

Verändert und doch gleich kehre ich wieder Größe und Skalierung in Natur und Technik

Peter F. Pelz, Technische Universität Darmstadt

Vortrag beim Rotary Club Darmstadt am 29.8.2011

Einleitung



Abbildung 1: Logarithmische Spirale, hier ein Tiefdruckgebiet über Island

Jacob Bernoulli (1654...1705), ein Mathematiker, Onkel des Hydromechanikers Daniel Bernoulli und Vorfahre von Hermann Hesse, hatte veranlasst, dass auf seinem Epitaph im Baseler Münster um eine gemeißelte Spirale der Ausspruch „eadem mutata resurgo“ (lateinisch für: verändert und doch gleich kehre

ich wieder) zu finden ist. Er war fasziniert von der Gestalt der

logarithmischen Spirale und deren besonderen Skalierungseigenschaften, nämlich der Selbstähnlichkeit oder Skaleninvarianz: „Verändert und doch gleich...“.

In der Regel verändern sich Objekte der Natur und Technik bei Veränderung z.B. der äußeren Abmessung. Unbedachtes Skalieren kann zu hohem wirtschaftlichen Schaden führen, dann nämlich, wenn ein Laborexperiment ohne Beachtung der physikalischen Ähnlichkeit auf Produktionsmaßstab hochskaliert wird und überraschend Ausschuss produziert wird. Kritisch ist gleichfalls wenn Ergebnisse von Modelluntersuchungen an Strömungsmaschinen unbedacht, d.h. falsch hochskaliert werden. Wichtig ist, dass die Skaleninvarianz eine Ausnahme und nicht die Regel ist. Die vergleichsweise einfache logarithmische

Spirale kann man aber so skalieren (Streckung und Drehung), dass Sie von der Ursprungsgestalt nicht zu unterscheiden ist.

Skalierung von physikalisch-technischen Systemen

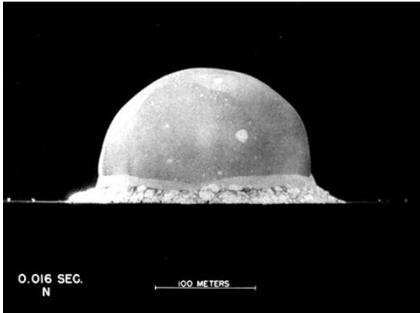


Abbildung 2: Trinity Explosion 1945

Die logarithmische Spirale ist ein rein geometrisch-mathematisches Objekt. Eine schwingende Seite, die sehr starke Explosion durch eine plötzlich freigesetzte Energiemenge, Strömungsmaschinen unterschiedlicher Größe und auch Ruderboote zeigen über die geometrischen Eigenschaften physikalische Eigenschaften (Druck, Geschwindigkeit, Temperatur u.a.).

Werden physikalisch-technischen Objekten verändert und hat man den glücklichen Umstand der Skaleninvarianz gegeben oder erkannt so ergeben sich erstaunlich einfache und elegante Gesetzmäßigkeiten.

Historisch berühmt ist die von G.I. Taylor, von Neumann, Sedov zur Zeit des kalten Krieges auf beiden Seiten der Mauer praktisch zeitlich gefunden Lösung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feuerballs einer sehr starken Explosion.

Die Überlegungen von Fourier, Rayleigh und Bridgman im 19ten und 20ten Jahrhundert

Die Grundlage für die Skalierungsüberlegungen (sog. Dimensionsanalyse) sind die Überlegungen von J. Fourier (1822, Analytical Theory of Heat) und J. Rayleigh (1877, Theory of Sound Vol. 1, 1904 Nobelpreis für Physik). Wenn Fourier auch in der Hauptsache für die von ihm eingeführten Fourier-Reihen und das Wärmeleitungsgesetz bekannt ist, so hat Fourier darüber hinaus erstmals klar formuliert, dass physikalisch-

technische Zusammenhänge unabhängig von der Wahl des Einheitensystems sein müssen. Damit sind diese Systeme invariant gegenüber der Skalierung des Einheitensystems z.B. von Sekunde auf Stunden oder von Meter auf Zoll. Diese, aus heutiger Sicht trivial anmutende Überlegung, war zu der damaligen Zeit nicht trivial und ist es im Übrigen leider auch in der heutigen Ausbildung von Schülern (und Studenten) nicht.

Bridgeman (Nobelpreis in Physik 1946) brachte die Überlegungen in seinem Postulat nach „der absoluten Bedeutung relativer Größen“ auf den Punkt. Das blaue Auto fährt doppelt so schnell wie das rote Auto versteht auch ein Kind. Dies ist eine relative Aussage und unabhängig von definierten und damit künstlichen Maßsystemen wie Kilometer, Meilen, Stunden.

