

Forschungsbericht 2022-10

**Eine Familie
stabilitätsbasierter
Transitionstransport-
gleichungsmodelle für die
numerische Strömungs-
simulation**

Philip Ströer

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Aerodynamik und
Strömungstechnik
Göttingen



Deutsches Zentrum
DLR für Luft- und Raumfahrt

Forschungsbericht 2022-10

Eine Familie stabilitätsbasierter Transitionstransportgleichungsmodelle für die numerische Strömungssimulation

Philip Ströer

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Aerodynamik und
Strömungstechnik
Göttingen

177 Seiten
65 Bilder
5 Tabellen
140 Literaturstellen



Herausgeber:

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e. V.
Wissenschaftliche Information
Linder Höhe
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2022-10

DOI: <https://doi.org/10.57676/cja2-8m10>

Erklärung des Herausgebers

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung – Nicht kommerziell 3.0 Deutschland zugänglich.  Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie bitte <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>. oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.

Lizenz

 Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung- Nicht kommerziell 3.0 Deutschland

*Stabilitätsbasierte Transitionstransportgleichungsmodellierung,
Transitionsmodellierung, Transportdifferentialgleichungen, laminar-turbulente Transition,
physikalische Modellierung, RANS*

Philip Ströer

DLR, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Göttingen

***Eine Familie stabilitätsbasierter Transitionstransportgleichungsmodelle für die
numerische Strömungssimulation
Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig***

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der physikalischen Modellierung der laminar-turbulenten Transition und stellt eine aus drei Transitionstransportgleichungsmodellen unterschiedlicher Komplexität bestehende neuartige, semi-empirische Modellfamilie zur Transitionsvorhersage für die Außenaerodynamik vor, die auf einer approximierten Form lokaler, linearer Stabilitätstheorie basiert. Durch diese neuen Modelle werden Defizite vorhandener Ansätze bei Tollmien-Schlichting-Transition, die mit positiven und negativen Druckgradienten assoziiert sind, kompensiert und im Verlauf der vorliegenden Arbeit detailliert dokumentiert.

Ein 4-Gleichungsmodell hat das Ziel, das zugrundeliegende Transitionskriterium möglichst genau gitterpunktlokal abzubilden. So werden drei neuartige, zusätzliche partielle Transportdifferentialgleichungen eingeführt, wovon zwei eine Integration entlang einer neu definierten spezifischen Transportgeschwindigkeit ausführen, um einen mittleren Druckgradientenparameter lokal bereitzustellen, über den Konvektionseffekte berücksichtigt werden können. Eine weitere Gleichung wird verwendet, um eine Grenzschichtgröße des kritischen Punktes konstant zu transportieren. Es kann gezeigt werden, dass diese Gleichungen die beschriebenen Operationen sehr genau abbilden und die Strömungsgrößen damit gitterpunktlokal verfügbar machen. Das 4-Gleichungsmodell wird zusätzlich um Kompressibilitätseffekte erweitert und für laminar abgelöste Strömungen detailliert untersucht. Auf Basis dieser umfangreichen Arbeiten werden darüber hinaus ein eigenständiges 3-Gleichungsmodell und ein 1-Gleichungsmodell hergeleitet, die unter Beibehaltung der Genauigkeit Galilei-invariant entwickelt wurden und zusätzlich numerisch günstiger sind. Ein weiterer Vorteil dieser Modelle ist, dass das 3-Gleichungsmodell und das 1-Gleichungsmodell, abgesehen von zwei zusätzlichen Gleichungen des 3-Gleichungsmodells, in ihrer Form identisch sind.

Es kann gezeigt werden, dass die Galilei-invarianten Modelle die Qualität des 4-Gleichungsmodells erhalten. Ferner liefern alle Modelle für die gezeigten Verifikations- und Validierungstestfälle gute bis sehr gute Ergebnisse. Das 3-Gleichungsmodell und das 1-Gleichungsmodell werden im Rahmen dieser Validierung erfolgreich auf einen komplexen Helikopter-Testfall im axialen Flug angewendet.

Stability-based transition transport modeling, transport-type differential equations, laminar-turbulent transition, physical modeling, RANS

(Published in German)

Philip Ströer
DLR, Institute of Aerodynamics and Flow Technology,
Göttingen

A Stability-based Transition Transport Modelling Framework for Computational Fluid Dynamics

Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

The present work deals with the physical modeling of laminar-to-turbulent transition. For that purpose, a new semi-empirical stability-based transition transport modeling framework for external aerodynamics is presented. These new models aim at compensating deficiencies of present state-of-the-art models for streamwise transition mechanisms focusing Tollmien-Schlichting transition, associated with adverse and favorable pressure gradients.

A 4-equation model aims at accurately reproducing the underlying transition criterion in a grid-point-local manner. In this way, three new transport equations are introduced. Two of them perform an integration along a new specific transport velocity in order to provide an averaged pressure-gradient parameter that covers convection effects in streamwise direction. Another equation is used to transport an integral boundary-layer quantity downstream. It can be shown that the new transport equations and the solution procedure applied yield a very accurate numerical representation of all quantities that are needed to evaluate the transition criterion in a grid-point-local manner and, thus, a very good match of the predicted transition onset locations with experimental findings could be demonstrated. In addition, the 4-equation model is extended to account for compressibility effects and is investigated in detail for laminar separated flows. Based on this work independent 3-equation and 1-equation models are derived that are Galilean-invariant and computationally cheaper while maintaining the accuracy of the 4-equation model. All model versions show very good or good agreement with experimental data for the presented verification and validation test cases. In addition, the 3- and 1-equation models are applied to a helicopter validation test case in axial flight.

TU Braunschweig – Niedersächsisches
Forschungszentrum für Luftfahrt

Berichte aus der Luft- und Raumfahrttechnik

Forschungsbericht 2022-12

**Eine Familie stabilitätsbasierter
Transitionstransportgleichungsmodelle für die
numerische Strömungssimulation**

Philip Ströer

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik
Göttingen

Diese Veröffentlichung wird gleichzeitig in der Berichtsreihe „NFL
- Forschungsberichte“ geführt.

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als von der Fakultät für
Maschinenbau der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu
Braunschweig zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

Eine Familie stabilitätsbasierter Transitionstransportgleichungsmodelle für die numerische Strömungssimulation

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Philip Ströer, M.Sc.
geboren in (Geburtsort): Rheine

eingereicht am: 09.11.2021
mündliche Prüfung am: 30.03.2022

Vorsitz: Prof. Dr.-Ing. Peter Horst
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Cord-Christian Rossow
Prof. Dr.-Ing. Rolf Radespiel

2022

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der physikalischen Modellierung der laminar-turbulenten Transition und stellt eine aus drei Transitionstransportgleichungsmodellen unterschiedlicher Komplexität bestehende neuartige, semi-empirische Modellfamilie zur Transitionsvorhersage für die Außenaerodynamik vor, die auf einer approximierten Form lokaler, linearer Stabilitätstheorie basiert. Durch diese neuen Modelle werden Defizite vorhandener Ansätze bei Tollmien-Schlichting-Transition, die mit positiven und negativen Druckgradienten assoziiert sind, kompensiert und im Verlauf der vorliegenden Arbeit detailliert dokumentiert.

Ein 4-Gleichungsmodell hat das Ziel, das zugrundeliegende Transitionskriterium möglichst genau gitterpunktlokal abzubilden. So werden drei neuartige, zusätzliche partielle Transportdifferentialgleichungen eingeführt, wovon zwei eine Integration entlang einer neu definierten spezifischen Transportgeschwindigkeit ausführen, um einen mittleren Druckgradientenparameter lokal bereitzustellen, über den Konvektionseffekte berücksichtigt werden können. Eine weitere Gleichung wird verwendet, um eine Grenzschichtgröße des kritischen Punktes konstant zu transportieren. Es kann gezeigt werden, dass diese Gleichungen die beschriebenen Operationen sehr genau abbilden und die Strömungsgrößen damit gitterpunktlokal verfügbar machen. Das 4-Gleichungsmodell wird zusätzlich um Kompressibilitätseffekte erweitert und für laminar abgelöste Strömungen detailliert untersucht.

Auf Basis dieser umfangreichen Arbeiten werden darüber hinaus ein eigenständiges 3-Gleichungsmodell und ein 1-Gleichungsmodell hergeleitet, die unter Beibehaltung der Genauigkeit Galilei-invariant entwickelt wurden und zusätzlich numerisch günstiger sind. Ein weiterer Vorteil dieser Modelle ist, dass das 3-Gleichungsmodell und das 1-Gleichungsmodell, abgesehen von zwei zusätzlichen Gleichungen des 3-Gleichungsmodells, in ihrer Form identisch sind.

Es kann gezeigt werden, dass die Galilei-invarianten Modelle die Qualität des 4-Gleichungsmodells erhalten. Ferner liefern alle Modelle für die gezeigten Verifikations- und Validierungstestfälle gute bis sehr gute Ergebnisse. Das 3-Gleichungsmodell und das 1-Gleichungsmodell werden im Rahmen dieser Validierung erfolgreich auf einen komplexen Helikopter-Testfall im axialen Flug angewendet.

Abstract

The present work deals with the physical modeling of laminar-to-turbulent transition. For that purpose, a new semi-empirical stability-based transition transport modeling framework for external aerodynamics is presented. These new models aim at compensating deficiencies of present state-of-the-art models for streamwise transition mechanisms focusing Tollmien-Schlichting transition, associated with adverse and favorable pressure gradients.

A 4-equation model aims at accurately reproducing the underlying transition criterion in a grid-point-local manner. In this way, three new transport equations are introduced. Two of them perform an integration along a new specific transport velocity in order to provide an averaged pressure-gradient parameter that covers convection effects in streamwise direction. Another equation is used to transport an integral boundary-layer quantity downstream. It can be shown that the new transport equations and the solution procedure applied yield a very accurate numerical representation of all quantities that are needed to evaluate the transition criterion in a grid-point-local manner and, thus, a very good match of the predicted transition onset locations with experimental findings could be demonstrated. In addition, the 4-equation model is extended to account for compressibility effects and is investigated in detail for laminar separated flows.

Based on this work independent 3-equation and 1-equation models are derived that are Galilean-invariant and computationally cheaper while maintaining the accuracy of the 4-equation model. All model versions show very good or good agreement with experimental data for the presented verification and validation test cases. In addition, the 3- and 1-equation models are applied to a helicopter validation test case in axial flight.

Publikationen

Die vorliegende Dissertation wurde weder veröffentlicht, noch als Prüfungsleistung an einer anderen Universität eingereicht. Teile der vorliegenden Arbeit sind in ähnlicher Weise in den folgenden Zeitschriftenartikeln, Konferenzbeiträgen, Buchbeiträgen und Vorträgen veröffentlicht:

- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2020b): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics Including Convection Effects. In: AIAA Journal, Band 85(4):S. 1506–1517. doi: 10.2514/1.J058762. URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.J058762>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2021): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics at Transonic Conditions. In: AIAA Journal, Band 59(9):S. 3585–3597. doi: 10.2514/1.J059892, URL <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.J059892>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2020a): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics at Transonic Flow Conditions. In: AIAA SciTech 2020 Forum. Orlando, Florida, USA. doi:10.2514/6.2020-0564. AIAA Paper 2020-0564, URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2020-0564>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2022): Galilean-invariant Stability-Based Transition Transport Modeling Framework. In: AIAA Journal, Band 60. doi: 10.2514/1.J061401, URL <https://doi.org/10.2514/1.J061401>.
- Ströer, P.; Gardner, A. D. und Kaufmann, K. (2021): Development of a Stability-Based Transition Transport Modeling Framework. In: High Performance Computing in Science and Engineering – Garching/Munich 2020 Leibniz-Rechenzentrum (LRZ). S. 156-157. ISBN 978-3-9816675-4-7.
- Ströer, P.; Grabe, C. und Krumbein, A. (2019): Assessment and Modification of the γ - Re_{θ} Transition Model Behavior outside the Boundary Layer. In: New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XII. DGLR 2018. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Band 142, Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-25253-3_12.
- Kaufmann, K.; Ströer, P.; Richez, F.; Lienard, C.; Gardarein, P.; Krimmelbein, N. und Gardner, A. D. (2019): Validation of Boundary-Layer Transition Computations for a Rotor with Axial Inflow. In: Vertical Flight Society 75th Annual Forum and Technology Display. Philadelphia, Pennsylvania, USA.

Aus Kaufmann et al. (2019) sind nur Teile eingeflossen, die auf direkten Arbeiten des Autors der vorliegenden Arbeit basieren. In den weiteren hier aufgeführten Publikationen ist der Autor der vorliegenden Arbeit jeweils Erstautor.

meinen Eltern gewidmet

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung Center for Computer Applications in AeroSpace Science and Engineering (C²A²S²E) am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) Göttingen.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Cord-Christian Rossow und Prof. Dr. Rolf Radespiel für die Betreuung und ihr Interesse an dieser Arbeit. Prof. Dr. Peter Horst danke ich für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsverfahrens.

Dr. Dieter Schwamborn und Dr. Cornelia Grabe möchte ich für ihr Vertrauen und die Möglichkeit, diese Arbeit in der Abteilung C²A²S²E anfertigen zu dürfen, danken.

Dr. Andreas Krumbein danke ich für die abteilungsseitige Betreuung und damit verbunden für viele fachliche, überfachliche Diskussionen und gewährte Freiheiten.

Dr. Normann Krimmelbein danke ich für seine große Hilfsbereitschaft und anregende Diskussionen.

Weiterer Dank für gute Zusammenarbeit, Diskussionen und Anregungen gilt vielen Kolleginnen und Kollegen, von denen ich einige namentlich erwähnen möchte: Dr. Axel Probst, Dr. Bernhard Eisfeld, Dr. Tobias Knopp, Dr. Johannes Löwe, Dr. Marco Burnazzi, Dr. Anthony Gardner, Dr. Kurt Kaufmann, Dr. Armin Weiss, Dr. Michael Fehrs.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern, die mir diesen Weg ermöglicht haben, meiner Familie und meiner Partnerin Maresa für ihren bedingungslosen Rückhalt und ihre Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	x
Formelzeichen	xi
1 Einleitung	1
1.1 Physikalische Modellierung der laminar-turbulenten Transition	1
1.2 Zielsetzung und Aufbau	4
2 Laminar-turbulente Grenzschichttransition	7
2.1 Navier-Stokes-Gleichungen	7
2.2 Das Konzept der Grenzschicht und Strömungszustände	8
2.3 Laminare Grenzschichten	9
2.4 Stabilität und Transitionsmechanismen	10
2.4.1 Tollmien-Schlichting-Transition und Bypass-Modus	11
2.4.2 Ablösungsinduzierte Transition	13
2.4.3 Querströmungsinduzierte Transition	14
2.4.4 Anlegelinien Transition	15
2.5 Einflussfaktoren auf die Transition	15
2.6 Vorhersage der Transition	18
2.6.1 Stabilitätstheorie	19
2.6.2 Transitionskriterien	19
2.6.3 Transportgleichungsansätze	25
3 Physikalische Modellierung der laminar-turbulenten Transition	31
3.1 Motivation	31
3.2 Einordnung, Anforderungen und Übersicht	31
3.3 Neuer Modellierungsansatz - 4-Gleichungsmodell	34
3.3.1 Transitionskriterium	34
3.3.2 Integrale Grenzschichtgrößen	34
3.3.3 Spezifische Transportgeschwindigkeit und Anwendung in einer Transportdifferentialgleichung	38
3.3.4 Partielle Transportdifferentialgleichungen	42
3.3.5 Berechnung eines Intermittenzfeldes	47
3.3.6 Kopplung an Wirbelviskositätsturbulenzmodelle	50
3.3.7 Initial- und Randbedingungen	51

3.3.8	Kompressibilität	51
3.3.9	Ablösungsinduzierte Transition	56
3.4	Galilei-invariante Formulierung - 3- und 1-Gleichungsmodell	57
3.4.1	Integrale Grenzschichtgrößen	57
3.4.2	Partielle Transportdifferentialgleichungen	60
3.4.3	Lokale Mach-Zahl	63
3.4.4	Berechnung eines Intermittenzfeldes	63
3.4.5	Ablösungsinduzierte Transition, Transitionsbereich und Kopplung an Wirbelviskositätsturbulenzmodelle	69
4	Validierung der Modelle	71
4.1	Schwach-kompressible Testfälle	71
4.1.1	NLF(1)-0416-Profil und Netzstudie	71
4.1.2	DSA-9A-Profil	80
4.1.3	NACA64 ₂ A015-Profil	86
4.1.4	Ablösungsinduzierte Transition - Eppler 387-Profil	90
4.2	Kompressible Testfälle	96
4.2.1	NLR 7301-Profil	97
4.2.2	CAST10-2-Profil	100
4.2.3	Schlussfolgerungen Kompressibilität	101
4.3	3D-Testfälle	102
4.3.1	Rotationsellipsoid	102
4.3.2	TU Braunschweig Sichelflügel	106
4.4	Bewegte Gitter	108
4.4.1	NLF(1)-0416-Profil	108
4.4.2	RTG-Helikopterrotor	112
5	Schlussfolgerungen und Ausblick	122
5.1	Schlussfolgerungen	122
5.2	Ausblick	126
	Literaturverzeichnis	128
A	Zusammenfassung der Modellgleichungen	140
A.1	4-Gleichungsmodell	140
A.2	3-Gleichungsmodell und 1-Gleichungsmodell	144
A.3	Randbedingungen	147
A.4	Kopplung an das $k - \omega$ -SST-Wirbelviskositätsmodell	147
B	Implementierung und Lösungsverhalten	148
B.1	Zeitliche Integration und Quellterme	148
B.2	Konvektionsterm	148
B.3	Konvergenzverhalten	149
B.3.1	Eppler 387-Profil	149

B.3.2	CAST 10-2-Profil	150
B.3.3	Schlussfolgerungen	152

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ergebnisse des RTG-Rotors (<i>links</i>) und des NACA62 ₂ A015-Profiles (<i>rechts</i>) bei niedrigen bzw. hohen Reynolds-Zahlen im verzögerten bzw. beschleunigten Bereich	3
1.2	Vergleich der Transitionskriterien nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (AHD), Langtry und Menter (2009) (LM) und Abu-Ghannam und Shaw (1980) (AGS) in Abhängigkeit des Druckgradientenparameters λ_θ für zwei Turbulenzgrade	5
2.1	Transitionspfade nach Morkovin et al. (1994) und Saric et al. (2002) . . .	11
2.2	Schematische Zeichnung der natürlichen laminar-turbulenten Transition auf einer ebenen Platte nach Schlichting und Gersten (2006)	12
2.3	Exemplarische c_p - und c_f -Verläufe der Transition über einer laminaren Ablöseblase (c_p - und c_f -Daten aus Bernardos et al. 2019) (<i>links</i>) und schematisch Darstellung einer Ablöseblase nach Carmichael (1982) und Lee et al. (2015) (<i>rechts</i>)	14
2.4	Potentialstromlinie für einen generischen, gepfeilten Flügel (<i>links</i>) und exemplarische Geschwindigkeitsprofile der tangentialen und der Querströmungskomponente (<i>rechts</i>) nach Dagenhart und Saric (1999)	15
2.5	Beispielhafte Indifferenzkurven für viskose (II) und nicht-viskose (I) Instabilitäten (<i>links</i>) und entsprechende Grenzschichtprofile (<i>rechts</i>) (Schlichting und Gersten 2006)	16
2.6	Mach-Zahleinfluss auf die maximalen, räumlichen Anfachungsfaktoren (<i>links</i>) und exemplarische Indifferenzkurven für hohe Mach-Zahlen im Bereich $2,2 < Ma_\infty < 4,5$ (<i>rechts</i>) für adiabate ebene Plattenströmungen nach Mack (1975), Schlichting und Gersten (2006) und Oertel Jr. und Delfs (1996)	17
2.7	Vorhersagemethoden der laminar-turbulenten Transition nach Scholz et al. (2009) und Herbst (2013)	18
2.8	Schematische Darstellung von Anfachungsraten für verschiedene Frequenzen inklusive der Einhüllenden (<i>rot, links</i>) und Indifferenzkurve (<i>rechts</i>) nach Arnal (1993)	20
2.9	Darstellung der Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung der laminaren Falkner-Skan-Profile für zwei exemplarische Formfaktoren inklusive linearer Approximation der Einhüllenden (<i>links</i>) (Drela und Giles 1987) und schematische Darstellung der linearen Approximation der Einhüllenden (<i>rechts</i>) (Habiballah 1981)	22

