

B2723

Funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak
aszimptotikus viselkedése

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Készítette

CSATÓ SÁNDOR

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM

BOLYAI INTÉZET

Szeged, 1986



Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----|
| Bevezetés..... | 1 |
| Definíciók, tételek..... | 9 |
| 1. Autonom rendszerek vizsgálata, a triviális megoldás aszimptotikus stabilitása..... | 15 |
| 1.1. A karakterisztikus egyenlet jellemzése..... | 16 |
| 1.2. Az aszimptotikus stabilitást kizáró eset vizsgálata..... | 25 |
| 1.3. Az $f_{-1}(z)$ zéróhelyeinek elhelyezkedése..... | 42 |
| 1.4. Az $f_a(z)$ zéróhelyei elhelyezkedése..... | 47 |
| 2. Nem autonom, skaláris egyenletek stabilitása..... | 97 |
| 2.1. Lineáris, stabilis típusú egyenletek..... | 97 |
| 2.2. Stabilitás vizsgálat a határegyenlet alkalmazásával..... | 109 |
| 2.3. Ljapunov függvények alkalmazása a stabilitás vizsgálatára..... | 114 |

Irodalomjegyzék

Bevezetés

A különböző tudományos és gyakorlati problémák vizsgálata során gyakran találkozhatunk olyan rendszerekkel, amelyek adott időpontbeli állapotának változása nemcsak az adott időpontbeli állapottól függ, hanem az azt megelőző állapotoktól is. Az ilyen rendszerek leírására jól használhatók a késleltetett argumentumú differenciálegyenletek. Késleltetett argumentumú differenciálegyenlet a XVIII. század második felében jelent meg a szakirodalomban, azonban ezen egyenletek rendszeres vizsgálata csak a XX. század negyvenes éveitől vált általánossá. Az ötvenes évektől kezdve jelentősen megnőtt a késleltetett argumentumú differenciálegyenletekkel foglalkozó szerzők száma. Ezen differenciálegyenletek iránti érdeklődés megnövekedése a tudományos, technikai fejlődés eredménye, ugyanis az automatikus szabályozási folyamatok leírására, a rakétamotorban az égési folyamatok modellezésére, a fertőző betegségek terjedésének makroszkopikus vizsgálatára, gazdasági folyamatok jellemzésére és bizonyos fizikai jelenségek leírására is hatékonyan alkalmazhatók a késleltetett argumentumú differenciálegyenletek.

Vizsgáljuk például az állandó környezetben élő, egyszeres fajtapopuláció populációsűrűségének időbeli változását. Jelölje $n(t)$ a populációsűrűséget t időpillanatban. A legegyszerűbb populációnövekedési törvényt, amely szerint a populációsűrűség t időpontbeli megváltozása arányos

a t időpontbeli populáció sűrűséggel, az

$$\dot{n}(t) = rn(t)$$

differenciálegyenlet fejezi ki, ahol r a növekedési ráta. Ha r pozitív és állandó, akkor $n(t)$ exponenciálisan növekszik. Laboratóriumi kísérletek igazolták, hogy az állandó környezetben élő egyszeres fajtapopuláció populációsűrűsége vagy egy $n^{\bar{x}}$ határértékhez tart, ha $t \rightarrow \infty$, vagy $n^{\bar{x}}$ körül oszcillál. Tehát a növekedési ráta ebben az esetben nem lehet állandó. A kísérletek alapján a növekedési rátának a sűrűség növekedésével csökkenni kell, másrészt az oszcilláció csak úgy jöhet létre, ha a növekedési ráta a sűrűség előző időpontbeli értékeitől is függ. Ez azt jelenti, hogy az állandó r helyett egy $r(n_t)$ funkcionált kell alkalmazni, ahol n_t a $[-1, 0]$ intervallumon értelmezett, $n_t = n(t+s)$ ($s \in [-1, 0]$) összefüggésnek eleget tevő függvény. Ezen tapasztalatok figyelembevételével juttott HUTCHINSON az 1948-ban közölt

$$(0.1.) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)(1+x(t))$$

késleltetett argumentumú differenciálegyenlethez, amelyben az $x(t)$ és az $n(t)$ populáció sűrűség közötti kapcsolatot az

$$x(t) = \frac{n(t)}{n^{\bar{x}}} - 1$$

összefüggés fejezi ki, míg $r(n_t) = \alpha \left(1 - \frac{n(t-1)}{n^{\bar{x}}}\right)$. A (0.1.)

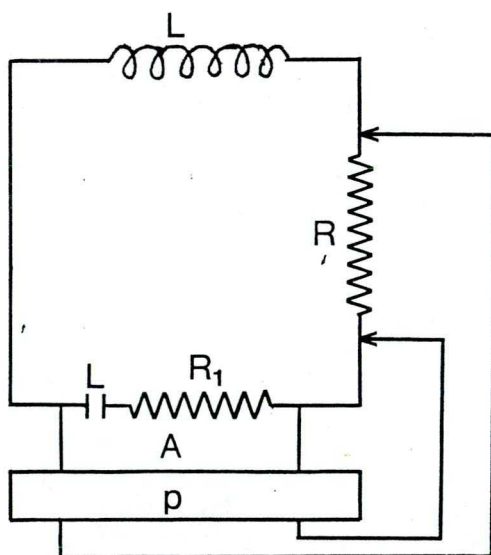
egyenlet speciális esete a STECH [32] és WALTHER [35] által tanulmányozott egyenletnek. Ugyancsak populációs probléma, illetve járványfejlődés vizsgálata során kapott egyenlettel találkozhatunk a [3], [10], [18] dolgozatokban.

A COOKE és YORKE [8] által vizsgált

$$(0.2.) \quad \dot{x}(t) = g(x(t)) - g(x(t-L))$$

egyenlet szintén populációs probléma kapcsán merült fel. Itt $g(x(t))$ a születések számát, míg $g(x(t-L))$ az elpusztult egyedek számát jelenti, L az élethossz. Néhány közgazdasági jellegű probléma is a (0.2.) egyenletre vezet.

Az 1. ábrának megfelelő elektromos áramkört szintén késleltetett argumentumú differenciálegyenlettel lehet leírni.



1. ábra

Itt A egy lineáris erősítő, P pedig az input és output közötti konstans késleltetést biztosítja. A rendszer működését leíró egyenlet:

$$(0.3.) \quad Li'' + (R+R_1)i' + \lambda R_1 i'(t-h) + \frac{1}{C}i = 0$$

Késleltetett argumentumú differenciálegyenlettel írható le a hadihajók automatikus irányító készülékeinek működése (MINORSKY 1962). A klasszikus elektronsugárzás vizsgálata során szintén késleltetett argumentumú differenciálegyenlethez jutott SORG [31]. Retardált típusú differenciálegyenlet a SOMOLINAS (1978) által vizsgált, úgynevezett napraforgó egyenlet:

$$(0.4.) \quad x'' + \frac{a}{r}x' + \frac{b}{r} \sin x(t-r) = 0.$$

Ezen egyenlet érdekessége, hogy periodikus megoldásokkal rendelkezik. HILL (1978) vizsgálta a

$$(0.5.) \quad Q' = AQ(t-T) + G$$

egyenletet, amelynek homogén változatával mi is foglalkozni fogunk.

Ezen dolgozat első fejezetében az

$$(0.6.) \quad \dot{x}(t) = A(ax(t) - x(t-r))$$

egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.

Itt A $n \times n$ -es valós mátrix, a és r valós számok, $r > 0$. A (0.6.) egyenletet, illetve speciális eseteit több szerző vizsgálta. A mi vizsgálataink ATKINSON és ZHANG [2] vizsgálataihoz kapcsolódnak. Ők az

$$(0.7.) \quad \dot{x}(t) = p(x(t) - x(t-r))$$

(p valós szám) skaláris egyenletről bebizonyították, hogy karakterisztikus egyenletének legfeljebb egy pozitív valós részű megoldása van, és minden megoldása az

$$(0.8.) \quad x(t) = y(t)c + x_0(t)$$

alakban írható fel, ahol $y(t)$ egy adott, nem korlátos megoldása, $x_0(t)$ pedig korlátos megoldása (0.7.)-nek, c valós szám. ATKINSON és ZHANG a skaláris egyenletre kapott eredményeit kiterjesztette a

$$(0.9.) \quad \dot{x}(t) = A(x(t) - x(t-r))$$

rendszerre is, ahol A diagonális mátrix. Mi a (0.6.) egyenlet karakterisztikus egyenletét vizsgálva megadjuk a komplex sík azon tartományait, amelyekbe A sajátértékeinek esni kell ahhoz, hogy a (0.6.) egyenlet 0 megoldása stabil, vagy aszimptotikusan stabil legyen, illetve teljesüljön a (0.8.)-nak megfelelő előállítás. Az eredmények érdekessége, hogy a (0.9.) egyenlet karakterisztikus egyenletének nemcsak egy, hanem több pozitív valós részű megoldása is lehet, ezért a

megoldásoknak a (0.8.) típusú előállítás, ellentétben a diagonális A mátrix esetével, nem mindig lehetséges.

A (0.6.) egyenletet vizsgálta HALE, INFANTE és TSEN [20] is. Ők a komplex sík azon tartományát adták meg, amelybe A sajátértékeinek esni kell ahhoz, hogy a (0.6.) egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil legyen minden pozitív r -re. Eredményeik a mi vizsgálatainkból is következnek.

A (0.9.) egyenletre kapott eredményeink kapcsolódnak GYŐRI [14,15] úgynevezett aszimptotikusan közönséges funkcionál-differenciálegyenletekről írt dolgozataihoz is annyiban, hogy a (0.8.) előállításból sok esetben egy

$$x(t) = y(t)(c+o(1))$$

típusú előállítás is következik, ahol a lineárisan független megoldásokból álló $y(t)$ mátrix nem elfajuló.

A második fejezetben skaláris típusú egyenletekkel foglalkozunk. Először az

$$(0.10.) \quad \dot{x}(t) = - \int_{-r(t)}^0 x(t+s) d_s h(t,s)$$

stabilis típusú egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről nyerünk eredményeket. Közvetlen módszerrel bizonyítjuk, hogy ha

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r(t)}^t -h(u, -r(u)) du < 1$$

és

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t, -r(t)) = -\infty, \quad ,$$

akkor a (0.10.) minden megoldása 0-hoz tart, ha $t \rightarrow \infty$.

Ez az eredményünk általánosítása a LADAS, SFICAS, STAVROULAKIS [25] által közölt eredményeknek. Ők a (0.10.)-nek az

$$\dot{x}(t) = -p(t)x(t-r)$$

speciális esetére bebizonyították, hogy $p(t) > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t p(s)ds < 1 \text{ és } \int_{t_0}^{\infty} p(s)ds = \infty \text{ feltételek mellett}$$

minden megoldása 0-hoz tart $t \rightarrow \infty$ esetén. Ezenkívül a mi bizonyításunk egyszerűbb.

A (0.10.) egyenletre nyert tételünket alkalmazzuk az

$$\dot{x}(t) = -\alpha \int_{-1}^0 x(t+s) d\eta(s)$$

populációs egyenletre is.

A második fejezet második részében Ljapunov második módszerének egy, a késleltetett argumentumú egyenletekre alkalmazható változatát írjuk le. A mi módszerünk MIKOLAJSKA [26,27] és TERJÉKI [34] munkáihoz kapcsolódik. A módszer lényege, hogy a felhasznált $\omega(t, x)$ segédfüggvény nem állandó előjelű, azonban az $x \omega(t, x)$ állandó előjelű kell hogy legyen. Ha ezen segédfüggvény deriváltjára adott feltételeink

teljesülnek, akkor a megfelelő egyenlet 0 megoldása stabil. A stabilitási eredményen kívül a megoldások határértékének létezésére is nyertünk feltételeket.

Mindkét fejezet után néhány példán bemutatjuk a kapott feltételek alkalmazhatóságát.

Definíciók, tételek

A bevezetésben említett egyenleteket egységes módon is lehet írni. A HALE [19] által bevezetett terminológiát felhasználva az egységes írásmód a következő lesz.

Jelölje \mathbb{R} a valós számok halmazát, \mathbb{R}^+ a nem negatív valós számok halmazát. Legyen $0 < r \leq \infty$ és \mathbb{C} jelölje a $[-r, 0]$ -n értelmezett \mathbb{R}^n -be képező folytonos, korlátos függvények halmazát. Ha $\varphi \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\|\varphi\| := \sup\{\|\varphi(s)\| \mid s \in [-r, 0]\}$, ahol $\|\cdot\|$ egy \mathbb{R}^n -beli norma. Tekintsük az $x: [-r, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, korlátos függvényt ($t > 0$). Definiáljuk az $x_t \in \mathbb{C}$ függvényt az $x_t(s) := x(t+s)$ ($s \in [-r, 0]$) egyenlőséggel.

Legyen $F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos funkcionál. Az

$$(0.11.) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

differenciálegyenletet funkcionál-differenciálegyenletnek nevezzük. Az $x: [t_0 - r, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($T > 0$) függvény a (0.11.) egyenlet $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ kezdeti feltételnek eleget tevő, vagy a $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ -n átmenő megoldása, ha x differenciálható a $(t_0, t_0 + T)$ intervallumon, $x_{t_0} = \varphi_0$ és x eleget tesz (0.11.)-nek $[t_0, t_0 + T]$ -n. Ezt a függvényt szokás $x(t, t_0, \varphi_0)$ -val is jelölni.

Ezután összefoglaljuk a funkcionál-differenciálegyenletekre ismert és általunk használt eredményeket. A megoldások létezéséről, egyértelműségéről és folytathatóságáról

szól a következő tétel. (BURTON [5], [6], HALE [19]).

A.Tétel. Ha F folytonos funkcionál és kielégíti a Lipschitz feltételt, akkor minden $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ -hez van olyan T , hogy (0.11.)-nek létezik egyértelmű megoldása a $[t_0-r, t_0+T)$ intervallumon. Ha F minden korlátos zárt halmazt korlátos zárt halmazba képez, akkor a korlátos megoldások maximális értelmezési tartománya $[t_0, \infty)$. Ha F lineáris, akkor minden megoldás $[t_0, \infty)$ -n van értelmezve.

Az általunk vizsgált (0.6.) egyenletben

$$F(t, x_t) = A(ax_t(0) - x_t(-r)).$$

Tehát F lineáris. Legyen φ a $[t_0-r, t_0]$, $(r>0)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az A.Tétel alapján a (0.6.) egyenletnek létezik a (t_0, φ) -n átmenő megoldása, ez a megoldás egyértelmű és a $[t_0-r, \infty)$ intervallumon van értelmezve. Ugyanez érvényes a (0.10.) egyenlet megoldásaira is. Mi ezen megoldások aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, azaz az $x(t, t_0, \varphi)$ viselkedését, ha $t \rightarrow \infty$.

Szükségünk lesz a stabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalmára. Tegyük fel, hogy $F(t, 0) \equiv 0$, ha $t \geq 0$.

1.Definíció. A (0.11.) egyenlet 0 megoldását stabilnak nevezük, ha minden $\xi > 0$ -hoz és $t_0 \geq 0$ -hoz van olyan $\sigma(\xi, t_0) > 0$, hogy, ha $\|\varphi_0\| < \sigma$, akkor

$$|x(t, t_0, \varphi_0)| \leq \varepsilon, \text{ ha } t \geq t_0.$$

2. Definíció. A (0.11.) egyenlet 0 megoldását aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \varphi_0) = 0.$$

Ezek a definíciók többek között KRASZOVSKIJ [22] és HALE [19] munkáiban megtalálhatók.

A funkcionál-differenciálegyenletek megoldásai aszimptotikus viselkedésének vizsgálatára a közönséges differenciálegyenletekre alkalmazott módszerek használhatók, azonban ezeket a módszereket sok esetben át kell alakítani, illetve általánosítani. Ez a megállapítás igaz az általunk alkalmazott vizsgálati módszerek közül a karakterisztikus egyenlettel kapcsolatos módszerre és a Ljapunov függvényt használó módszerre is.

A közönséges differenciálegyenletek közül a lineáris, konstans együtthatós egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedését a karakterisztikus egyenletének megoldásai határozzák meg. A lineáris konstans együtthatós, konstans késleltetésű differenciálegyenletek megoldásainak viselkedését szintén a karakterisztikus egyenlet megoldásai döntik el. Tekintsük az

$$(0.12.) \quad \dot{x}(t) = \sum_{l=0}^N A_l x(t-r_l)$$

differenciálegyenletet, ahol N pozitív egész szám, $A_l (l=0,1,2,\dots,N)$ $n \times n$ -es konstans mátrix, $0=r_0 < r_1 < \dots < r_N$ valós számok. A (0.12.) karakterisztikus egyenlete a

$$(0.13.) \quad \det\left(\sum_{l=0}^N A_l e^{-r_l z} - zE\right) = 0$$

egyenlet. A (0.12.) egyenlet megoldásai és a (0.13.) egyenlet megoldásai közötti kapcsolatról nyert legfontosabb eredmény a következő:

B.Tétel. Ahhoz, hogy a (0.12.) egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil legyen szükséges és elegendő, hogy a (0.13.) egyenlet minden megoldása negatív valós részű legyen.

Ez az eredmény HALE [19], ELSZGOLC-NORKIN [12] munkáiban megtalálható. A karakterisztikus egyenlettel kapcsolatos vizsgálatok találhatóak a [9], [18], [20], [23] dolgozatokban is.

A (0.13.) egyenlet baloldala kvázipolinom, amelynek végtelen sok zéróhelye lehet. A zéróhelyeknek a komplex síkon való elhelyezkedése vizsgálatára alkalmazható például az úgynevezett amplitudó-fázis módszer [12], vagy a D-felosztás módszere [12], amit az 1. fejezetben ismertettünk.

Ezután fogalmazzuk meg Ljapunov módszerét funkcionál-differenciálegyenletekre. Tekintsünk egy $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



függvényt, amely mindenütt folytonos, és folytonosan parciálisan differenciálható minden változója szerint $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ -n, valamint pozitív definit, azaz van olyan $b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton függvény, hogy $b(|x|) \leq V(t, x)$, ha $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ezen függvény deriváltja a (0.11.) rendszer szerint a

$$\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(0)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi(0)) F_i(t, \varphi)$$

funkcionál, ahol $F_i(t, \varphi)$ ($i=1, 2, \dots, n$) az $F(t, \varphi)$ komponenseit jelenti. Ha $\dot{V} \leq 0$ akkor a 0 megoldás stabilis. A közönséges differenciálegyenletek elméletében ilyen Ljapunov függvény létezése szükséges is a 0 megoldás egyenletes stabilitásához. A funkcionál-differenciálegyenletek körében ez nincs így [12. 139. oldal] .

Funkcionál-differenciálegyenletek megoldásai stabilitásának vizsgálatára KRASZOVSKIJ bevezette a Ljapunov funkcionált [22]. Ljapunov funkcionál alkalmazásával a stabilitásra hasonló szükséges és elegendő feltételeket lehet kapni funkcionál-differenciálegyenletekre, mint a közönséges differenciálegyenletekre Ljapunov függvény segítségével. Ljapunov funkcionált alkalmaz például BURTON [6], HALE [19]. Ezen módszer alkalmazhatóságát sok esetben megnehezíti a megfelelő Ljapunov funkcionál megkonstruálása.

A funkcionál-differenciálegyenletek megoldásai stabilitásának vizsgálatára másik eljárás az, hogy a $\dot{V} \leq 0$ feltételt nem minden esetben követeljük meg. RAZUMIHIN csak olyan esetekben követelte meg a $\dot{V} \leq 0$ feltételt, amikor

$$V(t+s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0))$$

teljesül $s \in [-r, 0]$ -ra. RAZUMIHIN eljárását tovább lehet általánosítani az aszimptotikus stabilitás vizsgálatára is [27], [34].

1. Autonóm rendszerek vizsgálata, a triviális megoldás aszimptotikus stabilitása

Ebben a fejezetben az

$$(1.1.) \quad \dot{x}(t) = A(ax(t) - x(t-r))$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol A $n \times n$ -es valós mátrix a, r valós számok, $r > 0$. A vizsgálatok egyik célja, hogy megadjuk az A sajátértékeire, és az a valós számra azokat a feltételeket, amelyek teljesülése esetén az (1.1.) karakterisztikus egyenletének csak negatív valós részű megoldásai vannak. A kapott feltételek felhasználásával az (1.1.) egyenlet 0 megoldásának aszimptotikus stabilitásáról nyerünk eredményt. Célunk továbbá, hogy ATKINSON és ZHANG [2] skaláris egyenletre nyert eredményeit kiterjesszük az (1.1.) egyenletre $a = 1$ esetén.

Az (1.1.) karakterisztikus egyenletének a

$$(1.2.) \quad \det(A(a - e^{-rZ}) - zE) = 0$$

egyenletet nevezzük [12], amelynek megoldásaival jellemezhető az (1.1.) egyenlet megoldása. Az (1.2.) és az (1.1.) egyenlet megoldásai között az alábbi kapcsolat áll fenn:

C.Tétel. Ahhoz, hogy (1.1.) minden megoldása 0-hoz

tartson $t \rightarrow \infty$ esetén szükséges és elegendő, hogy az (1.2.) minden megoldása negatív valós részű legyen. Ha (1.2.)-nek a $z=0$ egyszeres multiplicitású megoldása és más nulla valós részű megoldása nincs, akkor (1.1.) minden megoldásának létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén [4].

Tehát az (1.2.) megoldásainak valós részét kell vizsgálnunk. Az (1.2.) megoldásairól tudjuk a következőt.

D.Tétel. Létezik olyan c valós szám, hogy (1.2.) minden z megoldására a $\operatorname{Re} z < c$ teljesül [12]. Ha z_1, z_2, \dots az (1.2.) megoldásainak sorozata és $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_k = -\infty$ [12].

Mivel az (1.2.) egyenlet baloldala az egész komplex síkon holomorf függvény, ezért az (1.2.) megoldásainak nincs véges torlódási helye [33].

1.1. A karakterisztikus egyenlet jellemzése.

Alakítsuk át az (1.2.) egyenletet az $a - e^{-rZ}$ kiemelésével. Ekkor az

$$(1.3.) \quad (a - e^{-rZ})^n \det\left(A - \frac{Z}{a - e^{-rZ}} E\right) = 0$$

egyenlethez jutunk. Az (1.3.) egyenlet alapján az (1.2.) megoldásairól a következőt állíthatjuk.

1.Segéd-tétel. Tegyük fel, hogy $\det(A) \neq 0$. Ekkor az (1.2.) egyenletnek azok és csak azok a z komplex számok a megoldásai, amelyek az

$$(1.4.) \quad z - \mu (a - e^{-rz}) = 0$$

egyenletek megoldásai. Itt μ az A sajátértéke, tehát az (1.4.) egyenletek száma n .

Bizonyítás. A bizonyítást két részletben végezzük. Először a 0 -tól különböző megoldásokra bizonyítjuk az állítást, majd a $z = 0$ -ra.

(i) Legyen $z \neq 0$ megoldása (1.2.)-nek. Ekkor az $a - e^{-rz} = 0$ nem állhat fenn, mert akkor (1.2.)-ből $z = 0$ következik, ami ellentmond a feltételünknek. Így az (1.2.) egyenlet ekvivalens az (1.3.)-ből kapott,

$$\det\left(A - \frac{z}{a - e^{-rz}} E\right) = 0$$

egyenlettel. Ez az egyenlet azokra és csak azokra a $z \neq 0$ komplex számokra teljesül, amelyekre a

$$\frac{z}{a - e^{-rz}} = \mu$$

egyenlőség fennáll A valamely μ sajátértékére. Ebből átrendezéssel kapjuk (1.4.)-t.

(ii) Tegyük fel, hogy $z = 0$ megoldása (1.2.)-nek. Behelyettesítés után a

$$\det(A(a-1)) = 0$$

egyenlőséget kapjuk, ami csak akkor teljesül, ha $a = 1$. Tehát $z = 0$ (1.2.)-nek csak $a = 1$ esetén lehet megoldása, mivel $\det(A) \neq 0$. Ha (1.3.)-ba $a = 1$ -t helyettesítünk, akkor az

$$(1 - e^{-rz})^n \det\left(A - \frac{z}{1 - e^{-rz}} E\right) = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1 - e^{-rz}} = \frac{1}{r}$, ezért a $z = 0$ legalább n -szeres megoldása ennek az egyenletnek. Tehát (1.2.)-nek $a = 1$ esetén a 0 n -szeres megoldása, ha

$$\det\left(A - \frac{1}{r} E\right) \neq 0,$$

azaz az $\frac{1}{r}$ nem sajátértéke A -nak, és $n+k$ szoros megoldása, ha az $\frac{1}{r}$ k -szoros sajátértéke A -nak. Másrészt a $z = 0$ (1.4.)-nek is csak $a = 1$ esetén lehet megoldása. Ha (1.4.)-be beírjuk az $a = 1$ -t, akkor a

$$z - \mu (1 - e^{-rz}) = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek a $z = 0$ az A minden μ sajátértékére megoldása. Ha $\mu = \frac{1}{r}$, akkor ennek az egyenletnek a $z = 0$ kétszeres megoldása. A 0 magasabb multipllicitású megoldás nem lehet, mivel a $(z - (1 - e^{-rz}))' = r^2 e^{-rz} \neq 0$, ha z komplex szám. Tehát, ha $a = 1$ és $\frac{1}{r}$ nem sajátértéke A -nak, akkor a $z = 0$ egyszeres megoldása (1.4.)-nek A minden

μ sajátértékére, azaz (1.2.)-nek n -szeres megoldása.

Ha $a = 1$ és $\frac{1}{r}$ k -szoros sajátértéke A -nak, akkor az (1.4.) egyenletek közül k -nak a 0 kétszeres megoldása, tehát (1.2.)-nek $n+k$ -szoros megoldása. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Ezek után az (1.4.) egyenlet megoldásait kell vizsgálnunk. Az (1.4.) egyenlet baloldala egy kvázipolinom, jelöljük $f_a(z)$ -vel. Tehát $f_a(z)$ zéróhelyei az (1.2.) egyenlet megoldásai lesznek, sőt ha $z \neq 0$ az (1.4.) k -szoros megoldása, és μ az A j -szeres sajátértéke, akkor $z \neq 0$ az (1.2.) egyenlet $j \cdot k$ -szoros megoldása lesz [12].

Vezessük be a $\mu = Re^{i\varphi}$ jelölést, ahol $R > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Így a vizsgált egyenlet

$$(1.5.) \quad z - Re^{i\varphi} (a - e^{-rz}) = 0$$

alakú.

Az (1.5.) zéróhelyeinek elhelyezkedését a D -felosztás módszerével vizsgáljuk. A D -felosztás módszerének lényege az, hogy az (a, R, φ) tér $-\infty < a < \infty$, $R > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ feltételeknek eleget tevő részében meghatározzuk azokat az (a, R, φ) pontokat, ahol $f_a(iy) = 0$ teljesül valamilyen y -ra, azaz (1.5.)-nek nulla valós részű megoldása van. Ezek a pontok felületeken helyezkednek el. Ha a -t, R -t és φ -t úgy választjuk, hogy az (a, R, φ) pont rajta van egy ilyen felületen, akkor (1.5.)-nek 0

valós részű megoldása is lesz. A felületek meghatározása után megvizsgáljuk, hogy a felületen áthaladva hogyan változik (1.5.) megoldásainak valós része. Mivel (1.5.) megoldásainak valós része folytonosan függ a -tól, R -től és φ -től, ezért egy negatív valós részű megoldásból csak úgy lehet pozitív valós részű megoldás, hogy közben áthaladtunk egy olyan felületen, amelyen nulla valós részű megoldás is van. A vizsgálatok eredményeként az (a, R, φ) teret olyan tartományokra bonthatjuk, amelyekben az (1.5.) pozitív valós részű zéróhelyeinek a száma állandó.

Írjunk z helyett $x+iy$ -t és bontsuk (1.5.)-ben szét a valós és képzetes részt. Ekkor az

$$(1.6.) \quad x - R \cos \varphi + R e^{-rx} \cos(\varphi - ry) = 0$$

$$(1.7.) \quad y - R \sin \varphi + R e^{-rx} \sin(\varphi - ry) = 0$$

egyenletekhez jutunk. x helyébe 0 -t helyettesítve az

$$(1.8.) \quad -R \cos \varphi + R \cos(\varphi - ry) = 0$$

$$(1.9.) \quad y - R \sin \varphi + R \sin(\varphi - ry) = 0$$

egyenletrendszer^ehez jutunk. Ezen négy egyenlet alapján (1.5.) megoldásairól a következőket állíthatjuk.

