A fixpont tulajdonság egy általánosítása

Lengvárszky Zsolt

1987

Tartalom

1. Bevezetés

A fixpont tételek között a legismertebb a következő, 1955-ből származó Tarski-Davis-tétel [3], [16]: Egy L háló akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal (azaz minden $f:L \to L$ rendezéstartó leképezésnek van fixpontja), ha L teljes. A fixpont probléma a hetvenes évek közepén került ismét az érdeklődés középpontjába, és bár számos eredmény született, meglehetősen keveset tudunk azokról a rendezett halmazokról, melyek rendelkeznek a fixpont tulajdonsággal. Hogy a probléma nem könnyű, azt bizonyítja az is, hogy a hálók esetétől eltekintve kielégítő megoldás csak az 1-magasságú rendezett halmazokra ismeretes [11], [12]. Nevezetes az I. Rivaltól eredő sejtés, mely szerint a direkt szorzat megőrzi a fixpont tulajdonságot. Ezzel kapcsolatban is több részeredményt ismerünk [2],[14],[17], a teljes megoldás azonban - úgy tűnik - még egy ideig várat magára.

A fixpont tulajdonság definíciójában- univerzális algebrai szempontból - 1-változós függvények szerepelnek. Természetes módon merül fel a kérdés: lehet-e n-változós függvények segítségével n-fixpont tulajdonságot értelmezni. Ebben a dolgozatban a fixpont tulajdonságnak ezen az ötleten alapuló általánosításával foglalkozunk. Azt mondjuk, hogy a P rendezett halmaz rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal, ha minden $f: P^n \to P$ rendezéstartó leképzésnek van fixpontja, ahol $(x_1,\dots,x_n) \in P^n$ fixpontja f-nek, ha $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$ valamely $1 \leq i \leq n$-re. Mivel $m \leq n$ esetén az m-fixpont tulajdonság teljesülése maga után vonja az n-fixpont tulajdonság teljesülését, célszerű minden rendezett halmazhoz egy természetes számot (vagy a ∞-t) rendelni a $\varrho(P) = \min \{ n \mid P$ rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal$\}$ definícióval.

A fixpont tulajdonság általánosítása egyrészt árnyaltabbá teszi a képet, másrészt a kapott eredmények azt bizonyítják, hogy az n-fixpont tulajdonság természetes általánosítása a klasszikus fixpont tulajdonságnak. Klasszikus értelemben például k korona $C_{2n_1} \times \dots \times C_{2n_k}$ szorzatáról csak azt mondhatjuk, hogy fixpontmentes, be lehet azonban bizonyítani, hogy $\varrho(C_{2n_1} \times \dots \times C_{2n_k}) = k+1$.

A fixpont tételek egy része kevés változtatással általánosítható, más esetekben a helyzet nem ilyen egyszerű. Úgy tűnik, hogy például a hálókra vonatkozó Tarski-Davis-tételnek nincs a klasszikus esethez hasonlóan elegáns megfelelője n-fixpont tulajdonságra.

Mivel a retraktumok fontos szerepet játszanak mind a klasszikus, mind az általános esetben, a retraktumokkal külön fejezetben foglalkozunk (3. fejezet). A 4.,5. és 6. fejezetekben áttekintjük az n-fixpont tulajdonság és a rendezett halmazokon végezhető alapvető műveletek (összeg, lexikografikus összeg, direkt szorzat) kapcsolatát. Bizonyítjuk, hogy ϱ additiv, azaz $\varrho(P+Q) = \varrho(P) + \varrho(Q)$ (4. fejezet), így vizsgálatainkat összefüggő rendezett halmazokra korlátozhatjuk. Nem triviális olyan összefüggő P_n rendezett halmazokat megadni, melyekre $\varrho(P_n) = n$ teljesül. A 4. fejezetben belátjuk P_n-ek létezését, tényleges példákat a dolgozat végén, a 10. fejezetben adunk.

A lexikografikus összegek - bár mutatnak szabályosságot -, nem viselkednek egységesen az általánosított fixpont tulajdonsággal szemben. Ha $\varrho(A) = 1$, akkor $\varrho(\sum_{x,A} B_x) \leqslant \sup\{\varrho(B_x) \mid x \in A\}$ teljesül, míg ha $\varrho(A) \geqslant 2$, A összefüggő és a lexikografikus összeg láncteljes, akkor $\varrho(\sum_{x,A} B_x) = \varrho(A)$ (5. fejezet). Ha pedig A és B_x $(x \in A)$ láncok, valamint $\varrho(A) = m$, $\varrho(B_x) = n$ $(x \in A)$, akkor $\varrho(\sum_{x,A} B_x) = m \cdot n$ (8. fejezet).

A $\varrho(P\times Q) = \varrho(P) + \varrho(Q)-1$ egyenlőség a direkt szorzatra vonatkozó Rival-sejtés általánosítása. A 6. fejezetben olyan eseteket tárgyalunk, amikor igaz a fenti összefüggés.

A 7. fejezetben megadjuk azoknak a 2-fixpont tulajdonsággal rendelkező hálóknak egy jellemzését, melyekben minden antilánc véges. A 8. fejezetben tovább szűkítjük a kört: a szereplő hálók láncok, azaz minden antilánc 1-elemű. Belátjuk a következőket: ha ξ és η limeszrendszámok, $k+\ell=n$ természetes számok, valamint minden $x\in\xi$ -re C_x lánc úgy, hogy $\varrho(C_x) = k$ és minden $y\in\eta$ -ra D_y lánc úgy, hogy $\varrho(D_y) = \ell$, akkor $\varrho((\bigoplus_{x\in\xi} C_x)\oplus(\bigoplus_{y\in\eta^d} D_y)) = n$; továbbá minden olyan C lánc lényegében ilyen alakú, melyre $\varrho(C) = n$. Megadjuk láncoknak felbonthatatlan láncokra való felbontását, és e felbontási tétel segítségével bebizonyítjuk a lexikografikus összeggel kapcsolatban már idézett összefüggést.

A 9. fejezetben 1-magasságú rendezett halmazokkal foglalkozunk. A kapott eredmény analóg a megfelelő klasszikus eredménnyel; kiderül továbbá, hogy összefüggő 1-magasságú rendezett halmazokra a 2-fixpont tulajdonság és az n-fixpont tulajdonság $(n\geqslant 2)$ ekvivalensek, azaz ilyen P-kre $\varrho(P) = 1,2$ vagy ∞.

A dolgozatban feltételezzük a rendezett halmazok és a rendezett halmazokkal kapcsolatos alapvető fogalmak ismeretét (ezek megtalálhatók pl. Szász Gábor Bevezetés a hálóelméletbe című könyvében), bár a szereplő fogalmak definícióját - az első előfordulási helyükön - minden esetben megadjuk. Egy $P=(P;\leqslant)$ rendezett halmazra P egyszerre jelöli az alaphalmazt és a rendezett halmazt. A kialakult hagyományoknak megfelelően minden rendezési relációt $\leqslant$ -vel jelölünk; illetve ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a P rendezett halmaz rendezéséről van szó, akkor $\leqslant_P$ - t írunk.

2. Az n-fixpont tulajdonság definíciója

A P és a Q rendezett halmazokra az $f:P\to Q$ leképezés rendezéstartó, ha valahányszor $x,y\in P$ és $x\leq y$, mindannyiszor $f(x)\leq f(y)$.

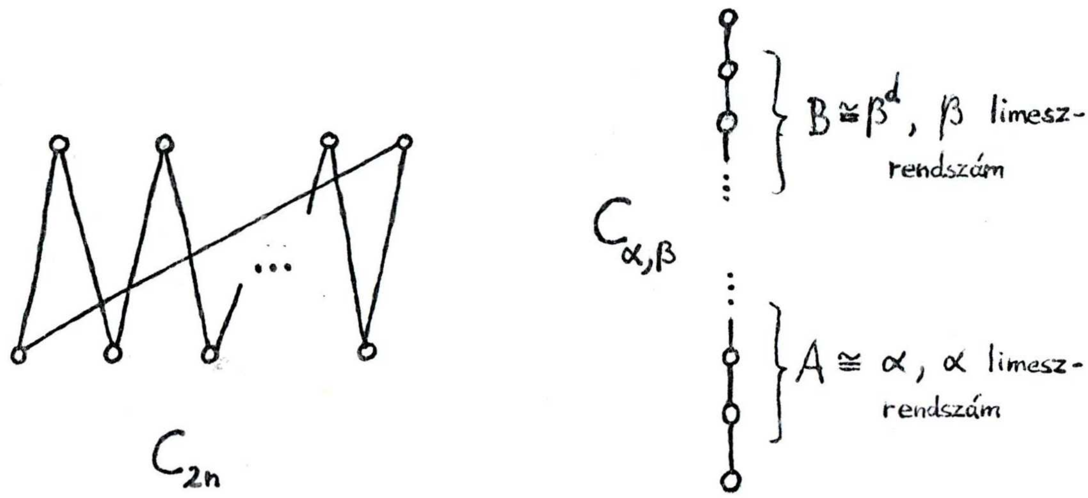
A P rendezett halmaz rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha minden rendezéstartó $f:P\to P$ leképezésnek van fixpontja, azaz valamely $x\in P$ -re $f(x) = x$ teljesül.

A fixpont tulajdonság definíciójában szereplő leképezéseket 1-változós függvényeknek tekintve természetes módon vetődik fel a kérdés: lehetne-e 1-változós függvények helyett n-változós függvényeket tekinteni; értelmezhető-e n-fixpont tulajdonság. Dolgozatunkban a fixpont tulajdonságnak ezen az ötleten alapuló általánosításával foglalkozunk.

Emlékeztetünk rá, hogy ha P és Q rendezett halmazok, akkor P és Q direktszorzata $(P\times Q)$ az alaphalmazok Descartes szorzatán a $(p,q)\leq(p',q')\Leftrightarrow p\leq p'$ és $q\leq q'$ összefüggéssel definiált rendezett halmaz.

2.1. Definíció. Legyen P rendezett halmaz és legyen n természetes szám. Azt mondjuk, hogy a P rendezett halmaz rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal, ha minden rendezéstartó $f:P^n\to P$ leképezésnek van fixpontja, ahol $(x_1,\dots,x_n)\in P^n$ fixpontja f-nek, ha $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$ valamely $1\leq i\leq n$-re. f fixpontmentes, ha nincs fixpontja; P n-fixpotmentes, ha nem rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal.

A fixpont tulajdonság 2.1. Definícióban megadott általánosításának az az egyszerű megfigyelés volt a kiindulópontja, hogy két fontos, klasszikus értelemben fixpontmentes rendezett halmaz, a 2n-korona (C_{2n}) és a $C_{\alpha,\beta}$ lánc (ld. 1. ábra) rendelkeznek a 2-fixpont tulajdonsággal.



1. ábra

($P=(P,\leq_P)$-re P duálisa $P^d=(P,\leq_{P^d})$, ahol $x \leq_{P^d} y \Leftrightarrow y \leq_P x$)

Valóban, legyen $f:C^2_{2n} \to C_{2n}$ rendezéstartó leképezés. Legyen $x_0 \in C_{2n}$, és definiáljuk a $g:C_{2n} \to C_{2n}$ rendezéstartó leképezést a $g(x) = f(x_0,x)$ egyenlőséggel. Ha g-nek van egy x_1 fixpontja, akkor (x_0,x_1) fixpontja f-nek. Ha g fixpontmentes, akkor g szükségképpen automorfizmus, ezért valamely $x_1 \in C_{2n}$-re $g(x_1) = x_0$. Ekkor (x_0,x_1) ismét fixpontja f-nek. Legyen most $f:C^2_{\alpha,\beta} \to C_{\alpha,\beta}$ rendezéstartó, és jelölje x_0 illetve x_1 $C_{\alpha,\beta}$ legkisebb illetve legnagyobb elemét. Ha pl. $f(x_0,x_1) \in A$, akkor az $[x_0, f(x_0,x_1)]$ intervallum zárt a $g(x) = f(x_0,x)$ leképezésre (azaz $g(x) \in [x_0, f(x_0,x_1)]$ ha $x \in [x_0, f(x_0,x_1)]$). Mivel $[x_0, f(x_0,x_1)]$ teljes háló, g-nek van egy $y_0 \in [x_0, f(x_0,x_1)]$ fixpontja, de akkor (x_0,y_0) fixpontja f-nek.

Világos, hogy az n-fixpont tulajdonság n=1-re megegyezik a klasszikus fixpont tulajdonsággal, továbbá $m \leq n$ esetén az m-fixpont tulajdonság maga után vonja az n-fixpont tulajdonságot. Valóban, ha $f: P^n \to P$ rendezéstartó, akkor rögzítve f utolsó n-m változóját, egy $g: P^m \to P$ rendezéstartó leképezést kapunk, és g egy fixpontja f egy fixpontját szolgáltatja. Így célszerűnek látszik minden rendezett halmazhoz egy természetes számot vagy a ∞-t rendelni a következő módon:

<u>2.2. Definíció</u>. A P rendzett halmazra legyen

$\varrho(P) = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid P$ rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal$\}$.

A továbbiakban használni fogjuk az irodalomban elterjedt FPP (= fixed point property = fixpont tulajdonság) rövidítést. Az n-fixpont tulajdonságot FPP(n) jelöli; $P \models FPP(n)$ illetve $P \not\models FPP(n)$ jelentése: P rendelkezik illetve P nem rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal.

3. Retraktumok, retrakciók

A P rendezett halmaz Q részhalmaza retraktuma P-nek, ha van egy olyan rendezéstartó $r:P \to Q$ leképezés, melyre $r \restriction Q = id_Q$. Ekkor r-et retrakciónak nevezzük.

Ha Q retraktuma P-nek és Q' izomorf Q-val, akkor célszerű Q'-t is P retraktumának tekinteni. Így -tágabb értelemben - a Q rendezett halmaz retraktuma a P rendezett halmaznak, ha vannak olyan $f:P \to Q$ és $g:Q \to P$ rendezéstartó leképezések, melyekre $f \circ g = id_Q$, azaz a következő diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "f"] & \\ Q \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "id_Q"'] & & Q \end{tikzcd}$$

2. ábra

A retraktumok sok fontos tulajdonságot megőriznek, bár nem őrzik meg például hálók esetén az algebrai tulajdonságokat, azaz általában nem homomorfizmusok. Megőrzik a retraktumok a fixpont tulajdonságot [13] és általában az n-fixpont tulajdonságot:

<u>3.1. Állítás</u>. Ha Q retraktuma P-nek, akkor $\varrho(Q) \leqslant \varrho(P)$.

Bizonyítás. Ha $\varrho(P) = \infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $\varrho(P) = n < \infty$ és legyen $r: P \to Q$ retrakció Q-ra. Tetszőleges $f: Q^n \to Q$ rendezéstartó leképezés esetén a

$$g: P^n \to P \;;\quad g(x_1, \dots, x_n) = f(r(x_1), \dots, r(x_n))$$

leképezés rendezéstartó. Ha $(x_1, \dots, x_n)$ fixpontja g-nek, akkor $(r(x_1), \dots, r(x_n))$ fixpontja f-nek, azaz $\varrho(Q) \leqslant n$. $\square$

A retraktumoknak a fixpont problémával kapcsolatos vizsgálatokban betöltött fontos szerepét mutatja a következő

<u>3.2. Tétel</u> (Duffus, Poguntke, Rival [4]). A P véges rendezett halmaz akkor és csak akkor fixpontmentes , ha P egy alkalmas Q retraktumának van egy fixpontmentes automorfizmusa.

A 3.2. Tételt felhasználva D.Duffus, W. Poguntke és I. Rival a következőt bizonyítják:

összefüggő 2

<u>3.3. Tétel</u> ([4]). Legyen P egy véges rendezett halmaz, és tegyük fel, hogy minden $\emptyset \neq S \subseteq \max(P)$ halmazra $S_* \models FPP$. Ekkor $P \models FPP$.

Ha P rendezett halmaz, akkor $\max(P)$ ($\min(P)$) jelöli P maximális (minimális) elemeinek halmazát, továbbá tetszőleges $Q \subseteq P$-re $Q_* = \{p \in P \mid p \leqslant q \text{ bármely } q \in Q\text{-ra}\}$ és $Q^* = \{p \in P \mid p \geqslant q \text{ bármely } q \in Q\text{-ra}\}$.

A 3.3. Tétel gyengébb feltételek mellett is igaz:

3.4. Tétel (Baclawski, Björner [2]). Legyen a P rendezett halmazra $|\max(P)|<\infty$. Tegyük fel, hogy

(i) minden $\emptyset \neq S \subseteq \max(P)$-re $S_{*} \models FPP$;

(ii) minden $x \in P$-re van olyan $m \in \max(P)$, hogy $x \leqslant m$.

Ekkor $P \models FPP$.

Megjegyezzük, hogy a második feltétel a fixpont tulajdonság szükséges feltétele. Ha ugyanis (ii) nem teljesül, akkor van P-ben egy C maximális lánc, melynek nincs felső korlátja. Mivel C fixpontmentes (sőt, tetszőleges n-re n-fixpontmentes); és minden maximális lánc retraktum (ld. Duffus, Rival, Simonovits [6]), ezért P is fixpontmentes.

3.5. Állítás. A 3.4. Tétel érvényben marad, ha benne FPP helyett $FPP(n)$-t írunk.

Bizonyítás. Legyen $f:P^n \to P$ rendezéstartó leképezés. Difiniáljuk az x_i elemeket rekurzív módon:

$$x_0 \in \max(P) \;;$$

$$x_{i+1} \in \max(P) \quad \text{és} \quad x_{i+1} \geqslant f(x_i,\dots,x_i).$$

A P-re kirótt feltételek miatt x_i-k jóldefiniáltak, és vannak olyan $i<j$ indexek, hogy $x_i = x_j$. Legyen $S=\{x_i,\dots,x_{j-1}\}$. Ha $y_1,\dots,y_n \in S_{*}$, akkor $y_1,\dots,y_n \leqslant x_i,\dots,x_{j-1}$, azaz

$$f(y_1,\dots,y_n) \leqslant f(x_i,\dots,x_i) \leqslant x_{i+1}$$

$$\vdots$$

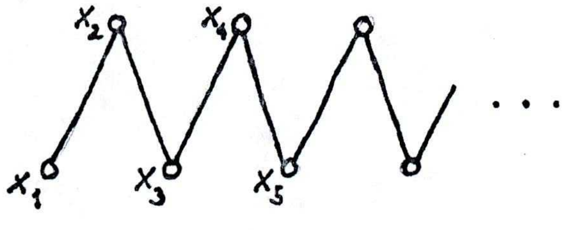
$$f(y_1,\dots,y_n) \leqslant f(x_{j-2},\dots,x_{j-2}) \leqslant x_{j-1}$$

$$f(y_1,\dots,y_n) \leqslant f(x_{j-1},\dots,x_{j-1}) \leqslant x_j = x_i \ .$$

Nyertük, hogy S_* zárt f-re nézve és így f-nek van egy fixpontja S_*-ban. □

A fixpont tételek egy része bizonyos tiltott retraktumok felsorolásával jellemzi egy adott osztályon belül a fixpont tulajdonsággal rendelkező P rendezett halmazokat. Két ilyen eredményt említünk meg példaként:

3.6. Tétel (Nowakowski, Rival [11], [12]). Legyen P 1-magasságú rendezett halmaz. P akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha P-nek nem retraktuma 2, a kételemű antilánc; C_{2n}, a 2n-korona és F_ω, a végtelen kerítés (ld. 3. ábra).