3.1	Einordnung der neuen, stabilitätsbasierten Modelle in ein Gesamtkonzept zur Transitionstransportgleichungsmodellierung	32
3.2	Darstellung der selbstähnlichen laminaren Falkner-Skan-Lösung (FS-Lösung) für das Verhältnis aus $Re_{v,\max}/Re_\theta$ in Abhängigkeit des Formfaktors H_{12} sowie Polynom Gl. 3.5 (<i>links</i>) und exemplarische Darstellung von $Re_{v,\max}$ und Re_θ sowie deren Verhältnis über der mit der Lauflänge x gebildeten Reynolds-Zahl Re_x für einen konstanten Formfaktor (<i>rechts</i>)	35
3.3	Schematische Darstellung der Differenz $d^*(x)$ zwischen einer gedachten Linie, die die Maxima des wandnormalen Re_v -Verlaufes innerhalb der Grenzschicht $\delta(x)$ verbinden $y_{wR}(x)$ (gestrichelte Linie), und einer ab dem kritischen Punkt x_c verfolgten Stromlinie s (strichpunktierte Linie) anhand einer ebenen Plattenströmung	39
3.4	Auf \mathbf{u} basierende Stromlinie (<i>links</i>) im Vergleich zur spezifischen \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie (<i>rechts</i>) für eine exemplarische 2D-Profilumströmung; die Re_v -Kontur visualisiert das wandnormale Maximum von Re_v innerhalb der Grenzschicht (aus Ströer et al. 2020b)	41
3.5	Sensorfunktionen $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*}$ (<i>links</i> , im Quellterm der $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ -Gleichung verwendet) und \mathcal{F}_λ ohne Zusatzterme (<i>rechts</i> , im Quellterm der $\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ - und $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ -Gleichungen verwendet)	44
3.6	Auftragung der kompressiblen Form des AHD-Kriteriums in Abhängigkeit der Mach-Zahl am Grenzschichtrand Ma_e für verschiedene Werte des Druckgradientenparameters λ_θ (<i>links</i>) und Darstellung für $Ma_e = 0$ in Abhängigkeit von λ_θ und N_t im Vergleich zur inkompressiblen/originalen Form des Kriteriums (<i>rechts</i>)	52
3.7	Einfluss der modifizierten Sensoren (Gleichungen 3.65 mit 3.64 und 3.67 mit 3.66) auf die transportierten Größen $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ und $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ und schließlich $Re_{\theta t}$ am Beispiel einer CAST10-2-Profilumströmung (aus Ströer et al. 2020a)	54
3.8	Schematische Darstellung der γ -Produktion für TS-Transition unter unterschiedlichen Strömungsbedingungen; x_t beschreibt die aus dem Transitionskriterium resultierende Position beginnender Transition; x_{tw} die Position, an der erstmals in Wandnähe $\gamma \approx 1$	65
4.1	Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen und integrale Grenzschichtgrößen im Vergleich zur analytischen Referenzlösung für einen Anstellwinkel $\alpha \approx 0^\circ$; Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert	71
4.2	Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen und integrale Grenzschichtgrößen im Vergleich zur analytischen Referenzlösung für einen Anstellwinkel $\alpha \approx 2^\circ$; Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert	72

4.3	Einfluss der spezifischen Konvektionsgeschwindigkeit für verschiedene Strömungsgrößen entlang der x -Koordinate an der wandnormalen Position y_{wR} (<i>links</i>) und Grenzschichtprofile an verschiedenen x -Positionen (schwarze wandnormale Linien im Konturplot, <i>oben rechts</i> , wobei blau: laminar, rot: turbulent) stromauf der künstlich gesetzten Transition- <i>Onset</i> -Position bei $x/c = 0,4$ (<i>rechts</i>)	73
4.4	Einschub: Einfluss der spezifischen Konvektionsgeschwindigkeit bei einer niedrigen Reynolds-Zahl anhand des 2D-RTG-Profiles für einen kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ (Fall in Abschnitt 4.1.2 diskutiert); Verlauf der transportierten Größen (<i>links</i>) und Vergleich einer \mathbf{u} -Stromlinie und einer \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie (<i>rechts</i>)	74
4.5	Lösung der integrierenden Transportgleichungen des Galilei-invarianten 3-Gleichungsmodells im Vergleich zum 4-Gleichungsmodell und zur analytischen Referenzlösung für die Anstellwinkel $\alpha \approx 0^\circ$ (<i>links</i>) und $\alpha \approx 2^\circ$ (<i>rechts</i>), Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert	75
4.6	Druckverteilungen und Wandschubspannungsbeiwerte für die Oberseite bei Anstellwinkeln $\alpha = 2^\circ$ (<i>links</i>) und $\alpha = -2^\circ$ (<i>rechts</i>)	76
4.7	Transition- <i>Onset</i> -Positionen für die Ober- und Unterseite in Abhängigkeit des Anstellwinkels α (<i>links</i>) und c_l - c_d -Polaren inklusive Vergleichsergebnissen für das k - ω SST-Modell aus Seyfert und Krumbein (2012) (<i>rechts</i>)	77
4.8	Analyse des 4-Gleichungsmodells (<i>links</i>) und Betrachtung verschiedener analytisch ausgewerteter Kriterien (<i>rechts</i>) für einen Anstellwinkel von $\alpha \approx 4^\circ$	78
4.9	Visualisierung der Topologie der Gitter am Beispiel von Netz \mathcal{M}_3 (<i>oben</i>) und Darstellung der von links nach rechts feiner werdenden hybriden Gitter \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 (<i>unten</i>)	79
4.10	c_f - und c_p -Verläufe für verschiedene systematisch verfeinerte Netze bei einem Anstellwinkel $\alpha \approx -2^\circ$	80
4.11	Rotorblatt des RTG-Rotors (<i>links</i>) und Schemazeichnung äquivalenter 2D-Anströmbedingungen am betrachteten radialen Schnitt (<i>rechts</i>)	81
4.12	Anfachungsraten aus der lokalen, linearen Stabilitätstheorie (LST) (<i>links oben</i>), Vergleich verschiedener Transitionskriterien (<i>rechts oben</i> und <i>unten</i>) und Vergleich des AHD-Kriteriums mit dem 4-Gleichungsmodell (<i>links unten</i>) für das 2D-RTG-Profil; Abkürzungen der Transitionskriterien: Drela: Drela und Giles (1987), AGS: Abu-Ghannam und Shaw (1980), LM: Langtry und Menter (2009), AHD: Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981)	83
4.13	c_f - (<i>links</i>) und c_p -Verläufe (<i>rechts</i>) für einen kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$	86
4.14	Druckbeiwert c_p für alle Transitionsmodelle im Vergleich zu experimentellen Daten von Boltz et al. (1960b) für die Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 40$, $Re_{c2}/10^6 \approx 25$, $Re_{c3}/10^6 \approx 16$); $\alpha = 0,5^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 32$, $Re_{c2}/10^6 \approx 20,5$, $Re_{c3}/10^6 \approx 12,7$) sowie $\alpha = 1^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 27$, $Re_{c2}/10^6 \approx 17,7$, $Re_{c3}/10^6 \approx 11,6$)	87

4.15	Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten von Boltz et al. (1960b) für verschiedene Anstellwinkel und Reynolds-Zahlen	88
4.16	Vergleich der Transitionsmodelle mit Ergebnissen lokaler, linearer Stabilitätstheorie und der e^N -Methode aus Ströer et al. (2020b)	89
4.17	Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten (McGhee et al. 1988) anhand von c_f - und c_p -Verläufen für verschiedene Anstellwinkel bei einer Reynolds-Zahl von $Re_c = 2 \times 10^5$	90
4.18	Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten (McGhee et al. 1988) anhand von c_f - und c_p -Verläufen für verschiedene Anstellwinkel bei einer Reynolds-Zahl von $Re_c = 3 \times 10^5$	92
4.19	Einfluss des Zusatzterms $\gamma_{\nabla p}$ (Gl. 3.95) für ablösungsinduzierte Transition bei Anstellwinkeln $\alpha = 0^\circ$ (<i>links oben</i>) und $\alpha = 2^\circ$ (<i>rechts oben</i>) inklusive des γ_{eff} -Verlaufes und Stromlinienplots für $\alpha = 0^\circ$ (<i>links</i> und <i>rechts unten</i>)	93
4.20	Approximation des Formfaktors für abgelöste Strömungen (<i>links</i>) und Einfluss auf das Transitionskriterium inkl. des Gleyzes-Kriteriums (<i>rechts oben</i>) sowie auf die Wiederanlegeposition (<i>rechts unten</i>)	95
4.21	Laminare Lösung des kompressiblen 4-Gleichungsmodells für die ebene Platte (<i>links</i>) und kompressibles AHD-Kriterium in Abhängigkeit der Mach-Zahl am Grenzschichttrand für verschiedene Druckgradienten (<i>rechts</i>); Abbildung aus Ströer et al. (2020a)	97
4.22	Vergleich der inkompressiblen mit der kompressiblen Modellvariante des 4-Gleichungsmodells für eine Variation der Mach-Zahl; stromaufliegende Transitionslinien sind aus c_f extrahierte Punkte beginnender, stromabliegende abgeschlossener Transition	98
4.23	Vergleich der Transitionsvorhersage für zwei Reynolds-Zahlen $Re_c = 2, 3 \times 10^6$ (<i>links</i>) und $Re_c = 15 \times 10^6$ (<i>rechts</i>) unter Verwendung der kompressiblen (4 Gl. k γ) und der inkompressiblen (4 Gl. γ) 4-Gleichungsmodellvarianten ($Re_{\theta t}$ -Verlauf für das inkomp. Modell stromab der Transitionsposition aus Übersichtlichkeitsgründen künstlich auf 0 gesetzt)	99
4.24	Variation des Anstellwinkels (<i>links</i>) und Analyse des Kriteriums in Abhängigkeit des Turbulenzgrades (<i>rechts</i>)	101
4.25	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ -Konturen für die drei neuen Modelle sowie für das γ - Re_θ -Modell im Vergleich zu experimentellen Daten von Kreplin et al. (1985) für einen Winkel von $\alpha = 5^\circ$	103
4.26	Untersuchung der analytisch entlang von Stromlinien am Grenzschichttrand ausgewerteten Transitionskriterien für $\alpha = 5^\circ$: Transitionslinien des AHD-Kriteriums für $Tu = 0,1\%$ (schwarz) und kleinere Turbulenzgrade (grau) im Vergleich zu Ergebnissen der linearen Stabilitätstheorie + e^N -Methode aus Krimmelbein (2021) (rot) und Darstellung der Stromlinien am Grenzschichttrand sowie des Druckminimums (<i>links</i>); Verläufe der Transitionskriterien anhand einer exemplarischen mit Symbolen gekennzeichneten Stromlinie (<i>rechts</i>)	104

4.27	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ -Konturen für die drei neuen Modelle sowie für das γ - Re_θ -Modell im Vergleich zu experimentellen Daten von Kreplin et al. (1985) für einen Winkel von $\alpha = 10^\circ$	105
4.28	Vergleich der $\ \mathbf{c}_f\ _2$ -Konturen für die vorgestellten Transitionsmodelle gegenüber experimentellen Daten von Petzold und Radespiel (2015) für die Unterseite des Sichelflügels	107
4.29	Verifikation der Galilei-invarianten Formulierung (3-Gleichungsmodell) anhand des NLF(1)-0416-Profiles bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$: Vergleich der c_f - und c_p -Verläufe für die Ober- und Unterseite (<i>rechts</i>) zwischen Fall ① mit am Fernfeldrand aufgeprägter Geschwindigkeit, Fall ② mit bewegtem Gitter und einem Mischfall ③ (schematische Darstellung der Fälle <i>links</i>)	109
4.30	Visualisierung der Geschwindigkeitskomponente u inkl. Stromlinien (<i>links</i>) und wandnormale Geschwindigkeitsprofile, die an der <i>links unten</i> gezeigten Position extrahiert wurden (<i>rechts</i>); Fälle ①, ② und ③ in Abb. 4.29 (<i>links</i>) eingeführt	111
4.31	Rechengitter für Simulationen des 3D-RTG-Helikopterrotors und Randbedingungen	112
4.32	Mit $\ \nabla \times \mathbf{u}\ $ konturierte λ_2 -Isofläche für den Eigenwert $\lambda_2 = -350$ (<i>links</i>) und $\ \nabla \times \mathbf{u}\ $ -Kontur in einem Fernfeldauschnitt mit Stromlinien basierend auf dem absoluten Geschwindigkeitsvektorfeld (<i>rechts</i>)	113
4.33	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	114
4.34	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	115
4.35	Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$	116
4.36	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	117
4.37	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	117
4.38	Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$	118
4.39	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	119

4.40	$\ \mathbf{c}_f\ _2$ - (<i>oben</i>) und γ -Konturen (<i>unten</i>) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)	119
4.41	Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$	120
5.1	Einordnung der stabilitätsbasierten Transitionsmodelle in ein Framework zur Transitionstransportgleichungsmodellierung hinsichtlich Rechenaufwand und Approximationsgrad	122
B.1	Residuenverläufe für das 4-Gleichungsmodell (4 Gl. k γ): Dichteresiduum (zusätzlich für das 3 Gl. GI-Modell) und integrale Beiwerte (<i>links</i>) sowie nicht-normierte Residuen zusätzlicher Transitionsgleichungen (<i>rechts</i>)	149
B.2	Feldlösungen der zusätzlichen Gleichungen des 4-Gleichungsmodells (4 Gl. k γ) an der wandnormalen Position y_{wR} (<i>links</i>) sowie c_p - und c_f -Verläufe (<i>rechts</i>) für unterschiedliche Iterationszahlen	150
B.3	Residuenverläufe für das 4-Gleichungsmodell (4 Gl. k γ): Dichteresiduum und integrale Beiwerte sowie nicht-normierte Residuen zusätzlicher Gleichungen	151
B.4	Feldlösungen der zusätzlichen Gleichungen des 4-Gleichungsmodells (4 Gl. k γ) an der wandnormalen Position y_{wR} (<i>links</i>) sowie c_p - und c_f -Verläufe (<i>rechts</i>) für unterschiedliche Iterationszahlen	151

Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht über die Modelle des neuen Modellierungsframeworks, GI steht für Galilei-invariant	33
4.1	Auflösung der im Rahmen der Netzstudie verwendeten Gitter \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3	79
4.2	Bestimmung des kritischen N-Faktors/Turbulenzgrades, GS-Gl.: Grenzschichtgleichungen (Grenzschichtcode <i>Coco</i>), TAU: CFD-Löser, MSES: CFD-Löser, LST: lokale, lineare Stabilitätstheorie (Stabilitätscode <i>Lilo</i>)	82
4.3	Strömungsbedingungen für den NLR 7301-Testfall aus Fehrs (2017)	97
4.4	Strömungsbedingungen der simulierten Testfälle; der Index R kennzeichnet die radiale Position der Blattspitze $r = R$	113

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

a	Schallgeschwindigkeit
A	Amplitude
c	Sehnenlänge
c_f	Reibungsbeiwert
c_p	Druckbeiwert
e	spezifische Gesamtenergie
\mathcal{F}, F	Sensorfunktionen für Transportgleichungen
H_{12}	inkompressibler Formfaktor
K	Beschleunigungsparameter
$l_{c\Sigma}$	stromab des kritischen Punktes integrierte krummlinige Koordinate
l_γ	stromab der Transition- <i>Onset</i> -Position integrierte krummlinige Koordinate
\mathcal{L}	Reynolds-Referenzlänge
Ma	Mach-Zahl
\mathbf{n}	Wandnormalenvektor
N	N -Faktor
p	statischer Druck
r	radiale Koordinate eines zylindrischen Koordinatensystems
R	Radius
Re	Reynolds-Zahl bezogen auf Referenzlänge \mathcal{L}
Re_θ	Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl
$Re_{\theta c}$	lokaler Wert der kritischen Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl
$Re_{\theta c}^*$	Wert von $Re_{\theta c}$ am kritischen Punkt
Re_v	Wirbelstärken (<i>Vorticity</i>)-Reynolds-Zahl
R_i	spezifische Gaskonstante
s	krummlinige Koordinate in Strömungsrichtung
\mathbf{s}	Vektor in Strömungsrichtung
s_{Re_v}	krummlinige Koordinate in Richtung der spezifischen Transportlinie
\mathbf{s}_{Re_v}	Vektor in Richtung der spezifischen Transportlinie
$\ \mathbf{S}\ $	Betrag des Scherratentensors
t	Zeit
T	Temperatur
Tu	Turbulenzgrad
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor, $(u, v, w)^\top$
\mathbf{u}_{Re_v}	modifizierter, spezifischer Geschwindigkeitsvektor

\mathbf{q}	Wärmestromvektor
y_w	wandnormale Koordinate
y_{wR}	wandnormale Position, an der Re_v innerhalb der Grenzschicht maximal wird

Griechische Formelzeichen

α	(Anstell)winkel
α	(komplexe) räumliche Wellenzahl, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$
α_i	räumliche Anfachungsrate Partialstörung
α_r	räumliche Wellenzahl Partialstörung
β	Nickwinkel
γ	Intermittenzvariable
γ_{eff}	effektive Intermittenzvariable
δ	Grenzschichtdicke
δ^*	Verdrängungsdicke
θ	Impulsverlustdicke
κ	Isentropenexponent
ρ	Dichte
μ	dynamische Viskosität
μ_t	Wirbelviskosität
ν	kinematische Viskosität
ϕ	allgemeine Strömungsvariable
φ	Polarwinkel eines zylindrischen Koordinatensystems
Γ_δ	Abschirmungsfunktion (<i>Shielding</i>) der Grenzschicht
λ'	Wärmeleitfähigkeit
λ	Wellenlänge Partialstörung
λ_θ	Druckgradientenparameter
$\lambda_{\theta\Sigma}$	stromab des kritischen Punktes integrierter Druckgradientenparameter
λ_v	auf Re_v basierender Druckgradientenparameter
λ_{vG}	Galilei-invariante Form von λ_v
$\bar{\lambda}_\theta$	gemittelter Druckgradientenparameter (stromab des kritischen Punktes)
Λ	Pfeilungswinkel
$\pi_{H_{12}}$	Reynolds-Zahlenverhältnis, $Re_{v,max}/Re_\theta$
ψ	Stromfunktion
ψ	Winkel schräglaufernde Welle
ψ	allgemeiner Integrand
ϕ	Amplitudenfunktion Ansatz Stabilitätstheorie
ω	(komplexe) Kreisfrequenz, $\omega = \omega_r + i\omega_i$
ω_i	zeitliche Anfachungsrate Partialstörung
ω_r	Kreisfrequenz Partialstörung

$\ \Omega\ $	Betrag des Wirbelstärkentensors
τ	viskoser Spannungstensor
τ_w	Wandschubspannung

Tiefgestelle Indizes

0	Nullstelle der linearen Enveloppe
a	absolut
c	Größe am kritischen Punkt
e	Größe am Grenzschichtrand
end	Größe an der Position abgeschlossener Transition (Transition- <i>End</i> -Position)
ind	Größe am Indifferenzpunkt, auch kritischer Punkt genannt
in	induzierte Geschwindigkeit
r	relativ
t	Größe an der Position beginnender Transition (Transition- <i>Onset</i> -Position)
tr	Größe an einer allgemeinen Transitionsposition (z.B. Transition- <i>Onset</i> oder Transition- <i>End</i> -Position)
∞	Werte der ungestörten Außenströmung

Überstreichungen

—	Mittelwert
~	transportierte Größe

Mathematische Symbole

∇	Nabla-Operator, $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^\top$
$\ \cdot \ _2$	L2-Norm eines Vektors
\times	Kreuzprodukt
\otimes	dyadisches Produkt
\cdot	Skalarprodukt
$:$	Doppelt-Skalarprodukt
\forall	für alle

Abkürzungen

AHD	Arnal, Habiballah und Delcourt
AGS	Abu-Ghannam und Shaw
CFD	Numerische Strömungssimulation (<i>Computational Fluid Dynamics</i>)
COCO	laminarer Grenzschichtcode
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
FS	Falkner-Skan
GH	Gleyzes-Kriterium (Gleyzes, Habiballah)
GI	Galilei-invariant
k	kompressibel
LA	laminare Ablöseposition
LCTM	Lokales korrelationsbasiertes Transitionsmodell (<i>Local Correlation-Based Transition Model</i>)
LILÖ	Stabilitätslöser
LM	Langtry und Menter
LST	lokale, lineare Stabilitätstheorie
LTM	Lokales Transitionsmodell (<i>Local Transition Model</i>)
NLF	Natürliche laminare Strömung (<i>Natural Laminar Flow</i>)
ONERA	<i>Office national d'études et de recherches aérospatiales</i>
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes (<i>Reynolds-averaged Navier-Stokes</i>)
RTG	Rotor-Testanlage des DLR Göttingen
TS	Tollmien-Schlichting
TSP	Temperatursensitive Farbe (<i>Temperature-Sensitive Paint</i>)
TW	Turbulente Wiederanlegeposition

1 Einleitung

Die laminar-turbulente Transition beschreibt den Übergang von der laminaren in die turbulente Strömungsform. Beide Zustände weisen signifikant unterschiedliche Eigenschaften auf. Entsprechend ist dieser Übergang sowohl aus physikalischer als auch aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht von besonderem Interesse und Gegenstand aktueller Forschung.

So beeinflusst die Lage des Transitionsbereiches eines Laminarflügels die gesamte Oberflächenreibung und ist damit inhärent an den Kerosinverbrauch eines Transportflugzeuges sowie an Umwelteinflüsse gekoppelt. Zusätzlich ist seit einiger Zeit eine verstärkte Wiederaufnahme der Forschungsaktivitäten im Bereich der Laminartechnologien zu verzeichnen (z.B. Crouch 2015 und Green 2008), wodurch dieses Argument an Wichtigkeit gewinnt. Auch für Helikopterrotoren kann gezeigt werden, dass eine vollturbulente Auslegung den Leistungsbedarf in vielen Fällen deutlich überschätzt (z.B. Dietz und Dieterich 2009). Zusätzlich werden wichtige Stabilitätsparameter von Fluggeräten, wie das Ablöseverhalten der Strömung, davon beeinflusst, ob eine Strömung noch laminar oder bereits turbulent ist. Neben einem Verständnis des Phänomens ist daher für industrielle Luftfahrtanwendungen besonders relevant, wo bzw. in welchem Bereich die Transition auftritt und inwiefern sich dieser Bereich automatisiert, aber dennoch theoretisch fundiert und zuverlässig vorhersagen lässt.