2. Segéd-tétel. Ha $a \cdot \cos \varphi < -1$, akkor (1.5.)-nek csak negatív valós részű megoldásai vannak. Ha $a \cdot \cos \varphi > 1$,

akkor (1.5.)-nek van egy pozitív valós részű megoldása, a többi megoldása negatív valós részű.

Bizonyítás. (1.8.)-ből következik, hogy $a \cdot \cos \varphi = \cos(\varphi - ry)$. Nincs olyan y , amelyre $a \cdot \cos \varphi > 1$ esetén ez az egyenlet teljesülne. Az (1.6.) egyenletből az

$$x = Ra \cos \varphi - Re^{-rx} \cos(\varphi - ry)$$

egyenlet következik. Ez az egyenlet pozitív x -re $a \cdot \cos \varphi < -1$ esetén nem teljesülhet, mivel ebben az esetben a jobboldal

$$Ra \cos \varphi + Re^{-rx} \cos(\varphi - ry) < -R + R = 0.$$

Az állítás másik részének a bizonyításához felhasználjuk Rouché tételét [33]. Tudjuk, hogy $a \cdot \cos \varphi > 1$ és

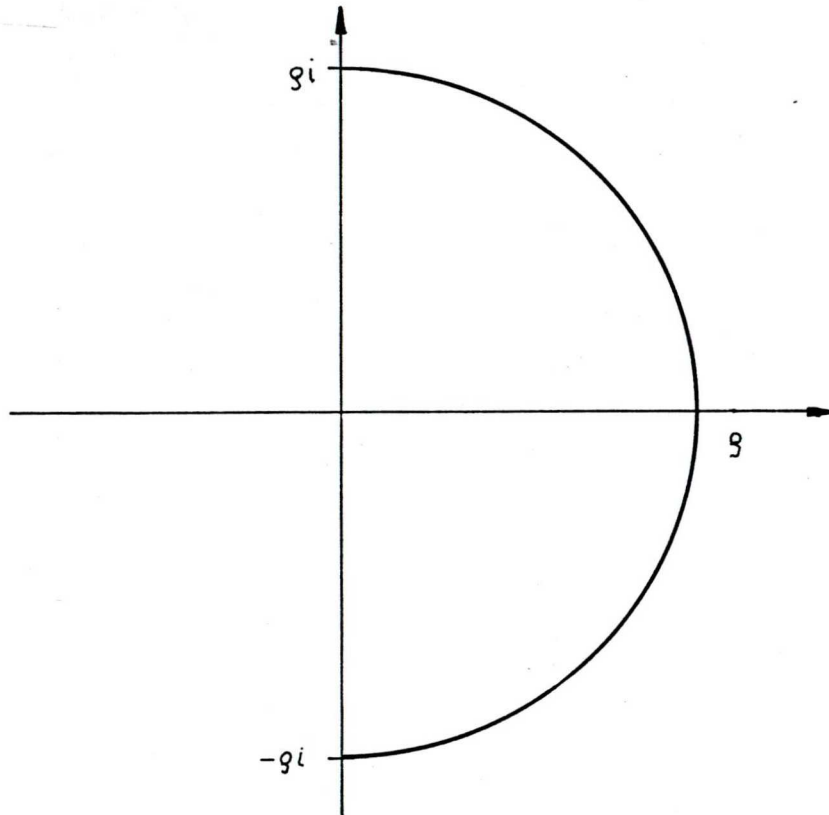
$$f_a(z) = z - \mu a + \mu e^{-rz}.$$

Vezessük be a $h(z) = z - \mu a$, $g(z) = \mu e^{-rz}$ függvényeket, ezzel

$$f_a(z) = h(z) + g(z).$$

Tekintsük a komplex síkon azt a C_ϱ zárt görbét, amely a ϱ sugarú, origó középpontú kör $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkba eső részéből, valamint a képzetes tengely $-\varrho \cdot i$ és $\varrho \cdot i$ közé eső részéből áll. A D.Tétel és a bizonyítás első része alapján, ha ϱ elég nagy, akkor $f_a(z)$ -nek a C_ϱ görbén

és a C_g görbén kívül a $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkban nincs zéróhelye. A C_g görbét a 2. ábrán láthatjuk.

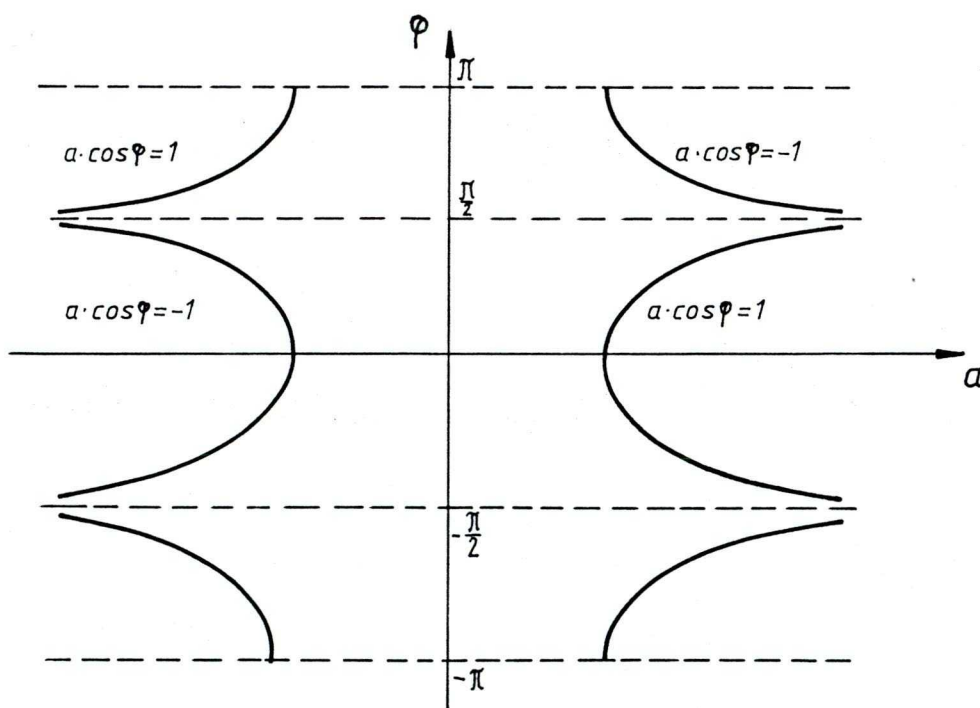


2. ábra

Rouché tételének alkalmazásához be kell látni, hogy a C_g görbén $|h(z)| > |g(z)|$. Ha $z = iy$, akkor $|h(z)| = |iy - Ra e^{i\varphi}| = \sqrt{R^2 a^2 \cos^2 \varphi + (y - Ra \sin \varphi)^2}$, $|g(z)| = |R e^{i\varphi} e^{-riy}| = R$, így ha $|a \cos \varphi| > 1$, akkor $\sqrt{R^2 a^2 \cos^2 \varphi + (y - Ra \sin \varphi)^2} \geq |Ra \cos \varphi| > R$. Ha $z = g e^{i\alpha}$ ($|\alpha| < \frac{\pi}{2}$), akkor, mivel $\lim_{g \rightarrow \infty} |g(z)| = \lim_{g \rightarrow \infty} R e^{-g \cos \alpha} = 0$, valamint $|z - \mu a|^2 = (g \cos \alpha - Ra \cos \varphi)^2 + (g \sin \alpha - Ra \sin \varphi)^2$, ezért $\lim_{g \rightarrow \infty} |h(z)| = \infty$. Tehát, ha g elég nagy akkor a C_g

göribén $|h(z)| > |g(z)|$. Rouché tétele alapján $h(z) = z - \mu$ a függvénynek a C_ρ görbe belsejében ugyanannyi zéróhelye van, mint a $h(z)+g(z) = f_a(z)$ függvénynek. Mivel $h(z)$ -nek pontosan egy zéróhelye van a görbe belsejében, ezért $f_a(z)$ -nek is. Így a segédállítás igaz.

A továbbiakban az (a, φ) térnek az $|\cos \varphi| \leq 1$ feltételeknek eleget tevő részét fogjuk vizsgálni. Az (a, φ) sík ezen feltételnek eleget tevő pontjait láthatjuk a 3. ábrán.



3. ábra

Legyen tehát $|\cos \varphi| \leq 1$. Ekkor az (1.8.) egyenletből
az



$$(1.10.) \quad \varphi - r y = \arccos(a \cos \varphi) + 2 k \pi$$

vagy

$$(1.11.) \quad \varphi - r y = - \arccos(a \cos \varphi) + 2 k \pi$$

egyenletekhez jutunk. Az (1.10.)-t illetve az (1.11.)-t az (1.9.)-be behelyettesítve az

$$y = R(a \sin \varphi - \sin \arccos(a \cos \varphi)),$$

illetve az

$$y = R(a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi))$$

feltételeket kapjuk. Tehát $f_a(iy) = 0$ csak olyan y -ra teljesülhet, amelyre az (1.10.) alapján az

$$(1.12.) \quad y = \frac{1}{r}(\varphi - \arccos(a \cos \varphi) + 2 k \pi)$$

és

$$(1.13.) \quad y = R(a \sin \varphi - \sin \arccos(a \cos \varphi))$$

feltételek, vagy az (1.11.) alapján az

$$(1.14.) \quad y = \frac{1}{r}(\varphi + \arccos(a \cos \varphi) + 2 k \pi)$$

és

$$(1.15.) \quad y = R(a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi))$$

feltételek teljesülnek. Az (1.10.) és (1.11.) formulák

$|a| = 1$ esetén speciális alakúak, ezért először ezeket az eseteket vizsgáljuk.

1.2. Az aszimptotikus stabilitást kizáró eset vizsgálata

Legyen tehát $a = 1$, így (1.5.)-ből

$$f_1(z) = z - \mu + \mu e^{-zr}$$

Az 1. Segédtétel bizonyítása alapján tudjuk, hogy $z = 0$ zéróhelye $f_1(z)$ -nek, és ha $a \neq 1$, akkor $z = 0$ nem lehet zéróhelye $f_a(z)$ -nek.

Tekintsük az $(1, R, \varphi)$ síkon a következő görbét:

$$G_{10} = \{(1, R, \varphi) \mid Rr |\sin \varphi| = |\varphi|, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \pi \text{ és } R = \frac{1}{r}, \text{ ha } \varphi = 0\}$$

$$G_{1k} = \{(1, R, \varphi) \mid Rr |\sin \varphi| = |\varphi| + k\pi, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \pi\} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ezen G_{1k} görbék fogják határolni azokat a tartományokat, amelyekben az $f_1(z)$ -nek ugyanannyi pozitív valós részű zéróhelye van. A következő állítások az $f_1(z)$ $z = 0$ -tól különböző zéróhelyeiről szólnak.

3. Segédtétel. $f_1(z)$ -nek akkor és csak akkor vannak 0 valós részű zéróhelyei, ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{1k}$. Minden $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{1k}$ esetén pontosan egy 0 valós részű zéróhely van.

Bizonyítás. Helyettesítsünk (1.12.)-be és (1.13.)-ba $a = 1$ -t, ekkor az $y = \frac{1}{r} 2k\pi$ és az $y = R0$ egyenlethez jutunk, amelyekből $y = 0$ következik, tehát a $z = 0$ megoldást kaptuk. Az (1.14.)-be és (1.15.)-be behelyettesítve az $a = 1$ -t az

$$(1.16.) \quad y = \frac{1}{r}(2\varphi + 2k\pi)$$

$$(1.17.) \quad y = R^2 \sin \varphi$$

összefüggésekhez jutunk. Ezen összefüggésekből az

$$(1.18.) \quad \varphi + k\pi = Rr \sin \varphi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

feltételhez jutunk. Tehát, ha $f_1(z)$ -nek van 0 valós részű zéróhelye, akkor a $\mu = Re^{i\varphi}$ eleget tesz (1.18.)-nak. Mivel $R > 0$, ezért ha $-\pi < \varphi < 0$, akkor $k \leq 0$, ha $0 < \varphi < \pi$, akkor $k \geq 0$ feltételeknek kell teljesülni. Ezen utóbbi feltételek mellett (1.18.) éppen a G_{1k} görbék definíciójában szereplő formulát adja. Most bizonyítsuk be, hogy minden $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{1k}$ esetén legfeljebb egy⁰ valós részű zéróhelye van $f_1(z)$ -nek. Tegyük fel, hogy van olyan $\mu_0 \in \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{1k}$, hogy $f_1(iy_1) = f_1(iy_2) = 0$ úgy, hogy $y_1 y_2 \neq 0$ és $y_1 \neq y_2$. Legyen $\mu_0 = R_0 e^{i\varphi_0}$. Az (1.16.) és (1.17.) $R = R_0$, $\varphi = \varphi_0$ esetén teljesül y_1 -re és y_2 -re. (1.16.)-ból

$$ry_1 = 2\varphi_0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$ry_2 = 2\varphi_0 + 2j\pi \quad j \in \mathbb{Z}$$

feltételeket kapjuk. (1.17.)-ből

$$y_1 = 2 R_0 \sin \varphi_0$$

$$y_2 = 2 R_0 \sin \varphi_0$$

Tehát $y_1 = y_2$. Ez ellentmondás, így minden $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{1k}$ esetén legfeljebb egy $y \neq 0$ tesz eleget az $f_1(iy) = 0$ egyenletnek. Másrészt, ha $\mu = \text{Re}^{i\varphi}$ és μ eleget tesz (1.18.)-nak, akkor $y = 2R \sin \varphi$ megoldása lesz az $f_1(iy) = 0$ egyenletnek. Ezzel a bizonyítás teljes.

Vizsgáljuk meg a G_{1k} görbét. A definíciókból látható, hogy a görbék a $\varphi = 0$ egyenesre szimmetrikusak. Azonkívül az

$$R = \frac{\varphi + k\pi}{r \sin \varphi}$$

előállításból következik, hogy $0 < \varphi < \pi$ esetén

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi} R = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\varphi + k\pi}{r \sin \varphi} = \infty.$$

Ha $k \neq 0$, akkor

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} R = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi + k\pi}{r \sin \varphi} = \infty.$$

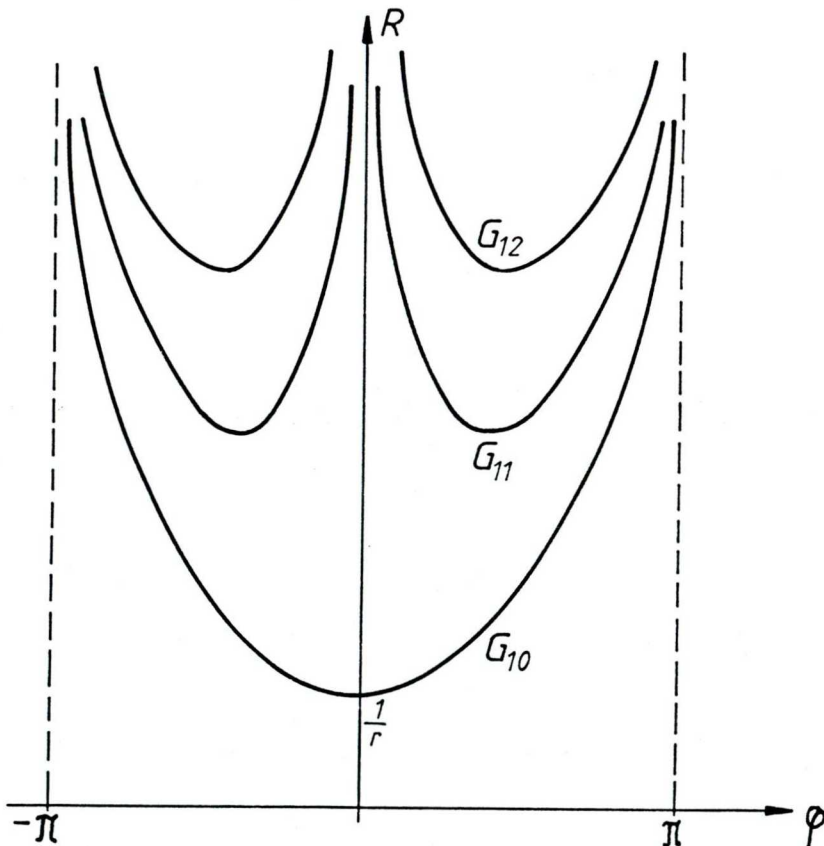
Ha $k = 0$, akkor

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} R = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{r \sin \varphi} = \frac{1}{r}$$

A G_{10} görbe a $(-\pi, 0)$ intervallumon monoton csökken, a $(0, \pi)$ intervallumon monoton nő, $\varphi = 0$ -ban minimuma van, amelynek értéke $\frac{1}{r}$. A G_{10} görbe a $(-\pi, \pi)$ intervallumon konvex.

A G_{1k} ($k \neq 0$) görbék két görbéből állnak, amelyek egymás tükörképei a $\varphi = 0$ egyenesre. A G_{1k} görbék konvexek, a

$(0, \varphi_0)$ intervallumon monoton csökkennek, a $(\varphi_0, \widehat{\Pi})$ intervallumon monoton nőnek, azaz φ_0 -ban minimumuk van. Itt φ_0 a $\operatorname{tg} \varphi = \varphi + k\widehat{\Pi}$ egyenlet megoldása. Ha $k \rightarrow \infty$, akkor a minimumhelyek $\frac{\widehat{\Pi}}{2}$ -höz tartanak. Mivel $\frac{\varphi + k\widehat{\Pi}}{r \sin \varphi} < \frac{\varphi + (k+1)\widehat{\Pi}}{r \sin \varphi}$ minden $0 < \varphi < \widehat{\Pi}$ -re, ezért rögzített φ esetén a k növekedésével a megfelelő $R(\varphi)$ is növekszik, azaz $G_{1j} \cap G_{1k} = \emptyset$, ha $j \neq k$. A G_{1k} görbék a 4. ábrán vázoltuk.



4. ábra

A G_{1k} görbék az $(1, R, \varphi)$ síkot ($R > 0, -\tilde{\Pi} < \varphi \leq \tilde{\Pi}$) összefüggő tartományokra bontják. Ha a μ -t egy tartományból választjuk, akkor $f_1(z)$ -nek ugyanannyi pozitív valós részű zéróhelye van, μ változtatásával csak akkor változhat meg az $f_1(z)$ pozitív valós részű zéróhelyeinek a száma, ha μ áthalad valamely G_{1k} görbén.

Tekintsük ezeket a tartományokat, legyen

$$T_{10} = \left\{ (1, R, \varphi) \mid 0 < R < \frac{\varphi}{r \sin \varphi}, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \tilde{\Pi}, 0 < R < \frac{1}{r}, \text{ ha } \varphi = 0, 0 < R < \infty, \text{ ha } \varphi = \tilde{\Pi} \right\}$$

$$T_{11} = \left\{ (1, R, \varphi) \mid \frac{\varphi}{r \sin \varphi} < R < \frac{|\varphi| + \tilde{\Pi}}{r |\sin \varphi|}, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \tilde{\Pi}, \frac{1}{r} < R < \infty, \text{ ha } \varphi = 0 \right\}$$

$$T_{1k} = \left\{ (1, R, \varphi) \mid \frac{|\varphi| + (k-1)\tilde{\Pi}}{r |\sin \varphi|} < R < \frac{|\varphi| + k\tilde{\Pi}}{r |\sin \varphi|}, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \tilde{\Pi} \right\} \quad k=2,3,4\dots$$

A továbbiakban meg fogjuk határozni, hogy T_{10} -ban és T_{11} -ben választva a μ -t $f_1(z)$ -nek hány pozitív valós részű zéróhelye van.

4. Segéd-tétel. Ha $\mu \in T_{10}$, akkor $f_1(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelye van.

Bizonyítás. Elég T_{10} -nak csak egy pontját megvizsgálni. Legyen $\varphi = \tilde{\Pi}$ és $R > 0$. Ekkor

$$f_1(z) = z + R - Re^{-rz}.$$

Legyen $z = x + iy$ és tegyük fel, hogy $f_1(z) = 0$. Ekkor $\operatorname{Re} f_1(z) = \operatorname{Im} f_1(z) = 0$, azaz

$$\begin{aligned}x + R &= Re^{-rx} \cos ry, \\ y &= Re^{-rx} \sin ry.\end{aligned}$$

Ezekből az

$$(x+R)^2 + y^2 = R^2 e^{-2rx}$$

egyenlőséget kapjuk. Ez az egyenlőség $x > 0$ esetén nem teljesülhet, mivel ilyen x -re

$$(x+R)^2 + y^2 > R^2 > R^2 e^{-2rx}$$

5.Segéd-tétel. Ha a G_{1k} görbén áthaladunk T_{1k-1} -ből T_{1k} -ba, akkor az $f_1(z)$ nulla valós részű zéróhelyeinek a valós része növekszik.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk [12] alapján, hogy a

$$dx = -Re \frac{\frac{\partial f_a}{\partial R} dR + \frac{\partial f_a}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial f_a}{\partial z}}$$

kifejezés nem negatív a G_{1k} görbéken. Kiszámolva a deriváltakat kapjuk, hogy

$$dx = -Re \frac{(-ae^{i\varphi} + e^{-rx} e^{i(\varphi - ry)}) dR + (Raie^{i\varphi} + Rie^{-rx} e^{i(\varphi - ry)}) d\varphi}{1 - Rre^{i(\varphi - ry)} e^{-rx}}$$

Legyen $\varphi = \text{konstans}$, ekkor $d\varphi = 0$. Szorozzunk be a nevező konjugáltjával, így a

$$dx = -\operatorname{Re} \frac{-ae^{i\varphi} + e^{-rx} e^{i(\varphi - ry)} - Rre^{-rx}(e^{-rx} - ae^{iry})}{(1 - Rre^{-rx} \cos(\varphi - ry))^2 + (Rr \sin(\varphi - ry) e^{-rx})^2} dR$$

kifejezést kapjuk. Vegyük figyelembe, hogy a G_{1k} görbéken $x = 0$, ezért

$$(1.19.) \quad dx = \frac{a \cos \varphi - \cos(\varphi - ry) + Rr(1 - a \cos ry)}{(1 - Rr \cos(\varphi - ry))^2 + (Rr \sin(\varphi - ry))^2} dR$$

A nulla valós részű zéróhelyre (1.8.) is teljesül, ezért $a = 1 - re$ az (1.19.) számlálója nem negatív. Ha R növekszik, akkor $dR > 0$, ezért $dx \geq 0$. Bebizonyíthatjuk, hogy dx csak bizonyos y -ra lehet nulla, ugyanis (1.16.)-t felhasználva a G_{1k} görbén a nulla valós részű zéróhelyre az

$$1 - \cos ry = 1 - \cos(2\varphi + 2k\pi) = 1 - \cos 2\varphi$$

teljesül. Ez a kifejezés csak $\varphi = k\pi$ esetén nulla, azaz a mi esetünkben csak $\varphi = 0$ esetén, a G_{10} görbén. A többi esetben $dx > 0$. Tehát ha a $\varphi = 0$ egyenessel párhuzamosan haladunk át a G_{1k} görbén az R növelésével, akkor az $f_1(z)$ nulla valós részű zéróhelyeinek a valós része növekszik.

A 4. Segéd-tétel alapján T_{10} -ban csak negatív valós részű zéróhelye van $f_1(z)$ -nek, ezért a G_{10} -ra érve egy negatív valós részű zéróhelyből nulla valós részű zéróhely lesz.

Ebből a nulla valós részű zéróhelyből T_{11} -ben pozitív valós részű zéróhely lesz. Ha bebizonyítjuk, hogy a nulla valós részű zéróhelyek multiplicitása egy, akkor, felhasználva a 3. Segédtelet, azt kapjuk, hogy T_{11} -ben $f_1(z)$ -nek pontosan egy pozitív valós részű zéróhelye van.

Tudjuk, hogy

$$f_1'(z) = 1 - \mu r e^{-zr}$$

$$f_1''(z) = \mu r^2 e^{-zr} \neq 0, \text{ ha } \mu \neq 0,$$

ezért $f_1(z)$ -nek legfeljebb kétszeres zéróhelyei lehetnek. A kétszeres zéróhelyek elhelyezkedéséről szól a következő állítás.

6. Segédtelet. $f_1(z)$ -nek $\mu = \frac{1}{r}$ esetén a $z = 0$ kétszeres zéróhelye, a többi kétszeres zéróhelye pozitív valós részű, és minden G_{1k} , ($k = 2j \geq 2$) görbén pontosan két olyan értéke van a μ -nek, amelynél $f_1(z)$ -nek kétszeres zéróhelye van. A G_{1k} görbéken kívül eső μ -re nincs $f_1(z)$ -nek kétszeres zéróhelye.

Bizonyítás. Legyen z_0 az $f_1(z)$ kétszeres zéróhelye. Ekkor $f_1(z_0) = f_1'(z_0) = 0$, azaz a

$$z_0 - \mu (1 - e^{-rz_0}) = 0$$

és

$$(1.20.) \quad 1 - \mu r e^{-z_0 r} = 0$$

egyenleteknek kell teljesülni. Ebből a két egyenletből $z_0 = \mu - \frac{1}{r}$. Ha ezt visszahelyettesítjük (1.20.)-ba azt kapjuk, hogy

$$1 = R r e^{i\varphi} e^{-(\operatorname{Re} i\varphi - \frac{1}{r})r}$$

Ebben az egyenletben válasszuk szét a valós és képzetes részt, így az

$$(1.21.) \quad 1 = R r e^{1-Rr\cos\varphi} \cos(\varphi - Rr\sin\varphi)$$

$$(1.22.) \quad 0 = R r e^{1-Rr\cos\varphi} \sin(\varphi - Rr\sin\varphi)$$

egyenletrendszeret kapjuk. (1.22.)-ből

$$\sin(\varphi - Rr\sin\varphi) = 0$$

következik, amelyből

$$\varphi - Rr\sin\varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

összefüggéshez jutunk. (1.21.) miatt $\cos(\varphi - Rr\sin\varphi) > 0$ kell, hogy legyen, ezért $k = 2j$. Tehát ha $f_1(z)$ -nek van

részű zéróhelye. A bizonyítás teljességéhez még hozzátartozik annak megmutatása, hogy vannak olyan pontok az (R, φ) síkon, amelyek (1.23.)-t és (1.25.)-t is kielégítik.

Legyen b az $1 + \ln x = -x$ egyenlet megoldása, és tekintsük az $(1, R, \varphi)$ síkon az (1.25.) egyenlettel definiált L_1 görbét:

$$L_1 = \{(1, R, \varphi) \mid \tilde{\Pi} < \varphi \leq \tilde{\Pi}, Rr \cos \varphi = 1 + \ln Rr, Rr \geq b\}$$

Az állítás az, hogy az L_1 görbének a G_{10} -val pontosan egy a G_{1k} ($k \geq 1$) görbékkel pontosan két metszéspontja van. (1.25.) átrendezésével a

$$(1.26.) \quad \cos \varphi = \frac{1 + \ln Rr}{Rr}$$

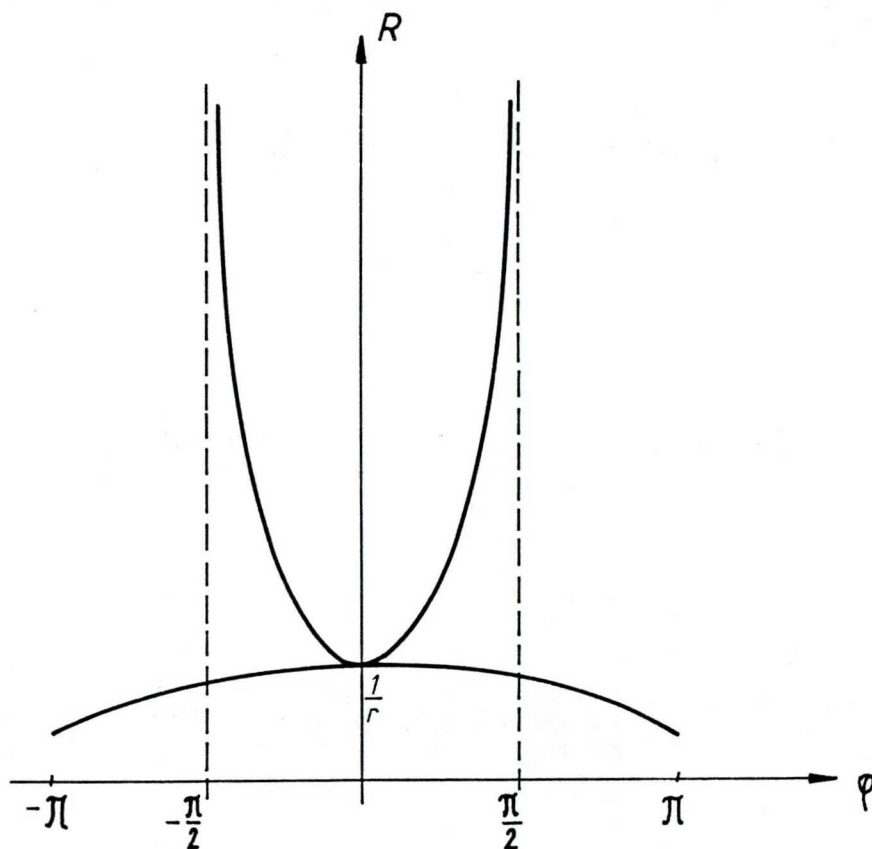
összefüggéshez jutunk. Ha $Rr \geq b$, akkor $-1 \leq \frac{1 + \ln Rr}{Rr} \leq 1$,

valamint figyelembe véve a \cos függvény párosságát az L_1 görbe szimmetrikus a $\varphi = 0$ egyenesre, és minden $Rr \geq b$ esetén pontosan két pont tesz eleget (1.26.)-nak az (R, φ) síkon. Mivel $\frac{1 + \ln Rr}{Rr}$ kifejezés $Rr > 1$ -re szigorúan

monoton csökken és $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln Rr}{Rr} = 0$, ezért ha $Rr > 1$ és $0 < \varphi < \tilde{\Pi}$, akkor a $\varphi = \arccos \frac{1 + \ln Rr}{Rr}$ függvény szigo-

rúan monoton nő és $\lim_{R \rightarrow \infty} \arccos \frac{1 + \ln Rr}{Rr} = \frac{\tilde{\Pi}}{2} - 0$. Ha $b < Rr < 1$,

akkor a $\varphi = \arccos \frac{1+\ln Rr}{Rr}$ szigorúan monoton csökken és értékkészlete $(0, \pi)$. Ha $Rr = 1$, akkor $\varphi = 0$. Az L_1 görbe az 5. ábrán látható.



