $(b_{r_s},\lambda) \xLeftarrow[\bar{q}_{j_{r_s}}\underline{C}]{*} u'_{r_s}$ $\varphi_{d'_{r_s}\bar{q}}$-nál – tehát az előbbiek, és a nyilvánvaló $lb_{\bar{q}}(d_{r_s}) = \bar{q}_{j_{r_s}}$ miatt – $(b_{r_s},d_{r_s}) \xLeftarrow[\underline{qC}]{*} u'_{r_s}$ φ-nél $(r=1,\dots,m';\ s=1,\dots,\ell_r)$. Ha még a (3)-ból és P" definiciójából következő $y_r(z_d,\bar{f}) \leftarrow$ $\leftarrow \bar{t}_r(b_{r_1} z_{d_{r_1}},\dots,b_{r_{\ell_r}} z_{d_{r_{\ell_r}}}) \in P''$ tartalmazást is figyelembe vesszük, ugy a keresett

$$(y_r,d) \xLeftarrow[\underline{qC}]{*} \bar{t}_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}}) \xLeftarrow[\underline{qC}]{*} u'_r \qquad \varphi\text{-nél} \qquad (r=1,\dots,m')$$

relációkat nyerjük. □ (b1)

Térjünk vissza a szükségesség igazolásához. (A (b1)-jelölései már nem érvényesek.) A szóban forgó P-beli szabály jobboldalára érvényes a $t_i = \bar{t}(t'_1,\dots,t'_\ell)$ egyenlőség valamely $\ell(\geq 0)$-re $\bar{t}\ (\in \hat{T}_G(Y_m \cup Z_\ell))$-ra; $j_r(=1,\dots,k)$-ra; $t'_r\ (\in \overline{sub}_{j_r}(t_i))$-re $(r=1,\dots,\ell)$. Tételezzük fel, hogy

$$t'_r = b_r(t'_{r_1},\dots,t'_{r_{\ell_r}},z_{j_r}) \qquad (b_r \in A,\ r=1,\dots,\ell)$$

$$\psi_{\langle i,f,j_r\rangle}(t'_r)=d_r.$$

t_i-nek ezen felbontása indukálja $\hat{q}$-nak a $\bar{t}(q'_1,\dots,q'_\ell)\sim\hat{q}$ felbontását, ahol

$$q'_r=b_r(q'_{r_1},\dots,q'_{r_{\ell_r}},p_{j_r}) \qquad (r=1,\dots,\ell).$$

Továbbá, az ezen felbontásból származó

$$q'_{r_s} \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} u'_{r_s} \quad (\in T_G);$$

$$b_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}},p_{j_r}) \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} u'_r(\in T_G) \quad (r=1,\dots,\ell;\ s=1,\dots,\ell_r)$$

derivációkra nyilván $\bar{t}(u'_1,\dots,u'_\ell)\sim q$. A (b1) állitás értelmében $(y_s,d_r) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} u'_{r_s}$ $(:=\varphi_{d_r,\bar{q}}(y_s))$ $(r=1,\dots,\ell;\ s=1,\dots,\ell_r)$. Másrészt, mivel $dp(p_{j_r}) < dp(p)$, igy a $b_o p_{j_r} \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} \bar{q}_{j_r}$ fára $(b_r,\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_r}C}{\Leftarrow}} u'_r$ $\varphi_{d_r,\bar{q}}$-nál, tehát $(b_r,d_r) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} u'_r$ φ-nél $(r=1,\dots,\ell)$. P" definiciója miatt $a_i\bar{f}(z_1,\dots,z_n)\leftarrow\bar{t}(b_1z_{d_1},\dots,b_\ell z_{d_\ell})\in P"$, következésképpen $(a_i,\lambda) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} \bar{t}(u'_1,\dots,u'_\ell) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} q$.

Az elegendőség igazolása szintén $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) $dp(p)=0$ esetén az állitás nyilvánvaló P' és P" halmazok megválasztása miatt.

(b) Tételezzük fel, hogy $dp(p)>0$, vagyis $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k\geq 1)$. Tekintsük a (2) és

$$(a_i,\lambda) \underset{qC}{\Leftarrow} \bar{t}((b_1,w_1),\dots,(b_s,w_s)) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} \bar{t}(u_1,\dots,u_s)=q \quad \psi\text{-nél}$$

derivációkat, ahol $s\geq 0$; $\bar{t}\in\hat{T}_G(Z_s)$; $b_1,\dots,b_s\in C$;

$a_i f(z_1,\dots,z_n)\leftarrow\bar{t}(b_1z_{d_1},\dots,b_sz_{d_s})\in P"$ és

$$w_r = \begin{cases} \lambda & \text{ha } d_r = 0 \\ d_r & \text{ha } 1 \leqq d_r \leqq n \end{cases} \qquad (r=1,\ldots,s).$$

Vegyük az $a_i(y_1,\ldots,y_m,f(z_1,\ldots,z_k)) \to t_i$ P-beli szabályt és az alkalmazásával nyert $a_i(q_1,\ldots,q_m,p) \underset{A}{\Rightarrow} \hat{q}$ derivációt.