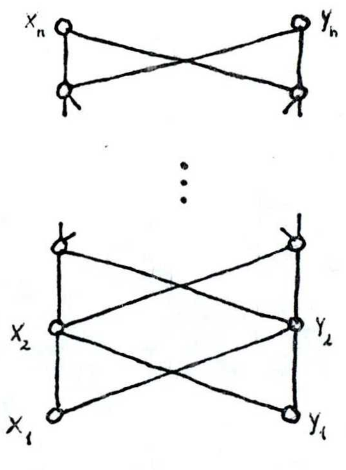


3. ábra

Az a feltétel, hogy P 1-magasságú, azt jelenti, hogy P-ben a leghosszabb lánc 2-elemű. Általában is, egy P rendezett halmaz magasságát (vagy hosszát) a következőképpen definiáljuk:

$$\ell(P) = \sup\left\{ |C| - 1 \mid C \text{ lánc } P\text{-ben} \right\}.$$

3.7. Tétel (Fofanova). Legyen P véges összefüggő rendezett halmaz és tegyük fel, hogy P-ben a legnagyobb antilánc 2-elemű. P akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha P-nek nem retraktuma P_n, ahol P_n a 4. ábrán látható rendezett halmaz.



4. ábra

Megjegyezzük, hogy a hálókra vonatkozó Tarski-Davis-tétel is kimondható olyan alakban, ahol retraktumok szerepelnek (ld.7. fejezet).

A klasszikus esethez hasonlóan fontos szerepet játszanak a retraktumok az általánosított fixpont tulajdonság esetében is (ld.pl. 7.2. Tétel, 9.1. Tétel).

4. Összefüggőség, rendezett halmazok összege

Az összefüggőségnek több ekvivalens definíciója használatos. Ezek közül hármat ismertetünk:

(1) A P rendezett halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha valahányszor $Q \subseteq P$ és $Q \neq \emptyset$, $P \setminus Q \neq \emptyset$, mindannyiszor van olyan $q \in Q$, és van olyan $p \in P \setminus Q$, hogy $p \leq q$ vagy $q < p$.

(2) A P rendzett halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha tetszőleges $p, q \in P$-re van olyan F "kerítés" P-ben, mely tartalmazza p-t és q-t. ($F \subseteq P$ kerítés P-ben, ha F elemei megadhatók egy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sorozattal úgy, hogy $x_{i-1} < x_i$ vagy $x_{i-1} > x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, és $i<j$ esetén, ha x_i és x_j összehasonlíthatók, akkor $j=i+1$.)

(3) A P rendezett halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha 2 nem retraktuma P-nek. (Az n-elemű antilánc szokásos jelölése: n.)

Könnyű meggondolni, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha az összehasonlíthatósági gráfja összefüggő. A P rendezett halmaz G_P összehasonlíthatósági gráfja az az irányítatlan gráf, melynek pontjai P elemei, és a különböző p,q pontok szomszédosak G_P-ben, ha p és q összehasonlíthatók P-ben. Akárcsak a gráfok, a rendezett halmazok is egyértelműen előállíthatók összefüggő komponensek egyesítéseként.

Rendezett halmazok összegén diszjunkt egyesítésüket értjük. Az X halmaz minden x elemére legyen P_x egy rendezett halmaz. Készítsük el a $\tilde{P}_x$ rendezett halmazokat a

$$\tilde{P}_x=\{(p,x)\mid p\in P_x\};\quad (p,x)\leqslant_{\tilde{P}_x}(q,x)\Leftrightarrow p\leqslant_{P_x} q$$

definícióval. Ekkor $\tilde{P}_x$-ok páronként diszjunktak és a $P_x(x\in X)$ rendezett halmazok összege a

$$\sum_{x\in X} P_x = (\bigcup_{x\in X}\tilde{P}_x;\ \bigcup_{x\in X}\leqslant_{\tilde{P}_x})$$

rendezett halmaz. Általában úgy képzeljük, hogy maguk a P_x-ek páronként diszjunktak és ekkor $\sum_{x\in X} P_x = (\bigcup_{x\in X} P_x;\ \bigcup_{x\in X}\leqslant_{P_x})$. Két összeadandó ($|X|=2$) esetén a $P+Q$ jelölés használatos.

Rendezett halmazok összege és az összefüggőség közötti kapcsolat világos: P akkor és csak akkor összefüggő, ha összegfelbonthatatlan. Minden rendezett halmaz összefüggő rendezett halmazok (ti. komponensei) összege. Egyszerűen bizonyíthatók a következők: ha P és Q összefüggő, akkor $P\times Q$ is összefüggő; ha $f:P\to Q$ rendezéstartó és P összefüggő, akkor $f(P)$ összefüggő.

A klasszikus fixpont tulajdonságnak az összefüggőség szükséges feltétele. Valóban, ha a P rendezett halmaz nem összefüggő, akkor az összefüggőség (3) definíciója alapján P-nek retraktuma a fixpontmentes kételemű antilánc, így P is fixpontmentes. Az általánositott fixpont tulajdonság esetében érvényes a

4.1. Állítás. $\varrho(P_1+\ldots+P_k) = \varrho(P_1)+\ldots+\varrho(P_k)$.

Bizonyítás. Legyen $P=P_1+\ldots+P_k$, és tegyük fel először, hogy P_i-k összefüggők. Ha $\varrho(P_i)=\infty$ valamely $1\leqslant i\leqslant k$-ra, akkor, mivel P_i retraktuma P-nek, $\varrho(P)=\infty$ is teljesül. Tegyük fel, hogy $\varrho(P_1),\dots,\varrho(P_k)<\infty$. Legyen $m=\varrho(P)$ és legyen $n_i=\varrho(P_i)$ valamint legyen $n=n_1+\dots+n_k$.

(i) $m\leqslant n$ bizonyítása. Legyen $f:P^n\to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés. Válasszuk az $a_1,\dots,a_n\in P$ elemeket a következőképpen:

$$a_1,\dots,a_{n_1}\in P_1,$$

$$a_{n_1+1},\dots,a_{n_1+n_2}\in P_2\ ,$$

$$\vdots$$

$$a_{n_1+\dots+n_{k-1}+1},\dots,a_{n_1+\dots+n_k}\in P_k.$$

Tegyük fel, hogy $f(a_1,\dots,a_n)\in P_i$ valamely $1\leqslant i\leqslant k$-ra. Definiáljuk a $g:P_i^{n_i}\to P_i$ leképezést a következőképpen:

$$g(x_1,\dots,x_{n_i})=$$

$$=f(a_1,\dots,a_{n_1+\dots+n_{i-1}},x_1,\dots,x_{n_i},a_{n_1+\dots+n_i+1},\dots,a_n)\ .$$

Mivel $P_i^{n_i}$ összefüggő, $g(P_i^{n_i})\subseteq P_i$ valóban teljesül. Így g-nek van egy fixpontja, amiből f egy fixpontja származtatható.

(ii) $m\geqslant n$ bizonyítása. Elegendő megmutatni, hogy $P\notin FPP(n-1)$. Megadunk egy fixpontmentes rendezéstartó $f:P^{n-1}\to P$ leképezést. Minden $1\leqslant i\leqslant k$-ra és minden $0\leqslant t\leqslant n_i-1$-re rögzítsünk egy

$$g_{i,t}:P_i^t \to P_i$$

fixpontmentes rendezéstartó leképezést (ha $t=0$, akkor legyen $g_{i,t}$ egy rögzített eleme P_i-nek). A feltételek szerint $g_{i,t}$-k megadhatók. Tetszőleges $(a_1,\ldots,a_{n-1})\in P^{n-1}$-re legyen

$$i=i(a_1,\ldots,a_{n-1}) = \min\{ i' \mid |\{j \mid a_j \in P_{i'}\}| < n_{i'}\} .$$

A feltételek szerint az $i=i(a_1,\ldots a_{n-1})$ definíciójában szereplő halmaz nem-üres, így i jóldefiniált. Legyen továbbá $\{j \mid a_j \in P_i\}=\{j_1<\ldots<j_t\}$, ahol $t=t(a_1,\ldots,a_{n-1})$, $j_1=j_1(a_1,\ldots,a_{n-1}),\ldots,j_t=j_t(a_1,\ldots,a_{n-1})$. Végül definiáljuk f-et az

$$f(a_1,\ldots,a_{n-1}) = g_{i,t}(a_{j_1},\ldots,a_{j_t})$$

egyenlőséggel. Ha $(a_1,\ldots,a_{n-1})\leqslant(b_1,\ldots,b_{n-1})$, akkor

$$i(a_1,\ldots,a_{n-1}) = i(b_1,\ldots,b_{n-1}),$$

$$t(a_1,\ldots,a_{n-1}) = t(b_1,\ldots,b_{n-1}) \text{ és}$$

$$j_\ell(a_1,\ldots,a_{n-1}) = j_\ell(b_1,\ldots,b_{n-1}) \quad (\ell=1,\ldots,t).$$

Így $f(a_1,\ldots,a_{n-1}) = g_{i,t}(a_{j_1},\ldots,a_{j_t})\leqslant g_{i,t}(b_{j_1},\ldots,b_{j_t}) = f(b_1,\ldots,b_{n-1})$, azaz f rendezéstartó, továbbá f nyilvánvalóan fixpontmentes.

Legyenek most P_i-k tetszőlegesek. Ha $\varrho(P_i) = \infty$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra, akkor $\varrho(P)=\infty$, így feltehető, hogy $\varrho(P_i)<\infty$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ekkor minden egyes P_i véges sok komponensből áll, azaz $P_i=P_{i1}+\ldots+P_{il_i}$, ahol P_{ij}-k összefüggők. Ha ugyanis P_i végtelen sok komponensből állna, akkor P_i-nek retraktuma lenne a végtelen elemű antilánc, amiből $\varrho(P_i)=\infty$ következne, ami ellentmondás. Az összefüggő esetben kapott eredményt kétszer alkalmazva írhatjuk:

$$\varrho(P) = \varrho(P_{11}+\ldots+P_{1l_1}+\ldots+P_{k1}+\ldots+P_{kl_k}) =$$

$$= \varrho(P_{11})+\ldots+\varrho(P_{1l_1})+\ldots+\varrho(P_{k1})+\ldots+\varrho(P_{kl_k}) =$$

$$=\varrho(P_{11}+\ldots+P_{1l_1})+\ldots+\varrho(P_{k1}+\ldots+P_{kl_k}) =\varrho(P_1)+\ldots+\varrho(P_k)\ . \ \square$$

<u>4.2. Következmény</u>. Legyen $P=P_1+\ldots+P_k$.

(i) Ha $P \models FPP(n)$, akkor valamely $n=n_1+\ldots+n_k$ felbontásra $P_1 \models FPP(n_1),\ldots,P_k \models FPP(n_k)$.

(ii) Ha $P_1 \models FPP(n_1),\ldots,P_k \models FPP(n_k)$, akkor $P \models FPP(n_1+\ldots+n_k)$. $\square$

A fentiek lehetővé teszik, hogy az n-fixpont tulajdonsággal kapcsolatos vizsgálatokat összefüggő rendezett halmazokra korlátozzuk.

A 4.1. Állítás alapján könnyű olyan P_n rendezett halmazt konstruálni, amelyre $\varrho(P_n)=n$ teljesül. Nem triviális azonban olyan összefüggő P_n-eket megadni, melyekre $\varrho(P_n)=n$. Konkrét példákat az utolsó fejezetben fogunk adni, itt csak P_n-ek létezését bizonyítjuk.

<u>4.3. Állítás.</u> A P és a Q rendezett halmazokra érvényes a

$$\varrho(P\times Q)\geqslant\varrho(P)+\varrho(Q)-1$$

összefüggés.

Bizonyítás. Legyenek $f:P^n\to P$ és $g:Q^n\to Q$ fixpontmentes rendezéstartó leképezések. Ha a $h:(P\times Q)^{m+n}\to P\times Q$ leképezést a

$$h((x_1,y_1),\dots,(x_{m+n},y_{m+n})) = (f(x_1,\dots,x_m),g(y_{m+1},\dots,y_{m+n}))$$

egyenlőséggel definiáljuk, akkor h nyilvánvalóan fixpontmentes és rendezéstartó. $\square$

<u>4.4. Következmény.</u> Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$-re van olyan Q véges, összefüggő rendezett halmaz, melyre $\varrho(Q)\geqslant n$. $\square$

<u>4.5. Állítás.</u> Legyen p a P rendezett halmaz tetszőleges eleme. Ekkor $\varrho(P\setminus\{p\})\geqslant\varrho(P)-1$.

Bizonyítás. Ha $\varrho(P\setminus\{p\})=\infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen $\varrho(P\setminus\{p\})=n<\infty$ és legyen $f:P^{n+1}\to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés. Definiálja $g:P^n\to P$-t a

$$g(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n,p)$$

egyenlőség. Ha $p=f(x_1,\dots,x_n,p)$ valamely $(x_1,\dots,x_n)\in P^n$-re, akkor $(x_1,\dots,x_n,p)$ fixpontja f-nek. Ha ilyen $(x_1,\dots,x_n)$ nincs, akkor $g(P^n)\subseteq P\setminus\{p\}$, és $\varrho(P\setminus\{p\})=n$ miatt a $g\restriction(P\setminus\{p\})^n$ leképezésnek van egy $(y_1,\dots,y_n)$ fixpontja. Ekkor $(y_1,\dots,y_n,p)$ fixpontja f-nek. $\square$

<u>4.6. Állítás.</u> Ha P egy véges összefüggő rendezett halmaz,

akkor van olyan $p \in P$, hogy $P \setminus \{p\}$ is összefüggő.

Bizonyítás. Legyen G_p P összehasonlíthatósági gráfja. Vegyük észre, hogy tetszőleges $p \in P$ esetén $G_{P\setminus\{p\}} = G_p \setminus \{p\}$. Mivel P akkor és csak akkor összefüggő, ha G_p összefüggő, elég belátni, hogy valamely $p \in P$-re $G_p \setminus \{p\}$ összefüggő. Gráfokra ilyen p létezése jól ismert: legyen p G_p egy feszítő fájának egy első fokú pontja. □

<u>4.7. Állítás</u>. Minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan P_n véges összefüggő rendezett halmaz, melyre $\varrho(P_n)=n$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan Q véges összefüggő rendezett halmazt, melyre $\varrho(Q) \geq n$. Ilyen Q a 4.4. Következmény szerint van. A 4.6. Állítás szerint Q elemeit meg tudjuk adni egy $q_1,\dots,q_k$ sorozattal úgy, hogy a $Q_i=\{q_1,\dots,q_i\}$ rendezett halmazok összefüggők $(i=1,\dots,k)$. A 4.5. Állítás alapján a

$$\varrho(Q_1),\dots,\varrho(Q_k)$$

egy olyan 1-gyel kezdődő és $m \geq n$-nel végződő sorozat, melyben $\varrho(Q_{i+1}) \leq \varrho(Q_i)+1$, így van olyan i $(1 \leq i \leq k)$, melyre $\varrho(Q_i)=n$. □

5. Lexikografikus összegzés

Lexikografikus összegzéskor egy rendezett index halmaz szerint egyesítünk rendezett halmazokat. Legyen A rendezett halmaz és minden $x \in A$-ra legyen B_x rendezett halmaz. Tegyük fel, hogy B_x-ek páronként diszjunkták (ha nem ilyenek, akkor tekintsünk B_x-ek helyett alkalmas, velük izomorf $\tilde{B}_x$-okat). A $B_x=(B_x; \leqslant_x)$ jelöléssel a B_x rendezett halmazok A szerint vett lexikografikus összege a

$$\sum_{x,A} B_x = (\bigcup_{x \in A} B_x; (\bigcup_{x \in A} \leqslant_x) \cup (\bigcup_{x<y} B_x \times B_y))$$

rendezett halmaz, vagyis $\sum_{x,A} B_x$-ben $u \leqslant v$, ha $u,v \in B_x$ és $u \leqslant_x v$, vagy $u \in B_x$, $v \in B_y$ és $x<y$ (v.ö.[9]).

A lexikografikus összegzés és a rendezett halmazokon végezhető további műveletek aritmetikai tulajdonságaival itt nem foglalkozunk, ezek leírása pl. [9]-ben megtalálható. Csak az általános asszociativitást említjük meg, erre a későbbiekben szükségünk lesz. Tegyük fel, hogy az I rendezett halmaz minden i elemére A_i rendezett halmaz és minden $i \in I$ -re valamint az A_i rendezett halmaz minden x elemére B_x rendezett halmaz. Ekkor érvényes a

$$\sum_{x,\bigcup_{i \in I} A_i} B_x = \sum_{i,I} (\sum_{x,A_i} B_x)$$

általános asszociativitási törvény (ld. [9]).

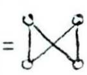
Ha a lexikografikus összegzésnél az A indexhalmaz lineárisan rendezett, akkor a $\sum_{x,A} B_x$ jelölés helyett a $\bigoplus_{x \in A} B_x$ jelölés használatos.

A lexikografikus összegzés és a fixpont tulajdonság kapcsolatával M.Höft és H. Höft [7], [8] valamint A.Rutkowski [15] foglalkoztak. M.Höft és H.Höft [7]-ben bizonyították, hogy ha $P = \sum_{x,A} B_x$ láncteljes és A valamint az összes B_x rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, akkor P is rendelkezik a fixpont tulajdonsággal. A.Rutkowski [15]-ben kimutatta, hogy P láncteljessége elhagyható, érvényes tehát az

5.1. Tétel. Ha A és B_x $(x \in A)$ rendelkeznek a fixpont tulajdonsággal, akkor $\sum_{x,A} B_x$ is rendelkezik a fixpont tulajdonsággal.

Mivel tetszőleges $P = \sum_{x,A} B_x$ lexikografikus összegnél A retraktuma P-nek, az a feltétel, hogy A rendelkezik a fixpont tulajdonsággal nem hagyható el. Bizonyos B_x-ek azonban lehetnek fixpontmentesek, miközben P rendelkezik a fixpont tulajdonsággal (ld. [8]).