5. ábra

Összehasonlítva a 4. és 5. ábrát látszik, hogy $L_1 \cap G_{1k}$ nem üres, ha $k = 0, 2, 4, \dots$, azonkívül $L_1 \cap G_{10} = \left\{ \left(\frac{1}{r}, 0 \right) \right\}$.

Az eddigi vizsgálatok eredményeit a következő tételben foglalhatjuk össze:

1. Tétel. Ha $\mu \in G_{1k} \cup T_{1k}$, akkor $f_1(z)$ -nek pontosan k darab pozitív valós részű zéróhelye van.

Bizonyítás. A 4. Segédtétel alapján tudjuk, hogy ha $\mu \in T_{10}$, akkor $f_1(z)$ -nek a $z = 0$ mellett csak negatív valós részű zéróhelyei vannak. Legyen $\varphi = \varphi_0 \neq 0$, rögzített. Ha R növelésével a $\varphi = \varphi_0$ egyenesen T_{10} -ból G_{10} -re érünk, akkor valamelyik negatív valós részű zéróhelyből nulla valós részű lesz. Tehát $\mu \in G_{10}$ esetén $f_1(z)$ -nek zéróhelye a $z = 0$, valamint egy tiszta képzetes szám, a többi zéróhely pedig negatív valós részű. Ha R -t tovább növeljük, akkor az 5. Segédtételből következik, hogy a tiszta képzetes zéróhelyből pozitív valós részű zéróhely lesz. Tehát $\mu \in T_{11}$ esetén $f_1(z)$ -nek a $z = 0$ mellett van egy pozitív valós részű zéróhelye, a többi zéróhelye negatív valós részű. Még azt kell belátni, hogy ha a

$\varphi = \varphi_0$ egyenesen haladunk R növelésével, akkor pozitív valós részű zéróhelyből 0 valós részű zéróhely nem lesz. Ezt indirekt bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy T_{1k} -ből G_{1k} -ra érve valamelyik pozitív valós részű zéróhely 0 valós részűvé válik. Ekkor a G_{1k} egy kicsi környezetében erre a zéróhelyre a $dx < 0$ feltételnek kell teljesülni,

viszont a G_{1k} görbén már $dx > 0$, mint ahogy azt az 5.Segéd-tételben megállapítottuk. Ez ellentmondás. Így a bizonyítás kész.

Visszatérve az (1.1.) egyenlethez, $a = 1$ esetén az

$$(1.27.) \quad \dot{x}(t) = A(x(t) - x(t-r))$$

egyenletet kapjuk. Az 1.Tétel és az 1.Segéd-tétel alapján igaz a következő állítás.

1.Következmény. Ha A minden sajátértéke T_{10} -ba esik, akkor (1.27.) minden megoldásának létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén.

Bizonyítás. Az 1.Segéd-tétel alapján az (1.27.) karakterisztikus egyenletének a $z = 0$ n -szeres megoldása, mivel $\frac{1}{r}$ nem lehet sajátértéke A -nak a feltételeink szerint. Az (1.27.) $z = 0$ -hoz tartozó n darab lineárisan független megoldása ebben az esetben az R^n -ből vett n darab lineárisan független vektor lesz. Mivel az (1.27.) karakterisztikus egyenletének a többi megoldása negatív valós részű, ezért a C.Tételből következik, hogy igaz az állítás.

A megoldások határértékéről szól a 2.Tétel.

2.Tétel. Legyen $g(t)$ adott folytonos függvény $[-r, 0]$ -on. Ha A minden sajátértéke T_{10} -ba esik, akkor az (1.27.) $(0, g)$ -n átmenő megoldásának a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén

$$(E - rA)^{-1} \left(g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t) dt \right)$$



Bizonyítás. Integráljuk (1.27.)-t 0-tól nr -ig és vegyük figyelembe, hogy $[-r, 0]$ -n $x(t) \equiv g(t)$,

$$\int_0^{nr} \dot{x}(t) dt = \int_0^{nr} A(x(t) - x(t-r)) dt$$

$$x(nr) = x(0) + \int_0^{nr} Ax(t) dt - \int_{-r}^0 Ag(t) dt - \int_0^{(n-1)r} Ax(t) dt$$

$$x(nr) = g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t) dt + \int_0^{nr} Ax(t) dt$$

$$x(nr) = g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t) dt + \int_0^r x((n-1)r+u) du .$$

Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ létezik, legyen ez K , így $\lim_{n \rightarrow \infty} x(nr) = K$, és mivel az $x((n-1)r+u)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál, ezért a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(nr) = g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t) dt + \int_0^r \lim_{n \rightarrow \infty} Ax((n-1)r+u) du$$

kifejezésből a

$$K = g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t) dt + \int_0^r AK du$$

egyenlőséget kapjuk. Így

$$(E-rA)K = g(0) - \int_{-r}^0 Ag(t)dt,$$

amiből a tételben szereplő formulát kapjuk.

Az (1.27.) megoldásának aszimptotikus viselkedését akkor is tudjuk jellemezni, ha a megoldásoknak nem létezik a határértéke. Legyen ugyanis $\mu \neq \frac{1}{r}$ az A sajátértéke k -szoros multiplicitással és legyen λ a μ -höz tartozó $f_1(z)$ zéróhelye. Ekkor λ a (1.27.) karakterisztikus egyenletének vagy k -szoros vagy $2k$ -szoros megoldása. Jelöljük ezt a multiplicitást m -mel. Ekkor (1.27.)-nek az $e^{\lambda t}$ megoldása lesz és vannak olyan $p_j(t)$ polinomok, fokszámuk j , $0 \leq j \leq m-1$, hogy $p_j(t)e^{\lambda t}$ is megoldása lesz (1.27.)-nek. Ha $\operatorname{Re} \lambda > 0$, akkor $p_j(t)e^{\lambda t}$ nem korlátos függvény, ha $\operatorname{Re} \lambda < 0$, akkor $p_j(t)e^{\lambda t}$ korlátos függvény. $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ esetén $e^{\lambda t}$ korlátos függvény, míg $j \geq 1$ -re $p_j(t)e^{\lambda t}$ nem korlátos függvény. A

$\lambda = 0$ -hoz $\mu \neq \frac{1}{r}$ esetén konstans megoldás tartozik, amely korlátos. Ha $\mu = \frac{1}{r}$ k -szoros sajátértéke A-nak, akkor a $\lambda \neq 0$ megoldásokra érvényesek az előbbiek, míg a

$\lambda = 0$ megoldáshoz k darab lineárisan független konstans tartozik, ezek korlátos megoldások, azonkívül k darab $p_j(t)$ polinom, $1 \leq j \leq k$, amelyek nem korlátos megoldások.

Így (1.27.) megoldásait az alábbi módon írhatjuk fel.

3.Tétel. Ha $\det(A) \neq 0$, akkor (1.27.) minden megoldása felírható az

$$x(t) = y(t)c + y_0(t)$$

alakban, ahol $y_0(t)$ korlátos megoldás, $y(t)$ pedig nem korlátos megoldásokból álló mátrix, amelynek oszlopai $p_j(t)e^{\lambda t}$ alakúak ($0 \leq j \leq m-1$, ha $\operatorname{Re} \lambda > 0$, és $1 \leq j \leq m-1$, ha $\operatorname{Re} \lambda = 0$, de $\lambda \neq 0$, valamint $1 \leq j \leq k$, ha $\lambda = 0$ és $\frac{1}{r}$ az A k -szoros sajátértéke), c konstansokból álló vektor, amelynek dimenziószáma megegyezik $y(t)$ oszlopainak a számával.

Ez a Tétel általánosítása az ATKINSON és ZHANG [2] munkájában skaláris egyenletre kimondott 1.2.Tételnek.

Ismert, hogy közönséges lineáris differenciálegyenletnél a megoldások alaprendszeréből az összes többi megoldást előállíthatjuk. Mivel az (1.27.) egyenlet karakterisztikus egyenletének végtelen sok megoldása van, ezért itt az alaprendszer is végtelen sok elemű lenne. Bizonyos esetekben azonban ki lehet választani véges sok megoldást, amelyek dominánsok. Ebben az esetben aszimptotikusan közönségesnek nevezzük a differenciálegyenletet.

A pontos definíció GYŐRI [14,15] munkái alapján a következő.

3. Definíció. A (0.11.) funkcionál-differenciálegyenletet lineáris F esetén aszimptotikusan közönségesnek nevezzük a $[t_0, \infty)$ intervallumon, ha van olyan

$U : [t_0 - r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ függvény, hogy

i.) $\det(U(t)) \neq 0$, ha $t_0 - r \leq t < \infty$.

ii.) Minden x megoldásra igaz a következő formula

$$x(t) = U(t)(c(x) + o(1)), \quad t \rightarrow \infty$$

ahol $c(x)$ egy az x megoldástól függő vektor.

iii.) minden $c \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik egy x megoldás úgy, hogy $c(x) = c$.

2. Következmény. Ha A minden sajátértéke T_{11} -be esik, akkor (1.27.) aszimptotikusan közönséges.

Bizonyítás. Ekkor $y(t)$ $n \times n$ -es mátrix, oszlopai függetlenek, így $y^{-1}(t)$ létezik. A 3. Tétel alapján (1.27.) minden megoldása az

$$x(t) = y(t)(c + y^{-1}(t)y_0(t))$$

alakba írható. Még azt kell belátni, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y^{-1}(t)y_0(t) = 0$.

Mivel $\|y^{-1}(t)y_0(t)\| \leq \|y^{-1}(t)\| \|y_0(t)\| \leq \|y^{-1}(t)\| \cdot M$, ahol M az $|y_0(t)|$ egy felső korlátja, felhasználva, hogy $y^{-1}(t)$ minden eleme $\frac{1}{e^{\lambda t}}R(t)$ alakú, ahol λ pozitív valós részű megoldása a karakterisztikus egyenletnek, $R(t)$ pedig racionális tört függvény kapjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y^{-1}(t)\| \cdot \|y_0(t)\| \leq M \lim_{t \rightarrow \infty} \|y^{-1}(t)\| = 0.$$

Ezzel a bizonyítás kész.

1.3. Az $f_{-1}(z)$ zéróhelyeinek elhelyezkedése

Most a másik speciális esetet fogjuk vizsgálni. Írjunk a helyébe $-1-t$, így (1.5.)-ből $f_{-1}(z)$ -re a következőt kapjuk:

$$f_{-1}(z) = z + \mu + \mu e^{-rz}$$

Tekintsük a következő görbét a $(-1, R, \varphi)$ síkon:

$$J_{-10} = \left\{ (-1, R, \varphi) \mid 0 < |\varphi| < \frac{\widehat{\Pi}}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{\widehat{\Pi} - 2|\varphi|}{2|\sin \varphi|} \right\},$$

$$J_{-1k} = \left\{ (-1, R, \varphi) \mid 0 < |\varphi| < \widehat{\Pi}, R = \frac{1}{r} \frac{\widehat{\Pi} - 2|\varphi| + 2k\widehat{\Pi}}{2|\sin \varphi|} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Az alábbi segédétel alapján az $f_{-1}(z)$ -nek nulla valós részű zéróhelyei csak akkor vannak, ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{-1k}$.

7.Segéd-tétel. $f_{-1}(z)$ -nek akkor és csak akkor van nulla valós részű zéróhelye, ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{-1k}$.

Bizonyítás. Ha $f_{-1}(z)$ -nek nulla valós részű zéróhelye van, akkor (1.10.)-nek és (1.11.)-nek $a = -1$ helyettesítéssel teljesülni kell. (1.10.)-ből kapjuk, hogy

$$(1.28.) \quad \varphi - r y = \arccos(-\cos \varphi) + 2k\pi = \tilde{\pi} - \varphi + 2k\pi, \\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ezt (1.9.)-be behelyettesítve az

$$y = -2R \sin \varphi$$

formulához jutunk. Ezt az összefüggést (1.28.)-ba vissza-helyettesítve, majd R -t kifejezve az

$$(1.29.) \quad R = \frac{1}{r} \frac{2\varphi - \tilde{\pi} - 2k\pi}{-2 \sin \varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

összefüggést kapjuk. Vizsgáljuk meg, hogy az (1.29.)-ben az $R \geq 0$ milyen φ -re és k -ra teljesül.

Ha $\varphi > 0$ és $k = 0$, akkor a $2\varphi - \tilde{\pi} \leq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni.

Ha $\varphi < 0$ és $k = -1$, akkor a $2\varphi + \tilde{\pi} \geq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni. Ezt a két esetet egybeolvasztva R -re az

$$R = \frac{1}{r} \frac{\widetilde{\Pi} - 2|\varphi|}{2|\sin\varphi|}, \quad 0 < |\varphi| < \frac{\widetilde{\Pi}}{2}$$

kifejezést kapjuk. Ez éppen a J_{-10} görbe definíciójában szereplő összefüggés.

Az (1.29.) formulából leolvasható, hogy ha $0 < \varphi < \widetilde{\Pi}$, akkor $k \geq 0$ -nak kell teljesülni ahhoz, hogy $R \geq 0$ legyen, míg ha $-\widetilde{\Pi} < \varphi < 0$, akkor $k \leq -1$ esetén lesz R nem negatív. Azt is könnyen ellenőrizhetjük, hogy az (1.29.)-nek megfelelő

$$R(\varphi) = \frac{\widetilde{\Pi} - 2\varphi + 2k\widetilde{\Pi}}{2\sin\varphi}$$

függvénynek adott $\varphi \in (0, \widetilde{\Pi})$ -re és rögzített k -ra ugyanaz lesz az értéke, mint $-\varphi$ -re és $-(k+1)$ -re. Tehát az (1.29.) a $\varphi = 0$ egyenesre szimmetrikus görbesereget határoz meg. Az abszolút érték felhasználásával (1.29.)-ből a J_{-1k} görbék definíciójában szereplő összefüggést kapjuk. Tehát, ha $f_{-1}(z)$ -nek van nulla valós részű zéróhelye, akkor $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{-1k}$. Ehhez azonban még be kell látni, hogy az (1.11.) összefüggést $a = -1$ mellett kielégítő y nem lehet az $f_{-1}(iy) = 0$ egyenlet megoldása. Ha $a = -1$, akkor (1.11.)-ből a

$$\varphi - ry = -\text{arc cos}(-\cos\varphi) + 2k\widetilde{\Pi} = -\widetilde{\Pi} + \varphi + 2k\widetilde{\Pi}$$

összefüggéshez jutunk. Ezt (1.9.)-be behelyettesítve az

$$y + R \sin \varphi - R \sin \varphi = 0,$$

azaz az $y = 0$ feltételt kaptuk, viszont tudjuk, hogy a $z = 0$ csak $a = 1$ esetén lesz zéróhelye $f_a(z)$ -nek. Másrészt, ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{-1k}$, akkor $y = -2R \sin \varphi$ (1.28.)-t is kielégíti, ezért megoldása lesz az $f_{-1}(iy) = 0$ egyenletnek.

Vizsgáljuk meg a J_{-1k} görbét! Mivel ezek a görbék szimmetrikusak a $\varphi = 0$ egyenesre, ezért szorítkozzunk a $(0, \widehat{\Pi})$ intervallumra. A görbéknek a $\varphi = 0$ és $\varphi = \widehat{\Pi}$ környezetében való viselkedéséről a

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Pi} - 2\varphi + 2k\widehat{\Pi}}{2r \sin \varphi} = \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

és a

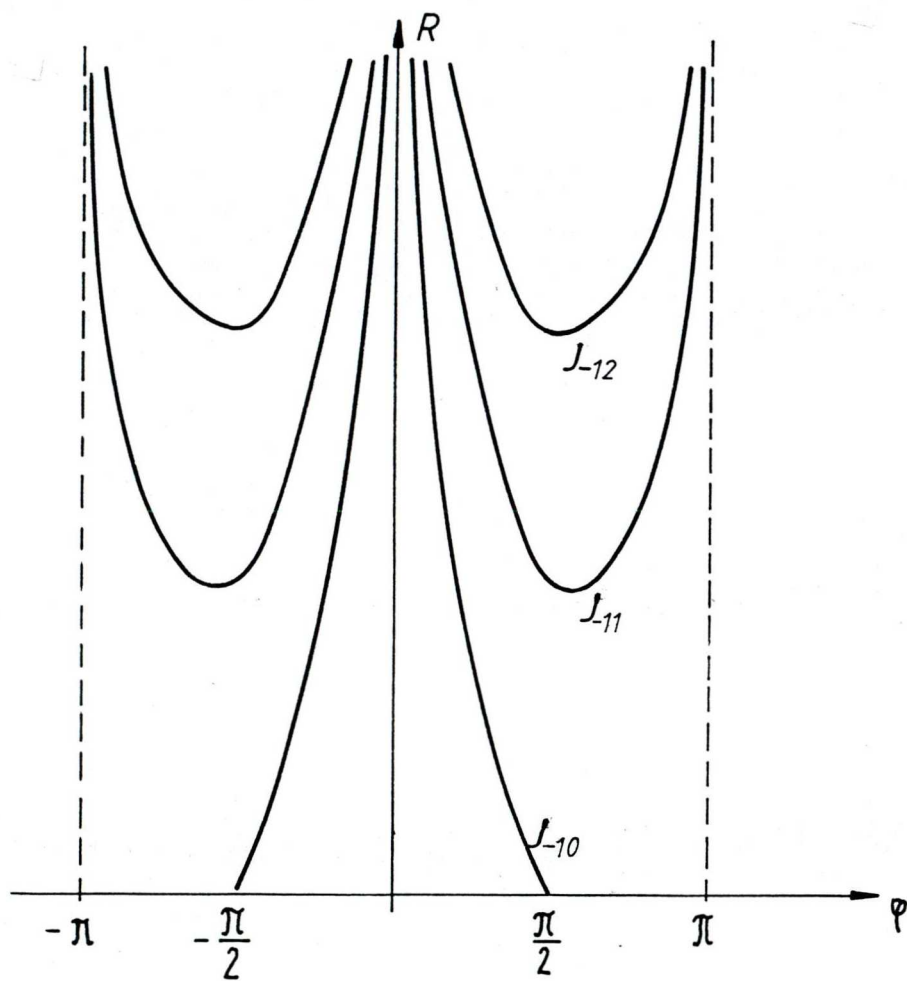
$$\lim_{\varphi \rightarrow \widehat{\Pi}} \frac{\widehat{\Pi} - 2\varphi + 2k\widehat{\Pi}}{2r \sin \varphi} = \infty, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

határértékek tájékoztatnak. A J_{-10} görbe a $(0, \frac{\widehat{\Pi}}{2})$ intervallumon monoton csökken, ha $\varphi = \frac{\widehat{\Pi}}{2}$ akkor $R = 0$.

A J_{-1k} görbéknek $k \geq 1$ -re φ_0 -ban minimumuk van, ahol

$$\varphi_0 \text{ a } \operatorname{tg} \varphi = (2\varphi - \widehat{\Pi} + 2k\widehat{\Pi}) \frac{1}{2} \text{ egyenlet megoldása. A } J_{-1k}$$

görbék a 6. ábrán vázoltuk.



6. ábra

Tekintsük a J_{-1k} görbék által határolt tartományokat,
Legyen

$$T_{-10} = \left\{ (-1, R, \varphi) \mid \begin{array}{l} 0 < R < \frac{\pi - 2|\varphi|}{2r \sin|\varphi|}, \text{ ha } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < R < \infty, \text{ ha } \varphi = 0 \end{array} \right\}$$

$$T_{11} = \left\{ (-1, R, \varphi) \mid \frac{\tilde{\Pi} - 2|\varphi|}{2r \sin|\varphi|} < R < \frac{\tilde{\Pi} - 2|\varphi| + 2\tilde{\Pi}}{2r \sin|\varphi|}, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \frac{\tilde{\Pi}}{2}, \right. \\ \left. 0 < R < \frac{\tilde{\Pi} - 2|\varphi| + 2\tilde{\Pi}}{2r \sin|\varphi|}, \text{ ha } |\varphi| \geq \frac{\tilde{\Pi}}{2}, 0 < R, \text{ ha } \varphi = \tilde{\Pi} \right\}$$

$$T_{-1k+1} = \left\{ (-1, R, \varphi) \mid \frac{\tilde{\Pi} - 2|\varphi| + 2k\tilde{\Pi}}{2r \sin|\varphi|} < R < \frac{\tilde{\Pi} - 2|\varphi| + 2(k+1)\tilde{\Pi}}{2r \sin|\varphi|}, \text{ ha } 0 < |\varphi| < \tilde{\Pi} \right\}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

Ugyanazzal a számolással ahogyan a 4. Segéd-tételt bizonyítottuk bebizonyítható, hogy ha $\mu \in T_{-10}$, akkor $f_{-1}(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelyei vannak. (1.19.) alapján, mivel (1.8.) is teljesül, a J_{-1k} görbéken a 0 valós részű zéróhelyek valós részére $dx \geq 0$, ha φ rögzített és R növekszik. Így az alábbi eredményt kaptuk.

3. Következmény. Ha $\mu \in T_{-1k}$, akkor $f_{-1}(z)$ -nek pontosan k darab pozitív valós részű zéróhelye van.

1.4. Az $f_a(z)$ zéróhelyei elhelyezkedése

Az előző részekben leírt két speciális eset után térjünk vissza az általános esetre. Legyen tehát a nullától különböző valós szám és teljesüljön az $|a| \neq 1$ feltétel is. Ahhoz, hogy $f_a(z)$ -nek nulla valós részű zéróhelye legyen (1.12.)-nek és (1.13.)-nak, illetve (1.14.)-nek és (1.15.)-nek egyszerre kell teljesülni. (1.12.)-ből és

(1.13.)-ből az

$$(1.30.) \quad R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(a \cos \varphi) + 2k\pi}{a \sin \varphi - \sin \arccos(a \cos \varphi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(1.14.)-ből és (1.15.)-ből az

$$(1.31.) \quad R = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(a \cos \varphi) + 2k\pi}{a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

összefüggéshez jutunk. Mivel $R > 0$ -nak kell teljesülni, ezért φ -re és k -ra megszorításokat kell tennünk.

A vizsgálatok megkönnyítése érdekében vezessünk be néhány segédfüggvényt, nevezetesen az (1.30.) és (1.31.) formulák számlálóját illetve nevezőjét tekintsük egy-egy függvénynek. Legyen tehát

$$g_{a+}(\varphi) = \varphi + \arccos(a \cos \varphi), \quad g_{a-}(\varphi) = \varphi - \arccos(a \cos \varphi)$$

$$h_{a+}(\varphi) = a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi),$$

$$h_{a-}(\varphi) = a \sin \varphi - \sin \arccos(a \cos \varphi).$$

Így (1.30.)-ből az

$$(1.32.) \quad R = \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(\varphi) + 2k\pi}{h_{a-}(\varphi)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

az (1.31.)-ből az

$$(1.33.) \quad R = \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(\varphi) + 2k\tilde{\pi}}{h_{a+}(\varphi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

formulákhoz jutunk. Mivel $|a \cos \varphi| \leq 1$ fennáll, ezért $|a| > 1$ esetén az $\arccos \frac{1}{|a|} \leq \varphi \leq \arccos(-\frac{1}{|a|})$ feltételnek kell teljesülni φ -re. Legyen

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ \arccos \frac{1}{|a|}, & \text{ha } |a| > 1. \end{cases}$$

Ezzel a jelöléssel a g_{a+} , g_{a-} , h_{a+} , h_{a-} függvények az $\alpha \leq |\varphi| \leq \tilde{\pi} - \alpha$ feltételnek eleget tevő φ -kre vannak értelmezve.

Ezen segédfüggvények, valamint az (1.30.) és (1.31.) formulák közötti kapcsolatot a következő segédállítás fejezi ki.

8. Segédállítás. Minden $\alpha \leq |\varphi| \leq \tilde{\pi} - \alpha$ -ra és $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1$ -re fennáll a

$$\frac{g_{a+}(\varphi) + 2k\tilde{\pi}}{h_{a+}(\varphi)} = \frac{g_{a-}(-\varphi) - 2k\tilde{\pi}}{h_{a-}(-\varphi)}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $g_{a+}(\varphi) = \varphi + \arccos(a \cos \varphi)$, így a \cos függvény párossága miatt $g_{a-}(-\varphi) = -\varphi - \arccos(a \cos(-\varphi)) = -(\varphi + \arccos(a \cos \varphi)) = -g_{a+}(\varphi)$, azonkívül $h_{a+}(\varphi) = a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi)$ és $h_{a-}(-\varphi) = a \sin(-\varphi) - \sin \arccos(a \cos(-\varphi))$. Tehát, ha felhasználjuk a \sin függvény páratlanságát és a \cos függvény párosságát a $h_{a-}(-\varphi) = -(a \sin \varphi + \sin \arccos(a \cos \varphi)) = -h_{a+}(\varphi)$ összefüggéshez jutunk. Ha figyelembe vesszük a $g_{a-}(-\varphi) = -g_{a+}(\varphi)$ és $h_{a-}(-\varphi) = -h_{a+}(\varphi)$ összefüggéseket, akkor megkapjuk a bizonyítandó összefüggést. Ezen segédttel következménye, hogy az (a, R, φ) térben az (1.32.) formulának valamely k -ra eleget tevő pontoknak a $\varphi = 0$ síkra vett tükörképei az (1.33.) formulának k -ra eleget tevő pontok lesznek. Tehát, ha az (1.32.) formulában φ -re és k -ra tett kikötések ugyanazok lesznek, mint az (1.33.) formulában $-\varphi$ -re és $-k$ -ra tett kikötések, akkor az (1.32.)-nek és az (1.33.)-nak eleget tevő pontok az (a, R, φ) térben a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus halmazt határoznak meg.

Vizsgáljuk meg a g_{a+} , g_{a-} , h_{a+} , h_{a-} segédfüggvényeket!