1.1 Physikalische Modellierung der laminar-turbulenten Transition

Mit steigenden Rechenressourcen wurde es möglich, komplexe Differentialgleichungssysteme wie die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen) in Verbindung mit Modellen, die den Einfluss der Turbulenz modellieren, diskret zu lösen. Diese sogenannte numerische Strömungssimulation (*Computational Fluid Dynamics*, CFD) ermöglicht eine umfassende Analyse von Strömungen durch Feldlösungen. Das typische Standardvorgehen bei einer solchen Simulation ist, eine vollturbulente Strömung anzunehmen und die laminar-turbulente Transition gänzlich zu vernachlässigen. Wie die einleitenden Beispiele andeuten, kann dieser Ansatz gerade für Laminaranwendungen zu großen Fehlern in der Widerstandsberechnung führen. Da die praktischen Auswirkungen der laminar-turbulenten Transition insgesamt komplex und weitreichend sein können, besteht somit der Bedarf, Vorhersagetheorien und -methoden mit moderatem Expertenwissen möglichst automatisiert im Rahmen einer CFD-Simulation anwenden zu können.

Dass die laminare Strömungsform nicht uneingeschränkt stabil ist, wurde bereits früh von Reynolds (1883) in experimentellen Arbeiten an Rohrströmungen beobachtet. Reynolds (1883) postuliert, dass die geordnete Schichtströmung ab einer bestimmten, später nach ihm benannten, dimensionslosen Kennzahl (Reynolds-Zahl), die das Verhältnis von Trägheitskräften zu Zähigkeitskräften bildet, in einen chaotischen Zustand übergeht, der durch eine starke Durchmischung und eine überlagerte Bewegung quer zur Strömungsrichtung gekennzeichnet ist. Spätere Arbeiten beschreiben diesen Übergang als ein Stabilitätsproblem, bei dem Störungen der Außenströmung in die Grenzschicht eindringen und hier gegebenenfalls angefacht werden, was dazu führen kann, dass die gesamte Grenzschichtströmung instabil und infolge turbulent wird. Theoretische Arbeiten beschreiben diese Störungen als Überlagerung der laminaren Strömung und versuchen zu berechnen, ob diese Störungen gedämpft oder angefacht werden. Frühe Arbeiten gehen auf *Lord Rayleigh* (z.B. Lord Rayleigh 1880) zurück. *W. Tollmien* und *H. Schlichting* (z.B. Schlichting 1949) gelingt die erste umfassende theoretische Beschreibung der Stabilität laminarer Strömungen, bei der Partialstörungen im Rahmen eines Eigenwertproblems analysiert werden. Diese Arbeiten führen auf die Stabilitätstheorie, die in unterschiedlichen Formen auch heutzutage noch Gegenstand der Forschung ist. Basierend auf theoretischen und experimentellen Erkenntnissen entwickelten sich zusätzlich Ansätze, die eine einfachere Berechnung der Stabilitätseigenschaften laminarer Profile auf Kosten eines höheren Approximationsgrades ermöglichen.

Obwohl die Transition bereits als stabilitätstheoretisches Phänomen verstanden ist und auch approximative Kriterien existieren, ist es schwierig, diese Methoden so verfügbar zu machen, dass sie robust, anwenderfreundlich und für große Parameterbereiche zuverlässig funktionieren. Ein Nachteil bestehender Methoden ist daher, dass oft ein großes Expertenwissen und viel Aufwand für eine Anwendung im Rahmen von CFD-Lösern erforderlich ist. In den letzten Jahrzehnten sind daher Ansätze entwickelt worden, die eine stark automatisierte Vorhersage auf Basis von partiellen Transportdifferentialgleichungen ermöglichen.¹

Insbesondere die Entwicklungen von Menter et al. (2002), Menter et al. (2006a), Menter et al. (2006b) und Langtry und Menter (2009) schaffen mit dem γ - Re_θ -Modell in diesem Zusammenhang eine neue Klasse von Modellen, die sich durch ein besonderes Maß an Automatisierbarkeit, Anwenderfreundlichkeit und Parallelisierbarkeit auszeichnen. In Ähnlichkeit zu Turbulenzmodellen basieren die Modelle auf partiellen Transportdifferentialgleichungen und verwenden nur lokal am jeweiligen Gitterpunkt verfügbare Größen, können somit ohne zusätzliche Algorithmen in einen bestehenden CFD-Löser integriert werden und erfordern, abgesehen von einer Wahl des Modells, keine Eingabe des Anwenders. Insbesondere die Anwendung partieller Transportdifferentialgleichungen kombiniert so Vorteile und bietet Potential für künftige Entwicklungen: Zum einen ermöglichen diese Gleichungen, bestimmte Operationen entlang von Stromlinien auszuführen und Lösungen gitterpunktlokal verfügbar zu machen, zum anderen ist ein solcher

¹Eine Literaturübersicht zu diesen sogenannten Transportgleichungsansätzen ist in Abschnitt 2.6.3 gegeben.

Ansatz in besonders einfacher Weise in einen bestehenden Strömungslöser integrierbar und parallelisierbar. Das $\gamma-Re_\theta$ -Modell zeigt zusätzlich für eine Vielzahl von Testfällen eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

Durch sich ständig wandelnde Anforderungen aus Forschung und Industrie sind die Forderungen an Transitionsmodelle, was den Bereich an Strömungsbedingungen, die Genauigkeit und die Anwendbarkeit betrifft, groß. Das Modell von Langtry und Menter (2009) basiert auf einer modifizierten Form des Kriteriums von Abu-Ghannam und Shaw (1980) und wurde mit besonderem Fokus auf der Anwendung in Strömungsmaschinen und damit verbundenen hohen Turbulenzgraden entwickelt. Perraud et al. (2014) konnten zeigen, dass das Kriterium von Langtry und Menter (2009) im Vergleich zu Lösungen der lokalen, linearen Stabilitätstheorie für laminare, selbstähnliche Falkner-Skan-Profile bei außenaerodynamisch relevanten kleinen Turbulenzgraden große Unterschiede im Bereich verzögerter und beschleunigter Strömungen aufweist (vgl. Abb. 1.2). In Ströer et al. (2020b) werden diese Unterschiede in den Kriterien im Zusammenhang mit Beobachtungen bei Testfällen mit hohen und niedrigen Reynolds-Zahlen gedeutet: So kann im

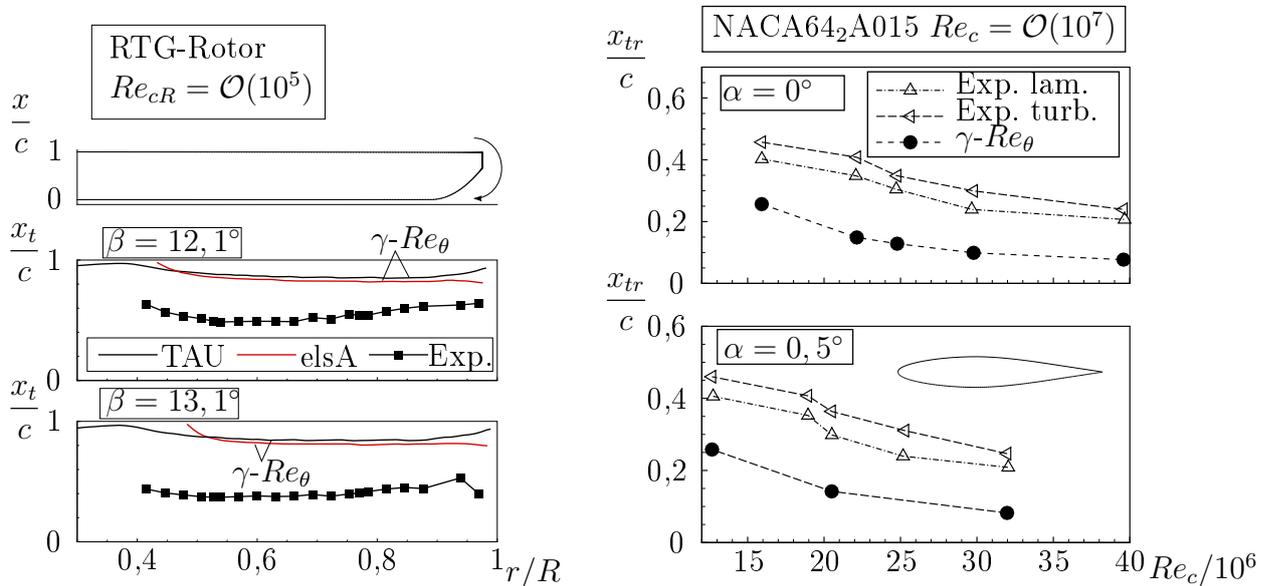


Abbildung 1.1: Ergebnisse des RTG-Rotors (*links*) und des NACA62₂A015-Profiles (*rechts*) bei niedrigen bzw. hohen Reynolds-Zahlen im verzögerten bzw. beschleunigten Bereich

Vergleich zu experimentellen Daten oftmals die Beobachtung stromaufliegender Transitionpositionen bei hohen Reynolds-Zahlen und stromabliegender Transitionpositionen bei niedrigen Reynolds-Zahlen begründet werden. Verstärkt wird dieses Verhalten durch die Art, wie Transition im Rahmen des CFD-Lösers durch die γ -Gleichung in Verbindung mit dem $k-\omega$ SST Wirbelviskositätsmodell gesetzt wird.

Im Folgenden sind zwei beispielhafte Lösungen gezeigt. In Abb. 1.1 (*links*) sind $\gamma-Re_\theta$ -Ergebnisse des Löfers TAU (DLR) und des Löfers elsA (ONERA) gezeigt, die aus in Kaufmann et al. (2019) veröffentlichten Voruntersuchungen stammen. In diesem Testfall wird ein Zweiblattrotor bei einer niedrigen Blattspitzen-Reynolds-Zahl, die zur Nabe hin niedriger wird, untersucht. Transition findet im Experiment im verzögerten Bereich über Tollmien-Schlichting-Instabilitäten statt. Für beide Löser ist zu erkennen, dass die berechnete Transitionsposition stromab der Experimente liegt und über eine Ablöseblase stattfindet. In Abb. 1.1 (*rechts*) sind Ergebnisse bei hohen Reynolds-Zahlen zu sehen, bei denen im Experiment Transition im beschleunigten Bereich stattfindet². Hier ist gegenteiliges zu beobachten: Die $\gamma-Re_\theta$ -Ergebnisse liegen stromauf der experimentellen Daten.

1.2 Zielsetzung und Aufbau

Basierend auf diesen Beobachtungen hat die vorliegende Arbeit das Ziel, einen neuen und unabhängigen Transportgleichungsansatz zur Transitionsvorhersage in unstrukturierten, parallelisierten CFD-Lösern zu entwickeln, der unter Beibehaltung industrieller Anwendbarkeit auf einer approximierten Form lokaler, linearer Stabilitätstheorie in Verbindung mit der e^N -Methode basiert und Transitionsmechanismen in Strömungsrichtung berücksichtigt.

Wie in Abb. 1.2 gezeigt, existieren für den Bereich starker Beschleunigung und Verzögerung große Unterschiede zwischen den Kriterien von Abu-Ghannam und Shaw (1980) bzw. Langtry und Menter (2009) und einem Kriterium, das die experimentelle Datenbasis dieser empirischen Kriterien theoretisch abbildet. D.h. der in Abb. 1.2 mit AHD gekennzeichnete Verlauf basiert auf Ergebnissen der lokalen, linearen Stabilitätstheorie (in Verbindung mit der e^N -Methode) von laminaren Grenzschichtprofilen ebener Plattenströmungen, die unter dem Einfluss von konstanten Druckgradienten stehen (analytische Falkner-Skan-Lösungen). Eine solche semi-empirische Methode wurde von Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (Arnal, Habiballah und Delcourt, AHD) entwickelt und basiert auf der Idee, die Enveloppe der Anfachungsraten über eine lineare Funktion zu approximieren. Hier nicht gezeigte Voruntersuchungen zu diesem Kriterium bestätigen die anhand von Abb. 1.2 aufgestellte Vermutung, dass für Testfälle, bei denen Transition im beschleunigten oder verzögerten Bereich auftritt, unter Verwendung des AHD-Kriteriums eine deutlich bessere Übereinstimmung mit experimentellen Daten erreicht werden kann.

Ein weiterer Vorteil dieser Familie von Kriterien ist, dass unter Beibehaltung der generellen Form des originalen Kriteriums Kompressibilitätserweiterungen bis in den hypersonischen Mach-Zahl-Bereich existieren. Auf diese Weise können die Erweiterungen ohne tiefgreifende Modifikationen des Transportgleichungsmodells verfügbar gemacht werden. Ferner basieren die Kriterien weiterhin auf $Re_{\theta t}$, wodurch eine Kompatibilität zu dem

²Transition wurde im Experiment so gemessen, dass *Exp. lam.* eine Position andeutet, an der die Strömung noch laminar war und *Exp. turb.* eine Stelle, an der die Strömung bereits turbulent ist.

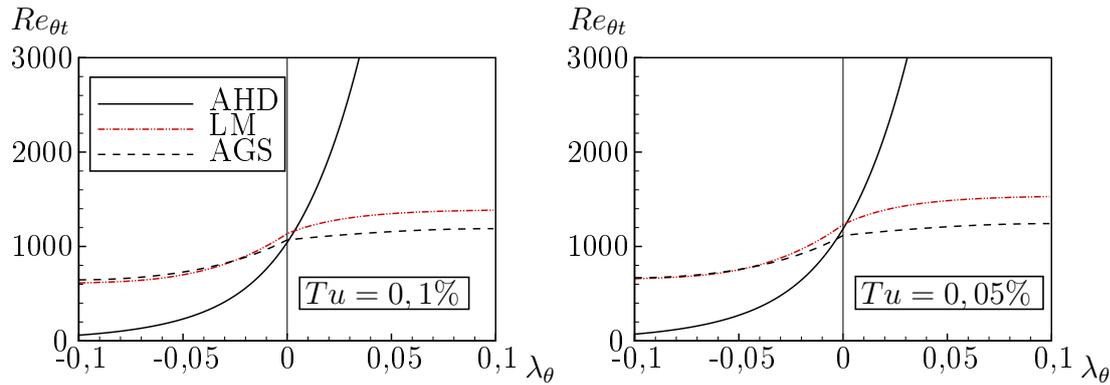


Abbildung 1.2: Vergleich der Transitionskriterien nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (AHD), Langtry und Menter (2009) (LM) und Abu-Ghannam und Shaw (1980) (AGS) in Abhängigkeit des Druckgradientenparameters λ_θ für zwei Turbulenzgrade

AGS-Kriterium und weiteren $Re_{\theta t}$ -basierten Kriterien, die ggf. bei höheren Turbulenzgraden angewendet werden könnten, erhalten bleibt. Zusätzlich werden Konvektionseffekte/Geschichtseffekte (*history effects*) der Grenzschicht durch einen räumlich gemittelten Druckgradientenparameter berücksichtigt, der über zwei partielle Transportgleichungen abgebildet werden kann. Das bringt inhärent den Vorteil, dass ein kostengünstigeres, identisches Modell, das zwei partielle Transportgleichungen weniger verwendet, entsteht.³

Die Modellierung des neuen Ansatzes soll in zwei Teilbereiche untergliedert werden:

- Zunächst wird ein neues Modell hergeleitet, das das Ziel hat, das zugrundeliegende Kriterium möglichst genau gitterpunktlokal abzubilden. Das reine Setzen der sich ergebenden Transitionsposition (d.h. das Steuern des Turbulenzmodells) sei hier bewusst ausgenommen. Die Kernfrage ist, wie und mit welchen Methoden ein solch komplexes stabilitätsbasiertes Kriterium gitterpunktlokal abgebildet werden kann.
- Ein weiteres wichtiges Ziel ist in diesem Zusammenhang, die finale Formulierung so allgemeingültig wie möglich zu halten. Eine Kernforderung an physikalische Modelle ist daher die nach Galilei-Invarianz. D.h. die Formulierung muss in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben. Für Fälle, bei denen eine direkte Transformation der Geschwindigkeiten in ein relatives System möglich ist, erscheint die Forderung nach Galilei-Invarianz aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht redundant. Sobald sich mehrere Wände relativ zueinander bewegen (also keine klare Zuweisung mehr erfolgen kann), führt eine Verletzung der Galilei-Invarianz jedoch unweigerlich zu Problemen. In einem zusätzlichen Schritt zielt die Arbeit daher auf eine Galilei-invariante Modellformulierung ab.

³D.h. ein 1-Gleichungsmodell, das statt eines räumlich gemittelten einen lokalen Druckgradientenparameter verwendet.

Zusätzlich sollen grundlegende Eigenschaften dieser Klasse von Transitionsmodellen erörtert werden: Ein Transitionsmodell ist ein komplexes mathematisches Gebilde, das eine Reihe von Approximationen beinhaltet, die teilweise physikalischer aber teilweise auch pragmatischer Natur sind. Daher ist es besonders wichtig, Effekte zu trennen und präzise zu analysieren, um ausschließen zu können, dass sich z.B. Fehler kompensieren. Die Arbeit hat daher zusätzlich das Ziel, transparent darzulegen, wie diese Klasse von Modellen funktioniert. Dabei liegt ein besonderer Fokus auf der Art, wie die berechnete Position beginnender Transition im Löser gesetzt wird, d.h. in welcher Form das Turbulenzmodell auf Basis dieser Berechnungen aktiviert und deaktiviert wird (γ -Gleichung).

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel untergliedert: Kap. 2 gibt einen zusammenfassenden Überblick über Grundlagen der laminar-turbulenten Transition und den Stand der Forschung hinsichtlich der Transitionsvorhersage sowie der Transitionstransportgleichungsmodellierung. Im Folgekapitel 3 werden die entwickelten Transitionsmodelle hergeleitet und in Kap. 4 verifiziert und validiert. Abschließend erfolgt in Kap. 5 eine Einordnung der Arbeiten in einen Gesamtkontext und es wird ein Ausblick gegeben.

2 Laminar-turbulente Grenzschichttransition

Das nachfolgende Kapitel gibt einen zusammenfassenden Überblick zu den Grundlagen der laminar-turbulenten Transition. Zusätzlich sollen theoretische Berechnungsansätze beschrieben und der aktuelle Stand der Transitionsmodellierung mittels Transportdifferentialgleichungen dargelegt werden.

2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Zur physikalischen Modellierung Newton'scher Fluide werden nachfolgend die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt. Das System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen wird gemeinhin als Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet. Dabei wird vorausgesetzt, dass eine entsprechende charakteristische Länge eines betrachteten Volumenelementes dV groß gegenüber der mittleren freien Weglänge der Moleküle ist (niedrige Knudsen-Zahl). Unter dieser Voraussetzung ist die Kontinuumshypothese erfüllt und es ist zulässig, das Fluid als Kontinuum zu modellieren. Die nachfolgende Darstellung erfolgt in Anlehnung an Moukalled et al. (2016) und Blazek (2015). Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen bestehen aus der Kontinuitätsgleichung (Massenbilanz):

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

der Impulsgleichung (Impulsbilanz):

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)) + \nabla(\lambda^* \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.2)$$

sowie dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik (Energiebilanz):

$$\frac{\partial(\rho h^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h^*) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_s - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + q_v \quad (2.3)$$

mit der Dichte ρ , dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} , dem statischen Druck p , der dynamischen Viskosität μ , der spezifischen Gesamtenergie $e = h^* + 1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = h - p/\rho + 1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ und dem viskosen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + (\lambda^* \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt. Zusätzlich sei angenommen, dass $\lambda^* = -2/3\mu$ gilt (Stokes'sche Hypothese).

Für die Schließung des Gleichungssystems sind weitere thermodynamische Zusammen-

hänge erforderlich. Das als thermodynamisch ideal angenommene Fluid kann über die Zustandsgleichung idealer Gase modelliert werden:

$$p = \rho R_i T, \quad (2.4)$$

wobei T die Temperatur und R_i die spezifische Gaskonstante beschreiben. Die dynamische Viskosität wird mittels des Ansatzes von Sutherland approximiert, das deren Temperaturabhängigkeit über folgende Gleichung berücksichtigt:

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.5)$$

wobei μ_0 die Referenzviskosität, T_0 die Referenztemperatur und T_S die Sutherlandkonstante darstellen (Sutherland 1893). Der Wärmestrom ergibt sich aus dem Fourier'schen Gesetz:

$$\mathbf{q}_s = -\lambda' \nabla T \quad (2.6)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ' .

2.2 Das Konzept der Grenzschicht und Strömungszustände

Der Begriff der Grenzschicht definiert nach *Ludwig Prandtl* einen Bereich in Wandnähe innerhalb einer Strömung, in dem Reibungseffekte zwingend zu berücksichtigen sind. Außerhalb dieser Grenzschicht kann die Viskosität in gute Annäherung vernachlässigt werden. Das Strömungsfeld wird somit in zwei Bereiche unterteilt (Schlichting und Gersten 2006).