Az általánosított fixpont tulajdonság esetében a helyzet bonyolultabb, $\varrho(A)$ és $\varrho(B_x)$ $(x \in A)$ nem határozzák meg $\varrho(\sum_{x,A} B_x)$-et. A következő példákban $\varrho(\sum_{x,A} B_x)$ rendre 2,3 illetve 4, jóllehet minden esetben $\varrho(A)=2$, $\varrho(B_x)=2$ $(x \in A)$.

5.2. Példa. $A =$ , $B_x =$  $(x \in A)$. Ekkor $\varrho(P)=2$.

Bizonyítás. Mivel $\varrho($  $)=2$, $\varrho(P) \geq 2$ világos.

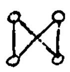
Az olvasó nem érzi jól magát

Legyen x_1 minimális eleme A-nak, b_1 minimális eleme B_{x_1}-nek, és legyen x_2 maximális eleme A-nak, b_2 maximális eleme B_{x_2}-nek. Ha $f:P^2 \to P$ rendezéstartó leképezés, akkor $f(b_1,b_2) \geqslant b_1$ vagy $f(b_1,b_2) \leqslant b_2$, és így f-nek van fixpontja, azaz $\varrho(P) \leqslant 2$. $\square$

Az 5.2. Példa bizonyításában felhasználtuk a következő, a klasszikus esetben is jól ismert alapvető tényt (ld. S. Abian és A.B. Brown [1]):

5.3. Állítás. Ha P láncteljes (azaz minden P-beli láncnak van infimuma és szuprémuma), és az $f:P^n \to P$ rendezéstartó leképezésre valamint az $a_1,\dots,a_n \in P$ elemekre $f(a_1,\dots,a_n)$ összehasonlítható valamelyik a_i-vel, akkor f-nek van fixpontja.

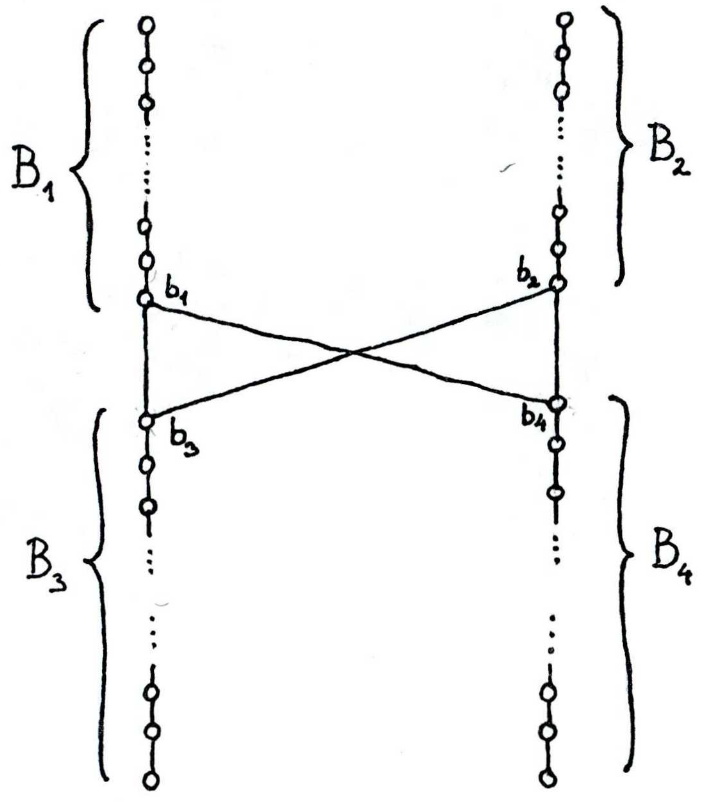
Bizonyítás. Legyen $g(x)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$. Ekkor g rendezéstartó és $g(a_i) \leqslant a_i$ vagy $g(a_i) \geqslant a_i$, így az Abian-Brown-tétel szerint g-nek van egy b fixpontja, de akkor $(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)$ fixpontja f-nek. $\square$

5.4. Példa. $A=$  , $B_x = \omega \oplus \omega^d$ $(x \in A)$. Ekkor $\varrho(P)=3$.

Bizonyítás. Az 5. ábra jelöléseit használva definiáljuk az $f:P^2 \to P$ leképezést a következőképpen:

$$f(x,y) = \begin{cases} g_2(y) & \text{ha } x \in B_1 \text{ és } y \in B_2 \\ b_2 & \text{ha } x \in B_1 \text{ és } y \notin B_2 \\ g_1(y) & \text{ha } x \in B_2 \text{ és } y \in B_1 \\ b_1 & \text{ha } x \in B_2 \text{ és } y \notin B_1 \\ g_4(y) & \text{ha } x \in B_3 \text{ és } y \in B_4 \\ b_4 & \text{ha } x \in B_3 \text{ és } y \notin B_4 \\ g_3(y) & \text{ha } x \in B_4 \text{ és } y \in B_3 \\ b_3 & \text{ha } x \in B_4 \text{ és } y \notin B_3, \end{cases}$$

ahol $g_i : B_i \to B_i (i=1,\ldots,4)$ fixpontmentes rendezéstartó leképezés.



5. ábra

f definíciója alapján világos, hogy f fixpontmentes, és azt is könnyű ellenőrizni, hogy f rendezéstartó, azaz $\rho(P)>2$.

Legyen most $f:P^3 \to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés, és legyen $u=f(b_1,b_2,b_3)$. Ha $u \in B_1$, akkor B_1 zárt g-re, ahol $g(x,y)=f(x,b_2,y)$. Mivel $\varrho(B_1)=2$, g-nek van egy (x_0,y_0) fixpontja, de akkor (x_0,b_2,y_0) fixpontja f-nek. A további három esetben $(u\in B_2, u\in B_3, u\in B_4)$ hasonlóan adódik f egy fixpontja. □

5.5. Példa. $A=2$, $B_x=2$ $(x\in A)$. Ekkor $P=4$, így $\varrho(P)=4$. □

Az 5.1. Tétel természetes általánosítása a következő: ha $\varrho(A)=n$ és minden $x\in A$-ra $\varrho(B_x)=m$, akkor $\varrho(\sum_{x,A} B_x)\leqslant n\cdot m$. Ezt az állítást ilyen általánosságban nem sikerült bebizonyítani, csak abban a speciális esetben, amikor $\varrho(A)=1$:

5.6. Állítás. Ha A rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, akkor

$$\varrho\Big(\sum_{x,A} B_x\Big)\leqslant \sup_{x\in A}\varrho(B_x).$$

Bizonyítás. Az 5.1. Tétel [8]-ban megadott egyszerű bizonyítása alapján haladunk.

Ha $\sup_{x\in A}\varrho(B_x)=\infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $\sup_{x\in A}\varrho(B_x)=n<\infty$, és legyen $f:P^n\to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés. Minden $a\in A$-ra definiáljuk az $A_f(a)\subseteq A$-t így:

$$A_f(a)=\{y\in A \mid \exists x_1,\dots,x_n\in B_a : f(x_1,\dots,x_n)\in B_y\}.$$

Minden $a\in A$-ra legyen a' $A_f(a)$-nak rögzített eleme úgy, hogy $a'\neq a$, ha $A_f(a)\neq\{a\}$. Az $\alpha_f(a)=a'$ leképezés rendezéstartó. Valóban, ha $a_1<a_2$, akkor tetszőleges $x_1\in B^n_{a_1}$ és $x_2\in B^n_{a_2}$ esetén $x_1\leqslant x_2$, azaz $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Ezért ha

$f(x_1) \in B_{y_1}$ és $f(x_2) \in B_{y_2}$, akkor $y_1 \leq y_2$. Van tehát α_f-nek egy fixpontja, legyen ez a_0. Ekkor $f(B^n_{a_0}) \subseteq B_{a_0}$, így f-nek van egy fixpontja $B^n_{a_0}$-ben. □

Az 5.6. Állítás előtt megfogalmazott sejtést az 5.6. Állításon kívül a láncok esete is valószínűsíti: ha A lánc és B_x-ek láncok, akkor $(\bigoplus_{x \in A} B_x) = n \cdot m$, ahol $\varrho(A)=n$ és $\varrho(B_x)=m$ $(x \in A)$. Ezt az állítást a 8. fejezetben fogjuk bizonyítani.

Ha a lexikografikus összeg láncteljes és $\varrho(A)>1$, akkor $\varrho(\sum_{x,A} B_x)$-et $\varrho(A)$ egymaga meghatározza:

<u>5.7. Állítás.</u> Tegyük fel, hogy A összefüggő rendezett halmaz, és minden $a \in A$-ra B_a rendezett halmaz úgy, hogy $P = \sum_{a,A} B_a$ láncteljes. Ha $\varrho(A) \geq 2$, akkor $\varrho(P) = \varrho(A)$.

Bizonyítás. Mivel A retraktuma P-nek, $\varrho(P) \geq \varrho(A)$ világos. Legyen $\varrho(A) = n < \infty$, és legyen $f: P^n \to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés.

Tegyük fel, hogy van olyan $a_0 \in A$, és van olyan $x_1, \ldots, x_n \in P$, hogy valamely $1 \leq m \leq n$-re $x_m \in B_{a_0}$ és $f(x_1, \ldots, x_n) \in B_{a_0}$. Legyen $\ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{m\}$ ($n \geq 2$ miatt van ilyen ℓ), és tegyük fel, hogy $x_\ell \in B_{a_1}$. Legyen $a_1 = c_0$, $c_1, \ldots, c_k = a_0$ A-beli sorozat úgy, hogy $c_{i-1} < c_i$ vagy $c_{i-1} > c_i$ $(i=1, \ldots, k)$. Ha $a_1 = a_0$, akkor legyen $k=2$, és legyen c_1 tetszőleges olyan A-beli elem, melyre $a_0 < c_1$ vagy $a_0 > c_1$ teljesül. Ilyen elemsorozat A összefüggő volta miatt mindig megadható. Legyen $y_0 = x_\ell$, és minden $i=1, \ldots, (k-1)$-re is rögzítsünk egy $y_i \in B_{c_i}$ elemet. Legyen továbbá

2

$$x^{(i)} = (x_1,\dots,x_{\ell-1},y_i,x_{\ell+1},\dots,x_n) \quad \text{és} \quad u_i=f(x^{(i)})$$

$(i = 0,1,\dots,k-1)$.

Mivel f rendezéstartó, és ha $c_{i-1} < c_i$ $(c_{i-1} > c_i)$ akkor $y_{i-1} < y_i$ $(y_{i-1} > y_i)$, u_{i-1} és u_i összehasonlíthatók $(i=1,\dots,k-1)$.

Ha $u_{k-1} \in B_{a_0}$, akkor $x^{(k-1)}$ ℓ-edik komponense $(=y_{k-1})$ és $u_{k-1}=f(x^{(k-1)})$ összehasonlíthatók, így az 5.3. Állítás alapján f-nek van fixpontja.

Ha $u_{k-1} \notin B_{a_0}$, akkor legyen j az első olyan index $(1 \leq j < k-1)$, melyre $u_j \notin B_{a_0}$. Ekkor $u_{j-1} \in B_{a_0}$ miatt $u_j > x_m$ vagy $u_j < x_m$ teljesül, tehát az 5.3. Állítás ismét alkalmazható.

Tegyük most fel, hogy valahányszor $f(x_1,\dots,x_n) \in B_a$, mindannyiszor $x_1,\dots,x_n \in P \setminus B_a$. Minden $a \in A$-ra rögzítsük B_a egy p_a elemét, és definiáljuk az $\alpha : A^n \to A$ leképezést a következőképpen: ha $f(p_{a_1},\dots,p_{a_n}) \in B_a$, akkor legyen $\alpha(a_1,\dots,a_n) = a$.

Mivel f rendezéstartó, α is rendezéstartó, de α fixpontmentes is, ami ellentmond $\varrho(A)=n$-nek. $\square$

Hasonlóan bizonyítható az

<u>5.8. Állítás.</u> Ha $\varrho(A)=1$, $|A|>1$ és $P=\sum_{x,A} B_x$ láncteljes, akkor $\varrho(P) \leq 2$.

Az 5.7. Állításban és az 5.8. Állításban P láncteljessége nem hagyható el (lásd. pl. 8.8. Tétel).

6. Direkt szorzat

A következő nevezetes sejtés I.Rivaltól ered: ha a P és a Q rendezett halmazok rendelkeznek a fixpont tulajdonsággal, akkor $P\times Q$ is rendelkezik a fixpont tulajdonsággal. A Rival-sejtéssel kapcsolatban több részeredmény ismeretes; ezekben az esetekben P és Q valamelyike a fixpont tulajdonságon kívül valamilyen további tulajdonsággal is rendelkezik. Ebben a fejezetben először megadjuk néhány ilyen típusú tétel általánosítását.

A P és Q rendezett halmazra jelölje P^Q azt a rendezett halmazt, melynek tartóhalmaza az $\{f:Q\to P \mid f$ rendezéstartó$\}$ halmaz, és $f\leqslant g$ akkor és csak akkor, ha $f(x)\leqslant g(x)$ minden $x\in Q$-ra.

A P rendezett halmazt lebonthatónak ("dismantlable") nevezzük, ha P láncteljes, és P^P-ben az identikus leképezés és valamelyik konstans leképezés ugyanabban a komponensben vannak [2]. Véges esetben a lebonthatóság ekvivalens avval, hogy P irreducibilisek által lebontható [2]. Ez utóbbi azt jelenti, hogy P elemei megadhatók egy $x_0,x_1,\dots,x_n$ sorozattal úgy, hogy x_i irreducibilis a $P_i=\{x_0,x_1,\dots,x_i\}$-ben $(i=1,\dots,n)$. Az $x\in P$ irreducibilis, ha pontosan egy olyan $y\in P$ létezik, melyre $x\prec y$ (azaz $x<y$ és $x<z\leqslant y$-ból $z=y$ következik)

vagy pontosan egy olyan $y\in P$ létezik, melyre $x\succ y$.

A lebonthatóság igen erős tulajdonság; maga után vonja például a fixpont tulajdonság teljesülését [2], [5]. Igaz továbbá a következő: ha a P rendezett halmaz lebontható, Q tetszőleges rendezett halmaz, akkor P^Q lebontható [2], [5].

<u>6.1. Tétel</u> (Baclawski, Björner [2]). Ha P lebontható, és Q rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, akkor $P\times Q$ rendelkezik a fixpont tulajdonsággal.

<u>6.2. Állítás.</u> Ha P lebontható, és Q rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal, akkor $P\times Q$ rendelkezik az n-fixpont tulajdonsággal.

Bizonyítás. A 6.1. Tétel bizonyítását követjük. Legyen

$$f:(P\times Q)^n\to P\times Q \;,$$

$$f((p_1,q_1),\dots,(p_n,q_n))=(g((p_1,q_1),\dots,(p_n,q_n)),$$

$$h((p_1,q_1),\dots,(p_n,q_n)))$$

rendezéstartó leképezés. Definiáljunk egy $\alpha:P^{Q^n}\to P^{Q^n}$ rendezéstartó leképezést az alábbiak szerint. Ha $w\in P^{Q^n}$ akkor legyen

$$\alpha w(q_1,\dots,q_n) = g((w(q_1,\dots,q_n),q_1),\dots,(w(q_1,\dots,q_n),q_n)).$$

Mivel P^{Q^n} lebontható, $P^{Q^n}\models FPP$, így α-nak van egy w_0 fixpontja. Ha a $v:Q^n\to Q$ leképezést a

$$v(q_1,\dots,q_n)=h((w_0(q_1,\dots,q_n),q_1),\dots,(w_0(q_1,\dots,q_n),q_n))$$

egyenlőség definiálja, akkor v rendezéstartó és $Q\models FPP(n)$ miatt van egy $(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)})$ fixpontja. Ekkor azonban

$$((w_0(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)}),q_1^{(0)}),\dots,(w_0(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)}),q_n^{(0)}))$$

fixpontja f-nek.□

A következő tétel A. Rutkowskitól származik (ugyanezt a tételt gyengébb formában J.W.Walker bizonyította,ő P és Q láncteljességét is feltette):

<u>6.3. Tétel</u> ([14]). Ha a P rendezett halmazra $P\models GFPP$, és a Q rendezett halmazra $Q\models FPP$, akkor $P\times Q\models FPP$.

Itt GFPP jelentése a következő. Egy $F:P\to\mathcal{P}(Q)\setminus\{\emptyset\}$ leképezést multifüggvénynek nevezünk. Ha P és Q rendezett halmazok, akkor az $F:P\to Q$ multifüggvény rendezéstartó, ha $p_1\leq p_2$-ből $F(p_1)\lesssim F(p_2)$ következik, ahol $X,Y\in\mathcal{P}(Q)$ esetén $X\lesssim Y$, ha minden $x\in X$-hez van olyan $y\in Y$, hogy $x\leq y$ és minden $y\in Y$-hoz van olyan $x\in X$, hogy $x\leq y$ ($\mathcal{P}(Q)$-nak $\lesssim$ nem rendezése, mert $\lesssim\mathcal{P}(Q)$-n általában nem antiszimmetrikus.) Ha $P=Q$ és F multifüggvény P-n, akkor $p\in P$ fixpontja F-nek, ha $p\in F(p)$. $P\models GFPP$, ha minden rendezéstartó $F:P\to P$ multifüggvénynek van fixpontja. J.W.Walker bizonyította [17]-ben, hogy véges esetben GFPP és a lebonthatóság ekvivalensek. A rendezéstartó leképezéseket multifüggvényeknek tekintve azonnal adódik, hogy GFPP maga után vonja FPP-t.

<u>6.4. Állítás</u>. Ha a P rendezett halmazra $P \models GFPP$, és a Q rendezett halmazra $Q \models FPP(n)$, valamint Q láncteljes, akkor $P \times Q \models FPP(n)$.

Bizonyítás. Lényegében megegyezik a 6.3. Tétel bizonyításával. A 6.2. Állítás bizonyításához hasonlóan legyen $f:(P\times Q)^n \to P\times Q, f=(g,h)$ rendezéstartó leképezés. Definiáljunk egy $G:P\to Q^n$ és egy $H:Q^n\to P$ multifüggvényt a következőképpen:

$$G(p)=\{(q_1,\dots,q_n) \mid h((p,q_1),\dots,(p,q_n))=q_i \text{ valamely } 1\leq i\leq n\text{-re}\},$$

$$H(q_1,\dots,q_n)=\{p \mid g((p,q_1),\dots,(p,q_n)) = p\}.$$

Mivel $P\models FPP$ és $Q\models FPP(n)$, valóban multifüggvényeket definiáltunk. G rendezéstartó Q láncteljessége és az 5.3. Állítás miatt. Hogy H rendezéstartó, az a következőn múlik: ha $P\models FPP$, akkor $[p)\models FPP$, ahol $[p)=\{x\in P \mid x\geq p\}$. Valóban, az

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x\geq p \\ p & \text{különben} \end{cases}$$

egyenlőséggel definiált leképezés retrakció P-ről $[p)$-re.