Tekintsük ezen függvények φ szerinti differenciálhányadosait.

$$g'_{a+}(\varphi) = 1 + \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1-a^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$g_{a+}'(\varphi) = a \cos \varphi \frac{1 - a^2}{\sqrt{(1 - a^2 \cos^2 \varphi)^3}}$$

$$g_{a-}'(\varphi) = 1 - \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$g_{a-}''(\varphi) = -a \cos \varphi \frac{1 - a^2}{\sqrt{(1 - a^2 \cos^2 \varphi)^3}}$$

$$h_{a+}'(\varphi) = a \cos \varphi \left(1 + \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi}} \right) = a \cos \varphi g_{a+}'(\varphi)$$

$$h_{a-}'(\varphi) = a \cos \varphi \left(1 - \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi}} \right) = a \cos \varphi g_{a-}'(\varphi).$$

Könnyű belátni, hogy az $1 \pm \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi}}$ kifejezés előjeltartó, ugyanis rögzített a -ra az

$$1 \pm \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi}} = 0$$

egyenletből az

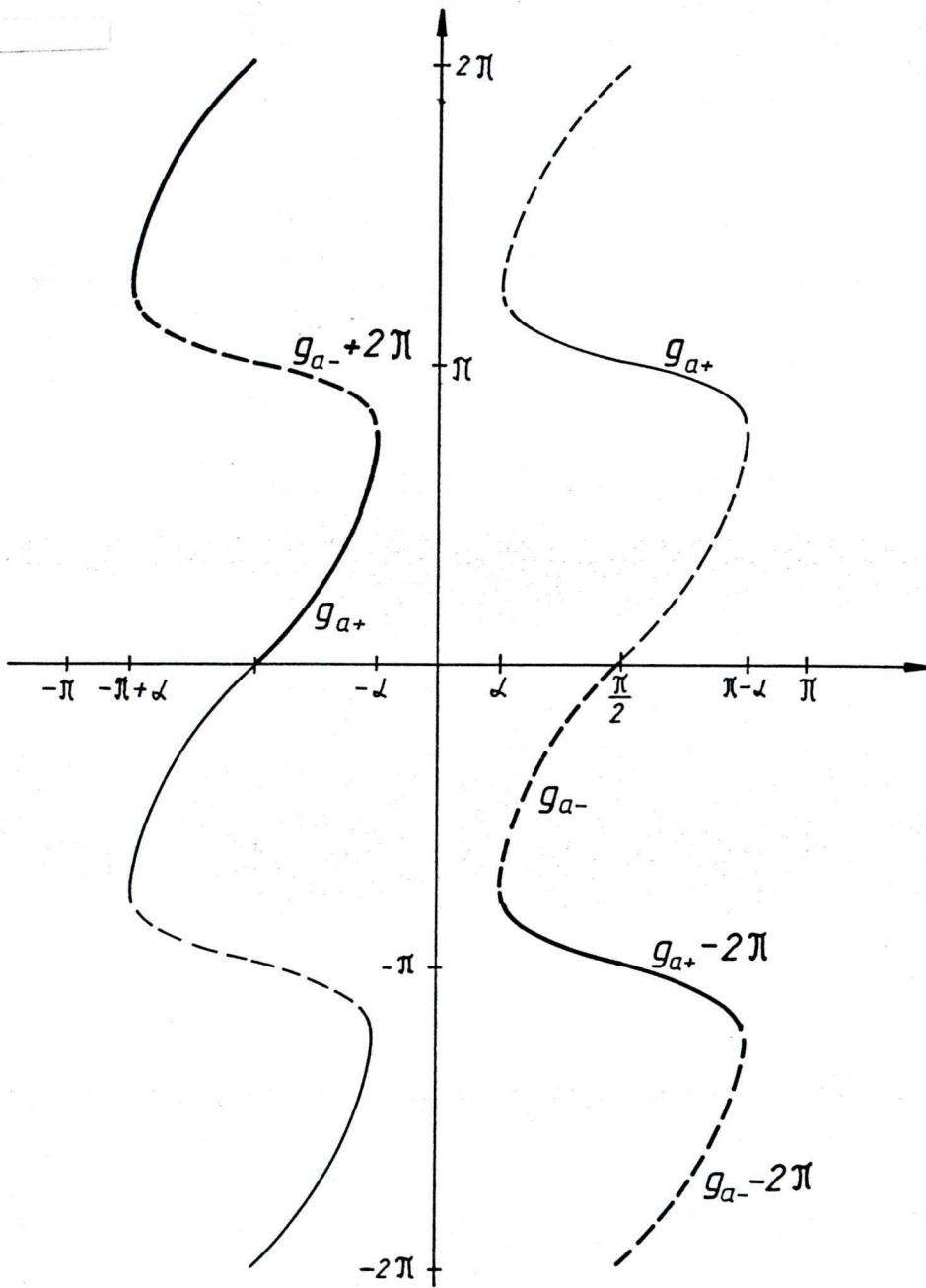
$$\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \varphi} = \pm a \sin \varphi$$

egyenlet következik. Ebből az

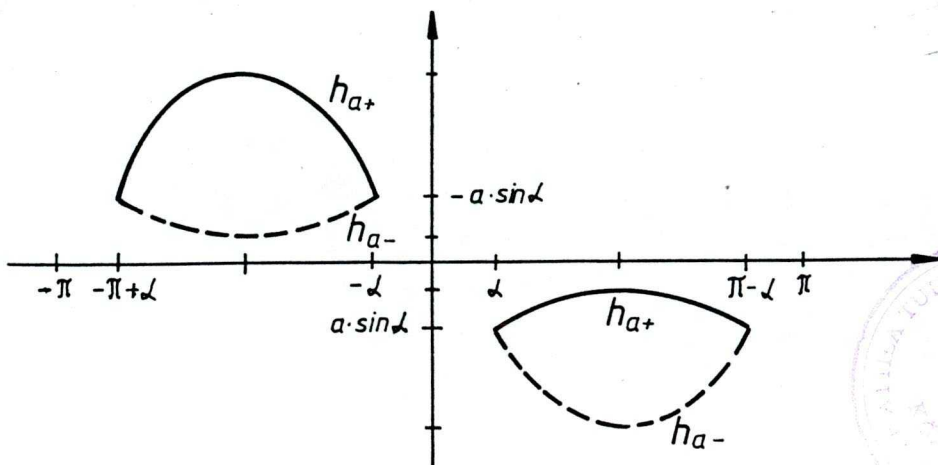
$$1 = a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi = a^2$$

összefüggéshez jutunk, ami $|a| \neq 1$ esetén nem teljesül. Így a g_{a+} és g_{a-} monoton függvények és figyelembe véve a második deriváltjukat $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ -ben inflexiós pontjuk van. Az előzőekből következik az is, hogy a h_{a+} és h_{a-} függvényeknek $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ esetén szélsőértékük van. A következő ábrákon ezeket a függvényeket vázoltuk a $a < -1$, $-1 < a < 0$, $0 < a < 1$ és $1 < a$ esetekben. Folytonos vonallal rajzoltuk a g_{a+} és h_{a+} függvényeket míg szaggatottal a g_{a-} és h_{a-} függvényeket. A görbéknek azt a részét jelöltük vastagon, amelyet felhasználva (1.30.) és (1.31.) R-re pozitív értéket ad.

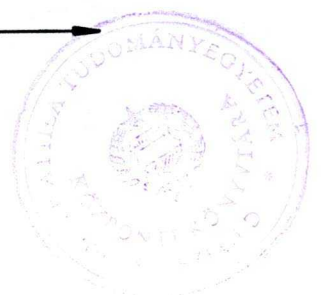
$a < -1, \alpha = \arccos -\frac{1}{a}$



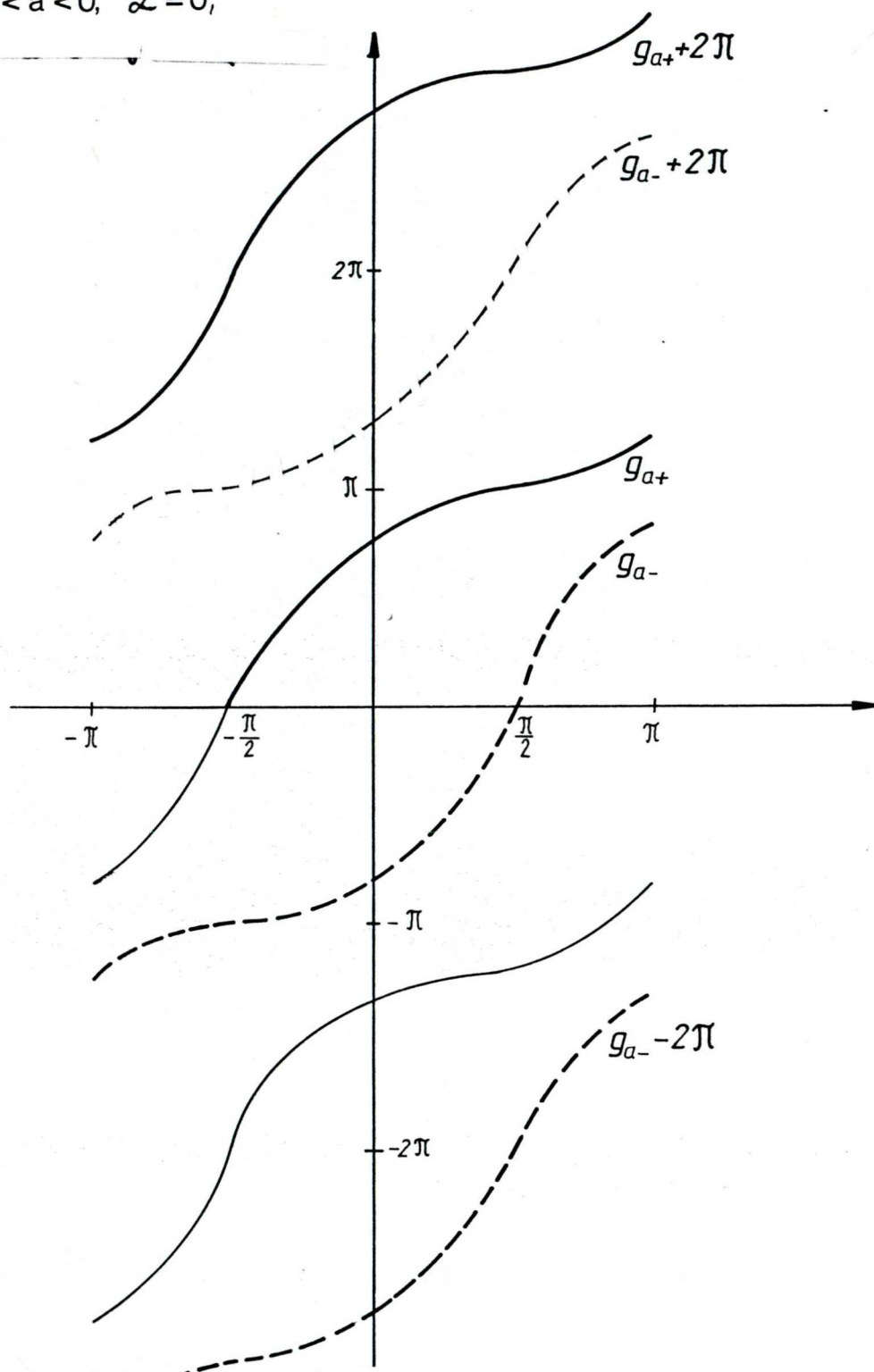
7. ábra



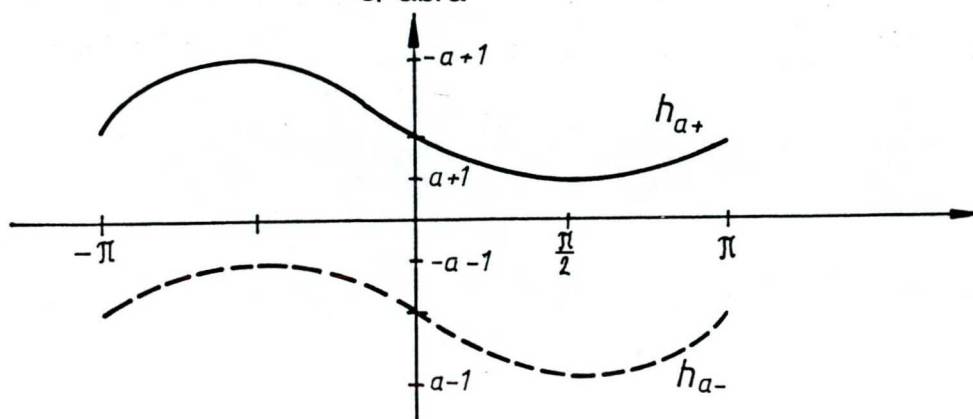
8. ábra



$-1 < a < 0, \quad \mathcal{L} = 0,$

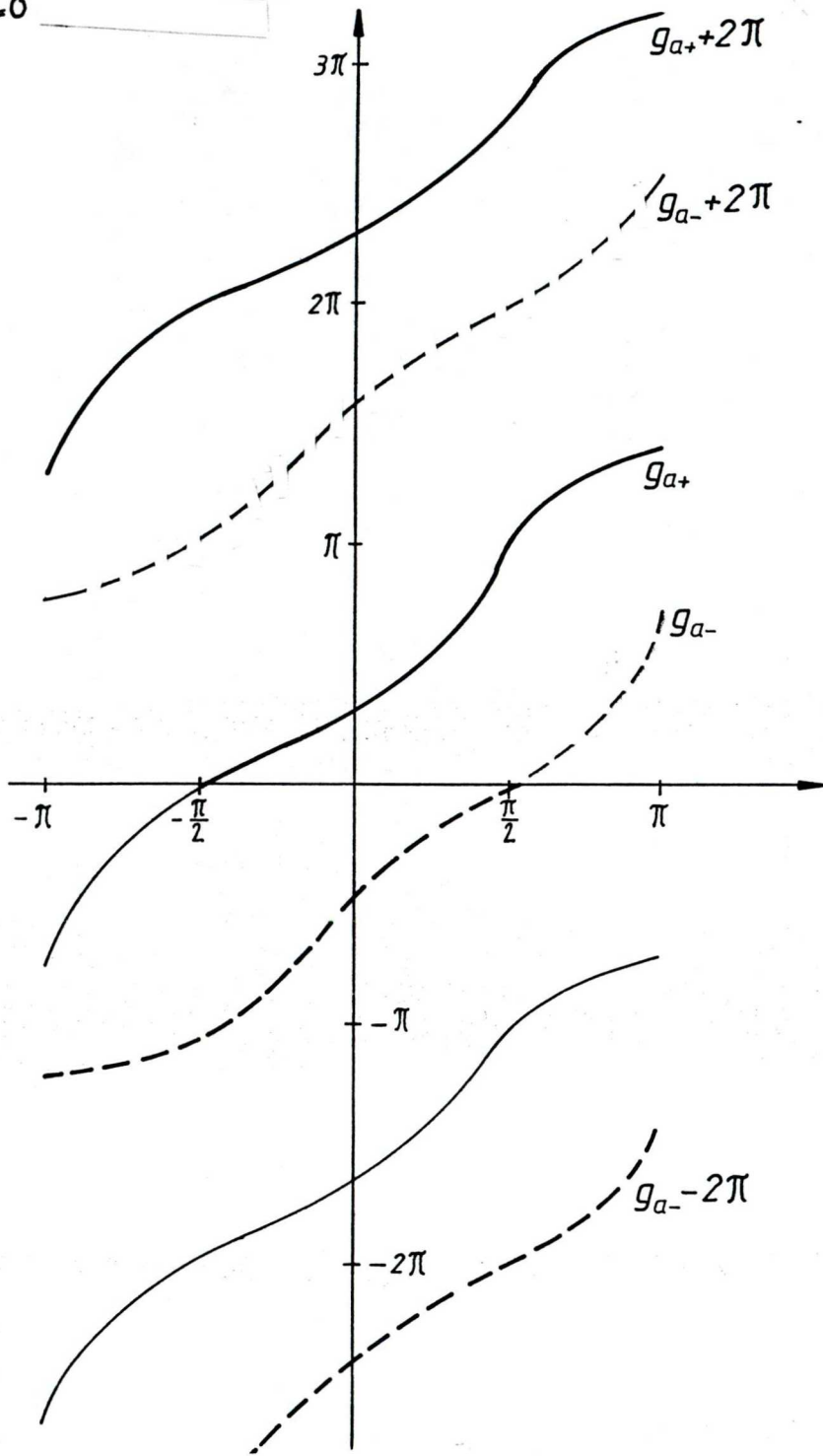


9. ábra

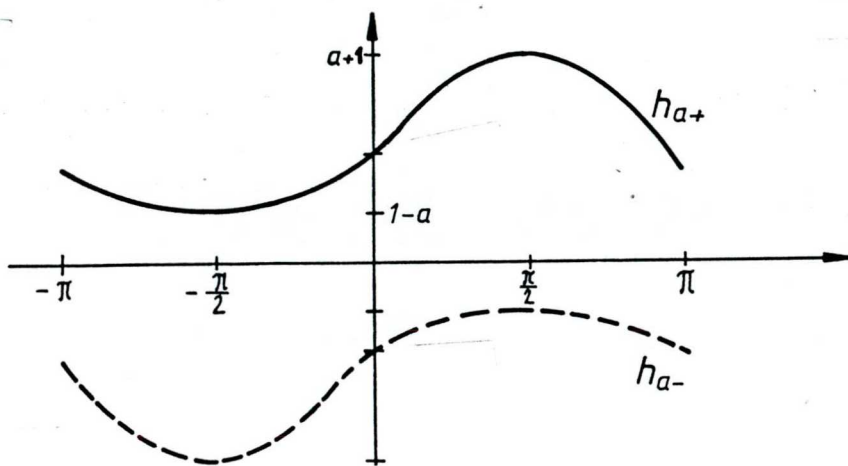


10. ábra

$$0 < a < 1, \alpha = 0$$

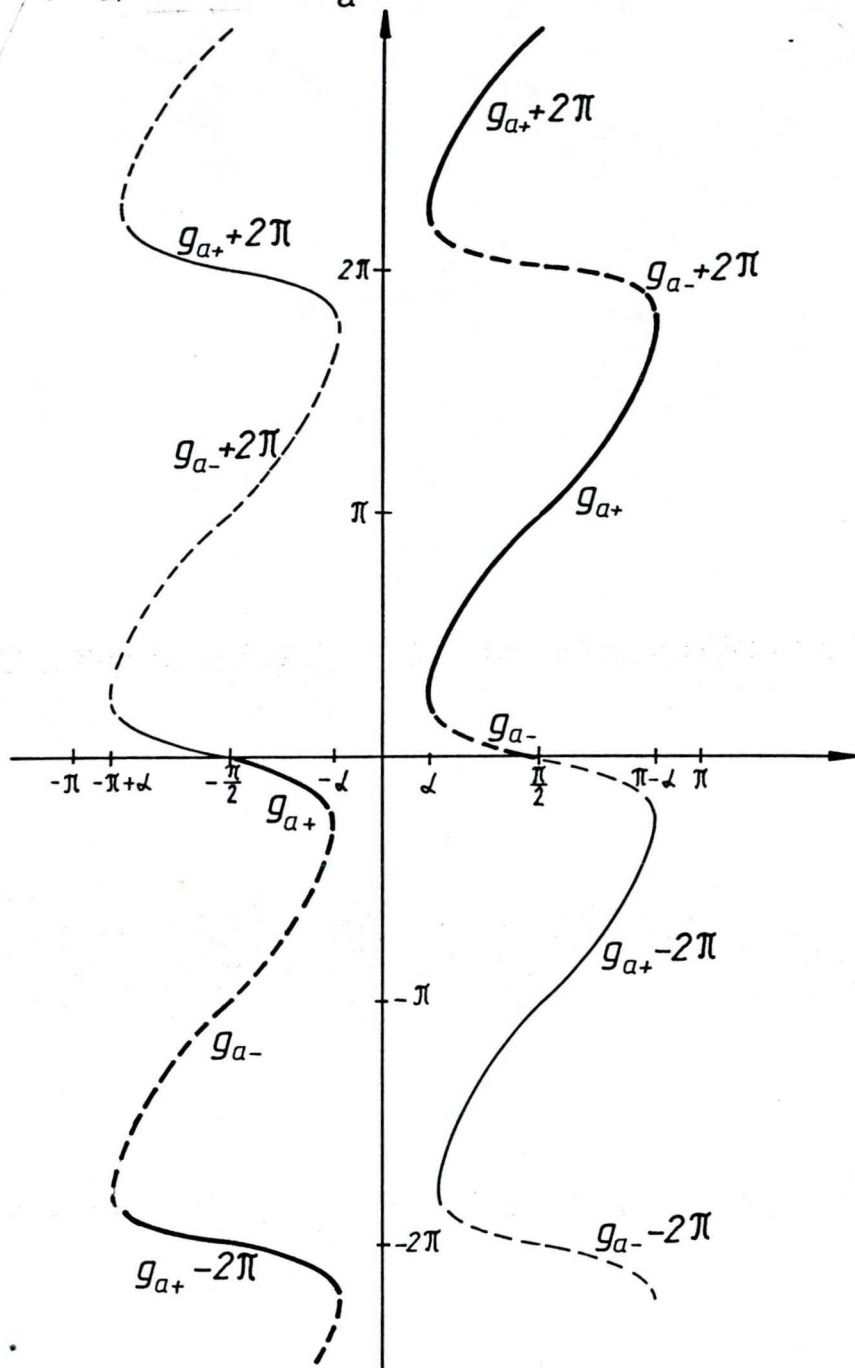


11. ábra

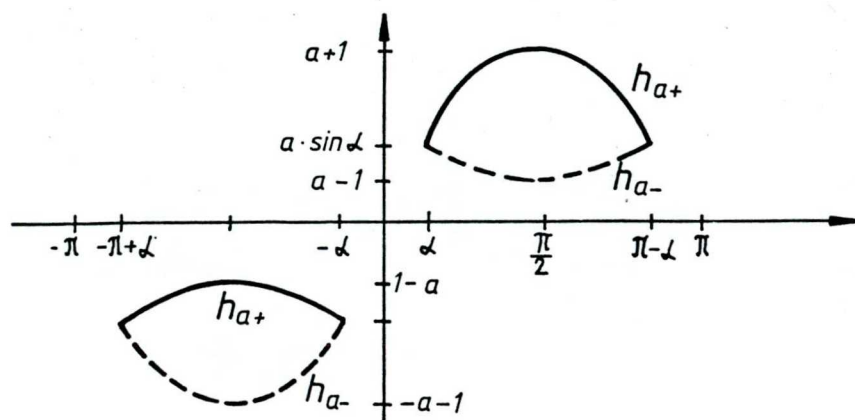


12. ábra

$$1 < a, \alpha = \arccos \frac{1}{a}$$



13. ábra



14. ábra

Tekintsük az (a, R, φ) tér $|a \cos \varphi| \leq 1, |a| \neq 1,$
 $R > 0, -\tilde{\Pi} < \varphi \leq \tilde{\Pi}$ feltételeknek eleget tevő részén
a következő felületeket.

$$F_{0+} = \left\{ (a, R, \varphi) \mid \alpha \leq |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \alpha, a > -1, R = \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(|\varphi|)}{h_{a+}(|\varphi|)} \right\}$$

$$F_{k+} = \left\{ (a, R, \varphi) \mid \alpha \leq |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \alpha, R = \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(|\varphi|) + 2k\tilde{\Pi} \operatorname{sign}(a+1)}{h_{a+}(|\varphi|)} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{0-} = \left\{ (a, R, \varphi) \mid 0 \leq |\varphi| \leq \frac{\tilde{\Pi}}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(|\varphi|)}{h_{a-}(|\varphi|)} \right\}$$

$$F_{k-} = \left\{ (a, R, \varphi) \mid \alpha \leq |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \alpha, R = \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(|\varphi|) + 2k\tilde{\Pi} \operatorname{sign}(a-1)}{h_{a-}(|\varphi|)} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

A következő segédétel ezen felületek és az $f_a(z)$ nulla
valós részű zéróhelyeinek a kapcsolatáról szól.

9. Segédétel. $f_a(z)$ -nek akkor és csak akkor van nulla
valós részű zéróhelye, ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_{k+} \cup F_{k-})$.

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy ha $f_a(z)$ -nek van nulla valós
részű zéróhelye akkor (a, R, φ) eleget tesz az (1.32.) és (1.33.)
feltételeknek. Az F_{k+} és F_{k-} definíciójában R -re megadott
feltétel hasonlít az (1.32.) és (1.33.) formulákhoz, különbség
csak az abszolút érték használatában van (ezt a 8. Segédétel
magyarázza), azonkívül a k -ra tett megszorításokban. Most

bebizonyítjuk, hogy ha $f_a(z)$ -nek van nulla valós részű zéróhelye, akkor $(a, R, \varphi) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_{k-} \cup F_{k+})$. A bizonyítást négy részre bontjuk az a értékétől függően.

(i) Legyen a < -1. Ekkor $\alpha = \arccos \frac{1}{|a|}$. Adjuk meg k-ra és φ -re azokat a feltételeket, amelyeknek teljesülni kell ahhoz, hogy az (1.32.) illetve az (1.33.) formulák R-re nemnegatív értéket adjanak.

Először az (1.32.) formulát vizsgáljuk. Az (1.32.) formula alapján az $R \geq 0$ feltétel a következő esetekben teljesül:

$$(a) \text{ ha } \varphi \in [\alpha, \widetilde{\Pi} - \alpha] \quad \text{és } k \leq -1,$$

vagy

$$(b) \text{ ha } \varphi \in [\alpha, \frac{\widetilde{\Pi}}{2}] \quad \text{és } k = 0,$$

vagy

$$(c) \text{ ha } \varphi \in [-\widetilde{\Pi} + \alpha, -\alpha] \quad \text{és } k \geq 1.$$

A h_a - és g_a - függvényeket szemléltető 7. és 8. ábrából látható, hogy az $R \geq 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az a., -c., feltételek valamelyike fennáll.

Az (1.33.) formula alapján az $R \geq 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a következő feltételek igazak:

$$(d) \text{ ha } \varphi \in [\alpha, \widetilde{\Pi} - \alpha] \quad \text{és } k \leq -1,$$

vagy

$$(e) \text{ ha } \varphi \in [-\widetilde{\Pi} + \alpha, -\alpha] \quad \text{és } k \geq 1,$$

vagy

$$(f) \text{ ha } \varphi \in [-\frac{\widetilde{\Pi}}{2}, -\alpha] \quad \text{és } k = 0.$$

Ezek a feltételek is könnyen ellenőrizhetők a 7. és 8. ábra felhasználásával. Ha összevetjük az (a) és (d) feltételeket illetve a (b), (c) és (e), (f) feltételeket, a 8. Segéd-tétel eredményeként azt kapjuk, hogy az (1.32.) és (1.33.) formulák az (a)-(f) feltételek fennállása mellett a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus felületsereget határoznak meg. Tudjuk, hogy ha $a < -1$, akkor $\text{sign}(a-1) = \text{sign}(a+1) = -1$, ezért az (a)-(f) feltételek és az abszolút érték felhasználásával az (1.32.) és (1.33.) formulákból az F_{k+} és F_{k-} felületek definíciójában szereplő összefüggéseket kapjuk R-re.

(ii) Legyen $-1 < a < 0$. Ekkor $\alpha = 0$. Ebben az esetben az (1.32.) formulában az $R \geq 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a

$$(a) \quad \varphi \in [-\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}] \quad \text{és } k \leq -1,$$

vagy a

$$(b) \quad \varphi \in [-\tilde{\Pi}, \frac{\tilde{\Pi}}{2}] \quad \text{és } k = 0$$

feltétel fennáll. Ez következik abból, hogy a 10. és 9. ábrának megfelelően $h_{a-}(\varphi) \leq 0$, ha $\varphi \in [\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}]$ és $g_{a-}(\varphi) \leq 0$, ha $\varphi \in [-\tilde{\Pi}, \frac{\tilde{\Pi}}{2}]$.

Az (1.33.) formula alapján az $R \geq 0$ feltétel akkor teljesül, ha

$$(c) \quad \varphi \in [-\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}] \quad \text{és } k \geq 1,$$

vagy

$$(d) \quad \varphi \in \left[-\frac{\widetilde{\Pi}}{2}, \widetilde{\Pi}\right] \quad \text{és } k = 0$$

feltételek fennállnak. Ezek a feltételek következnek abból, hogy a 9. ábrának megfelelően, ha $\varphi \in \left[-\frac{\widetilde{\Pi}}{2}, \widetilde{\Pi}\right]$, akkor $g_{a+}(\varphi) \geq 0$, valamint a 10. ábráról leolvasható, hogy ha $\varphi \in [-\widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}]$, akkor $h_{a+}(\varphi) > 0$. Az (a), (c), valamint a (b), (d) feltételek alapján a 8. Segéd-tétel felhasználásával kapjuk, hogy az (1.32.) és (1.33.) formulák a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus felület-sereget határoznak meg. A $\text{sign}(a+1) = 1$ és $\text{sign}(a-1) = -1$ egyenlőségeket figyelembe véve, valamint a szimmetria miatt az (1.32.) és (1.33.) összefüggésekből az (a)-(d) feltételek mellett éppen az F_{k+} és F_{k-} felületek definíciójában megadott formulákat kapjuk R-re.

(iii) Legyen $0 < a < 1$. Ekkor $\alpha = 0$. A 11. és 12. ábra felhasználásával az (1.32.) formula esetében az $R \geq 0$ feltétel akkor teljesül, ha az

$$(a) \quad \varphi \in [-\widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}] \quad \text{és } k \leq -1,$$

vagy

$$(b) \quad \varphi \in \left[-\widetilde{\Pi}, \frac{\widetilde{\Pi}}{2}\right] \quad \text{és } k = 0$$

feltételek valamelyike teljesül.