Innerhalb der fluiddynamischen Grenzschicht kann die Strömung in zwei Zuständen auftreten. Die laminare Strömung ist eine geordnete Schichtenströmung, ohne Durchmischung quer zur Strömungsrichtung. Durch verschiedene, im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit diskutierte, Rezeptivitätsmechanismen können Störungen in die Grenzschicht eingebracht werden, wodurch die laminare Strömung instabil wird und es zum Übergang (Transition) vom laminaren in den turbulenten Zustand kommen kann. Erstmals beobachtet wurde dieses Phänomen von *Osborne Reynolds* im Jahre 1883, der für eine Rohrströmung feststellte, dass ab einer bestimmten, später nach ihm benannten, dimensionslosen Kennzahl (Reynolds-Zahl), die geordnete Schichtenströmung instabil und turbulent wird. Die Reynolds-Zahl Re beschreibt dabei einen mechanischen Ähnlichkeitsparameter, der Trägheits- und Zähigkeitskräfte ins Verhältnis setzt (Schlichting und Gersten 2006):

$$\frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial y^2} \propto \frac{\rho u_\infty^2 / \mathcal{L}}{\mu u_\infty / \mathcal{L}^2} = \frac{u_\infty \mathcal{L}}{\nu} =: Re, \quad (2.7)$$

mit einer Geschwindigkeit (außenaerodynamisch oft die Geschwindigkeit am Fernfeldrand) u_∞ , einer charakteristischen Länge \mathcal{L} sowie der kinematischen Viskosität ν . Die

Relevanz der laminar-turbulenten Transition für technische Anwendungen liegt in der Tatsache begründet, dass laminare und turbulente Strömungen unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. So ist bspw. die Reibung oder der Wärmeübergang für laminare und turbulente Strömungen signifikant unterschiedlich. Auch innerhalb freier Scherschichten tritt Transition aufgrund von Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten auf. Auf diesen Aspekt wird im Rahmen ablösungsinduzierter Transition im weiteren Verlauf des Kapitels eingegangen.

2.3 Laminare Grenzschichten

Nachfolgend sollen elementare Eigenschaften laminarer Grenzschichten in Anlehnung an Schlichting und Gersten (2006) und Scholz et al. (2009) zusammenfassend beschrieben werden. Dabei wird eine ebene Strömung angenommen, bei der x die Strömungsrichtung, y die wandnormale Richtung und z die spannweite Richtung beschreiben.

Parameter

Obwohl die Grenzschicht nicht scharf gegenüber der Außenströmung abgegrenzt werden kann, ist es sinnvoll, einen wandnormalen Abstand zu definieren, der eine Einteilung ermöglicht. Eine weit verbreitete Definition für die Grenzschichtdicke δ ist der wandnormale Abstand, ab der die Geschwindigkeit in x -Richtung u 99% der Geschwindigkeit der Außenströmung u_∞ entspricht:

$$u(x, y =: \delta) = 0,99 u_\infty. \quad (2.8)$$

Eine Grenzschicht hat gegenüber der Außenströmung eine verdrängende Wirkung, d.h. eine hypothetische reibungsfreie Stromlinie wird abgelenkt. Mathematisch kann dies durch die Verdrängungsdicke δ^* beschrieben werden:

$$\delta_k^*(x) := \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_0^\zeta \left(1 - \frac{\rho(x, y)u(x, y)}{\rho_\infty u_\infty} \right) dy. \quad (2.9)$$

Eine weitere wichtige Größe ist die Impulsverlustdicke θ :

$$\theta_k(x) := \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_0^\zeta \frac{\rho(x, y)u(x, y)}{\rho_\infty u_\infty} \left(1 - \frac{u(x, y)}{u_\infty} \right) dy. \quad (2.10)$$

Physikalisch beschreibt diese Größe den durch die Grenzschicht verminderten Impulsstrom. Unter der Annahme von Inkompressibilität können die Ausdrücke für δ_k^* und θ_k unter Vernachlässigung der Dichte in den Gleichungen 2.9 und 2.10 vereinfacht werden und es ergeben sich die Größen δ^* sowie θ .

Der Quotient aus Verdrängungs- und Impulsverlustdicke wird als Formfaktor H_{12} be-

zeichnet und ist ein Maß für die Form des Geschwindigkeitsprofils:

$$H_{12}(x) := \frac{\delta^*}{\theta}. \quad (2.11)$$

Für zwei Formfaktoren $H_{12,1} < H_{12,2}$ bedeutet das, dass das durch $H_{12,1}$ charakterisierte Profil *voller* erscheint. Die Bezeichnung H_{12} leitet sich aus den Größen δ^* und θ ab, die oftmals auch als $\delta_1 = \delta^*$ und $\delta_2 = \theta$ bezeichnet werden.

Ein Parameter, der die an der Wand auftretende Reibungskraft charakterisiert, ist der Reibungsbeiwert (dimensionslose Form der Wandschubspannung τ_w):

$$c_f := \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (2.12)$$

Da sich die Geschwindigkeitsprofile im laminaren und turbulenten Strömungszustand stark unterscheiden, verzeichnet dieser Beiwert einen charakteristischen Anstieg beim Übergang.

Grenzschichtgleichungen und selbstähnliche Lösungen

Für Grenzschichten lassen sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen vereinfachte Gleichungen herleiten (Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen), indem unter der Kernannahme hoher Reynolds-Zahlen ($Re \rightarrow \infty \Rightarrow \delta \ll \mathcal{L}$) ein Vergleich der Größenordnung einzelner Terme durchgeführt wird. Für einfache Fälle laminarer Plattengrenzschichten und Keilströmungen existieren theoretische Lösungen dieser Grenzschichtgleichungen.

Die Einfachste ist die *Blasius-Lösung* (Blasius 1908) für eine ebene Plattenströmung ohne Druckgradienten dp/dx . Die resultierenden Profile der Lösung der vereinfachten Grenzschichtgleichungen sind selbstähnlich zueinander. Diese wichtige Eigenschaft wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine zentrale Rolle spielen. Eine unmittelbare Folge der Selbstähnlichkeit ist, dass der Formfaktor H_{12} für alle x konstant $H_{12} \approx 2,59$ ist.

Eine weitere analytische Lösung existiert für ebene Plattenströmungen mit konstantem Druckgradienten. Die Blasiuslösung (kein Druckgradient) stellt hierbei einen Spezialfall dieser sogenannten *Falkner-Skan-Lösungen* (Falkner und Skan 1931) dar. Für Details zur Herleitung der Grenzschichtgleichungen und deren theoretischen Ähnlichkeitslösungen sei auf Schlichting und Gersten (2006) verwiesen.

2.4 Stabilität und Transitionsmechanismen

Der Prozess des Übergangs von der laminaren in die turbulente Strömungsform hängt von vielen Parametern ab und verläuft in Abhängigkeit der Strömungsbedingungen unterschiedlich. Nachfolgend ist eine Übersicht über die für die Außenaerodynamik relevanten Mechanismen gegeben. Dabei gilt es zu beachten, dass eine solche klare Einteilung und Abgrenzung der Mechanismen in der Praxis nicht immer möglich ist.

2.4.1 Tollmien-Schlichting-Transition und Bypass-Modus

Die mathematische Beschreibung des Phänomens der Transition basiert auf einem Störansatz. Dabei wird angenommen, dass die laminare Grenzschicht unter dem Einfluss von Störungen der Außenströmung steht, die in diese eindringen und die Grundströmung überlagern. Die Theorie versucht mathematisch abzubilden bzw. vorherzusagen, ob Störungen angefacht oder gedämpft werden, um so eine Aussage über die Stabilität der laminaren Strömung zu treffen. Die Grundidee der Stabilitätstheorie soll in Anlehnung an Schlichting und Gersten (2006) anhand der lokalen, linearen Theorie verdeutlicht werden. Ausgangspunkt sind die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen, wodurch der vorgestellte Ansatz nur die Analyse der Anfachtung im Bereich primärer Instabilitäten ermöglicht ("kleine Störungen"). Die primäre Theorie macht einige Annahmen: Sowohl die inkompressible Grundströmung, als auch die überlagerte Störbewegung seien als zwei-dimensional angenommen. Ferner wird für die Grundströmung angenommen, dass die Geschwindigkeitskomponenten in Strömungsrichtung nur von der wandnormalen Koordinate abhängt (Parallelströmungsannahme).

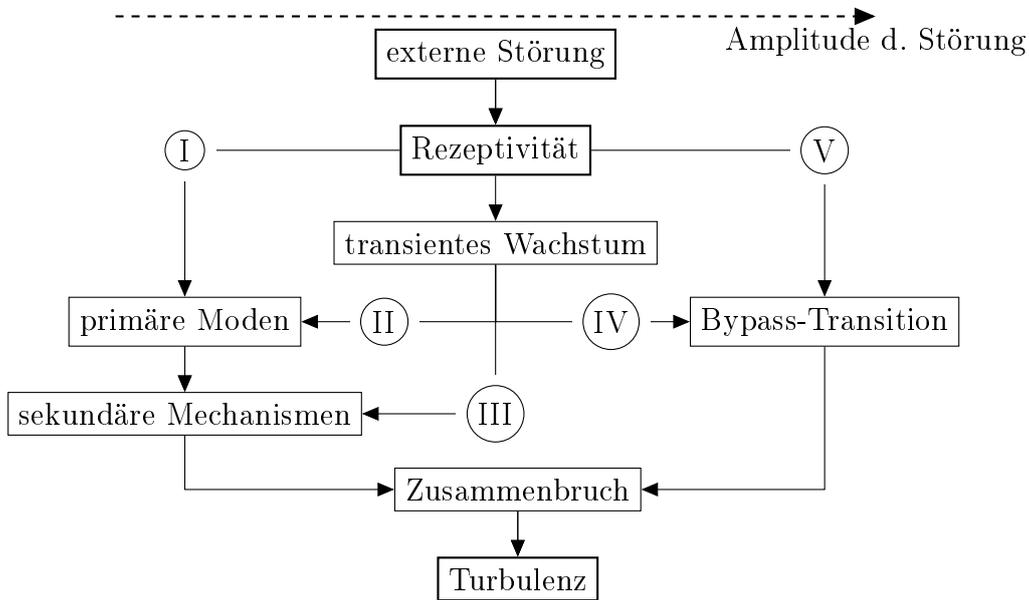


Abbildung 2.1: Transitionspfade nach Morkovin et al. (1994) und Saric et al. (2002)

Die Basis der Stabilitätstheorie ist die Zerlegung der instantanen Strömungsvariablen in ihre stationären Φ und fluktuierenden Anteile ϕ' , sodass für $\phi \in \{\rho, u, v, w, p\}$

$$\phi = \Phi + \phi' \tag{2.13}$$

gilt. Die Störung ϕ' kann nach Fourier in ihre Elementarwellen (Moden) zerlegt werden, sodass unter Verwendung der Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ gilt:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \tag{2.14}$$

wobei $u' = \partial\psi/\partial y$, $v' = -\partial\psi/\partial x$, $i^2 = -1$, $i \in \mathbb{C}$ und $\varphi(y)$ die Amplitudenfunktion sind. Die Größe $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert über $\lambda = 2\pi/\alpha$ die Wellenlänge der Partialstörung. Die Größe $\omega \in \mathbb{C}$ kann in Real- und Imaginärteil zerlegt werden, wobei $\Re(\omega)$ die Kreisfrequenz beschreibt und $\Im(\omega)$ über Anfachung und Dämpfung der eingebrachten Störung entscheidet. Die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit c ergibt sich aus α und ω zu $c = \omega/\alpha$ und ist dementsprechend ebenfalls komplex. Dieser Wellenansatz kann nun in die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt werden, wodurch sich die Orr-Sommerfeld-Gleichung ergibt:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \quad (2.15)$$

Die Stabilitätsanalyse ist nun zu einem Eigenwertproblem geworden, das für eine bekannte Grundströmung $U(y)$, Reynolds-Zahl Re und Wellenzahl $\lambda = 2\pi/\alpha$ eine Eigenfunktion $\phi(y)$ und einen Eigenwert $c = c_r + i c_i$ ergibt. Für $c_i < 0$ wird die Störung mit der Wellenlänge λ angefacht, für $c_i > 0$ gedämpft. Abb. 2.5 (*links*) zeigt das Ergebnis einer Stabilitätsuntersuchung in Form einer Indifferenzkurve (d.h. eine Kurve für $c_i = 0$ bzw. im Falle räumlicher Theorie $\alpha_i = 0^4$), die stabile und instabile Bereiche definiert. Die kleinste Reynolds-Zahl, ab der erstmals Störungen angefacht werden (also erstmals $\alpha_i < 0$), wird als Indifferenz-Reynolds-Zahl Re_{ind} bezeichnet.

Der Prozess, in dem Störungen der Außenströmung in die laminare Grenzschicht eintreten und somit die Anfangsbedingungen definieren, wird als Rezeptivität bezeichnet (Morkovin et al. 1994). Während mathematische Modelle für die Anfachung von Störungen

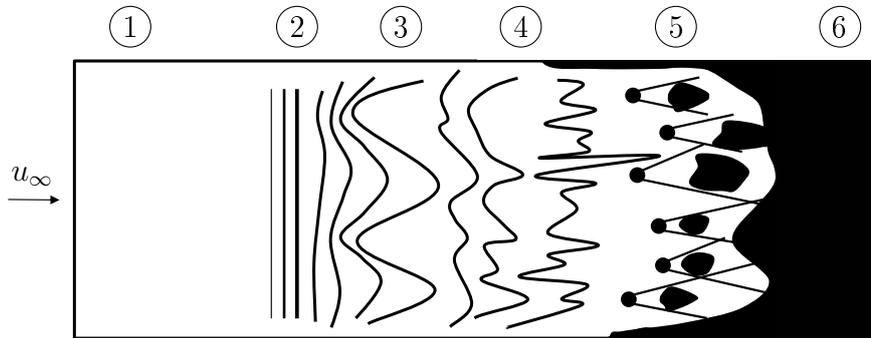


Abbildung 2.2: Schematische Zeichnung der natürlichen laminar-turbulenten Transition auf einer ebenen Platte nach Schlichting und Gersten (2006)

gen (in Form der Stabilitätstheorie) existieren, gibt es für den Prozess der Rezeptivität nur Korrelationen (auf diesen Aspekt wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher eingegangen). In Abhängigkeit der initialen Stör-Amplitude sind verschiedene in Abb.

⁴Die zeitliche Theorie kann unter Verwendung der Gaster-Transformation in die räumliche Theorie überführt werden (Gaster 1962).

2.1 visualisierte (vereinfachte) Szenarien des Transitionsprozesses denkbar. Bei kleinen Störamplituden (Pfad $\textcircled{\text{I}}$) kann die lineare Theorie angewandt werden. Bei größer werdenden Amplituden sind die Effekte zunehmend dreidimensional und von nichtlinearen Ereignissen geprägt (sekundäre Instabilitäten).

Im Bereich der Außenaerodynamik ist die natürliche Transition, die in Abb. 2.2 schematisch skizziert ist, von besonderem Interesse. Die natürliche Transition, auch als Tollmien-Schlichting-Transition bezeichnet, tritt bei kleinen Turbulenzgraden auf (Pfad $\textcircled{\text{I}}$, Abb. 2.1). Ausgangspunkt ist die stabile, laminare Grundströmung $\textcircled{1}$, die unter dem Einfluss einer gestörten Außenströmung steht. Während Störungen im stabilen Bereich der laminaren Strömung gedämpft werden, bilden sich ab der sogenannten Indifferenz-Reynoldszahl erstmals instabile sogenannte Tollmien-Schlichting-Wellen aus $\textcircled{2}$, die angefacht werden. Diese Anfachung kann mittels primärer Stabilitätstheorie beschrieben werden. Durch weitere Anfachung kommt es ab einer bestimmten Amplitude zur Ausbildung sekundärer Instabilitäten, aus denen sich weiter stromab dreidimensionale Λ -Strukturen bilden $\textcircled{3}$. In den nächsten Schritten zerfallen diese Λ -Strukturen $\textcircled{4}$ und es bilden sich Turbulenzflecken $\textcircled{5}$, die abschließend in eine vollturbulente Strömung münden $\textcircled{6}$.

Bei entsprechenden Initialbedingungen (Störamplitude) kann es zu sogenanntem transientem Wachstum kommen. Die Interaktion zweier stabiler Moden kann hierbei für kleine Zeiten algebraisch anwachsen und danach exponentiell abklingen (Saric et al. 2002, Reshotko 2001). Transientes Wachstum kann zu verschiedenen Szenarien führen (Pfade $\textcircled{\text{II}}$, $\textcircled{\text{III}}$ oder $\textcircled{\text{IV}}$).

Sehr hohe Amplituden/hohe Turbulenzgrade können dazu führen, dass der gesamte Transitionsprozess über das Anwachsen instabiler primärer Moden überbrückt wird und die Transition sehr schnell vonstatten geht (Bypass-Transition, Pfad $\textcircled{\text{V}}$). Der Transitionsprozess ist hierbei signifikant verkürzt, da die Anfachung von Störungen durch die hohen Turbulenzgrade beschleunigt ist, oder es direkt zum Zusammenbruch und der Ausbildung von Turbulenzflecken kommt. Es ist bekannt, dass die linearen Theorien diesen Transitionsmechanismus nicht beschreiben können (Saric et al. 2002).

2.4.2 Ablösungsinduzierte Transition

Ein hoher Gegendruck kann dazu führen, dass Grenzschichten ablösen. Passiert dies für laminare Grenzschichten, die durch die Form ihres Geschwindigkeitsprofils eine höhere Ablöseigung haben, muss betrachtet werden, wie sich die Stabilität des laminaren Profils gegenüber einer anliegenden Strömung verändert. Üblicherweise kommt es nach der laminaren Ablösung zur Transition in den turbulenten Strömungszustand, wodurch sich die Strömung nach kurzer Lauflänge wieder anlegt und sich die typische in Abb. 2.3 (*rechts*) schematisch dargestellte Form ergibt. Daraus folgen die charakteristischen Verläufe für c_p und c_f , die in Abb. 2.3 (*links*) gezeigt sind. Der Druckverlauf ist im laminaren Bereich konstant (*constant pressure region*) und steigt im Turbulenten stark an (*pressure recovery region*). Laut Lee et al. (2015) zirkuliert das Fluid im laminaren

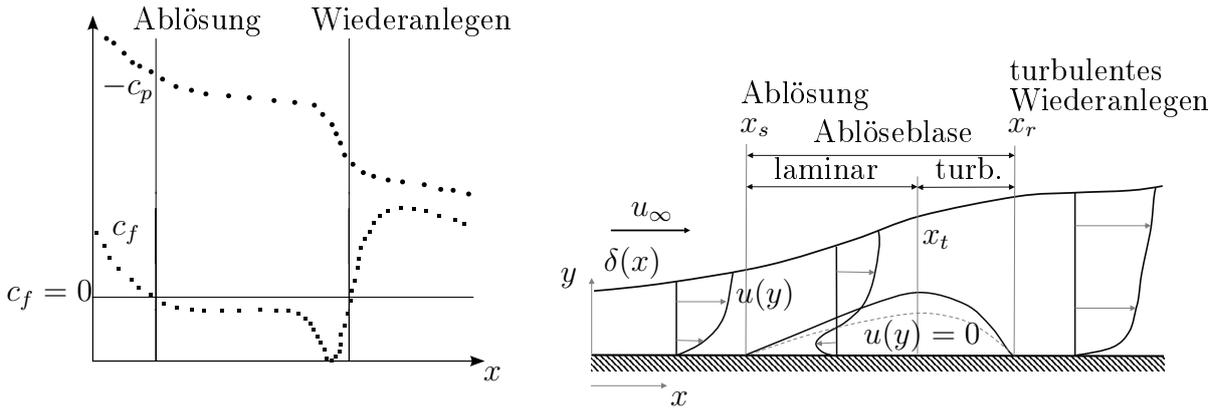


Abbildung 2.3: Exemplarische c_p - und c_f -Verläufe der Transition über einer laminaren Ablöseblase (c_p - und c_f -Daten aus Bernardos et al. 2019) (*links*) und schematisch Darstellung einer Ablöseblase nach Carmichael (1982) und Lee et al. (2015) (*rechts*)

Bereich unterhalb der Scherschicht sehr langsam und näherungsweise stationär, wodurch in Strömungsrichtung kaum Gradienten existieren und der Bereich konstanten Druckes erklärt werden kann. Sobald die Strömung turbulent wird, kommt es zu einer stärkeren Vermischung und einem höheren Impulstransport in Wandnähe, wodurch die Strömung schnell wiederanlegt und es zu einer Rückgewinnung des Druckes kommt.

Der zugrundeliegende Transitionsmechanismus ist hierbei laut Hain et al. (2009) der Folgende: In der noch anliegenden Grenzschicht werden instabile Tollmien-Schlichting-Wellen angefacht. Sobald die Grenzschicht ablöst, kann die Anfächung von Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten in der Scherschicht beobachtet werden, die dann zu einer Ausbildung dreidimensionaler Wirbel und letztendlich zu einem Zusammenbruch der Strömung führen.