Könnyű ellenőrizni, hogy a $H\circ G:P\to P$,

$$H\circ G(p)=\bigcup_{(q_1,\dots,q_n)\in G(p)} H(q_1,\dots,q_n)$$

multifüggvény rendezéstartó, így van egy p_0 fixpontja. Ha $p_0\in H(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)})$, ahol $(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)})\in G(p_0)$, akkor $((p_0,q_1^{(0)}),\dots,(p_0,q_n^{(0)}))$ fixpontja f-nek. □

A.Rutkowskitól származik a következő

<u>6.5. Tétel ([14]).</u> Legyen P láncteljes rendezett halmaz, és tegyük fel, hogy minden $F:P\to P$ rendezéstartó multifüggvényre van olyan (p_0,p_1) összehasonlítható pár ($p_0\leqslant p_1$ vagy $p_0\geqslant p_1$), hogy $p_1\in F(p_0)$. Ha $Q\models FPP$, akkor $P\times Q\models FPP$.

(A P-re vonatkozó második feltétel ismét maga után vonja a fixpont tulajdonság teljesülését.)

Az általános esetben Q láncteljességét is feltesszük:

<u>6.6. Állítás.</u> Tegyük fel, hogy a P és Q láncteljes rendezett halmazokra $Q\models FPP(n)$, valamint tetszőleges $F:P\to P$ rendezéstartó multifüggvényhez van olyan (p_0,p_1) összehasonlítható pár, melyre $p_1\in F(p_0)$. Ekkor $P\times Q\models FPP(n)$.

Bizonyítás. Mivel a szorzat megőrzi a láncteljességet, $P\times Q$ láncteljes. Legyen $f:(P\times Q)^n\to P\times Q$, $f=(g,h)$ rendezéstartó leképezés. Definiáljuk a G és H rendezéstartó multifüggvényeket ugyanúgy, mint a 6.4. Állítás bizonyításában. A feltételek szerint valamely (p_0,p_1)-re $p_1\in H\circ G(p_0)$ és p_0 valamint p_1 összehasonlíthatók, például $p_0\leqslant p_1$. Ekkor valamely $(q_1^{(0)},\dots,q_n^{(0)})\in Q^n$-re és valamely $1\leqslant i\leqslant n$-re

$$g((p_1,q_1^{(0)}),\dots,(p_1,q_n^{(0)})) = p_1 \quad \text{és}$$

$$h((p_0,q_1^{(0)}),\dots,(p_0,q_n^{(0)})) = q_i^{(0)}.$$

Mivel most $f((p_1,q_1^{(0)}),\ldots,(p_1,q_n^{(0)}))\geq(p_1,q_i^{(0)})$, az 5.3. Állítás miatt f-nek van egy fixpontja. $\square$

A Rival - sejtés egy általánosítása a

$$(*) \qquad \rho(P\times Q)=\rho(P)+\rho(Q)-1$$

egyenlőség. Valóban, $\rho(P)=\rho(Q)=1$ esetén a (*) egyenlőség éppen azt jelenti, hogy a fixpont tulajdonság öröklődik szorzatokra. A 4.3. Állítás szerint (*)-ban "$\geq$" mindig teljesül, így csak a "$\leq$" teljesülése kérdéses. Teljes általánosságban (*) biztosan nem igaz, ha ugyanis P az n-elemű, Q az m-elemű antilánc, akkor $P\times Q$ izomorf az $n\cdot m$-elemű antilánccal, így

$$n\cdot m = \rho(P\times Q) \neq \rho(P)+\rho(Q)-1 = n+m-1,$$

ha $n,m>1$. Összefüggő rendezett halmazokra azonban, vagy speciálisabb osztályokra igaz lehet a fenti egyenlőség. (Megjegyezzük, hogy az eredeti Rival-sejtés is összefüggő rendezett halmazokra vonatkozik, mivel a fixpont tulajdonság teljesülése maga után vonja az összefüggőséget.) A fejezet hátra lévő részében olyan eseteket tárgyalunk, ahol (*) igaz és a 6.2, 6.4 valamint a 6.6. Állításokkal szemben (amelyekben $\rho(P)=1$ volt), most $\rho(P)$ és $\rho(Q)$ tetszőlegesek lehetnek.

A továbbiakhoz szükségünk lesz a "gap" fogalmára (ld. [5]). Ha P rendezett halmaz és $\emptyset\neq D,U\subseteq P$, akkor a

(D,U) párt gap-nek nevezzük a következő két feltétel teljesülése esetén:

(i) $D \subseteq U_*$ és $U \subseteq D^*$;

(ii) nincs olyan $x \in P$, melyre $d \leq x \leq u$ teljesülne minden $d \in D$ és $u \in U$ esetén, azaz $D^* \wedge U_* = \emptyset$.

((i)-ben elegendő lett volna csak az egyik feltételt kikötni, mivel a két feltétel bármelyike maga után vonja a másikat).

Jelölje $\mathcal{G}(P)$ a P-beli gap-ek halmazát. $\mathcal{G}(P)$ rendezett halmazzá tehető a következő definícióval:

$$(D_1,U_1) < (D_2,U_2) \Leftrightarrow \text{valamely } u \in U_1\text{-re és } d \in D_2\text{-re } u \leq d.$$

<u>6.7. Segédtétel.</u> $\ell(\mathcal{G}(P\times Q)) = \ell(\mathcal{G}(P)) + \ell(\mathcal{G}(Q))+1$.

Bizonyítás. Legyen $\ell(\mathcal{G}(P\times Q))=k$, $\ell(\mathcal{G}(P))=m$, $\ell(\mathcal{G}(Q))=n$.

(a) $k \geq m+n+1$. A feltételek szerint P-ben megadhatók a

$$(D_1,U_1)<(D_2,U_2)< \dots <(D_{m+1},U_{m+1})$$

gap-ek, és hasonlóan Q-ban megadhatók az

$$(E_1,V_1)<(E_2,V_2)< \dots <(E_{n+1},V_{n+1})$$

gap-ek. Legyen $e \in E_1$ és $u \in U_{m+1}$. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\begin{gathered}(D_1\times\{e\},U_1\times\{e\})\\ \vdots\\ (D_{m+1}\times\{e\},U_{m+1}\times\{e\})\\ \\ (\{u\}\times E_1,\{u\}\times V_1)\\ \vdots\\ (\{u\}\times E_{n+1},\{u\}\times V_{n+1})\end{gathered}$$

$P \times Q$-beli gap-eknek egy növő sorozata, azaz $k \geq (m+1)+(n+1)-1=$ $m+n+1$.

(b) $k \leq m+n+1$. Legyenek

$$(F_1,W_1)<(F_2,W_2)<\ldots<(F_{k+1},W_{k+1})$$

$P \times Q$-beli gap-ek. $X \subseteq P \times Q$ esetén X vetülete P-re és Q-ra az

$$X_P = \{ p \in P \mid (p,q) \in X \text{ valamely } q \in Q\text{-ra} \} \text{ és az}$$

$$X_Q = \{ q \in Q \mid (p,q) \in X \text{ valamely } p \in P\text{-re} \}$$

halmazok. Legyen D_i és U_i F_i illetve W_i vetülete P-re, és legyen E_i és V_i F_i illetve W_i vetülete Q-ra. Ekkor (D_i,U_i) gap P-ben, vagy (E_i,V_i) gap Q-ban. Valóban, egyrészt könnyű látni, hogy $D_i \subseteq (U_i)_*$ és $E_i \subseteq (V_i)_*$. Másrészt ha sem (D_i,U_i), sem (E_i,V_i) nem gap-ek P-ben illetve Q-ban, akkor van olyan $x \in P$ illetve $y \in Q$, hogy $d \leq x \leq u$ minden $d \in D_i$-re és $u \in U_i$-re illetve $e \leq y \leq v$ minden $e \in E_i$-re és $v \in V_i$-re. Ekkor azonban bármely $f \in F_i$-re és $w \in W_i$-re $f \leq (x,y) \leq w$, ami ellentmond (F,W) gap voltának.

Ha $i<j$ és -például- (D_i,U_i) valamint (D_j,U_j) gap-ek P-ben, akkor $(D_i,U_i)<(D_j,U_j)$ is teljesül. Valóban, $(F_i,W_i)<$ $<(F_j,W_j)$ miatt valamely $(u,v) \in W_i$-re és valamely $(d,e) \in F_j$-re $(u,v) \leq (d,e)$. Ekkor $u \in U_i$ és $d \in D_j$ továbbá $u \leq d$, azaz $(D_i,U_i)<$ $<(D_j,U_j)$.

A fentiek szerint a

$$H_1=\{i \mid (D_i,U_i) \text{ gap } P\text{-ben}\}$$

és a

$$H_2=\{j \mid (E_j,V_j) \text{ gap } Q\text{-ban}\}$$

halmazokra $H_1 \cup H_2=\{1,2,\ldots,k+1\}$ illetve $|H_1|\leq m+1$, $|H_2|\leq n+1$ teljesül, amiből $k\leq m+n+1$ adódik.□

6.8. Segédtétel. Tegyük fel, hogy a P rendezett halmaznak van legkisebb eleme, és P-ben minden maximális láncnak van legnagyobb eleme. Ekkor $\mathfrak{g}(P)\leq \ell(\mathcal{G}(P))+2$.

Bizonyítás. $\ell(\mathcal{G}(P))$ szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $\ell(\mathcal{G}(P))=-1$, ha $\mathcal{G}(P)=\emptyset$. Ekkor azt kell be látni, hogy $\mathfrak{g}(P)=1$, azaz ha $f:P\to P$ rendezéstartó, akkor f-nek van fixpontja. Mivel most Pláncteljes (különben $\mathcal{G}(P)\neq\emptyset$), és $f(0_p)\geq 0_p$, alkalmazhatjuk az 5.3. Állítást.

Legyen most $\ell(\mathcal{G}(P))=n\geq 0$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan P-re, melyre $\ell(\mathcal{G}(P))<n$. Legyen $f:P^{n+2}\to P$ rendezéstartó leképezés és definiáljuk a $g:P\to P$ leképezést a következőképpen:

$$g(x)=f(0_p,\ldots,0_p,x).$$

Legyen $H=\{x\in P \mid x\leq g(x)\}$. Mivel $0_p\in H$, $H\neq\emptyset$. Legyen C maximális lánc H-ban. Ha $c=\sup C$ létezik, akkor $g(c)=c$, azaz $(0_p,\ldots,0_p,c)$ fixpontja f-nek. Valóban, tetszőleges $x\in C$-re $g(c)\geq g(x)\geq x$, így $g(c)\geq c$. $g(c)>c$ esetén $g(g(c))\geq g(c)$ miatt $g(c)\in H$ is teljesülne. Ez ellentmond annak, hogy C maximális lánc H-ban.

Tegyük fel, hogy sup C nem létezik, és legyen c felső korlátja C-nek (a maximális láncokra vonatkozó feltétel miatt ilyen c létezik). Ha $u=g(c)$, akkor u is felső korlátja C-nek. Mivel sup C nem létezik, $(C,C^{*})\in \mathcal{G}(P)$. $u\in C^{*}$ miatt $\ell(\mathcal{G}([u)))<n$, másrészt $[u)$ zárt a

$$h(x_1,\ldots,x_{n+1}) = f(x_1,\ldots,x_{n+1},c)$$

leképezésre. Az indukciós hipotézis értelmében $\varrho([u))\leq \ell(\mathcal{G}([u)))+2\leq n+1$, ezért h-nak (és f-nek) van fixpontja. □

<u>6.9. Állítás.</u> Ha a P és a Q rendezett halmazoknak van legkisebb elemük, továbbá $\varrho(P)=\ell(\mathcal{G}(P))+2$ és $\varrho(Q)=\ell(\mathcal{G}(Q))+2$, akkor PxQ-ra igaz a (*) összefüggés.

Bizonyítás. Föltehetjük, hogy P-ben és Q-ban minden maximális láncnak van legnagyobb eleme (különben $\varrho(P)=\infty$ vagy $\varrho(Q)=\infty$ lenne). Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor PxQ-ban is minden maximális láncnak van maximális eleme. PxQ-nak $(0_P,0_Q)$ legkisebb eleme, így alkalmazhatjuk a 6.8. Segédtételt:

$$\varrho(P\times Q)\leq \ell(\mathcal{G}(P\times Q))+2\,.$$

A 6.7. Segédtétel szerint

$$\varrho(P\times Q)\leq \ell(\mathcal{G}(P))+\ell(\mathcal{G}(Q))+1+2=\varrho(P)+\varrho(Q)-1,$$

amit bizonyítani kellett. □

A 6.9. Állítás feltételeinek eleget tevő P-k és Q-k valóban léteznek; ilyen pl. $P=(\omega\oplus\omega^{d})^{m}$, $Q=(\omega\oplus\omega^{d})^{n}$ (v.ö.10. fejezet).

<u>6.10. Segédtétel.</u> Tegyük fel, hogy a P rendezett halmazra $\ell(P)<\infty$, továbbá valamely $a_0\in P$-re és minden $b\in \max(P)$-re $a_0\leq b$ teljesül. Ekkor $\varrho(P)\leq \ell(P)+1$.

Bizonyítás. Legyen $\ell(P)=n$. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük.

Ha $n=0$, akkor P egyelemű és ekkor $\varrho(P)=1$.

Tegyük fel, hogy $n>0$ és legyen $f:P^{n+1}\to P$ tetszőleges rendezéstartó leképezés. Definiáljuk a $g:P^n\to P$ leképezést így:

$$g(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n,a_0).$$

Ha $\ell(g(P^n))=n$, akkor valamely $(a_1,\dots,a_n)\in P^n$-re és valamely $b\in \max(P)$-re $g(a_1,\dots,a_n)=b$. Így

$$f(a_1,\dots,a_n,b)\geq f(a_1,\dots,a_n,a_0) = g(a_1,\dots,a_n)=b,$$

és mivel b maximális volt, $f(a_1,\dots,a_n,b)=b$, azaz $(a_1,\dots,a_n,b)$ fixpontja f-nek.

Tegyük fel, hogy $\ell(g(P^n))<n$. Most -g rendezéstartó volta miatt- tetszőleges $b\in \max g(P^n)$-re $g(a_0,\dots,a_0)\leq b$. Valóban, ha $b\in\max g(P^n)$, akkor $b=g(a_1,\dots,a_n)$ valamely $(a_1,\dots,a_n)\in P^n$-re, és $a_1,\dots,a_n\in \max(P)$ is feltehető. Így

$$g(a_0,\dots,a_0)\leq g(a_1,\dots,a_n)=b.$$

Alkalmazhatjuk tehát $g(P^n)$-re az indukciós hipotézist: a $g\restriction g(P^n)$ leképezésnek van egy $(a_1,\dots,a_n)$ fixpontja, de akkor $(a_1,\dots,a_n,a_0)$ f-nek fixpontja. □

6.11. Állítás. Tegyük fel, hogy $a_0\in P$-re $a_0\leq a$ minden $a\in\max(P)$ esetén, és $b_0\in Q$-ra $b_0\leq b$ minden $b\in\max(Q)$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $\varrho(P)=\ell(P)+1$ és $\varrho(Q)=\ell(Q)+1$.

Ekkor $P\times Q$-ra igaz a $(\ast)$ összefüggés.

Bizonyítás. $\varrho(P),\varrho(Q)<\infty$ feltehető. $(a_0,b_0)\leqslant(a,b)$ bármely $(a,b)\in\max(P\times Q)$ esetén, így alkalmazható a 6.10. Segédtétel. $\ell(P\times Q)=\ell(P)+\ell(Q)$ miatt írhatjuk:

$$\varrho(P\times Q)\leqslant\ell(P\times Q)+1=\ell(P)+\ell(Q)+1=\varrho(P)+\varrho(Q)-1,$$

és ezt kellett bizonyítani. $\square$

A $P=($$)^m$, $Q=($$)^n$ választás mutatja, hogy a 6.11. Állítás feltételeinek eleget tevő rendezett halmazok valóban léteznek (vö. 10. fejezet).

7. Hálók és a 2-fixpont tulajdonság

A. Tarski és A.C.Davis nevéhez fűződik a következő jól ismert

7.1. Tétel ([3], [16]). Egy háló akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha teljes.
(Az L háló definíció szerint akkor és csak akkor teljes, ha tetszőleges $X \subseteq L$-re létezik X szuprémuma és X infimuma.)

A.C. Davis azt mutatta meg, hogy ha az L háló nem teljes, akkor megadható egy $X \subseteq L$ és egy $Y \subseteq L$ lánc úgy, hogy

(i) X jólrendezett, Y duálisan jólrendezett;

(ii) minden $x \in X$-re és minden $y \in Y$-ra $x \leq y$;

(iii) nincs olyan $z \in L$, melyre minden $x \in X$ és $y \in Y$ esetén $x \leq z \leq y$ teljesül.

($X = \emptyset$ vagy $Y = \emptyset$ előfordulhat, ha L nem korlátos.)

Mivel $X \cup Y$ retraktuma L-nek ($r: L \to X \cup Y$;

$$r(u) = \begin{cases} \min \{ x \in X \mid x \nleq u \} & \text{ha } \{x \in X \mid x \nleq u\} \neq \emptyset, \\ \max \{ y \in Y \mid y \ngeq u \} & \text{ha } \{x \in X \mid x \nleq u\} = \emptyset \end{cases}$$

retrakció, lásd pl.[13]), a 7.1. Tétel így is megfogalmazható:

Az L korlátos háló akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha L-nek nincs $\xi \oplus \eta^{d}$ alakú retraktuma, ahol ξ és η limeszrendszámok.

Nem korlátos esetben $\varrho(L)=\infty$ ($f:\xi^n\to\xi$; $f(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\max(\gamma_1,\dots,\gamma_n)+1$ tetszőleges n-re fixpontmentes), így csak korlátos hálókkal foglalkozunk. A Tarski-Davis-tétel második alakjával analóg a következő

<u>7.2. Tétel.</u> Tegyük fel, hogy a korlátos L hálóban minden antilánc véges. L akkor és csak akkor rendelkezik a 2-fixpont tulajdonsággal, ha L-nek nincs olyan C retraktuma, hogy C vagy C^d

$$(\bigoplus_{\gamma\in\alpha}(\xi_\gamma\oplus\eta_\gamma^d))\oplus\zeta^d$$

alakban áll elő, ahol α limeszrendszám, ξ_γ,η_γ ($\gamma\in\alpha$) és ζ limeszrendszámok. (Az α rendszámra úgy gondolunk, mint a nála kisebb rendszámok halmazára, így a $\beta\in\alpha$ és $\beta<\alpha$ feltételek ekvivalensek).