Ugyancsak a 11. és 12. ábra alapján az (1.33.) formula esetében az $R \geq 0$ feltétel akkor teljesül, ha

$$(c) \quad \varphi \in [-\widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}] \quad \text{és } k \geq 1,$$

vagy

$$(d) \quad \varphi \in \left[-\frac{\overline{\Pi}}{2}, \overline{\Pi}\right] \quad \text{és } k = 0$$

feltételek fennállnak. Az (a) és (c), valamint a (b) és (d) feltételek alapján a 8. Segédtételből következik, hogy az (1.32.) és (1.33.) formulák a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus felületsereget határoznak meg. Ebben az esetben $\text{sign}(a+1) = 1$ és $\text{sign}(a-1) = -1$, ezért az abszolút érték felhasználásával az (1.32.)-ből és (1.33.)-ből megkapjuk az F_{k+} és F_{k-} definíciójában R -re megadott feltételeket.

(iv) Legyen $a > 1$. Ekkor $\alpha = \arccos \frac{1}{a}$. A 13. és 14. ábráról a h_{a-} és g_{a-} függvények előjelét leolvashatjuk, így az (1.32.) formula alapján az $R \geq 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az

$$(a) \quad \varphi \in [\alpha, \overline{\Pi} - \alpha] \quad \text{és } k \geq 1,$$

vagy

$$(b) \quad \varphi \in \left[\alpha, \frac{\overline{\Pi}}{2}\right] \quad \text{és } k = 0,$$

vagy

$$(c) \quad \varphi \in [-\overline{\Pi} + \alpha, -\alpha] \quad \text{és } k \leq 0$$

feltételek fennállnak.

A 13. és 14. ábrák a h_{a+} és g_{a+} függvények előjeléről is tájékoztatnak, ezért az (1.33.) formula alapján az $R \geq 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a

$$(d) \quad \varphi \in [\alpha, \overline{\Pi} - \alpha] \quad \text{és } k \geq 0,$$

vagy

$$(e) \quad \varphi \in [-\pi + \alpha, -\alpha] \quad \text{és } k \leq -1$$

vagy

$$(f) \quad \varphi \in [-\pi + \alpha, -\frac{\pi}{2}] \quad \text{és } k = 0$$

feltételek fennállnak. A 8.Segédttétel, valamint az (a)-(f) feltételek következtében az (1.32.) és (1.33.) formulák a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus felületsereget határoznak meg. Ha felhasználjuk a $\text{sign}(a+1) = \text{sign}(a-1) = 1$ egyenlőséget és az abszolút értéket, akkor az (1.32.) és (1.33.) formulákból R-re éppen az F_{k+} és F_{k-} felületek definíciójában megadott összefüggéseket kapjuk.

Tehát, ha $f_a(z)$ -nek van nulla valós részű zéróhelye, akkor $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_{k+} \cup F_{k-})$. Másrészt legyen $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_{k+} \cup F_{k-})$. Ekkor az (1.12.) és (1.13.), illetve az (1.14.) és (1.15.) formulákkal definiált y megoldása lesz az $f(iy) = 0$ egyenletnek, azaz $f_a(z)$ -nek van nulla valós részű zéróhelye. Ezzel a 9.Segédttétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés. Az (1.12.) és (1.13.), illetve az (1.14.) és (1.15.) formulákkal az y egyértelműen meghatározott, ezért ha $\mu \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_{k+} \cup F_{k-})$, akkor $f_a(z)$ -nek egy nulla valós részű zéróhelye van, kivéve esetleg azokat a μ -ket, amelyek az F_{k+} és F_{l-} felületek közös pontjai valamilyen $k \geq 0$ és $l \geq 0$ egész számra. Ha kiszámoljuk a

ε_{a+} , ε_{a-} , h_{a+} , h_{a-} függvények értékeit $|\varphi| = \alpha$ -ban és $|\varphi| = \widetilde{\Pi} - \alpha$ -ban, akkor az F_{k+} és F_{k-} felületek metszészonalairól az alábbiakat kapjuk: (A szimmetria miatt csak a $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \widetilde{\Pi} - \alpha$ eseteket tekintjük.)

- (i) ha $a < -1$ és $\varphi = \alpha$, akkor az F_{k-} és F_{k+1+}
- (ii) ha $a < -1$ és $\varphi = \widetilde{\Pi} - \alpha$, akkor az F_{k-} és F_{k+}
- (iii) ha $-1 < a < 0$ és $\varphi = \alpha = 0$, akkor az F_{k-} és F_{k+}
- (iv) ha $-1 < a < 0$ és $\varphi = \widetilde{\Pi} - \alpha = \widetilde{\Pi}$, akkor az F_{k+1-} és F_{k+}
- (v) ha $0 < a < 1$ és $\varphi = \alpha = 0$, akkor az F_{k-} és F_{k+}
- (vi) ha $0 < a < 1$ és $\varphi = \widetilde{\Pi} - \alpha = \widetilde{\Pi}$, akkor az F_{k+1-} és F_{k+}
- (vii) ha $1 < a$ és $\varphi = \alpha$, akkor az F_{k-} és F_{k+}
- (viii) ha $1 < a$ és $\varphi = \widetilde{\Pi} - \alpha$, akkor az F_{k+1-} és F_{k+}

felületeknek van közös metszészvonala. ($k=0,1,2,\dots$)

Az F_{k+} és F_{k-} felületek tulajdonságairól további információkat nyerhetünk, ha tekintjük az $a = \text{konstans}$ síkokkal vett metszeteiket. A metszetgörbék vizsgálata során az (1.32.) és (1.33.) formulák tulajdonságait fogjuk felhasználni, ezért először összefoglaljuk ezeket a tulajdonságokat. Az (1.32.) és (1.33.) formulák az (a, φ) sík $|\cos \varphi| \leq 1$ feltételnek eleget tevő részén minden rögzí-

tett k -ra egy-egy kétváltozós függvényt definiálnak.
Mégpedig az

$$(1.34.) \quad R(a, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(\varphi) + 2k \tilde{\Pi}}{h_{a-}(\varphi)}$$

illetve az

$$(1.35.) \quad R(a, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(\varphi) + 2k \tilde{\Pi}}{h_{a+}(\varphi)}$$

függvényeket. Vegyük ezen függvények metszeteit az $a = \text{konstans}$ síkokkal. Az $a = c$ helyettesítés után az (1.34.) és (1.35.) függvényekből kapott egyváltozós függvények tulajdonságait használjuk fel az F_{k+} és F_{k-} felületek (R, φ) síkkal párhuzamos metszeteinek a tanulmányozásához.

Tekintsük a

$$G_{ck} = F_{k+} \cap (c, R, \varphi)$$

$$J_{ck} = F_{k-} \cap (c, R, \varphi)$$

metszetgörbékét, ahol $|c| \neq 1$, $R \geq 0$, $\infty \leq |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \infty$.

Ezeket a metszetgörbékét minden rögzített c -re és k -ra az



$$(1.36.) \quad R(\varphi) = R(c, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c+}(\varphi) + 2k\pi}{h_{c+}(\varphi)},$$

illetve az

$$(1.37.) \quad R(\varphi) = R(c, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c-}(\varphi) + 2k\pi}{h_{c-}(\varphi)}$$

függvények írják le, figyelembe véve a k -ra és φ -re tett megszorításokat. Az (1.36.) függvény deriváltja, felhasználva a h_{c+} és g_{c+} deriváltjait, az

$$(1.38.) \quad R'(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{h_{c+}(\varphi) - c \cos \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\pi)}{h_{c+}^2(\varphi)} g'_{c+}(\varphi).$$

Az (1.37.) függvény deriváltja az

$$(1.39.) \quad R'(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{h_{c-}(\varphi) - c \cos \varphi (g_{c-}(\varphi) + 2k\pi)}{h_{c-}^2(\varphi)} g'_{c-}(\varphi)$$

kifejezés.

Legyen

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{ha } |c| < 1 \\ \arccos \frac{1}{|c|}, & \text{ha } |c| > 1. \end{cases}$$

Mivel a g_{c+} és g_{c-} függvények deriváltjainak az előjele állandó $\gamma \leq \varphi \leq \pi - \gamma$ esetén, ezért az $R'(\varphi)$

előjelét az

$$u(\varphi) = h_{c+}(\varphi) - c \cos \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\pi),$$

illetve a

$$v(\varphi) = h_{c-}(\varphi) - c \cos \varphi (g_{c-}(\varphi) + 2k\pi)$$

formulák adják, amelyeknek a deriváltja

$$u'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\pi),$$

illetve

$$v'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c-}(\varphi) + 2k\pi).$$

Felhasználva a g_{c+} illetve a g_{c-} függvények állandó előjelét és a k -ra a 9. Segédétel bizonyításában elmondott megszorításokat azt kapjuk, hogy ha $\varphi \in [\gamma, \pi - \gamma]$, akkor $u'(\varphi)$ és $v'(\varphi)$ is állandó előjelű. Ebből következik, hogy az $u(\varphi)$ és $v(\varphi)$ függvények monotonok, így legfeljebb egyszer válthatnak előjelet. Az (1.38.) és (1.39.) összefüggések alapján, mivel g'_{c+} és g'_{c-} is állandó előjelű, az $R'(\varphi)$ -re is érvényesek az $u(\varphi)$ -re és $v(\varphi)$ -re elmondottak, azaz $R'(\varphi)$ vagy állandó előjelű, vagy egyszer előjelet vált a $(\gamma, \pi - \gamma)$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy $R(\varphi)$ vagy szigorúan monoton, vagy

van egy szélsőértéke.

Ezeket a megállapításokat felhasználva rátérhetünk a részletes vizsgálatokra. A szimmetria miatt csak a $[\gamma, \mathbb{T} - \gamma]$ intervallumon vizsgáljuk az (1.36.) és (1.37.) függvényeket. A c értékétől függően 4 esetet különböztetünk meg.

(i) Legyen $c < -1$. Ekkor $\gamma = \arccos \frac{1}{|c|}$. A G_{ck} görbék a következők lesznek:

$$G_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \mathbb{T} - \gamma, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) - 2k\mathbb{T}}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

Az (1.36.) alapján

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c+}(\varphi) - 2k\mathbb{T}}{h_{c+}(\varphi)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Az eddigi vizsgálatok eredményeként ismert, hogy $g_{c+}(\varphi) < 0$, $g'_{c+}(\varphi) < 0$, $h_{c+}(\varphi) < 0$, ezért

$$u'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c+}(\varphi) - 2k\mathbb{T}) \geq 0$$

Tehát $u(\varphi)$ monoton nő. Az $u(\gamma) = h_{c+}(\gamma) - c \cos \gamma (g_{c+}(\gamma) - 2k\mathbb{T})$ -ből az $u(\gamma) < 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi)$ vagy végig negatív, vagy előjelet vált negatívból po-

zitivba. Innen következik, hogy a $g'_{c+}(\varphi) < 0$ miatt $R'(\varphi)$ vagy mindig pozitív vagy előjelet vált pozitív-
ból negatívba. Összefoglalva $R(\varphi)$ vagy szigorúan mo-
noton nő, vagy van olyan φ_{ok} , hogy ha $\varphi \in (\gamma, \varphi_{ok})$,
akkor $R(\varphi)$ növekvő és ha $\varphi \in (\varphi_{ok}, \widehat{\mathbb{I}} - \gamma)$, akkor $R(\varphi)$
csökkenő, azaz φ_{ok} -ban maximuma van $R(\varphi)$ -nek.
Az, hogy bizonyos k esetén a megfelelő $R(\varphi)$ -nek van-e
maximuma vagy nincs következik az $u(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma)$ előjeléből.
Számoljuk ki $u(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma)$ -t!

$$\begin{aligned} u(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) &= h_{c+}(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) - c \cos(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) (g_{c+}(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) - 2k\widehat{\mathbb{I}}) = \\ &= c \sin \arccos \frac{1}{|c|} + c \cos \arccos \frac{1}{|c|} (\widehat{\mathbb{I}} - \arccos \frac{1}{|c|} - 2k\widehat{\mathbb{I}}) = \\ &= c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}} + \frac{c}{|c|} (-\arccos \frac{1}{|c|} - (2k-1)\widehat{\mathbb{I}}) = c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}} + \\ &+ \arccos \frac{1}{|c|} + (2k-1)\widehat{\mathbb{I}}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $u(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) > 0$, ha k elég nagy, így
 $R'(\widehat{\mathbb{I}} - \gamma) < 0$, ha k elég nagy.

Mivel G_{ck+1} és G_{ck} görbék pontjai között rögzített φ -re
a különbség $\frac{-2\widehat{\mathbb{I}}}{r(c \sin \varphi + \sin(\arccos(c \cos \varphi)))} > 0$, ezért

$G_{ck} \cap G_{cj} = \emptyset$, ha $k \neq j$, és a G_{ck} görbén ugyanahhoz a
 φ -hez kisebb R tartozik, mint a G_{ck+1} -n.

Vizsgáljuk a $c < -1$ feltétel mellett a J_{ck} görbéket is.

Ekkor:

$$J_{c_0} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \frac{\tilde{\pi}}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi)}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$J_{c_k} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \tilde{\pi} - \gamma, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\tilde{\pi}}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

Az eddigi vizsgálatok alapján $h_{c_-}(\varphi) < 0$, $g_{c_-}(\varphi) < 0$,
 $g'_c(\varphi) < 0$. Ezért

$$v'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c_-}(\varphi) - 2k\tilde{\pi}) \geq 0.$$

és

$$v(\gamma) = h_{c_-}(\gamma) - c \cos \gamma (g_{c_-}(\gamma) - 2k\tilde{\pi}) < 0.$$

Tehát a $v(\varphi)$ vagy állandó előjelű vagy előjelet vált negatívból pozitívba. Mivel $g'_{c_-}(\varphi) < 0$, ezért $R'(\varphi)$ vagy végig negatív vagy előjelet vált negatívból pozitívba. Ez azt jelenti, hogy $R(\varphi)$ vagy monoton csökken, vagy van olyan Ψ_{0k} , hogy ha $\gamma \leq \varphi \leq \Psi_{0k}$, akkor $R(\varphi)$ monoton csökken, és ha $\Psi_{0k} < \varphi \leq \tilde{\pi} - \gamma$, akkor $R(\varphi)$ monoton nő. Ha $k = 0$, akkor $R(\varphi)$ monoton csökken $\varphi \in (\gamma, \frac{\tilde{\pi}}{2})$ -n. Mivel $v(\tilde{\pi} - \gamma) = c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} + \arccos \frac{1}{|c|} + 2k\tilde{\pi}}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ -ra, ezért ha k elég nagy, akkor $v(\tilde{\pi} - \gamma) > 0$, azaz van olyan Ψ_{0k} , ahol $R(\varphi)$ -nek minimuma van. A $J_{c_{k+1}}$ és a J_{c_k} görbék pontjai között rögzített φ -re a különbség $\frac{-2\tilde{\pi}}{r h_{c_-}(\varphi)} > 0$, ezért a

$J_{c_k} \cap J_{c_{k+1}} = \emptyset$. Tehát minden rögzített φ -re a J_{c_k} görbe

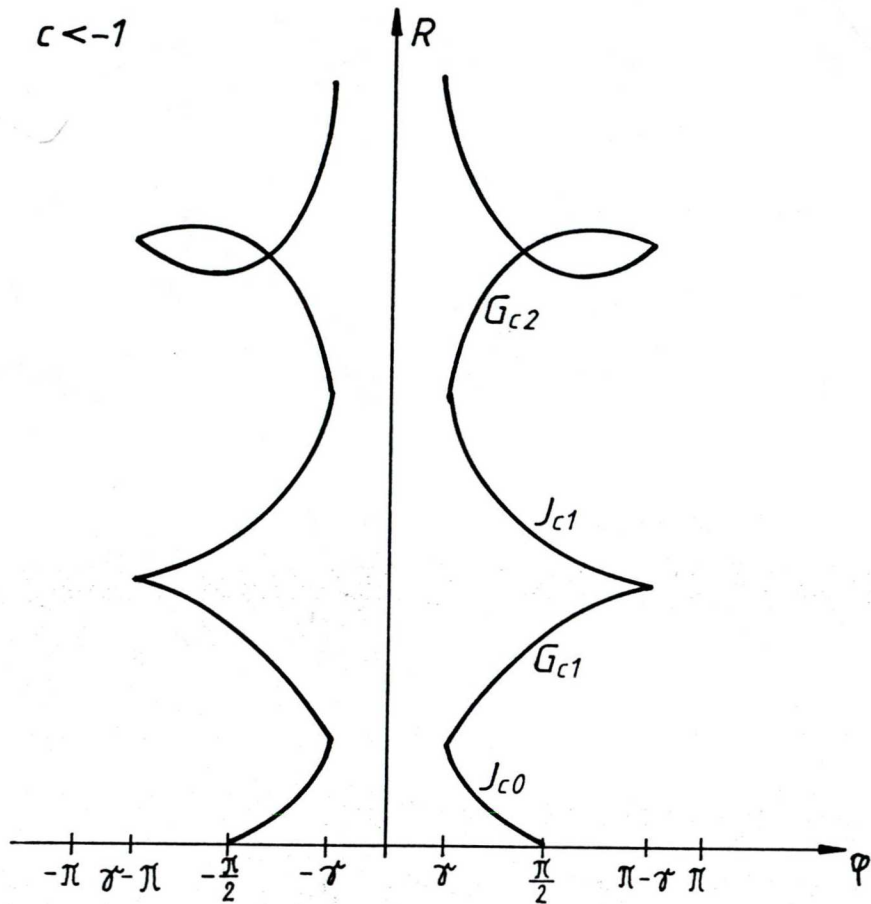
pontjai a J_{ck+1} görbe pontjai alatt vannak. Tudjuk, hogy $\varphi = \gamma$ -ra a J_{ck} és a G_{ck+1} görbék kezdőpontja egybeesik, míg $\varphi = \overline{\Psi} - \gamma$ esetén a J_{ck} és a G_{ck} görbék végpontja esik egybe. Mivel a J_{ck} kezdőpontjának ordinátája nagyobb, mint a G_{ck} kezdőpontjának ordinátája és ha k elég nagy, akkor a J_{ck} Ψ_{ok} -ban minimummal rendelkezik, a G_{ck} Φ_{ok} -ban maximummal, ezért ilyen k -ra a J_{ck} -nak és a G_{ck} -nak nemcsak a végpontja közös, hanem van egy $\overline{\Psi} - \gamma$ -nál kisebb abszcisszájú közös pontjuk is. Jelöljük Φ_{ck} -val a J_{ck} és G_{ck} görbék azon közös pontjának abszcisszáját, amely a legkisebb. Tehát ha $\gamma < \varphi < \Phi_{ck}$, akkor

$$\frac{g_{c-}(\varphi) - 2k\overline{\Psi}}{h_{c-}(\varphi)} > \frac{g_{c+}(\varphi) - 2k\overline{\Psi}}{h_{c+}(\varphi)}$$

és

$$\frac{g_{c-}(\Phi_{ck}) - 2k\overline{\Psi}}{h_{c-}(\Phi_{ck})} = \frac{g_{c+}(\Phi_{ck}) - 2k\overline{\Psi}}{h_{c+}(\Phi_{ck})}.$$

A J_{ck} és G_{ck} görbékét a 15. ábrán vázoltuk.



15. ábra

Most vizsgáljuk meg a J_{ck} és J_{-lk} görbék kapcsolatát.
Ha $c \rightarrow -1$, akkor $\gamma \rightarrow 0$. Így, mivel

$$\lim_{c \rightarrow -1} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{\varphi - (\pi - \varphi) - 2k\pi}{-2 \sin \varphi}$$

$\varphi \in (\gamma, \pi - \gamma)$ -ra és $\lim_{c \rightarrow -1} \gamma = 0$, azonkívül, ha $c \rightarrow -1$,
akkor a J_{ck} görbék kezdő és végpontja is végtelenbe tart,
ezért a J_{ck} görbék átmennek a J_{-lk} görbékbe.

A G_{ck} görbék esetében $\lim_{c \rightarrow -1} R(\varphi) = \infty$ minden $\gamma \leq \varphi \leq \overline{\Pi} - \gamma$ esetén, azaz ha $c = -1$, akkor a G_{ck} görbék nem értelmezhetők. Tehát az F_{k+} felületnek szakadása van a $c = -1$ síkon.

(ii) Legyen $-1 < c < 0$. Ekkor $\gamma = 0$, így a $0 \leq \varphi \leq \overline{\Pi}$ feltétel mellett a G_{ck} görbék a következők lesznek.

$$G_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \overline{\Pi}, \quad R = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\overline{\Pi}}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Az (1.36.) alapján az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c+}(\varphi) + 2k\overline{\Pi}}{h_{c+}(\varphi)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

egyváltozós függvények állítják elő a G_{ck} görbéket.

Az eddigi vizsgálatok eredményeként ismert, hogy $g_{c+}(\varphi) > 0$, $g'_{c+}(\varphi) > 0$, $h_{c+}(\varphi) > 0$, ha $0 \leq \varphi \leq \overline{\Pi}$, így

$$u'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\overline{\Pi}) < 0.$$

Tehát $u(\varphi)$ monoton csökken. Mivel $u(0) = h_{c+}(0) -$

$- c \cos 0 (g_{c+}(0) + 2k\overline{\Pi})$, ezért $u(0) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi)$ vagy mindig pozitív vagy előjelet vált pozitív-

ból negatívba. Áttérve az $R'(\varphi)$ -re az (1.38.) előállításból következik, hogy $R'(\varphi)$ vagy mindig pozitív vagy előjelet vált pozitívból negatívba. Összefoglalva $R(\varphi)$ vagy szigorúan monoton nő vagy van olyan φ_{ok} , hogy ha $0 < \varphi < \varphi_{ok}$, akkor $R(\varphi)$ növekszik, és ha $\varphi_{ok} < \varphi < \tilde{\pi}$ akkor $R(\varphi)$ csökken, azaz φ_{ok} -ban maximuma van $R(\varphi)$ -nek. Mivel $u(\tilde{\pi}) = h_{c+}(\tilde{\pi}) - c \cos \tilde{\pi} (g_{c+}(\tilde{\pi}) + 2k\tilde{\pi}) =$
 $= \sin \arccos c - c \arccos c + (2k+2)\tilde{\pi} c$, ezért $u(\tilde{\pi}) < 0$, ha k elég nagy. Tehát van olyan k_0 , hogy $k < k_0$ esetén a G_{ck} görbe növekedő míg $k \geq k_0$ esetén $(0, \varphi_{ok})$ -n növekedő, míg $(\varphi_{ok}, \tilde{\pi})$ -n csökkenő. Rögzített φ -re a G_{ck+1} és G_{ck} görbék pontjainak ordinátái között a különbség $\frac{1}{r} \frac{2\tilde{\pi}}{h_{c+}(\varphi)} > 0$, ezért $G_{ck} \cap G_{ck+1} = \emptyset$.

Vizsgáljuk a J_{ck} görbéket is a $-1 < c < 0$ feltétel mellett.

$$J_{c0} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\tilde{\pi}}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi)}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$J_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \tilde{\pi}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\tilde{\pi}}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Az eddigi vizsgálatok alapján $h_{c-}(\varphi) < 0$, $g_{c-}(\varphi) < 0$, $g'_{c-}(\varphi) > 0$. Így

$$v'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c-}(\varphi) - 2k\tilde{\pi}) > 0.$$

Tehát $v(\varphi)$ monoton nő. Mivel $v(0) = h_{c-}(0) - c \cos 0 (g_{c-}(0) - 2k\tilde{\pi})$, azaz $v(0) < 0$, ezért $v(\varphi)$ vagy végig negatív, vagy előjelet vált negatívból pozitívba. Áttérve $R'(\varphi)$ -re az (1.39.) előállításból következik, hogy $R'(\varphi)$ vagy végig negatív, vagy van olyan Ψ_{0k} , hogy $0 < \varphi < \Psi_{0k}$ esetén $R'(\varphi)$ negatív, és $\Psi_{0k} < \varphi < \tilde{\pi}$ esetén $R'(\varphi)$ pozitív. Ez azt jelenti, hogy minimuma van az $R(\varphi)$ -nek Ψ_{0k} -ban. Mivel

$$v(\tilde{\pi}) = h_{c-}(\tilde{\pi}) - c \cos \tilde{\pi} (g_{c-}(\tilde{\pi}) - 2k\tilde{\pi}) = -\sin \arccos(-c) + c \arccos(-c) - (2k-1)\tilde{\pi} \cdot c,$$

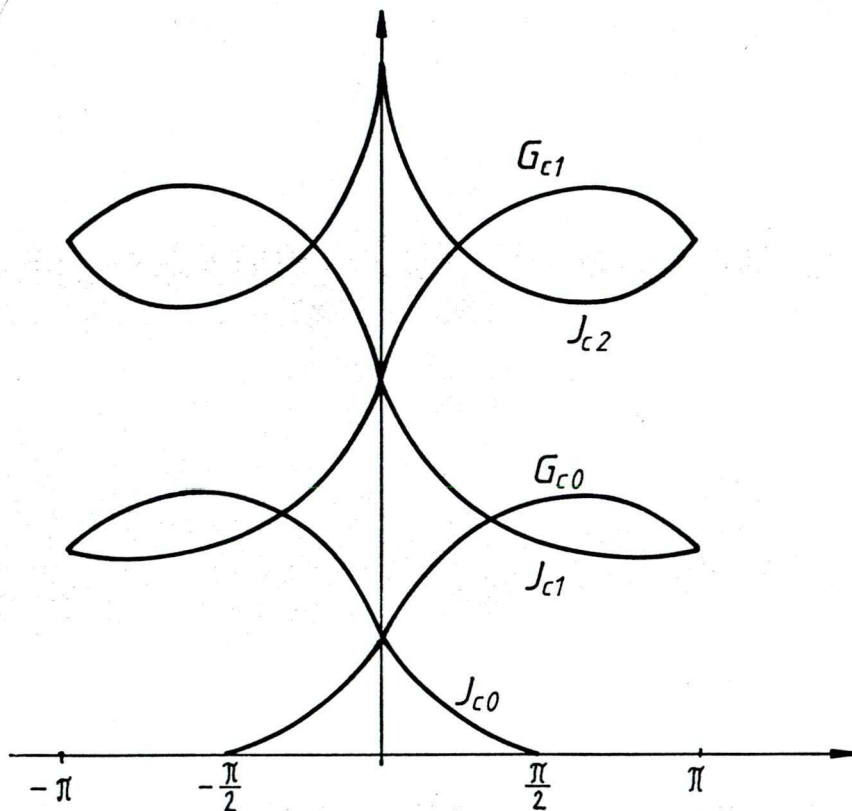
ezért ha k elég nagy, akkor $v(\tilde{\pi}) > 0$. Tehát van olyan k_0 , hogy ha $k < k_0$, akkor a J_{ck} görbe csökkenő, míg ha $k \geq k_0$, akkor a J_{ck} görbe $(0, \Psi_{0k})$ -n csökken, míg $(\Psi_{0k}, \tilde{\pi})$ -n növekszik. Tudjuk, hogy a J_{ck} és a G_{ck} görbék kezdőpontjai megegyeznek, azonkívül a G_{ck} görbe végpontja megegyezik a J_{ck+1} görbe végpontjával. Ezeket a görbéket a 16. ábrán vázoltuk. A J_{ck+1} és J_{ck} görbék pontjainak ordinátái között rögzített φ -re a különbség $\frac{1}{2} \frac{-2\tilde{\pi}}{h_{c-}(\varphi)} > 0$, ezért a J_{ck} görbe a J_{ck+1} görbe alatt van és $J_{ck} \cap J_{ck+1} = \emptyset$.

Ha $c \rightarrow -1$, akkor a J_{ck} görbék a J_{-1k} görbékbe mennek át, ugyanis

$$\lim_{c \rightarrow -1} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\tilde{\pi}}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi - (\tilde{\pi} - \varphi) - 2k\tilde{\pi}}{2 \sin \varphi},$$

ha $0 < \varphi < \tilde{\pi}$.

Ha $\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pi$, akkor ez a határérték ∞ . Tehát a J_{ck} görbék az ismert J_{-lk} görbékbe mennek át.



16. ábra

Vizsgáljuk meg mi történik a G_{ck} görbékkel, ha $c \rightarrow -1$. Mivel

$$\lim_{c \rightarrow -1} \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \infty,$$

így azt kaptuk, amit $c < -1$ esetben is, hogy a G_{ck} görbét $c = -1$ esetén nem léteznek.

