AZ ANALIZIS KÖZéPISKOLAI TANITASANAK SEGITéSE

AZ ISKOLASZÁMITÓGéPPEL

-

Egyetemi doktori értekezés

Készitette:

Blandl Mátyás

Baja

1986.

T a r t a l o m

Mellékletek:

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a számitógépek felhasználásának egy olyan lehetöségét mutatjuk be, amely a kor igényeinek jól megfelel, és - tapasztalataink szerint- hatékonyabbá teszi a matematika oktatását is.

A bevezetöben a téma aktualitását hangsulyozva vázoljuk a számitógépek fejlödésének szédületes ütemét, a számitógépes oktatás eddigi tapasztalatait, a megváltozott feltételeket, a jelenlegi lehetöségeket és gondokat.

A továbbiakban azt olvashatjuk, hogy miként alkalmaztuk a HT-1080Z tipusu iskolaszámitógépeket a matematikából fakultativ oktatásban részesülö csoportban a középiskolai analizis tanitásának segitésére.

Részletesen mutatjuk be a sorozatok tanitását. Egyrészt azért tesszük ezt, mert igy sokoldaluan érzékeltethetjük, hogy maroknyi programozási ismerettel és egyszerü programokkal is hatékonyabbá tehetjük a tananyagfeldolgozást, másrészt azért, mert a közelitö számitások, a függvények folytonossága és határértéke, a differenciál- és integrálszámitás témáinak legfontosabb középiskolai kérdései erre visszavezethetök, vagy hasonlóan tárgyalhatók.

1.1. A számitógépek oktatásbeli felhasználásának aktualitása

A gazdasági és a társadalmi élet közötti kapcsolat szoros és dialektikus, miként a technika és a kultura közötti összefüggés is az. A XX. század második felének gazdasági életében egyre inkább elötérbe került - a mennyiség növelése mellett - a jobb minöségre való törekvés és az egyes folyamatok minél nagyobb mértékü automatizálásának igénye. Ennek következtében módosult a társadalmi értékitélet. Erösödött a természettudományos gondolkodás és a modern technika iránti érdeklödés. Ez eröteljes tudományos és technikai fejlödést követelt és eredményezett.

Az elektronika 70-es évbekben kialakitott csodája a mikroprocesszor. Megjelenése, napjainkban lejátszódó viharos fejlödése és térhóditása a társadalmi és a gazdasági életben egyaránt forradalmi változást eredményezhet, amely a számitógépek hazai elterjedésének várható üteme következtében az élet mind több területén országunkban is megvalósulhat.

A fejlett nyugati országokban olyan gyors volt a technikai fejlödés, az árak csökkenése és a tömeggyártás, hogy a mikroelektronika legujabb termékeinek, a személyi számitógépeknek a felhasználása messze elmaradt a lehetöségektöl. Ezek a hasznos gépek megjelentek a háztartásokban, üzemekben, intézményekben, igy az iskolákban is, a megfelelö szoftver kialakitása azonban nem tudott lépést tartani a hardver fejlödésének szédületes ütemével. A számitógépek iskolai alkalmazásában különösen igy van ez, ezért a mikroszámitógépek oktatásbeli felhasználásában - pillanatnyilag ugy tünik - még lépést tarthatunk a legfejlettebb országokkal is.

A magyar társadalom most tanulja az uj technikát céljainak megfelelöen felhasználni, mert bár a számitógépek az elmult két és fél évtizedben a tudományos és a központi igazgatási intézményekben, majd a gazdasági élet egyes területein is megjelentek, a társadalmi méretü birtokbavétel azonban még nem történt meg. A mikroszámitógépes lavina igazi törvényszerüségeit igy még nem ismerhetjük, de annyi bizonyos, hogy kimüvelt emberfök sokasága kell, akik - a közeljövöben egy átlagos család számára is elérhetö áron kapható - mikroszámitógépeket a történelmileg kialakult tevékenységekhez, élettel teli foglalkozásokhoz kapcsolva lelkesen és szakszerüen tudják használni.

Ehhez a számitástechnikai kulturát az általános müveltség részévé kell tenni, és példát kell mutatni az uj eszközök helyes, átgondolt használatára a hagyományos kultura minden területén. Ez persze elkerülhetetlenül együttjár bizonyos uj müveltségi elemek befogadásával. A nemzetközi tapasztalatok szerint ez nem csökkenti, hanem éppen ellenkezöleg: fokozza az általános müveltség iránti igényt. Számitani lehet arra a kedvezö változásra is, hogy a diszciplinák elkülönülési hajlamával szemben az uj eszközök integrativ szerepet játszanak majd az egyes tantárgyak, szaktudományok és müvelödési területek között. (1.)

Helyes és idöszerü volt tehát az oktatás vezetöinek az a felismerése és döntése, amely az iskola-számitógép-program bevezetését eredményezte, és amelynek elsö, leglátványosabb mozzanatát Párizs György miniszteri fötanácsos, a Tudományszervezési és Informatikai Intézet igazgatója egy interjujában az alábbiak szerint értékelt:

''Nehéz év volt az 1983-as, mert mintegy két hónap alatt osztottunk szét közel 1000 személyi számitógépet. 1700 tanárt kellett kiképezni a számitógépek kezelésére. Meghirdettük az oktatási programcsomag pályázatot, kiadványok sorozatát dolgoztuk ki és küldtük meg az iskoláknak.
1983.junius 30-ig minden középiskola megkapta a

számitógépet (gimnáziumok, szakközépiskolák és szakmunkásképzö intézetek). Nyáron, elsösorban a KISZ szervezésében, több épitö - és üdülötáborban ismerkedtek meg a gyerekek a számitógépekkel, a programozás alapjaival. Ösztöl az iskolákban szakkörök indultak, és a legnagyobb gond jelenleg az, hogy nem tudunk annyi számitógépet rendelkezésre bocsátani, mint amennyit szeretnénk.

Legnagyobb sikernek azt tartom, hogy a magyar társadalom legkülönbözöbb rétegei, mondhatnám, egyhangulag támogatják a programot; külön kiemelhetö a KISZ, a TIT, a METSZ, a sajtó, a TV és a rádió. A program fö célja, hogy a felnövekvö nemzedék és a felnött lakosság megtanulja a számitógépet használni a napi munkában.'' (2.)

Széleskörü társadalmi összefogásról számolhatunk tehát be, mely összhangban van a reálisan kitüzött célokkal és a társadalmi igényekkel.

A program hasonló lendülettel fut tovább. Azóta mind több középiskolában van 6-8 számitógép, s ez az elörejelzések szerint a hetedik ötéves terv végére 18 - 20 -ra fog szaporodni. Az 1986-87 -es tanévtöl valamilyen módon bevezetik a számitástechnika oktatását, indul az interfész - program (a számitógép és a környezete összekapcsolásának össztársadalmi segitése), az általános iskolák, a felsöfoku és közmüvelödési intézmények gépesitése is.

Az iskolaszámitógép - program eredményes megvalósitása azért is fontos, mert a jövö generációja jelenleg az iskolákban találkozhat átgondoltan tervezett és szervezett módon a következö évek egyik leghatásosabb munkaeszközével, amely puszta létezésével, lehetöségeivel késztet bennünket eddigi munkafolyamataink, gondolatmenetünk ujraformálására.

Nem muló divatról van itt szó, hanem olyan eszközökröl, amelyek tartósan, és egyre inkább a felhasználás és az érdeklödés középpontjában lesznek. Ezt meggyözöen bizonyitja a számitógépek fejlödésének eddigi utja.

Tekintsük át röviden.

1.2. A számitógépek öt generációja

A számolás megkönnyitésére régóta alkalmaznak segédeszközöket. Ilyen eszköznek tekinthetö a ma is használatban lévö golyós számológép vagy abakusz. Ezek kezdetben mechanikusan müködö gépekké (Leibniz a XVIII., Babbage a XIX. században alkotott ilyen berendezéseket a számolási müveletek gépi elvégzésére), majd sokoldaluan használható elektronikus eszközökké nötték ki magukat.

A fejlödés üteme az utóbbi négy évtizedben gyorsult fel. Ez egyrészt a technikai haladásnak köszönhetö, másrészt Neumann Jánosnak, aki a mai értelemben vett általános célu (univerzalis), programvezérlésü, számjegyekkel dolgozó (digitális) számitógép müködésére vonatkozó elveket kidolgozta 1945 -ben.

''A Neumann János által megfogalmazott alapelvek a következökben foglalhatók össze:

a) A programvezérlés elve azt a követelményt fejezi ki, hogy a berendezés az elöre megfogalmazott és elkészitett utasitások sorozatát (programot) automatikusan, külsö beavatkozás nélkül hajtja végre.

b) A tárolt program elve szerint a végrehajtandó programot maga a rendszer tárolja.'' (3.)

Az elsö generációs számitógépek épitöelemei az elektroncsövek, amelyeknek alkalmazásával elérték, hogy lényegesen lecsökkent a kapcsolási idö a korábban alkalmazott mechanikus és elektromechanikus - ugynevezett 0. generációs - számitógépekéhez képest.
Az elsö tisztán elektronikus számitógép, az ENIAC (Elektronic Numerical Integrátor and Computer) 1945. decemberében kezdte meg müködését. A gép 18 ezer elektroncsövet, 70 ezer ellenállást, 10 ezer kondenzátort és 6 ezer kapcsolót tartalmazott. A gép hatalmas méreteihez jelentös energiafelvétel és höleadás társult. Percenként 30 számolási müveletet végzett. A bináris jelekböl álló gépi kódban programozható, igen költséges és kis megbizhatóságu elsö generációs gépeket kizárólag kutatási célokra használták. Magyarországon az M-3 tipusu tartozott ebbe a kategóriába.

A második generációs számitógépekben az elektroncsöveket az 1954-ben megjelent tranzisztorok váltották fel, aminek következtében jelentösen lecsökkent a méret, ugyanakkor a sebesség, a megbizhatóság és a kapacitás nagyságrendekkel nött. Rohamos fejlödésnek indult a szereléstechnika, elterjedt a nyomtatott és fémgözöléssel felvitt vékony-réteg huzalozás. Jelentösen bövült a számitógépek alkalmazási területe is, és ebben jelentös szerepet játszott az asszembler (szimbolikus) programozási nyelvek megjelenése. A számitógépes oktatást elökészitö kisérletek ezeken a gépeken indultak el.

A harmadik generáció folyamatosan nött ki a másodikból. A 60-as évek végén az integrált áramkörök alkalmazása lehetövé tette a miniatürizálást és az árak rohamos csökkentését. (Az integrált félvezetö technológiával néhány négyzetmilliméteres felületen többszáz alkatrész sürithetö össze.) A csatorna elv felhasználásával jelentösen megnött a csatlakoztatható készülékek száma, igy a nagykapacitásu háttértárolók, be-kimeneti egységek széles skálája jelent meg. Lehetöség nyilott a távadatfeldolgozáshoz is.

A harmadik generációs gépek már korszerübb operációs rendszerrel birnak, és egyidöben több program futtatására alkalmasak. Rendszercsaládokat alkotnak, amelyekhez tartozó egységek egymással kompatibilisek (összeférhetök). E gépek jellegzetes képviselöje a nálunk jól ismert IBM 360-as gépcsalád. Programozásuk a magas szintü programozási nyelvek (ALGOL 60, COBOL, FORTRAN) elterjedésével egyszerüsödött.

A negyedik generációt az igen nagy mértékben integrált áramkörök, a több ezer tranzisztort, nagy bonyolultságu logikai áramköröket tartalmazó chipek (morzsák) megjelenése tette lehetövé a 70-es években. Ehhez kapcsolódott az optikai eljáráson alapuló technológia, amely segitette a további miniatürizálást és költségek csökkentését. Néhány négyzetmilliméternyi felületen akár egy teljes központi egység (CPU vagy röviden processzor) áramkörei elférnek. Kis mérete miatt ezt mikroprocesszornak, a köré épitett számitógépet - amely legalább ki- és bemeneti egységekkel rendelkezik - mikroszámitógépnek nevezzük.

Az iskolákban is megtalálható mikroszámitógépek (HT 1080 Z,Commodore 64, Commodore 16, ZX Spektrum, Primo,....) olyan univerzális, digitális, elektronikus számitógépek, amelyek a nagy, negyedik generációs gépektöl csak sebességben,a csatlakoztatott háttértárak kapacitásában, valamint tömeggyártásukat és fogyócikké alakulásukat elösegitö alacsony áruk miatt különböznek.

Elterjedésüket tovább segitette - és a költségeket is tovább csökkentette, hogy alkalmassá tették öket arra, hogy az otthonokban és iskolákban mindenütt jelenlévö közönséges televizió készülékekhez csatlakoztatva jelenitsük meg a szükséges szöveget vagy ábrát, söt a legegyszerübbeknél közönséges magnetofon csatlakoztatásával oldhatjuk meg az adatok és programok tárolását.

A gépek elvi felépitése:

Használatuk egyszerü. A könnyen megtanulható BASIC nyelven is programozhatók, néhány vezérlö utasitás ismeretében kész programok könnyedén futtathatók. Családok, magánszemélyek számára is hozzáférhetök, ezért az ebbe a kategóriába tartozó gépeket személyi számitógépeknek is nevezik.

A számitógépek eddigi fejlödése során egy-egy ujabb generáció lineáris méretei általában tized részükre csökkentek, ugyanakkor kapacitásuk és müveleti sebességük megszázszorozódott, miközben kezelésük egyszerüsödött,elöállitási költségük és energiaszükségletük csökkent. ''A népszerüsitö irodalom kedvenc hasonlata szerint, ha az autóipar az utóbbi hetven évben ugy haladt volna, mint a számitástechnika, egy Rolls-Royce-t

20 dollárért lehetne kapni, motorja gyufafej nagyságu lenne, sebessége 100 000 km/h, és egymillió kilométeren 3 liter benzint fogyasztana.'' (4.)

Az ujabb generációváltást most már nem annyira a müszaki fejlesztés, hanem inkább a rendszerkiépités fejlettsége, a felhasználóval való kapcsolat jellege, a szolgáltatások mértéke és minösége határozza meg.

Az ötödik generációt - a japánok által 1992 - re beigért - intelligens szuperszámitógépek fogják jelenteni.

A 90 -es évek számitógépeinek nagyszerüsége abban lesz, hogy minden korábbinál könnyebben - az elörejelzések szerint a megjelenitett kép alapján, söt az emberi hang segitségével is - kezelhetö lesz. A számitógéppel történö együttmüködés ilyen módon alig fog különbözni az emberek közöttitöl. Legelsö, ma már elképzelhetö és körvonalazott uj felhasználása a magasabb szintü szövegkezelés lesz (egyik nyelvröl a másikra történö forditás, leirt vagy elmondott szövegböl a lényeg kiemelése és összefoglalása irásban vagy szóban, stb.), a legintelligensebbek pedig ujabb programok irására is képesek lesznek. (5.)

Várható a számitástechnika nagyobb mértékü összefonódása az informatikával, a robottechnikával, a biotechnikával, a hiradástechnikával és a videotechnikával.

Mindez uj feltételeket, uj lehetöségeket és egyben uj feladatokat ad a közoktatásnak, igy a középiskolai oktatásnak is. Célszerü viszont a számitógépek eddigi alkalmazásában szerzett tapasztalatokat áttekinteni, ujraértékelni és ésszerüen felhasználni.

1.3. A számitógépes oktatás hagyományai

Az első számitógépeket egyetemi környezetben fejlesztették ki, igy az oktatással való szoros kapcsolatuk születésüktöl kezdve fennáll. Kezdetben csak kutatási célokra és adminisztrációs feladatok elvégzésére használták öket. Az 1950 -es évek végétöl egyre többen gondolták, hogy a számitógépek az oktatásban közvetlenül is alkalmazhatók. Didaktikailag rendkivül hasznos célt helyeztek elötérbe: az ismeretközlést - a programozott oktatás kedvezö tapasztalatait felhasználva - a folyamatos számonkéréssel szerzett információk alapján kivánták szabályozni, s igy az egyénhez jól igazodhat az ismeretek elsajátitásának szintje és sebessége.

Már az elsö kisérleteknél is kiderült, hogy a számitógépek valójában a programozott oktatás gépesitésén tul egy sor egyéb dologra, többrétüen használhatók. A számitógépes oktatás terjedését és fejlödését meghatározó legfontosabb jellemzök a következök:

- A számitógép a tanuló válaszait folyamatosan analizálja, és külön beavatkozás nélkül, a választól függöen folytatja a programot.
- A gép vagy rendszer képes tárolni a tanuló tel-

jesitményére vonatkozó adatokat az oktatási folyamat alatt és esetleg azután is.

- Mód van a tanuló és a tárolt program közötti dinamikus, párbeszédes kölcsönhatásra, ami különbözö tanulási stratégiák kialakitását teszi lehetövé.
- A rendszer alkalmas különbözö eszközök (pl. film, dia, TV, stb.) programozott vezérlésére, folyamatok irányitására.

A technikai fejlödés és a biztató tapasztalat mind bonyolultabb, sokoldalubban használható programokat eredményezett. Különféle felhasználási elképzelések és irányok jelentkeztek.

A CAI (Computer Assisted Instruction = számitógéppel segitett tanitás) irányzatok az oktatási folyamat minél nagyobb mértékü automatizálására törekedtek. Általában egy központi nagy számitógéphez több száz felhasználói terminált kapcsoltak (pl. PLATO, TICCIT rendszer, az IBM gépekre épülö oktató rendszerek,stb.).

Legkorábban a gyakorlásra, sulykolásra vonatkozó programok terjedtek el. Ez érthetö is, hiszen mind a tananyag összeállitása, mind a program elkészitése kis ráforditást igényel, ugyanakkor az oktatás során a gyakorlásra forditott idö jelentös, és lényeges az egyéni haladás ütemének figyelembe vétele, s ezt a rendszer egyszerre akár több ezer tanulóval is megteheti.

A gyakorló programok bövitésével, az oktatás és számonkérés elöre beprogramozott, és a tanuló válaszától függö rend szerinti változtatásával elérték, hogy az uj ismeretek megszerzésében is segitsen a számitógép. Az egyes jelenségek, folyamatok szimulálásával, a sokoldalu szemléltetéssel a mélyebb összefüggések feltárását teszi lehetövé.