Solch eine relative Größe für das Beispiel „Auto“ ist das Geschwindigkeitsverhältnis. Wird die Schwingungsdauer eines Pendels nicht in den Vielfachen einer Sekunde gemessen, sondern in den Vielfachen der Wurzel aus Pendellänge geteilt durch spezifische Gravitationskonstante, dann ist die so gemessene Schwingungsdauer skaleninvariant. Die Masse des Pendels kann aus der Forderung nach skalen-invarianz keine Rolle spielen.

Physikalische Ähnlichkeit der Trinity Explosion und einer Supernova

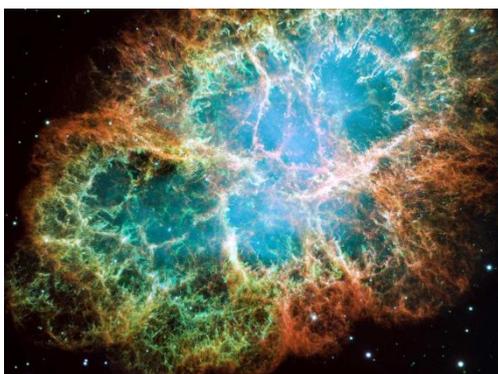


Abbildung 3: Überreste einer Supernova (Krebsnebel)

Zurück zur Trinity Explosion: Stolz gaben die Amerikaner zwei Jahre nach der ersten Zündung einer Atombombe eine Bildserie mit Zeitangabe und Längenmaßstab zur Publikation frei. Sehr zum Unwillen der Amerikaner konnte G.I.

Taylor allein aus dieser Bildfolge auf die freigesetzte Energie schließen. Heute wird die Methode von Taylor, von Neumann, Sedov auch für die Analyse von Sternenexplosionen angewendet. Obgleich die Vorgänge auf den ersten Blick nicht zusammenhängen, da von enorm unterschiedlichem Größenmaßstab, besteht in einer dimensionsbefreiten Darstellung eine Ähnlichkeit zwischen Bombe und Supernova. Der Durchmesser einer Supernova wächst wie die Zeit zur Potenz $2/5$. Der Ordinatenabschnitt in der logarithmischen Auftragung der Stoßfront über der Zeit bestimmt die freigesetzte Energie.

Das Maus-Elefanten-Kurve: Skalierungen in der Natur

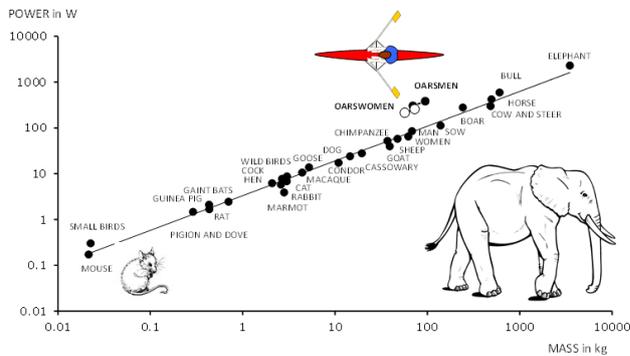


Abbildung 4: Maus-Elefanten-Kurve

Skalierungsgesetze in der Biologie, sogenannte allometrischen Skalierungsgesetzen, sind nach heutigem Standpunkt keine axiomatischen sondern empirische Beziehungen. Obgleich oder da noch nicht ausreichend

erforscht sind die allometrischen Skalierungen faszinierend. So stehen der Maus und dem Elefanten in ihrem jeweiligen Leben ungefähr die gleiche Zahl von Herzschlägen, nämlich ein bis zwei Milliarden, zur Verfügung. Dies ist interessanterweise analog zum Konzept von A. Wöhler (1958, Zeitschrift für Bauwesen) für die Lebensdauer von schwingend belasteten Bauteilen. Die Maus-Elefanten-Kurve gibt die Skalierung der Leistung eines Organismus mit der Masse an. Die Leistung steigt wie die Masse hoch $\frac{3}{4}$. Auch hier wieder ein Potenzgesetz, wie so häufig, im Zusammenhang mit Skalierung und Größe. Es ist allerdings noch nicht gezeigt, dass die allometrischen, empirischen Beziehungen der Biologie über eine Skaleninvarianz zu erklären sind.