(b1) Állitás. Legyen d tetszőleges egész amelyre teljesül $\sum_{r=1}^{i-1} dg(t_r)+1 \leqq d \leqq \sum_{r=1}^{i} dg(t_r)$. Ekkor valamely $j(=1,\ldots,k)$-re és t' $(\in \overline{sub}_j(t_i))$-re $\psi^{-1}_{\langle i,f,j\rangle}(d)=t'$, továbbá $t'=b(t'_1,\ldots,t'_{m'},z_j)$ valamely $m'(\geqq 0)$; b $(\in A_{m+1})$; $t'_1,\ldots,t'_{m'}$ $(\in sub(t_i))$-re. Tekintsük a

$$\beta_r : (y_r,d) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} u'_r \; (\in T_G) \quad \varphi\text{-nél} \qquad (r=1,\ldots,m')$$

derivációkat és azt a q' $(\in sub(q))$-t amely t'-be való megfelelő behelyettesités után keletkezett, tehát $q'=b(q'_1,\ldots,q'_{m'},p_j)$. Állitjuk, hogy

$$q'_r \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} u'_r \qquad (r=1,\ldots,m').$$

Ha $lt(\beta_r)=1$ tehát $y_r(z_d,\bar{f}) \leftarrow u'_r \in P''$ ugy $t'_r=u'_r=q'_r$ miatt az állitás nyilvánvaló. Ha $lt(\beta_r)>1$, akkor

$$(y_r,d) \underset{qC}{\Leftarrow} \bar{t}_r((b_{r_1},w_{r_1}),\ldots,(b_{r_{\ell_r}},w_{r_{\ell_r}})) \overset{*}{\underset{qC}{\Leftarrow}} \bar{t}_r(u'_{r_1},\ldots,u'_{r_{\ell_r}})=u'_r \tag{6}$$

φ-nél,

ahol $\ell_r \geqq 0$; $\bar{t}_r \in \hat{T}_G(Z_{\ell_r})$; $b_{r_1},\ldots,b_{r_{\ell_r}} \in C$; $y_r(z_d,\bar{f}) \leftarrow$ $\leftarrow \bar{t}_r(b_{r_1}z_{d_{r_1}},\ldots,b_{r_{\ell_r}}z_{d_{r_{\ell_r}}}) \in P''$ és

$$w_{r_s} = \begin{cases} \lambda & \text{ha } d_{r_s}=0 \\ d_{r_s} & \text{ha } 1 \leqq d_{r_s} \leqq n \end{cases} \qquad (s=1,\dots,\ell_r).$$

Következésképpen, P" definiciója miatt érvényes a $t'_r = \bar{t}_r(t'_{r_1},\dots,t'_{r_{\ell_r}})$, ahol

$$t'_{r_s} = \begin{cases} b_{r_s} \ (\in Y_m) & \text{ha } d_{r_s}=0 \\ \psi^{-1}_{\langle i,f,j_{r_s}\rangle}(d_{r_s}) \\ \text{valamely } 1 \leqq j_{r_s} \leqq k\text{-ra} & \text{ha } 1 \leqq d_{r_s} \leqq n \end{cases} \qquad (s=1,\dots,\ell_r).$$

Más szóval, ha $s(=1,\dots,\ell_r)$ olyan, hogy $1 \leqq d_{r_s} \leqq n$, akkor érvényes $t'_{r_s} = b_{r_s}(t'_{r_{s_1}},\dots,t'_{r_{s_\ell}}, z_{j_{r_s}})$ valamely $\ell = \ell(r,s)$; b_{r_s} $(\in A_{\ell+1})$, $t'_{r_{s_1}},\dots,t'_{r_{s_\ell}}$ $(\in \mathrm{sub}(t_i))$ esetén. Mivel $lb_{\bar{q}}(d_{r_s}) = \bar{q}_{j_{r_s}}$ igy (6) szerint

$$(b_{r_s},\lambda) \overset{*}{\underset{\bar{q}_{j_{r_s}} C}{\Longleftarrow}} u'_{r_s} \qquad \varphi_{d_{r_s}\bar{q}}\text{-nál.} \tag{7}$$

A t'_r felbontása maga után vonja $q'_r = \bar{t}_r(q'_{r_1},\dots,q'_{r_{\ell_r}})$ felbontást, ahol

$$q'_{r_s} = \begin{cases} b_{r_s} \ (\in Y_m) \text{ által kijelölt} & \text{ha } d_{r_s}=0 \\ \text{elem } q_1,\dots,q_m\text{-ből} \\ b_{r_s}(q'_{r_{s_1}},\dots,q'_{r_s}, p_{j_{r_s}}) & \text{ha } 1 \leqq d_{r_s} \leqq n \end{cases} \qquad (s=1,\dots,\ell_r).$$

Tételezzük fel, hogy valamely örökölt attributum - mondjuk y_1 -

szerepel (7)-ben, mint (y_1,λ) levél helyettesitése $\varphi_{d_{\gamma_1},\bar{q}}(y_1)$-el. Minthogy a

$$\gamma:(y_1,d_{r_s}) \overset{*}{\underset{\overline{qC}}{\Longleftarrow}} \varphi_{d_{\gamma_1},\bar{q}}(y_1)\ (:=u'_{r_{s_1}}) \qquad \varphi\text{-nél}$$

derivációra $lt(\gamma)<lt(\beta_r)$, igy érvényes $q'_{r_{s_1}} \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} u'_{r_{s_1}}$. Másrészt, mivel $b_0 p_{j_{r_s}} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \bar{q}_{j_{r_s}}$ és $dp(p_{j_{r_s}}) < dp(p)$, igy (7)-re alkalmazott indukció feltevés miatt $b_{r_s}(u'_{r_{s_1}},\dots,u'_{r_{s_\ell}},p_{j_{r_s}}) \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}}$ $\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} u'_{r_s}$.