Mindinkább felvetödött annak a gondolata, hogy az egész oktatási folyamatot - az ipari alkalmazáshoz hasonlóan - olyan mértékben automatizálják, hogy a tanár szerepe is felesleges legyen (ebben látták a munkaerögondok megoldását).

A CMI (Computer Managed Instruction = számitógéppel vezérelt oktatás) során a számitógép információt gyüjt a tanulóról (eddigi eredményei, elörehaladása az anyagban, érdeklödési köre és más jellemzöi), információt tárol a hozzáférhetö tananyagokról, segédeszközökröl, tematikákról, és ezek összevetésével elöirja vagy javasolja azt az egyéni tanulási utat, melyet követve az adott egyén a legsikeresebben érheti el kitüzött célját. Ugyanakkor a rendszerben tárolt adatok felhasználhatók az oktatási rendszer értékelésére, továbbfejlesztésére, valamint az oktatási anyagok és erőforrások használatának optimalizálására is. (6.)

Egyes pedagógusok a számitógépekben vetélytársat láttak, s - munkahelyüket féltve - a pedagógus személyének fontosságát a nevelési kérdések előtérbe helyezésével hangsulyozták.

Mások azzal érveltek a számitógépes oktatás ellen, hogy a tanulási - tanitási folyamatban az irányitás (illetve a vezérlés) nagyon összetett, nagy intelligenciát kivánó feladat, és ennek az automatizálását a legnehezebb megoldani. A gép ebben a funkciójában sok esetben csak egy igen mereven viselkedő tanárt képes szimulálni, aki a feladatoknak csak a számára ismert (programozott) megoldásait fogadja el. (3.)

Mindkét érvelés kedvezően hatott. Az 1970 -es évek végén kiadott dokumentumokban, a korábban tanterveknek nevezett nevelési és oktatási tervekben előtérbe került a nevelés, és ujraértékelték a tanulási stratégiákat is.

A hagyományos CAI rendszerek a tanárközpontu oktatási stratégiát követték. Ebben a hangsuly a tanár tevékenységén van, ő irányitja a folyamatot, és ellenőrző kérdései alapján dönt a további teendőkről, a tanuló pedig passziv, befogadó. Az irányzat követői igyekeztek minél tökéletesebben helyettesiteni a tanárt a géppel.

A pedagógia korszerü felfogása szerint azonban hatékonyabb a tanulóközpontu oktatás, melyben a tanuló aktivan vesz részt az ismeretszerzésben, az ö tevékenysége kerül elötérbe. Ezt a stratégiát követi az elnevezésében is uj irányzat, a CAL (Computer Aided Learning = számitógéppel segitett tanulás).
Miközben a CAI képviselöi a már meglévö nagy rendszerek intelligenciaszintjének növelésével kivánják a tanulást hatékonyabbá tenni, a CAL irányzatok nem törekednek a tanitási - tanulási folyamat teljes irányitására, ennél szerényebb célt tüznek ki. Szerintük a számitógép a tanulás segédeszköze, és a tanulás irányitása - az eszköz felhasználására vonatkozó döntést is beleértve - a tanár kezében marad. (3.)

Az elképzelések korszerüek, a tapasztalatok kedvezöek voltak, azonban ezeknek az eszközöknek a tömeges és az oktatási intézmények számára elérhetö áron történö terjesztése a müszaki fejlödés adott szintjén nem volt biztositva.

1.4. A mikroszámitógépek korszaka

Az 1980 -as évek közepén a mikroszámitógépek hazánkban is olyan mértékben terjedtek el, hogy ismét felelevenedett a számitógépes oktatás elmélete és gyakorlata. A társadalom eddigiekben vázolt kihivása, a számitógépek tömeges megjelenésével adódó lehetöségek alapvetöen más helyzetet teremtettek. A CAI lelkes hivei intelligens terminálként kivánták felhasználni a mikrogépeket, illetve igyekeztek átalakitani az ott bevált programokat. A CAL irányzatok elgondolásainak még jobban kedvezett a helyzet. A legujabb elképzelések szerint az egész tanulási folyamatot a tanuló irányitja, miközben sokoldaluan és hozzáértöen használja fel a gépet ismereteinek, képességeinek fejlesztésére, az adott probléma mélyebb elemzésére. Kisérleteink szerint a felhasználás egy adott szintjén ez is járható ut.

Ha a számitástechnikai oktatás elsödleges célját kifejtjük, akkor megállapithatjuk, hogy a számitástechnikai szemléletet, a számitógépek misztifikáció nélküli használatának készségét, a számitógépes problémamegoldás igényét és képességét, az algoritmikus gondolkodást kell minél általánosabbá tenni, miközben - egy bizonyos szintig - a számitógépek felépitését, elvi müködését, a programozás technikáját is el kell sajátittatni tanitványainkkal.

A számitástachnikai ismeretek kialakitását, folyamatos bövitését és alkalmazását az egész tanitási-tanulási folyamatban szorgalmaznunk kell, de - hozzáértésük alapján - elsösorban a matematika, fizika, technika szakos tanároktól várhatjuk el. Az ö tárgyaikban vitathatatlanul nagyobb lehetöség van a fenti nevelési cél megvalósitásában.

Elképzelésünk szerint a technika órákon a számitógép-történet és hardver, az információ, az irányitás, szabályozás és mérés témáit tanithatjuk meg. A fizika órákon sok lehetöség nyilik a gyakorlati számitásokra, a jelenségek szimulálására, kisérleti berendezések, mérések irányitására és az adatfeldolgozásra.

A matematikatanitás feladata pedig elsösorban az algoritmikus gondolkodásra, a fegyelmezettebb és sokoldalubb problémamegoldásra való nevelés. Mindemellett - elgondolásunk szerint - magára kell vállalnia az egyszerübb -BASIC nyelvü- programok irására, a nevezetesebb algoritmusok alkalmazására való tanitást is. Nem lehet azonban célunk a programozás magas szintü oktatása. A jelenleg érvényes óratervek, a nevelési és oktatási tervek a közeljövöben várható korrekció után sem teszik ezt lehetövé.

A számitógép, és a vele kapcsolatos valamennyi ismeret lehet tehát az oktatás tárgya, de - ahogy korábban láttuk - az oktatás eszköze is.

Az iskola a kor parancsának akkor engedelmeskedik leginkább, ha olyan müveltséget ad, amelynek birtokában tanitványai mindennapos feladataik ellátásában képesek használni a modern technikát. Erre legeredményesebben ugy nevelhetjük diákjainkat, ha mindennapi fö tevékenységük során, a tanitási - tanulási folyamatban mi magunk is mindennapos segédeszközként alkalmazzuk a számitógépet. Természetesen nem az eddigi szemléltetö eszközök helyett, hanem azok mellett kell használnunk öket, és csak ott, ahol az eddiginél valóban hatékonyabbá tehetö az oktatás segitségükkel.

Ebben a dolgozatban éppen azt mutatjuk meg, hogy miként alkalmazhatjuk a minden középfoku intézményben jelen lévö HT-1080z ikolaszámitógépet, mint segédeszközt a gimnáziumi fakultativ matematikatanitásban.

Ha a számitógépet az oktatási eszközök eddigi rendszerébe és a tanitási folyamatba megfelelö módon épitjük be, akkor - tapasztalataink szerint - számos elönye van.

Nézzük a legfontosabbakat!

1. A számitógép állandó munkaeszközként való alkalmazása hozzászoktatja a felnövekvö nemzedéket korunk elektronikai forradalmához.
2. Erösen motiválja a tanulókat a géppel való sokoldalu kommunikációs lehetöség.
3. Alkalmat ad a kiscsoportos foglalkozásra, söt az egyéni foglalkozásra is, amelynek során a haladás üteme jobban igazodhat a tanulóhoz. Igy a gyengébb képességü, lassubb tanulók is sikerélményhez juthatnak.
4. Segit az ismeretek megszilárditásában. A tanulóknak általában tetszik, hogy a gép fáradhatatlanul tesz fel kérdéseket, azonnal értékeli a választ s - elágazásos programok esetén - a megoldástól függöen adhat ujabbakat.

   Mindezt ugy teszi, mint egy ideális tanár: türelmesen és objektiven, személyes konfliktus nélkül. Igy megfelelö programok birtokában jól alkalmazható a tanulók felzárkoztatására is.
5. Rendkivül hasznos a számitógépes szimuláció. Olyan jelenségek szemléltethetök a gép segitségével, amelyek tulságosan gyors vagy lassu lefutásuk, költséges elöállitásuk miatt iskolai viszonyok között nem valósithatók meg.
6. Segit az ismeretszerzésben azáltal, hogy lehetö-

vé teszi a változó folyamatok és eljárások numerikus és grafikus nyomonkövetését, söt az interaktivitással befolyásolhatjuk azok lefutását. Igy a gép elösegiti az ok - okozati összefüggések sokoldalubb feltárását.

7. A számitógép rendkivül gyors és pontos segédeszköz a mérések, a mérési adatok feldolgozása során.
8. A számitógép és a környezete közötti kapcsolat alkalmas megteremtésével az irányitás, szabályozás és vezérlés területén is segithet, igy az automatizálás nélkülözhetetlen eszköze.
9. A tanitási folyamat irányitását, az osztálymunka megszervezését is támogathatja a gép, s ezáltal könnyitheti a tanár munkáját, az igy felszabadult energiáját, idejét más pedagógiai tevékenységre fordithatja.
10. Csökkenti a pedagógusok terhét az iskolai ügyvitel és adminisztráció egyszerüsitésével.
11. A számitógépek és a számitástechnika iránti érdeklödés éppen a legtehetségesebb, a legjobb felkészültségü tanulók körében a legélénkebb, ami nagyban segiti a tehetséggondozást és a fakultativ oktatást.
12. A számitógép sokoldalu oktatási eszköz lehet anélkül, hogy a tanár vagy a diák rendelkezne különö-

sebb programozási vagy számitástechnikai ismeretekkel.

13. A számitógépek felhasználásának lehetséges egy magasabb szintje is, amikor a tanár és a gépet használó diák is rendelkezik a szükséges számitógépes ismeretekkel. Ilyenkor tetszés szerint használhatjuk a gépet az éppen megoldandó feladatban. Természetesen ehhez számitástechnikai ismeretekre és programozási készségre van szükség, söt olykor a BASIC nyelv mellett kivánatos a nála jóval gyorsabb gépi nyelvü programozás alkalmazása, a számitógépnek a különbözö eszközökkel történö illesztésében való jártasság, valamint a hardver alapos ismerete.

A tanitási - tanulási folyamatban tehát szinte kimerithetetlenek a számitógépek felhasználásának lehetöségei, s ezeket minél elöbb ki kell tapogatnunk, hiszen a számitógép olyan elem , amely a felnövekvö nemzedék gondolkodási strukturáját a kor igényeinek megfelelöen alakitja.

1.5. Lehetöségek és nehézségek a felhasználás különbözö szintjein.

A számitógépek iskolai alkalmazásának tárgyi és személyi feltéltetelei vannak.

1. A tárgyi feltételek szempontjából több felhasználási szint lehetséges.

a) Ha az iskolában csak egy - két gép van, akkor elsösorban demonstrációra, egész osztályt foglalkoztató programok futtatására gondolhatunk, de alkalmazhatjuk a tanitási - tanulási folyamat irányitásának támogatására, az adminisztráció könnyitésére is. A tanulók egyéni felhasználására kevés lehetöség van ugyan, de alkalmas programokkal, a gépidö okos kihasználásával megtehetjük a kezdö lépéseket rendszeres felhasználásuk irányában. Mindenkor figyelembe kell azonban venni, hogy a modern technika alkalmazása önmagában még nem jelent korszerü tanitási módszert. Tapasztalataink szerint a tanulók határozottan elutasitják a rossz vagy felesleges programokat. A könyvekben is megtalálható ismeretek puszta közlésére vagy egy könnyen megvalósitható kisérlet szimulálására felesleges felhasználni a gépeket, ennél többre hivatottak. Jelenleg azonban gond az, hogy - a TII dicséretes törekvése ellenére - nincs elegendö jó program, és kevés a felhasználásukra vonatkozó tapasztalat.

b) Ha az iskolában 6-8 db gép van, akkor már mód van a kiscsoportos foglalkozásra is. A számitógépek ilyen felhasználása sok szempontból elönyös.A tanulók az egyes csoportokon belül ütköztethetik véleményüket, a kisebb kollektiva együttes döntése befolyásolhatja a program futását. Mind a vita, mind a géppel való sokoldalu kommunikáció és az egyéni ötletek megvalósitásának lehetösége fokozza az aktivitást, elösegiti a problémamegoldást és a feladat sokoldalubb megvilágitását. Eddigi tapasztalataink szerint a számitógépek felhasználásának ez a módja igen hasznos, de körültekintö pedagógiai munkát igényel. Mindenek elött ki kell tapasztalnunk, hogy mely témákban, milyen problémák megoldására használhatjuk fel a számitógépeket (a Hol?, Mire?, Hogyan? kérdésekre kell választ adni.).

A kiscsoportos foglalkozás során a tanár szerepe megváltozik: a tanitási - tanulási folyamat határozott irányitója marad ugyan, de elsösorban azáltal, hogy a jelentkezö hibák kiküszöbölésére, a megoldások tökéletesitésére ad javaslatokat, miközben az egyéni megvalósitásokat, ötleteket hagyja kibontakozni. Ezáltal fejleszti a tanulói kreativitást is. A legjobb programok támogatják a tanár irányitó tevékenységét, interaktivitásukkal és sokoldalu szemléltetésükkel ébren tartják a tanulói érdeklödést.

Az ilyen számitógépes foglalkozás lazább szerkezetü óravezetést igényel, s általában a tanitási óra egy részében valósul meg. Az egyes csoportok munkáját, haladását össze kell hangolni egymással és az óra további menetével, s erre vonatkozóan kevés történelmileg kiérlelt tapasztalat van.

c) Várhatóan nö azon iskolák száma, amelyekben 18, vagy még több mikroszámitógép van, s ezek esetleg egy nagy számitógéppel is összekapcsolhatók. Ezekben az iskolákban - megfelelö programok birtokában - megvalósulhat a számitógép egyéni felhasználása a tanitási órán és azon kivül. Ilyenkor a tanulónak ismernie kell a gép kezelését és az adott feladat elvégzéséhez szükséges ismerettel is rendelkeznie kell.

2) A számitástechnikai müveltség alapján a következö szintek lehetségesek:

a) Napjainkban - s még hosszu idön keresztül - a leggyakoribb, hogy a tanár és a diák egyaránt jól tudja használni a számitógépet, de programozni nem képes. Ez az un. felhasználói szint. A reális lehetöségeket mérlegelve ennél többet - kötelezö jelleggel - nem is várhatunk el. Ki kell tehát dolgoznunk ennek módszertanát, fel kell térképezni a felhasználás lehetöségeit, megfelelö mennyiségü és minöségü programot kell készittetni. A TII országosan meghirdetett pályázatára több, az oktatást hatékonyan segitö program érkezett, s ezeket meg lehet vásárolni, mégsem általános a használatuk. Tapasztalataink szerint ennek két fö oka van. Egyrészt nem könnyü szervesen beépiteni a tanitási - tanulási folyamatba, s ezáltal nem segiti, hanem inkább bonyolitja, lassitja az óra menetét. Másrészt a pedagógusok nagy része nem szivesen használ olyan programot, amelynek a müködésével nincs tisztában, s elöfordulhat, hogy a diákok közbevetett kérdéseire nem tud válaszolni. Elöállitásuk nem is olyan egyszerü.

A központilag terjeszthetö program legfontosabb követelményei:

- hatékonyan segitse az iskolai munkát.
- részletes dokumentáció könnyitse meg felhasználását.
- legyen barátságos (kellö tájékoztatást, udvarias és egyértelmü irányitást biztositson).
- avatatlan kéz se tudja elrontani
- szakmai szempontból legyen kifogástalan.

b) A számitástechnikai müveltség következö szintjén a felhasználó világosan látja a megoldandó problémát, és a rendelkezésére álló programot az adott feladathoz és egyéni elképzeléséhez igazitja, esetleg több kis rutinból szerkeszti össze programját. Nehéziti ezt a munkát, hogy az egyes gépek nem kompatibilisek (összeférhetök), s az egyes gépek nyelvjárásait is ismerni kell, továbbá az, hogy sok esetben nehezen követhetö az alapprogram. Célszerü lenne egységes programozási stilust kialakitani.

A tanárképzés és továbbképzés során legalább ezt a szintet feltétlenül ki kell alakitani.

c) A programozói szint feltételezi legalább egy programozási nyelv biztos használatát. Ha a tanár és a tanulók egyaránt tudnak programozni, akkor tetszésük szerint használhatják a számitógépeket. Ez az ideális helyzet jelenleg csak a fakultativ csoportokban képzelhetö el, ott viszont elérhetö, hogy a fakultativ matematika órákon 1 - 3 fös csoportokban, a számitógépet segédeszközként kezelve dolgozzák fel az erre alkalmas anyagrészeket.

A közeljövöben meg kell teremteni a tárgyi és személyi feltételeket ahhoz, hogy általános legyen ez a helyzet, s erre - az eddigiekböl is kitünik - megvan a reális lehetöségünk.

1.6. A tanulás alapelveinek érvényesülése a számitógépek felhasználásakor

Oktatásunk egyik központi kérdése az, miként érhetjük el, hogy tanitványaink aktivan vegyenek részt az ismeretszerzésben, s ez a matematikatanitás során különösen lényeges kérdés.

Pólya György, a világhirü matematika - professzor ezzel összefüggésben azt vallja, hogy a tanulásnak három alapelve van: (lásd (7.) 113-117.oldal)

a) Aktiv tanulás

b) Motiváció

c) Egymást követö fázisok

A tanitás olyan mesterség, mondja Pólya, amelynek számtalan csinja-binja van, azonban minden tanitási fogás valahogyan összefügg a tanulási folyamattal. éppen ezért érdemes a tanulás folyamatával is foglalkozni.

a) Az aktiv tanulás.