Bizonyítás. Szükségesség. Definiáljuk az $f:C^2\to C$ leképezést a következőképpen: legyen $f(x,y)=f(y,x)$ és $x\leq y$-ra legyen

$$f(x,y)=\begin{cases} 0_{\xi_{\gamma+1}} & \text{ha } x,y\in\xi_\gamma\oplus\eta_\gamma^d;\\ y+1 & \text{ha } x\in\xi_\gamma\oplus\eta_\gamma^d,\ y\in\xi_{\gamma+1};\\ y-1 & \text{ha } x\in\xi_\gamma\oplus\eta_\gamma^d,\ y\in\eta_{\gamma+1}^d;\\ 1_{\eta_{\gamma+1}^d} & \text{ha } x\in\xi_\gamma\oplus\eta_\gamma^d,\ y>1_{\eta_{\gamma+1}^d};\\ x-1 & \text{ha } x\in\zeta^d.\end{cases}$$

($y+1$ és $y-1$ jelentése: $y-1\prec y\prec y+1$.)

Könnyű ellenőrizni, hogy f rendezéstartó és fixpontmentes.

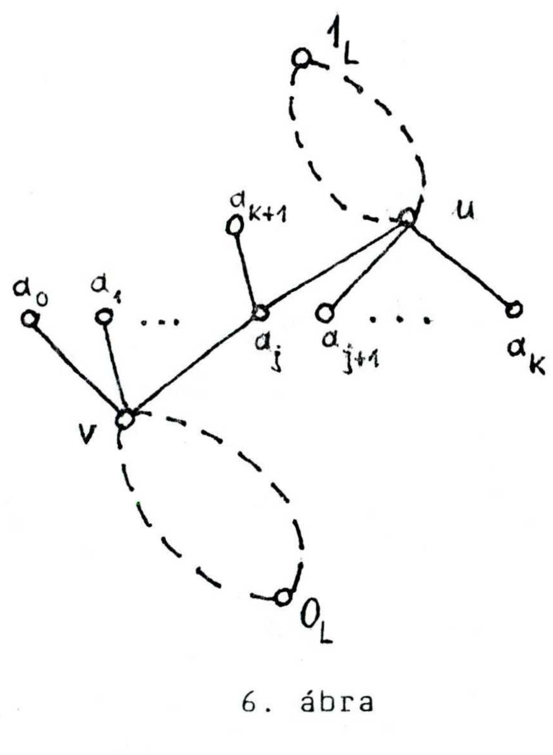
Elegendőség. Tegyük fel, hogy $f:L^2\to L$ fixpontmentes rendezéstartó leképezés. Vezessük be az $xy=f(x,y)$ jelölést, és definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \dots$ elemeket az

$$a_0 = 0_L 1_L ; \quad a_{i+1} = a_i^2$$

összefüggéssel.

Mivel L-ben nincs végtelen antilánc, valamely $k \geqslant j \geqslant 0$-ra a_j és a_{k+1} összehasonlíthatók; például $a_j \leqslant a_{k+1}$. Legyenek az u, v elemek a következők:

$$u = \bigvee_{i=j}^{k} a_i \; ; \quad v = \bigwedge_{i=0}^{j} a_i \quad \text{(ld.6.ábra)}$$



6. ábra

Világos, hogy $v \leqslant u$, és mivel f rendezéstartó, $u^2 \geqslant a_j^2, \dots, a_k^2$, azaz $u^2 \geqslant a_j, \dots, a_k$, azaz $u^2 \geqslant u$. Másrészt

$0_L v \leq 0_L 1_L, a_0^2, \dots, a_{j-1}^2$, azaz $0_L v \leq a_0, a_1, \dots, a_j$, vagyis $0_L v \leq v$.

A $k=0$ esetben legyen $u=a_0^2$, hogy $u>v$ teljesüljön. Az $u^2 \geq u$ és a $0_L v \leq v$ feltétel most is áll.

Mivel f fixpontmentes és $[0_L, v]$ zárt a $g(x)=f(0_L, x)$ rendezéstartó leképezésre, a Tarski-Davis-tétel szerint van olyan X és Y jólrendezett illetve duálisan jólrendezett lánc $[0_L, v]$ -ben, hogy $x \leq y$ bármely $x \in X$-re és $y \in Y$-ra, valamint nincs olyan $z \in L$, melyre $x \leq z \leq y$ teljesülne minden $x \in X$ és $y \in Y$ esetén. Továbbá $u^2 \geq u$ miatt $[u, 1_L]$ zárt f-re, azaz $[u, 1_L]$ 2-fixpontmentes. Legyen $C_L = X \cup Y$ és legyen $I_L = [u, 1_L]$. Most $1_L \in I_L$ teljesül. Ha $a_j \geq a_{k+1}$, akkor a konstrukció a fentiek duálisa lesz, és ekkor $0_L \in I_L$ fog teljesülni.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk az L_γ hálókat a következő módon:

$$L_0 = L;$$

ha $\gamma = \delta + 1$ és L_δ korlátos, akkor $L_\gamma = I_{L_\delta}$,

ha $\gamma = \delta + 1$ és L_δ nem korlátos, akkor $L_\gamma = L_\delta$,

ha γ limeszrendszám, akkor $L_\gamma = \bigcap_{\delta < \gamma} L_\delta$.

L_γ-k jóldefináltak, mert minden L_γ zárt f-re nézve, így I_{L_γ} is értelmes.

Legyen α az első olyan rendszám, melyre L_α nem korlátos. (Ilyen α létezik, mert $L_{\gamma+1} \subset L_\gamma$.) L_γ-k definíciója alapján világos, hogy α limeszrendszám. Legyen továbbá minden $\gamma\in\alpha$-ra $C_\gamma = C_{L_\gamma}$, ahol C_{L_γ} (I_{L_γ}-val együtt) úgy adódik L_γ-ból, ahogy C_L-et kaptuk L-ből. Legyen

$$H_0 = \{\gamma\in\alpha \mid 0_L \in L_{\gamma+1}\} \quad \text{és} \quad H_1 = \{\gamma\in\alpha \mid 1_L \in L_{\gamma+1}\}.$$

Világos, hogy $H_0 \cup H_1 = \alpha$ és $H_0 \cap H_1 = \emptyset$.

1. eset: $L_\alpha \neq \emptyset$ és L_α alulról nem korlátos.

Most H_1 kofinális α-ban. Valóban, ha van olyan $\beta\in\alpha$, hogy minden $\beta\leq\gamma<\alpha$-ra $\gamma\in H_0$, akkor $0_{L_\beta} = 0_{L_\gamma}$ minden $\beta\leq\gamma<\alpha$-ra, így $0_{L_\beta} \in \bigcap_{\beta\leq\gamma<\alpha} L_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\alpha} L_\gamma = L_\alpha$. Ez azt jelentené, hogy 0_{L_β} L_α legkisebb eleme. Legyen Z egy duálisan jólrendezett lánc L_α-ban úgy, hogy Z-nek nincs L_α-ban alsó korlátja. Legyen továbbá $C = (\bigcup_{\gamma\in H_1} C_\gamma) \cup Z$. Mivel C_γ-k és Z páronként diszjunktak és C_γ $C_\gamma = X_\gamma \oplus Y_\gamma$ alakban áll elő, C felírható

$$C = \Big(\bigoplus_{\gamma\in H_1} (X_\gamma \oplus Y_\gamma)\Big) \oplus Z$$

alakban. Mivel H_1 kofinális α-ban, H_1 izomorf egy limeszrendszámmal, ezért csak azt kell belátni, hogy C retraktuma L-nek. Tekintsünk egy C-t tartalmazó C' maximális láncot L-ben. Mivel C' retraktuma L-nek (ld. [6]), elég megmutatni, hogy C retraktuma C'-nek. Ez utóbbi azon múlik, hogy nincs olyan $z\in L$, melyre $x\leq z\leq y$ teljesülne minden $x\in \bigcup_{\gamma\in H_1} C_\gamma$ és $y\in Z$ esetén. Ha volna ilyen z, akkor minden $\gamma\in H_1$-re $0_{L_\gamma}\leq z$ is teljesülne, és mivel H_1 kofinális α-ban, minden $\gamma\in\alpha$-ra $0_{L_\gamma}\leq z$ adódnék, amiből $z\in\bigcap_{\gamma\in\alpha} L_\gamma = L_\alpha$ -t kapnánk. Ez azt jelentené, hogy L_α-nak van legkisebb eleme.

Fölhasználva még, hogy X_γ és Y_γ is úgy volt definiálva, hogy $z\in L$ esetén $x\leq z\leq y$ minden $x\in X$, $y\in Y$ -ra nem teljesülhet, az alább megadott $r:C'\to C$ jóldefiniált retrakció C-re:

$$r(x)=\begin{cases} \min\{y \mid y\in X_\gamma \text{ és } x\leq y\} & \text{ha valamely } \gamma\in H_1\text{-re} \\ \qquad x\geq 1_{C_\delta} \text{ minden } \delta<\gamma, \delta\in H_1 \text{ esetén és } x\leq z & \\ \qquad \text{minden } z\in Y_\gamma \text{ esetén,} & \\ \max\{y \mid y\in Y_\gamma \text{ és } x\geq y\} & \text{ha valamely } \gamma\in H_1\text{-re} \\ \qquad x\leq 1_{C_\gamma} \text{ és } x\geq z \text{ minden } z\in X_\gamma \text{ esetén,} & \\ \max\{y \mid y\in Z \text{ és } x\geq y\} & \text{ha } x\geq 1_{C_\gamma} \text{ minden } \gamma\in H_1 \text{ esetén.} \end{cases}$$

2. eset: $L_\alpha\neq\emptyset$ és L_α felülről nem korlátos.

Ez az eset az 1. eset duálisa.

3. eset: $L=\emptyset$.

Ekkor H_0 is és H_1 is kofinális α-ban. Legyen $Z=\{1_\gamma \mid \gamma\in H_0\}$ és definiáljuk C-t ugyanúgy, mint az 1. esetben.$\square$

Megjegyezzük, hogy a most bizonyított tételben lényeges az a feltevés, hogy az L hálóban minden antilánc véges. A 6.9. Állítás alapján ugyanis, ha $L=(\xi_1\oplus\eta_1^d)\times(\xi_2\oplus\eta_2^d)$ ($\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ limeszrendszámok), akkor $\varrho(L)=3$, azaz L 2-fixpontmentes L-nek azonban nincs a 7.2.Tételben megadott alakú retraktuma.

8. n-fixpont tulajdonság láncokra

Az előző fejezet eredménye speciális hálókra és a 2-fixpont tulajdonságra vonatkozik. Sikerült általánositani a 7.2. Tételt, igaz, azon az áron, hogy a szereplő hálók osztályát tovább szűkítettük: most már minden antilánc nemcsak véges, hanem 1-elemű, azaz a vizsgált rendezett halmazok láncok. Mivel egy nem-korlátos C láncra $\varrho(C)=\infty$, csak korlátos láncokkal foglalkozunk. Szükségünk lesz a következőre:

<u>8.1. Állítás.</u> Tegyük fel, hogy C lánc és C n-fixpontmentes, azaz van olyan $f:C^n \to C$ rendezéstartó leképezés, melynek nincs fixpontja. Ekkor van olyan szimmetrikus $g:C^n \to C$ rendezéstartó leképezés is, melynek nincs fixpontja. (g szimmetrikus, ha minden $(x_1,\dots,x_n)$-re és minden $\pi \in S_n$-re $g(x_1,\dots,x_n)=g(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$.)

Bizonyítás. Definiáljuk a $g:C^n \to C$ leképezést a következőképpen:

$$g(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\pi \in S_n} f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy g eleget tesz a kívánalmaknak. $\square$

<u>8.2. Állítás.</u> Legyenek k és ℓ természetes számok. Tegyük fel, hogy α és β limeszrendszámok és minden $\gamma \in \alpha$-ra C_γ olyan lánc, melyre $C_\gamma \models FPP(k)$ továbbá minden $\delta \in \beta^d$-re D_δ olyan lánc, melyre $D \models FPP(\ell)$. Ekkor

$$\Big(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta\Big) \models FPP(k+\ell).$$

Bizonyítás. Legyen $L=(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)$, és legyen $f:L^{k+\ell}\to L$ rendezéstartó leképezés. Legyen továbbá

$$u=f(\underbrace{0_L,\dots,0_L}_{\ell\text{-szer}},\ \underbrace{1_L,\dots,1_L}_{k\text{-szor}}).$$

Ha $u\in C_\gamma$ valamely $\gamma\in\alpha$-ra, akkor $g(L^k)\leq[0_L,1_C]$, ahol g-t a

$$g(x_1,\dots,x_k) = f(0_L,\dots,0_L,x_1,\dots,x_k)$$

egyenlőség definiálja. g nyilvánvalóan rendezéstartó. Mivel $[0_L,1_C]=\bigoplus_{\delta\in\gamma+1} C_\delta$ és $\varrho(\gamma+1)=1$, az 5.6. Állítás szerint $\varrho([0_L,1_{C_\gamma}])=k$, azaz g-nek -és így f-nek is- van fixpontja.

Ugyanígy adódik f-nek egy fixpontja az $u\in D_\delta(\delta\in\beta^d)$ esetben. □

8.3. Állítás. Legyenek k és ℓ nem-negatív egész számok. Tegyük fel, hogy α és β limeszrendszámok és minden $\gamma\in\alpha$-ra C_γ korlátos k-fixpontmentes lánc továbbá minden $\delta\in\beta^d$-re D_δ korlátos ℓ-fixpontmentes lánc. Ekkor a

$$(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)$$

lánc $(k+\ell+1)$-fixpontmentes.

Bizonyítás. Legyen $L=(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)$. Megadunk egy $f:L^{k+\ell+1}\to L$ fixpontmentes rendezéstartó leképezést. A 8.1. Állítás szerint minden $\gamma\in\alpha$-ra ($\delta\in\beta^d$-re) megadható egy $f_\gamma:C_\gamma^k\to C_\gamma$ ($g_\delta:D_\delta^\ell\to D_\delta$) szimmetrikus, fixpontmentes, rendezéstartó leképezés. (k=0, ℓ=0) esetén $f_\gamma(g_\delta)$ legyen $C_\gamma(D_\delta)$ rögzített eleme). Legyen $x=(x_1,\dots,x_{k+\ell+1})\in L^{k+\ell+1}$ tetszőleges és legyen

$$I(x)=\{i\,|\,x_i\in C_\gamma \text{ valamely } \gamma\in\alpha\text{-ra}\};$$
$$J(x)=\{j\,|\,x_j\in D_\delta \text{ valamely } \delta\in\beta^d\text{-re}\}.$$

Ekkor $|I(x)|\leq \ell$ és $|J(x)|\leq k$ közül pontosan az egyik teljesül. $|J(x)|\leq k$ esetén legyen

$$\gamma_0(x)=\min\{\gamma\,|\,|\{i\,|\,x_i\geq 0_{C_\gamma}\}|\leq k\}.$$

Jelöljük r_{γ_0}-lal L-nek C_{γ_0}-ra történő retrakcióját, és legyen

$$H(x)=\{i\,|\,x_i\geq 0_{C_{\gamma_0}}\}=\{i_1,\dots,i_s\}.$$

Végül definiáljuk f-et így:

$$f(x_1,\dots,x_{k+\ell+1})=f_{\gamma_0}(r_{\gamma_0}(x_{i_1}),\dots,r_{\gamma_0}(x_{i_s}),0_{C_{\gamma_0}},\dots,0_{C_{\gamma_0}}).$$

Ha $|I(x)|\leq \ell$ teljesül, akkor f-et a fentiek szerint, duális módon definiáljuk.

Világos, hogy f fixpontmentes. Megmutatjuk, hogy f rendezéstartó is. Legyen $x\leq y$ $(x,y\in L^{k+\ell+1})$. Ha $|J(x)|\leq k$ és $|I(y)|\leq \ell$, akkor $f(x)\in C_\gamma$ és $f(y)\in D_\delta$ valamely $\gamma\in\alpha$-ra és $\delta\in\beta^d$-re, így az $f(x)\leq f(y)$ feltétel triviálisan teljesül. Ha $|J(y)|\leq k$, akkor szükségképpen $|J(x)|\leq k$ is fennáll, és ugyancsak fennáll a $\gamma_0(x)\leq\gamma_0(y)$ reláció. Ha $\gamma_0(x)<\gamma_0(y)$, akkor $f(x)\in C_{\gamma_0}(x)$ és $f(y)\in C_{\gamma_0}(y)$ miatt $f(x)\leq f(y)$ ismét triviálisan teljesül. Feltehetjük tehát, hogy $\gamma_0(x)=\gamma_0(y)=\gamma_0$. Most $H(x)\subseteq H(y)$, azaz

$$H(x)=\{i_1,\dots,i_s\}\subseteq\{i_1,\dots,i_s\}\dot{\cup}\{k_1,\dots,k_r\}=\{j_1,\dots,j_t\}=H(y).$$

Mivel f_{γ_0} szimmetrikus és rendezéstartó, írhatjuk, hogy

$$f(x_1,\dots,x_{k+\ell+1})=f_{\gamma_0}(r_{\gamma_0}(x_{i_1}),\dots,r_{\gamma_0}(x_{i_s}),0_{C_{\gamma_0}},\dots,0_{C_{\gamma_0}})\leqslant$$

$$f_{\gamma_0}(r_{\gamma_0}(y_{i_1}),\dots,r_{\gamma_0}(y_{i_s}),r_{\gamma_0}(y_{k_1}),\dots,r_{\gamma_0}(y_{k_r}),0_{C_{\gamma_0}},\dots,0_{C_{\gamma_0}})=$$

$$=f_{\gamma_0}(r_{\gamma_0}(y_{j_1}),\dots,r_{\gamma_0}(y_{j_t}),0_{C_{\gamma_0}},\dots,0_{C_{\gamma_0}})=f(y_1,\dots,y_{k+\ell+1}).$$

Ha $|I(x)|\leqslant\ell$, akkor $|I(y)|\leqslant\ell$ is teljesül, és a fentiekhez képest duális módon érvelhetünk. □

<u>8.4. Következmény.</u> Legyenek α és β limeszrendszámok, és tegyük fel, hogy minden $\gamma\in\alpha$-ra C_γ olyan lánc, melyre $\varrho(C_\gamma)=k$, valamint minden $\delta\in\beta^d$-re D_δ olyan lánc, melyre $\varrho(D_\delta)=\ell$. Ekkor

$$\varrho((\bigoplus_{\gamma\in\alpha}C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d}D_\delta))=k+\ell.$$

Bizonyítás. „$\leqslant$" a 8.2. Állítás következménye, „$\geqslant$" a 8.3. Állítás következménye. □

Az előző fejezet 7.2. Tételét általánosítja láncokra a

<u>8.5. Tétel.</u> Egy korlátos C lánc akkor és csak akkor n-fixpontmentes, ha vannak olyan k és ℓ nem-negativ egész számok, melyekre $k+\ell=n-1$, és C-nek van egy

$$(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)$$

alakú retraktuma, ahol α és β limeszrendszámok és minden $\gamma\in\alpha$-ra C_γ korlátos k-fixpontmentes lánc, valamint minden $\delta\in\beta^d$-re D_δ korlátos ℓ-fixpontmentes lánc.