Ha pedig $s(=1,\dots,\ell_r)$ olyan, hogy $d_{r_s}=0$ akkor nyilvánvalóan érvényes $u'_{r_s}=\varphi(b_{r_s})$. Következésképpen $q'_r \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} \bar{t}_r(u'_{r_1},\dots,$ $u'_{r_{\ell_r}})=u'_r$. ◻ (b1)

Most már könnyen igazolható az elegendőség. P" definiciója miatt érvényes a $t_i=\bar{t}(t'_1,\dots,t'_s)$ egyenlőség, ahol $s\geqq 0$; $\bar{t}\in \hat{T}_G(Z_s)$,

$$t'_r=\begin{cases} b_r\ (\in Y_m) & \text{ha}\quad d_r=0 \\ \psi^{-1}\langle i,f,j_r\rangle^{(d_r)} & \text{ha}\quad 1\leqq d_r\leqq n \\ \text{valamely } 1\leqq j_r\leqq k\text{-ra} & \end{cases} \qquad (r=1,\dots,s).$$

Következésképpen az $1\leqq d_r\leqq n$ esetben érvényes a $t'_r=b_r(t'_{r_1},\dots,$ $t'_{r_{\ell_r}},z_{j_r})$ egyenlőség valamely $\ell_r(\geqq 0)$; $b_r\ (\in A_{\ell_r+1})$; $t'_{r_1},\dots,t'_{r_{\ell_r}}$ $(\in sub(t_i))$-re. A t_i ezen felbontása maga után vonja $\hat{q}$-nak $\hat{q}=\bar{t}(q'_1,\dots,q'_s)$ felbontását, ahol

$$q'_r = \begin{cases} b_r \text{ által kijelölt elem } q_1,\dots,q_m\text{-ből} & \text{ha } d_r=0 \\ b_r(q'_{r_1},\dots,q'_{r_{\ell_r}},p_{j_r}) & \text{ha } 1\leqq d_r\leqq n \end{cases} \qquad (r=1,\dots,s).$$

Legyen $r(=1,\dots,s)$ olyan, hogy $1\leqq d_r\leqq n$. A fentiek miatt $(b_r,\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_r}C}{\Longleftarrow}} u_r$ $\varphi_{d_r,\bar{q}}$-nál. Ekkor egyrészt (b1) állitás miatt $q'_{r_1} \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} \varphi_{d_r,\bar{q}}(y_1)\ (:=u'_{r_1}),\dots,q'_{r_{\ell_r}} \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} \varphi_{d_r,\bar{q}}(y_{\ell_r})\ (:=u'_{r_{\ell_r}})$ φ-nél, másrészt, minthogy $dp(p_{j_r}) < dp(p)$, $b_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}},p_{j_r}) \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} u_r$.

Ha $r(=1,\dots,s)$ olyan, hogy $d_r=0$ akkor nyilván $u_r=\varphi(b_r)$. Következésképpen $\hat{q} \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} \bar{t}(u_1,\dots,u_s)=q$. □ (2.1.2)

Amennyiben az előző lemmában i-t ugy választjuk meg, hogy $a_i=a_o$ teljesüljön akkor a $T(\underline{A})=T(\underline{B})\circ T(\underline{C})$ egyenlőséghez jutunk ami tételünk igazolását jelenti. □

Mielőtt megmutatnánk, hogy a forditott irányu tartalmazás is teljesül, bevezetünk néhány fogalmat.

Legyen $\underline{A}=(F,A,G,a_o,P,rt)$ teljesen definiált, determinisztikus AT transzformátor. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $A_i=Y_m$ valamely $m(\geqq 0)$-re. Legyen $p\in T_F(Z)$. A $\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow\!\!\!\!\mid}$ binér relációt[†] következőképpen értelmezzük $T_G(Y_m\cup A\times \times\, path(p))$ halmazon. Tetszőleges q,r elemeire a szóban forgó halmaznak akkor és csakis akkor álljon fenn $q \underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow\!\!\!\!\mid} r$, ha r az alábbi módok valamelyikén áll elő q-ból:

(a) q-n a $\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}$ φ-nél reláció definiciójának (a) vagy (b) pontjában leirt helyettesitést végzünk (ld. III. fej. 2.);

(b) q-nak valamely (a,λ) alaku levelét a-val helyettesitjük, ha $a\in A_i(=Y_m)$.

[†]Vegyük észre a különbséget $\Longleftarrow\!\!\!\!\mid$ és $\Longleftarrow$ szimbólumok között!

(Tehát az (a,w) leveleket változatlanul hagyjuk, ha $lb_q(w) \in Z$. A $\underset{p\underline{A}}{\longleftarrow}$ reláció (reflexiv és) tranzitiv lezártját ($\overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\longleftarrow}}$) $\overset{+}{\underset{p\underline{A}}{\longleftarrow}}$-val jelöljük.

Legyen ismét $p \in T_F(Z)$. BG_p gráfot (a müveleti szimbólumokra bevezetett BG gráf (ld. III. fej. 4.) általánositását a következőképpen értelmezzük: szögpontjainak halmaza a

$$\overline{BG}_p = \{ w\ (\in path(p)) \mid lb_p(w) \in Z \}$$

halmaz, továbbá, valahányszor $(a,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\longleftarrow}} t((a_1,w_1),\dots,(a_s,w_s))$ $(s \geq 0;\ t \in \hat{T}_G(Y_m \cup Z_s);\ a \in A_i;\ a_1,\dots,a_s \in A_s;\ w,w_1,\dots,w_s \in \overline{BG}_p)$ mindannyiszor irányitsunk élet $w_1,\dots,w_s$-ből w-be.

Ezen általánosabb BG gráfokra érvényes lesz a II. fej. 2-ben mondottak általánositása: $\underline{A}$ akkor és csakis akkor l-vizsgáló, ha BG_p nem tartalmaz irányitott hurkot semmilyen $p\ (\in T_F(Z))$-re. Állitásunk elegendősége az ott emlitettekből következik, mig szükségességét dp(p) szerinti teljes indukcióval láthatjuk be, ha kihasználjuk, hogy $\underline{A}$ teljesen definiált.