Pólya György szerint: Eredményes lesz a tanulás, ha a tanuló maga találja ki az elsajátitandó anyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehet. A tanulás legjobb utja-módja tehát a felfedezés.

A mikroszámitógépek interaktiv programozási módja széles lehetöséget ad a beavatkozásra mind a feladat feltételeinek meghatározásakor, mind a megoldaskor, ezzel is segitve a probléma sokoldalubb vizsgálatát és az aktivitást.

Ha a diákok aktivan részt vesznek a feladat megfogalmazásában, akkor a további munka során is aktivak maradnak.

A számitógépek alkalmazásakor - a fentiek mellett - egy további gyakorlati fogás is bevált: a tanulók vegyenek részt annak eldöntésében, hogy melyik oktatási eszközt használják fel a tanulás során.

Tapasztalataink szerint szinte határtalan a tanulók aktivitása, ha maguk döntenek ugy, hogy számitógéppel kivánják megoldani az adott problémát, és ehhez szükséges programot is maguk irják. Ennek megvalósitásához magasszintü programozási ismeret sem szükséges, amint ezt ebben a dolgozatban látni fogjuk.

A tanitási órán irt és ott használt programtól nem kell megkivánnunk, hogy avatatlan kéz is biztonsággal használhassa. Lehet tehát barátságtalan is, söt müködésének részletes ismertetése sem szükséges.

Ha például egy számitógép közelében tartott matematikaórán több, esetleg csunya együtthatókat is tartalmazó másodfoku egyenletet kell megoldanunk, akkor elég begépelni a következö programot:

```
5 REM...1.program...
10 INPUT''A,B,C='';A,B,C
20 PRINT''X1='';(-B+SQR(B*B-4*A*C))/2/A
30 PRINT''X2='';(-B-SQR(B*B-4*A*C))/2/A
40 GOTO 10
```

E néhány sor begépelésére forditott idö böven megtérül.Ilyen programok használatakor a formális számolásra nem kell idöt pazarolniuk a tanulóknak, tehát a feladat lényegére koncentrálhatnak, az esetleges hibajelzést értelmezve pedig diszkutálni is kénytelenek. Ezen elgondolás alapján mutatunk be további példákat ebben a dolgozatban az analizis tanitásának gyakorlatából.

b) Motiváció.

Tudjuk, hogy a legjobb motivum a tanitási órán az érdekes anyag és a sikerélmény biztositása. Ennek megfelelöen olyan feladatokat kell kitüznünk, amelyek közismert tényböl indulnak ki, vagy éppen gyakorlati hasznuk van, tehát amelyeket a tanulók fontosnak tartanak, s igy megoldásuk megérdemli a fáradságot.

Kisérletünkben az érintett tanulók a matematikát fakultativ tantárgyként tanulták, pályaválasztásuk is ehhez kapcsolódik. Igy különösebb motiváció nélkül is lelkesen tanulták a matematikát, mégis fokozottabban tapasztalhattuk aktivitásukat számitógépes környezetben. Legföképpen pedig minöségileg éreztünk különbséget. Elötérbe került a kreativitásuk, kiváló ötleteik voltak, és mindent elkövettek, hogy sejtésüket, állitásukat igazolják, mintha tekintélyük függne az eredménytöl. Átélhettük az alkotó munka örömét és hozzászokhattak a váratlan helyzetekhez, a tanulók által formákba öntött gondolatmenetekhez is.

c) Egymást követö fázisok: ''A tanulás tevékenységgel és észleléssel kezdödik, ebböl szavakba és fogalmakba megy át és végül a helyes gondolkodásmódhoz vezet.'' (Ez a felderités, a formalizálás és az asszimilálás fázisa.)

A számitógépek alkalmazásával növelhetjük - ráadásul jelentös idömegtakaritással - a felderités fázisában a tapasztalatok szerzését, ami segiti az uj fogalmak pontos bevezetését, a késöbbi tételek megértését, több összefüggés önálló feltárását, és ez garantálja a további fázisokban is az aktivitást. Elérhetjük azt is, hogy a tanulók elöbb - utóbb kisérletezö tudománynak tekintik a matematikát, amelynek müvelése közben a tények és a gondolkodás összhangban, a

felfedezés és ellenörzés, valamint az uj alkotása és az uj befogadása dinamikus kölcsönhatásban van.
felfedezés és ellenörzés dinamikus köcsönhatásban van.
Eközben megismerkednek a tudományos módszerrel is, ami a jövö mérnökei, matematikusai számára elengedhetetlenül szükséges.

1.7. A kisérlet célja

A számitógépek felhasználásának gyakori utja a következö: Adott a számitógép, hozzá néhány program, és a szokásos tevékenység átszervezésével, a körülmények alkalmas módositásával teszik lehetövé alkalmazásukat. Ilyenkor gyakran körülményes, eröltetett a kedvezö esetben jelentös segitséget nyujtó eszközök használata.

Mi forditott utat választottunk. Az elöirt tantervi anyagban és tankönyvekben kerestük meg azokat a területeket, ahol eredményesen alkalmazhatjuk a számitógépeket és kutattuk annak lehetöségeit, hogy kevés számitástechnikai ismeret birtokában miként használhatjuk ki az eddigiekben ismertetett elönyeit.

Ebben a dolgozatban az analizis tanitásának segitését mutatjuk be. A tanulók korábban néhány szakköri órán foglalkoztak a számitástechnika és a BASIC nyelv alapjaival, megismertek néhány nevezetesebb algoritmust is. Lelkesedésük különbözö volt, igy erösen differenciálódott számitástechnikai intelligenciájuk. Célul tüztük azt is, hogy felkészültségüknek megfelelö szinten foglalkoztatjuk a tanulókat a tanitási órán és azon kivül.

2. A sorozatok középiskolai tanitásának segitése az iskolaszámitógéppel

A sorozatok témakörének gondos feldolgozása a középiskolai matematikatanitás egyik fontos feladata. A sorozatokat (pontosabban a végtelen számsorozatokat) speciális függvényként kezelve kialakithatjuk a fogalmat és jól kapcsolhatjuk a korábban tanult függvénytani ismeretekhez.

A nevezetesebb sorozatok (számtani, mértani, Fibonacci - féle, stb.) hagyományos tárgyalásán tul mélyebb vizsgálatokra elsösorban a fakultativ tanterv szerint haladó tanulók esetében van mód. Ekkor szinesebb tartalmat kaphat a monotonitás, a korlátosság és a konvergencia. A téma oktatása elösegiti a kétoldali közelités módszerének, a pontosság és közelités fogalmának jobb megértését, ezzel megkönnyiti az analizis elemeinek alaposabb érlelését, elökésziti a differenciál- és integrálszámitás tanitását. Ezalatt jelentösen továbbfejleszthetjük diákjaink bizonyitási készségét.

Az analizis középiskolai tanitásának a jelenlegi tankönyvekben is követett tárgyalásmódja szerint a sorozatok vizsgálata a függvénytan keretében történik. Ez éppen a fentiek miatt elönyös.

A számitógépek tanórai alkalmazásakor arra törekedtünk, hogy segitségükkel a tanulók több konkrét tapasztalatot szerezhessenek, és a kitüzött problémákat sokoldalubban vizsgálhassák.

2.1. A sorozat fogalma

''Sorozatnak nevezzük a pozitiv számok halmazán értelmezett, számértékü függvényt.'' Ilyen definició mellett a tanulók néhány konkrét példa felsorolása után maguktól megállapitják, hogy a legtöbb sorozatot a hozzárendelési szabállyal, azaz általános tagjával adhatjuk meg. A (8.) tankönyv 167. és 168. oldalán levö példákhoz kitalálják az általános tagot és ennek alapján az alábbi 2. program müködését is ellenörzik a tanulók.

```
5  REM... 2. Program...
10 CLS:PRINT''AZ AN SOROZAT TAGJAI:''
20 N=1
30 AN=(-1/2)éN
40 PRINT''A'';N;''='',AN
50 N=N+1
60 GOTO 30
```

Ez egy keretprogram, amelynek 30. sorába a vizsgálni kivánt sorozat általános tagját kell beirni, és a képernyön megjelennek egymás alatt a kiszámolt tagok. A program a <BREAK> vagy a <SHIFT> és é egyidejü lenyomásával állitható le. Ebben a programban itt az AN=(-1/n)éN sorozat szerepel (ahol ' é ' a hatványozás jele).

Futtassuk a programot!

```
AZ  AN  SOROZAT TAGJAI :
A 1 =        -.5
A 2 =         .25
A 3 =        -.125
A 4 =         .0625
A 5 =        -.03125
A 6 =         .015625
A 7 =        -7.8125E-03
A 8 =         3.90625E-03
A 9 =        -1.95313E-03
A 10 =        9.76563E-04
A 11 =       -4.88281E-04
A 12 =        2.44141E-04
  .            .
  .            .
  .            .
```

Egyszerübb módositásokkal, kiegészitésekkel továbbfejlesztették a tanulók a 2. programot. Nézzünk néhányat közülük!

a) A program futtatásakor olyan gyorsan iródnak ki a tagok a képernyöre, hogy alig lehet követni. Lassitottunk: a következö tagot csak valamely billentyü lenyomására irattuk ki. Ehhez még egy sor kellett:

```
55 IF INKEYA=''''  THEN 55
```
(ahol a dollár jele:A)

b) Lapozhatóvá tettük a kiirást: 14 tag felsorolása után vár a gép egy billentyü lenyomására (enynyi elfér a képernyön). Ekkor:,

```
55 IF N/4=INT(N/4) THEN 70
70 IF INKEYA='''' THEN 70 ELSE 30
```

c) A képernyön egyszerre több tag jelenithetö meg, ha tömöritett irásmóddal dolgozunk:

```
40 PRINT AN;
```

d) Az 50. sor az index változtatását szolgálja. Néhány 'lassan változó' sorozatnál célszerübb az N=N+2, N=N+100 vagy N=N*2 beirás. Ilyenkor az eredeti sorozat egy részsorozatát vizsgáljuk.

e) A HT bekapcsoláskor egyszeres pontosságu változókkal dolgozik, azaz 6 számjegyet jelenit meg. Lehetöség van egész tipusu változók használatára (ekkor gyorsabban fut a program és kisebb a memória igénye): N helyett N% -ot kell irni (vagy DEFINTN). A '#' jel felhasználásakor (vagy DEFDBL AN) pedig duplapontossággal számol (16 jeggyel).

f) Sokkal szemléletesebb a kiirás, ha rögzitjük a tizedespont helyét. A 2. programot például az alábbiak szerint módositottuk:

```
40 PRINT''A'';N;''='',
45 PRINT USING ''###.###'';AN
```

Nézzük az elözö példát igy is!

```
AZ  AN  SOROZAT TAGJAI :
A 1 =          -0.500
A 2 =           0.250
A 3 =          -0.125
A 4 =           0.063
A 5 =          -0.031
A 6 =           0.016
A 7 =          -0.008
A 8 =           0.004
A 9 =          -0.002
A 10 =          0.001
A 11 =         -0.000
A 12 =          0.000
.              .
.              .
.              .
```

2.2. Sorozat megadása

A sorozat megadása történhet:

a) A tagok felsorolásával

b) Az AN=F(N) képlettel, vagyis az általános tagjával

c) Rekurziv definicióval

d) Szöveges utasitással.

A legkönnyebben kezelhetjük a sorozatot, ha ismerjük általános tagját az N függvényeként. Ezt a) és d) esetében könnyen elérhetjük. A sorozatnak végtelen sok tagja van, ezeket tehát nem tudjuk felsorolni, mégis az a legszemléletesebb megadási mód, amikor 'elegendöen sok' tagot sorolunk fel. Ilyenkor fedezik fel könnyen a sorozat tulajdonságait tanitványaink. éppen ezt segiti a 2. program b) és c) esetén is.

Külön érdemes szólni a sorozatok rekurziv megadásáról. A 2. program ilyen esetben is kiválóan alkalmas a sorozat vizsgálatára. A HT a RUN parancs hatására nullázza a változókat, ezért különösen egyszerü a program, ha A1 értéke A0=0 mellett már a rekurziv definicióval adódik.

Irjuk a 2. programba az alábbit!

```
30 AN=SQR(2+AN)
```

Ekkor a következö sorozat tagjai adódnak:

```
A0=0
A1=SQR(2),
A2=SQR(2+SQR(2))
.  .
.  .
AN=SQR(2+AN-1)
```

2.3. Sorozatok ábrázolása

A sozatot ugy is ábrázolhatjuk, ahogy a függvényeket általában, tehát koordináta - rendszerben. A 3. program a kifejezöbb változatot, a számegyenesen való szemléltetést mutatja. Kihasználtuk, hogy a számitógép grafikus megjelenitése lehet dinamikus, igy a sorozat aktuális tagjának értékével egyidöben a megfelelö pont is megjelenik a számegyenesen.

A 3. program 50. és 130. sorába kell begépelni a vizsgálandó sorozat általános tagját. 40 - 90 -ig pedig az elsö 20 tag maximumát és minimumát határozza meg a program (ezt azért célszerü meghatározni, hogy a képernyö teljes szélességét kihasználjuk az ábrázolásnál.) 110 - 190 -ig iratja ki a tagokat a képernyöre, s ezzel egyidöben ábrázolja is a számegyenesen.

Nézzük a 3. programot!

```
5  REM...3. program
10 CLS:PRINT''SOROZAT ABRAZOLASA:''
20 REM...A MIN. éS MAX. TAG KIVALASZTASA...
30 FOR N=1 TO 20
40 AN=(-1)**(N+1)/N
50 IF N=1 THEN MIN=AN:MAX=AN
60 IF MIN>AN THEN MIN=AN
70 IF MAX<AN THEN MAX=AN
80 NEXT N
90 REM...ABRAZOLAS éS KIIRAS...
100 FOR X=0 TO 127:SET(X,40):NEXT X
110 FOR N=1 TO 20
120 AN=(-1)**(N+1)/N
130 PRINT''A'';N;''='',AN
140 IF MAX=MIN THEN X=63:GOTO 170
150 X=127*(AN-MIN)/(MAX-MIN)
160 RESET(X,39):FOR I=0 TO 50:NEXT I
170 SET(X,39):FOR I=0 TO 150:NEXT I
180 NEXT N
190 PRINT''AZ ALUL JELZETT éRTéK:'';AN:SET(X,41)
200 PRINTé960,''MIN='';MIN;:PRINTé1008,''MAX='';MAX;
210 GOTO 210
```

Ha AN=(-1)**(N+1)/N, akkor a következö ábrát látjuk:

SOROZAT ABRAZOLASA :

A 1 = 1	A 2 = -.5
A 3 = .333333	A 4 = -.25
A 5 = .2	A 6 = -.166667
A 7 = .142857	A 8 = -.125
A 9 = .111111	A 10 = -.1
A 11 = .0909091	A 12 = -.0833333
A 13 = .0769231	A 14 = -.0714286
A 15 = .0666667	A 16 = -.0625
A 17 = .0588235	A 18 = -.0555556
A 19 = .0526316	A 20 = -.05

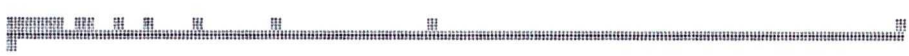
AZ ALUL JELZETT éRTéK :-.05

MIN=-.5 MAX= 1

A 3. program segitségével a geometriai szemléletre alapozva segithetjük a sorozatok témájának alapos elö-készitését, a fogalmak és tételek jobb megértését. Egy jól bevált fogás: A tanulók válasszák ki azokat a sorozatokat amelyeknek van közös tulajdonságuk, vagy adjanak meg olyan tulajdonságot, amellyel egyes sorozatok rendelkeznek, mások nem. Egyszerübb sorozatoknál már az általános tagra pillantva is kialakul a határozott véleményük, mig az összetettebbeknél szivesen kérték a számitógép 'segitségét'. Hasonlóan jártak el a felfedezett tulajdonság vagy eltérés magyarázásakor. A tanulók elött világos, hogy a számitógép elösegitheti egy-egy összefüggés felfedezését, erösitheti vagy gyengitheti a sejtésünkbe vetett hitet.

Példaként nézzünk egy lehetséges feladatsorozatot! A szemléltetés kedvéért bemutatjuk az elsö 20 tag alapján készült 3. program szerinti ábrákat is (a program a tagokat is felsorolja, de itt nem közöljük).

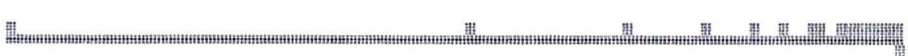
a) AN=1+1/N



AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = 1.05

MIN: A 20 = 1.05   MAX: A 1 = 2

b) AN=(N-1)/N



AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = .95

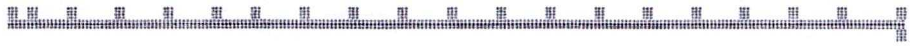
MIN: A 1 = 0   MAX: A 20 = .95

c) AN=-N

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 =-20

MIN: A 20 =-20   MAX: A 1 =-1

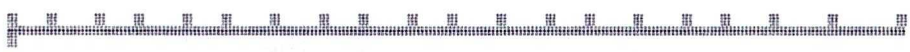
d) AN=(Né2+1)/N



AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 = 20.05

MIN: A 1 = 2 MAX: A 20 = 20.05

e) AN=(1+3*N-Né2)/N



AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 =-16.95

MIN: A 20 =-16.95 MAX: A 1 = 3

f) AN=N/(Né2+1)

AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 = .0498753

MIN: A 20 = .0498753 MAX: A 1 = .5

g) AN=(-1)éN*(N+1)/N

AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 = 1.05

MIN: A 1 =-2 MAX: A 2 = 1.5

h) AN=(-1/2)éN

AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 = 9.53675E-07

MIN: A 1 =-.5 MAX: A 2 = .25

i) AN=(1+COS(3.141593*N))/2

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = 1

MIN: A 1 = 0 MAX: A 2 = 1

j) AN=SIN(N)

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = .912945

MIN: A 11 =-.99999 MAX: A 14 = .990607

k) AN=(1+1/N)éN

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = 2.6533

MIN: A 1 = 2 MAX: A 20 = 2.6533

l) AN=(1/2+1/N)éN

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = 6.41585E-06

MIN: A 20 = 6.41585E-06 MAX: A 1 = 1.5

m) AN=(2+1/N)éN

AZ ALUL JELZETT ÉRTÉK:A 21 = 1.71821E+06

MIN: A 1 = 3 MAX: A 20 = 1.71821E+06

n) AN=2+N*10é(-8)

AZ ALUL JELZETT éRTéK:A 21 = 2

MIN: A 1 = 2 MAX: A 12 = 2

Az elöre felirt példákat helyesen csoportositják a korlátosság és a monotonitás alapján, jól és természetesen használják ezeket a fogalmakat.