Bizonyítás. Az elégségesség a 8.3. Állításból következik.

Tegyük most fel, hogy $f:C^n\to C$ fixpontmentes rendezéstartó leképezés. Legyen

$\mathfrak{I}=\{I \mid I=[u,v]$ valamely $u,v\in C$-re és I zárt f-re nézve$\}$.

Minden $[u,v]=I\in\mathfrak{I}$ intervallumra definiáljuk az $S(I)$ halmazt a következőképpen:

$S(I)=\{0\le i\le n-1 \mid \exists\ \bar{u},\bar{v}\in I$, melyre $\bar{u}<\bar{v}$, $[u,\bar{u}]$ i-fixpontmentes és $[\bar{v},v]\in\mathfrak{I}\}$.

Mivel $0\in S(I)$ mindig teljesül (az $\bar{u}=u$ és a $\bar{v}=f(u,\dots,u)$ választással), $S(I)\ne\emptyset$. Legyen

$k=\min_{I\in\mathfrak{I}} \max S(I)$, és legyen $\ell=n-1-k$.

Rögzítsünk egy $[a,b]=J\in\mathfrak{I}$ intervallumot, melyre $\max S(J)=k$. Ekkor minden olyan $[u,v]=I\in\mathfrak{I}$ intervallum esetén, melyre $I\subseteq J$ is teljesül, fennáll a $\max S(I)=k$ egyenlőség. Valóban, $\max S(I)\ge k$ világos, másrészt ha $[u,\bar{u}]$ i-fixpontmentes és $[\bar{v},v]\in\mathfrak{I}$ $(\bar{u}<\bar{v})$, akkor $[a,\bar{u}]$ is i-fixpontmentes és $[\bar{v},b]\in\mathfrak{I}$ is fennáll, azaz $\max S(I)\le\max S(J)=k$. Minden olyan $[u,v]=I\in\mathfrak{I}$-re, melyre $I\subseteq J$ is teljesül, rögzítsük az $\bar{u}(I)<\bar{v}(I)\in I$ elemeket úgy, hogy $[u,\bar{u}(I)]$ k-fixpontmentes legyen és $[\bar{v}(I),v]\in$ $\in\mathfrak{I}$ is teljesüljön.

Minden γ rendszámra definiáljuk az I_γ intervallumot a következőképpen:

$$I_0 = J \;;$$

ha $\gamma=\delta+1$ és I_δ korlátos, akkor legyen $I_\gamma=[\bar{v}(I_\delta),b]$;
ha $\gamma=\delta+1$ és I_δ nem korlátos, akkor legyen $I_\gamma=I_\delta$;
ha γ limeszrendszám és valamely $v\in\bigcap_{\delta<\gamma} I_\delta$ -ra $[v,b]\in\mathfrak{J}$, akkor legyen $I_\gamma=[v,b]$;
ha γ limeszrendszám és minden $v\in\bigcap_{\delta<\gamma} I_\delta$ -ra $[v,b]\notin\mathfrak{J}$, akkor legyen $I_\gamma=\bigcap_{\delta<\gamma} I_\delta$.

Legyen α az első olyan rendszám, melyre I_α (alulról) nem korlátos. Világos, hogy α limeszrendszám, továbbá minden $\gamma\in\alpha$-ra $I_\gamma\in\mathfrak{J}$ és $I_\alpha=\bigcap_{\gamma\in\alpha} I_\gamma$. Minden $\gamma\in\alpha$-ra legyen a_γ I_γ legkisebb eleme, azaz $I_\gamma=[a_\gamma,b]$ $(\gamma\in\alpha)$.

1. eset: $0\leq k=\max S(J)\leq n-2$.
I_α definíciója alapján $f(u,\dots,u)\leq u$ bármely $u\in I_\alpha$-ra, másrészt minden $u\in I_\alpha$-ra

$$f(\underbrace{a,\dots,a}_{\ell\text{-szer}},\underbrace{u,\dots,u}_{(k+1)\text{-szer}})$$

Valóban, ha $\bar{u}=f(a,\dots,a,u,\dots,u)\notin I_\alpha$, akkor valamely $\gamma\in\alpha$ -ra $\bar{u}<a_\gamma=\bar{v}$. Világos, hogy ekkor $[a,\bar{u}]$ zárt a $g(x_1,\dots,x_{k+1}) = f(a,\dots,a,x_1,\dots,x_{k+1})$ leképezésre, továbbá $[\bar{v},b]\in I$, azaz $\max S(J)\geq k+1$, ami ellentmondás (itt használtuk ki a $k\leq n-2$ feltételt).

Minden γ rendszámra definiáljuk w_γ-t a következőképpen:

$$w_0 = b \;;$$

ha $\gamma=\delta+1$ és $w_\delta \neq a$, akkor legyen

$$w_\gamma = f(\underbrace{a,\dots,a}_{\ell\text{-szer}},\underbrace{w_\delta,\dots,w_\delta}_{(k+1)\text{-szer}}) \;;$$

ha $\gamma=\delta+1$ és $w_\delta=a$, akkor legyen $w_\gamma=a$;

ha γ limeszrendszám és $\{w_\delta \mid \delta<\gamma\}$ nem koiniciális I_α-ban, akkor legyen w_γ a $\{w_\delta \mid \delta<\gamma\}$ egy alsó korlátja I_α-ban;

ha γ limeszrendszám és $\{w_\delta \mid \delta<\gamma\}$ koiniciális I_α-ban, akkor legyen $w_\gamma=a$.

Legyen β az első olyan rendszám, melyre $w_\beta=a$. Világos, hogy β limeszrendszám.

Minden $\gamma\in\alpha$-ra legyen

$$C_\gamma = [a_\gamma, \bar{u}(I_\gamma)] \quad \text{és}$$

minden $\delta\in\beta$-ra legyen

$$D_\delta = [w_{\delta+1},\; g_\delta(w_\delta,\dots,w_\delta)],$$

ahol $g_\delta(x_1,\dots,x_\ell)=f(x_1,\dots,x_\ell,w_\delta,\dots,w_\delta)$. C_γ-k definíció szerint k-fixpontmentesek. D_δ-k ℓ-fixpontmentesek, mert D_δ zárt g_δ-ra nézve, és g_δ nyilvánvalóan fixpontmentes. $\bar{u}(I_\gamma)<\bar{v}(I_\gamma)=a_{\gamma+1}$ és $g_\delta(w_\delta,\dots,w_\delta)<w_\delta$ miatt

$$L=(\bigcup_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\cup(\bigcup_{\delta\in\beta^d} D_\delta) = (\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta).$$

C_γ-k és D_δ-k illetve α és β definíciója szerint nincs olyan $x\in C$, melyre $x\in(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)^*$ és $x\in(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)_*$ egyszerre teljesülnek, így L retraktuma C-nek. Valóban, ha az $r:C\to L$ leképezést a következőképpen definiáljuk:

$$r(x)=\begin{cases} x & \text{ha } x\in L;\\ a_\gamma & \text{ha } x\in(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)_*\setminus L \text{ és } \gamma=\min\{\gamma'\mid x\leq a_{\gamma'}\};\\ 1_{D_\delta} & \text{ha } x\in(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)^*\setminus L \text{ és } \delta=\min\{\delta'\mid x\geq 1_{D_{\delta'}}\},\end{cases}$$

akkor r retrakció L-re.

2. eset: $k=\max S(J)=n-1$.

Definiáljuk a C_γ-kat ugyanúgy, mint az 1.esetnél és legyen $\{w_\delta \mid \delta\in\beta\}$ egy duálisan jólrendezett koiniciális lánc I_α-ban. Ha $D_\delta=\{w_\delta\}$ $(\delta\in\beta)$, akkor $(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} C_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} D_\delta)$ retraktuma lesz C-nek. □

A most bizonyított tétel jelentősége abban van, hogy az n-fixpont tulajdonságot visszavezeti k-fixpont tulajdonságra, ahol $k<n$.

Ha a lexikografikus összegben minden tag korlátos, és az indexhalmaz lánc, akkor természetes módon vetődik fel a lexikografikus összegzésnek egy olyan módosított változata, amikor P_i legnagyobb elemét és P_j legkisebb elemét azonosítjuk $i\prec j$ estén. Célszerű azonban ettől az azonosítástól eltekinteni, ha P_i vagy P_j egyelemű.

Legyen I lineárisan rendezett indexhalmaz, és legyen minden $i\in I$-re P_i korlátos rendezett halmaz. P_i-ket "majdnem diszjunktaknak" képzeljük -ha nem ilyenek, akkor helyettük alkalmas, velük izomorf példányokat tekintünk-, azaz $i<j$-re

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} 1_{P_i} = 0_{P_j} & \text{ha } i \prec j \text{ és } |P_i|, |P_j| > 1, \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\bigoplus_{i\in I} P_i = \left(\bigcup_{i\in I} P_i ; \left(\bigcup_{i\in I} \leq_{P_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i<j} P_i \times P_j\right)\right)$$

definiálja a P_i-k I szerinti új típusú összegét.

Könnyű ellenőrizni, hogy a 8.4. Következmény (a 8.2. és a 8.3. Állításokkal együtt) érvényben marad, ha benne $\oplus$ helyett $\bigoplus$-t írunk. Ha tehát a 8.4. Következmény alapján a $\bigoplus$ jellel olyan X_γ illetve Y_δ láncokat "ragasztunk össze", melyekre $\varrho(X_\gamma)=k$ és $\varrho(Y_\delta)=\ell$, akkor olyan C láncot kapunk, melyre $\varrho(C)=n=k+\ell$. A következő tétel azt mondja ki, hogy lényegében minden olyan C lánc így áll elő, melyre $\varrho(C)=n$.

<u>8.6. Tétel.</u> Ha a C korlátos láncra $2\leq \varrho(C)=n$, akkor van olyan $u,v\in C$ és van olyan $k,\ell\in \mathbb{N}$, melyekre $u<v$, $k+\ell=n$ és $[u,v]$ előáll

$$[u,v] = \left(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} X_\gamma\right) \oplus \left(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} Y_\delta\right)$$

alakban, ahol α és β alkalmas limeszrendszámok, X_γ $(\gamma\in\alpha)$ és Y_δ $(\delta\in\beta^d)$ pedig olyan korlátos láncok, melyekre $\varrho(X_\gamma)=k$ és

$\varrho(Y_\delta)=\ell$ teljesül.

Bizonyítás. A 8.5. Tétel szerint C-nek van egy

$$(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} V_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} W_\delta)$$

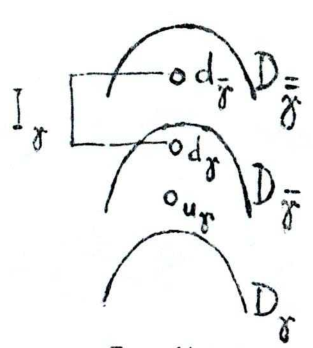
alakú retraktuma, ahol α,β limeszrendszámok és valamely $k+\ell=n-2$ nem-negatív egészekre V_γ $(\gamma\in\alpha)$ k-fixpontmentes és W_δ $(\delta\in\beta^d)$ ℓ-fixpontmentes.

Tegyük fel, hogy valamely $\gamma\in\alpha$-ra $\sup\{1_{V_{\gamma'}} \mid \gamma'<\gamma\}$ nem létezik (ekkor γ limeszrendszám). Legyen $D_\gamma=\bigcup_{\gamma'<\gamma}(1_{V_{\gamma'}}]$ és legyen $U_\gamma=C\setminus D_\gamma$ ($(x]$ illetve $[x)$ jelöli az x által generált ideált illetve duális ideált). D_γ-nak nincs szuprémuma, U_γ-nak nincs infimuma. Tetszőleges $d\in D_\gamma$ és $u\in U_\gamma$ esetén $[d,u]$ $(k+1)$-fixpontmentes. Valóban, legyen $\gamma_0<\gamma$ olyan, hogy $1_{V_{\gamma_0}}\geq d$ és legyen W duálisan jólrendezett koiniciális lánc $U_\gamma\cap(u]$-ban. Ekkor $(\bigoplus_{\gamma_0<\gamma\in\alpha} V_\gamma)\oplus W$ retraktuma $[d,u]$-nak, és a 8.3. Állítás szerint $(k+1)$-fixpontmentes.

Legyen

$$H=\{\gamma\in\alpha \mid \sup\{1_{V_{\gamma'}} \mid \gamma'<\gamma\} \text{ nem létezik}\}.$$

Tegyük fel, hogy H kofinális α-ban. $\gamma\in H$-ra jelölje $\bar{\gamma}$ γ H-beli rákövetkezőjét, és minden $\gamma\in H$-ra definiáljuk a d_γ, u_γ elemeket a következőképpen: legyenek $d_\gamma, u_\gamma\in D_{\bar{\gamma}}\setminus D_\gamma$ olyanok, hogy $u_\gamma<d_\gamma$. $\gamma\in H$-ra legyen $I_\gamma=[d_\gamma,u_{\bar{\gamma}}]$ (ld.7.ábra).



7. ábra

A fentiek szerint I_γ-k $(k+1)$-fixpontmentesek, továbbá $C_0=(\bigoplus_{\gamma\in H} I_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} W_\delta)$ retraktuma C-nek. A 8.3. Állítás szerint C_0- és így C is - n-fixpontmentes, ez ellentmondás. Tehát H nem kofinális α-ban, azaz van olyan $\gamma_0\in\alpha$, melyre minden $\gamma_0<\gamma\in\alpha$ esetén az $\{1_{V_{\gamma'}}|\gamma'<\gamma\}$ halmaznak van szuprémuma. Minden $\gamma_0<\gamma\in\alpha$-ra legyen $X_\gamma=[\sup\{1_{V_{\gamma'}}|\gamma'<\gamma\}, 1_{V_\gamma}]$. Világos, hogy $X_\gamma\supseteq V_\gamma$ és $\varsigma(X_\gamma)\geq\varsigma(V_\gamma)\geq k+1$. Tegyük fel, hogy $H_0=\{\gamma_0<\gamma\in\alpha|\varsigma(X_\gamma)>k+1\}$ kofinális α-ban. $\gamma\in H_0$-ra legyen $f_\gamma : X_\gamma \xrightarrow{k+1} X_\gamma$ fixpontmentes rendezéstartó leképezés. $\overline{X}_\gamma = [f_\gamma(0_{X_\gamma},\dots,0_{X_\gamma}),1_{X_\gamma}]$ is $(k+1)$-fixpontmentes, és $\gamma_1,\gamma_2\in H_0$-ra $\overline{X}_{\gamma_1}\cap\overline{X}_{\gamma_2}=\emptyset$, vagyis $\bigcup_{\gamma\in H_0}\overline{X}_\gamma=\bigoplus_{\gamma\in H_0}\overline{X}_\gamma$. Így $(\bigoplus_{\gamma\in H_0}\overline{X}_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} W_\delta)$ a 8.3. Állítás szerint n-fixpontmentes és mivel retraktuma C-nek, C is n-fixpontmentes, ami ellentmondás. Van tehát olyan $\gamma_0\leq\gamma_1\in\alpha$, melyre $\varsigma(X_\gamma)=k+1$ teljesül minden $\gamma_1<\gamma\in\alpha$ esetén. Legyen $u=1_{X_{\gamma_1}}$ és definiáljuk duális módon δ_0-t, δ_1-et, Y_δ-kat és v-t. Világos, hogy

$$[u,v]=(\bigoplus_{\gamma_1<\gamma\in\alpha} X_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta_1>\delta\in\beta^d} Y_\delta),$$

ami a tétel állítását bizonyítja. □

Előfordulhat, hogy a C láncnak van olyan $C=C_1\oplus C_2$ felbontása, melyre $\varsigma(C)=\varsigma(C_1)=\varsigma(C_2)=n$. Nevezzünk egy ilyen felbontást n-felbontásnak, és nevezzük a C láncot n-felbonthatatlannak, ha ilyen felbontása nincs, és $\varsigma(C)\leq n$.

A következő tétel bizonyításához szükségünk lesz a szelet fogalmára. Jól ismertek a Dedekind-szeletek, melyeket

Dedekind a valós számok pontos bevezetéséhez használt. Lényegében Dedekind gondolatmenetét általánosította MacNeille [10], amikor tetszőleges rendezett halmazon definiálta a szeleteket, és segítségükkel megadta a rendezett halmazok egy kanonikus teljessé tételét. Ha P egy rendezett halmaz és $A,B \subseteq P$, akkor az (A,B) pár szelet, ha teljesül a következő három feltétel:

(i) minden $a \in A$-ra és minden $b \in B$-re $a \leq b$;

(ii) ha minden $a \in A$-ra $x \geq a$, akkor $x \in B$;

(iii) ha minden $b \in B$-re $y \leq b$, akkor $y \in A$.

A szeletek halmaza természetes módon rendezett halmazzá tehető: $(A,B) \leq (A',B') \Longleftrightarrow A \subseteq A'$; és ezzel a rendezéssel a szeletek halmaza teljes háló. Továbbá P-nek természetes beágyazását adja a szeletek halmazába az $x \to ((x],[x))$ megfeleltetés.

<u>8.7. Tétel.</u> Tegyük fel, hogy a C láncra $\varsigma(C)=n<\infty$. Ekkor megadható egy I teljes lánc, és minden $i \in I$-re egy C_i lánc úgy, hogy $C=\bigoplus_{i \in I} C_i$ és C_i n-felbonthatatlan.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $n \geq 2$. Tekintsük C azon D ideáljainak ($d \in D$ és $d' \leq d$, akkor $d' \in D$) halmazát, melyekre D szuprémuma (és így $C \setminus D$ infimuma) nem létezik valamint D és $C \setminus D$ előállnak

$$D=\bigoplus_{\gamma \in \alpha} X_\gamma \quad \text{illetve} \quad C \setminus D=\bigoplus_{\delta \in \beta^d} Y_\delta$$

alakban, ahol α és β limeszrendszámok és valamely $k+\ell=n$-re $\varrho(X_\gamma)\geq k$ $(\gamma\in\alpha)$ és $\varrho(Y_\delta)\geq\ell$ $(\delta\in\beta^d)$. Legyen ezen D ideálok halmaza $\mathcal{D}$. A 8.6. Tétel szerint $\mathcal{D}\neq\emptyset$, továbbá $\mathcal{D}$ a tartalmazásra nézve lánc.