Vizsgáljuk meg $c = 0$ -ra hogyan néznek ki ezek a görbék.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{1}$$

és

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \frac{\pi}{2} - 2k\pi}{-1}.$$

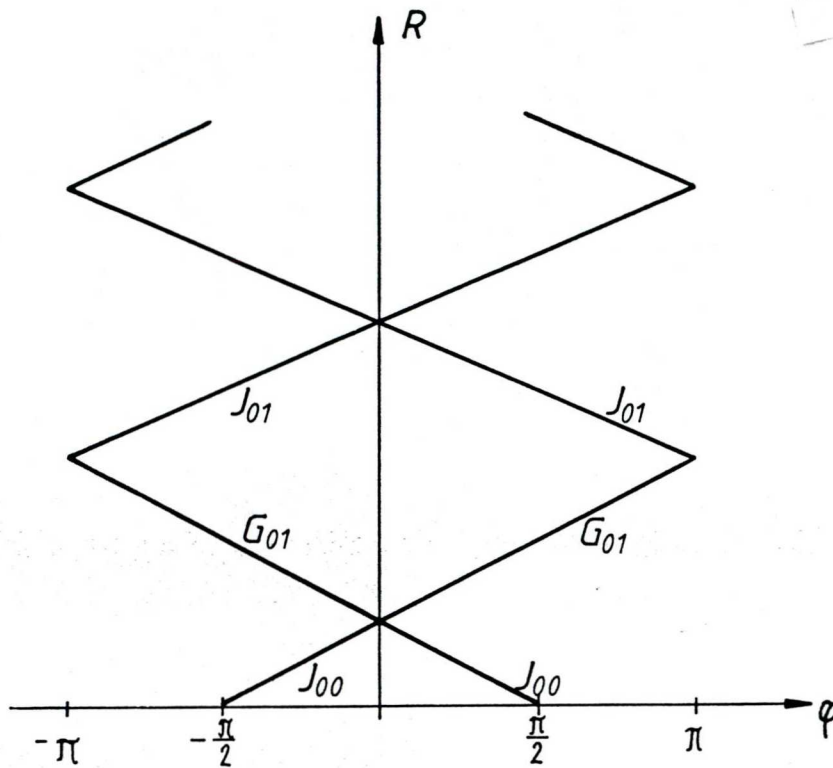
Tehát, ha $c = 0$, akkor a G_{ok} görbékét az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right),$$

míg a J_{ok} görbékét az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi \right)$$

függvények adják meg. Ezeket az egyeneseket a 17. ábrán vázoltuk.



17. ábra

(iii) Legyen $0 < c < 1$. Ekkor $\gamma = 0$, tehát $0 \leq \varphi \leq \pi$

A G_{ck} görbék a következők lesznek:

$$G_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Az (1.36.) formula alapján a G_{ck} görbét az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c+}(\varphi) + 2k\pi}{h_{c+}(\varphi)}$$

függvények írják le. Az eddigi vizsgálatok alapján tudjuk, hogy $g_{c+}(\varphi) > 0$, $g'_{c+}(\varphi) > 0$, $h_{c+}(\varphi) > 0$. Így az

$$u'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\sqrt{1-c^2}) > 0$$

egyenlőtlenség fennáll. Tehát $u(\varphi)$ monoton nő. Mivel

$$u(0) = h_{c+}(0) - c \cos 0 (g_{c+}(0) + 2k\sqrt{1-c^2}),$$

azaz

$$(1.40.) \quad u(0) = \sin \arccos c - c(\arccos c + 2k\sqrt{1-c^2}),$$

ezért ha $k = 0$, akkor $u(0) > 0$, ugyanis ekkor $u(0) = \sin \arccos c - c \arccos c$. Tehát $u(0)$ c függvénye. A deriváltja $(\sin \arccos c - c \arccos c)' = -\arccos c < 0$, azaz $u(0)$ c növelésével csökken viszont, ha $c = 1$, akkor $u(0) = 0$, ezért $0 < c < 1$ esetén csak $u(0) < 0$ lehet.

Visszatérve (1.40.)-re ha $k \geq 1$, akkor $u(0)$ már lehet negatív. Tehát van olyan k_0 , hogy ha $k < k_0$, akkor $u(0)$ pozitív, míg ha $k \geq k_0$, akkor negatív. Ezért ha $k < k_0$, akkor $u(\varphi)$ minden φ -re pozitív, míg ha $k \geq k_0$, akkor $u(\varphi)$ negatívból pozitívba vált előjelet, ugyanis könnyű ellenőrizni, hogy $u(\frac{\pi}{2}) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $R(\varphi)$



vagy minden φ -re növekvő, vagy ha $k \geq k_0$, akkor van olyan φ_{ok} , hogy $R(\varphi)$ a $(0, \varphi_{ok})$ intervallumon csökkenő, és a $(\varphi_{ok}, \tilde{\Pi})$ intervallumon növekvő. A G_{ck} és a G_{ck+1} görbék pontjainak ordinátái között rögzített φ -re a különbség $\frac{2\tilde{\Pi}}{rh_{c+}(\varphi)} > 0$. Így $G_{ck} \cap G_{ck+1} = \emptyset$ és a G_{ck} görbe a G_{ck+1} görbe alatt van.

Tekintsük a J_{ck} görbét is.

$$J_{c0} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\tilde{\Pi}}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi)}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$J_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \tilde{\Pi}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\tilde{\Pi}}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Az eddigiekből következik, hogy a J_{ck} görbét az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c-}(\varphi) - 2k\tilde{\Pi}}{h_{c-}(\varphi)}$$

függvények írják le, és $g_{c-}(\varphi) < 0$, $h_{c-}(\varphi) < 0$, $g'_{c-}(\varphi) > 0$.
Így

$$v'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c-}(\varphi) - 2k\tilde{\Pi}) < 0.$$

Tehát $v(\varphi)$ monoton csökken. Mivel

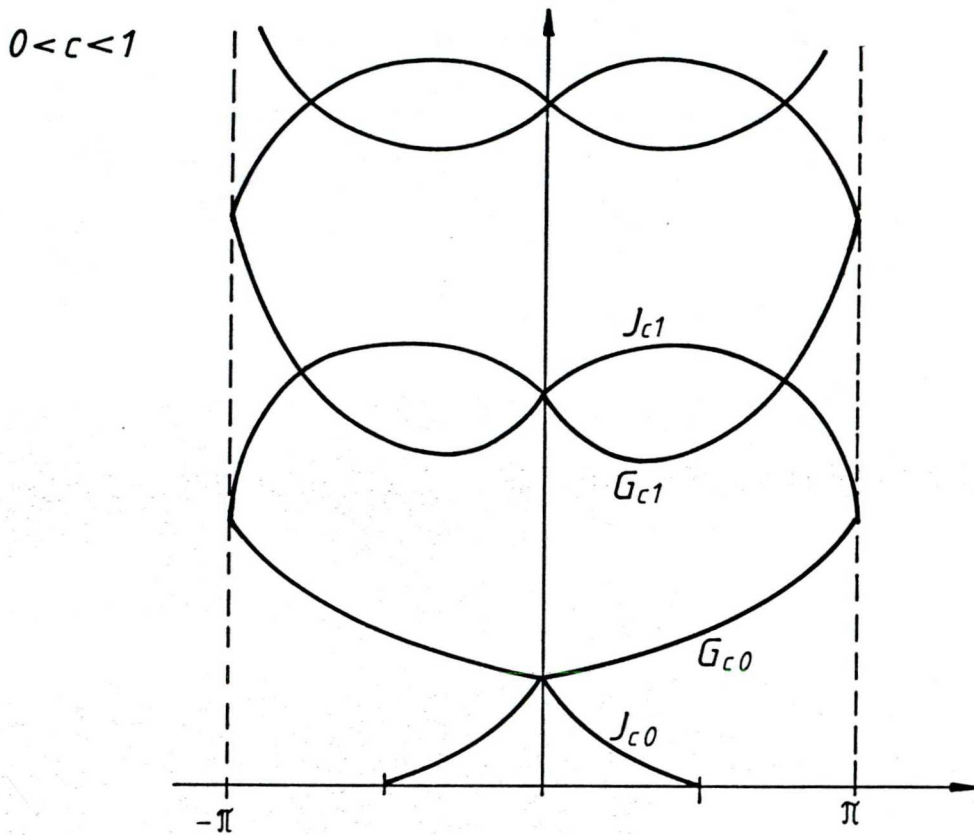
$$(1.41.) \quad v(0) = -\sin \arccos c + c \arccos c + 2k\tilde{\Pi}c,$$

ezért ha $k = 0$, akkor

$$v(0) = -\sin \arccos c + c \arccos c < 0.$$

Ez az egyenlőtlenség következik abból, hogy ha $0 < c < 1$, akkor a jobboldal c szerinti deriváltja, $(-\sin \arccos c + c \arccos c)' = \arccos c > 0$, ami azt jelenti, hogy $v(0)$ a c monoton növekvő függvénye. Ha $c = 1$, akkor $v(0) = 0$, ezért, ha $0 < c < 1$, akkor $v(0) < 0$ teljesülhet csak. Az (1.41.) formulából azonban látszik, hogy ha k elég nagy, akkor $v(0) > 0$. A monoton csökkenés miatt ebben az esetben $v(\varphi)$ előjelet vált, ugyanis $v(\frac{\pi}{2}) = h_{c-}(\frac{\pi}{2}) < 0$. Tehát van olyan k_0 , hogy ha $k < k_0$, akkor $R(\varphi)$ monoton csökken, míg ha $k \geq k_0$, akkor van olyan ψ_{0k} hogy ψ_{0k} -ban $R(\varphi)$ -nek minimuma van, azaz $0 < \varphi < \psi_{0k}$ esetén $R(\varphi)$ csökken, míg $\psi_{0k} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ esetén $R(\varphi)$ monoton nő. Tudjuk, hogy a J_{ck} és a G_{ck} görbék kezdőpontja megegyezik, azonkívül a J_{ck+1} és G_{ck} végpontja is megegyezik.

A J_{ck} és G_{ck} görbéket a 18. ábrán vázoltuk.



18. ábra

Ha $c \rightarrow 0$, akkor most is megkapjuk az (ii) pontban megismert G_{0k} , J_{0k} egyeneseket. Ugyanis, ha $\varphi \in [0, \pi]$, akkor

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{1},$$

és

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \frac{\pi}{2} - 2k\pi}{-1}.$$

Tehát a 17. ábrának megfelelő J_{ok} és G_{ok} görbékhez jutottunk. Ha $c \rightarrow 1$, akkor a G_{1k} görbékét kell megkapnunk.

A $\varphi \in (0, \overline{\Pi})$ -re fennálló

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\overline{\Pi}}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{\varphi + k\overline{\Pi}}{\sin \varphi}$$

összefüggés miatt éppen a 4. ábrán vázolt G_{1k} görbékét kapjuk. Ugyancsak a $(0, \overline{\Pi})$ intervallumon igaz a

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) - 2k\overline{\Pi}}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \infty$$

összefüggés, ezért a J_{ck} görbék a $c = 1$ síkon nem szerepelnek, a $c = 1$ sík az F_k - felületek szakadási helye.

(iv) Legyen $1 < c$. Ekkor $\gamma = \arccos \frac{1}{c}$. Így ha

$\gamma \leq \varphi \leq \overline{\Pi} - \gamma$, akkor a G_{ck} görbék a következők lesznek.

$$G_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \overline{\Pi} - \gamma, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\overline{\Pi}}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Az eddigi vizsgálatok alapján a $g_{c+}(\varphi) > 0$, $h_{c+}(\varphi) > 0$ és $g'_{c+}(\varphi) > 0$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Így a G_{ck} görbékét előállító

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c+}(\varphi) + 2k\overline{\Pi}}{h_{c+}(\varphi)}$$

egyváltozós függvény deriváltjában szereplő $u(\varphi)$ deriváltjára az

$$u'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c+}(\varphi) + 2k\overline{\Pi}) > 0$$

egyenlőtlenség teljesül.

Tehát $u(\varphi)$ monoton nő. Mivel

$$(1.42.) \quad u(\gamma) = c \sin \arccos \frac{1}{c} - (\arccos \frac{1}{c} + 2k\overline{\Pi}),$$

ezért ha $u(\gamma) > 0$, akkor $u(\varphi)$ nem vált előjelet. Ha $u(\gamma) < 0$, akkor $u(\varphi)$ előjelet vált negatívból pozitívba, mivel $u(\frac{\overline{\Pi}}{2}) > 0$. Legyen $k = 0$, ekkor az $u(\gamma)$ c szerinti deriváltja

$$(c \sin \arccos \frac{1}{c} - \arccos \frac{1}{c})' = \sin \arccos \frac{1}{c} > 0.$$

Tehát $u(\gamma)$ c növelésével növekszik. Mivel $u(\gamma) = 0$ $c = 1$ esetén, ezért $c > 1$ -re $u(\gamma) > 0$. Az (1.42.) formulából látszik, hogy ha k elég nagy, akkor $u(\gamma) < 0$. Ez azt jelenti, hogy van olyan k_0 , hogy $k < k_0$ esetén $u(\gamma) > 0$, $k \geq k_0$ esetén $u(\gamma) < 0$. Ha $u(\gamma) < 0$, akkor $u(\varphi)$ előjelet vált a $(\gamma, \overline{\Pi} - \gamma)$ intervallumon, negatívból pozitívba. Tehát, ha $k < k_0$, akkor $R(\varphi)$ monoton növekvő, míg ha $k \geq k_0$, akkor van olyan φ_{0k} , hogy $\gamma < \varphi < \varphi_{0k}$ esetén $R(\varphi)$ csökken, míg $\varphi_{0k} < \varphi < \overline{\Pi} - \gamma$ esetén $R(\varphi)$ nő, azaz φ_{0k} -ban minimuma van $R(\varphi)$ -nek. Mivel a G_{ck+1} és G_{ck} görbék pontjainak ordinátája között a pozitív $\frac{2\overline{\Pi}}{r h_{c+}(\varphi)}$ különbség van, ezért

$G_{ck} \cap G_{ck+1} = \emptyset$ és a G_{ck} görbe a G_{ck+1} görbe alatt van.

Tekintsük a J_{ck} görbéket is

$$J_{c0} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi)}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$$J_{ck} = \left\{ (c, R, \varphi) \mid \gamma \leq \varphi \leq \pi - \gamma, R = \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} \right\}$$

$k = 1, 2, \dots$

A J_{ck} görbéket az

$$R(\varphi) = \frac{1}{r} \frac{g_{c-}(\varphi) + 2k\pi}{h_{c-}(\varphi)}$$

egyváltozós függvények állítják elő. Az eddigiek alapján tudjuk, hogy $g_{c-}(\varphi) > 0$, $h_{c-}(\varphi) > 0$, $g'_{c-}(\varphi) < 0$. Így az $R(\varphi)$ deriváltjában szereplő $v(\varphi)$ függvényre a

$$v'(\varphi) = c \sin \varphi (g_{c-}(\varphi) + 2k\pi) > 0$$

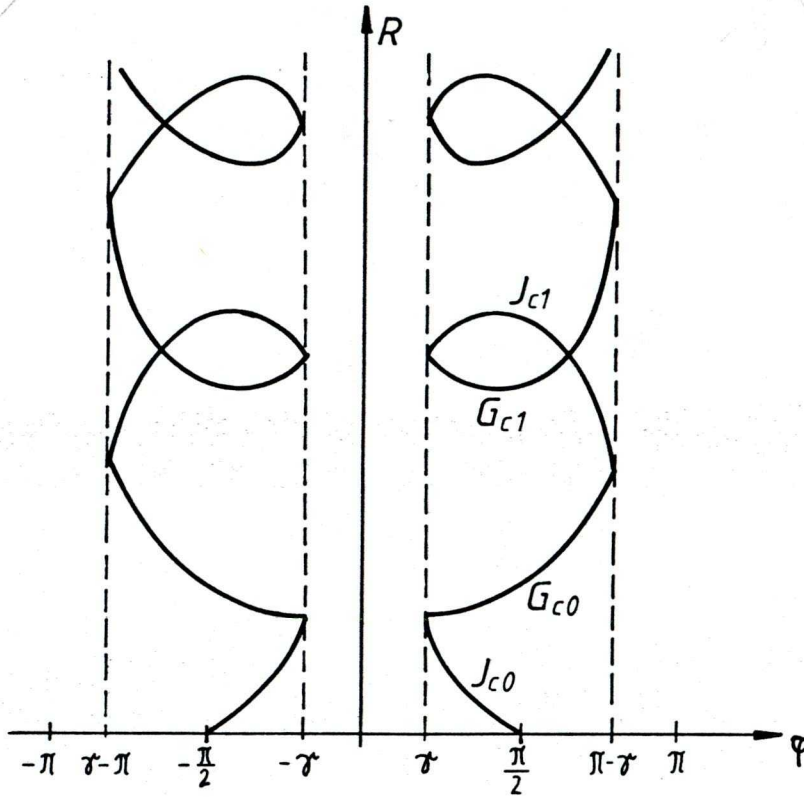
egyenlőtlenség teljesül. Tehát $v(\varphi)$ monoton nő. Mivel

$$(1.43.) \quad v(\gamma) = c \sin \arccos \frac{1}{c} - \arccos \frac{1}{c} - 2k\pi,$$

ezért ha $v(\gamma) > 0$, akkor $v(\varphi)$ nem vált előjelet. Ha $v(\gamma) < 0$, akkor $v(\varphi)$ előjelet vált, negatívból pozitívba. Ha $k = 0$, akkor

$$v(\gamma) = c \sin \arccos \frac{1}{c} - \arccos \frac{1}{c}.$$

Ennek a c szerinti deriváltja $(c \sin \arccos \frac{1}{c} - \arccos \frac{1}{c})' = \sin \arccos \frac{1}{c} > 0$. Tehát $v(\varphi)$ növekvő függvénye c -nek. Mivel $v(\gamma) = 0$, ha $c = 1$, ezért $c > 1$ -re csak $v(\gamma) > 0$ teljesülhet. Az (1.43.) formula alapján, ha k elég nagy, akkor $v(\gamma) < 0$ teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy van olyan k_0 , hogy ha $k < k_0$, akkor $v(\gamma) > 0$, míg ha $k \geq k_0$, akkor $v(\gamma) < 0$. Ebben az esetben $v(\varphi)$ előjelet vált negatívból pozitívba, ugyanis $v(\pi - \gamma) > 0$. Ezért az (1.38.) formula alapján $R'(\varphi)$ $k < k_0$ esetén negatív, míg $k \geq k_0$ -ra van olyan ψ_{0k} , hogy $R'(\varphi)$ pozitív minden $\varphi \in (\gamma, \psi_{0k})$ -ra, valamint, ha $\psi_{0k} < \varphi < \pi - \gamma$, akkor $R'(\varphi) < 0$. Ez azt jelenti, hogy ha $k < k_0$, akkor $R(\varphi)$ monoton csökken, míg $k \geq k_0$ esetén $R(\varphi)$ a (γ, ψ_{0k}) intervallumon monoton nő, a $(\psi_{0k}, \pi - \gamma)$ intervallumon monoton csökken, azaz ψ_{0k} -ban maximuma van. A J_{ck+1} és J_{ck} görbék pontjainak ordinátái között a különbség $\frac{2\pi}{r h_{c-}(\varphi)} > 0$, ezért $J_{ck} \cap J_{ck+1} = \emptyset$. Tudjuk, hogy a J_{ck} és a G_{ck} görbék kezdőpontjai egybeesnek és a J_{ck+1} és a G_{ck} görbék végpontjai is. A J_{ck} és G_{ck} görbéket a 19. ábrán vázoltuk.



19. ábra

A J_{ck} görbék és a G_{ck} görbék tulajdonságai alapján nemcsak a kezdőpontjuk lehet közös, hanem másik közös pontjuk is lehet. Legyen φ_{ck} a legnagyobb abszcisszáju közös pont abszcisszája. Tehát

$$\frac{\varphi_{ck} - \arccos(c \cos \varphi_{ck}) + 2k\pi}{c \sin \varphi_{ck} - \sin \arccos(c \cos \varphi_{ck})} = \frac{\varphi_{ck} + \arccos(c \cos \varphi_{ck}) + 2k\pi}{c \sin \varphi_{ck} + \sin \arccos(c \cos \varphi_{ck})}$$

és, ha $\varphi_{ck} < \varphi < \pi - \eta$, akkor

$$\frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} < \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)}.$$

Vizsgáljuk meg a $c = 1$ síkon is a görbét. Mivel ha

$\varphi \in (\alpha, \pi - \alpha)$, akkor

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{r} \frac{\varphi + \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi + \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \frac{2\varphi + 2k\pi}{2 \sin \varphi},$$

ezért éppen a G_{1k} görbét kapjuk, míg az $(\alpha, \pi - \alpha)$ intervallumon

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{1}{r} \frac{\varphi - \arccos(c \cos \varphi) + 2k\pi}{c \sin \varphi - \sin \arccos(c \cos \varphi)} = \infty,$$

ezért a J_{ck} görbék $c = 1$ -re nincsenek értelmezve, tehát itt az F_k felületeknek szakadásuk van.

A metszetgörbék vázolósa után meg kell vizsgálnunk, hogy melyek azok a tartományok az (a, R, φ) térben, amelyekben választva az a -t és μ -t $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részü zéróhelyei lesznek. A tartományok felírásához szükségünk lesz a következő jelölésekre. Legyen

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ \arccos \frac{1}{|a|}, & \text{ha } |a| > 1. \end{cases}$$

Jelöljük φ_{ak} -val azt az $[\alpha, \overline{\eta} - \alpha]$ intervallumba eső szöget, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(i) Ha $a < -1$, akkor

$$\frac{g_{a-}(\varphi_{ak}) - 2k\overline{\eta}}{h_{a-}(\varphi_{ak})} = \frac{g_{a+}(\varphi_{ak}) - 2k\overline{\eta}}{h_{a+}(\varphi_{ak})}$$

és

$$\frac{g_{a-}(\varphi) - 2k\overline{\eta}}{h_{a-}(\varphi)} > \frac{g_{a+}(\varphi) - 2k\overline{\eta}}{h_{a+}(\varphi)}$$

minden $\varphi \in (\alpha, \varphi_{ak})$ -ra.

(ii) Ha $a > 1$, akkor

$$\frac{g_{a-}(\varphi_{ak}) + 2k\overline{\eta}}{h_{a-}(\varphi_{ak})} = \frac{g_{a+}(\varphi_{ak}) + 2k\overline{\eta}}{h_{a+}(\varphi_{ak})},$$

és

$$\frac{g_{a-}(\varphi) + 2k\overline{\eta}}{h_{a-}(\varphi)} < \frac{g_{a+}(\varphi) + 2k\overline{\eta}}{h_{a+}(\varphi)}$$

minden $\varphi \in (\varphi_{ak}, \overline{\eta} - \alpha)$ -ra. Ezután a tekintsük az (a, R, φ) tér következő tartományait:

$$\begin{aligned}
H_{(-\infty, -1)} &= \{(a, R, \varphi) \mid a < -1, |\varphi| < \infty, R > 0\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a < -1, \infty \leq |\varphi| < \varphi_{ak}, k \geq 1, \\
&\quad \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(|\varphi|) - 2k\tilde{\Pi}}{h_{a+}(|\varphi|)} < R < \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(|\varphi|) - 2k\tilde{\Pi}}{h_{a-}(|\varphi|)}\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a < -1, \infty \leq |\varphi| < \frac{\tilde{\Pi}}{2}, 0 < R < \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(|\varphi|)}{h_{a-}(|\varphi|)}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{(1, \infty)} &= \{(a, R, \varphi) \mid a > 1, \tilde{\Pi} - \infty < |\varphi| < \tilde{\Pi}, R > 0\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a > 1, \varphi = \tilde{\Pi}, R > 0\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a > 1, \varphi_{ak} < |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \infty, k \geq 1, \\
&\quad \frac{1}{r} \frac{g_{a-}(|\varphi|) + 2k\tilde{\Pi}}{h_{a-}(|\varphi|)} < R < \frac{1}{r} \frac{g_{a+}(|\varphi|) + 2k\tilde{\Pi}}{h_{a+}(|\varphi|)}\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a > 1, \infty < |\varphi| \leq \frac{\tilde{\Pi}}{2}, \\
&\quad \frac{g_{a+}(|\varphi|)}{rh_{a+}(|\varphi|)} > R > \frac{g_{a-}(|\varphi|)}{rh_{a-}(|\varphi|)}\} \cup \\
&\cup \{(a, R, \varphi) \mid a > 1, \frac{\tilde{\Pi}}{2} < |\varphi| \leq \tilde{\Pi} - \infty, 0 < R < \frac{g_{a+}(|\varphi|)}{rh_{a+}(|\varphi|)}\},
\end{aligned}$$

$$H_{(-1, 1)} = \{(a, R, \varphi) \mid |a| < 1, 0 \leq |\varphi| < \frac{\tilde{\Pi}}{2}, 0 < R < \frac{g_{a-}(|\varphi|)}{rh_{a-}(|\varphi|)}\},$$

$$H_{-1} = \{(-1, R, \varphi) \mid R > 0, \text{ha } \varphi \neq 0, 0 < R < \frac{\tilde{\Pi} - 2k\varphi}{2r \sin |\varphi|}, \text{ha } 0 < |\varphi| < \frac{\tilde{\Pi}}{2}\}.$$

Legyen $H = H_{(-\infty, -1)} \cup H_{-1} \cup H_{(-1, 1)} \cup H_{(1, \infty)}$. A következő tétel a H és az $f_a(z)$ negatív valós részű

zéróhelyeinek kapcsolatáról szól.

4.Tétel. Ahhoz, hogy $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelyei legyenek szükséges és elegendő, hogy $(a, R, \varphi) \in H$ teljesüljön.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $(a, R, \varphi) \in H$, akkor $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelye van. A 2.Segéd-tétel szerint ha $a \cos \varphi < -1$, akkor $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelyei vannak. Mivel az $\{(a, R, \varphi) \mid a \cos \varphi < -1, -\infty < a < \infty, -\pi < \varphi \leq \pi, R > 0\}$ tartomány része a H -nak, ezért csak azt kell belátni, hogy H -t nem szeli ketté egyetlen F_{k+} és F_{k-} felület sem. Ez következik a $H(-\infty, -1)$, $H(-1, 1)$, H_{-1} és $H(1, \infty)$ definíciójából.

A bizonyítás másik részében meg kell vizsgálni, hogy hogyan változik a zéróhelyek valós része ha áthaladunk valamely F_{k+} illetve F_{k-} felületen. Tekintsük az (1.19.) formulát. Mivel (1.8.) alapján $a \cdot \cos \varphi - \cos(\varphi - ry) = 0$ a nulla valós részű zéróhelyekre, ezért dx előjelét az $Rr(1 - a \cos ry)$ kifejezés határozza meg, ha a rögzített és φ rögzített.

Mivel $1 - a \cos ry \geq 0$, ha $|a| \leq 1$ és minden rögzített a esetén az egyenlőség csak bizonyos y -ra teljesül, ezért, ha $|a| \leq 1$, akkor a J_{ak} és G_{ak} görbéken R növelésével áthaladva a nulla valós részű zéróhelyek valós része növekszik. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben H_{-1} és $H(-1, 1)$ tartományokon kívül már nincs olyan (a, R, φ) pont, ahol $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelye van.

Az $|a| > 1$ esetben alakítsuk át az $1-a \cos ry$ kifejezést az (1.11.), illetve az (1.10.) formulák felhasználásával.

(1.10.) alapján $ry = \varphi - \arccos(a \cos \varphi) + 2k\pi$. Tehát
 $1-a \cos ry = 1-a(\cos \varphi \cos \arccos(a \cos \varphi) -$
 $-a \sin \varphi \sin \arccos(a \cos \varphi))$. Így

$$(1.44.) \quad 1-a \cos ry = 1-a^2 \cos^2 \varphi - a \sin \varphi \sin \arccos(a \cos \varphi).$$

(1.11.) alapján $ry = \varphi + \arccos(a \cos \varphi) + 2k\pi$. Tehát
 $1-a \cos ry = 1-a \cos \varphi \cos \arccos(a \cos \varphi) +$
 $+ a \sin \varphi \sin \arccos(a \cos \varphi)$. Így

$$(1.45.) \quad 1-a \cos ry = 1-a^2 \cos^2 \varphi + a \sin \varphi \sin \arccos(a \cos \varphi).$$

Az (1.44.) formula a J_{ak} görbén való áthaladáskor jellemzi a nulla valós részű zéróhelyek valós részének változását, míg az (1.45.) a G_{ak} görbén való áthaladáskor jellemzi a nulla valós részű zéróhelyek valós részének a változását. Elég a $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ esetre megnézni.