A geometriai szemléltetés jól mutatja, hogy egyes sorozatoknál a tagokat szemléltetö pontok torlódnak, igy kézenfekvö a torlódási pont fogalmának bevezetése, a PRINT USING utasitás alkalmazása pedig az 'adott pontossággal közeliti meg' kifejezés jelentésének pontos kialakitását segiti.

A kitüzött példákkal kapcsolatban további elöremutató kérdéseket kaptak a tanulók:

- Melyik sorozatnál játszik szerepet a pontatlan számábrázolás?
- Van-e különbség az n) és i) sorozat között?
- Melyik sorozatnak van torlódási pontja?
- Lehet-e egy sorozatnak több torlódási pontja?
- Mi történik, ha két sorozatot egyesitünk? (pl. a) és b), c) és d), d) és e) egyesitése)
- Szorozzuk össze a d) és f) sorozat megfelelö tagja-

it! Mit mondhatunk az igy kapott sorozatról?

Az utolsó két kérdés jól késziti elö a sorozatokkal végzett müveleteket is, a k), l) és m) példa pedig önmagában is felkelti az érdeklödést.

2.4 A matematikai kisérletek és bizonyitások kapcsolatáról

A tanulóknak világosan kell látni, hogy a géppel felismert tulajdonságokat ellenörizni, bizonyitani kell (jó példa erre az elözöekben ismertetett n) sorozat is).

Ebben a témakörben használjuk a teljes indukciót. Ennek a nagyon praktikus bizonyitási módszernek az a hátránya, hogy a megoldás elején tudnunk kell a helyes állitást. Gyakran elöfordul, hogy a tanuló nem boldogul a feladattal,s felmerül benne a gyanu, hogy az állitás nem is igaz. Ilyenkor elég sok eset vizsgálatával vagy egy ellenpélda keresésével tölti idejét. Nos, a számitógép közelében könnyebben vizsgálhatjuk meg sejtésünk helyességét. Nézzünk erre egy példát!

Keressünk összefüggést az elsö N pozitiv egész szám, azok összege, négyzetösszege és köbösszege között!

A tanulók a vizsgálat megkönnyitésére irták meg az órán az alábbi 4. programot.

```
10 REM    4.program
20 CLS:PRINT''POZITIV EGéSZEK, ÖSSZEGÜK,
   NéGYZETÖSSZEGÜK éS KÖBÖSSZEGÜK
30 INPUT ''MEDDIG SZAMOLJAK'';N
40 PRINT,''AZ ELSÖ N POZITIV EGéSZ SZÁM''
50 PRINT,''ÖSSZEGE'',''NéGYZETÖSSZEGE'',''KÖBÖSSZEGE''
60 FOR I=1 TO N
70 S=S+1
80 SN=SN+I*I
90 SK=SK+I*I*I
100 PRINT''N'',I,S,SN,SK
110 NEXT I
```

A 4. programban az elsö N pozitiv egész szám öszszegét 'S', négyzetösszegét 'SN', köbösszegét pedig 'SKR jelenti. A diákok könnyen észrevették az elsö összefüggést: S=(N*(N+1)/2. Még szembeötlöbb az 'S' és 'SK' öszeg kapcsolata: SK=Sé2, azaz SK=(N*(N+1)/2)é2. Az 'SN' -re vonatkozó képletet is kikövetkeztettük, bár ez kissé nehezebben ment (jó ötlet található (8.) -ban a 174. oldalon.)

A 80. és 90. sorban a hatványozás művelete helyett a pontosabb szorzást használtuk. Itt ismét lehetőségünk volt a kerekités, a pontosság és közelités kérdésének tisztázására.

Ha N=10 értékkel futtatjuk a 4. programot, akkor a következő ábrát látjuk a képernyön:

POZITIV EGéSZEK, NéGYZETüK éS KöBüK öSSZEGE:

MEDDIG SZAMOLJAK ? 10

	AZ ELSő N POZITIV EGéSZ SZáM ÖSSZEGE	NéGYZETÖSSZEGE	KöBÖSSZEGE
N= 1	1	1	1
N= 2	3	5	9
N= 3	6	14	36
N= 4	10	30	100
N= 5	15	55	225
N= 6	21	91	441
N= 7	28	140	784
N= 8	36	204	1296
N= 9	45	285	2025
N= 10	55	385	3025

Ennek mintájára irtuNk további programokat elgondolásunk 'igazolására' vagy kitalálására.

2.5 Nevezetes sorozatok

A sorozatok témájának hagyományos anyagához tartozik a számtani és a mértani sorozat. Ennek feldolgozása nem tekinthető nehéznek. A legegyszerübb esetekben a számolás gyorsitására használtuk fel a számitógépet. Ezt szemlélteti az 1. melléklet programja, amelyet a tanulók.

A sorozat rekurziv definiciójára ujabb példát ad a kulturtörténeti érdekességet, valóságos probléma megoldását jelentö Fibonacci-féle sorozat. A (8.) tankönyv 193. oldalán található definicióval ekvivalens - és a géppel könnyebben megvalósitható alakja - a következö:

A(0) = 0

A(1) = 1

A(N) = A(N-1)+A(N-2), ha N>=2.

Elsö pillanatban összetettnek, bonyolultnak tartották a tanulók, de néhány tag vizsgálata után több érdekes tulajdonságát is felfedezték. Ezt segitette az 5. program:

```
10 REM   5. program
20 CLS:PRINT''FIBONACCI-SOROZAT VIZSGALATA''
30 INPUT''HANYADIK TAGIG VIZSGALJAM'';V
```

```
40 DIM A(V)
50 A(1)=1:PRINT''A 1 ='',1
60 FOR N=2 TO V
70 A(N)=A(N-1)+A(N-2)
80 PRINT''A''N''='',A(N)
90 NEXT N
```

Ebben a programban indexes változót (tömböt vagy vektort) használtunk, emiatt a 40. sorban dimenzionálásra is szükség volt. Lényegesen kevesebb memóriaigénye van a 2. mellékletben szereplö programnak, az 5. programnak megvan viszont az az elönye, hogy a sorozat tulajdonságainak vizsgálatára is alkalmas. Ismét kihasználtuk, hogy RUN hatására A(0)=0. Ha V>=184, akkor tulcsordulás miatt 'OV ERROR IN 60' jelzéssel leáll a gép.

Példaként ellenöriztük, hogy érvényes-e a következö tulajdonság: A(1)é2+A(2)é2+....+A(N)é2=A(N)*A(N+1)! Ehhez az 5. program után az alábbiakat gépeltük be.

```
100 S=0
110 FOR N=1 TO V-1
120 S=S+A(N)*A(N)
130 NEXT N
140 PRINT''1é2+2é2+...+''A(V-1)''é2='' S
```

```
150 PRINT A(V-1)''*''A(V)''=''A(V-1)''*''A(V)
```

Ez a program V=93-ig jól müködik, s mindkét esetben ugyanazt az eredményt adja, erösitve ezzel azt az érzésünket, hogy a tulajdonságnak igaznak kell lennie. A RUN parancs begépelése után V=10 mellett a kijelzön az alábbiakat látjuk:

```
FIBONACCI - SOROZAT VIZSGALATA :
HANYADIK TAGIG VIZSGALJAM?  10
   A 1 =              1
   A 2 =              1
   A 3 =              2
   A 4 =              3
   A 5 =              5
   A 6 =              8
   A 7 =              13
   A 8 =              21
   A 9 =              34
   A 10 =             55

1é2 + 1é2 + 2é2 + ... + 34é2 = 1870
                   34 * 55 = 1870
```

Hasonlóan vizsgáltunk néhány további tulajdonságot, s utána be is bizonyitottuk sejtésünket.

2.6 Konvergens sorozatok

Ennek a témának a legnehezebb fogalmát, a sorozatok határértékének fogalmát alaposan elö kell késziteni. Ezért fontos feladatunk minél több példát vizsgálni. Láttuk, hogy a számitógép segithet ebben a sorozat tagjainak gyors felsorolásával, ami - a számábrázolás pontosságának a PRINT USING utasitással vagy más módon történö változtatásakor különösen - jól mutatja a konvergens sorozatok viselkedését. A szemünk elött 'játszódik le a jelenség': egyes sorozatok tagjai valamely N értéktöl kezdve 'egyenlöek', vagyis az elöre adott pontosságnál kisebb hibával közelitenek meg egy számot - s ez nagyobb pontosságnál 'késöbb' következik be.

Ilyen tulajdonságu sorozatokat a 3. programmal vizsgálva jól látszik, hogy a nagyobb indexü tagjai olyan mértékben torlódnak ábránkon, hogy a megfelelö pontok egybefolynak, illetve egybeesnek. Ennek szemléltetését szolgálja a 3. program 160. sora, amely az ábrázolás elött kioltja az aktuális pontot, s igy az adott helyen villogást látunk.

Ilyen volt a 2.3 pontban (46-48.oldal) vizsgált sorozatok közül az a), b), f), g), h), k). Továbbiakat a tankönyvben és a feladatgyüjteményekben találtunk.

Tekintsük példaként a következö sorozatot!

```
A(1) = SQR(2)
A(N) = SQR(2+A(N-1)), ha N>=2
```

Irassuk ki a sorozat tagjait a 2. programmal! Azt tapasztaljuk, hogy n>10 esetén minden tag 2. Ezt ugy kell értelmezni, hogy a sorozat 10-nél nagyobb indexü tagjai 0.000001 -nál kisebb eltéréssel közelitik meg a 2 -öt.

A 2. programot kis módositással arra is felhasználtuk, hogy a sorozat tagjainak az elöre megadott értéktöl való eltérését is kiirja. A 6. program ezt valósitja meg:

```
5  REM... 6. Program ...
10 CLS:INPUT''MIHEZ VISZONYITSAM'';A
15 PRINT''N'',''AN'',''A-AN''
20 N=1
30 AN=SQR(2+AN)
40 PRINT N,AN,AN-A
50 N=N+1
60 GOTO 30
```

Futtassuk a 6. programot!

```
MIHEZ VISZONYITSAM? 2

 N                     AN                    A-AN

 1                  1.41421              .585787

 2                  1.84776              .152241
 3                  1.96157              .0384293

 4                  1.99037              9.6302E-03

 5                  1.99759              2.40874E-03

 6                  1.9994               6.02126E-04

 7                  1.99985              1.50442E-04

 8                  1.99996              3.75509E-05

 9                  1.99999              9.29832E-06

 10                 2                    2.26498E-06

 11                 2                    3.57628E-07

 12                 2                   -2.38419E-07

 13                 2                    0
```

A PRINT USING utasitással kifejezőbb:

```
 1                   1.414                0.586

 2                   1.848                0.152

 3                   1.962                0.038

 4                   1.990                0.010

 5                   1.998                0.002

 6                   1.999                0.001

 7                   2.000                0.000

 8                   2.000                0.000

 9                   2.000                0.000
```

A második megjelenités három tizedes pontossággal vizsgálta a számokat. Ezt a kivánt 'tetszöleges' pontossággal is megvalósitottuk a 6. program átalakitásával. Igy adódott a 7. program:

```
5  REM... 7. program ...
10 CLS:INPUT''MIHEZ VISZONYITSAM A TAGOKAT'';A
12 INPUT''HANY TIZEDES PONTOSSAGIG KéRI(MAX.6)'';P
13 PA=''######.''+STRINGA(P,''#'')
15 PRINT''N'',''      AN'',''   ABS(AN-A)''
20 N=1
30 AN=SQR(2+AN)
40 PRINT N,
42 PRINT USING PA;AN;:PRINT
44 PRINT USING PA;ABS(AN-A)
50 N=N+1
60 GOTO 30
```

A 7. program 12. sorában kérjük be a pontosságot, a 13. sorban pedig a kiirási formátumot definiáljuk. Továbbra is a 30. sorba kell beirni a vizsgálandó sorozat általános tagját 'AN=F(N)' formában vagy rekurziv módon.

Legyen most AN=Né(1/N), futtassuk a 7. programot!

MIHEZ VISZONYITSAM A TAGOKAT? 1

HANY TIZEDES PONTOSSAGIG KéRI? 2

N	AN	ABS(AN-A)
1	1.00	0.00
2	1.41	0.41
3	1.44	0.44
4	1.41	0.41
5	1.38	0.38
6	1.35	0.35
7	1.32	0.32
.		
.		
201	1.03	0.03
202	1.03	0.03
203	1.03	0.03
204	1.03	0.03
.		
.		
501	1.01	0.01
502	1.01	0.01
503	1.01	0.01
504	1.01	0.01
.		
.		

Néhány sorozatot hasonlóan vizsgálva eljutottunk a határérték alábbi definiciójához:

Az 'A' számot az (An) sorozat határértékének nevezzük, ha bármely E>0 számhoz található olyan K szám, hogy N>K esetén ABS(An-A)<E

Az olyan sorozatot, amelynek van határértéke, konvergens sorozatnak nevezzük. A konvergens sorozat tagjai tehát valamilyen számot - a határértéket - az eddigiekben látott módon tetszöleges pontossággal megközelitenek. Ez azt is jelenti, hogy az 'A' szám bármely E>0 sugaru környezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak, s csak véges számu (az elsö K db.) marad ki.

Ilyen bevezetés után a diákok jól látják, hogy konvergens sorozatoknak van torlódási pontja, és csak egy van. Az ábrázolás is hozzásegit a környezetes definició és a 'bármely E>0 -hoz van olyan K' kifejezés igazi tartalmának megértéséhez, amely az analizis további eredményes tanitásához nélkülözhetetlen.

Szinte önkéntelenül vetödött fel a sok hasznos tanácsot és ötletet tartalmazó tanári kézikönyvben is megtalálható tétel (lásd (9.) 182-183. oldal):

Ha A(N) --> A, akkor A(N+1)-A(N) --> 0.

Ez a tétel az A(N) konvergenciájának csak szükséges,de nem elegendö feltétele (lásd (9.)), mégis jól használható tulajdonság a konvergencia vizsgálatakor, hiszen ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem lehet konvergens a sorozat.

A 8. program elve is éppen a most emlitett tételen alapszik. Igen hasznos olyan esetekben is, amikor nem tudjuk elöre a kérdéses határértéket.
Lássuk a 8. programot!

```
5  REM .... 8. Proram ....
10 CLS:PRINT''HATARéRTéK MEGSEJTéSE:''
20 N=1
30 AN=SQR(2+AN)
33 AN=INT(AN*10é4+0.5)/10é4
35 IF AN=BN THEN E=E+1 ELSE E=0
40 PRINT''A'';N;''='',AN
50 N=N+1
55 IF E=5 THEN 65
60 GOTO 30
65 PRINT : PRINT''SEJTéS: '';
70 PRINT''A HATARéRTéK :'';AN
```

Ez - az eddigiekhez hasonlóan - ismét egy keret program, továbbra is a 30. sorba kell begépelni a sorozat általános AN tagját. A BN változó segitségével mentjük az AN értékét, tehát BN kezdetben 0, majd az (N-1) -edik tagot jelenti.

A 33. sor biztositja AN négy tizedes pontosságu értékét. A 35. sor hasonlitja össze az N -edik és az (N-1) -edik tagot, ha ezek 'egyenlöek' (4 tizedes pontossággal), akkor növeli E értékét eggyel. Ha egymás után öt tag 'egyenlö' (E=5 teljesülését az 55. sorban vizsgáljuk), akkor a sejtés: ez az érték a határérték. A tippet természetesen ellenörizni, matematikailag bizonyitani kell. Ennek két fö oka is van: egyrészt a teljesült feltétel nem elégséges, másrészt a közelités és a pontatlan számábrázolás miatt elöforduló hiba becsaphat bennünket.

A 8. programot használva további sorozatokra, azonnal felvetödik a konvergencia-sebesség kérdése is. Például az AN=1/N sorozat tulságosan lassan konvergál nullához, ezért a szomszédos tagok hosszas vizsgálata után adnak csak 'határértéket', s az is ellenörzésre szorul (6 tizedes pontosság mellett a 968 -adik tag után adódik 1.033E-03).

További vizsgálatokat, a kisérletezésre biztatást és a számitástachnikai ismereteknek a matematikával történö vegyitését találhatjuk (10.) -ben. Ebböl a tanulók szintjétöl függöen válogathatunk.

Most olyan továbbfejlesztéseket nézünk, amelyeket a tanulókkal megvalósitottunk:

a) Lassan változó sorozatok vizsgálatakor célszerübb az indexet nagyobb mértékben változtatni. Pl.

```
50 N=N+100  vagy   50 N=N*2
```

b) Nem szükséges mindig 4 tizedes pontossággal számoltatni. Irjuk be:

```
25 INPUT''HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK(MAX.6)'';P
```

Továbbá a 33. sorban a 4 -es kitevö helyett irjunk mindenütt P -t.

c) Szemléletesebb, ha a 8. programot összeépitjük a 3. programmal és ábrázoltatjuk is a sorozat vizsgált tagjait.

d) Monotonitás szempontjából is véleményt kérhetünk a vizsgált tagok sorozatáról.

e) Emlékeztetöül érdemes kiiratni a vizsgált sorozat általános tagját, amit legegyszerübben a következöképpen tehetünk:

```
75 PRINT''A BEIRT SOROZAT:'';:LIST 30
```

f) Az érdeklödöbb tanulók bevonásával olyan programot is irtunk, amely az emlitett adatokat, söt az AN képletet is futás közben kéri be. Ehhez a BASIC program tárolási módját, a POKE utasitást és müveleti jelek, függvények tokenjait is ismerni kellett.