Tételezzük fel a továbbiakban, hogy $\underline{A}$ még l-vizsgáló is. Ekkor tetszőleges $p \in T_F(Z)$-re és $w \in \overline{BG}_p$-re w-nek rn(w) rangján a BG_p-ben w-be vezető leghosszabb irányitott ut hosszát értjük. (Minden $w\ (\in \overline{BG}_p)$-re $rn(w) < \omega$, mivel $\underline{A}$ l-vizsgáló.)

Legyen ismét $p \in T_F(Z)$, $w \in \overline{BG}_p$, a pedig tetszőleges eleme A_s-nek. Értelmezni fogjuk $def_p(a,w)$ fát, amely $Y_m \cup Z$ feletti $G \cup A_s$ tipusu lesz, ahol A_s minden elemét m+1 változósnak tekintjük.

(a) $rn(w)=0$ esetén $def_p(a,w)=a(t_1,\dots,t_m,z_j)$, ahol $t_r\ (\in T_G(Y_m))$ az $(y_r,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\longleftarrow}} t_r$ relációval van definiálva $(r=1,\dots,m)$, továbbá $z_j = lb_p(w)$.

(b) $rn(w) > 0$-ra $def_p(a,w) = a(t_1,\dots,t_m,z_j)$ de most tetszőleges $r(=1,\dots,m)$-re t_r-t a $t_r = \bar{t}_r(def_p(b_{r_1},w_{r_1}),\dots, def_p(b_{r_{s_r}},w_{r_{s_r}}))$ egyenlőség definiálja, ahol

(i) $s_r \geqq 0$; $\bar{t}_r \in \hat{T}_G(Y_m \cup Z_{s_r})$; $b_{r_1},\dots,b_{r_{s_r}} \in A_s$; $w_{r_1},\dots,w_{r_{s_r}} \in \overline{BG}_p$;

(ii) $(y_r,w) \overset{*}{\underset{p\underline{A}}{\Longleftarrow}} \bar{t}_r((b_{r_1},w_{r_1}),\dots,(b_{r_{s_r}},w_{r_{s_r}}))$;

továbbá, $z_j = lb_p(w)$.

<u>2.2 Tétel.</u> $\mathcal{H} \circ \mathcal{TDA}_{1-V} \subseteq \mathcal{TDM}$.

<u>Bizonyitás.</u> Tekintsük $\underline{A} = (F,a_0,G,a_0,P)$ homomorfizmust és $\underline{B} = (G,B,H,b_0,P',rt')$ teljesen definiált, determinisztikus, 1-vizsgáló AT transzformátort. Tételezzük fel, hogy $B_i = Y_m$ valamely $m(\geqq 0)$-re.

Adjuk meg a $\underline{C} = (F,C,H,c_0,P'')$ makrofatranszformátort az alábbiak szerint:

(a) $C = C_1 \cup C_{m+1}$; $C_1 = \{c_0\}$, ahol c_0 uj szimbólum; $C_{m+1} = B_s$;

(b) (i) valahányszor $a_0 f(z_1,\dots,z_k) \to q(a_0 z_{i_1},\dots,a_0 z_{i_n})$ szabály P-ben van ($k,n \geqq 0$; $f \in F_k$; $q \in \hat{T}_G(Z_n)$; $1 \leqq i_1,\dots,i_n \leqq k$) és $(b,\lambda) \overset{*}{\underset{q\underline{B}}{\Longleftarrow}} \bar{t}((b_1,w_1),\dots,(b_\ell,w_\ell))$ ($\ell \geqq 0$; $\bar{t} \in \hat{T}_H(Y_m \cup Z_\ell)$; $b,b_1,\dots,b_\ell \in B_s$; $w_1,\dots,w_\ell \in \overline{BG}_q$) mindannyiszor vegyük fel P"-be a $b(y_1,\dots,y_m, f(z_1,\dots,z_k)) \to t$ szabályt, ahol $t = \bar{t}(def_{q(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_1,w_1),\dots,def_{q(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_\ell,w_\ell))$.

(Vegyük észre, hogy $\overline{BG}_q = \overline{BG}_{q(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}$!)

(ii) vegyük még fel P"-be a $c_o(f(z_1,\ldots,z_k)) \to t'$ szabályt minden $k\ (\geq 0)$-ra és $f\ (\in F_k)$-re ahol $b_o(y_1,\ldots,y_m,f(z_1,\ldots,z_k)) \to t$ az (i) szerint konstruált szabály, t' pedig ugy keletkezik t-ből, hogy t-ben y_r minden egyes előfordulásának helyére $rt'(y_r)$-t helyettesitünk $(r=1,\ldots,m)$.

Mindenekelőtt megjegyezzük: abból, hogy mind $\underline{A}$ mind $\underline{B}$ teljesen definiált és determinisztikus, $\underline{C}$ hasonló tulajdonságai is következnek.

2.2.1 Lemma. Legyen $b \in B_s$, $p \in T_F$, $q,q_1,\ldots,q_m \in T_H$ és $\varphi : Y_m \to T_H$ olyan, hogy $\varphi(y_r)=q_r$ $(r=1,\ldots,m)$. Az $a_o p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} q'$-ből nyert $q'\ (\in T_G)$ fára akkor és csakis akkor teljesül $(b,\lambda) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} q$ φ-nél, ha $b(q_1,\ldots,q_m,p) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} q$ fennáll.