(i) Legyen $a > 1$ és tudjuk, hogy $|a \cos \varphi| \leq 1$, így az (1.44.) formulából felhasználva, hogy $a \sin \varphi - \sin \arccos(a \cos \varphi) = h_{a+}(\varphi) > 0$, az

$$1-a \cos ry \leq 1-a^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \arccos(a \cos \varphi) = 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Tehát J_{ak} -n áthaladva a nulla valós részű zéróhelyek valós része csökken. Az (1.45.) formulából az

$$1 - a \cos ry \geq 1 - a^2 \cos^2 \varphi \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, mivel $a \cdot \sin \varphi \sin \operatorname{arc} \cos(a \cos \varphi) \geq 0$.
Tehát a G_{ak} görbéken áthaladva $f_a(z)$ nulla valós részű zéróhelyeinek a valós része növekszik. Ha megnézzük a J_{ak} és G_{ak} görbék $a > 1$ esetén felvázolt képét a 19. ábrán, akkor azt kapjuk, hogy a $H_{(1, \infty)}$ tartományon kívül, $a > 1$ esetén nem lehet $f_a(z)$ -nek minden zéróhelye negatív valós részű.

(ii) Legyen $a < -1$ és $|a \cos \varphi| \leq 1$. Ekkor az (1.44.) formulából az

$$1 - a \cos ry \geq 1 - a^2 \cos^2 \varphi \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, mivel $-a \sin \varphi \sin \operatorname{arc} \cos(a \cos \varphi) \geq 0$.
Tehát a J_{ak} görbéken áthaladva az $f_a(z)$ 0 valós részű zéróhelyeinek a valós része növekszik. Az (1.45.) formulából az

$$1 - a \cos ry \leq 1 - a^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \operatorname{arc} \cos(a \cos \varphi) = 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ugyanis $a \cdot \sin \varphi + \sin \operatorname{arc} \cos(a \cos \varphi) = h_{a+}(\varphi) < 0$ ebben az esetben. Tehát a G_{ak} görbén áthaladva az $f_a(z)$ 0 valós részű zéróhelyeinek a valós része csökken. Figyelembe véve a J_{ak} és G_{ak} görbék 15. ábrának megfelelő elhelyezkedését azt kapjuk, hogy ebben az esetben a $H_{(-\infty, -1)}$ tartományon kívül $f_a(z)$ -nek csak negatív valós részű zéróhelye nem lehet. Ezzel a bizonyítás kész.

A 4.Tételből és a B.Tételből kapjuk a következő állítást.

Következmény: Ahhoz, hogy az (1.1.) egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil legyen szükséges és elegendő, hogy az A mátrix minden $\mu = Re^{i\varphi}$ sajátértékére és a-ra az $(a, R, \varphi) \in H$ teljesüljön.

Példák

1.) Alkalmazzuk a 4.Tételt az

$$(1.46.) \quad \dot{x}(t) = -px(t) - qx(t-r)$$

skaláris egyenletre, ahol p, q valós számok. Határozzuk meg azon (p, q) értékek halmazát, amelyekre az (1.46.) 0 megoldása aszimptotikusan stabil. Írjuk át az egyenletet az (1.1.)-nek megfelelő alakba. Ha $q \neq 0$, akkor

$$\dot{x}(t) = q\left(-\frac{p}{q}x(t) - x(t-r)\right).$$

Ezen egyenlet karakterisztikus egyenlete a

$$(1.47.) \quad z - q\left(-\frac{p}{q} - e^{-zr}\right) = 0$$

egyenlet. Különböztessük meg az alábbi eseteket.

(i) $q < 0, p \leq 0$.

Ekkor $R = |q|, \varphi = \pi, a = -\frac{p}{q} \geq 0$.

Ebben az esetben az (a, R, φ) -nek a $H(1, \infty)$ tartományba kell esni, azaz $-\frac{p}{q} \geq 1$ feltételnek kell teljesülni, amiből $q \geq -p$ következik.

(ii) $q > 0$.

Ekkor $R=q$, $\varphi = 0$, $a = -\frac{p}{q}$. A feltételeink szerint az (a, R, φ) pontnak a $H_{(-1,1)}$ -be vagy a $H_{(-\infty,-1)}$ tartományba kell esni ahhoz, hogy (1.47.)-nek csak negatív valós részű megoldásai legyenek.

Így ha $|\frac{p}{q}| < 1$, akkor a

$$0 < q < \frac{1}{r} \frac{0 - \arccos\left(-\frac{p}{q}\right)}{-\frac{p}{q} \sin 0 - \sin \arccos\left(-\frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{r} \frac{\arccos\left(-\frac{p}{q}\right)}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}}$$

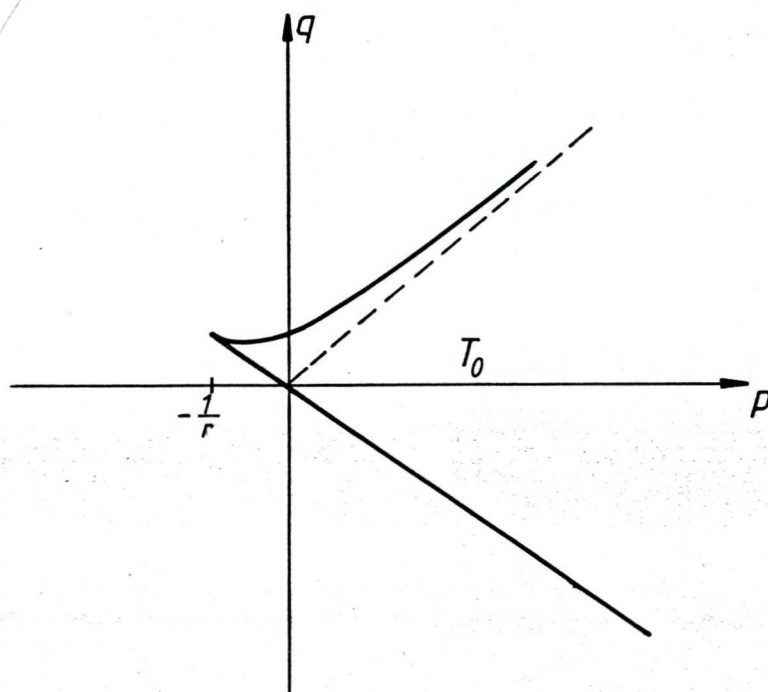
feltételnek kell teljesülni. Ebből a feltételből következik, hogy nem minden p felel meg nekünk. Ugyanis

$$\lim_{-\frac{p}{q} \rightarrow 1} \frac{1}{r} \frac{\arccos\left(-\frac{p}{q}\right)}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}} = -\frac{1}{r},$$

ezért $p > -\frac{1}{r}$ -nek kell teljesülni.

Ha $-\frac{p}{q} < -1$, akkor a $q > 0$ feltételnek kell teljesülni.

Ezeket a feltételeket összefoglalva a 20. ábrának megfelelő T_0 tartományt kapjuk, amely szerepel például HALE [19] és ELSZGOLC-NORKIN [12] könyveiben is. A $q=0$ esetben (1.46.) közönséges differenciálegyenlet, amelynek $p < 0$ esetén a karakterisztikus egyenlete csak negatív valós részű zéró-hellyel rendelkezik.



20. ábra

Következmény. Ha $(p, q) \in T_0$, akkor (1.46.) 0 megoldása aszimptotikusan stabil.

2.) Tekintsük az ATKINSON és ZHANG [2] által vizsgált (1.48.)

$$\dot{x}(t) = p(x(t) - x(t-1))$$

skaláris egyenletet. Ha erre az egyenletre alkalmazzuk vizsgálataink eredményét, akkor azt kapjuk, hogy

ha $p < 0$, akkor, mivel $\mu = p$, $\varphi = 0$, $r=1$, $a=1$, a 4. Segédteletből következik, hogy (1.48.) minden megoldásának létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén,

ha $0 < p < 1$, akkor, mivel $\mu = p$, $\varphi = 0$, $r=1$, $a=1$, a 4. Segédteletből következik, hogy (1.48.) minden megoldásának létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén.

Ha $p > 1$, akkor, a 3.Tétel alapján (1.48.) minden megoldása az

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + x_0(t)$$

alakban írható, ahol $x_0(t)$ korlátos megoldás, c_1 valós konstans és λ az (1.48.) karakterisztikus egyenletének pozitív valós részű megoldása.

Ha $p = 1$, akkor szintén a 3.Tétel következménye, hogy (1.48.) minden megoldása az

$$x(t) = c_1 t + x_0(t)$$

alakba írható.

Ha $p = 0$, akkor (1.48.) minden megoldása konstans.

Összefoglalva: A 3.Tétel speciális esetként tartalmazza az ATKINSON és ZHANG [2] 1.2.Tételét.

3.) Tekintsük az

$$(1.49.) \quad \dot{x}(t) = -px(t-r)$$

egyenletet. A 4.Tételt alkalmazzuk az $a = 0$, $R = |p|$, $\varphi = 0$ esetre. Ekkor, mivel $p > 0$, ezért p -nek a $H_{(-1,1)} \cap (0, R, \varphi)$ tartományba kell esni, hogy (1.49.) karakterisztikus egyenletének minden megoldása negatív valós részű legyen. Így $0 < \bar{p} < \frac{\pi}{2r}$. Ha $p < 0$, azaz $\varphi = \pi$, akkor (1.49.) karakterisztikus egyenletének van pozitív valós részű megoldása. Ez a feltétel megtalálható például [9]-ben.

2. Nem autonóm, skaláris egyenletek stabilitása

Ebben a fejezetben skaláris egyenleteket vizsgálunk. Először egy lineáris stabilis egyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről nyerünk feltételeket közvetlen módszerrel, majd a Ljapunov módszer egy változatát alkalmazzuk.

2.1. Lineáris, stabilis típusú egyenletek

Az

$$(2.1.) \quad \dot{x}(t) = - \int_{-r(t)}^0 x(t+s) d_s h(t,s) - r(t)$$

egyenletet, illetve speciális eseteit több szerző vizsgálta. Például MÜSKISZ a (2.1.)-nek megfelelő rendszerrel foglalkozik a könyvében [28]. Tőle származik a stabilis típusú jelző is. Ahhoz, hogy stabilis típusúnak tekinthessük a (2.1.) egyenletet a következőt kell feltennünk.

Legyen $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív folytonos függvény, $\lim_{t \rightarrow \infty} (t-r(t)) = \infty$. $h(t,s)$ kétváltozós skalár értékű függvény, amely $t \geq 0$ és $s \in [-r(t), 0]$ -ra van értelmezve, s -ben monoton növekvő és balról folytonos minden t -re, valamint $h(t,0) \equiv 0$, ha $t \geq 0$, $h(t, -r(t))$ folytonos és

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_{\max(-r(t), -r(t'))}^0 |h(t;s) - h(t',s)| ds = 0.$$

Legyen $a \geq 0$, $r_0 = \inf_{t \geq a} (t - r(t))$ és φ folytonos függvény $[r_0, a]$ -n. Az A.Tétel és MÜSKISZ [28.1.Tétel 5. oldal] alapján (2.1.)-nek az (a, φ) kezdeti feltétel mellett létezik egyértelmű megoldása, amely $[r_0, \infty)$ -n folytonos és (a, ∞) -n folytonosan differenciálható.

COOKE és FERREIRA [9] a (2.1.) következő változatát vizsgálta:

$$(2.2.) \quad \dot{x}(t) = -\gamma \int_{-1}^0 x(t+s) d\mu(s),$$

ahol $\mu(-1)=0$, $\mu(0)=1$ és μ monoton növekvő. Vizsgálataik eredménye, hogy $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ esetén a (2.2.) egyenlet 0 megoldása exponenciálisan stabil. A (2.1.) egyenletnek speciális esete az

$$(2.3.) \quad \dot{x}(t) = -p(t)x(t-r(t))$$

Erre az egyenletre alkalmazható például HADDOCK [17] munkájának eredménye, amely szerint, ha $0 < p(t) \leq p$ és $0 \leq r(t) \leq r$, valamint $0 \leq p r \leq \frac{3}{2}$, $\int_{t_0}^{\infty} p(t) dt = \infty$ és, vagy $p(t) \rightarrow 0$, vagy $r(t) \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ esetén, akkor a (2.3.) 0 megoldása aszimptotikusan stabil. GYÓRI [16] és PHILOS [30] munkáiban a (2.3.) egyenlet megoldásainak oszcillációjára találunk feltételeket. Mégpedig ha $r(t) = r$ és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t p(s) ds > \frac{1}{e} ,$$

akkor (2.3.) minden megoldása oszcillál. A mi vizsgálataink LADAS, SFICAS és STAVROULAKIS [25] munkájához kapcsolódnak. Ők a (2.3.)-ről $r(t) = r > 0$ és $\bar{p}(t) > 0$ esetén bebizonyították, hogy ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \int_{t-r}^t p(s) ds < 1 \quad \text{és} \quad \int_{t_0}^{\infty} p(s) ds = \infty ,$$

akkor az egyenlet minden megoldása 0-hoz tart $t \rightarrow \infty$ esetén. Mi ezt az eredményt általánosítjuk és kiterjesztjük a (2.1.) egyenletre. Először a megoldások korlátosságáról bizonyítunk egy tételt, majd a korlátosság felhasználásával bebizonyítjuk, hogy létezik a megoldások határértéke, ha $t \rightarrow \infty$.

5.Tétel. Tegyük fel, hogy

$$(2.4.) \quad - \int_{t-r(t)}^t h(u, -r(u)) du \leq 1$$

minden $t \geq 0$ -ra, amelyre $t-r(t) \geq 0$. Ekkor (2.1.) minden megoldása korlátos.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x a (2.1.) egy megoldása.

Két eset lehetséges:

a.) x állandó előjelű megoldás, azaz van olyan t_0 , hogy $t \geq t_0$ -ra $x(t)$ előjele állandó. Feltehetjük, hogy $x(t) \geq 0$, ha $t \geq t_0$. Ekkor van olyan t_1 , hogy $t-r(t) > t_0$, ha $t > t_1$, így (2.1.) alapján

$$\dot{x}(t) = - \int_0^{-r(t)} x(t+s) d_s h(t,s) \leq 0$$

minden $t \geq t_1$ -re. Ez azt jelenti, hogy $x(t)$ csökkenő a $[t_1, \infty)$ intervallumon ezért, mivel $x(t) \geq 0$ is fennáll, azt kapjuk, hogy $x(t)$ korlátos, sőt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ is létezik.

b.) x oszcilláló megoldás. A bizonyítást indirekt végezzük, tegyük fel, hogy $x(t)$ nem korlátos, Ekkor minden elég nagy M -hez van olyan t_M , hogy $|x(t_M)| = M$, $|x(t)| < M$, ha $t < t_M$, és van olyan t_0 , $t_0 < t_M$, hogy $x(t_0) = 0$. Mivel az $f(t) := \max_{t_M \leq s \leq t} |x(s)|$ függvény növekvő és $f(t) \rightarrow \infty$, ha $t \rightarrow \infty$, ezért van olyan $\tilde{T} \geq t_M$, hogy $f'(\tilde{T}) > 0$. Ekkor $x(\tilde{T}) = f(\tilde{T})$ és $|x(t)| < f(\tilde{T})$ minden $t < \tilde{T}$ esetén, és $x(\tilde{T}) \dot{x}(\tilde{T}) > 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x(\tilde{T}) \geq M$ és $\dot{x}(\tilde{T}) > 0$. Mivel $x(t)$ oszcilláló megoldás, ezért van olyan t_1 , $t_1 < \tilde{T}$, hogy $x(t_1) = 0$ és $x(t) > 0$, ha $t \in (t_1, \tilde{T}]$. Mivel $x(t)$ differenciálhányados függvénye is folytonos $x(t)$ csak úgy lehet oszcilláló, ha van olyan ξ , $\xi > \tilde{T}$, hogy $\dot{x}(\xi) = 0$ és $\dot{x}(t) > 0$, ha $t \in (\tilde{T}, \xi)$. Integráljuk (2.1.)-t t_1 -től ξ -ig. Így

$$\begin{aligned}
 (2.5.) \quad x(\xi) &= - \int_{t_1 - r(t)}^{\xi} x(t+s) d_s h(t,s) dt \leq \\
 &\leq \int_{t_1 - r(t)}^{\xi} \left| \int x(t+s) d_s h(t,s) \right| dt \leq \\
 &\leq \int_{t_1 - r(t)}^{\xi} \left(\int |x(t+s)| d_s h(t,s) \right) dt.
 \end{aligned}$$

Mivel $|x(t+s)| < x(\xi)$, ha $t+s < \xi$, ezért

$$(2.6.) \quad x(\xi) < x(\xi) \int_{t_1 - r(t)}^{\xi} d_s h(t,s) dt.$$

Beláthatjuk, hogy $\xi - r(\xi) \leq t_1$, ugyanis ha $\xi - r(\xi) > t_1$ teljesülne, akkor az r folytonossága miatt létezne olyan t' , $t' < \xi$, hogy $t - r(t) > t_1$ lenne minden $t \in (t'; \xi)$ esetén. A ξ és a τ definíciójából következik, hogy $\dot{x}(t) > 0$, ha $t \in (t'; \xi) \cap (\tau, \xi)$, viszont ezekre a t -kre a (2.1.) egyenletből igaz, hogy

$$\dot{x}(t) = - \int_{-r(t)}^0 x(t+s) d_s h(t,s) \leq 0,$$

mivel $x(t+s) > 0$ a t_1 definíciójának megfelelően. Ez viszont ellentmond az $\dot{x}(t) > 0$ feltételnek. Tehát

$$\int_{t_1}^{\xi} -r(u) du \leq t_1.$$

Ha felhasználjuk (2.4.)-t és (2.6.)-t az $x(\xi) < x(t_1)$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami nem teljesülhet. Tehát el kell vetni a kiindulási feltételünket, így azt kapjuk, hogy $x(t)$ korlátos. Ezzel a tétel bizonyítása kész.

A következő tétel a megoldások határértékének a létezéséről szól.

6.Tétel. Tegyük fel, hogy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r(t)}^t -h(u, -r(u)) du < 1$$

Ekkor (2.1.) minden $x(t)$ megoldása esetén létezik a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ határérték.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításának (a) része alapján a nem oszcilláló megoldásoknak létezik a határértéke. Ugyancsak az előző tételből tudjuk, hogy az oszcilláló megoldások korlátosak. Így ha $x(t)$ (2.1.) oszcilláló megoldása, akkor az $\alpha := \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t)$ és $\beta := \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t)$ léteznek és $\alpha \geq 0 \geq \beta$. Mi azt bizonyítjuk, hogy $\alpha = \beta = 0$. A bizonyítást indirekt végezzük. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$ és vegyük azt az esetet, amikor $\alpha \geq |\beta|$. /Az $\alpha < |\beta|$ eset hasonlóan tárgyalható./



Legyen $0 < \mu < 1$ és $T \geq 0$ olyan, hogy $t > T$ -re az

$$(2.7.) \quad \int_{t-r(t)}^t -h(u, -r(u)) du \leq \mu$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

Mivel $\alpha \geq |\beta|$, ezért minden $\xi > 0$ -hoz van olyan T_ξ , hogy $T_\xi > T$, és $|x(t)| < \alpha + \xi$ minden $t > T_\xi$ -ra. Tudjuk,

hogy $x(t)$ oszcilláló megoldás, ezért van olyan t_0 és t_1 , hogy $T_\xi < t_1 < t_0$ és $x(t_1) = x(t_0) = 0$, valamint $x(t) > 0$, ha $t \in (t_1, t_0)$. A $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \alpha$ miatt a t_1 és a t_0

ξ -től függően választható úgy, hogy a (t_1, t_0) intervallumon van olyan τ , hogy $x(\tau) \geq \alpha - \xi$ és $\dot{x}(\tau) > 0$.

Az $x(t)$ oszcillációja és a folytonosan differenciálhatósága miatt van olyan ξ , $\xi > \tau$, hogy $\dot{x}(\xi) = 0$ és $\dot{x}(t) > 0$, ha $t \in (\tau, \xi)$.

Mivel $t-r(t) \rightarrow \infty$, ha $t \rightarrow \infty$, ezért minden elég kicsi ξ -hoz a t_1, t_0, τ, ξ választható úgy, hogy $t_1 < \tau < \xi < t_0$ és $t-r(t) > T_\xi$, ha $t > t_1$, valamint fennáll, hogy $x(\tau) \geq \alpha - \xi$, $\dot{x}(t) > 0$, ha $t \in [\tau, \xi)$,

$\dot{x}(\xi) = 0$ és $x(t_0) = x(t_1) = 0$, illetve $x(t) > 0$, ha $t \in (t_1, t_0)$.

Integráljuk (2.1.)-t a $[t_1, \xi]$ intervallumon és használjuk fel, hogy $|x(t+s)| < \alpha + \xi$ ezen az intervallumon. A (2.5.)

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(2.8.) \quad x(\xi) < (\alpha + \xi) \int_{t_1}^{\xi} \int_{-r(t)}^0 d_s h(t, s) dt.$$

Ahogy az előző tétel bizonyításában megmutattuk, hogy $\int_{\xi} -r(\xi) \leq t_1$, ugyanúgy itt is bebizonyítható. Ezt felhasználva (2.8.)-ből következik, hogy

$$\alpha - \xi < x(\xi) < (\alpha + \xi) \int_{\xi-r(\xi)}^{\xi} \int_{-r(t)}^0 d_s h(t,s) dt.$$

Felhasználva (2.7.)-t az $\alpha - \xi < \mu (\alpha + \xi)$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ha $\xi \rightarrow 0$, akkor ebből az $\alpha \leq \mu \alpha < \alpha$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami nem igaz. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, azaz az $\alpha > 0$ feltevésünk hamis, így $\alpha = 0$ és a tétel bizonyítása befejeződött.

Ezt az eredményt felhasználhatjuk a (2.1.) 0 megoldása stabilitásának a vizsgálatához.

7.Tétel. Ha az 5.Tétel feltételei teljesülnek, akkor a (2.1.) 0 megoldása stabil. Ha a 6.Tétel feltételei mellett még az is igaz, hogy

$$(2.9.) \quad \int_{t_0}^{\infty} h(t, -r(t)) dt = -\infty$$

akkor a (2.1.) egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. Az 5.Tétel biztosítja, hogy (2.1.) minden megoldása korlátos így a stabilitás következik MÜSKISZ [28 5.Tétele 72. oldal] munkája alapján. Most tegyük fel, hogy a 6.Tétel feltételei teljesülnek. Ekkor az előzőeknek megfelelően a 0 megoldás stabil és minden oszcilláló megoldás-

nak 0 a határértéke, ha $t \rightarrow \infty$. Még azt kell belátni, hogy az állandó előjellű megoldások határértéke is 0 $t \rightarrow \infty$ esetén. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Legyen például x olyan megoldás, hogy $x(t) \geq c$, ha $t \geq T$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c > 0$. Ekkor létezik egy T_1 , $T_1 > T$, úgy hogy $t - r(t) > T$ minden $t \geq T_1$ -re. (2.1.)-ből integrálással következik, hogy

$$x(t) - x(T_1) = - \int_{T_1}^t \int_{-r(u)}^0 x(u+s) d_s h(u,s) du$$

minden $t \geq T_1$ -re. Mivel

$$x(t) - x(T_1) + c \int_{T_1}^t \int_{-r(t)}^0 d_s h(u,s) du \leq 0,$$

azaz

$$x(t) - x(T_1) - c \int_{T_1}^t h(u, -r(u)) du \leq 0,$$

ezért, ha $t \rightarrow \infty$. Az utóbbi egyenlőtlenségből a

$$c - x(T_1) - c \int_{T_1}^{\infty} h(u, -r(u)) du \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami ellentmond (2.9.)-nek.

Ha azt tesszük fel, hogy $c < 0$, akkor szintén ellentmondáshoz jutunk. Így $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a (2.1.)-nek minden $x(t)$ meg-

oldására, amiből az aszimptotikus stabilitás következik.

Példák

1.) Tekintsük a

$$(2.10.) \quad \dot{x}(t) = -\left(1 + \frac{1}{t}\right)x\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad t \geq 1$$

egyenletet. Ez az egyenlet speciális esete a (2.1.)-nek, ugyanis az $r(t) = \frac{1}{2}$ és

$$h(t, s) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{1}{t}\right), & \text{ha } s = -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha } -\frac{1}{2} < s \leq 0 \end{cases}$$

jelölések bevezetésével éppen (2.1.)-nek megfelelő egyenlethez jutunk.

Mivel

$$\int_1^{\infty} h(t, -r(t)) dt = \int_1^{\infty} -\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = -\left[t + \ln t\right]_1^{\infty} = -\infty,$$

valamint

$$\int_{t - \frac{1}{2}}^t -\left(-\left(1 + \frac{1}{u}\right)\right) du = \left[u + \ln u\right]_{t - \frac{1}{2}}^t = \frac{1}{2} + \ln \frac{t}{t - \frac{1}{2}}$$

és $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{t}{t - \frac{1}{2}} = 0$, ezért a 7. Tétel feltételei teljesül-

nek a (2.10.) egyenletre. Tehát a (2.10.) egyenlet 0 meg-

oldása aszimptotikusan stabil. Másrészt tudjuk, hogy (2.10.) minden megoldása oszcillál [30], így azt kaptuk, hogy (2.10.) minden megoldása 0-hoz tart $t \rightarrow \infty$ esetén.

2.) Tekintsük az

$$(2.11.) \quad \dot{x}(t) = -p(t)x(t-r)$$

egyenletet, ahol $p(t) > 0$, $r > 0$ konstans. Ebben az esetben a

$$h(t,s) = \begin{cases} -p(t), & \text{ha } s = -r \\ 0, & \text{ha } -r < s \leq 0 \end{cases}$$

jelöléssel éppen a (2.1.) típusú egyenlethez jutunk. A (2.7.) feltétel a következő alakú lesz.

$$\int_{t-r(t)}^t -h(u,-r(u))du = \int_{t-r}^t -(-p(u))du \leq \mu.$$

A (2.9.) feltételből a

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t,-r(t))dt = \int_{t_0}^{\infty} -p(t)dt = -\infty$$

feltételt kapjuk, azaz, ha $\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt = \infty$ és

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t p(s) ds < 1,$$
 akkor (2.11.) minden megoldása

0-hoz tart. Ezek a feltételek és az állítás megegyezik LADAS, SFICAS és STAVROULAKIS közös munkájának [25] 3. Tételével. Így a mi 7.Tételünk az Ő 3.Tételüknek általánosítása.

A (2.1.) egyenletnek speciális esete az előző fejezetben vizsgált (1.49.)-cel jelölt

$$\dot{x}(t) = -px(t-r)$$

egyenlet is.

Ha erre az egyenletre alkalmazzuk a mi előző vizsgálataink eredményét, akkor azt kapjuk, hogy, ha $0 < pr < 1$, akkor ezen egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil. Tehát a feltételeink szigorúbbak, mint az előző fejezetben kapott feltételek.

3.) Az

$$(2.12.) \quad \dot{x}(t) = -\alpha \int_{-1}^0 x(t+s) d\eta(s)$$

populáció növekedési egyenletet WALTHER [35] és HADELER [18] is vizsgálta. A 7.Tétel erre az egyenletre a következő eredményt adja:

A (2.12.) egyenlet esetében $r(t) = 1$ és

$$h(t,s) = \alpha \cdot \eta(s).$$

A (2.7.) feltétel a következő alakú lesz:

$$\int_{t-r(t)}^t -h(u, -r(u)) du = \int_{t-1}^t -\alpha \eta(-1) du < 1.$$

A (2.9.) feltétel alakja,

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t, -r(t)) dt = \int_{t_0}^{\infty} \alpha \eta(-1) dt = -\infty$$

Ez a feltétel mindig teljesül, ha $\alpha > 0$ és $\eta(-1) < 0$. Tehát ha (2.12.)-ben η monoton növekvő balról folytonos függvény és $\eta(0) = 0$, valamint $-\alpha \eta(-1) < 1$, akkor a (2.12.) minden megoldása 0-hoz tart, ha $t \rightarrow \infty$.

2.2. Stabilitás vizsgálat a határegyenlet alkalmazásával

A funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedését vizsgálhatjuk a korlátos megoldások határhalmazának invariancia tulajdonságával. A HALE [19] által autonom funkcionál-differenciálegyenletekre leírt módszer lényege a következő:

Tekintsük az

$$(2.13.) \quad \dot{x}(t) = F(x_t)$$

autonom funkcionál-differenciálegyenletet, ahol az $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos funkcionál Lipschitz feltételnek tesz eleget, továbbá C korlátos és zárt halmazait korlátos, zárt halmazba képezi le. Ekkor (2.13.)-nak minden $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ "pontot át" létezik egyértelmű megoldása. Legyen x (2.13.) egy korlátos megoldása úgy, hogy $x_{t_0} = \varphi$. Ekkor x a $[t_0, \infty)$ intervallumon van értelmezve (lásd A.Tétel).