A sokoldalu vizsgálatot végzö, kényelmesen kezelhetö 9. program a fentiek alapján született. Listáját a 3. mellékletben láthatjuk. Ebben a 10 - 400. sorok valósitják meg a megfelelö kepletek beirását. Ezt a 4. mellekletben szereplö 10. program máskent valósitja meg. Programozástechnikailag sokkal egyszerübb igy, s ugyanugy felhasználható a sorozatok vizsgálatára.

Mivel a felhasználónak kell begépelnie a vizsgálandó sorozat általános tagját, az index változtatásának mértékét és a kivánt pontosságot, ezért a gép a megadott feltételek mellett végez vizsgálatot, és ha azok jók, akkor a közölt megállapitások, sejtések közel állnak az igazsághoz. éppen ez okozza a tanulók határtalan aktivitását és lelkesedését. Mindez nem pótolja, hanem általában megelözi és kiegésziti az egzakt matematikai bizonyitást.

Célszerü olyan sorozatokat is vizsgáltatni, amelyeknek tagjait a számitógép a pontatlan számábrázolás miatt hibásan határozza meg (pl. ha hatványozás szerepel), és ezért hamis sejtést közöl.

Hasznos volt az

AN=(1+1/N)éN

sorozat vizsgálata. Ha a 8. programot a b), c), d) és e) pontban irt továbbfejlesztés után alkalmazzuk és két tizedes pontosságot választunk, a program jól müködik, határértéknek 2.67 -et tippel.

Három tizedesre pedig 2.703 a tipp. Ha négy tizedest kivánunk meg, akkor a jóslata (2.7115) jobban megközeliti az Euler-féle számot, de lassan jut el oda.

Gyorsithatunk azáltal, hogy az 50. sorba N=N*2 -t gépelünk. Nagy meglepetésünkre például 3 tizedes pontosság esetén a sorozat tagjai 3.364 -ig nönek, majd hirtelen 1 -re csökkennek. Ezt a rakoncátlan viselkedést grafikusan jól követhetjük.

A jelenség érthetö is, hiszen az 1+1/N helyett a gép elegendöen nagy N mellett 1 -et vesz, elötte pedig a kerekités hibája befolyásolja munkáját.

A 9. programmal vizsgálva a 67 - 70. oldalak adódnak.

A 9. program kis módositással rekurziv sorozatokra is alkalmas, sokkal egyszerübb azonban ezt a 10. program alapján vizsgálni, amely az A(1)=SQR(2)
A(N)=SQR(A(N-1)+2)

sorzatra a 71. oldalon találhatókat adja.

```
A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   N
AN=? (1+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   N
N=? N+1

HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM? 1
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 2
A 1 =                   2.00
A 2 =                   2.25
A 3 =                   2.37
A 4 =                   2.44
A 5 =                   2.49
 :                      :
A 16 =                  2.64
A 17 =                  2.64
A 18 =                  2.65
A 19 =                  2.65
A 20 =                  2.65
A 21 =                  2.66
A 22 =                  2.66
A 23 =                  2.66
A 24 =                  2.66
A 25 =                  2.67
A 26 =                  2.67
A 27 =                  2.67
A 28 =                  2.67
A 29 =                  2.67
KÖZÖLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?

A VIZSGALT  29  TAG KÖZÜL
   A LEGKISEBB  :       2.00
   A LEGNAGYOBB :       2.67

AZ A SEJTéSEM, HOGY
   A SOROZAT  MONOTON NÖVÖ,
   HATARéRTéKE:         2.67

ABRAZOLVA:
```

```
AZ ALUL JELZETT éRTéK:       2.67
ELLENÖRIZD A MEGALLAPITASOKAT !
A VIZSGALT SOROZAT :  AN=(1+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA :    N=N+1
```

```
A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   I
AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   I

HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM? 1
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 3
A 1 =                     2.000
A 2 =                     2.250
A 3 =                     2.370
A 4 =                     2.441
A 5 =                     2.488
  .                         .
  .                         .
A 67 =                    2.698
A 68 =                    2.699
A 69 =                    2.699
A 70 =                    2.699
A 71 =                    2.699
A 72 =                    2.700
A 73 =                    2.700
A 74 =                    2.700
A 75 =                    2.700
A 76 =                    2.701
A 77 =                    2.701
A 78 =                    2.701
A 79 =                    2.701
A 80 =                    2.701
KÖZÖLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?   I

A VIZSGALT  80  TAG KÖZÜL
   A LEGKISEBB  :      2.000
   A LEGNAGYOBB :      2.701

AZ A SEJTéSEM, HOGY
   A SOROZAT  MONOTON NÖVÖ,
   HATARéRTéKE:       2.701

ABRAZOLVA:
```

```
AZ ALUL JELZETT éRTéK:       2.701
ELLENÖRIZD A MEGALLAPITASOKAT !
A VIZSGALT SOROZAT :  AN=
AZ INDEX VALTOZASA :   N=
```

```
A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   I
AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   I

HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM? 1
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 4
A 1 =                  2.0000
A 2 =                  2.2500
A 3 =                  2.3704
A 4 =                  2.4414
A 5 =                  2.4883
 .                       .
 .                       .
A 187 =                2.7110
A 188 =                2.7111
A 189 =                2.7112
A 190 =                2.7112
A 191 =                2.7110
A 192 =                2.7112
A 193 =                2.7113
A 194 =                2.7113
A 195 =                2.7114
A 196 =                2.7113
A 197 =                2.7115
A 198 =                2.7113
A 199 =                2.7115
A 200 =                2.7115
KÖZÖLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?   I

A VIZSGALT  200  TAG KÖZÜL
   A LEGKISEBB  :       2.0000
   A LEGNAGYOBB :       2.7115

AZ A SEJTéSEM, HOGY
   A SOROZAT NEM MONOTON
   HATARéRTéKE:        2.7115

ABRAZOLVA:
```

```
AZ ALUL JELZETT éRTéK:       2.7115
ELLENÖRIZD A MEGALLAPITASOKAT !
A VIZSGALT SOROZAT :  AN=(1+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA :   N=N+1
```

```
A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   I
AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   N
N=? N*2

HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM? 1
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 3
A 1 =                     2.000
A 2 =                     2.250
A 4 =                     2.441
A 8 =                     2.566
A 16 =                    2.638
A 32 =                    2.677
A 64 =                    2.697


A 16384 =                 2.714
A 32768 =                 2.716
A 65536 =                 2.716
A 131072 =                2.723
A 262144 =                2.650
A 524288 =                2.828
A 1.04858E+06 =           2.828
A 2.09715E+06 =           3.084
A 4.1943E+06 =            3.364
A 8.38861E+06 =           1.000
A 1.67772E+07 =           1.000
A 3.35544E+07 =           1.000
A 6.71089E+07 =           1.000
A 1.34218E+08 =           1.000
KÖZÖLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?   I

A VIZSGALT  28  TAG KÖZÜL
   A LEGKISEBB  :      1.000
   A LEGNAGYOBB :      3.364

AZ A SEJTéSEM, HOGY
   A SOROZAT NEM MONOTON
   HATARéRTéKE:       1.000

ABRAZOLVA:
```

```
AZ ALUL JELZETT éRTéK:      1.000
ELLENÖRIZD A MEGALLAPITASOKAT !
A VIZSGALT SOROZAT :  AN=(1+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA :   N=N*2
```

A rekurziv sorozatot vizsgáló 10. program futása:

```
GéPELD BE AZ ADATOKAT A KÖVETKEZÖK SZERINT!

A 200 -AS SORBA A SOROZAT ELSÖ ELEMéT,
A 210 -ES SORBA AZ N -EDIK ELEMET,
A 270 -AS SORBA PEDIG A LéPéSKÖZT!
PéLDAUL:200 A1=1
        210 AN=1/N    VAGY  210 AN=SQR(AN+2)
        280 N=N+1     VAGY  280 N=N*2

EZEK UTAN A    RUN 100   PARANCCSAL INDITHATSZ!

HA A BEIRT ADATOKKAL KIVANOD FUTTATNI,
AKKOR A   CONT  PARANCSOT GéPELD BE!
Break in 90
READY
>_


>200 A1=SQR(2)
>210 AN=SQR(2+AN)
>280 N=N+1
>RUN100
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 5
A 1 =                  1.41421
A 2 =                  1.84776
A 3 =                  1.96157
A 4 =                  1.99037
A 5 =                  1.99759
A 6 =                  1.99940
A 7 =                  1.99985
A 8 =                  1.99996

A 9 =                  1.99999
A 10 =                 2.00000
A 11 =                 2.00000
A 12 =                 2.00000
A 13 =                 2.00000
A 14 =                 2.00000

A SEJTéS : A VIZSGALT ELEMEK SOROZATA
                       MONOTON NÖ.

          A HATARéRTéK :      2.00000

VIZSGALD MEG, HOGY IGAZ - E!

READY
>_
```

2.8 Müveletek sorozatokkal, a PI közelitése

A sorozatok témájának bevezetésekor (a 2.3 -ban) már szerepeltek olyan elöremutató kérdések, amelyek a sorozatokkal végzett müveletek vizsgálatát készitették elö.

érdekesnek tartották a tanulók a következö sorozattal való okoskodást:

Legyen A(1)=0

A(2)=SQR(2)

A(3)=SQR(2+SQR(2))=SQR(2+A(2))

.

.

A(N)=SQR(2+A(N))

.

.

Láttuk, hogy ez a sorozat konvergens, a határértéke 2. (A 71. oldalon látható, hogy a 10. programmal vizsgálva is ez a sejtés adódott.)

Legyen továbbá

B(1)=0

B(2)=2-A(1)

B(3)=2-A(2)

.

.

B(N)=2-A(N-1)

.

.

A 10. program alkalmas kiegészitése után vizsgálva a (B(N)) sorozatot megállapithatjuk, hogy határértéke 0, de érhet bennünket meglepetés, ha nem vagyunk eléggé óvatosak.

Tekintsük ezek után a 9. tankönyv 215-216. oldalán szereplö sorozatot, amelynek N -edik tagja a körbe irt 2éN oldalu sokszög kerületét adja meg!

Ekkor K(1)=0

K(2)=2é2*SQR(2)

K(3)=2é3*SQR(2-SQR(2))

K(4)=2é4*SQR(2-SQR(2+SQR(2)))

K(5)=2é5*SQR(2-SQR(2+SQR(2+SQR(2))))

.

.

Könnyen látható, hogy az eddigiek alapján:

K(1)=0

K(2)=2é2*SQR(B(2))=2é2*SQR(2-A(1))

K(3)=2é3*SQR(B(3))=2é3*SQR(2-A(2))

.

.

K(N)=2éN*SQR(B(N))=2éN*SQR(2-A(N-1))

Mivel (K(N)/2) sorozat éppen a PI -hez konvergáló sorozat, ezert igy a PI egy közelitését valósithatjuk meg.

Ennek számitógépes vizsgálatát a 10. program alkalmas átalakitásával nyert 11. programmal végeztük, amelynek listája az 5. mellékletben látható.

Futtassuk 2 tizedes pontossággal. Határértékül valóban a PI egy közelitése adódik (3.14). Ha azonban 3 tizedes pontosságot követelünk meg, akkor az eredmény megdöbbentö.

Nézzük, hogy mit láttunk a kijelzön!

```
PI KÖZELITéSE A  ( K(N) ) SOROZATTAL
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6 JEGY)? 2
K 2 / 2 =              2.83
K 3 / 2 =              3.06
K 4 / 2 =              3.12
K 5 / 2 =              3.14
K 6 / 2 =              3.14
K 7 / 2 =              3.14
K 8 / 2 =              3.14
K 9 / 2 =              3.14
A SEJTéS :       A VIZSGALT ELEMEK SOROZATA
     MONOTON NÖ.
           A HATARéRTéK :       3.14
VIZSGALD MEG, HOGY IGAZ - E!
READY
>

HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6 JEGY)? 3
K 2 / 2 =              2.828
K 3 / 2 =              3.061
K 4 / 2 =              3.121
K 5 / 2 =              3.137
K 6 / 2 =              3.140
K 7 / 2 =              3.141
K 8 / 2 =              3.141
K 9 / 2 =              3.140
K 10 / 2 =             3.137
K 11 / 2 =             3.122
K 12 / 2 =             3.082
K 13 / 2 =             2.449
?FC Error in 205
READY
>
```

Az 'FC Error' nem megengedett függvényutasitást jelent. Ekkor a 'PRINT AN' parancsra '2' -öt, a 'PRINT 2-AN' parancsra pedig '-2.38419E-07' értéket mutat a számitógép, s mivel az SQR(X) függvény negativ X -re nincs értelmezve, teljesen érthetö a gép viselkedése.

Egyik tanuló javaslatára kipróbáltuk ugy is a 11. program müködését, hogy nem csak a 'KN' értékét, hanem az 'AN' -t is az elöirt pontosságra kerekitettük. Ehhez begépeltük a 11. programba a következöt:

```
215 AN=INT(AN*10éP)/10éP
```

Futtassuk igy is! Az ábra önmagáért beszél!

```
PI KÖZELITéSE A  ( K(N) ) SOROZATTAL
HANY TIZEDESIG SZÁMOLJAK (MAX.6 JEGY)? 3
K 2 / 2 =             2.828
K 3 / 2 =             3.062
K 4 / 2 =             3.119
K 5 / 2 =             3.119
K 6 / 2 =             3.200
K 7 / 2 =             3.506
K 8 / 2 =             4.048
K 9 / 2 =             0.088
K 10 / 2 =            0.177
K 11 / 2 =            0.354
K 12 / 2 =            0.707
K 13 / 2 =            1.414
K 14 / 2 =            2.828

K 15 / 2 =            5.657
K 16 / 2 =           11.314
K 17 / 2 =           22.627
K 18 / 2 =           45.255
K 19 / 2 =           90.510
K 20 / 2 =          181.019
K 21 / 2 =          362.038
K 22 / 2 =          724.078
K 23 / 2 =         1448.150
K 24 / 2 =         2896.310
```

Ilyen jellegü feladatokkal azért is érdemes foglalkozni, mert igy a számitógépek alkalmazásának lehetöségei mellett a korlátait is bemutathatjuk.

A 8. tankönyvben a 216. oldalon néhány további sorozat is szerepel a PI közelitésére. A 12. program a három módon adódó közelités eredményét hasonlitja össze. (A 12. program listája a 6. mellékletben található.)

Futtassuk a 12. programot!

```
PI közelitese:

    a) Közelites:
          1     1     1               N+1      1
4 * ( 1 - --- + --- - --- +...+ (-1)     * ----- +...) ---> PI
          3     5     7                    2*N-1
    b) Közelites:
                1     1          1
SQR ( 6 * ( 1 + --- + --- + ... + --- ) ) ---> PI
                2é2   3é2        Né2
    c) Közelites:
        2   2   4   4   6   6         2*N     2*N
2 * ( - * - * - * - * - * - * ... * ----- * ----- ) ---> PI
        1   3   3   5   5   7       2*N-1   2*N+1

MEHET? I_
```

N	a) eset	b) eset	c) eset
1	4	2.44949	2.66667
2	2.66667	2.73861	2.84445
3	3.46667	2.85774	2.92572
4	2.89524	2.92261	2.97216
5	3.33968	2.96339	3.00218
6	2.97605	2.99138	3.02317
488	3.13955	3.13964	3.13999
489	3.14364	3.13964	3.14
490	3.13955	3.13965	3.14
491	3.14363	3.13965	3.14

A tehetségesebb diákok szivesen forgatták a szakköri füzeteket (pl. (12.)), közelitö- és gyakorlati számitásokat tartalmazó könyveket (pl. (13.)). Különösen nagy érdeklödéssel tanulmányozták a HT iskolaszámitógéphez kapcsolódó cikkeket (pl. (14.), (15.)). A tanórán is kamatoztatták az igy szerzett ismereteiket.

A tanulók bizonyitási készségének fejlesztésére nemcsak a tankönyvekben, hanem a 9. tanári kézikönyvben is találunk szép feladatokat (pl.:195-222.oldalon). Nehezebb problémák megoldásakor gyakran megelégszünk speciális eset bizonyitásával, s legfeljebb addig megyünk el, hogy 'hihetöbbé' tegyük az általánost is.Igy jártunk el a szukcesszív appriximációval való gyökvonás esetében is.

Az n=2 eset bizonyitását a 9. kézikönyv 211-214. oldalán láthatjuk, az n -edik gyök közelitésére (n>2) képzett sorozat konvergenciáját és használhatóságát számitógéppel vizsgálva tettük 'hihetövé'.

Ehhez irtuk meg a 13. programot. Ebben AE jelenti az A szám közelitö gyökének elözö értékét (ez kezdetben nálunk A), AU pedig a közelitö gyök uj értéke.

A program lényegét a 80. sor adja, a 100. a kiirást, a 110. a lapozást biztositja. Az AU értékek sorozatának konvergenciáját jól szemlélteti a program.

Nézzük a 13. program listáját és futását!

```
5 '..........13. program............................

10 '      N-edik gyök vonása

20 PRINT"N -EDIK GYOK SZUKCESSZIV APPROXIMACIOVAL"
30 PRINT"A KéPLET:  AU=(A+(N-1)*AEéN)/(N*AEé(N-1))
40 INPUT"MELYIK SZAMBOL VONJAK GYOKOT";A
50 INPUT"HANYADIK GYOKOT VONJAK";N
60 IF A<0 THEN 40
70 AE=A:I=0
80 AU=(A+(N-1)*AEéN)/(N*AEé(N-1))
90 I=I+1
100 PRINT I;". LéPéS  ";AU
110 AE=AU:IFI/10<>INT(I/10)THEN80
120 PRINT"MEHET TOVABB  (I/N) ?";
130 AR=INKEYR:IFAR="I"THEN CLS:GOTO 80
140 IFAR<>"N"THEN130
150 END


>RUN
N -EDIK GYOK SZUKCESSZIV APPROXIMACIOVAL
A KéPLET:  AU=(A+(N-1)*AEéN)/(N*AEé(N-1))
MELYIK SZAMBOL VONJAK GYOKOT? 1000
HANYADIK GYOKOT VONJAK? 3
 1 . LéPéS   666.667
 2 . LéPéS   444.446
 3 . LéPéS   296.299
 4 . LéPéS   197.536
 5 . LéPéS   131.699
 6 . LéPéS   87.8189
 7 . LéPéS   58.5892
 8 . LéPéS   39.1566
 9 . LéPéS   26.3218
 10 . LéPéS   18.029
MEHET TOVABB  (I/N) ?


 11 . LéPéS   13.0448
 12 . LéPéS   10.6554
 13 . LéPéS   10.0395
 14 . LéPéS   10.0002
 15 . LéPéS   10
 16 . LéPéS   10
 17 . LéPéS   10
 18 . LéPéS   10
 19 . LéPéS   10
 20 . LéPéS   10
```

3. Függvények folytonossága, határértéke

Ezt a témát néhány ismertebb függvény vizsgálata utján a függvénytani fogalmak felelevenitésével kezdtük, majd összetettebb, érdekesebb példákat tekintettünk. Otthoni munkára függvények jellemzését, grafikonok készitését kapták a tanulók. Mivel a sorozatok témájában közelebb kerültek a számitógépekhez, némi gyakorlatra is szert tettek, igy többen rajzoltatták fel a géppel a vizsgált függvények grafikonját.
A tanulók nagy része egyszerü keret programmal oldotta ezt meg, az ügyesebbek arra is gondoltak, hogy ne legyen 'ERROR' (képernyövédelem is szükséges), söt a teljes képernyö kitöltésére is törekedtek (megfelelö normálással).