Bizonyitás. A szükségesség igazolása $dp(p)$ szerinti teljes indukcióval történhet.

(a) Ha $dp(p)=0$ vagyis $p=f\ (\in F_o)$, akkor az $a_o f \to q'$ P-beli szabályra $(b,\lambda) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} t\ (\in T_H(Y_m))$ és $t \sim q$. (Ahol $\sim$ ugyanazt jelenti mint a 2.1 tételben.) Minthogy ekkor P" definiciója szerint $b(y_1,\ldots,y_m,f) \to t \in P"$, az állitásunk nyilvánvaló.

(b) Legyen $p=f(p_1,\ldots,p_k)$ $(k \geq 1)$. Tekintsük az

$$a_o f(p_1,\ldots,p_k) \underset{\underline{A}}{\Rightarrow} \bar{q}(a_o p_{i_1},\ldots,a_o p_{i_n}) \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} \bar{q}(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n)=q' \qquad (8)$$

derivációt, amely szerint $a_o f(z_1,\ldots,z_k) \to \bar{q}(a_o z_{i_1},\ldots,a_o z_{i_n})$ szabály P-ben van $(n \geq 0;\ \bar{q} \in \hat{T}_G(Z_n))$.

Következésképpen a $(b,\lambda) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} q$ φ-nél deriváció felbontható az

(i) $(b,\lambda) \overset{*}{\underset{q\underline{B}}{\Leftarrow}} \bar{t}((b_1,w_1),\ldots,(b_\ell,w_\ell))$

$$(\ell \geq 0;\ \bar{t} \in \hat{T}_H(Y_m \cup Z_\ell)\ ;\ b_1,\dots,b_\ell \in B_s;\ w_1,\dots,w_\ell \in \overline{BG}_{\bar{q}})\ ; \qquad (9)$$

$$\text{(ii)}\quad (b_r,w_r) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}} u_r\ (\in T_H)\quad \varphi\text{-nél}\ (r=1,\dots,\ell)$$

komponensekre, amelyekre nyilván $\bar{t}(u_1,\dots,u_\ell) \sim q$. Továbbá, a $b(y_1,\dots,y_m,f(z_1,\dots,z_k)) \rightarrow t$ szabály P"-ben van, ahol $t=\bar{t}(\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_1,w_1),\dots,\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_\ell,w_\ell))$.

Tekintsük az ezen szabály alkalmazásával kapott $b(q_1,\dots,q_m,p) \underset{\underline{C}}{\Rightarrow} \hat{q}$ relációt.

(b1) Állitás. Legyen $w(\in \overline{BG}_{\bar{q}})$ tetszőleges és vegyük az

$$(y_r,w) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}} u'_r\ (\in T_H)\qquad \varphi\text{-nél}\qquad (r=1,\dots,m)$$

derivációkat. Legyen t' tetszőleges részfája t-nek, amelyre teljesül a $t'=\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b',w)$ valamely $b'\ (\in B_s)$-re tehát $t'=b'(t'_1,\dots,t'_m,z_{i_j})$ valamely $j(=1,\dots,n)$-re és $t'_1,\dots,t'_m\ (\in \mathrm{sub}(t))$-re. Legyen $q'\ (\in \mathrm{sub}(\hat{q}))$ az a fa amely t'-be való megfelelő behelyettesités után keletkezett, vagyis $q'=b'(q'_1,\dots,q'_m,p_{i_j})$.

Állitjuk, hogy

$$q'_r \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} u'_r \qquad (r=1,\dots,m).$$

A bizonyitás $rn(w)$ szerinti teljes indukcióval történik. Ha $rn(w)=0$ akkor t' definiciója miatt $t'_r \in T_H(Y_m)$ és $(y_r,w) \overset{*}{\underset{q\underline{B}}{\Longleftarrow}} t'_r$ teljesül, tehát $t'_r \sim u'_r = q'_r$ és igy állitásunk nyilvánvaló.

Legyen most $rn(w) > 0$. Ekkor a szóban forgó derivációk minden $r(=1,\dots,m)$ esetén az

(i) $(y_r,w) \overset{*}{\underset{q\underline{B}}{\Longleftarrow}} \bar{t}_r((b_{r_1},w_{r_1}),\dots,(b_{r_{\ell_r}},w_{r_{\ell_r}}))$ (10)

$(\ell_r \geq 0;\ \bar{t}_r \in \hat{T}_H(Y_m \cup Z_{\ell_r});\ b_{r_1},\dots,b_{r_{\ell_r}} \in B_s;$
$w_{r_1},\dots,w_{r_{\ell_r}} \in \overline{BG_{\bar{q}}});$

(ii) $(b_{r_s},w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}} u'_{r_s}\ (\in T_H)$ φ-nél $(s=1,\dots,\ell_r)$

komponensekre bonthatók, amelyekre nyilván $\bar{t}_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}}) \sim u'_r$ $(r=1,\dots,m)$. Következésképpen, t' definiciója miatt érvényesek a $t'_r=\bar{t}_r(t'_{r_1},\dots,t'_{r_{\ell_r}})$ egyenlőségek, ahol