2.4.3 Querströmungsinduzierte Transition

Für gepfeilte Flügel bei entsprechender Mach-Zahl muss zusätzlich die Dreidimensionalität der Strömung und ein dadurch auftretender weiterer Instabilitätsmechanismus betrachtet werden (Schlichting und Gersten 2006). Durch die Pfeilung entsteht ein zusätzlicher Druckgradient in spannweitischer Richtung, der zu einer der in Abb. 2.4 (*links*) dargestellten ähnlichen Potentialstromlinie führt. Während sich im Bereich außerhalb der Grenzschicht Druck- und Zentrifugalkräfte (durch die Stromlinienkrümmung) das Gleichgewicht halten, entsteht in der Grenzschicht, der der Druck gemäß Grenzschichttheorie aufgeprägt wird, eine Querströmung (vgl. Abb. 2.4, *rechts*). Querströmungsprofile weisen für $dp/ds < 0$ (Abb. 2.4, *links*) inhärent einen Wendepunkt auf und sind daher nach dem im Folgenden diskutierten Rayleigh- bzw. Wendepunktkriterium (Abschn. 2.5, Druckgradient) nicht-viskos instabil. Entsprechend müssen in besagten Fällen auch sogenannte querströmungsinduzierte Instabilitäten beachtet werden. Laut Arnal

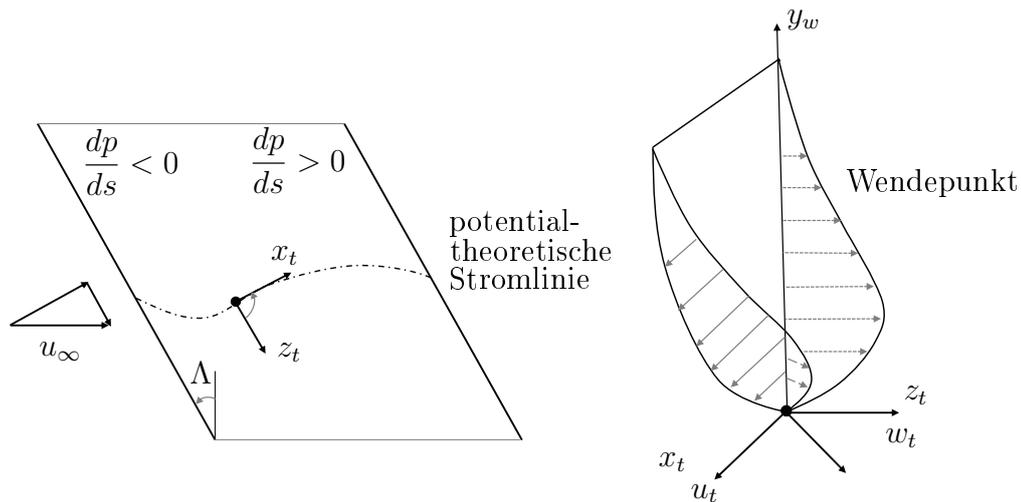


Abbildung 2.4: Potentialstromlinie für einen generischen, gepfeilten Flügel (*links*) und exemplarische Geschwindigkeitsprofile der tangentialen und der Querschwindigkeitskomponente (*rechts*) nach Dagenhart und Saric (1999)

(1993) sind die Frequenzen querströmungsinduzierter Instabilitäten tiefer als die von Instabilitäten in Strömungsrichtung, was dazu führt, dass sogar sehr tiefe Frequenzen angefacht werden, wodurch sich stationäre gegenläufig rotierende Wirbel, deren Achsen in Strömungsrichtung liegen, ausbilden können. Stromab des Druckminimums zerfallen diese Querströmungsinstabilitäten und es bilden sich direkt Instabilitäten in Strömungsrichtung. Gerade für transsonische Mach-Zahlen ist eine Interaktion sehr wahrscheinlich, da hier schräglauende Wellen eine wichtige Rolle spielen (Arnal 1993).

2.4.4 Anlegelinien Transition

An einem gepfeilten Flügel bildet sich in Abhängigkeit der Pfeilung an der Anlegelinie eine Grenzschicht in spannweite Richtung aus. Durch einen Mechanismus, der den Tollmien-Schlichting-Wellen ähnlich ist, kann es in dieser Anlegelinienströmung durch Anfachung instabiler Wellen zur Transition kommen (Hall et al. 1984), wodurch der Laminarflügel ab dieser spannweitigen Position bis zur Flügelhinterkante kontaminiert wird. Zusätzlich kann es dazu kommen, dass die ggf. turbulente Strömung des Rumpfes die Strömung der Anlegelinie kontaminiert und dazu führt, dass diese ebenfalls turbulent wird. Für einen Laminarflügel ist es wichtig, beide Arten von Instabilitäten zu vermeiden.

2.5 Einflussfaktoren auf die Transition

Die Transition wird von einer Vielzahl von Parametern beeinflusst, die die Strömung stabilisieren oder auch destabilisieren können. Nachfolgend sollen einige Einflussfaktoren auf die Transition vom laminaren in den turbulenten Strömungszustand mit Blick auf

außenaerodynamische Probleme diskutiert werden:

- Die **Reynolds-Zahl** charakterisiert als mechanischer Ähnlichkeitsparameter die Strömung. Grundsätzlich ist es so, dass bei tiefen Reynolds-Zahlen per Definition die Zähigkeitskräfte dominieren, wodurch Störungen in der Grenzschicht einer stärkeren Dämpfung ausgesetzt sind. Die kleinste Reynolds-Zahl, ab der erstmals instabile Elementarwellen existieren, ist die sogenannte Indifferenz-Reynolds-Zahl.
- Der **Turbulenzgrad** beschreibt die der Grundströmung überlagerte Störung in entdimensionierter Form:

$$Tu := \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}}{u_\infty}}. \quad (2.16)$$

Es ist bekannt, dass Störungen über den Rezeptivitätsmechanismus vom Rand in die Grenzschicht eingebracht werden, so den Anfangszustand angefachter Wellen definieren und somit einen direkten Einfluss auf den Transitionsprozess haben (vgl. Abschn. 2.4.1).

- Der **Druckgradient** (in Strömungsrichtung) hat einen unmittelbaren Einfluss auf die Form des Geschwindigkeitsprofils. Aus den Grenzschichtgleichungen kann für die Wand ($y = 0$) der folgende wichtige Zusammenhang hergeleitet werden:

$$\mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{dp}{dx}. \quad (2.17)$$

Aus Gl. 2.17 folgt, dass das Geschwindigkeitsprofil für verzögerte Strömungen ($dp/dx > 0$) einen Wendepunkt haben muss (Schlichting und Gersten 2006). Wie

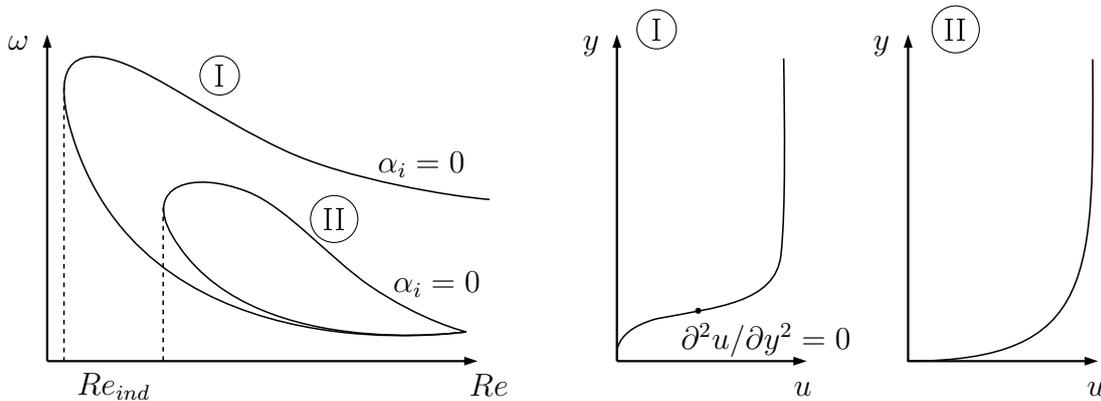


Abbildung 2.5: Beispielhafte Indifferenzkurven für viskose (II) und nicht-viskose (I) Instabilitäten (*links*) und entsprechende Grenzschichtprofile (*rechts*) (Schlichting und Gersten 2006)

Tollmien (1935) zeigen konnte, ist ein Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil ein

hinreichendes (und notwendiges) Kriterium für die Existenz reibungsloser Instabilitäten. Es besteht somit ein direkter Zusammenhang zwischen dem Druckgradienten und den Stabilitätseigenschaften laminarer Strömungen. Obwohl diese Aussagen aus der reibungslosen Stabilitätstheorie resultieren, kann allgemein gesagt werden, dass beschleunigte Strömungen deutlich stabiler sind, da diese keinen Wendepunkt aufweisen. Laut Schlichting und Gersten (2006) ist es daher so, dass Instabilitäten unter Gegendruck durch das Vorhandensein eines Wendepunktes oft nicht-viskose Instabilitäten und in beschleunigter Strömung oft viskose Instabilitäten sind. Abb. 2.5 zeigt Indifferenzkurven und Grenzschichtprofile für viskose und nicht-viskose Instabilitäten.

Um den Druckgradienten zu entdimensionieren, existieren verschiedene Druckgradientenparameter, wobei der folgende Parameter für den weiteren Verlauf dieser Arbeit eine wichtige Grundlage bildet:

$$\lambda_\theta := \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{ds}. \quad (2.18)$$

- **Kompressibilität:** Aus der linearen Stabilitätstheorie ist bekannt, dass für tiefe Mach-Zahlen im quasi-inkompressiblen Bereich die instabilste Mode zweidimensional ist. Für höhere Mach-Zahlen nimmt der Einfluss von schrägläufigen Wellen

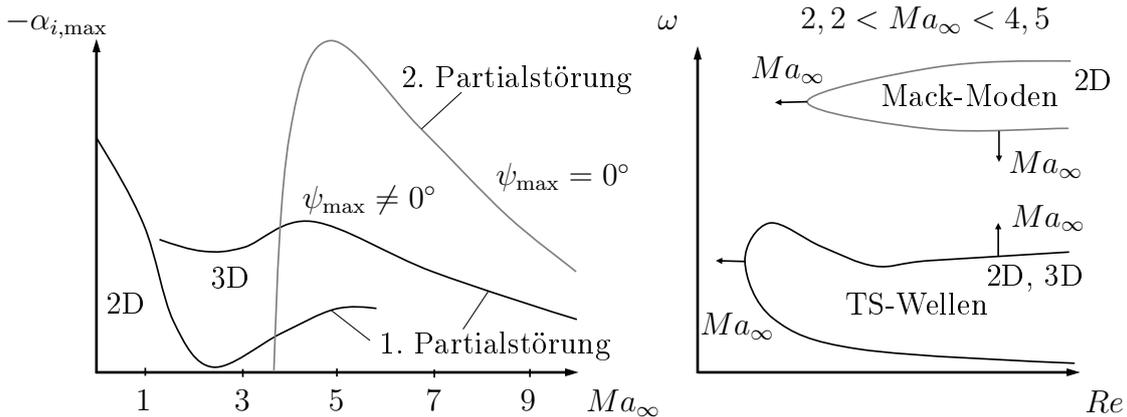


Abbildung 2.6: Mach-Zahleinfluss auf die maximalen, räumlichen Anfachungsfaktoren (*links*) und exemplarische Indifferenzkurven für hohe Mach-Zahlen im Bereich $2,2 < Ma_\infty < 4,5$ (*rechts*) für adiabate ebene Plattenströmungen nach Mack (1975), Schlichting und Gersten (2006) und Oertel Jr. und Delfs (1996)

zu. Für noch höhere Mach-Zahlen kann gezeigt werden, dass zweidimensionale sogenannte Mack-Moden (2. Partialstörung) die höchsten Anfachungsraten aufweisen und daher dominant sind (Mack 1975). Beschriebenes ist in Abb. 2.6 (*links*) dargestellt. Abb. 2.6 (*rechts*) zeigt zusätzlich exemplarische Indifferenzkurven für eine adiabate, ebene Plattenströmung und wie sich diese Kurven mit steigender

Mach-Zahl ändern. Zusammengefasst bedeutet das, dass der Kompressibilitäts-einfluss im transsonischen Bereich als stabilisierend eingestuft werden kann. Im Bereich $2 < Ma_\infty < 4$ ist eine Destabilisierung zu beobachten und für hypersonische Strömungen wieder eine Stabilisierung (Arnal 1993). Eine Übersicht über die physikalischen Grundlagen der laminar-turbulenten Transition für Strömungen bei hohen Mach-Zahlen ist in Mack (1975), Arnal (1989) und Arnal (1993) gegeben.

- **Konvektionseffekte** (auch Grenzschichtgeschichte) beschreiben den Einfluss stromaufliegender Ereignisse auf die Transition. Aus stabilitätstheoretischer Sicht scheint es sinnvoll, dass sich bspw. Einflüsse durch den Druck kumulieren und einen Einfluss auf den Zustand der stromabliegenden Grenzschicht haben (vgl. Abu-Ghannam und Shaw 1980).
- **Wärmeübergang an der Oberfläche:** Das Kühlen einer Wand hat einen stabilisierenden, das Heizen einen destabilisierenden Effekt auf die laminare Grenzschicht (Arnal 1993).

Für die im Folgenden genannten Einflussfaktoren, die nicht unmittelbar für das Verständnis der vorliegenden Arbeit relevant sind, sei auf die Literatur verwiesen (vgl. Arnal 1993, Schlichting und Gersten 2006, Abu-Ghannam und Shaw 1980 und Kožulović 2007): Stromlinienkrümmung, Oberflächenbeschaffenheit, Akustik, Absaugung/Ausblasung, Instationarität der Grundströmung, Realgaseffekte, Schwerkraft im Falle natürlicher Konvektion.

2.6 Vorhersage der Transition

In Abb. 2.7 ist eine Übersicht zu verschiedenen Vorhersagemethoden bestimmter Kenngrößen der laminar-turbulenten Transition gegeben. Die Indifferenz-Reynolds-Zahl Re_{ind}

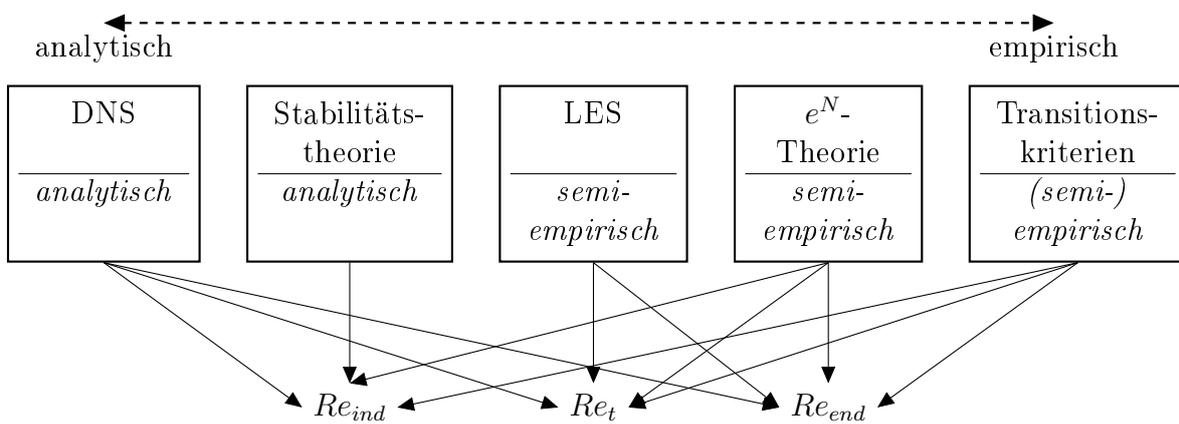


Abbildung 2.7: Vorhersagemethoden der laminar-turbulenten Transition nach Scholz et al. (2009) und Herbst (2013)

(auch kritische Reynolds-Zahl genannt) bezieht sich auf die Stelle, ab der instabile Moden erstmals angefacht werden. Re_t kennzeichnet den Beginn der Transition (*transition onset*) und Re_{end} das Ende der Transition (*transition end*). Aus anwendungsorientierter Sicht ist es besonders wichtig, die Stelle beginnender Transition zu kennen, da sich hier die Wandschubspannung erstmals nennenswert vom laminaren Wert unterscheidet. Ein Ansatz, der die laminar-turbulente Transition inklusive aller Mechanismen abbildet, ist die Direkte Numerische Simulation (DNS), bei der die Navier-Stokes-Gleichungen ohne vereinfachende Modellierungen numerisch simuliert werden (z.B. Fasel 1976). Auch die Grobkalensimulation (LES, *Large Eddy Simulation*) ist in der Lage, Teile der natürlichen Transition abzubilden. Schlatter (2005) zeigt, dass hierzu die Verwendung eines Feinstrukturmodells erforderlich ist, das die Güte der Lösung beeinflusst. Diese Methode ist daher als semi-empirisch einzustufen. Beide Methoden sind aufgrund ihres großen Rechenaufwandes für die industrielle Anwendung zurzeit nicht praktikabel. Nachfolgend soll näher auf die für den weiteren Verlauf der Arbeit relevanten Methoden eingegangen werden.

2.6.1 Stabilitätstheorie

Wie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben, basiert die mathematische Modellierung der laminar-turbulenten Transition auf einem Störansatz, der in Kombination mit den Erhaltungsgleichungen eine Analyse des Stabilitätsverhaltens laminarer Grenzschichten ermöglicht. Die in Abschnitt 2.4.1 beschriebene lineare Theorie beschränkt sich auf die Analyse der Anfachtung zweidimensionaler Störungen im linearen Bereich (primäre Instabilitäten). Da die klassische, lokale, lineare Theorie durch Annahmen (z.B. die Parallelströmungsannahme) in bestimmten Fällen deutliche Einschränkungen bzgl. der Vorhersage aufweist, gibt es verschiedene Erweiterungen, wie die nicht-lokale, parabolisierte Theorie sowie globale Theorien (Bi-Globale Theorie, die drei-dimensionale, parabolisierte Theorie und die Tri-Globale Theorie). Eine Übersicht über die verschiedenen Methoden ist in Herbert (1997), Theofilis (2011) und Paredes (2014) gegeben.

2.6.2 Transitionskriterien

e^N -Methode

Die Stabilitätstheorie trifft eine Aussage über die Anfachtung instabiler Frequenzen bezogen auf eine initiale Störung. Die initiale Amplitude selber kann dabei jedoch nicht angegeben werden, da keine Vorhersage zur Entstehung von Störungen in der Grenzschicht und dem Zusammenhang zum Störfeld der Außenströmung (Rezeptivität) gemacht werden können. D.h. der Punkt beginnender und abgeschlossener Transition können nicht direkt angegeben werden. Folglich sind vereinfachende Annahmen vonnöten, die eine korrelationsbasierte Abschätzung ermöglichen.

Ein empirischer Lösungsansatz dieses Problems wurde von Smith und Gamberoni (1956) sowie van Ingen (1956) unabhängig voneinander präsentiert. Gemäß der e^9 -Theorie (später e^N -Theorie) ist der Punkt beginnender Transition dort, wo das Verhältnis von

ist, wurden verschiedenste Kriterien entwickelt, die eine kostengünstige Berechnung des Transitionsbeginns (des kritischen Punktes und des Transitionsendes) unter Verwendung zusätzlicher Approximationen und Annahmen ermöglichen. Diese Kriterien basieren z.T. rein auf empirischen Korrelationen oder sind theoretisch abgeleitet. Die nachfolgende Darstellung soll sich auf einige, für den weiteren Verlauf der Arbeit relevante, Methoden für Transitionsmechanismen in Strömungsrichtung beschränken.

Das **empirische Kriterium** nach Abu-Ghannam und Shaw (1980) basiert rein auf experimentellen Daten und berechnet in Abhängigkeit des lokalen Druckgradientenparameters λ_θ und des Turbulenzgrades Tu eine Transition-*Onset* Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl $Re_{\theta t}$:

$$Re_{\theta t} = 163 + e^{F(\lambda_\theta)(1-100Tu/6,91)} \quad (2.22)$$

mit

$$F(\lambda_\theta) = \begin{cases} 6,91 + 12,75\lambda_\theta + 63,64\lambda_\theta^2; & \lambda_\theta < 0 \\ 6,91 + 2,48\lambda_\theta - 12,27\lambda_\theta^2; & \lambda_\theta \geq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Aus einem Vergleich zwischen der tatsächlichen Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ und dem berechneten lokalen Schwellwert $Re_{\theta t}$ ergibt sich an derjenigen Stelle, an der erstmals $Re_\theta > Re_{\theta t}$ gilt, der Transitionsbeginn. Die Datenbasis dieser Korrelation besteht aus experimentellen Daten von Abu-Ghannam und Shaw (1980) selber, die an bedruckten ebenen Platten durchgeführt wurden, ergänzt durch zu damaliger Zeit in der Literatur verfügbarer Daten von Transitionsmessungen. Der überwiegende Teil dieser Daten besteht jedoch aus Ergebnissen bei (aus außenaerodynamischer Sicht) hohen Turbulenzgraden (vgl. Abu-Ghannam und Shaw 1980, S. 218, Abb. 6).