A 7. mellékletben szereplö 14. program futás közben kéri be a függvény képletét (Y=F(X) alakban) és az intervallumot. Ezután gondoskodik a program arról, hogy 'X' irányban és 'Y' irányban egyaránt kitöltse a képernyöt a grafikon, s ne lépjen ki belöle. Az ábrázolás után pedig -ha szükséges- a koordinátatengelyeket is a megfelelö helyre illeszti.

Ezt a programot folytonossági, differenciálási és integrálási feladatok megoldásakor egyaránt jól használhatjuk annak ellenére, hogy a 'HT' grafikája nem éppen dicséretes.

A sorozatokra, a közelitö számitásra és a pontosságra forditott többlet- energia eredményezhette a folytonosság fogalmának könnyebb megértését. Mindkét definiciót jól használták, de gyakrabban próbálták használni a Heine-féle 'környezetes' definiciót.

A függvény határértékének fogalmát is könnyen elsajátitották, különösen a végtelenben vett határértéket. A korábban használt határértéket sejtö program kis átalakitással használható volt ebben a témában is. Gyakran ellenörizték a tanulók eredményeiket (pl. a házi feladatot az óra elején) a 14. program alapján, ábrázolással.

4. A derivált

Az eddigiekben olyan elöremutató feladatok is szerepeltek, amelyek lényegében a különbségi hányados határértékének meghatározását kivánták. A korábbi tapasztalatok, a fizikai jelentés és a geometriai szemléltetés alapján könnyen kialakitottuk a derivált fogalmát.

Ebben a témában mind a fogalom kialakitásában, mind alkalmazásokban használtuk a számitógépet. A grafikus lehetöségével sokoldaluan szemléltettük a kitüzött problémát. Legtöbbször a függvények ábrázolására szolgáló 14. programot használtuk, néha több grafikon együttes megjelenitését is megoldottuk. Hasznos volt például a függvény, az elsö és második deriváltjának összesitett grafikonja, ami jól szemléltette a függvény menetének és a deriváltaknak a kapcsolatát.

Természetesen arra is felhasználtuk a gépet, hogy az adott helyen keresett differenciálhányados értékére egy közelitést adjon, ahogy ezt a sorozat és függvény határértékénél is megtettük.

Itt is - ahogy eddig - felváltva használtuk a tankönyvben is megtalálható két definiciót, a géppel inkább a sorozatokra épülöt alkalmaztuk. Igy az F X0 pontbeli differenciálhatóságát (F(XN)-F(X0))/(XN-X0) különbségihányados - sorozat vizsgálatával végezhetjük. (ahol XN --> X0 , XN <> X0). Ekkor azt kell megmutatni, hogy b á r m e l y ilyen (XN) sorozatra konvergens a különbségi hányadosok sorozata.

Egy-egy ilyen (XN) sorozatra a számitógéppel könnyen meghatározhatjuk 'a megkivánt pontossággal' a derivált értékét az X0 pontban, ha létezik. Ezt valósitja meg a 15. program, amelynek elve a következö:

Legyen (HN) egy nullsorozat (HN --> 0 , HN<>0), ekkor az XN = X0 + HN sorozat rendelkezik a kivánt tulajdonsággal (XN --> X0, XN<>X0). Vizsgáljuk ezek után ezzel az (XN) sorozattal a különbségihányodos-sorozatot! Ha az F függvény az X0 helyen differenciálható, akkor az X0 pontbeli differenciálhányados csak az elözö XN -nel felirt különbségi hányadosok sorozatának határértékeként is adódó érték lehet.

Lássuk a 15. programot!

```
5 REM...........15. program.....................
10 GOTO  40
20 Y=X-X*X*X:RETURN

30 H=H/(-7):RETURN

40 DEFDBL X,Y,H
50 INPUT"AZ INTERVALLUM : A,B=";A,B
60 INPUT"A KéRDéSES HELY : X0=";X0
70 IF X0<=A OR X0>=B OR A>B THEN 50
80 PRINT:PRINT" N"," X"," D"
90 X=X0
100 GOSUB 20:Y0=Y
110 N=0:I=0:H=1
120 GOSUB 30
130 N=N+1
140 X=X0+H
150 IF X<A OR X>B THEN PRINT"MAS ADATOKAT!":
    GOTO 50
160 GOSUB 20
170 D=(Y-Y0)/(X-X0)
180 IF D1=D THEN I=I+1 ELSE D1=D
190 IF I=3 OR ABS(X-X0)<.01é3 THEN 230
200 X!=X
210 PRINT N,X!,D
220 GOTO 120
230 PRINT:
    PRINT"A DIFFERENCIALHANYADOS AZ X0=";X0;
    "HELYEN:";D
240 END



>RUN
AZ INTERVALLUM : A,B=? -1.3,1.3
A KéRDéSES HELY : X0=? .5

 N                X                D
 1                .357143          .443878
 2                .520408          .218971
 3                .497085          .254365
 4                .500417          .249375
 5                .499941          .250089
 6                .500009          .249987
 7                .499999          .250002

A DIFFERENCIALHANYADOS AZ X0= .5 HELYEN: .25
READY
>_
```

Ismételten hangsulyozni kell, hogy egyrészt egy konkrét XN sorozattal adódó határérték még nem bizonyitja a differenciálhatóságot, másrészt közelitö értékek különbségével kell osztást végeznünk,s ez-mint láttuk - rendkivül veszélyes. Ezek miatt a bizonyitás és diszkutálás folyamatosan szükséges: állandóan el kell dönteni a gép állitásairól, hogy hamisak -e, vagy igazak. Ujabb és ujabb ötletek szükségesek az esetleges relytélyek számitástechnikai vagy matematikai tisztázásához. Ez tartósan biztositja aktivitásukat és fejleszti képességeiket, szemléletüket.

A 15. program irását folytattuk: a 'SEJTÉS' után a megfelelö intervallumban a grafikont is felrajzoltatjuk. Ezt valósitja meg a 16. proram, amely a 8. mellékletben látható.

Függvények diszkutálásánál és szélsöérték-feladatok megoldásánál is nagy szeretettel használták a tanulók a számitógépet egy-egy vitatott megállapitás 'tisztázásához'.

5. Az integrál

A középiskolai analizis tanitása során az integrál fogalmát egy geometriai jelentésére, a területre hivatkozva alakitjuk ki. A (17.) tankönyv szerint haladva is a területszámitással kezdhetjük a témát, majd az alsó és felsö közelitöösszeg - a télalapok területeinek összege - fogalmának bevezetése és a kétoldali közelités módszerének felelevenitése után könnyen megértik a tanulók a Riemann-integrálnak a (17.) tankönyvben is szereplö definicióját.

Ebben a témában is használtuk a számitógépet. A grafikus szemléltetés a területszámitás idején volt kólönösen hasznos.

A határozott integrál értékének definició szerinti meghatározása két probléma megoldását jelenti. Egyrészt fel kell irni az alsó és felsö közelitö összeget az 'N' függvényeként, majd zárt alakra kell hozni - ha sikerül, másrészt vizsgálni kell az igy elöállitott közelitöösszegek sorozatát. A tanulókkal azonban éreztetni kell, hogy a valóságban a zárt alakban kiszámitható integrálok csak egy kis hányadát alkotják az összes integrálnak.(pl. sin(x)/x a 0 és PI határok között sem számitható ki zárt alakban).

A gyakorlatban elegendö egy bizonyos pontossággal meghatározni az integrál értékét, kézenfekvö tehát a numerikus integrálással, az 'elöre adott pontossággal' történö közelitéssel foglalkozni. Ebben ismét hatékonyan segit a számitógép. A (17.) tankönyv 70-72. oldalán szereplö közelitések alapján egy-egy programot irtak a tanulók, s ezt összefüztünk. Igy született a 17. program, amelyet a 9. mellékletben láthatunk.

Tanulmányoztuk a közelitések hibáját, a konvergencia sebességét is. Ezt a vizsgálatot könnyitette meg a 17. program átalakitásával. A módositást el lehet képzelni, ezért csak a futását szemléltetjük:

```
AZ INTEGRAL KOZELITO SZAMITASA
==================================

A FUGGVENY AZ 500-AS SORBAN VAN!

Az also es felso hatar(A,B)? 1,2

2*N RESZRE OSZTOM AZ INTERVALLUMOT.
     N  erteke kezdetben? 1
     mennyivel valtozzon? 1
     meddig  valtozzon  ? 10_

 2*N          TEGLALAP-M. TRAPEZ-M.    ERINTO-M.    SIMPSON-F.
 2            .919483     .93644       .997495      .956792
 4            .942984     .951463      .966485      .95647
 6            .948522     .954234      .960892      .956453
 8            .950964     .955204      .958944      .95645
 10           .952261     .955652      .958045      .95645
 12           .95307      .955896      .957557      .95645
 14           .95362      .956043      .957263      .956449
 16           .954018     .956138      .957072      .956449
 18           .954319     .956203      .956941      .956449
 20           .954554     .95625       .956848      .956449
FOLYTATJUK?
```

A végtelen sorok tananyaga szervesen illeszkedik a sorozatok témájához éppugy, mint az integrálhoz. Mivel a végtelen sor konvergenciáját a részletösszegek sorozatának konvergenciájára vezetjük vissza, lényegében az eddigi számitógépes programokat is felhasználhatjuk. A 2. programnak megfelelö programot rövid idö alatt irtak a tanulók. Néhány sor begépelése után - keretprogramként használva - elösegitette a vizsgálatot. Ilyen a 18. program.

```
500 '........18. program..................
510 ' VéGTELEN SOROK VIZSGALATA
520 N=0:SN=0
530 CLS : PRINT" N"," AN"," SN"
540 N=N+1
550 AN=1/N/N
560 SN=SN+AN
570 PRINTN,AN,SN
580 IF N/14<>INT(N/14)  THEN 540
590 IF INKEYR<>"" THEN530 ELSE590
```

N	AN	SN
1	1	1
2	.25	1.25
3	.111111	1.36111
4	.0625	1.42361
5	.04	1.46361
6	.0277778	1.49139
7	.0204082	1.5118
8	.015625	1.52742
9	.0123457	1.53977
10	.01	1.54977
11	8.26446E-03	1.55803
12	6.94445E-03	1.56498
13	5.91716E-03	1.57089
14	5.10204E-03	1.576

A tanév végén ehhez hasonló programot - alkalmas tananyaghoz - valamennyi tanulóképes volt irni.

Az eddigiekből kitünt, hogy elsösorban mindennapos segédeszközként alkalmaztuk a számitógépet, s nem volt célunk minél sokrétübben használni - esetleg olyankor is, amikor nem segitette volna a tervezett anyag feldolgozását.

Nem tul gyakran készitettünk folyamatábrát, de összetettebb algoritmusok szemléltetésére feltétlenül szükségesnek tartjuk, bár ennek bemutatására nem került sor.

Tapasztalataink szerint a számitástechnikai müveltséget leghatásosabban a számitógéppel történö tevékenység közben lehet terjeszteni, ezért erre összpontositottuk figyelmünket.

Ebben a dolgozatban egy lehetöséget mutattunk be a számitógépek oktatási felhasználására, amely a fejlödés és a feltételek adott szintjén napjainkban megvalósitható. Elötérbe került a számolásban történö felhasználása, és a grafikus szemléltetés, de ismételten hangsulyozni kell, hogy ennél többre hivatottak.
A számitástechnikai eszközök és ismeretek alkalmazása felgyorsitja a 70-es évek végén megindult korszerüsitési folyamatot. (24.)
A számitógépeket nem tekintjük csodaszernek. Tudjuk,

hogy a matematikatanitásban csak kitartó, folyamatos munkával érhetünk el eredményt. Tapasztaltuk viszont azt is, hogy ha átgondoltan illesztjük be a tanitási-tanulási folyamatba a számitógépes foglalkozásokat, akkor hatékonyabbá tehetik az oktatást.

F e l h a s z n á l t   i r o d a l o m

(1.) Papp Sándor: A számitógépek alkalmazásának lehetőségei az egyes tantárgyakban.
Audiovizuális közlemények, 1985. 5. szám (251.old.)

(2.) Válaszol Párizs György miniszteri főtanácsos, a TII igazgatója.
Magyar Elektronika, 1984. 1. szám (6-7. old.)

(3.) Hámori Miklós: Tanulás és tanitás számitógéppel
Tankönyvkiadó
Budapest, 1984. (37-54. old.)

(4.) Vámos Tibor: Hazánk és a müszaki haladás
Gyorsuló idők sorozat,
Magvető Kiadó, Budapest,1984.

(5.) Szücs Pál: Személyi számitógépek az oktatásban
Audiovizuális közlemények,
1984. 2. szám (104-115.o.)

(6.) Brükner Huba: Mikroszámitógépek alkalmazása a tanitási - tanulási folyamatban.
Veszprém, OOK, 1985. (lásd 16. 169-202. old.)

(7.) Pólya György: A problémamegoldás iskolája II.
Tankönyvkiadó
Budapest, 1968. (110-122. old.)

(8.) Hajnal Imre - dr. nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos
Matematika III. (fakultativ B változat)
Tankönyvkiadó, 1981.

(9.) Hajnal Imre - dr. Nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos: Tanári kézikönyv a fakultativ B tantervü gimnáziumi matematika-tankönyvekhez
Tankönyvkiadó, Budapest,1985.

(10.) Simonovits Miklós: Számitástechnika a speciális matematikai osztályok részére
Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. (105-175. old.)

(11.) Blandl Mátyás: A sorozatok középiskolai tanitásának segitése az iskolaszámitógéppel
A Matematika Tanitása, 1985. 3. szám (74-83. old.)

(12.) Dr. Máté László: Rekurziv sorozatok
Középiskolai szakköri füzetek
Tankönyvkiadó, Budapest, 1980

(13.) Obádovics J. Gyula:
Gyakorlati Számitási eljárások
Gondolat kiadó, 1972.

(14.) Gyapjas Ferenc: Közelitö értékek használatáva kapcsolatos hibajelenségek
Mikroszámitógép magazin, 1986. 6. szám, 4. old.

(15.) Maros Zoltán: Egyenletek közelitö megoldása
(A fixpont-iteráció - HT iskolaszámitógéppel)
Mikroszámitógép magazin, 1985. 4. szám

(16.) Szücs Pál (szerkesztö): Mikroszámitógépek a tanitási-tanulási folyamatban
Veszprém, OOK, 1985.

(17.) Hajnal Imre - dr. Nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos - dr. Urbán János: Matematika IV. (fakultativ B változat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

(18.) Peter Henrici: Numerikus analizis
Müszaki Könyvkiadó
Budapest, 1985.

(19.) HT-1080Z iskolaszámitógép
BASIC kézikönyv
Hiradástechnika Szövetkezet, 1983.

(20.) dr. Appel György (szerkesztö):A HT-1080z iskolaszámitógép programozása (segédanyag a tanártovábbképzéshez), Szolnok megyei Pedagógiai Intézet, 1984.

(21.) Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás
Akadémia kiadó
Budapest, 1984.

(22.) A gimnáziumi nevelés és oktatás terve
Tankönyvkiadó
Budapest, 1978.

(23.) Dr. Korányi Erzsébet: Matematika III-IV.
(fakultativ A változat)
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981-1982.

(24.) Blandl Mátyás: Matematikatanitás a változó világban. A bajai III. Béla Gimnázium évkönyve (270-274. old.), Baja, 1982.