1. észrevétel. Ha $D\in\mathcal{D}$, akkor tetszőleges $d\in D$-re és $u\in C\setminus D$-re $\varrho([d,u])=n$.

Valóban, mint a 8.6. Tétel bizonyításában, X_γ-k és Y_δ-k helyett tekinthetünk olyan $\bar{X}_\gamma$-okat és $\bar{Y}_\delta$-okat, melyekre $\varrho(\bar{X}_\gamma)=\varrho(X_\gamma)$ illetve $\varrho(\bar{Y}_\delta)=\varrho(Y_\delta)$, továbbá

$$\Big(\bigoplus_{\gamma_0<\gamma\in\alpha}\bar{X}_\gamma\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\delta_0>\delta\in\beta^d}\bar{Y}_\delta\Big)$$

retraktuma $[d,u]$-nak.

2. észrevétel. Ha $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}$ és $\mathcal{E}$ maximuma nem létezik, akkor $\sup(\bigcup\mathcal{E})$ létezik.

Valóban, legyen $D=\bigcup\mathcal{E}$, és tegyük fel, hogy D szuprémuma nem létezik. Ekkor $C\setminus D$ infimuma sem létezik. Legyen U_0 $C\setminus D$-ben duálisan jólrendezett koiniciális lánc. Legyen $(D_\gamma\mid\gamma\in\alpha)$ növekvő kofinális lánc $\mathcal{E}$-ben és $\gamma\in\alpha$-ra rögzítsük a $d_\gamma,u_\gamma\in D_{\gamma+1}\setminus D_\gamma$ elemeket úgy, hogy $d_\gamma>u_\gamma$, továbbá legyen $I_\gamma=[d_\gamma,u_{\gamma+1}]$ $(\gamma\in\alpha)$. Az 1. észrevétel szerint $\varrho(I_\gamma)=n$; a 8.4. Következmény alapján $\varrho((\bigoplus_{\gamma\in\alpha}I_\gamma)\oplus U_0)=n+1$. Mivel $(\bigoplus_{\gamma\in\alpha}I_\gamma)\oplus U_0$ retraktuma C-nek, ellentmondáshoz jutottunk.

Hasonlóan látható be a

3. észrevétel. Ha $\mathcal{E}\leq\mathcal{D}$ és $\mathcal{E}$-nek nincs legkisebb eleme, akkor $\sup(\bigcap\mathcal{E})$ létezik.

Legyen

$$\mathcal{I} = \{ i = (A_i, B_i) \mid \ i \text{ szelet } \mathcal{D}\text{-ben} \} .$$

Mivel I a $\mathcal{D}$ lánc MacNeille-féle teljessé tétele, I teljes lánc. Minden $i \in \mathcal{I}$-re definiáljunk egy $a_i \in C$-t a következőképpen:

$$a_i = \begin{cases} D \setminus E \text{ egy eleme} & \text{ha } i = ((D], [D)) \text{ és } E = \\ & \max\{D' \in \mathcal{D} \mid D' \subset D\}, \\ \sup(\bigcup\{D' \in \mathcal{D} \mid D' \subset D\}) & \text{ha } i = ((D], [D)) \text{ és} \\ & \{D' \in \mathcal{D} \mid D' \subset D\}\text{-nek nincs legnagyobb} \\ & \text{eleme,} \\ \sup(\bigcup A_i) & \text{ha } A_i \text{ szuprémuma nem létezik.} \end{cases}$$

Minden $i \in I$-re definiáljunk egy $b_i \in C$-t is az alábbiak szerint:

$$b_i = \begin{cases} a_j & \text{ha } i = ((D], [D)) \text{ és } E = \min\{D' \in \mathcal{D} \mid D' \supset D\} \\ & \text{és } j = ((E], [E)), \\ \sup(\bigcap\{D' \in \mathcal{D} \mid D' \supset D\}) & \text{ha } i = ((D], [D)) \text{ és } \{D' \in \mathcal{D} \mid D' \supset D\}\text{-nek} \\ & \text{nincs legkisebb eleme,} \\ \sup(\bigcap B_i) & \text{ha } A_i \text{ szuprémuma nem létezik.} \end{cases}$$

A 2. és 3. észrevétel alapján a_i-k és b_i-k jóldefiniáltak. Könnyű ellenőrizni, hogy minden $i \in I$-re $a_i \leq b_i$ (C-ben), és ha $i < j$ (I-ben), akkor $b_i \leq a_j$. a_i-k és b_j-k definíciója alapján az is világos, hogy ha $i \prec j$ (I-ben), akkor $b_i = a_j$.

Legyen $C_i = [a_i, b_i]$ $(i \in I)$. Elegendő most már megmutatni, hogy $\bigcup_{i \in I} C_i = C$ és C_i n-felbonthatatlan $(i \in I)$.

Legyen $x \in C$ tetszőleges és legyen $\mathcal{E}_x = \{D \in \mathcal{D} \mid x \notin D\}$. Ha $\mathcal{E}_x$-nek van legnagyobb eleme és ez D, valamint $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x$-nek van legkisebb eleme és ez E, akkor $x \in C_i$ vagy $x \in C_j$, ahol $i = ((D], [D))$, $j = ((E], [E))$. Ha sem $\mathcal{E}_x$-nek, sem $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x$-nek nincs legnagyobb eleme, akkor $i = (\mathcal{E}_x, \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x) \in I$ és $\sup(\bigcup \mathcal{E}_x) \leq x \leq \sup(\bigcap(\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x))$ miatt $x \in C_i$. Tegyük fel, hogy $D = \max \mathcal{E}_x$ és $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x$-nek nincs legkisebb eleme. Most $i = (\mathcal{E}_x, \{D\} \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x)) \in I$ és $a_i \leq x \leq b_i$, azaz $x \in C_i$. Hasonlóan tárgyalható az az eset, amikor $\mathcal{E}_x$-nek nincs legnagyobb eleme, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}_x$-nek van legkisebb eleme.

$\varrho(C_i) \leq n$ világos. Ha A_i-nek nincs legnagyobb eleme (és ekkor B_i-nek sincs legkisebb eleme), akkor $a_i = \sup(\bigcup A_i)$ és $b_i = \sup(\bigcap B_i)$. Mivel nincs olyan $D \in \mathcal{D}$, melyre $D' \subsetneq D \subsetneq D''$ teljesülne minden $D' \in A_i$ és $D'' \in B_i$ esetén, ezért $[a_i, b_i] = C_i$ nem lehet (n-1)-fixpontmentes (8.6.Tétel), azaz $\varrho(C_i) \leq n-1$. Tegyük most fel, hogy $i = ((D], [D))$ alakú. Mivel $a_i \in D$ és $b_i \in C \setminus D$, $\varrho(C_i) = n$. Továbbá tetszőleges $D' \subset D$-re $a_i \notin D'$ és tetszőleges $D'' \supset D$-re $b_i \notin C \setminus D''$. Ha $c \in [a_i, b_i]$, akkor $c \in D$ vagy $c \in C \setminus D$. Az első esetben $\varrho([a_i, c]) < n$ (különben $a_i \in D'$ lenne valamely $D' \subset D$-re), a második esetben $\varrho([c, b_i]) < n$ (különben $b_i \in C \setminus D''$ lenne valamely $D'' \supset D$-re), azaz C_i n-felbonthatatlan. $\square$

A most bizonyított tételben szereplő felbontás nem egyértelmű, de minimális abban az értelemben, hogy ha $C=\bigoplus_{j\in J} C_j$ egy másik felbontás, akkor I beágyazható J-be. A 8.7. Tétel jelentősége abban áll, hogy áttekinthetővé és kezelhetőbbé teszi a láncokat az általánosított fixpont tulajdonság szempontjából. Megjegyezzük még, hogy a $\varrho(C)=1$ eset triviálisnak tekinthető: C akkor és csak akkor 1-felbonthatatlan, ha 1-elemű, így $C=\bigoplus_{c\in C}\{c\}=\bigoplus_{c\in C}\{c\}$ a triviális (és egyetlen) felbontás.

<u>8.8. Tétel.</u> Az I (korlátos) lánc minden i elemére legyen C_i (korlátos) lánc, és legyen $\varrho(I)=m$, $\varrho(C_i)=n$ $(i\in I)$. Ekkor $\varrho(\bigoplus_{i\in I} C_i)=mn$.

Bizonyítás. (a) m-szerinti indukcióval belátjuk a következőt: ha $\varrho(I)\geq m$ és $\varrho(C_i)=n$ $(i\in I)$, akkor $\varrho(\bigoplus_{i\in I} C_i)\geq m\cdot n$.

m=1-re az állítás triviális. Legyen $m>1$ és tekintsük I-nek egy a 8.5. Tételből adódó $(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} X_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} Y_\delta)$ alakú retraktumát, ahol valamely $k,l\in\mathbb{N}$-re $k+l=m$ és $\varrho(X_\gamma)\geq k$ $(\gamma\in\alpha)$, $\varrho(Y_\delta)\geq l$ $(\delta\in\beta^d)$.

A lexikografikus összegzés alapvető tulajdonsága, az általános asszociativitás miatt

$$C=\bigoplus_{i\in(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} X_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} Y_\delta)} C_i=(\bigoplus_{\gamma\in\alpha}(\bigoplus_{i\in X_\gamma} C_i))\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d}(\bigoplus_{j\in Y_\delta} C_j)),$$

továbbá C retraktuma $\bigoplus_{i\in I} C_i$-nek. Mivel $k,l<m$, az indukciós hipotézis értelmében $\varrho(\bigoplus_{i\in X_\gamma} C_i)\geq k\cdot n$ $(\gamma\in\alpha)$, és $\varrho(\bigoplus_{j\in Y_\delta} C_j)\geq l\cdot n$ $(\delta\in\beta^d)$. A 8.3. Állításból pedig $\varrho(C)\geq kn+ln=m\cdot n$ adódik.

(b) m szerinti indukcióval belátjuk, hogy ha $\varrho(I)=m$ és $\varrho(C_i)=n$ $(i\in I)$, akkor $\varrho(\bigoplus_{i\in I} C_i)\leq m\cdot n$.

Ha $m=1$, akkor az állítás az 5.6. Állítás következménye. Legyen $m>1$ és legyen $I=\bigoplus_{t\in T} I_t$ a 8.7. Tételből adódó felbontás. Mivel I retraktuma $J=\bigoplus_{t\in T} I_t$-nek, $\bigoplus_{i\in I} C_i$ retraktuma $\bigoplus_{j\in J} C_j$-nek (itt $C_j=C_{r(i)}$, ahol r a természetes retrakció J-ről I-re). Továbbá $\varrho(J)=m$ is teljesül, így elegendő belátni, hogy $\varrho(\bigoplus_{j\in J} C_j)\leq m\cdot n$. Az asszociativitás szerint

$$\bigoplus_{j\in J} C_j = \bigoplus_{t\in T}(\bigoplus_{j\in I_t} C_j),$$

így az 5.6. Állítást felhasználva elegendő megmutatni, hogy minden $t\in T$-re $\varrho(\bigoplus_{j\in I_t} C_j)\leq m\cdot n$.

Ha $\varrho(I_t)<m$, akkor az állítás azonnal adódik az indukciós feltevésből. Ha $\varrho(I_t)=m$, akkor I_t-nek van egy

$$I_t = U\oplus(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} X_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d} Y_\delta)\oplus V$$

alakú előállítása, ahol valamely $k+l=m$-re $\varrho(X_\gamma)=k$ $(\gamma\in\alpha)$ és $\varrho(Y_\delta)=l$ $(\delta\in\beta^d)$ (8.6.Tétel). Mivel I_t m-felbonthatatlan, $\varrho(U)$, $\varrho(V)<m$. Mivel I_t retraktuma a

$$J_t=U\oplus(\bigoplus_{\gamma\in\alpha} X_\gamma)\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta} {}_dY_\delta)\oplus V$$

láncnak, elég belátni, hogy $\varrho(\bigoplus_{j\in J_t} C_j)\leq m\cdot n$. Ismét az asszociativitást felhasználva írhatjuk:

$$\bigoplus_{j\in J_t} C_j = (\bigoplus_{j\in U} C_j)\oplus(\bigoplus_{\gamma\in\alpha}(\bigoplus_{j\in X_\gamma} C_j))\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta^d}(\bigoplus_{j\in Y_\delta} C_j))\oplus(\bigoplus_{j\in V} C_j)$$

és $\varrho(U),\varrho(V),k,l<m$ miatt alkalmazhatjuk az indukciós hipotézist.

A 8.2. Állitás szerint $\varrho((\bigoplus_{\gamma\in\alpha}(\bigoplus_{j\in X_\gamma} C_j))\oplus(\bigoplus_{\delta\in\beta}(\bigoplus_{j\in Y_\delta} C_j)))\leq kn+ln=m\cdot n$

és az 5.6. Állítás alapján ekkor $\varrho(\bigoplus_{j\in J_t} C_j)\leq m\cdot n$ is teljesül. $\square$

9. 1-magasságú rendezett halmazok

A fixpont probléma kielégítő megoldása - a rendezett halmazok magassága szempontjából - csak 1-magasságú rendezett halmazokra ismeretes. Az erre vonatkozó R.Nowakowski--tól és I. Rival-től származó tételt a 3. fejezetben már említettük (3.6.Tétel):

Egy 1-magasságú rendezett halmaz akkor és csak akkor rendelkezik a fixpont tulajdonsággal, ha nem retraktuma 2, a kételemű antilánc; C_{2n}, a 2n-korona és F_ω, a végtelen kerítés.

Látni fogjuk, hogy összefüggő, 1-magasságú rendezett halmazokra a 2-fixpont tulajdonság és az n-fixpont tulajdonság ($n>2$) teljesülése ekvivalens.

9.1. Tétel. Legyen P összefüggő, 1-magasságú rendezett halmaz. P akkor és csak akkor rendelkezik a 2-fixpont tulajdonsággal, ha P-nek nem retraktuma F_ω, a végtelen kerítés.

Bizonyítás. Rendezett halmazokon a $d:P\times P \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ távolság függvényt a következőképpen szokás definiálni:

$$d(x,y)=\inf\{|F|-1 \mid x,y\in F \text{ és } F \text{ kerítés } P\text{-ben}\}.$$

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $f:P \xrightarrow{2} P$ fixpontmentes rendezéstartó leképezés. Legyen $x_0\in P$ rögzített, és definiáljuk az $f_{x_0}:P\to P$

rendezéstartó leképezést az $f_{x_0}(y)=f(x_0,y)$ egyenlőséggel. Mivel f fixpontmentes, f_{x_0} is az. Tetszőleges $y\in P$-re P összefüggősége miatt $d(y,f_{x_0}(y))<\infty$ teljesül. Tegyük fel, hogy $y_0\in P$-re $d_0=d(y_0,f_{x_0}(y_0))$ minimális, és legyen $y_0,y_1,\dots,y_{d_0}=f_{x_0}(y_0)$ egy minimális y_0-t és $f_{x_0}(y_0)$-t összekötő kerítés. Mivel f_{x_0} fixpontmentes, $d_0\geq 2$. (Az 5.3. Állítás miatt $d_0=1$ nem teljesülhet.) Az is világos, hogy d_0 páros szám. Ha ugyanis d_0 páratlan, akkor $y_0\in \min(P)$ és $f_{x_0}(y_0)\in \max(P)$ vagy $y_0\in \max(P)$ és $f_{x_0}(y_0)\in \min(P)$ ($\ell(P)=1$). Mindkét esetben az $f_{x_0}(y_1)=f_{x_0}(y_0)$ egyenlőség adódnék, ami ellentmond d_0 minimalitásának.

Minden $t>d_0$ egész számra legyen $y_t=f_{x_0}(y_{t-d_0})$. Újra d_0 minimalitása miatt, minden $t\geq 0$-ra $d(y_t,y_{t+d_0})=d_0$ és $y_t,y_{t+1},\dots,y_{t+d_0}$ y_t-t és y_{t+d_0}-t összekötő kerítés.

1. eset: Van olyan s és t, hogy $s<t$ és $y_s=y_t$.

Ekkor van olyan s_0 és t_0, hogy $s_0<t_0$, $y_{s_0}=y_{t_0}$ és t_0-s_0 minimális. Most $y_{s_0},y_{s_0+1},\dots,y_{t_0-1}$ páronként különböző elemek.

Legyen

$$C=\{y_{s_0},y_{s_0+1},\dots,y_{t_0-1}\}.$$

t_0-s_0 minimalitása miatt $f_{x_0}\restriction C$ injektiv. Továbbá minden $y\in \min(C)$-hez van legalább két olyan $y',y''\in \max(C)$, melyekre $y<y',y''$ és minden $y\in \max(C)$-hez van legalább két olyan $y',y''\in \min(C)$, melyekre $y>y',y''$. $f_{x_0}\restriction C$ injektivitása miatt ugyanez érvényes $f_{x_0}(C)$-re is. Ezt, valamint azt a tényt felhasználva, hogy $\ell(P)=1$, könnyű belátni, hogy

$$f_{x_0}\restriction C \equiv f_{x_1}\restriction C \equiv \ldots \equiv f_{x_n}\restriction C,$$

ahol $x_0, x_1, \ldots, x_n = u$ egy x_0-t és $f_{x_0}(C)$ egy rögzített u elemét összekötő kerítés (f_{x_i}-t f_{x_0} mintájára definiáltuk). Most $u = f_{x_0}(y)$ valamilyen $y \in C$-re, és így

$$u = f_{x_0}(y) = f_u(y) = f(u,y),$$

azaz (u,y) fixpontja f-nek, ami ellentmondás.

2. eset: $y_0, y_1, \ldots$ páronként különbözők.

Először belátjuk, hogy minden $0 \le s \le t$-re $d(y_s, y_t) = t-s$.