A $H \subset \mathbb{C}$ halmazt az x megoldás pozitív határ halmazának nevezzük, ha minden $\psi \in H$ -hoz van olyan $\{t_n\}$ sorozat, $t_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$, hogy $x_{t_n} \rightarrow \psi$, ha $n \rightarrow \infty$. A H halmazról ismert [19], hogy összefüggő, kompakt és invariáns. Az invariáns tulajdonság azt jelenti, hogy ha $\psi \in H$ és x a (2.13.) (t_0, ψ) -n átmenő megoldása, akkor x $(-\infty, \infty)$ -n van értelmezve, itt kielégíti (2.13.)-t, $x_{t_0} = \psi$ és $x_t \in H$ minden $t \in (-\infty, \infty)$ -re. Ha a (2.13.) egyenlet esetén M a legbővebb invariáns halmaz, akkor a [19] -ben található 13.1.Tétel alapján minden x korlátos megoldásra igaz, hogy $x(t) \rightarrow M$, ha $t \rightarrow \infty$. Ezen tétel segítségével a megoldások stabilitására, aszimptotikus stabilitására nyerhetünk eredményeket.

A módszer általánosítható nem autonom egyenletekre is. Például, hogy ha $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, \varphi) = G(\varphi)$, akkor az

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

egyenletre kiterjeszhető az előzőekben leírt, úgynevezett

invariancia elv.

A mi vizsgálatunk az

$$(2.14.) \quad \dot{x}(t) = -p(t)x(t-r(t))$$

egyenlet korlátos megoldásairól szól. Feltételezzük, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r > 0$ és $pr < \frac{1}{2}$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor a (2.14.) korlátos megoldásai 0-hoz tartanak $t \rightarrow \infty$ esetén. A bizonyítás során áttérünk a határ-egyenletre, amely megegyezik az (1.49.) egyenlettel. A következő eredményt bizonyítjuk.

8.Tétel. Tegyük fel, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p > 0$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r > 0$ és $0 < pr < \frac{1}{2}$. Ekkor a (2.14.) minden korlátos megoldásának 0 a határértéke, ha $t \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Legyen x (2.14.) korlátos megoldása, azaz $|x(t)| \leq K$, valamely $K > 0$ -ra, ha $t \in [0, \infty)$. A bizonyítást indirekt végezzük. Tegyük fel, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$. Ekkor van olyan $\{t_n\}$ sorozat, $t_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = a \neq 0$.

Integráljuk (2.14.)-t t_n -től t_n+s -ig. Ekkor

$$(2.15.) \quad x(t_n+s) = x(t_n) - \int_{t_n}^{t_n+s} p(v) \cdot x(v-r(v)) dv = x(t_n) - \int_0^s p(t_n+u) x(t_n+u-r(t_n+u)) du$$

Ha n elég nagy, akkor $x(t_n+s)$ értelmezve van az $s \in [-T, T]$ intervallumon, valamely rögzített T -re. Tekintsük az $x_{t_n} : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_{t_n}(s) = x(t_n+s)$ függvénysorozatot.

Ezen sorozat tagjai korlátosak, ugyanis $|x_{t_n}(s)| = |x(t_n+s)| \leq K$. Azonkívül (2.15.) alapján

$$|x_{t_n}(s_2) - x_{t_n}(s_1)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} p(t_n+u) x(t_n+u-r(t_n+u)) du \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} |p(t_n+u)| \cdot |x(t_n+u-r(t_n+u))| du.$$

Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p$, ezért ha n elég nagy, akkor $|p(t_n+u)| < 2p$, valamint az $|x(t_n+u-r(t_n+u))| \leq K$ is teljesül, ha $u \in [s_1, s_2]$. Így

$$|x_{t_n}(s_2) - x_{t_n}(s_1)| \leq 2pK |s_2 - s_1|$$

Tehát az $\{x_{t_n}\}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben folytonos. Az Arzela-Ascoli tétel következtében van olyan $x_{t_{n_k}}$ részsorozat, amely egyenletesen konvergál. Legyen a határértéke az $y(s)$, $s \in [-T, T]$ függvény. Mivel ez a határérték minden rögzített T -re létezik, ezért $y(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény, azonkívül $|y(s)| \leq K$, ha $s \in (-\infty, \infty)$ és $y(0) = a$. Ha (2.15.)-ben elvégezzük a határátmenetet, akkor y -ra az

$$y(s) = a - \int_0^s p y(u-r) du$$

egyenletet kapjuk, amely ekvivalens az

$$(2.16.) \quad \dot{y}(s) = py(s-r), \quad y(0) = a$$

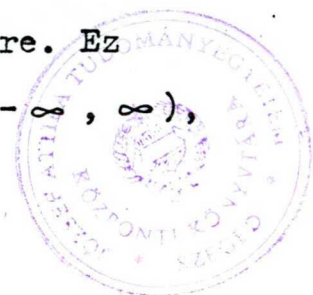
differenciálegyenlettel. Be fogjuk bizonyítani, hogy (2.16.)-nek a $(-\infty, \infty)$ intervallumon korlátos megoldása csak az $y \equiv 0$ függvény lehet. Legyen $\varphi : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a (2.16.) megoldása úgy, hogy $|\varphi(s)| \leq K$, ha $s \in \mathbb{R}$ és $\varphi(0) = a \neq 0$. Mivel (2.16.) karakterisztikus egyenletének a $0 < pr < \frac{1}{2}$ feltétel teljesülése esetén (lásd az előző fejezet 3. példáját) csak negatív valós részű megoldása van, ezért minden (t_0, Ψ) , $\Psi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, kezdeti feltételnek eleget tevő megoldásra igaz a következő becslés [12], [25].

$$|y(t, t_0, \psi)| \leq M \|\Psi\| \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}$$

ahol γ, M pozitív konstansok. Tekintsük az $y(t, t_0, \varphi_{t_0})$, $\varphi_{t_0}(s) = \varphi(t_0 + s)$, $s \in [-r, 0]$, megoldást. Erre a megoldásra alkalmazva a fenti becslést az

$$|y(t, t_0, \varphi_{t_0})| \leq M \|\varphi_{t_0}\| \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \leq M K e^{-\gamma(t-t_0)}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel (2.16.)-nek egyértelmű megoldása létezik minden (t_0, ψ) -re, ezért $y(t, t_0, \varphi_{t_0})$ a $\varphi(t)$ megszorítása a $[t_0 - r, \infty)$ intervallumra. Tudjuk, hogy ha $t_0 \rightarrow -\infty$, akkor $e^{\gamma t_0} \rightarrow 0$, ezért $M K e^{-\gamma(t-t_0)} \rightarrow 0$, így $y(t, t_0, \varphi_{t_0}) \rightarrow 0$, ha $t_0 \rightarrow -\infty$, minden t -re. Ez csak úgy lehet, hogy $y(t, t_0, \varphi_{t_0}) \equiv 0$, ha $t \in (-\infty, \infty)$,



azaz $\varphi(t) \equiv 0 \quad t \in (-\infty, \infty)$ -re, tehát $\varphi(0)=0$. Ez ellentmondás, így az $a = 0$ feltételnek kell teljesülni. Ez azt jelenti, hogy minden $t_n \rightarrow \infty$ sorozatra $x(t_n) \rightarrow 0$ a (2.14.) minden x korlátos megoldására. Ezzel a bizonyítás kész.

A 6.Tételből következik, hogy ha $pr < 1$, akkor (2.13.) minden megoldása korlátos. Így a 6. és 8. Tétel felhasználásával az alábbi állítást kapjuk.

Következmény. Ha $p > 0$, $r > 0$, valamint $0 < pr < 1$, akkor a (2.14.) minden megoldása 0-hoz tart, ha $t \rightarrow \infty$.

2.3. A Ljapunov módszer alkalmazása

Ebben a részben az

$$(2.17.) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

skaláris egyenlet 0 megoldásának stabilitását vizsgáljuk. A bevezetésben már szóltunk arról, hogy a stabilitás vizsgálatára a közönséges differenciálegyenletek elméletében alkalmazott Ljapunov módszer közvetlenül nem alkalmazható. Az átalakítás szükségességét az alábbi példa is igazolja. Az

$$(2.18.) \quad \dot{x}(t) = -ax(t) - e^{-a \frac{T}{2}} x(t - \frac{T}{2})$$

egyenlet az első fejezet 1.)példájának speciális esete. Ha $a > \frac{2}{T}$, akkor az $(a, e^{-\frac{aT}{2}})$ pont éppen T_0 -ban helyezkedik el, itt T_0 a 20. ábrának megfelelő tartomány. Ez azt jelenti,

hogy (2.18.) 0 megoldása aszimptotikusan stabil. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$(2.19.) \quad x(t) = Ke^{-at} \cos t$$

függvény megoldása (2.18.)-nak. Tegyük fel, hogy (2.18.)-hoz megadható olyan $V(t,x)$ Ljapunov függvény, amely pozitív definit és a $\dot{V}(t,x(t)) \leq 0$ teljesül a megoldások mentén. Ez a Ljapunov függvény a (2.19.) megoldás mentén $t = \frac{\pi}{2}$ -ben 0 kell, hogy legyen és ezután, mivel monoton csökken $t > \frac{\pi}{2}$ -re is $V(t,x(t)) = 0$ kell, hogy legyen, azaz $x(t) = 0$, ha $t \geq \frac{\pi}{2}$. Ez viszont a (2.19.) megoldásra nem teljesül. Tehát a (2.18.) egyenlet esetében nem lehet megadni a felsorolt tulajdonságú Ljapunov függvényt [27]. RAZUMIHIN a $\dot{V}(t,x(t)) \leq 0$ feltételt csak a

$$V(t+s, x(t+s)) \leq V(t, x(t))$$

feltétel teljesülése esetén követelte meg. MIKOLAJSKA [27] rámutatott, hogy ez utóbbi feltételt a

$$\dot{x}(t) = bx(t-r)$$

egyenlet esetében nem lehet kielégíteni, azonkívül aszimptotikus stabilitási eredményt sem kaphatunk RAZUMIHIN feltételeiből. Mi MIKOLAJSKA módszerének felhasználásával kapunk feltételeket a (2.17.) egyenlet 0

megoldásának stabilitásáról, majd egy példán alkalmazzuk is az eredményeket.

Tekintsük tehát a (2.17.) egyenletet. Legyen $f(t,0) \equiv 0$, ha $t \geq 0$. Az A.Tétel alapján (2.17.)-nek létezik $[-r, \infty)$ -n értelmezett folytonos és $(0, \infty)$ -n folytonosan differenciálható megoldása $(0 < r < \infty)$. Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbi feltételek.

(i) Van olyan $\omega(t,x)$ és $U(x)$ folytonos függvény, $\omega : [-r, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, hogy

$$|\omega(t,x)| \geq U(x) > 0, \text{ ha } x \neq 0,$$

és

$$x \cdot \omega(t,x) > 0, \text{ ha } x \neq 0.$$

(ii) Van olyan α, β valós szám, $0 < \alpha < \beta < 1$, hogy ha minden $s \in [-r, 0]$ esetén

$$\alpha \varphi(0) \omega(t, \varphi(0)) \leq \beta \varphi(0) \omega(t+s, \varphi(s)) \leq \beta \varphi(0) \omega(t, \varphi(0)),$$

akkor

$$\varphi(0) \cdot (\omega'_t(t, \varphi(0)) + \omega'_x(t, \varphi(0)) f(t, \varphi)) \leq 0.$$

(iii) Legyen

$$M(t,h) = \max_{\varphi \in Z_+(t,h)} (\omega'_t(t, \varphi(0)) + \omega'_x(t, \varphi(0)) \cdot f(t, \varphi)),$$

$$m(t,h) = \min_{\varphi \in Z_-(t,h)} (\omega'_t(t, \varphi(0)) + \omega'_x(t, \varphi(0)) \cdot f(t, \varphi)),$$

ahol

$$Z_+(t, h) = \left\{ \alpha h \leq \omega(t, \varphi(0)) \leq \beta h, \sup_{s \in [-r, 0]} |\omega(t+s, \varphi(s))| \leq h \right\}$$

$$Z_-(t, h) = \left\{ \alpha h \leq \omega(t, \varphi(0)) \leq -\alpha h, \sup_{s \in [-r, 0]} |\omega(t+s, \varphi(s))| \leq h \right\}$$

Tegyük fel, hogy

$$\sup_{s \in [-r, 0]} \int_{t+s}^t M(u, h) du < (\beta - \alpha)h,$$

$$\inf_{s \in [-r, 0]} \int_{t+s}^t m(u, h) du > -(\beta - \alpha)h.$$

10. Segéd-tétel. Tegyük fel, hogy az (i)-(iii) feltételek teljesülnek, azonkívül ha $t \in [-r, 0]$, akkor $|\omega(t, x(t))| < \sigma$ és $|\omega(0, x(0))| \leq \alpha \sigma$. Ekkor $|\omega(t, x(t))| < \beta \sigma$, ha $t \geq 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást indirekt végezzük. Tegyük fel, hogy van olyan t_0 , amire az $|\omega(t_0, x(t_0))| \geq \beta \sigma$ egyenlőtlenség fennáll. Feltehetjük, hogy $\omega(t_0, x(t_0)) \geq \beta \sigma$. (Az $\omega(t_0, x(t_0)) \leq -\beta \sigma$ esetben a bizonyítás hasonló.) Legyen $t_2 = \inf \{t \mid \omega(t, x(t)) \geq \beta \sigma\}$, $t_1 = \sup \{t \mid t < t_2, \omega(t, x(t)) \leq \alpha \sigma\}$. A folytonosság miatt $\omega(t_2, x(t_2)) = \beta \sigma$ és $\omega(t_1, x(t_1)) = \alpha \sigma$, valamint $\alpha \sigma < \omega(t, x(t)) < \beta \sigma$, ha $t \in (t_1, t_2)$. Ezután bebizonyítjuk, hogy $t_2 - t_1 \geq r$. Ugyanis, ha $t_2 - t_1 < r$ lenne, akkor az (iii) feltétel alapján

$$\beta \sigma - \alpha \sigma = \omega(t_2, x(t_2)) - \omega(t_1, x(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\omega(t, x(t))}{dt} dt \leq$$

$$\leq \sup_{s \in [-r, 0]} \int_{t_2+s}^{t_2} M(u, \sigma) du,$$

azaz a

$$\beta \delta - \alpha \delta < (\beta - \alpha) \delta$$

egyenlőtlenség is teljesülne. Ez viszont ellentmondás.

Azt kaptuk, hogy $t_2 - t_1 \geq r$, Ez azt jelenti, hogy minden

$s \in [-r, 0]$ esetén érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} \alpha x_{t_2}(0) \omega(t_2, x_{t_2}(0)) &= \alpha x_{t_2}(0) \cdot \beta \delta \leq \beta x_{t_2}(0) \cdot \omega(t_2 + s, x(t_2 + s)) \leq \\ &\leq \beta x_{t_2}(0) \cdot \beta \delta. \end{aligned}$$

Tehát teljesül az

$$\alpha x_{t_2}(0) \omega(t_2, x_{t_2}(0)) \leq \beta x_{t_2}(0) \cdot \omega(t_2 + s, x_{t_2}(s)) \leq \beta x_{t_2}(0) \omega(t_2, x_{t_2}(0))$$

egyenlőtlenség is. Az (ii) feltétel miatt, ekkor

$$x_{t_2}(0) \left(\omega'_t(t_2, x_{t_2}(0)) + \omega'_x(t_2, x_{t_2}(0)) f(t_2, x_{t_2}(0)) \right) \leq 0.$$

Az (i) miatt azonban az $\omega(t_2, x(t_2)) \geq 0$ feltételből $x_{t_2}(0) > 0$ következik, ezért az (ii) feltételből $\frac{d \omega(t_2, x(t_2))}{dt} \leq 0$.

Ez azt jelenti, hogy $\omega(t, x(t)) > \omega(t_2, x(t_2))$ minden olyan t -re, amelyre $t_1 < t < t_2$. Ez ellentmond t_2 definíciójának. Nem igaz az, hogy van olyan t_0 , hogy $\omega(t_0, x(t_0)) \geq \beta \delta$. Tehát minden $t \geq 0$ -ra $|\omega(t, x(t))| < \beta \delta$. Ezzel a bizonyítás kész. A 10. Segédteletből következik a stabilitás. Ha még egy feltételt hozzáveszünk az (i)-(iii) feltételekhez, akkor a megoldások határértékének létezését tudjuk bizonyítani.

9. Tétel. Tegyük fel, hogy ha

$$(iv) \quad \alpha h \leq |\omega(t+s, \varphi(s))| \leq h$$

akkor

$$(\omega'_t(t, \varphi(0)) + \omega'_x(t, \varphi(0)) f(t, \varphi)) \operatorname{sign} \omega(t+s, \varphi(s)) \leq 0.$$

Ha a 10. Segédteétel feltételei és az (iv) feltétel teljesülnek, akkor a $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, x(t))$ határérték létezik.

Bizonyítás. Legyen $\xi > 0$, $|\omega(t, x(t))| < \xi$, ha $-r \leq t \leq 0$, és $|\omega(0, x(0))| \leq \alpha \xi$. A 10. Segédteétel alapján $|\omega(t, x(t))| < \beta \xi$, ha $t \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\omega(t, x(t)) > 0$ valamilyen $(0, T)$ intervallumon. Ekkor két eset lehetséges:

a.) $\omega(t, x(t)) > \alpha \beta \xi$ minden $t \geq 0$ -ra. Ebben az esetben $\omega(t, x(t))$ korlátos és (iv) miatt az előjellel együtt a deriváltja előjele is állandó, azaz $\omega(t, x(t))$ monoton, tehát $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, x(t))$ létezik.

b.) van olyan t_1 , hogy $0 < \omega(t_1, x(t_1)) < \alpha \beta \xi$. Ekkor alkalmazhatjuk a 10. Segédteételt $\sigma = \beta \cdot \xi$ -ra, így azt kapjuk, hogy $|\omega(t, x(t))| < \beta^2 \xi$, ha $t \geq t_1$. Ha feltételezzük, hogy $\omega(t, x(t)) > 0$ valamely (t_1, T_1) intervallumon, akkor az előzőeknek megfelelően két eset lehetséges vagy az (a) esetnek megfelelően $\alpha \beta^2 \xi < \omega(t, x(t)) < \beta^2 \xi$ teljesül minden $t > t_1$ -re és így a $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, x(t))$ létezik, vagy van olyan $t_2 > t_1$, hogy $0 < \omega(t_2, x(t_2)) < \alpha \beta^2 \xi$, amiből a (b) pontnak megfelelően $|\omega(t, x(t))| < \beta^2 \xi$ következik $t > t_2$ -re.

Azt kaptuk tehát, hogy vagy valamely $n \in \mathbb{N}$ -re van olyan t_n , hogy $\alpha \beta^{n+1} \xi < |\omega(t, x(t))| < \beta^{n+1} \xi$, ha $t > t_n$, amiből a (iv) feltétel figyelembe vételével a $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, x(t))$ létezése következik, vagy minden $k \in \mathbb{N}$ -hez van olyan t_k , hogy ha $t > t_k$, akkor $|\omega(t, x(t))| < \beta^{k+1} \xi$. Ebből, mivel $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{k+1} \xi = 0$ a $0 < \beta < 1$ feltétel miatt, következik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, x(t)) = 0$. Ezzel a 9.Tétel bizonyítását befejeztük.

Következmény. Ha a 9.Tétel feltételei teljesülnek, akkor a (2.17.) egyenlet megoldásainak létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén.

Példa

1.) Tekintsük az

$$(2.20.) \quad \dot{x}(t) = -p(t)x(t-r(t))$$

egyenletet, ahol $p(t) \geq 0$, $0 \leq r(t) \leq r$, ha $t \geq 0$. Tegyük fel, hogy

$$(2.21.) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t p(s) ds < 1.$$

A 6.Tétel szerint ekkor a (2.20.) egyenlet minden megoldásának létezik a határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén. Ezt az eredményt a 9.Tétel segítségével is megkapjuk. Definiáljuk az $\omega(t, x)$ függvényt és nézzük meg hogyan teljesülnek az (i)-(iv) feltételek.

Legyen $\omega(t, x) = x$. Ekkor az (i)-(iv) feltételek a következők lesznek.

$$(i) \quad x \cdot \omega(t, x) = x^2 > 0, \text{ ha } x \neq 0.$$

(ii) A (2.20.) egyenletet felhasználva

$$\dot{\omega} = \dot{x} = -p(t)x(t-r(t)) = -p(t)x_t(-r(t)).$$

Legyen $0 < \alpha < \beta < 1$. Ha

$$\alpha x_t^2(0) \leq \beta x_t(0)x_t(s) \leq \beta x_t^2(0),$$

$s \in [-r, 0]$ -ra, akkor

$$x_t(0) \cdot \dot{\omega} = x_t(0)(-p(t)x_t(-r(t))) = -p(t)x_t(0)x_t(s) \leq 0.$$

(iii) A (2.21.) feltétel miatt van olyan T és a , $0 < a < \frac{1}{2}$, hogy ha $t > T$, akkor

$$\int_{t-r}^t p(s) ds \leq 1-a.$$

Legyen $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = 1 - \frac{a}{2}$. Vizsgáljuk meg az $M(s, h)$ és $m(s, h)$ integráljait.

$$M(s, h) = \max_{s \in [-r, 0]} (-p(t) x_t(s)), \text{ ha } |x_t(s)| \leq h, \alpha h \leq x_t(0) \leq \beta h,$$

$$m(s, h) = \min_{s \in [-r, 0]} (-p(t) x_t(s)), \text{ ha } |x_t(s)| \leq h, -\beta h \leq x_t(0) \leq -\alpha h.$$

Így, ha $t > T$, akkor

$$\int_{t-r}^t M(s, h) ds \leq h \int_{t-r}^t p(s) ds < (1-a)h = (\beta - \alpha)h,$$

$$\int_{t-r}^t m(s, h) ds \geq -h \int_{t-r}^t p(s) ds > -(1-a)h = -(\beta - \alpha)h.$$

(iv) Tegyük fel, hogy $\alpha h \leq |x_t(s)| \leq \beta h$, ha $s \in [-r, 0]$. Ekkor

$$\dot{\omega} \operatorname{sign} \omega = -p(t)x_t(s)\operatorname{sign} x_t(s) = -p(t)|x_t(s)| \leq 0.$$

Tehát az (i)-(iv) feltételek teljesülnek. Azt kaptuk, hogy (2.20.) minden megoldásának létezik a határértéke, ha $t \rightarrow \infty$. Ez az eredmény megegyezik a 6.Tételből kapott eredménnyel, azonban az $r(t)$ korlátossága miatt a feltételeink szigorúbbak. A 10.Segédtétel és a 9.Tétel nem korlátos retardálás esetére is kiterjeszhető.

Megjegyezzük, hogy az általunk ismerttetett módszerrel a stabilitáson kívül a megoldások határértékének létezésére is kaptunk feltételeket, míg az eddigi vizsgálatok a stabilitásra [27], illetve az aszimptotikus stabilitásra [34] vonatkoztak.

I r o d a l o m

- [1] F.V. Atkinson, J.R. Haddock, Critéria of asymptotic constancy of solutions of functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 91(1983), 410-423.
- [2] F.V. Atkinson, S.N. Zhang, Asymptotic behaviour and structure of solutions for equation $\dot{x}(t) = p(t)(x(t) - x(t-1))$. (Megjelenés alatt.)
- [3] M. Bardi, A nonautonomous nonlinear functional differential equation arising in the theory of population dynamics, J. Math. Anal. Appl., 109(1985), 492-508.
- [4] Н. Беллман, К. Кук, Дифференциально-разностные уравнения, Наука (Москва, 1967).
- [5] T.A. Burton, Stability and Periodicity in ordinary and functional differential equations. (Megjelenés alatt.)
- [6] T.A. Burton, Uniform asymptotic stability in functional differential equations, Proc. Am. Math. Soc., 68 (1978), 195-199.
- [7] S.N. Busenberg, K.L. Cooke, Stability conditions for linear nonautonomous delay differential equations, Quart. Appl. Math., 42(1984), 295-306.
- [8] K.L. Cooke, J.A. Yorke, Some equations modelling growth processes and gonorrhœa epidemics, Math. Biosci., 16(1973), 75-101.

- [9] K.L. Cooke, J.M. Ferreira, Stability conditions for linear retarded functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 96(1983), 53-58.
- [10] T.L. Cromer, Asymptotically periodic solutions to Volterra integral equations in epidemic models, J. Math. Anal. Appl., 110(1985), 483-494.
- [11] S. Csató, On the asymptotic behaviour of the solutions of a functional differential equation with unbounded delay, Coll. Math. Soc. János Bolyai Qualitative Theory of Differential equations Szeged, (Hungary), 1984.
- [12] Л.Э. Эльсгольц, С.В. Норкин, Введение в теорию уравнений с отклоняющимся аргументом, Наука (Москва, 1971).
- [13] П.С. Громова, Об обращении теорем Б.С. Разумихина, Дифференциальные уравнения, 19(1983), 357-359.
- [14] I. Győri, On asymptotically ordinary functional differential equations, Coll. Math. Soc. János Bolyai 15. Differential Equations, Keszthely (Hungary), 1975.
- [15] I. Győri, On existence of the limits of solutions of functional differential equations, Coll. Math. Soc. János Bolyai 30. Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged (Hungary) 1979.
- [16] I. Győri, On the oscillatory behaviour of solutions of certain nonlinear and linear delay differential equations, Nonlinear Anal., 8(1984), 429-439.

- [17] J.R. Haddock, On the asymptotic behavior of solutions of $x'(t) = -a(t)f(x(t-r(t)))$, SIAM. J. Math. Anal., 5(1974), 569-573.
- [18] K.P. Hadeler, On the stability of the stationary state of a population growth equation with time lag, J. Math. Biol., 3(1976), 197-201.
- [19] J.K. Hale, Functional differential equations Springer Verlag, (New York-Heidelberg-Berlin, 1971)
- [20] J.K. Hale, E.F. Infante, F.S.P. Tsen, Stability in linear delay equations, J. Math. Anal. Appl., 105(1985), (533-555).
- [21] J.L. Kaplan, M. Sorg, J.A. Yorke, Solutions of $x'(t) = f(x(t), x(t-L))$ have limits when f is an order relation, Nonlinear Anal., 3(1979), 53-58.
- [22] Н.Н. Красовский, О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени, Прикладная Математика и механика, 20(1956), 315-327.
- [23] Х.И. Крупнова, К вопросу устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, Дифференциальные уравнения, 8(1972), 1889-1891.
- [24] G. Ladas, Y.G. Sficas, I.P. Stavroulakis, Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations, Proc. Int. Conf. Diff. Equ. University of Alabama in Birmingham, March (1983), 21-26.

- [25] G. Ladas, Y.G. Sficas, I.P. Stavroulakis, Asymptotic behaviour of solutions of retarded differential equations, Proc. Am. Math. Soc., 88(1983), 247-253.
- [26] Z. Mikolajska, Une remarque sur des notes de Razumichin et Kraszovszkij sur la stabilité asymptotique, Annales Polonici Mathematici, 22(1969), 69-72.
- [27] Z. Mikolajska, Une modification de la condition de Liapounov pour les équations à paramètre retardé, Annales Polonici Mathematici, 21(1969), 103-101.
- [28] А.Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Наука (Москва, 1972).
- [29] N. Parhi, N. Nitra, On oscillatory and nonoscillatory behaviour of solutions of Volterra integral equations, J. Math. Anal. Appl., 94(1983), 137-149.
- [30] Ch.G. Philos, Oscillations caused by delays, Analele stint.ale Univ. "Al I. Cuza" Iasi, 24(1978), 71-76.
- [31] M. Sorg, Generalized Caldirola for the classically radiating electron, Zeitschrift für Physik, 1.283(1977), 207-215.
- [32] H.W. Stech, The effect of time lags on the stability of the equilibrium state of a population growth equation, J. Math. Biol., 5(1978), 115-120.
- [33] Szókefalvi-Nagy Béla, Komplex függvénytan, Tankönyvkiadó (Budapest, 1974).

- [34] J. Terjéki, On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations, *Annales Polonici Mathematici*, 36(1979), 299-314.
- [35] H.O. Walther, On a transcendental equation in the stability analysis of a population growth model, *J. Math. Biol.*, 3(1976), 187-195.
- [36] S.N. Zhang, Asymptotic behaviour of solutions of periodic delay differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 98A(1984), 167-181.

E helyen is köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek, Dr. Terjéki József egyetemi adjunktusnak a disszertációm elkészítéséhez nyújtott segítségéért.

Köszönettel tartozom a JATE Bolyai Intézet differenciálegyenletek szemináriuma tagjainak is, akik munkámat észrevételeikkel és tanácsaikkal segítették.