1. Melléklet: Az 1.b program: Számtani - mértani sorozat

1.1. Melléklet: Az 1.b program listája (-1)

```
5 REM ... 1.b  program................
10 CLS
20 PRINT"SZAMTANI SOROZAT (A)"
30 PRINT"MéRTANI SOROZAT (B)"
40 INPUT"MELYIKET KéRED (A/B)";QR
50 IF QR="A" THEN 60 ELSE IF QR="B" THEN 650 ELSE 40
60 PRINT:PRINT"----- S Z A M T A N I  S O R O Z A T ----"
70 PRINT"ADOTT:"
80 PRINT"1.  A1,N,D"
90 PRINT"2.  A1,AN,N"
100 PRINT"3.  A1,AN,D"
110 PRINT"4.  AN,N,D"
120 INPUT"MELYIKET VALASZTOD (1/2/3/4)";AR
125 CLS
130 IF AR="1" THEN 180
140 IF AR="2" THEN 270
150 IF AR="3" THEN 360
160 IF AR="4" THEN 460
170 GOTO 120
180 INPUT"AZ 1. ELEM A1";A1
190 INPUT"AZ ELEMEK SZAMA N";N
200 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NEM EGéSZ!":GOTO 190
210 INPUT"KüLöNBSéG D";D
220 GOSUB 550
230 PRINT"AZ N-DIK ELEM AN=";AN
240 GOSUB 570
250 PRINT"AZ ELSö N ELEM öSSZEGE SN=";SN
260 END
270 INPUT"AZ 1. ELEM A1";A1
280 INPUT"AZ N-DIK ELEM AN";AN
290 INPUT"AZ ELEMEK SZAMA N";N
300 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NINCS éRTELME":
    GOTO 290
310 GOSUB  590
320 PRINT"A KüLöNBSéG D=";D
330 GOSUB 570
340 PRINT"AZ ELSö N ELEM öSSZEGE SN=";SN
350 END
360 INPUT"AZ 1.  ELEM A1=";A1
370 INPUT"AZ N-DIK ELEM AN=";AN
380 INPUT"A KüLöNBSéG D=";D
390 IF  D=O THEN PRINT"NINCS éRTELME":GOTO 380
```

1.2. Melléklet: Az 1.b program listája (-2)

```
400 GOSUB 610
410 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN
    PRINT"ILYEN SOROZAT NINCS!":END
420 PRINT"AZ  ELEMEK SZAMA  N=";N
430 GOSUB 570
440 PRINT"AZ ELSö N ELEM öSSZEGE SN=";SN
450 END
460 INPUT"AZ  N-DIK ELEM AN=";AN
470 INPUT"AZ ELEMEK  SZüMA N=";N
480 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NEM EGéSZ!":
    GOTO 470
490 INPUT"A KüLöNBSéG D=";D
500 GOSUB 630
510 PRINT"AZ 1.  ELEM A1=";A1
520 GOSUB 570
530 PRINT"AZ ELSö N ELEM  öSSZEGE SN=";SN
540 END
550 AN=A1+(N-1)*D
560  RETURN
570 SN=N/2*(A1+AN)
580  RETURN
590 D=(AN-A1)/(N-1)
600  RETURN
610 N=(AN-A1+D)/D
620  RETURN
630 A1=AN-D*(N-1)
640  RETURN
650 PRINT:PRINT"----- M é R T A N I  S O R O Z A T -----"
660 PRINT"ADOTT:"
670 PRINT"1. A1,Q,N"
680 PRINT"2. A1,AN,N"
690 PRINT"3. AN,Q,N"
700 INPUT"MELYIKET(1/2/3)";BA
705 CLS
710 IF BA="1" THEN 750
720 IF BA="2" THEN 840
730 IF BA="3" THEN 930
740 GOTO 700
750 INPUT"AZ 1. ELEM A1=";A1
760 INPUT"A HANYADOS Q=";Q:
    IF Q=0 THEN PRINT"NINCS éRTELME":GOTO760
770 INPUT"AZ ELEMEK SZAMA N=";N
780 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NEM EGéSZ!":
    GOTO 770
790 GOSUB 1030
```

1.3. Melléklet: Az 1.b program listája (-3)

```
800 PRINT"AZ N-DIK ELEM AN=";AN
810 GOSUB 1050
820 PRINT"AZ ELSö N ELEM öSSZEGE SN=";SN
830 END
840 INPUT"AZ 1. ELEM A1=";A1:
    IF A1=0 THEN PRINT"NINCS éRTELME":GOTO 840
850 INPUT"AZ N-DIK ELEM AN=";AN
860 INPUT"AZ ELEMEK SZAMA N=";N
870 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NINCS éRTELME":
    GOTO 860
880 GOSUB 1070
890 PRINT"A HANYADOS Q=";Q
900 GOSUB 1050
910 PRINT"AZ ELSO N ELEM  OSSZEGE SN=";SN
920 END
930 INPUT"AZ N-DIK ELEM AN=";AN
940 INPUT"A HANYADOS Q=";Q
950 IF Q=0 THEN  PRINT"NINCS ERTELME":GOTO 940
960 INPUT"AZ ELEMEK SZAMA N=";N
970 IF N<=0 OR N<>INT(N) THEN PRINT"NINCS ERTELME!":
    GOTO 960
980 GOSUB 1090
990 PRINT"AZ 1. ELEM A1=";A1
1000 GOSUB 1050
1010 PRINT"AZ ELSö N ELEM  öSSZEGE SN=";SN
1020 END
1030 AN=A1*Qé(N-1)
1040 RETURN
1050 SN=A1*(QéN-1)/(Q-1)
1060 RETURN
1070 Q=(AN/A1)é(1/(N-1))
1080 RETURN
1090 A1=AN/(Qé(N-1))
1100 RETURN
```

1.4. Melléklet: Az 1.b program futtatása

```
SZAMTANI SOROZAT (A)
MéRTANI SOROZAT (B)
MELYIKET KéRED (A/B)? A

------ S Z A M T A N I   S O R O Z A T ----
ADOTT:
1.  A1,N,D
2.  A1,AN,N
3.  A1,AN,D
4.  AN,N,D
MELYIKET VALASZTOD (1/2/3/4)? 2_

AZ 1. ELEM A1? 60
AZ N-DIK ELEM AN? 804
AZ ELEMEK SZAMA N? 125
A KÜLÖNBSéG D= 6
AZ ELSÖ N ELEM ÖSSZEGE SN= 54000
READY
>_


>RUN_

SZAMTANI SOROZAT (A)
MéRTANI SOROZAT (B)
MELYIKET KéRED (A/B)? B

------ M é R T A N I   S O R O Z A T ------
ADOTT:
1. A1,Q,N
2. A1,AN,N
3. AN,Q,N
MELYIKET(1/2/3)? 1_


AZ 1. ELEM A1=? 5120
A HANYADOS Q=? .25
AZ ELEMEK SZAMA N=? 8
AZ N-DIK ELEM AN= .3125
AZ ELSÖ N ELEM ÖSSZEGE SN= 6826.56
READY
>_
```

2. Melléklet: Fibonacci-sorozat

```
5 REM.........2.b program
10 CLS:PRINT"FIBONACCI-SOROZAT:"
20 INPUT"MEDDIG SOROLJAM A TAGOKAT";V
30 A=1 : B=1
40 FOR N=1 TO V
45  PRINT"A"N"=",A
50  S=B : B=B+A : A=S
70 NEXT N
```

Futtassuk a programot!

```
FIBONACCI-SOROZAT:
MEDDIG SOROLJAM A TAGOKAT?  12
A 1 =            1
A 2 =            1
A 3 =            2
A 4 =            3
A 5 =            5
A 6 =            8
A 7 =            13
A 8 =            21
A 9 =            34
A 10 =           55
A 11 =           89
A 12 =           144
```

3.1 Melléklet: A 9. program listája(-1.):

```
10 GOTO 310
20 AN=1/N:RETURN

30 N=N+1:RETURN

40 DATA é,209,+,205,-,206,*,207,/,208,(,40,),41
50 DATA .,46,N,78
60 DATA ABS,217,ATN,228,COS,225,EXP,224,INT,216
70 DATA LOG,223,SGN,215,SIN,226,SQR,221,TAN,227
75 '
80 ' ..... várakozás ................................
85 '
90 PRINT"MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   ";
100 IR=INKEYR
110 IF IR="I" OR IR="N" THEN PRINTIR:RETURN ELSE 100
115 '
120 '...... a keplet beolvasása, lerakása ...........
125 '
130 INPUT AR:A=LEN(AR)
140 FOR I=1 TO A
150   BR=MIDR(AR,I,1):B=ASC(BR)
160   IF B>47 AND B<58 THEN C=B:GOTO 260
170   FOR J=0 TO 8
180    IF BR=T1R(J) THEN C=T1(J):GOTO 260
190   NEXT J
200   BR=MIDR(AR,I,3)
210   FOR J=0 TO 9
220    IF T2R(J)=BR THEN C=T2(J):I=I+2:GOTO 260
230   NEXT J
240   IF MIDR(AR,I,J)=" " THEN C=32:GOTO 260
250   PRINT"HIBA A KéPLETBEN !":GOTO 350
260   POKE E,C:E=E+1
270 NEXT I
280 POKE E,58:POKE E+1,146:'(:RETURN)
290 FOR I=E+2 TO V:POKE I,32:NEXT
300 RETURN
305 '
310 '..........elökeszületek.........................
315 '
320 CLEAR 200:CLS
330 FOR I=0 TO 8:READ T1R(I),T1(I):NEXT
340 FOR I=0 TO 9:READ T2R(I),T2(I):NEXT
```

3.2. Melléklet: A 9. program listája(-2):

```
350 PRINT"A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!"
360 GOSUB 80:IF IR="I" THEN 380
370 PRINT"AN=";:E=17146:V=17231:GOSUB 130:ANR=AR
380 PRINT"AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!"
390 GOSUB 80:IF IR="I" THEN 420
400 PRINT"N=";:E=17239:V=17328:GOSUB 130:NR=AR
410 '............................................
420 '...... indul a program.......................
430 '............................................
440 S=0:I=0:DIM A(200):PRINT
450 INPUT"HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM";N:IF N=0 THEN N=1
460 INPUT"HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)";P
470 S=0:PR="######."+STRINGR(P,"#"):ONERRORGOTO 950
480 GOSUB 20
490 IF ABS(AN)>10é6 THEN A(S)=AN:GOTO950
    ELSE A(S)=INT(AN*10éP+.5)/10éP
495 '
500 '....max.  es  min.  meghatározása...............
505 '
510 IF S=0 THEN MA=A(S):MI=A(S):GOTO580
520 IF MA < A(S) THEN MA=A(S)
530 IF MI > A(S) THEN MI=A(S)
535 '
540 '...... a monotonitás vizsgálata.................
545 '
550 IF A(S)=A(S-1) THEN I=I+1:GOTO 580 ELSE I=0
560 IF A(S)>A(S-1) THEN NO=NO+1 ELSE CS=CS+1
565 '
570 '...... a kiirás ................................
575 '
580 PRINT"A"N"=",:PRINT USING PR;A(S):REM...kiiratás
590 GOSUB 30
595 '
600 '..... ha nem konvergál, vagy csak lassan ........
605 '
610 IF S=99 THEN PRINT"FOLYTASSAM?":GOTO620 ELSE 640
620 IR=INKEYR:IF IR="N" THEN 680
630 IF IR<>"I" THEN 620
640 IF S=199 THEN 710
650 IF I<5 THEN S=S+1:GOTO 480
655 '
660 '...... ha a szomszedos tagok 5 -ször megegyeztek...
665 '
670 SR=INKEYR
680 PRINT"KÖZÖLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?"
690 IF INKEYR="" THEN 690
```

3.3 Melléklet: A 9. program listája(-3):

```
700 '...... a megállapitások .............................
705 '
710 PRINT:PRINT"A VIZSGALT "S+1" TAG KÖZÜL"
720 PRINT"   A LEGKISEBB  :";:PRINT USING PR;MI
730 PRINT"   A LEGNAGYOBB :";:PRINT USING PR;MA
740 IF NO=0 AND CS=0 THEN MOR="ALLANDO,": GOTO 770
750 IF CS=0 THEN MOR=" MONOTON NÖVÖ,":GOTO 770
760 IF NO=0 THEN MOR="MONOTON CSÖKKENÖ,"
    ELSE MOR="NEM MONOTON"
770 PRINT:PRINT"AZ A SEJTéSEM, HOGY"
780 PRINT"   A SOROZAT ";MOR
790 IF S=199 AND NO=199 THEN
    PRINT"   DIVERGAL A POZITIV VéGTELENBE VAGY";:
    PRINTUSING PR;MA;" A HATARéRTéK.":GOTO 830
800 IF S=199 AND CS=199 THEN
    PRINT"   DIVERGAL A NEGATIV VéGTELENBE VAGY";:
    PRINT USING PR;MI;" A HATARéRTéK.":GOTO 830
810 PRINT"   HATARéRTéKE: ";:PRINT USING PR;A(S)
815 '
820 '...... az ábrázolás ..........................
825 '
830 PRINT:PRINT"ABRAZOLVA:":PRINT:PRINT
840 FORX=0TO100:SET(X,40):NEXT
850 FOR K=0 TO S
860  IF MA=MI THEN X=63 :GOTO 880
870  X=127*(A(K)-MI)/(MA-MI)
880  RESET(X,39):FORR=0TO10:NEXT:
     SET(X,39):FORR=0TO50:NEXT
890 NEXT K
900 SET(X,41)
910 PRINT"AZ ALUL JELZETT éRTéK:";:PRINT USING PR;A(S)
920 PRINT"ELLENORIZD A MEGALLAPITASOKAT !     "
930 PRINT"A VIZSGALT SOROZAT :  AN=";AR
940 PRINT"AZ INDEX VALTOZASA :    N=";NR:GOTO970
950 PRINT"ADJ MEG MAS ADATOKAT !":
     PRINT"AZ EDDIGIEK ALAPJAN:"
960 A(S)=A(S-1) : RESUME 300
970 GOTO 970
```

3.4 Melléklet: A 9. program futtatása

```
A SOROZAT AN=F(N) ALAKKAL ADHATO MEG!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   N
AN=? (1/2+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA PEDIG N=F(N) ALAKKAL!
MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)?   N
N=? N+1

HANYADIK TAGTOL VIZSGALJAM? 1
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6 JEGY)? 3
A 1 =                   1.500
A 2 =                   1.000
A 3 =                   0.579
A 4 =                   0.316
A 5 =                   0.168

A 6 =                   0.088
A 7 =                   0.045
A 8 =                   0.023
A 9 =                   0.012
A 10 =                  0.006
A 11 =                  0.003
A 12 =                  0.002
A 13 =                  0.001
A 14 =                  0.000
A 15 =                  0.000
A 16 =                  0.000
A 17 =                  0.000
A 18 =                  0.000
A 19 =                  0.000
KöZöLHETEM A MEGALLAPITASAIMAT?  I


A VIZSGALT  19  TAG KöZüL
   A LEGKISEBB  :        0.000
   A LEGNAGYOBB :        1.500

AZ A SEJTéSEM, HOGY
   A SOROZAT MONOTON CSöKKENö,
   HATARéRTéKE:         0.000

ABRAZOLVA:
```

```
AZ ALUL JELZETT éRTéK:       0.000
ELLENöRIZD A MEGALLAPITASOKAT !
A VIZSGALT SOROZAT :  AN=(1/2+1/N)éN
AZ INDEX VALTOZASA :   N=N+1
```

4. Melléklet : Rekurziv sorozatok határértéke

4.1 Melléklet: A 10. program listája

```
10 '.......... 10. program ..............................
20 CLS
30 PRINT"GéPELD BE AZ ADATOKAT A KÖVETKEZÖK SZERINT!"
40 PRINT:PRINT"A 200 -AS SORBA A SOROZAT ELSÖ ELEMéT,"
50 PRINT"A 210 -ES SORBA AZ N -EDIK ELEMET,"
60 PRINT"A 270 -AS SORBA PEDIG A LéPéSKÖZT!"
70 PRINT
"PéLDAUL:200 A1=1
         210 AN=1/N   VAGY  210 AN=SQR(AN+2)
         280 N=N+1    VAGY  280 N=N*2
80 PRINT:PRINT
   "EZEK UTAN A    RUN 100   PARANCCSAL INDITHATSZ!"
90 PRINT:PRINT"HA A BEIRT ADATOKKAL KIVANOD FUTTATNI,":
   PRINT"AKKOR A   CONT  PARANCSOT GéPELD BE!":STOP
100 N=1 : I=0
110 INPUT"HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)";P
120 PA=STRINGA(6,"#")+"."+STRINGA(P,"#")
200 A1=SQR(2)
203 A=INT(A1*10éP+.5)/10éP
205 AN=A
207 PRINT"A"N"=",:PRINT USING PA;AN
210 AN=SQR(AN+2)
230 AN=INT(AN*10éP+.5)/10éP
240 IF AN>A THEN NO=NO+1 : I=0 : GOTO 270
250 IF AN<A THEN CS=CS+1 : I=0 : GOTO 270
260 I=I+1
270 A=AN
280 N=N+1
290 IF I<5 THEN 207
300 IF CS=0 THEN MA="MONOTON NÖ.":GOTO 320
310 IF NO=0 THEN MA="MONOTON CSÖKKEN."
    ELSE MA="NEM MONOTON."
320 PRINT:PRINT"A SEJTéS : ";
330 PRINT"A VIZSGALT ELEMEK SOROZATA
                 ";MA:PRINT
340 PRINT"               A HATARéRTéK : ";:PRINT USING PA;AN
350 PRINT:PRINT"VIZSGALD MEG, HOGY IGAZ - E!"
355 PRINT
360 END
```

4.2. Melléklet: A 10. program futtatása

```
GéPELD BE AZ ADATOKAT A KÖVETKEZÖK SZERINT!

A 200 -AS SORBA A SOROZAT ELSÖ ELEMéT,
A 210 -ES SORBA AZ N -EDIK ELEMET,
A 270 -AS SORBA PEDIG A LéPéSKÖZT!
PéLDAUL:200 A1=1
        210 AN=1/N    VAGY  210 AN=SQR(AN+2)
        280 N=N+1     VAGY  280 N=N*2

EZEK UTAN A    RUN 100   PARANCCSAL INDITHATSZ!

HA A BEIRT ADATOKKAL KIVANOD FUTTATNI,
AKKOR A   CONT  PARANCSOT GéPELD BE!
Break in 90
READY
>_


>200 A1=SQR(2)
>210 AN=SQR(2+AN)
>280 N=N+1
>RUN 100
HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6)? 5
A 1 =                1.41421
A 2 =                1.84776
A 3 =                1.96157
A 4 =                1.99037
A 5 =                1.99759
A 6 =                1.99940
A 7 =                1.99985
A 8 =                1.99996


A 9 =                1.99999
A 10 =               2.00000
A 11 =               2.00000
A 12 =               2.00000
A 13 =               2.00000
A 14 =               2.00000

A SEJTéS : A VIZSGALT ELEMEK SOROZATA
                     MONOTON NÖ.

           A HATARéRTéK :       2.00000

VIZSGALD MEG, HOGY IGAZ - E!

READY
>_
```