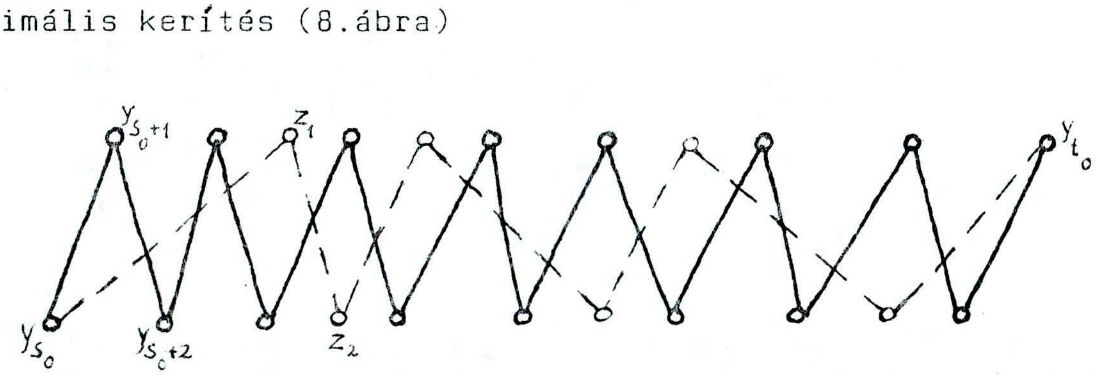
Tegyük fel ugyanis, hogy nem így van, és legyen

$$d_0' = \min\{d(y_s, y_t) \mid d(y_s, y_t) < t-s\}.$$

Legyenek $s_0 < t_0$ olyanok, hogy

$$d_0' = d(y_{s_0}, y_{t_0}) < t_0 - s_0 .$$

Legyen $y_{s_0} = z_0, z_1, \ldots, z_{d_0'} = y_{t_0}$ y_{s_0}-t és y_{t_0}-t összekötő minimális kerítés (8.ábra)



8. ábra

Mivel d_0' minimális, $\{y_{s_0},\dots,y_{t_0}\}\cap\{z_0,\dots,z_{d_0'}\}=\{y_{s_0},y_{t_0}\}$, továbbá ismét d_0' minimalitása miatt $f_{x_0}\restriction C$ injekív, ahol

$$C=\{y_{s_0},\dots,y_{t_0}\}\cup\{z_0,\dots,z_{d_0'}\}.$$

Az 1. esethez hasonlóan ismét teljesül az $f_{x_0}\restriction C=f_{y_{s_0+d_0}}\restriction C$ összefüggés.

Innen

$$y_{s_0+d_0}=f_{x_0}(y_{s_0})=f_{y_{s_0+d_0}}(y_{s_0})=f(y_{s_0+d_0'},y_{s_0})$$

adódik, ami ellentmondás.

Legyen $F=\{y_0,y_1,\dots\}$. Az előbb bizonyított tény azt is jelenti, hogy ha y_i és y_j összhasonlíthatók, akkor $|i-j|\leq 1$, azaz $F\cong F_\omega$ vagy $F\cong F_\omega^d$.

Belátjuk, hogy F retraktuma P-nek. Valóban, legyen $r:P\to F$ az $r(x)=y_{d(y_0,x)}$ egyenlőséggel definiálva. A fentebb bizonyított tény éppen azt jelenti, hogy $r\restriction F=id_F$. Azt kell csak belátni, hogy r rendezéstartó. Legyen $x<x'$, és tegyük fel, hogy $y_0\in\min(P)$, azaz $F\cong F_\omega$ (a duális eset hasonlóan tárgyalható). Most $x\in\min(P)$, $x'\in\max(P)$ és $d(y_0,x)$ páros, $d(y_0,x')$ páratlan, így $|d(y_0,x)-d(y_0,x')|=1$, ezért

$$r(x)=y_{d(y_0,x)}\leqslant y_{d(y_0,x')}=r(x').$$

Végül vegyük észre, hogy F_ω retraktuma F_ω^d-nek. Mivel retraktum retraktuma retraktum, F_ω retraktuma P-nek.

($\Rightarrow$) Elég belátni, hogy $F_\omega\not\models FPP(2)$. Ha $F_\omega=\{x_1,x_2,\dots\}$, mint a 3. ábrán, akkor az

$$f(x_i, x_j) = x_{\max(i,j)+2}$$

egyenlőséggel definiált $f: F_\omega^2 \to F_\omega$ leképezés rendezéstartó és fixpontmentes. □

9.2. Következmény. Az összefüggő, 1-magasságú P rendezett halmazra ekvivalens a következő három feltétel:

(i) P-nek nem retraktuma F_ω;

(ii) $P \models FPP(2)$;

(iii) $P \models FPP(n)$ valamely $n > 2$-re.

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $\varrho(F_\omega) = \infty$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor az

$$f_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = x_{\max(i_1, \ldots, i_n)+2}$$

egyenlőséggel definiált $f_n: F_\omega^n \to F_\omega$ leképezés rendezéstartó és fixpontmentes. □

9.3. Következmény. Ha P összefüggő, 1-magasságú rendezett halmaz, akkor $\varrho(P) = 1, 2$ vagy ∞. □

10. Példák

A 4. fejezetben beláttuk, hogy minden n természetes számra van olyan P_n összefüggő rendezett halmaz, melyre $\varrho(P_n)=n$ teljesül, tényleges példák azonban még nem állnak rendelkezésünkre. Ebben a fejezetben ilyen típusú példákat fogunk megadni.

10.1. Példa. Legyen Q_i fixpontmentes 1-magasságú rendezett halmaz, és tegyük fel, hogy valamely $a_i \in \min(Q_i)$-re és minden $b_i \in \max(Q_i)$-re $a_i \leq b_i$. Ekkor $\varrho(Q_1 x \ldots x Q_{n-1})=n$.

Bizonyítás. Az állítás teljes indukcióval bizonyítható 6.10. és 6.11. felhasználásával.□

10.2. Példa. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ és $\eta_1, \eta_2, \ldots$ limeszrendszámok. Ekkor $\varrho((\xi_1 \oplus \eta_1^d) x \ldots x (\xi_{n-1} \oplus \eta_{n-1}^d)) = n$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval, 6.7., 6.8. és 6.9. felhasználásával.□

10.3. Példa. Definiáljuk rekurziv módon a C_n láncokat:

$$C_1 = 1\text{-elemű lánc};$$

$$C_{n+1} = (\bigoplus_{i \in \omega} C_n) \oplus \omega^d.$$

Ekkor $\varrho(C_n) = n$.

Bizonyítás. Indukcióval azonnal következik 8.4.-ből.□

Mivel a koronák sok helyen fontos szerepet játszanak, külön foglalkozunk koronák szorzatával. Be fogjuk bizonyítani, hogy - várakozásunknak megfelelően - $\varrho(C_{2n_1} x \ldots x C_{2n_k})$

$=k+1$. Így további példákat kapunk a $\varrho(P\times Q)=\varrho(P)+\varrho(Q)-1$ egyenlőség teljesülésére is (legyen P is és Q is koronák szorzata).

Szükségünk lesz a rendezett halmazok átmérőjének fogalmára. Tegyük fel, hogy a P rendezett halmazban minden maximális láncnak van legkisebb és legnagyobb eleme. Ekkor P átmérőjét a

$$\mathrm{diam}(P)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in \min(P)\cup\max(P)\}$$

egyenlőség definiálja [5]. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $f:P\to Q$ rendezéstartó, akkor $\mathrm{diam}(f(P))\leq \mathrm{diam}(P)$, továbbá tetszőleges indexhalmaz esetén $\mathrm{diam}(\prod_{i\in I} P_i)=\sup\{\mathrm{diam}(P_i)\mid i\in I\}$ (v.ö. [5]).

<u>10.4. Segédtétel</u>. Legyenek $2\leq n_1,\dots,n_k, 3\leq n$ természetes számok, és tegyük fel, hogy $f:C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}\to C_{2n}$ szürjektív rendezéstartó leképezés. Ekkor van olyan $\ell\,(1\leq \ell\leq k)$, hogy $n_\ell=n$, és van egy $\varphi:C_{2n_\ell}\to C_{2n}$ izomorfizmus, hogy minden $(x_1,\dots,x_k)\in C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}$-ra $f(x_1,\dots,x_k)=\varphi(x_\ell)$ teljesül.

Bizonyítás. k szerinti indukcióval bizonyítunk. $k=1$-re nincs mit bizonyítani. Legyen $k>1$ és legyen $C=C_{2n_2}\times\dots\times C_{2n_k}$. Legyen C_{2n_1} elemeinek egy felsorolása $c_0,c_1,\dots,c_{2n_1-1}$, ahol c_i és c_{i+1} összehasonlíthatók ($i=0,\dots,2n_1-1$ és $+$ modulo $2n_1$ értendő). Minden i-re definiáljuk az $X_i,Y_i\subseteq C_{2n_1}$ halmazokat a következőképpen:

$$X_i=\{c_i,c_{i+1},\dots,c_{i+n_1}\} \quad \text{és} \quad Y_i=\{c_i,c_{i-1},\dots,c_{i-n_1}=c_{i+n_1}\}.$$

Legyen továbbá $U_i=f(X_i XC)$ és $V_i=f(Y_i XC)$.

1. eset. Minden i-re $U_i, V_i \neq C_{2n}$.

Most U_i és V_i legfeljebb (n+1)-elemű kerítések C_{2n}-ben ($diam(U_i)$, $diam(V_i)\leq n$), $f(\{c_i\} xC), f(\{c_{i+n_1}\} xC) \subseteq U_i \cap V_i$ és $U_i \cup V_i = C_{2n}$. Megmutatjuk, hogy U_i és V_i olyan (n+1)-elemű kerítések, melyekre $U_i \cap V_i = \{z_j, z_{j+n}\}$ és $f(\{c_i\} xC)=\{z_j\}, f(\{c_{i+n_1}\} xC) = \{z_{j+n}\}$, ahol $z_0, z_1, \ldots, z_{2n-1}$ C_{2n} elemeinek egy felsorolása úgy, hogy z_t és z_{t+1} összehasonlíthatók. Tegyük fel, hogy nem így van. A fenti feltételek miatt ekkor $U_i \cap V_i$ egy legfeljebb kételemű kerítés C_{2n}-ben. Vegyük észre, hogy tetszőleges $c \in C_{2n_1}$-re $d(c,c_i)\leq \frac{n}{2}$ vagy $d(c,c_{i+n_1})\leq \frac{n}{2}$. Ezért tetszőleges $z \in f(C_{2n_1} xC)$-re és valamely $t \in U_i \cap V_i$-re $d(z,t)\leq \frac{n}{2}$. Felhasználva, hogy $n \geq 3$, az adódik, hogy f nem szürjektív, ami ellentmondás. Így f értéke csak x_1-től függ; $\ell=1$-gyel és $\varphi : c_i \to z_j$-vel igaz az állítás.

2. eset. Valamely i-re pl. $U_i=C_{2n}$.

Megmutatjuk, hogy $f(\{c_i\} xC)=C_{2n}$. Tegyük fel, hogy nem így van, ekkor $f(\{c_i\} xC)$ egy legfeljebb (n+1)-elemű kerítés C_{2n}-ben. Legyen $G_j=\{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+j}\}$ $(j=0,\ldots,n_1)$. Egyrészt világos, hogy $diam(G_j xC)\leq n$ és ezért $diam(f(G_j xC))\leq n$. Másrészt könnyű ellenőrizni, hogy $|f(G_{j+1} xC) \setminus f(G_j xC)| \leq 2$ (és csak abban az esetben fordulhat elő egyenlőség, ha $|f(G_j xC)|$ páratlan). Ez azt jelenti, hogy egy j-re sem teljesülhet az $f(G_j xC)=C_{2n}$ egyenlőség, azaz $U_i \neq C_{2n}$, ami ellentmondás.

Tehát $f(\{c_i\} xC)=C_{2n}$, és alkalmazhatjuk az indukciós hipotézist a $g(y_1,\dots,y_{k-1})=f(c_i,y_1,\dots,y_{k-1})$ leképezésre: valamely $2\leq \ell\leq k$-ra és egy $\varphi: C_{2n}\to C_{2n}$ izomorfizmusra $g(y_1,\dots,y_{k-1})=\varphi(y_\ell)$. Könnyű ezek után belátni, hogy tetszőleges $c\in C_{2n_1}$-re $f(c,y_1,\dots,y_{k-1})=g(y_1,\dots,y_{k-1})=\varphi(y_\ell)$ (v.ö.9.1. Tétel bizonyítása), azaz tetszőleges $(x_1,\dots,x_k)\in$ $C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}$-ra $f(x_1,\dots,x_k)=\varphi(x_\ell)$. □

<u>10.5. Példa.</u> Legyenek $C_{2n_1},\dots,C_{2n_k}$ tetszőleges koronák. Ekkor $\varrho(C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k})=k+1$.

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $k=1$-re az állítást beláttuk a 2. fejezetben a 2.1. Definició után, de következik a 9.1. Tételből is. Legyen $k>1$. Ha $n_1=\dots=n_k=2$, akkor a 10.1. Példa egy speciális esetével állunk szemben. Tegyük fel, hogy van olyan n_i, amelyikre $n_i\neq 2$. Feltehető, hogy $n_k>2$ és n_k maximális az n_i-k között. Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $f:(C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k})^{k+1}\to C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}$ rendezéstartó leképezésnek van fixpontja. Legyen $f=(f_1,\dots,f_k)$.

1. eset. f_k nem szürjektív.

Ekkor $F=f_k((C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k})^{k+1})$ kerítés C_{2n_k}-ban, ezért F lebontható. Az indukciós hipotézis értelmében $\varrho(C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_{k-1}})=k$, a 6.2. Állítás szerint pedig $\varrho(C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_{k-1}}\times F)=k$ adódik. Így f-nek van egy fixpontja $C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_{k-1}}\times F$-ben.

2. eset. f_k szürjektív.

$i=1,\dots,k+1$-re legyen $(x_{i1},\dots,x_{ik})=x_i\in C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}$. A 10.4. Segédtétel szerint van olyan $1\leq i\leq k+1$, van olyan $1\leq j\leq k$ és van egy φ izomorfizmus, hogy $f_k(x_1,\dots,x_{k+1})=\varphi(x_{ij})$ minden

$(x_1,\dots,x_{k+1})$-re. Egy rögzített $w\in C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_k}$-ra legyen $u=\varphi(w_j)$. Definiáljuk a $g:(C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_{k-1}})^k\to C_{2n_1}\times\dots\times C_{2n_{k-1}}$ leképezést a következőképpen:

$$g(y_1,\dots,y_k) =$$
$$(f_1((y_1,u),\dots,(y_{i-1},u),w,(y_{i+1},u),\dots,(y_k,u)),\dots$$
$$\dots,f_{k-1}((y_1,u),\dots,(y_{i-1},u),w,(y_{i+1},u),\dots,(y_k,u))).$$

Az indukciós hipotézis értelmében g-nek van egy $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_k)$ fixpontja, de akkor $((\bar{y}_1,u),\dots,(\bar{y}_{i-1},u),w,(\bar{y}_{i+1},u),\dots,(\bar{y}_k,u))$ fixpontja f-nek. □

Felhasználva J.W.Walker rendezés homotópiával kapcsolatos eredményeit [17], ismert példákból további P_n példákat kaphatunk, melyekre $\varrho(P_n)=n$ teljesül. A P és a Q rendezett halmazokra $f_1,f_2\in P^Q$ esetén $f_1\simeq f_2$ jelentse azt, hogy van olyan $f_1=g_0,\dots,g_k=f_2$ P^Q-beli sorozat, hogy g_{i-1} és g_i összehasonlíthatók $(i=1,\dots k)$. Azt mondjuk, hogy a P és a Q rendezett halmazok homotóp ekvivalensek ($P\simeq Q$), ha van olyan $f\in P^Q$ és van olyan $g\in Q^P$, hogy $f\circ g\simeq id_P$ és $g\circ f\simeq id_Q$. A rendezés homotópia által meghatározott ekvivalencia osztályokra a fixpont tulajdonság invariáns [17]; hasonlóan FPP(n) és ϱ is homotópia invariánsok. Így ha például P és Q véges rendezett halmazok és Q lebontható P-re, akkor $\varrho(P)=\varrho(Q)$. Ismert példákból további példák nyerhetők a $\varrho(P\times Q)=\varrho(P)+\varrho(Q)-1$ egyenlőség teljesülésére is, mivel ha $P\simeq P'$ és $Q\simeq Q'$, akkor $P\times Q\simeq P'\times Q'$.

Irodalom

[1] S. Abian and A.B.Brown (1961) A theorem on partially ordered sets with applications to fixed point theorems, Canad. J. Math. 13, 78-82.

[2] K. Baclawski and A. Björner (1979) Fixed points in partially ordered sets, Adv. Math. 31, 263-287.

[3] A.C.Davis (1955) A characterization of complete lattices, Pacific J. Math. 5, 311-319.

[4] D.Duffus, W.Poguntke, and I.Rival (1980) Retracts and the fixed point problem for finite partially ordered sets, Canad. Math. Bull. 23,231-236.

[5] D. Duffus and I.Rival (1981) A structure theory for ordered sets, Discrete Math. 35,53-118.

[6] D.Duffus, I.Rival, and M.Simonovits (1980) Spanning retracts of a partially ordered set, Discrete Math. 32, 1-7.

[7] H.Höft and M.Höft (1976) Some fixed point theorems for partially ordered sets, Canad. J.Math. 28,992-997.

[8] H.Höft and M.Höft (1985) Contracting sets in partial orders and the fixed point property for lexicographic sums, preprint.

[9] B.Jónsson (1982) Arithmetic of ordered sets, in Ordered Sets (ed. I.Rival), D.Reidel, Dordrecht, pp. 3-41.

[10] H.M.MacNeille (1937) Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 42,416-460.

[11] R.J. Nowakowski and I.Rival (1979) Fixed edge theorem for graphs with loops, J.Graph Theory 3,339-350.

[12] I.Rival (1976) A fixed point theorem for finite partially ordered sets, J.Combinatorical Theory (A) 21,309-318.

[13] I.Rival (1982) The retract construction, in Ordered Sets (ed.I.Rival), D.Reidel, Dordrecht, pp. 97-122.

[14] A.Rutkowski (1985) Multifunctions and the Fixed Point Property for Products of Ordered Sets, Order 2, 61-67.

[15] A.Rutkowski (1985) Cores, cutsets and the fixed point property, preprint.

[16] A.Tarski (1955) A lattice theoretical fixpont theorem and its applications, Pacific J.Math.5, 285-309.

[17] J.W.Walker (1984) Isotone relations and the fixed point property for posets, Discrete Math. 48, 275-288.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni dr.Czédli Gábornak a JATE Algebra és Számelmélet tanszéke adjunktusának, aki kezdettől fogva figyelemmel kísérte az n-fixpont tulajdonság sorsát. A dolgozatban szereplő több eredménynek is kiindulópontja lett az egyszerű de fontos 4.3. Állítás, melynek felfedezése Czédli Gábor nevéhez fűződik.

Megköszönöm dr.Csákány Bélának a JATE Algebra és Számelmélet tanszéke tanszékvezető egyetemi tanárának a bíztatást és támogatást, amely nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.