Im Gegensatz zu empirischen Methoden haben stabilitätsbasierte Kriterien das Ziel, aus stabilitätstheoretischen Betrachtungen vereinfachte Zusammenhänge abzuleiten, da die Anwendung der reinen Stabilitätstheorie die aufwendige Lösung eines Eigenwertproblems für diverse Frequenzen erfordert (vgl. Abschn. 2.4.1). Weil diese Kriterien eine theoretische Abschätzung des N -Faktors ermöglichen, jedoch (wie auch die reine Stabilitätstheorie) keine Aussage über die initialen Störungen oder den Ort beginnender Transition machen können, werden zusätzlich experimentelle Korrelationen benötigt, wodurch die im Folgenden vorgestellten Kriterien als **semi-empirisch** einzustufen sind. Prominente Vertreter dieser Klasse sind die Kriterien von Gleyzes et al. (1985), Arnal et al. (1984) und Drela und Giles (1987), die alle auf Daten aus der linearen Stabilitätsanalyse selbstähnlicher inkompressibler Falkner-Skan-Profilen basieren. Den besagten Kriterien liegt die folgende Idee zugrunde: Wie in Abb. 2.9 (*links*, exemplarisch für zwei Formfaktoren) gezeigt, kann die exakte, aus der Stabilitätsanalyse selbstähnlicher Falkner-Skan-Geschwindigkeitsprofile resultierende, Enveloppe durch eine lineare Funktion approximiert werden, wodurch jedem Formfaktor ein Zahlenpaar $dN/dRe_\theta(H_{12})$, $Re_{\theta 0}(H_{12})$ und damit eine lineare Funktion zugeordnet werden kann:

$$N = \frac{dN}{dRe_\theta}(Re_\theta - Re_{\theta 0}). \quad (2.24)$$

Da die Bestimmung der exakten Enveloppe eine Stabilitätsanalyse erfordert, ermöglicht

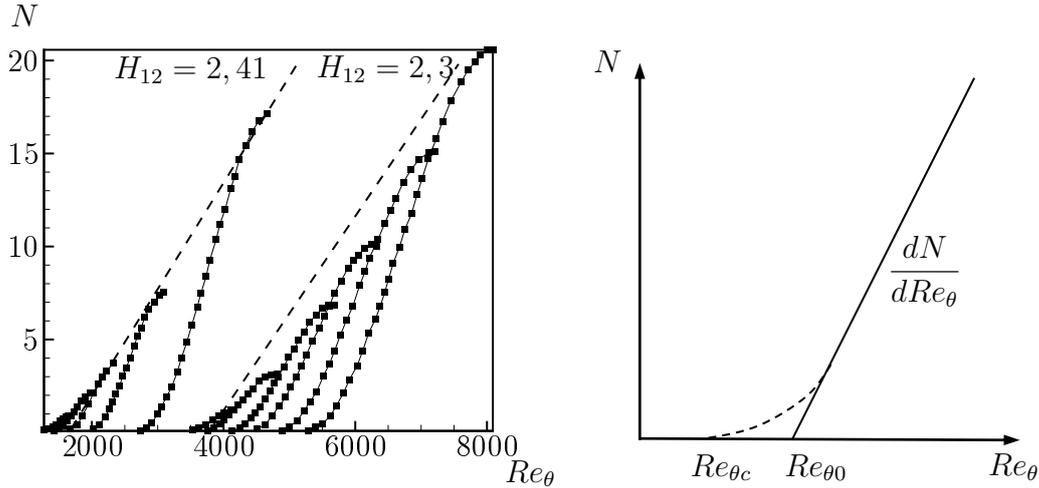


Abbildung 2.9: Darstellung der Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung der laminaren Falkner-Skan-Profile für zwei exemplarische Formfaktoren inklusive linearer Approximation der Einhüllenden (*links*) (Drela und Giles 1987) und schematische Darstellung der linearen Approximation der Einhüllenden (*rechts*) (Habiballah 1981)

die Approximation der Einhüllenden über eine lineare Funktion eine einfache Berechnung des N -Faktors, da sich das Problem auf die Bestimmung der Steigung dN/dRe_θ sowie der Nullstelle $Re_{\theta 0}$ der linearen Funktion bzw. des tatsächlichen Indifferenzpunktes $Re_{\theta c}$ reduziert (siehe Abb. 2.9, *rechts*). In Abb. 2.9 (*rechts*) ist ferner der Zusammenhang zwischen $Re_{\theta c}$ und $Re_{\theta 0}$ schematisch skizziert: $Re_{\theta 0}$ beschreibt den sich aus der linearen Approximation ergebenden Indifferenzpunkt, $Re_{\theta c}$ den tatsächlichen Indifferenzpunkt der laminaren Falkner-Skan-Profile. Die Information über einzelne Frequenzen geht bei diesem Ansatz allerdings inhärent (da nur die Einhüllende approximiert wird) verloren. Im weiteren Verlauf soll zunächst das Kriterium nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (Arnal, Habiballah und Delcourt, AHD) näher beschrieben werden.

Während es mit Hilfe der Stabilitätstheorie möglich ist, die Anfachung instabiler Frequenzen zu bestimmen, kann, wie einleitend beschrieben, keine Aussage über den tatsächlichen Ort der Transition getroffen werden (Arnal et al. 1984). Daher wird der Ort beginnender Transition als der Punkt definiert, an dem erstmalig $N = N_t$ gilt, d.h. der aktuelle N -Faktor gemäß der e^N -Methode den Schwellwert N_t überschreitet, sodass aus Gl. 2.24 folgt:

$$N_t = \frac{dN}{dRe_\theta}(Re_{\theta t} - Re_{\theta 0}). \quad (2.25)$$

Die weitere Herleitung beinhaltet elementare Rechenoperationen und Approximationen: Der Schwellwert N_t kann nach Mack (1977) mit dem Turbulenzgrad der Außenströmung korreliert werden: $N_t = f(Tu)$ (siehe Gl. 2.21). Gleichsetzen der Gleichungen 2.25 und

2.21 sowie Subtraktion der Größe Re_{θ_c} ergibt:

$$Re_{\theta_t} - Re_{\theta_c} = \underbrace{Re_{\theta_0} - Re_{\theta_c} - \frac{8,43}{dN/dRe_{\theta}}}_{a(\lambda_{\theta})} - \underbrace{\frac{2,4}{dN/dRe_{\theta}}}_{b(\lambda_{\theta})} \ln(Tu). \quad (2.26)$$

Die Unbekannten in Gl. 2.26 $a(\lambda_{\theta})$ sowie $b(\lambda_{\theta})$ können unter Verwendung selbstähnlicher Falkner-Skan-Lösungen mit dem Druckgradientenparameter korreliert werden, womit sich Gl. 2.26 zur finalen Form des Kriteriums ergibt:

$$Re_{\theta_t} - Re_{\theta_c}^* = -206e^{25,7\bar{\lambda}_{\theta t}} (\ln(16,8Tu) - 2,77\bar{\lambda}_{\theta t}). \quad (2.27)$$

Um Konvektionseffekte zu berücksichtigen, wird λ_{θ} durch den räumlich gemittelten Druckgradientenparameter $\bar{\lambda}_{\theta}$ ersetzt, der folgendermaßen definiert ist:

$$\bar{\lambda}_{\theta}(s) := \frac{1}{s - s_c} \int_{s_c}^s \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{d\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \frac{1}{s - s_c} \int_{s_c}^s \lambda_{\theta}(\mathcal{S}) d\mathcal{S}. \quad (2.28)$$

$\forall s \neq s_c$. Die Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl am Indifferenzpunkt Re_{θ_c} kann aus einer Korrelation mit dem Formfaktor H_{12} berechnet werden:

$$Re_{\theta_c} = e^{52/H_{12}-14,8}. \quad (2.29)$$

Der kritische Punkt ist an der Stelle in Strömungsrichtung definiert, wo erstmals $Re_{\theta} = Re_{\theta_c} = Re_{\theta_c}^*$ gilt. Die Wahl der Parameter (d.h. $Re_{\theta_t} - Re_{\theta_c}^* = f(\bar{\lambda}_{\theta t})$) orientiert sich nach Arnal et al. (1984) an Granville (1953).

Für das AHD-Kriterium existieren eine Reihe von Erweiterungen, die insbesondere dessen Anwendung für kompressible Strömungen bei hohen Mach-Zahlen sowie die Berücksichtigung von Wandheizung ermöglichen: Arnal et al. (2011) erweitern das AHD-Kriterium für Machzahlen bis 1,6 unter Verwendung kompressibler Falkner-Skan-Lösungen und kompressibler Stabilitätsgleichungen:

$$Re_{\theta_t} - Re_{\theta_c}^* = \mathcal{A} e^{\mathcal{B}\bar{\lambda}_{\theta}} [\ln(\mathcal{C} Tu) - \mathcal{D}\bar{\lambda}_{\theta}] \quad \forall Tu < 2,7\%, \quad (2.30)$$

$$Re_{\theta_c} = e^{\mathcal{E}/H_{12}-\mathcal{F}} \quad (2.31)$$

Die Werte für \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} und \mathcal{F} hängen von der lokalen Mach-Zahl ab:

$$\mathcal{A} = 98,6Ma_e^3 - 356,44Ma_e^2 + 117,13Ma_e - 236,69 \quad (2.32a)$$

$$\mathcal{B} = -13,04Ma_e^4 + 38,5Ma_e^3 - 30,07Ma_e^2 + 10,89Ma_e + 22,7 \quad (2.32b)$$

$$\mathcal{C} = 0,21Ma_e^3 + 4,79Ma_e^2 - 1,76Ma_e + 22,56 \quad (2.32c)$$

$$\mathcal{D} = -3,48Ma_e^4 + 6,26Ma_e^3 - 3,45Ma_e^2 + 0,23Ma_e + 12 \quad (2.32d)$$

$$\mathcal{E} = 0,6711Ma_e^3 - 0,7379Ma_e^2 + 0,167Ma_e + 51,904 \quad (2.32e)$$

$$\mathcal{F} = 0,3016Ma_e^5 - 0,7061Ma_e^4 + 0,3232Ma_e^3 + 0,0083Ma_e^2 - 0,1745Ma_e + 14,6. \quad (2.32f)$$

Zusätzlich wurde das Kriterium von Perraud und Durant (2016) für den gesamten Bereich der 1. Partialstörung bis Mach 4 und in der näheren Vergangenheit von Perraud und Brazier (2019) für hypersonische Strömungen unter Berücksichtigung von Mack-Moden bis Mach 8 erweitert. Da die erweiterten Kriterien nach wie vor, unter Beibehaltung der generellen Struktur des Kriteriums, einen lokalen Schwellwert $Re_{\theta t}$ berechnen, bieten sie den Vorteil, dass zu deren Anwendung keine grundsätzliche neue Programmierung notwendig ist. Arnal et al. (2011) und Perraud und Durant (2016) berücksichtigen zusätzlich Wandtemperatureffekte. Details zu kompressiblen AHD-Kriterien werden im Rahmen der Modellentwicklung diskutiert (Abschn. 3.3.8).

Im Bereich starken Gegendrucks, der bis zur Ablösung führt, verspricht die Verwendung des Kriteriums nach Gleyzes et al. (1985) und Habiballah (1981) (GH) zusätzliche Genauigkeit. Die Datenbasis für das GH-Kriterium bilden exakte Stabilitätsuntersuchungen von selbstähnlichen abgelösten Grenzschichtprofilen (vgl. Christian et al. 1970). Dazu wird der folgende Ansatz verwendet, der, sobald der Formfaktor den Wert 2,7 überschreitet, aktiviert wird:

$$N(Re_{\theta}) = N(Re_{\theta} = Re_{\theta G}) + \int_{Re_{\theta G}}^{Re_{\theta}} \frac{dN}{dRe_{\theta}} dRe_{\theta} = N_G + \int_{Re_{\theta G}}^{Re_{\theta}} \frac{-2,4}{B_G(H_{12})} dRe_{\theta}. \quad (2.33)$$

B_G kann dabei in Abhängigkeit des inkompressiblen Formfaktors gemäß Gleyzes et al. (1985) folgendermaßen berechnet werden:

$$B_G = -2,4 \left(\frac{dN}{dRe_{\theta}} \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{162,11093}{H_{12}^{1,1}}; & H_{12} > 3,36 \\ 73e^{-1,56486(H_{12}-3,02)}; & 2,8 < H_{12} < 3,36 \\ -103e^{-4,12633(H_{12}-2,8)}; & H_{12} < 2,8 \end{cases} \quad (2.34)$$

N_G bezeichnet den N -Faktor, der den aktuellen Strömungszustand an der Stelle charakterisiert, an der zwischen dem AHD-Kriterium und dem Kriterium nach Gleyzes geschaltet wird, d.h. $s = s_G$. Entsprechend kann $N(s_G)$ aus dem invertierten AHD-Kriterium bestimmt werden (siehe Cliquet et al. 2008). Das dazu verwendete $Re_{\theta G}$ entspricht dem Wert von Re_{θ} an der Stelle $s = s_G$. Gemäß Gl. 2.21 kann aus dem resultierenden Tu_t dann der gesuchte N -Faktor N_G berechnet werden.

Die Methode von Drela und Giles (1987) setzt direkt bei den Arbeiten von Gleyzes et al. (1985) an, die die approximierete Steigung der Enveloppe direkt über dRe_{θ} integrieren. Im Gegensatz zu Gleyzes et al. (1985) versuchen Drela und Giles (1987), die Integration über dRe_{θ} durch eine Integration über ds zu ersetzen, wodurch aus der ursprünglichen Variante der folgende über ds integrierende Ausdruck wird:

$$N(s) = \int_{s_0}^s \frac{dN}{dRe_{\theta}} \frac{dRe_{\theta}}{dS} dS. \quad (2.35)$$

Dazu verwenden Drela und Giles (1987), neben der erläuterten Approximation für dN/dRe_{θ} ,

eine weitere Näherung für den Ausdruck dRe_θ/ds . Für weitere Details sei auf Drela und Giles (1987) verwiesen.

Würz (1995) berichtet für Transition im verzögerten Bereich von einer schlechteren Übereinstimmung der Ergebnisse mit experimentellen Daten für die Methode von Drela und Giles (1987), falls über ds anstelle von dRe_θ integriert wird. Für die von Würz (1995) betrachteten Fälle werden die N -Faktoren im Vergleich zu experimentellen Transitionpositionen auf diese Art und Weise unterschätzt. Ähnliches beobachten Weiss et al. (2019), die mit der Methode von Drela und Giles (1987) für Transition im verzögerten Bereich deutlich tiefere N -Faktoren als unter Verwendung lokaler, linearer Stabilitätstheorie und der e^N -Methode erhalten.

Eine Analyse dieser Methoden von Dini et al. (1992) und Dini (1990) konnte zusätzlich zeigen, dass strenggenommen eine Abhängigkeit der Steigung vom Formfaktor innerhalb des Ansatzes berücksichtigt werden müsste: Angenommen, es würde statt einer linearen Approximation der Enveloppe die tatsächliche Einhüllende integriert, wird dennoch im Falle nicht-selbstähnliche Strömungen für alle Kriterien, die diesen Ansatz verwenden, ein Fehler eingebracht. Wie von Dini et al. (1992) und Dini (1990) für die Methode von Drela und Giles (1987) gezeigt, muss korrekterweise auch die Änderung des N -Faktors in Abhängigkeit des Formfaktors berücksichtigt werden, sodass:

$$N(Re_\theta, H_{12}) = \int_{Re_{\theta 0}}^{Re_\theta} \left(\frac{\partial N}{\partial Re_\theta} + \frac{\partial N}{\partial H_{12}} \frac{dH_{12}}{dRe_\theta} \right) dRe_\theta \quad (2.36)$$

Für die Geradengleichung 2.24 heißt das, dass, wenn auf Basis der korrekten Steigung linear approximiert werden soll, auch hier die Abhängigkeit der Änderung des N -Faktors vom Formfaktor berücksichtigt werden müsste, sodass

$$N = \left(\frac{\partial N}{\partial Re_\theta} + \frac{\partial N}{\partial H_{12}} \frac{dH_{12}}{dRe_\theta} \right) (Re_\theta - Re_{\theta 0}) \quad (2.37)$$

gelten müsste. Die ursprüngliche Formulierung (Gl. 2.24) ergibt sich für den Grenzfall der Selbstähnlichkeit, d.h. $dH_{12}/dRe_\theta = 0$. Am Beispiel eines sprunghaft ansteigenden Formfaktors kann man sich vergegenwärtigen, dass eine Vernachlässigung der Abhängigkeit des Formfaktors zu einer Unterschätzung des N -Faktors führen muss. Da die Komplexität der Ansätze unter Berücksichtigung der Zusatzterme deutlich erhöht würde und ohnehin an vielen Stellen Approximationen, die auf selbstähnlichen Lösungen basieren, verwendet werden, scheint eine Erweiterung der Methoden wenig zielführend.

2.6.3 Transportgleichungsansätze

Transportgleichungsmodelle sind Ansätze, die partielle Transportdifferentialgleichungen verwenden, um die laminar-turbulente Transition innerhalb eines Strömungslösers zu berücksichtigen. Der folgende Abschnitt soll eine Übersicht über den aktuellen Stand

der Forschung bzgl. dieser Methoden mit Schwerpunkt auf korrelationsbasierten (empirischen und semi-empirischen) Modellen für Transitionsmechanismen in Strömungsrichtung geben.

Low-Reynolds-Turbulenzmodelle

Frühe Ansätze zur Berücksichtigung der Transition mittels Transportgleichungen innerhalb von Strömungslösern bestanden in der Anwendung von *Low-Reynolds*-Turbulenzmodellen. Der ursprüngliche Zweck dieser Modelle war es, das Verhalten in der viskosen Unterschicht korrekt abzubilden. Als Alternative zu Wandfunktionen wurden dazu Dämpfungsfunktionen eingeführt, wodurch turbulente Größen in Wandnähe gedämpft werden.

Eine Untersuchung des Transitionsverhaltens für das SA- sowie das $k\text{-}\omega$ -SST Modell von Rumsey und Spalart (2009) konnte zeigen, dass beide Modelle für vollturbulente Rechnungen entworfen wurden und nicht dazu geeignet sind, sie konsistent für die Vorhersage natürlicher Transition zu verwenden. Ähnliches berichten Wilcox (2006) für das Wilcox $k\text{-}\omega$ -Modell und Schmidt und Patankar (1991a) für $k\text{-}\epsilon$ -Modelle. Einige Erweiterungen versuchen, die Vorhersagequalität zu verbessern, scheinen aber allenfalls für Bypass-Transition geeignet (z.B. Schmidt und Patankar 1991b, Wilcox 1994).

Korrelationsbasierte Modelle

Das physikalische Konzept der Intermittenz geht auf Emmons (1951) zurück, der einen statistischen Ansatz zum Auftreten turbulenter Flecken innerhalb transitioneller Grenzschichten verwendet. Darauf aufbauend gibt es verschiedene Aktivitäten, die dieses Konzept aufgreifen. Nennenswert sind Arbeiten von Dhawan und Narasimha (1958), die eine algebraische γ -Funktion entwickeln.

Die Idee, eine Transportgleichung für die Intermittenz zu verwenden, kam wesentlich später auf, da diese Herangehensweise inhärent an *Computational Fluid Dynamics*-Software (CFD-Software) gekoppelt ist. Frühe Arbeiten, die eine solche Gleichung einführen, sind die von Steelant und Dick (2001) und Menter et al. (2002). Menter et al. (2002) begründen damit eine Klasse von korrelationsbasierten Transitionsmodellen, die im Gegensatz zu Steelant und Dick (2001) nur gitterpunktlokale Informationen verwenden. In Folgearbeiten von Menter et al. (2006a), Menter et al. (2006b) sowie Langtry und Menter (2009) wird so ein vollständig lokales Framework, bestehend aus Transportgleichungen in Kombination mit empirischen Kriterien, zur Modellierung der laminar-turbulenten Transition vorgestellt. Die Autoren nennen diese Klasse von Modellen lokale, korrelationsbasierte Transitionsmodelle (*Local Correlation-Based Transition Models*, LCTM). Ein Vorteil dieser Modelle ist, dass sie in besonderer Art und Weise CFD-kompatibel sind. Es wird keine spezielle Code-Infrastruktur⁵ benötigt. Das ermöglicht eine leichte bzw. zu vorhandenen Turbulenzmodellen identische Implementierung und Parallelisierung. Die Verwendung von Transportgleichungen hat den Vorteil, dass nicht-lokale (stromauf

⁵Wie z.B. die Integration entlang wandnormaler Strahlen zur Berechnung integraler Grenzschichtgrößen über Domain-Grenzen hinweg.

liegende) Informationen lokal verfügbar gemacht werden können. Ferner kommt diese Klasse von Modellen mit wenig Nutzerinteraktion aus, wodurch die Anwendung oft besonders einfach und praktikabel ist. Zusätzlich sind LCTM oft deutlich robuster als stromlinienbasierte Verfahren, was die Berechnung komplexer, industriell relevanter Fälle vereinfacht. Weitere Vorteile dieser Modelle sind in Abschn. 3.2 beschrieben.

Ein weit verbreitetes Modell dieser Klasse ist das γ - Re_θ -Modell von Langtry und Menter (2009), das zwei Transportgleichungen verwendet, um ein zu Abu-Ghannam und Shaw (1980) ähnliches Kriterium vollständig gitterpunktlokal auszuwerten. Die $\widetilde{Re}_{\theta t}$ -Gleichung wird dabei verwendet, um Werte des Kriteriums am Grenzschichttrand in die Grenzschicht zu diffundieren. Zusätzlich können über diese Transportgleichung laut Langtry und Menter (2009) Konvektionseffekte berücksichtigt werden. Die γ -Gleichung produziert in Abhängigkeit des Kriteriums eine Intermittenzvariable, die für eine Steuerung des Turbulenzmodells verwendet wird, um laminare und turbulente Regionen im Strömungsfeld festzulegen. Ein Nachteil dieses Modells ist, dass an verschiedenen Stellen der Grundsatz der Galilei-Invarianz verletzt wird.

Menter et al. (2015) formulieren das Modell daher vollständig Galilei-invariant um. Zusätzlich wird auf die $\widetilde{Re}_{\theta t}$ -Gleichung verzichtet und das Modell vereinfacht. Das zugrundeliegende Kriterium entspricht weiterhin einer modifizierten Variante des Kriteriums von Abu-Ghannam und Shaw (1980) und es wird eine der ursprünglichen Formulierung ähnliche γ -Gleichung verwendet.