$t'_{r_s}=\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_{r_s},w_{r_s})$ vagyis $t'_{r_s}=b_{r_s}(t'_{r_{s_1}},\dots,t'_{r_{s_m}},z_{i_{j_{r_s}}})$

valamely $b_{r_s}(\in B_s)$; $t'_{r_{s_1}},\dots,t'_{r_{s_m}}$ $(\in \mathrm{sub}(t'))$ és $1 \leq j_{r_s} \leq n$ esetén $(r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$. Ezen felbontások indukálják a

$$\bar{t}_r(q'_{r_1},\dots,q'_{r_{\ell_r}}) \sim q'_r;$$

$$q'_{r_s}=b_{r_s}(q'_{r_{s_1}},\dots,q'_{r_{s_m}};p_{i_{j_{r_s}}}) \qquad (r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$$

felbontásokat. Minthogy $rn(w_{r_s}) < rn(w)$, igy az

$(y_1,w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}} \varphi_{w_{r_s},q'}(y_1)(:=u'_{r_{s_1}}),\dots,(y_m,w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}} \varphi_{w_{r_s},q'}(y_m)(:=u'_{r_{s_m}})$ φ-nél

relációkra

$$q'_{r_{s_1}} \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} u'_{r_{s_1}},\dots,q'_{r_{s_m}} \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} u'_{r_{s_m}}$$

$(r=1,\dots,m;s=1,\dots,\ell_r)$. Másrészt, $a_0 p_{i_{j_{r_s}}} \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} q_{j_{r_s}}$-re (ii) szerint $(b_{r_s},\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_{r_s}}\underline{B}}{\Longleftarrow}} u'_{r_s}$ $\varphi_{w_{r_s},q'}$-nél, igy (b)-re vonatkozó indukció feltevés miatt $b_{r_s}(u'_{r_{s_1}},\dots,u'_{r_{s_m}},p_{i_{j_{r_s}}}) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} u'_{r_s}$ $(r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$. Következésképpen $q'_r \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} u'_r$ $(r=1,\dots,m)$. □ (b1)

Térjünk vissza a szükségesség igazolásához. t-nek az emlitett felbontása felvehető $t=\bar{t}(t_1',\dots,t_\ell')$ alakban, ahol

$$t_r'=b_r(t_{r_1}',\dots,t_{r_m}',z_{i_{j_r}})$$

valamely $1\leqq j_r\leqq n$; $t_{r_1}',\dots,t_{r_m}'$ ($\in sub(t)$) esetén $(r=1,\dots,\ell)$. Következésképpen $\bar{t}(q_1',\dots,q_\ell')\sim\hat{q}$ ahol

$$q_r'=b_r(q_{r_1}',\dots,q_{r_m}',p_{i_{j_r}}) \qquad (r=1,\dots,\ell).$$

Az

$$(y_1,w_r)\overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}}\varphi_{w_r,q'}(y_1)(:=u_{r_1}'),\dots,(y_m,w_r)\overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Longleftarrow}}\varphi_{w_r,q'}(y_m)(:=u_{r_m}') \quad \varphi\text{-nél}$$

relációkra (b1) állitás miatt teljesül

$$q_{r_1}'\overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}}u_{r_1}',\dots,q_{r_m}'\overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}}u_{r_m}' \qquad (r=1,\dots,\ell).$$

Másrészt, a (b)-re vonatkozó indukció feltevésből és abból, hogy az $a_0p_{i_{j_r}}\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}}\bar{q}_{j_r}$ derivációra (9) szerint $(b_r,\lambda)\overset{*}{\underset{\bar{q}_{j_r}\underline{B}}{\Longleftarrow}}u_r$ $\varphi_{w_r,q'}$ -nél, következik, hogy $b_r(u_{r_1}',\dots,u_{r_m}',p_{i_{j_r}})\overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}}u_r$ $(r=1,\dots,\ell)$, tehát $\hat{q}\overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}}q$.

Az elegendőség igazolását ujra dp(p) szerinti teljes indukcióval végezzük.

(a) dp(p)=0 esetén a szükségesség bizonyitásának megforditása érvényes.

(b) Legyen $dp(p)>0$ tehát $p=f(p_1,\dots,p_k)$ $(k\geqq 1)$. Tekintsük a $b(q_1,\dots,q_m,p)\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}\hat{q}\overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}}q$ derivációt amelynek első lépése a $b(y_1,\dots,y_m,f(z_1,\dots,z_k))\to t$ P"-beli szabály alkalmazásával keletkezett. Vegyük továbbá (8)-at, mely szerint $a_0f(z_1,\dots,z_k)\to\bar{q}(a_0z_{i_1},\dots,a_0z_{i_n})$ szabály P-ben van. Következésképpen t-re érvényes a $t=\bar{t}(def_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_1,w_1),\dots,def_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_\ell,w$

előállitás, ahol $\bar{t}((b_1,w_1),\dots,(b_\ell,w_\ell))$ fát (9) definiálja.

(b1) Állitás. Legyen $t'\in \overline{\mathrm{sub}}(t)$ vagyis $t'=b'(t_1',\dots,t_m',z_{i_j})$ valamely b' ($\in C_{m+1}$), $1\leq j\leq n$; $t_1',\dots,t_m'$ ($\in \mathrm{sub}(t)$) -re. Ekkor nyilvánvalóan $t'=\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b',w)$ valamely w ($\in \overline{BG}_{\bar{q}}$)-re.

Tekintsük azon q' ($\in \mathrm{sub}(q)$) -t, amely a t'-be való megfelelő behelyettesités után keletkezett, tehát $b'(q_1',\dots,q_m',p_{i_j})$ alaku, valamint a

$$q_r' \underset{C}{\overset{*}{\Rightarrow}} u_r' \ (\in T_H) \qquad (r=1,\dots,m)$$

derivációkat. Állitjuk, hogy

$$(y_r,w) \underset{q'B}{\overset{*}{\Leftarrow}} u_r' \quad \varphi\text{-nél} \qquad (r=1,\dots,m).$$

Ha $dg(t')=1$, akkor $t_r'\in T_H(Y_m)$, $(y_r,w)\underset{qB}{\overset{*}{\Leftarrow}} t_r'$ és $t_r'\sim q_r'=u_r'$ $(r=1,\dots,m)$ tehát állitásunk nyilvánvaló.