5. Melléklet : A 11. program listája

```
10 '......... 11. program ..............................
20 CLS:PRINT,"PI KÖZELITéSE A  ( K(N) ) SOROZATTAL"
100 N=1 : I=0
110 PRINT,"HANY TIZEDESIG SZAMOLJAK (MAX.6 JEGY)";
115 INPUT P
120 PR=STRINGR(6,"#")+"."+STRINGR(P,"#")
200 A1=0
202 AN=A1
203 A=0
205 KN=2éN*SQR(2-AN)
206 KN=INT(KN*10éP+.5)/10éP
210 AN=SQR(2+AN)
220 PRINT,"K"N+1"/ 2 =",:PRINT USING PR;KN
240 IF KN>A THEN NO=NO+1 : I=0 : GOTO 270
250 IF KN<A THEN CS=CS+1 : I=0 : GOTO 270
260 I=I+1
270 A=KN
280 N=N+1
290 IF I<5 THEN 205
300 IF CS=0 THEN MR="MONOTON NÖ.":GOTO 320
310 IF NO=0 THEN MR="MONOTON CSÖKKEN."
    ELSE MR="NEM MONOTON."
320 PRINT,"A SEJTéS : ";
330 PRINT,"A VIZSGALT ELEMEK SOROZATA
                         ";MR
340 PRINT,"             A HATARéRTéK : ";:PRINT USING PR;KN
350 PRINT,"VIZSGALD MEG, HOGY IGAZ - E!"
360 END
```

6. Melléklet: A 12. program listája:

(A PI közelitése)

```
10 ' ... 12. program ..................................

20 CLS : PRINT" PI közelitese:" :PRINT
30 PRINT"      a) Közelites:
           1     1     1            N+1      1
4 * ( 1 - --- + --- - --- +...+ (-1)    * ----- +...) ---> PI
           3     5     7                  2*N-1
40 PRINT"      b) Közelites:
                 1     1          1
SQR ( 6 * ( 1 + --- + --- + ... + --- ) ) ---> PI
                2é2   3é2        Né2
50 PRINT"      c) Közelites:
       2   2   4   4   6   6          2*N     2*N
2 * ( - * - * - * - * - * - * ... * ----- * ----- ) ---> PI
       1   3   3   5   5   7        2*N-1   2*N+1
60 PRINT:INPUT"MEHET";MR
70 CLS:SA=0:SB=0:SC=1
80 PRINT" N"," a) eset"," b) eset"," c) eset"
90 PRINT
100 N=1
110 AN=(-1)é(N+1)*(4/(2*N-1))
120 BN=6/Né2
130 CN=2*N/(2*N-1)*2*N/(2*N+1)
140 SA=SA+AN
150 SB=SB+BN
160 SC=SC*CN
170 PRINTN,SA,SQR(SB),SC*2
180 N=N+1
190 GOTO 110
```

7. Melléklet: Függvény ábrázolása

7.1. Melléklet: A 14. program listája (-1)

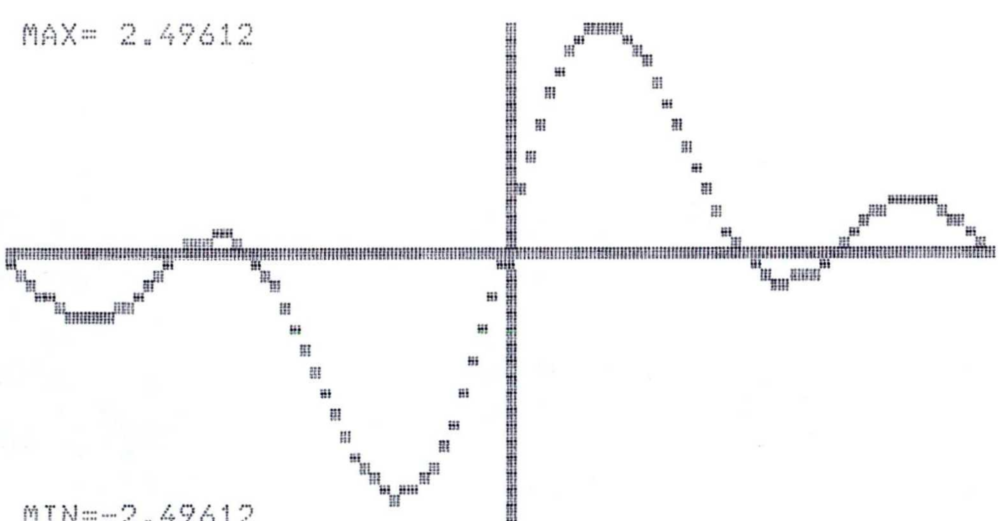
```
10 GOTO 30
20 Y=SIN(X)+SIN(2*X)+SIN(3*X):RETURN

30 CLS
40 PRINT"   FüGGVéNY ABRAZOLASA
50 PRINT"   ===================

60 PRINT"A FüGGVéNY  Y=F(X)  ALAKKAL ADHATO MEG!"
70 PRINT:PRINT"MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)? ";
80 IR=INKEYR
90 IF IR="I" THEN PRINT IR:GOTO 390
100 IF IR="N" THEN PRINT IR:GOTO 110 ELSE 80
110 '.........................................
120 '...... a képlet beolvasása, lerakása ......
130 '.........................................
140 CLEAR 200
150 DATA é,209,+,205,-,206,*,207,/,208,(,40,),41
160 DATA .,46,X,88
170 DATA ABS,217,ATN,228,COS,225,EXP,224,INT,216
180 DATA LOG,223,SGN,215,SIN,226,SQR,221,TAN,227
190 FOR I=0 TO 8:READ T1R(I),T1(I):NEXT
200 FOR I=0 TO 9:READ T2R(I),T2(I):NEXT
210 PRINT:PRINT"Y=";:E=17144:V=17231
220 INPUT AR:A=LEN(AR)
230 FOR I=1 TO A
240   BR=MIDR(AR,I,1):B=ASC(BR)
250   IF B>47 AND B<58 THEN C=B:GOTO 350
260   FOR J=0 TO 8
270    IF BR=T1R(J) THEN C=T1(J):GOTO 350
280   NEXT J
290   BR=MIDR(AR,I,3)
300   FOR J=0 TO 9
310    IF T2R(J)=BR THEN C=T2(J):I=I+2:GOTO 350
320   NEXT J
330   IF MIDR(AR,I,J)=" " THEN C=32:GOTO 350
340   PRINT"HIBA A KéPLETBEN !":GOTO 410
350   POKE E,C:E=E+1
360 NEXT I
370 POKE E,58:POKE E+1,146:'(:RETURN)
380 FOR I=E+2 TO V:POKE I,32:NEXT
```

7.2. Melléklet: A 14. program listája (-2)

```
390 '.....................................
400 '...... indul a program...................
410 '.....................................
420 DIM Y(100):YT=-1:XT=-1
430 PRINT:INPUT"AZ INTERVALLUM : A,B=";A,B
440 PRINT:PRINT"KIS TÜRELMET!"
450 L=(B-A)/100
460 FOR I=0 TO 100
470 X=A+I*L
480 GOSUB 20 : Y(I)=Y
490 IF ABS(X)<L THEN YT=I
500 NEXT I
510 '.....................................
520 '.........max. - min. meghatározása........
530 '.....................................
540 MI=Y(0):MA=Y(0)
550 FOR I=1 TO 100
560 IF MI>Y(I) THEN MI=Y(I)
570 IF MA<Y(I) THEN MA=Y(I)
580 NEXT I
590 CLS
600 PRINTA0," MAX=";MA:PRINTA15*64," MIN=";MI;
610 '.....................................
620 '..........a grafikon......................
630 '.....................................
640 FOR I=0 TO 100
650 IF ABS(Y(I))<(MA-MI)/44 THEN XT=I
660 YY=(MA-Y(I))/(MA-MI)*44
670 SET(I,YY)
680 NEXT
690 '....................................
700 '........a tengelyek......................
710 '....................................
720 IF YT<0 THEN 740
730 FOR J=0 TO 47:SET(YT,J):NEXT
740 IF XT<0 THEN 770
750 YY=(MA-Y(XT))/(MA-MI)*44
760 FOR J=0 TO 100:SET(J,YY):NEXT
770 GOTO 770
780 END
```

7.3. Melléklet : A 14. program futtatása

```
   FüGGVéNY ABRAZOLASA
   ===================

A FüGGVéNY  Y=F(X)  ALAKKAL ADHATO MEG!

MARADHAT AZ EDDIGI KéPLET(I/N)? N

Y=? SIN(X)+SIN(2*X)+SIN(3*X)

AZ INTERVALLUM : A,B=? -3.14,3.14

KIS TüRELMET!
```



8.Melléklet: A derivált ábrázolással

8.1 Melléklet: A 16. program listája(-1)

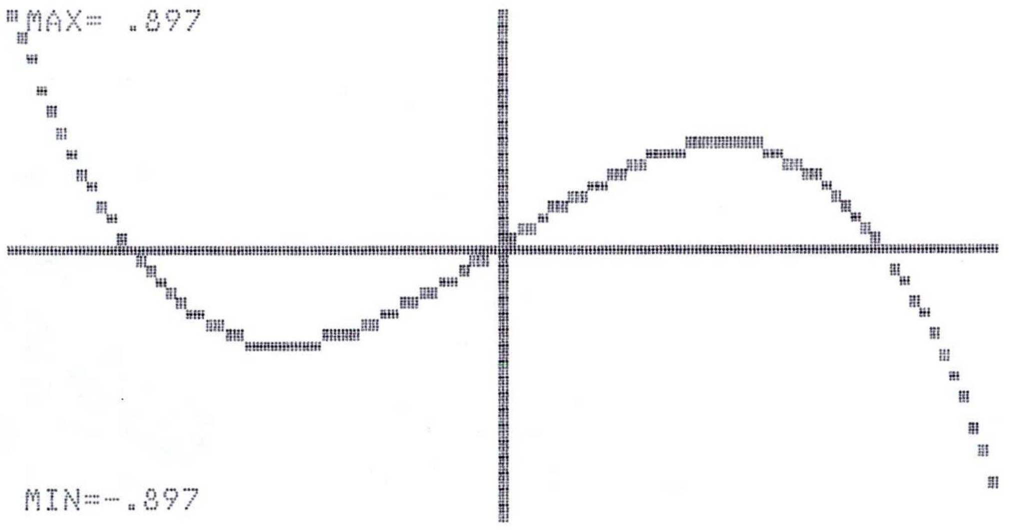
```
5  '..............16. program................

10 GOTO  40
20 Y=X-X*X*X:RETURN

30 H=H/(-7):RETURN

40 DEFDBL X,Y,H
50 INPUT"AZ INTERVALLUM : A,B=";A,B
60 INPUT"A KéRDéSES HELY : X0=";X0
70 IF X0<=A OR X0>=B OR A>B THEN 50
80 '
90 '............a diff. hányadosok kiirása........
100 '
110 PRINT:PRINT" N"," X"," D"
120 X=X0
130 GOSUB 20:Y0=Y
140 N=0:I=0:H=1
150 GOSUB 30
160 N=N+1
170 X=X0+H
180 IF X<A OR X>B THEN PRINT"MAS ADATOKAT!":
    GOTO 50
190 GOSUB 20
200 D=(Y-Y0)/(X-X0)
210 IF D1=D THEN I=I+1 ELSE D1=D
220 IF I=3 OR ABS(X-X0)<.01é3 THEN 255
230 X!=X
240 PRINT N,X!,D
250 GOTO 150
255 PRINT:PRINT"SEJTéS:"
260  PRINT"A DIFFERENCIALHANYADOS AZ X0=";X0;
    "HELYEN:";D
265 PRINT"VESD ÖSSZE AZ EREDMéNYT A GRAFIKONNAL!";
270 '
280 '.................a fv. ábrázolása............
290 '
300 DEFSNGX,Y
310 DIM Y(100):YT=-1:XT=-1
320 L=(B-A)/100
330 FOR I=0 TO 100
340 X=A+I*L
350 GOSUB 20 : Y(I)=Y
360 IF ABS(X)<L THEN YT=I
370 NEXT I
```

8.2. Melléklet: A 16. program listája(-2)

```
380 '..........max. - min. meghatározása........
385 '
390 MI=Y(0):MA=Y(0)
400 FOR I=1 TO 100
410 IF MI>Y(I) THEN MI=Y(I)
420 IF MA<Y(I) THEN MA=Y(I)
430 NEXT I
440 CLS
450 PRINTA0," MAX=";MA:PRINTA15*64," MIN=";MI;
455 '
460 '..........a grafikon........................
465 '
470 FOR I=0 TO 100
480 IF ABS(Y(I))<(MA-MI)/44 THEN XT=I
490 YY=(MA-Y(I))/(MA-MI)*44
500 SET(I,YY)
510 NEXT
515 '
520 '.........a tengelyek...................
525 '
530 IF YT<0 THEN 550
540 FOR J=0 TO 47:SET(YT,J):NEXT
550 IF XT<0 THEN 580
560 YY=(MA-Y(XT))/(MA-MI)*44
570 FOR J=0 TO 100:SET(J,YY):NEXT
580 GOTO 580
590 END
```

8.3. Melléklet: A 16. program futása:

```
>RUN
AZ INTERVALLUM : A,B=? -1.3,1.3
A KéRDéSES HELY : X0=? 0.5

 N                 X                  D
 1                .357143            .443878
 2                .520408            .218971
 3                .497085            .254365
 4                .500417            .249375
 5                .499941            .250089
 6                .500009            .249987
 7                .499999            .250002

SEJTéS:
A DIFFERENCIALHANYADOS AZ X0= .5 HELYEN: .25
VESD ÖSSZE AZ EREDMéNYT A GRAFIKONNAL!
```



9. Melléklet: Az integrál közelitése

9.1. Melléklet: A 17. program listája

```
1 '...........A  17. program..........................

2 CLS:PRINT"AZ INTEGRAL KÖZELITÖ SZAMITASA"
4 PRINT"
  1. TEGLALAP-MODSZERREL
  2. TRAPEZ-MODSZERREL
  3. ERINTO-MODSZERREL
  4. SIMPSON-MODSZERREL"
5 PRINT:PRINT"A FüGGVéNY AZ 1000-ES SORBAN VAN!":PRINT
6 INPUT"MELYIKET VALASZTJA";K
8 ON K GOTO 10,200,300,400
9 GOTO 6

10 '................téglalap-módszer................

20 CLS:INPUT"AZ  Intervallum(A,B)";A,B
30 INPUT"Hány reszre osztod  ";N
40 T=0:K=(B-A)/N
50 FOR X=A TO (B-K) STEP K
60 GOSUB 1000
70 T=T+Y:NEXT
80 PRINT"AZ INTEGRAL KÖZELITÖLEG=";T*K
90 GOSUB 900
95 PRINT:GOTO 30

190 '.............trapéz-módszer...................

200 CLS:INPUT "Alsó határ";A:INPUT"Felsö határ";B
210 INPUT "Osztások száma<páros!>";N
220 IFINT(N/2)=N/2THEN230ELSEPRINT"ez nem páros!":GOTO210
230 S=0:PRINT
240 N1=(B-A)/N
250 FOR I=ATO(B-N1)STEPN1
260 X=I:GOSUB1000:Y1=Y
270 X=I+N1:GOSUB1000:Y2=Y
280 Y2=Y:H=(Y1+Y2)*N1/2:S=S+H:NEXTI
290 PRINT"AZ INTEGRAL KÖZELITÖLEG:";S
295 GOSUB 900
296 GOTO 210
```

9.2. Melléklet: A 17. program listája(-2)

```
299 '..............érintö-módszer......................

300 CLS:INPUT"AZ INTERVALLUM ALSO HATARA:";A
310 INPUT"                    FELSÖ HATARA:";B
320 INPUT"HANY RéSZRE OSZTOD AZ INTERVALLUMOT";N
330 S=0:K=(B-A)/N
340 FORQ=1TON STEP2
350 GOSUB 1000
360 X=A+Q*K:S=S+Y:NEXT
370 PRINT:PRINT"AZ INTEGRAL KÖZELITÖLEG=";S*2*K
380 GOSUB 900
390 PRINT:GOTO 320

395 '..............Simpson-módszer..................

400 PRINT:INPUT "ALSO ES FELSÖ HATAR";A,B
410 INPUT"HANY RéSZRE OSZTOD";N
420 C=(B-A)/2/N:X=A:GOSUB1000:S=Y:X=B:GOSUB1000:S=S+Y
430 FORI=1TO2*N-1:X=A+C*I:GOSUB1000
440   S=S+2*Y:IFI/2<>INT(I/2)THENS=S+2*Y
450 NEXTI
460 S=C*S/3
470 PRINT"AZ INTEGRAL KÖZELITÖLEG:";S
480 GOSUB 900
490 PRINT:GOTO 410
900 PRINT"FOLYTATJUK?"
910 IR=INKEYR
920 IF IR="I" THEN RETURN
930 IF IR="N" THEN 1 ELSE 910
1000 Y=Xé2:RETURN
```

9.3. A 17. program futtatása

```
AZ INTEGRAL KöZELITö SZAMITASA

   1. TEGLALAP-MODSZERREL
   2. TRAPEZ-MODSZERREL
   3. ERINTO-MODSZERREL
   4. SIMPSON-MODSZERREL

A FüGGVéNY AZ 1000-ES SORBAN VAN!

MELYIKET VALASZTJA? 2_


Alsó határ? 0
Felsö határ? 1
Osztások száma<páros!>? 6

AZ INTEGRAL KöZELITöLEG: .196759
FOLYTATJUK?
Osztások száma<páros!>? 24

AZ INTEGRAL KöZELITöLEG: .293656
FOLYTATJUK?
Osztások száma<páros!>? 60

AZ INTEGRAL KöZELITöLEG: .33338
FOLYTATJUK?



AZ INTEGRAL KöZELITö SZAMITASA

   1. TEGLALAP-MODSZERREL
   2. TRAPEZ-MODSZERREL
   3. ERINTO-MODSZERREL
   4. SIMPSON-MODSZERREL

A FüGGVéNY AZ 1000-ES SORBAN VAN!

MELYIKET VALASZTJA? 4

ALSO ES FELSö HATAR? 0,1
HANY RéSZRE OSZTOD? 6
AZ INTEGRAL KöZELITöLEG: .333334
FOLYTATJUK?
```

Köszönetemet fejzem ki dr. Pintér Lajos docens urnak az értekezésem elkészitése közben nyujtott állandó támogatásáért, hasznos tanácsaiért, és dr. Szalay István docens urnak a folyamatos bátoritásért, biztatásért.