Neuere Modelle nutzen Transportgleichungen, um die Integration entlang einer Stromlinie abzubilden. Das ist bspw. nützlich, um die Integration eines N -Faktors in Strömungsrichtung gitterpunktlokal durchzuführen. Laut Uranga (2011) stammt die ursprüngliche Idee der Verwendung einer integrierenden Transportdifferentialgleichung im Kontext eines Transitionsmodells von *Mark Drela*. So ist in Uranga (2011) die Methode von Drela und Giles (1987) vollständig in einer integrierenden Transportgleichung beschrieben. Laut Uranga (2011) gilt:

$$\frac{DN}{Dt} = \nu \nabla^2 N + \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\theta} \frac{dN}{dRe_\theta} \frac{m+1}{2} l = \nu \nabla^2 N + \|\mathbf{u}\|_2 \psi, \quad (2.38)$$

was sich auf die generische Form einer integrierenden Transportgleichung mit dem Integranden ψ zurückführen lässt und die folgende Integration abbildet:

$$N(s) = \int_{s_0}^s \psi(\mathcal{S}) d\mathcal{S}. \quad (2.39)$$

Eine detaillierte Herleitung und Erklärung des Zusammenhangs zwischen Integration und partiellen Transportdifferentialgleichungen ist in Abschnitt 3.3.4 gegeben. Integrale Grenzschichtgrößen werden im Ansatz von Uranga (2011) allerdings nicht-lokal berechnet, d.h. sie werden aus einer Integration entlang wandnormaler Strahlen gewonnen.

Dem Modell von Coder und Maughmer (2014) und Coder (2014) (AFT-Modell, *Amplification Factor Transport*) liegt ebenfalls das Kriterium von Drela und Giles (1987) zugrunde, wodurch die verwendete Transportgleichung sehr ähnlich zu Gl. 2.38 ist. Im Ge-

gensatz zu Uranga (2011) werden Grenzschichtgrößen durch Falkner-Skan-Korrelationen approximiert, wodurch das Modell vollständig lokal ist. In verschiedenen Erweiterungen wurde das Modell (ähnlich Menter et al. 2015) modifiziert, um invariant unter Galilei-Transformation zu werden (Coder 2017). Ferner wurde das Modell mit einer γ -Gleichung ähnlich Langtry und Menter (2009) bzw. Menter et al. (2015) gekoppelt, wodurch nun eine weitere Transportgleichung verwendet wird (Coder 2019).

Weitere stabilitätsbasierte Modelle wurden von Ströer et al. (2020b) und Pascal et al. (2020) entwickelt, die beide auf dem AHD-Kriterium basieren. Das Modell von Pascal et al. (2020) verwendet jedoch nicht-lokale wandnormale Kommunikation zur Bereitstellung integraler Grenzschichtgrößen. In Ströer et al. (2022) werden auf Basis von Ströer et al. (2020b) zwei neue Galilei-invariante Modelle vorgestellt, die nun zusätzlich an eine zu Langtry und Menter (2009) ähnlichen γ -Gleichung gekoppelt sind. Die Modelle von Ströer et al. (2020b), Ströer et al. (2022) und Ströer et al. (2021) sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit und in Kap. 3 detailliert beschrieben.

Ein Modell, das die sogenannte *Parabolas*-Methode mittels integrierender Transportgleichungen anwendet, wurde von Bégou et al. (2017) entwickelt. Die *Parabolas*-Methode nach Arnal (1989) approximiert entdimensionierte Anfachungsraten aus Stabilitätslösungen selbstähnlicher Profile über Parabeln und nutzt diese in Form einer Datenbank in Kombination mit der e^N -Methode für die Transitionsvorhersage (siehe auch Perraud et al. 2009). Das Modell von Bégou et al. (2017) verwendet für jede Frequenz, für die in Strömungsrichtung die approximierten Anfachungsraten integriert werden sollen, eine eigene Transportgleichung. Für das Setzen der berechneten Position beginnender Transition, die mittels der e^N -Methode in Verbindung mit einem kritischen N -Faktor nach Mack (1977) berechnet wird, werden zwei weitere Transportgleichungen verwendet (siehe auch Bégou 2018). Ein Nachteil dieser Methode ist daher der große Rechen- und Speicheraufwand. Benötigte Grenzschichtgrößen werden nicht-lokal über eine Integration entlang wandnormaler Strahlen aus der RANS-Lösung beschafft.

Laminare kinetische Energie

Ein Ansatz von Walters und Leylek (2004) beschreibt das Anwachsen der kinetischen Energie von Störungen in laminaren Grenzschichten mittels einer zusätzlichen partiellen Differentialgleichung. Das ursprüngliche Konzept der Verwendung einer Gleichung für die sogenannte laminare kinetische Energie geht auf Mayle und Schulz (1997) zurück. Während Mayle und Schulz (1997) nicht-lokale Größen verwenden, formulieren Walters und Leylek (2004) das Modell vollständig lokal um. Auch wenn der Mechanismus noch nicht vollständig verstanden ist, wird angenommen, dass das Anwachsen der laminaren kinetischen Energie durch den sogenannten *Splat*-Mechanismus ausgelöst wird (Volino 1998). Durch den Wandeinfluss werden normale Fluktuationen in Strömungsrichtung umgelenkt. Gleichzeitig bilden sich lokal Druckgradienten aus, die die Störungen anfachen. Da der *Splat*-Mechanismus nur für großskalige Wirbel (bezogen auf den Wandabstand) stattfinden kann, unterteilen Walters und Leylek (2004) das turbulente Energiespektrum in zwei Bereiche. Dabei wird angenommen, dass niederfrequente Anteile zum Wachstum der laminaren kinetischen Energie beitragen, was eine Kernan-

nahme des Modells darstellt. Das Modell von Walters und Leylek (2004) basiert auf $k-\epsilon$ Wirbelviskositätsmodellen und wurde von Walters und Cokljat (2008) für $k-\omega$ -Modelle erweitert. Die Modelle wurden hauptsächlich für die Anwendung von Bypass-Transition entwickelt, berücksichtigen aber auch natürliche Transition. Ein Nachteil dieser Modelle ist, dass laut Sanz et al. (2007) eine hohe Netzauflösung in der Grenzschicht erforderlich ist.

Modelle für höhere Mach-Zahlen

Wie in Abschnitt 2.5 beschrieben, ändert sich ab einer bestimmten Mach-Zahl durch Kompressibilitätseffekte laut Stabilitätstheorie der Transitionsmechanismus. So müssen für die erste Partialstörung schräglauflaufende Wellen und im höheren Mach-Zahlenbereich die zweite Partialstörung (sogenannte Mack-Moden) berücksichtigt werden (vgl. Abb. 2.6). In Abhängigkeit der Mach-Zahl ergibt sich eine stabilisierende oder destabilisierende Wirkung auf die laminare Strömung. Folglich können die meisten Transitionsmodelle im hohen Mach-Zahlenbereich nicht ohne eine explizite Erweiterung angewendet werden.

Nachfolgend soll eine zusammenfassende Übersicht über Transportgleichungsmodelle gegeben werden, die für den Einsatz bei hohen Mach-Zahlen entworfen oder erweitert wurden: Ein frühes Modell stammt von Warren et al. (1995) und Warren und Hassan (1997, 1998), die in ihrem Ansatz das Modell von Young et al. (1993), das auf der Methode von Dhawan und Narasimha (1958) für die Intermittenzfunktion basiert, um den Einfluss von Mack-Moden erweitern. Kernelement der Modelle ist die Verwendung einer charakteristischen Zeitskala innerhalb eines Ansatzes für die laminare kinetische Energie. In Abhängigkeit des betrachteten Mechanismus ergeben sich unterschiedliche Funktionen für diese Zeitskala. McDaniel et al. (2000) erweitern das Modell von Warren und Hassan (1997, 1998) für den hypersonischen Bereich und berücksichtigen Mack-Moden.

Um eine gitterpunktlokale Formulierung zu erhalten, kombinieren Wang und Fu (2009, 2011) und Wang et al. (2012, 2016) Elemente des Modells von Langtry und Menter (2009) mit der Methode von Warren et al. (1995) und Warren und Hassan (1997, 1998). In Zhou et al. (2016) wurde die Zeitskala der 2. Partialstörung um die Berücksichtigung von *Nose Bluntness*-Effekten erweitert. In einem weiteren Schritt wurde eine zusätzliche Transportgleichung entwickelt, die einen Rauigkeitsanfachungsfaktor transportiert und so Rauigkeitseffekte berücksichtigt (Yang und Xiao 2019). Eine zusätzliche Anpassung dieses Modells wurde unter Verwendung von Feld Invertierung und maschinellem Lernen (*Field Inversion Machine Learning*-Ansatz) vorgenommen (Yang und Xiao 2020).

Ein weiterer Ansatz für Strömungen hoher Mach-Zahl für Bypass-Transition wurde von Steelant und Dick (1996) vorgeschlagen. Basierend auf diesem Ansatz entwickeln van der Eynde et al. (2017) ein Modell, das auf Weiterentwicklungen des Modells von Steelant und Dick (1996) basiert (Steelant und Dick 1999b, 1999a, 2001). *Transition-Onset* wird in diesen Modellen über empirische Kriterien detektiert.

Die Methode von Drela und Giles (1987) wurde von Kroo und Sturdza (2003) und Sturdza (2004) für den Bereich höherer Mach-Zahlen ($Ma < 2,4$) erweitert. Xu et al. (2020) verwenden dieses Kriterium innerhalb einer zu Coder und Maughmer (2014) analogen AFT-Gleichung. Mack-Moden werden in diesem Ansatz nicht berücksichtigt.

Stabilitätsbasierte Transportgleichungsmodelle auf Basis von $Re_{\theta t}$, die Kompressibilitätserweiterungen verwenden, sind von Ströer et al. (2020a) bzw. Ströer et al. (2021) und Pascal et al. (2020) entwickelt worden, wobei Pascal et al. (2020) Grenzschichtgrößen nicht-lokal aus einer wandnormalen Integration verwenden. Beide Modelle basieren auf dem bereits vorgestellten AHD-Kriterium bzw. dessen kompressiblen Erweiterung (bis Mach 1,6). Für das AHD-Kriterium existieren Erweiterungen bis Mach 8 (Perraud und Durant 2016 und Perraud und Brazier 2019). Ein Vorteil dieser Kriterien ist, dass die Struktur des ursprünglichen Kriteriums beibehalten wird, was die Implementierung in ein bestehendes AHD-basiertes Transitionsmodell erleichtert.

3 Physikalische Modellierung der laminar-turbulenten Transition

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung von drei neuartigen, stabilitätsbasierten Ansätzen zur Transitionsmodellierung mittels skalarer partieller Transportdifferentialgleichungen für allgemeine, unstrukturierte, kompressible, numerische Strömungslöser.

3.1 Motivation

Wie einleitend (Abschn. 1.1) und in Ströer et al. (2020a) gezeigt, ergeben sich unter Verwendung des $\gamma-Re_\theta$ -Modells für Fälle, bei denen Tollmien-Schlichting-Transition im verzögerten Bereich auftritt (oft bei tiefen Reynolds-Zahlen), verglichen mit experimentellen Daten sehr weit stromab liegende Transitionspositionen und für Fälle mit Transition im beschleunigten Bereich (oft bei hohen Reynolds-Zahlen) stromauf liegende Punkte beginnender Transition. Eine Analyse der zugrundeliegenden Kriterien nach Abu-Ghannam und Shaw (1980) sowie Langtry und Menter (2009), die beide primär für eine Anwendung bei hohen Turbulenzgraden entwickelt wurden, offenbart für außenaerodynamisch relevante Turbulenzgrade unter positiven sowie negativen Druckgradienten im Vergleich zu Kriterien, die auf linearer Stabilitätstheorie basieren, eine große Differenz. Abb. 1.2 zeigt einen Vergleich dieser Kriterien mit dem stabilitätsbasierten Kriterium nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (Arnal, Habiballah und Delcourt, AHD), das in Abschn. 2.6.2 und auch im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher beschrieben ist. So ist ersichtlich, dass das AHD-Kriterium im verzögerten Bereich ($\lambda_\theta < 0$) deutlich tiefere Werte für $Re_{\theta t}$ und im beschleunigten Bereich ($\lambda_\theta > 0$) deutlich höhere Werte für $Re_{\theta t}$ postuliert. Ein qualitativer Vergleich deutet darauf hin, dass der oben beschriebenen Diskrepanz für Fälle bei sehr hohen und sehr tiefen Reynolds-Zahlen in Verbindung mit entsprechenden Druckgradienten unter Verwendung des AHD-Kriteriums entgegengewirkt werden könnte. In Ströer et al. (2020a) veröffentlichte Ergebnisse bestätigen dies.

3.2 Einordnung, Anforderungen und Übersicht

Die im Folgenden vorgestellten Modelle lassen sich einer Klasse von Transitionsmodellen zuordnen, die versuchen, Transitionskriterien in einer CFD-kompatiblen (*Computational Fluid Dynamics*, CFD) Weise abzubilden. Das erste Modell dieser Art geht auf Menter et al. (2002) zurück. In den Folgejahren wurde dieses Modell zum weit verbreiteten

γ - Re_θ -Modell (Langtry und Menter 2009) erweitert, das auf einem modifizierten empirischen Kriterium nach Abu-Ghannam und Shaw (1980) basiert. Im Zusammenhang dieser Arbeiten definieren die Autoren diese Klasse von Modellen als lokale, korrelationsbasierte Transitionsmodelle (*Local Correlation-Based Transition Models*, LCTM). Im Gegensatz zu den LCTM-Modellen, die rein empirische Kriterien verwenden, basieren die neuen Ansätze auf höherwertigen semi-empirischen Kriterien, die selbstähnliche Falkner-Skan-Lösungen und lineare, lokale Stabilitätstheorie (analytisch) in Verbindung mit der e^N -Methode (empirisch) nutzen. Daher soll nachfolgend statt LCTM von lokalen Transitionsmodellen (LTM) gesprochen werden.

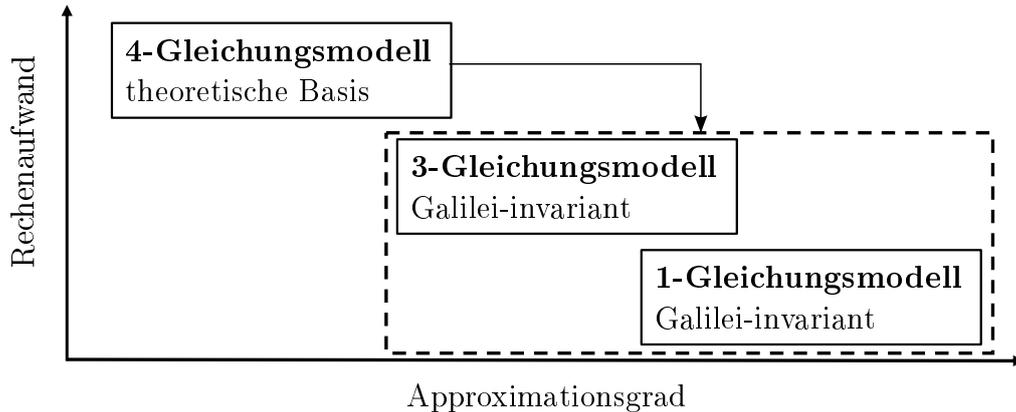


Abbildung 3.1: Einordnung der neuen, stabilitätsbasierten Modelle in ein Gesamtkonzept zur Transitionstransportgleichungsmodellierung

Die Vorteile dieser Modelle liegen in ihrer Anwendbarkeit und Implementierbarkeit in generelle, unstrukturierte CFD-Löser. Nachfolgend sollen die Charakteristika dieser Modelle zusammenfassend beschrieben werden:

- Es ist wenig Interaktion mit dem Anwender nötig. Damit grenzen sich die besagten Modelle von stromlinienbasierten Verfahren ab, die oftmals viel Input und damit verbundenen Aufwand sowie Expertenwissen vom Nutzer erfordern.
- Durch ihre Definition und die Verwendung von Transportgleichungen sind LTM oft robuster als stromlinienbasierte Verfahren und können einfacher und schneller auf komplexe, industriell relevante Konfigurationen angewandt werden.
- LTM fordern in der Regel Gitterpunktlokalität. D.h. es dürfen/sollen nach Möglichkeit nur am jeweiligen Gitterpunkt verfügbare Informationen verwendet werden. Dadurch wird Code-Infrastruktur vermieden, die nicht in generellen Lösern als gegeben vorausgesetzt werden kann (wie bspw. die Integration entlang wandnormaler Strahlen zur Bereitstellung integraler Grenzschichtgrößen). Die Modelle können so ohne Arbeiten an der generellen Infrastruktur des Codes in beliebige CFD-Software ähnlich zu vorhandenen Turbulenzmodellen implementiert werden.

- Die Modelle basieren oft auf Transportgleichungen, da diese ein mächtiges Werkzeug sind, komplexe Operationen, die die Kommunikation über Gebietsgrenzen (*Domaingrenzen*) erfordern⁶, durch das Lösen einer partiellen Differentialgleichung zu vermeiden. Ferner können so Informationen von stromauf nach stromab transportiert werden, ohne den Grundsatz der Lokalität zu verletzen. Das bedeutet auch, dass die Parallelisierbarkeit dieser Methoden analog zu Turbulenzmodellen inhärent gegeben ist.
- Verschiedene Modi (z.B. Tollmien-Schlichting-Transition, querströmungsinduzierte Transition, Bypass-Transition, ablösungsinduzierte Transition, etc.) können innerhalb eines Transitionsmodells abgebildet werden. Dieser Vorteil kommt insbesondere bei Modellen zum Tragen, die auf Basis von $Re_{\theta t}$ formuliert sind.

Tab. 3.1 gibt eine Übersicht über die vorgestellten neuen Transitionsmodelle und soll zusammen mit Abb 3.1 als Orientierung für die folgenden Abschnitte dienen. Enthaltene Details werden daher im Verlauf der vorliegenden Arbeit erläutert. Eine Zusammenfas-

	1-Gl.-Modell	3-Gl.-Modell	4-Gl.-Modell
Abschn.	3.4	3.4	3.3
Galilei-invariant	✓	✓	✗
gitterpunktlokal	✓	✓	(✗)
Druckgradientenparameter	λ_{θ}	$\bar{\lambda}_{\theta}$	λ_{θ}
$Re_{\theta c}$	$Re_{\theta c}(\lambda_{\theta})$	$Re_{\theta c}(\bar{\lambda}_{\theta})$	$\widetilde{Re}_{\theta c}^*$
Transportgleichungen	γ - - -	γ $\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ GI $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ GI -	\widetilde{l}_{γ} o. γ $\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$
Notation	1 Gl. GI	3 Gl. GI	\widetilde{l}_{γ} : 4 Gl. k, γ : 4 Gl. k γ ; G: Gleyzes, k: kompressibel
Referenz	Ströer et al. (2022) vorliegende Arbeit	Ströer et al. (2022) vorliegende Arbeit	Ströer et al. (2020b) Ströer et al. (2020a) Ströer et al. (2021) vorliegende Arbeit

Tabelle 3.1: Übersicht über die Modelle des neuen Modellierungsframeworks, GI steht für Galilei-invariant

⁶Beispiele sind die Integration entlang von Stromlinien, die Definition von Bereichen im Lösungsfeld und der Transport von Strömungsgrößen.

sung der Modellgleichungen und Details bzgl. der Implementierung sowie des numerischen Verhaltens sind dem Anhang A und B zu entnehmen.

Abb. 3.1 ordnet die Modelle in ein Gesamtkonzept zur Transitionstransportgleichungsmodellierung ein. Das 4-Gleichungsmodell hat den Anspruch, das zugrundeliegende Kriterium möglichst genau in einem Transitionsmodell abzubilden und stellt eine fundierte theoretische Basis bereit, die detailliert zeigt, inwiefern es möglich ist, das Kriterium bzw. einen damit assoziierten Schwellwert lokal im Strömungsfeld verfügbar zu machen. Für das 3- und das 1-Gleichungsmodell wurde, ausgehend vom 4-Gleichungsmodell, der Approximationsgrad erhöht und dadurch ein geringerer Rechenaufwand ermöglicht. Ein besonderer Fokus des 3- und des 1-Gleichungsmodells liegt darin, eine Galilei-invariante Formulierung unter Beibehaltung der Vorhersagegüte bereitzustellen.

3.3 Neuer Modellierungsansatz - 4-Gleichungsmodell

3.3.1 Transitionskriterium

Der vorgestellte Ansatz verwendet das semi-empirische auf linearer Stabilitätstheorie basierende Kriterium für TS-Instabilitäten nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (Arnal, Habiballah und Delcourt, AHD). Eine detaillierte Beschreibung und Herleitung des Kriteriums ist in Abschn. 2.6.2 gegeben:

$$Re_{\theta t} - Re_{\theta c}^* = -206e^{25,7\bar{\lambda}_{\theta t}} (\ln(16,8Tu) - 2,77\bar{\lambda}_{\theta t}) \quad (3.1a)$$

$$Re_{\theta c} = e^{52/H_{12}-14,8}. \quad (3.1b)$$

Statt eines lokalen Parameters, der den Druckgradienten beschreibt, wird hier ein räumlich gemittelter Parameter $\bar{\lambda}_{\theta t}$ verwendet (Gl. 2.28). Auf diese Weise sollen Konvektion-/Geschichtseffekte (*History*) der Grenzschicht berücksichtigt werden.