Legyen $dg(t')>1$. Ekkor minden $r(=1,\dots,m)$ esetén érvényes a $t_r'=\bar{t}_r(t_{r_1}',\dots,t_{r_{\ell_r}}')$ felbontás, ahol $\ell_r\geq 0$; $\bar{t}_r\in \hat{T}_H(Y_m\cup Z_{\ell_r})$ és $t_{r_s}'=\mathrm{def}_{\bar{q}(z_{i_1},\dots,z_{i_n})}(b_{r_s},w_{r_s})$ valamely b_{r_s} ($\in B_s$) w_{r_s} ($\in \overline{BG}_{\bar{q}}$)-ra $(s=1,\dots,\ell_r)$. Más szóval

$$t_{r_s}'=b_{r_s}(t_{r_{s_1}}',\dots,t_{r_{s_m}}',z_{i_{j_{rs}}}) \qquad (r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$$

valamely $t_{r_{s_1}}',\dots,t_{r_{s_m}}'$ ($\in \mathrm{sub}(t)$) és $1\leq j_{r_s}\leq n$ esetén. t_r'-nek a felbontásából következik q_r'-nek a $\bar{t}_r(q_{r_1}',\dots,q_{r_{\ell_r}}')\sim q_r'$ felbontása $(r=1,\dots,m)$, ahol

$$q_{r_s}'=b_{r_s}(q_{r_{s_1}}',\dots,q_{r_{s_m}}';p_{i_{j_{rs}}}), \qquad (s=1,\dots,\ell_r)$$

továbbá, az ezen felbontásból származó

$$q_{r_{s_1}}' \underset{C}{\overset{*}{\Rightarrow}} u_{r_{s_1}}' \ (\in T_H),\dots,q_{r_{s_m}}' \underset{C}{\overset{*}{\Rightarrow}} u_{r_{s_m}}' \ (\in T_H)$$

és $b_{r_s}(u'_{r_{s_1}},\dots,u'_{r_{s_m}},p_{i_{j_{r_s}}}) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} u'_{r_s}$ derivációkra teljesül $\overline{t}_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_{\ell_r}}) \sim u'_r$ $(r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$. Minthogy $dg(t'_{r_s}) < dg(t)$, igy

$(y_1,w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} u'_{r_{s_1}}$ $(:=\varphi_{w_{r_s},q'}(y_1)),\dots,(y_m,w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} u'_{r_{s_m}}$ $(:=\varphi_{w_{r_s},q'}(y_m))$ φ-nél, másrészt $dp(p_{i_{j_{r_s}}}) < dp(p)$, tehát $(b_{r_s},\lambda) \overset{*}{\underset{q_{j_{r_s}}\underline{B}}{\Leftarrow}} u'_{r_s}$ $\varphi_{w_{r_s},q'}$ -nél, vagyis $(b_{r_s},w_{r_s}) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} u'_{r_s}$ φ-nél $(r=1,\dots,m;\ s=1,\dots,\ell_r)$. Végül, $\overline{t}_r$ definiciója miatt teljesül (10) ami az előzőekkel együtt a keresett $(y_r,w) \overset{*}{\underset{q'\underline{B}}{\Leftarrow}} u_r$ $(r=1,\dots,m)$ derivációt adja. □ (b1)

Visszatérve az elegendőség igazolásához, t-nek előbb emlitett felbontása felvehető $t=\overline{t}(t'_1,\dots,t'_\ell)$ alakban, ahol

$$t'_r=b_r(t'_{r_1},\dots,t'_{r_m},z_{i_{j_r}}) \qquad (r=1,\dots,m)$$

valamely $b_r\ (\in C_{m+1})$; $1 \leq j_r \leq n$; $t'_{r_1},\dots,t'_{r_m}$ $(\in sub(t))$ esetén. Következésképpen $\hat{q}$ is felbontható $\overline{t}(q'_1,\dots,q'_\ell) \sim \hat{q}$ alakban, ahol

$$q'_r=b_r(q'_{r_1},\dots,q'_{r_m},p_{i_{j_r}}),$$

továbbá a

$$q'_{r_1} \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} u'_{r_1}\ (\in T_H),\dots,q'_{r_m} \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} u'_{r_m}\ (\in T_H)$$

és a

$$b_r(u'_{r_1},\dots,u'_{r_m},p_{i_{j_r}}) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} u'_r \qquad (r=1,\dots,m)$$

derivációkra $\overline{t}(u'_1,\dots,u'_\ell) \sim q$. (b1) állitás miatt érvényesek az

$(y_1,w_r) \underset{q'\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} u'_{r_1} (:= \varphi_{w_r,q'}(y_1)), \dots, (y_m,w_r) \underset{q'\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} u'_{r_m} (:= \varphi_{w_r,q'}(y_m))$ φ-nél relációk $(r=1,\dots,\ell)$. Másrészt, minthogy $dp(p_{i_{j_r}}) < dp(p)$, igy $(b_r,\lambda) \underset{q_{j_r}\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} u'_r$ $\varphi_{w_r,q'}$-nél, vagyis $(b_r,w_r) \underset{q'\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}}$ φ-nél $(r=1,\dots,\ell)$. Végül $\bar{t}$ definiciója miatt teljesül (9), tehát $(b,\lambda) \underset{q'\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q$ φ-nél. □ (2.2.1)

Fenti lemmánk, valamint $\underline{C}$ definiciója (b) részének (ii) pontja értelmében tetszőleges $p(\in T_F)$-re, $q(\in T_H)$-ra az $a_o p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} q'(\in T_G)$ fára $(b_o,\lambda) \underset{q'\underline{B}}{\overset{*}{\Longleftarrow}} q$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $c_o(p) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} q$, ami tételünk igazolását jelenti. □

Fenti tételeink alkalmazásával további összefüggések nyerhetők az attributumos és a makrofatranszformációk között.