Skalierung des Systems „Rudern“

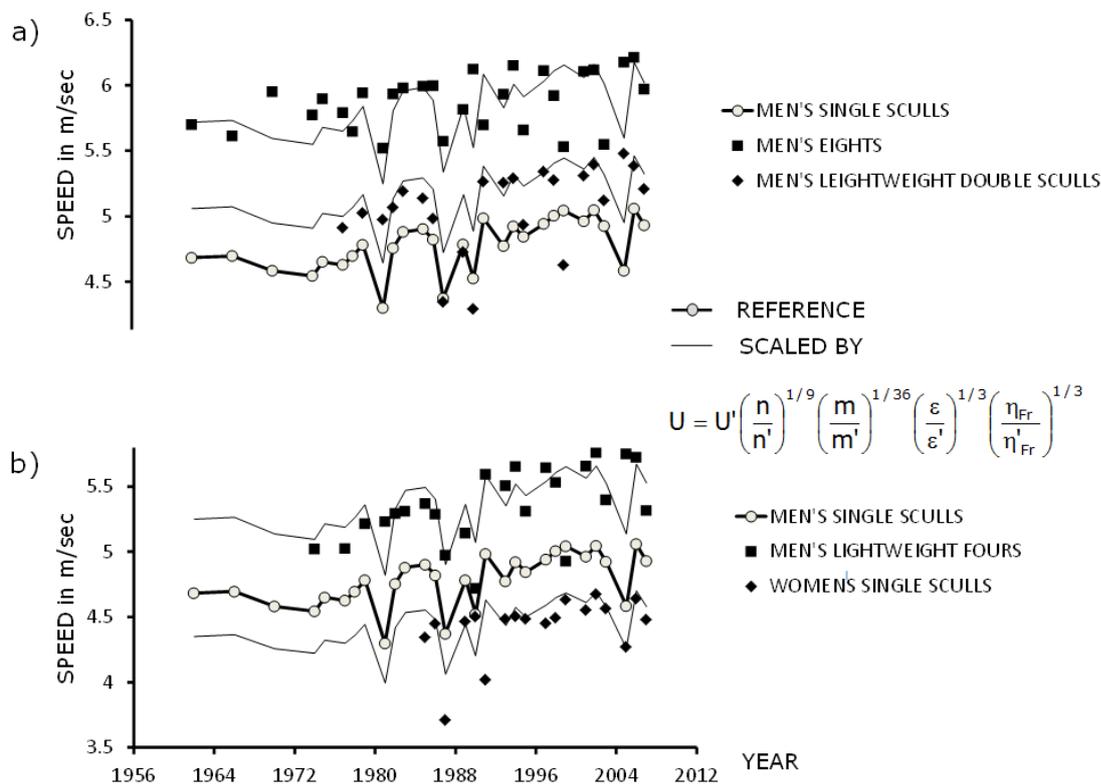


Abbildung 5: Skalierung der Bootsgeschwindigkeit beim Rudern in nahezu einem halben Jahrhundert Rudern

Der Vortrag endet mit einer Anwendung dieses Skalierungsgesetzes auf das biologisch-physikalisch-technische System „Rudern“. Über eine Skalierungs- und Größenbetrachtung ist es möglich die Bootsgeschwindigkeit von jeder Mannschaft vorherzusagen.

Damit wird an einem äußerst komplexen System (deutlich komplexer als das Pendel) die Leistungsfähigkeit der Skalierungsmethoden aufgezeigt.

Die Masse des Ruders geht in dem Skalierungsgesetz zur Potenz 1/36 ein. Damit ist ein Schwergewichtsboot um den Faktor (95 kg/70 kg) hoch 1/36, d.h. um nur etwa 3%...4% schneller als die leichten Jungs. Grund: Die Ruderer müssen Ihre Masse selber über die Strecke bewegen.

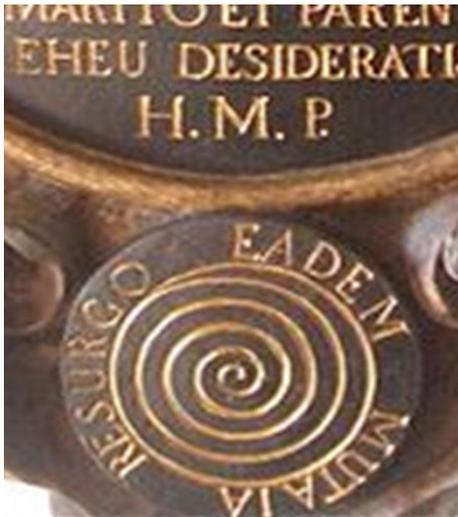


Abbildung 6: Die Archimedische Spirale auf Bernoullis Grabstein

Um wieder auf Jakob Bernoulli zurückzukommen: Die von Bernoulli in seinem Testament gewünschte logarithmische Spirale wurde vom Steinmetz als Archimedische Spirale ausgeführt. Jakob Bernoulli dürfe mit dem Handwerker unzufrieden gewesen sein, wenn er noch die Möglichkeit gehabt hätte. „Verändert und doch gleich...“ passt nicht immer.