<u>2.3 Következmény.</u> $\mathcal{TDM} = \mathcal{H} \circ \mathcal{TDA}_{1\text{-}V}$. □

<u>2.4 Következmény.</u> (a) $\mathcal{TDM}^n = \mathcal{H} \circ \mathcal{TDA}^n_{1\text{-}V}$,

(b) $\mathcal{TDM}^n \subsetneqq \mathcal{TDA}^{n+1}_{1\text{-}V} \subsetneqq \mathcal{TDM}^{n+1}$,

(c) $\mathcal{TDA}^n_{SEK\text{-}V} \subsetneqq \mathcal{TDM}^n$,

tetszőleges $n(\geq 1)$ esetén.

<u>Bizonyitás.</u> (a) következik a III. fejezet 4.13 lemmájából és a 2.3 következményből, (b) nyilvánvaló, mig (c)-t a III. fejezet 4.14 következményéből és (a)-ból kapjuk. □

IRODALOM

[1] Aho, A.V. - J.D. Ullman, The Theory of Parsing, Translation and Compiling I, Prentice-Hall, 1972.

[2] Aho, A.V. - J.D. Ullman, The Theory of Parsing, Translation and Compiling II, Prentice-Hall, 1973.

[3] Bartha M., An algebraic definition of attributed transformations, Acta Cybernetica, 4,5, 1982, megjelenés alatt.

[4] Bochmann, G.V., Semantic Equivalence of Covering Attribute Grammars, International Journal of Computer and Information Sciences, 8, 1979, 523-539.

[5] Bochmann, G.V., Semantic evalution from left to right, Communication of the ACM, 19, 1976, 55-62.

[6] Chirica, L.M. - D.F. Martin, An Ordered-Algebraic Definition of Knuthian Semantics, Mathematical Systems Theory, 13, 1979, 1-27.

[7] Duske, J. - R. Parchmann - M. Sedello - J. Specht, IO-Macrolanguages and Attributed Translations, Information and Control, 35, 1977, 87-105.

[8] Courcelle, B. - P. Franchi-Zannetacci, On the expressive power of attributed grammars, 21 IEEE FOCS, 1980.

[9] Engelfriet, J., Bottom-up and top-down tree transformations - A comparison, Mathematical Systems Theory, 9, 1975, 198-231.

[10] Engelfriet, J. - G. File, Simple multi-visit attribute grammars, Memorandum 314, Twente University of Technology, 1980.

[11] Engelfriet, J. - G. File, Passes and paths of attribute grammars, Memorandum 323, Twente University of Technology, 1980.

[12] Engelfriet, J. - G. File, The formal power of one-visit attribute grammars, Memorandum 286, Twente University of Technology, 1979.

[13] Engelfriet, J. - G. Rozenberg - G. Slutzki, Tree transducers, L systems and two-way machines, Memorandum 187, Twente University of Technology, 1977.

[14] Engelfriet, J. - M. Schmidt, IO and OI I., Journal of Computer and System Sciences, 15, 1977, 328-353.

[16] Engelfriet, J. - M. Schmidt, IO and OI II., Journal of Computer and System Sciences, 16, 1978, 67-99.

[17] Engelfriet, J., Some open questions and recent results on tree transducers and tree languages, Memorandum 293, Twente University of Technology, 1980.

[18] Ésik Z., Decidability results concerning tree transducers I., Acta Cybernetica, 5, 1980, 1-20.

[19] Fischer, M.J., Grammars with macro-like productions, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1968.

[20] Fülöp Z., On attributed tree transducers, Acta Cybernetica, 3,5, 1981, megjelenés alatt.

[21] Gécseg F. - M. Steinby, A faautomaták algebrai elmélete I., Matematikai Lapok, 26, 1975, 169-27.

[22] Gécseg F. - M. Steinby, A faautomaták algebrai elmélete II., Matematikai Lapok, 27, 1979, 283-336.

[23] Jazayeri, M. - K.G. Walter, Alternating Semantic Evaluator, Proceedings of ACM Annual Conference, 1975, 230-234.

[24] Jazayeri, M. - W.F. Ogden - W.C. Rounds, The instrictically exponential complexity of the circularity problem for attributed grammars, Communication of the ACM, 18, 1975, 679-706.

[25] Kasterns, U., Ordered Attributed Grammars, Acta Informatica, 13, 1980, 229-256.

[26] Knuth, D.E., Examples of formal semantics, Lecture Notes in Mathematics 188, Springer-Verlag, 1971.

[27] Knuth, D.E., Semantics of Context Free Languages, Mathematical Systems Theory, 2, 1968, 127-145.

[28] Lewis, D.M. - D.J. Rosenkrantz - R.E. Stearns, Attributed translations, Journal of Computer and System Sciences, 9, 1974, 279-307.

[29] Mayoh, B.H., Attribute grammars and mathematical semantics, DAIMI PB-80, Aarhus University, 1980.

[30] Pozesfsky, D. - M. Jazayeri, A family of pass-oriented attribute grammar evaluators, Proceedings of the ACM on 1978 Annual Conference, 1978, 261-270.

[31] Riis, H. - Skyum S., k-Visit attribute grammars, DAIMI, PB-121, Aarhus University, 1980.

[32] Riis, H., Subclasses of attribute grammars, DAIMI, PB-114, Aarhus University, 1980.