3.3.2 Integrale Grenzschichtgrößen

Für die Vorhersagequalität eines Transitionsmodells ist eine hinreichend genau gitterpunktlokale Approximation integraler Grenzschichtgrößen unabdingbar. Neben der Tatsache, dass Approximationen in den meisten Fällen Selbstähnlichkeit annehmen, wird die Güte maßgeblich vom verwendeten lokalen Parameter bestimmt, der den integralen Parameter über eine Korrelation abbilden soll. Von zentraler Bedeutung ist somit, inwiefern dieser Parameter die grundsätzliche Physik der Zielgröße wiedergibt. Nachfolgend sollen die für das neue Modell verwendeten Ansätze vorgestellt und hergeleitet werden.

Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl

Zur analytischen Berechnung der auf der Impulsverlustdicke θ basierenden Reynolds-Zahl $Re_{\theta} := \theta u_{\infty} / \nu$ wird die nicht-netzlokale Grenzschichtgröße θ benötigt, die aus einer

Integration über das Geschwindigkeitsprofil entlang der wandnormalen Koordinate berechnet wird. Da diese Operation eine Kommunikation mit benachbarten wandnormalen Gitterpunkten erfordert, ist dies im Rahmen einer lokalen Auswertung von $Re_{\theta t}$ unzulässig. Daher wird die sogenannte Wirbelstärken (*Vorticity*)-Reynolds-Zahl Re_v für eine lokale Approximation der Größe Re_{θ} verwendet. Das Konzept von Re_v geht auf van

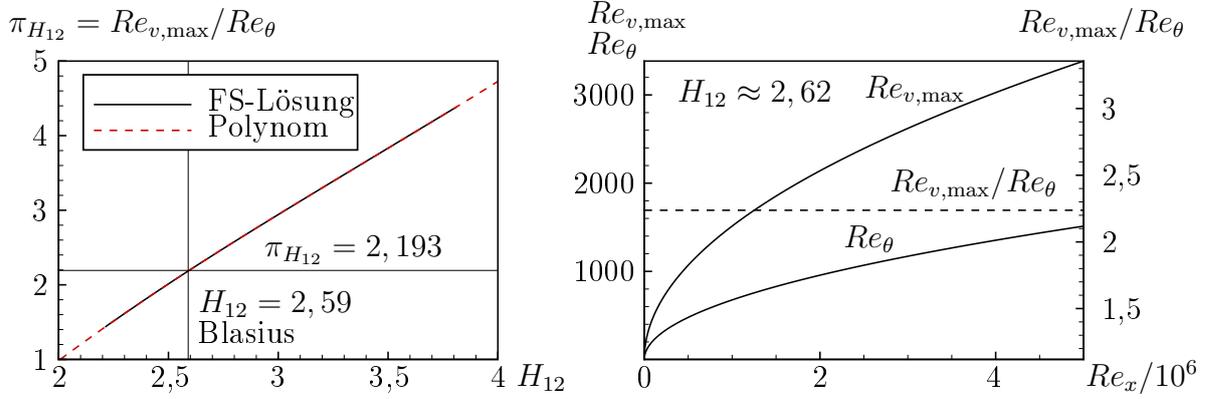


Abbildung 3.2: Darstellung der selbstähnlichen laminaren Falkner-Skan-Lösung (FS-Lösung) für das Verhältnis aus $Re_{v,max}/Re_{\theta}$ in Abhängigkeit des Formfaktors H_{12} sowie Polynom Gl. 3.5 (*links*) und exemplarische Darstellung von $Re_{v,max}$ und Re_{θ} sowie deren Verhältnis über der mit der Lauflänge x gebildeten Reynolds-Zahl Re_x für einen konstanten Formfaktor (*rechts*)

Driest und Blumer (1963) zurück. Die *Vorticity*-Reynolds-Zahl wird aus dem Verhältnis von Trägheits- und Zähigkeitsspannungen gebildet, stellt somit, wie auch die globale Reynolds-Zahl Re , einen mechanischen Ähnlichkeitsparameter dar (vgl. Gl. 2.7):

$$Re_v := \frac{\rho y_w (du/dy_w)^2}{\mu du/dy_w} = \frac{y_w^2}{\nu} \frac{du}{dy_w} \approx \frac{y_w^2}{\nu} \|\Omega\| \approx \frac{y_w^2}{\nu} \|\mathbf{S}\| \quad (3.2)$$

$\forall y_w \leq \delta$. Nach Menter et al. (2006a) und Langtry und Menter (2009) kann Re_{θ} lokal über Re_v bzw. über dessen wandnormales Maximum innerhalb der Grenzschicht approximiert werden. Dabei macht man sich zunutze, dass für die laminar überströmte ebene Platte ohne und mit konstantem Druckgradienten das Maximum von Re_v in wandnormaler Richtung $\max(Re_v)$ und Re_{θ} proportional zueinander sind (vgl. Abb. 3.2, *rechts*):

$$Re_{v,max} := \max_{y_w}(Re_v) \propto Re_{\theta} \Leftrightarrow \frac{Re_{v,max}}{Re_{\theta}} = \pi_{H_{12}}. \quad (3.3)$$

Die Stelle in wandnormaler Richtung y_w , an der Re_v maximal wird, soll als y_{wR} definiert werden:

$$y_{wR} := \arg \max_{y_w}(Re_v) \Leftrightarrow Re_{v,max} = Re_v(y_w =: y_{wR}). \quad (3.4)$$

Der Proportionalitätsfaktor $\pi_{H_{12}}$ variiert mit dem aufgeprägten (für selbstähnliche Lösungen konstanten) Druckgradienten. Für Falkner-Skan-Lösungen kann so für jeden Formfaktor ein $\pi_{H_{12}}$ gefunden werden, das über $Re_{v,\max}$ eine Berechnung von Re_θ ermöglicht. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 3.2 (*links*) graphisch visualisiert. Unter Zuhilfenahme eines Polynoms kann hieraus eine Funktion $\pi_{H_{12}} = f(H_{12})$ gebildet werden (Abb. 3.2, *links*, Ströer et al. 2020b):

$$\pi_{H_{12}} = 0,071665 H_{12}^3 - 0,73186 H_{12}^2 + 4,2563 H_{12} - 5,1743. \quad (3.5)$$

Für die laminare Strömung über eine ebene Platte ohne Druckgradient $H_{12} \approx 2,59$ (Blasius-Lösung) ergibt eine Plausibilitätskontrolle den bekannten Wert von $\pi_{H_{12}} \approx 2,193$ (Abb. 3.2, *links*).

Im Falle einer allgemeinen, nicht-selbstähnlichen Lösung wird Re_θ lokal in Abhängigkeit des am jeweiligen Gitterpunkt vorliegenden Wertes von Re_v und H_{12} (wird im weiteren Verlauf eingeführt) approximiert:

$$\frac{Re_v}{Re_\theta} = \pi_{H_{12}}. \quad (3.6)$$

So wird gemäß Gl. 3.6 an allen Netzpunkten ein Wert für Re_θ berechnet. Sinnvoll im Sinne der Approximation ist dieser jedoch nur an derjenigen wandnormalen Position innerhalb der Grenzschicht y_{wR} , an der Re_v maximal wird.

Inkompressibler Formfaktor

Der inkompressible Formfaktor H_{12} wird zur Auswertung der approximierten Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl am Indifferenzpunkt $Re_{\theta c}$ (Gl. 2.29) und des Reynolds-Zahlenverhältnisses $\pi_{H_{12}}$ benötigt. Üblicherweise ergibt sich dieser aus dem Quotienten von Verdrängungs- und Impulsverlustdicke, die beide, wie oben beschrieben, aus einer Integration über das Geschwindigkeitsprofil entlang der wandnormalen Koordinate resultieren. Für eine lokale Approximation werden wie auch im vorangegangenen Abschnitt selbstähnliche Falkner-Skan-Lösungen verwendet, für die ein definierter lokal verfügbarer Parameter mit dem Formfaktor korreliert wird. Obwohl diese Korrelationen inhärent nur für selbstähnliche Profile exakt gelten, ist die Approximation oftmals hinreichend genau. In diesem Fall wird dazu ein neuer Druckgradientenparameter definiert, der im Gegensatz zu $\lambda_\theta = Re_\theta^2 K$ auf der *Vorticity*-Reynolds-Zahl Re_v basiert (Ströer et al. 2020b):

$$\lambda_v := Re_v^2 K = Re_v^2 \frac{\nu}{u_e^2} \frac{du_e}{ds}. \quad (3.7)$$

Neben der Approximationsgüte ist im Kontext industrieller Anwendbarkeit die Robustheit von entscheidender Bedeutung. So liegt der Vorteil von Gl. 3.7 darin, dass die Form des Grenzschichtprofils von Re_v erhalten bleibt, die Maxima der Funktion $Re_v(y_w = y_{wR})$ und $\lambda_v(y_w)$ somit an derselben wandnormalen Position y_{wR} liegen. Da die Auswertung aller Größen bei y_{wR} erfolgt, ist es von großem Vorteil, wenn die Gradienten einer Variablen an dieser Stelle in wandnormaler Richtung verschwinden oder zumindest klein werden.

Bei hohen Gradienten würde die Größe sehr sensitiv gegenüber kleinen Änderungen in y_w . D.h. die Abhängigkeit des Parameters λ_v von Variationen in wandnormaler Richtung ist geringer, was potentiell zu einer geringen Netzsensitivität dieser Größe führt.

Die weiteren Unbekannten, die für die Auswertung von Gl. 3.7 benötigt werden, können über die kompressible Bernoulli-Gleichung

$$u_e = \sqrt{u_\infty^2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1 - \frac{1}{\kappa}} \right] \frac{p_\infty}{\rho_\infty}} \quad (3.8)$$

und die folgenden Isentropenbeziehungen

$$\frac{du_e}{ds} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \cdot \nabla u_e, \quad \text{wobei} \quad \nabla u_e = -\frac{1}{u_e \rho_\infty} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \nabla p, \quad (3.9)$$

berechnet werden.

Abschließend kann der approximierte, inkompressible Formfaktor H_{12} unter Verwendung der besagten auf selbstähnlichen Falkner-Skan-Lösungen basierenden Korrelation berechnet werden, die über das folgende Polynom 4. Grades analytisch repräsentiert wird:

$$H_{12} = -1,2433 \lambda_v^4 - 2,9805 \lambda_v^3 - 2,2245 \lambda_v^2 - 1,5196 \lambda_v + 2,5979. \quad (3.10)$$

Auch hier wird unter Verwendung von Gl. 3.10 an jedem Gitterpunkt auf Basis des Parameters λ_v ein H_{12} berechnet, das im Sinne der Approximation nur an der Stelle y_{wR} korrekt ist.

Abschirmung der Grenzschicht

Im Folgenden wird es an verschiedenen Stellen sinnvoll sein, eine Funktion zu verwenden, die eine näherungsweise binäre Einteilung in Bereiche außerhalb (≈ 0) und innerhalb (≈ 1) der Grenzschicht ermöglicht. Eine Funktion, die eine solche Abschirmung oder *Blending* des Grenzschichtbereiches realisiert, ist durch Γ_δ gegeben:

$$\Gamma_\delta = e^{-\left(\frac{y_w}{\delta}\right)^4} e^{-\left(\frac{\|\mathbf{s}\| y_w^2}{\nu 10^5}\right)^4}. \quad (3.11)$$

Im ersten Teil der Gleichung wird die wandnormale Position y_w mit einer Größe δ verglichen, die eine Art lokale Grenzschichtdicke darstellt und wie folgt definiert ist:

$$\delta = 375 \theta \|\boldsymbol{\Omega}\| \frac{y_w}{\|\mathbf{u}\|_2}. \quad (3.12)$$

Hierbei kann die Impulsverlustdicke θ entsprechend der Definitionsgleichung für die Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ , die über Re_v lokal berechnet wird, approximiert

werden:

$$\theta = \frac{Re_\theta \nu}{u_e}. \quad (3.13)$$

Der zweite Teil von Gl. 3.11 verhindert, dass Γ_δ im Nachlauf aktiv wird. Sowohl δ als auch Γ_δ orientieren sich in ihrer Struktur an Langtry und Menter (2009).

Druckgradientenparameter

Um eine lokale Approximation des Druckgradientenparameters

$$\lambda_\theta := \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{ds} \quad (3.14)$$

zu realisieren, werden die bereits eingeführten Approximationen von θ (Gl. 3.13) sowie Gl. 3.9 verwendet. Obwohl in Gl. 3.7 ein neuer lokaler Druckgradientenparameter eingeführt wurde, wird für die Auswertung des Kriteriums weiterhin der mittlere Druckgradientenparameter $\bar{\lambda}_\theta$ benötigt, um eine zu starke Modifikation des auf $\bar{\lambda}_\theta$ basierten Kriteriums zu vermeiden. Wie nachfolgend gezeigt, ist $\bar{\lambda}_\theta$ über eine Integration des lokalen Druckgradientenparameters λ_θ in Strömungsrichtung definiert.

Turbulenzgrad

Wie für diese Klasse außenaerodynamischer Transitionsmodelle üblich, wird der Turbulenzgrad global vorgegeben. Sofern die untersuchte Geometrie nicht im Nachlauf einer anderen Strömung steht (vgl. Ströer et al. 2019), stellt dieses Vorgehen für außenaerodynamische Testfälle keine Einschränkung dar. Für künftige Anwendungen kann alternativ in Anlehnung an Menter et al. (2015) ein approximativer Turbulenzgrad auf Basis der lokalen Werte der spezifischen kinetischen Energie k und des Geschwindigkeitsbetrags $\|\mathbf{u}\|_2$ bestimmt werden: $Tu = \sqrt{2k/3}/\|\mathbf{u}\|_2$, wobei $\|\mathbf{u}\|_2$ zusätzlich durch einen Galilei-invarianten Ausdruck ersetzt werden kann (vgl. Abschn. 3.4). Da diese Herangehensweise insbesondere in ihrer Galilei-invarianten Form einige Annahmen und Approximationen verwendet, müsste die Güte und das numerische Verhalten in Verbindung mit dem neuen Modellierungsansatz gezielt untersucht werden.

3.3.3 Spezifische Transportgeschwindigkeit und Anwendung in einer Transportdifferentialgleichung

Im nachfolgenden Abschnitt wird eine spezifische Transportgeschwindigkeit hergeleitet, die im Konvektionsterm einer skalaren Transportgleichung $\nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u})$ die Geschwindigkeit \mathbf{u} ersetzt. Zunächst soll dieser Eingriff in die Mathematik der Transportgleichung motiviert und begründet werden:

Die Approximation der auf der Impulsverlustdicke basierenden Reynolds-Zahl Re_θ erfolgt, wie im vorangegangenen Abschnitt 3.3.2 beschrieben, über Gl. 3.3 bzw. 3.6. Entsprechend werden alle Größen an der wandnormalen Position y_{wR} innerhalb der Grenzschicht benötigt, an der Re_ν maximal wird. Der Transport einer Größe mittels einer

Transportdifferentialgleichung, die den Konvektionsterm $\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u})$ verwendet, erfolgt jedoch inhärent entlang einer Stromlinie s . Anders als eine Stromlinie skaliert die Stelle y_{wR} mit der Grenzschichtdicke δ . Werden Positionen stromab des kritischen Punktes betrachtet, ist ersichtlich, dass die Stromlinie und eine gedachte Linie, die alle y_{wR} stromab verbindet, divergieren. D.h. es existiert ein Versatz zwischen dem wandnormalen Maximum der transportierten Größe und der Position y_{wR} . Dieser Versatz ist in Abb. 3.3 mit d^* gekennzeichnet und in Abhängigkeit der Strömungsbedingungen unterschiedlich stark ausgeprägt. Beschriebenes ist in Abb. 3.3 schematisch anhand einer ebenen Plattenströmung dargestellt. In Abb. 3.4 (*links*) ist zusätzlich eine Stromlinie einer 2D-Profilumströmung gezeigt, die sich leicht stromauf des linken Bildrandes auf der wandnormalen Höhe y_{wR} befindet und stromab dieser gedachten Position in Strömungsrichtung bereits einen deutlichen Versatz (in Richtung Wand) bzgl. der Positionen $y_{wR}(x)$ aufweist.

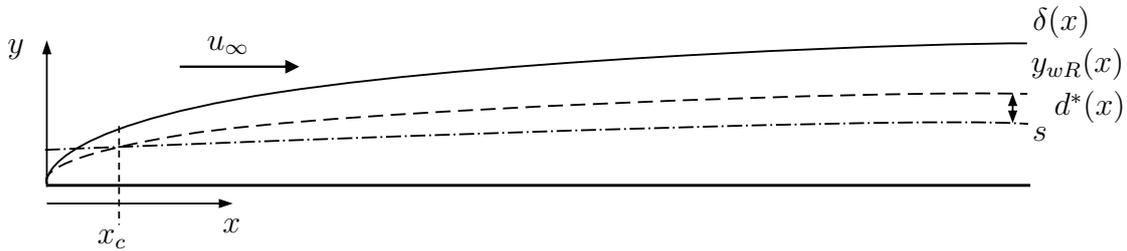


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Differenz $d^*(x)$ zwischen einer gedachten Linie, die die Maxima des wandnormalen Re_v -Verlaufes innerhalb der Grenzschicht $\delta(x)$ verbindet $y_{wR}(x)$ (gestrichelte Linie), und einer ab dem kritischen Punkt x_c verfolgten Stromlinie s (strichpunktierte Linie) anhand einer ebenen Plattenströmung

Aus diesen Betrachtungen kann geschlussfolgert werden, dass jedes Modell, das Strömungsgrößen lokal an der wandnormalen Position y_{wR} approximiert und Transportdifferentialgleichungen verwendet, inhärent einen Approximationsfehler durch den wandnormalen Versatz zwischen diesen beiden Größen beinhaltet. Folglich scheint es sinnvoll, die mittels einer Transportgleichung konvektierten Größen auf der wandnormalen Position y_{wR} zu transportieren, um diesen Fehler zu vermeiden. Im Folgenden soll daher eine spezifische Geschwindigkeit hergeleitet werden, die einen Transport einer skalaren Größe entlang y_{wR} ermöglicht. Dazu wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, das aus drei Gleichungen besteht, die drei Bedingungen repräsentieren (Ströer et al. 2020b):

- Die erste Bedingung postuliert, dass die Änderungen der wandnormalen Gradienten von Re_v , d.h. $\nabla(\nabla Re_v \cdot \mathbf{n})$, in der gesuchten Richtung verschwinden:

$$y_w^2 \nabla(\mathbf{n} \cdot \nabla Re_v) \cdot \mathbf{s}_{Re_v}^* \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.15)$$

wobei $\mathbf{s}_{Re_v}^* \in \mathbb{R}^3$ das gesuchte Vektorfeld darstellt und $\|\nabla(\mathbf{n} \cdot \nabla Re_v)\|_2 \neq 0$.

Die Größe $(\nabla Re_v \cdot \mathbf{n})$ beschreibt die Änderung von Re_v in wandnormaler Richtung (d.h. $\partial Re_v / \partial y_w$). Wird nun ein Vektor gesucht, in dessen Richtung sich die Größe $(\nabla Re_v \cdot \mathbf{n})$ nicht ändert bzw. die Änderung der Größe $(\nabla Re_v \cdot \mathbf{n})$ Null ist, muss dieser Vektor Gl. 3.15 erfüllen. Die Richtung, in der sich die Größe $(\nabla Re_v \cdot \mathbf{n})$ nicht ändert, ist nun genau diejenige Richtung, die u.a. alle Positionen y_{wR} verbindet. Die Größe y_w^2 wird aus Dimensionsgründen multipliziert, beeinflusst das Ergebnis jedoch nicht, da der Vektor $\nabla(\mathbf{n} \cdot \nabla Re_v)$ nur lokal skaliert wird, die Richtung aber beibehält.

- Die zweite Bedingung zwingt den gesuchten Vektor in eine Ebene, die durch den wandnormalen Vektor \mathbf{n} und den Vektor der lokalen Geschwindigkeit aufgespannt wird:

$$\mathbf{s}_{Re_v}^* \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \times \mathbf{n} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.16)$$

Für einen 2D-Fall ist diese Bedingung trivial und die gesuchte Ebene entspricht der Strömungsebene.

- Um das Gleichungssystem zu schließen, wird in einer weiteren Bedingung gefordert, dass das Skalarprodukt aus $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|_2$ und $\mathbf{s}_{Re_v}^* - \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|_2$ Null ist:

$$\left(\mathbf{s}_{Re_v}^* - \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.17)$$

D.h. Gl. 3.17 wird hier als eine Art räumliche Limitierung verwendet und gibt zusätzlich die Orientierung (das Vorzeichen) des resultierenden Vektors vor (d.h. ein zum gesuchten Vektor um 180° rotierter Vektor ist keine zulässige Lösung). Eine einfache Normierungsbedingung (z.B. die L2-Norm des gesuchten Vektors) würde diese Richtungsabhängigkeit nicht zulassen, da diese durch beide Richtungen (gesuchter Vektor und dazu gespiegelter Vektor) erfüllt werden könnte.

Das lineare Gleichungssystem 3.15 - 3.17 kann analytisch mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens gelöst werden (hier nicht gezeigt), sodass sich das System auf drei simple, algebraisch auswertbare Beziehungen reduziert. So ergibt sich nach Normierung das gesuchte Vektorfeld $\mathbf{s}_{Re_v} = \mathbf{s}_{Re_v}^* / \|\mathbf{s}_{Re_v}^*\|_2$.

Um die numerische Robustheit zu steigern, werden zwei Korrekturfunktionen auf \mathbf{s}_{Re_v} angewendet. Die erste Funktion stellt eine Richtungskorrektur dar (Bogenmaß):

$$\chi_\alpha = \begin{cases} -1; & \alpha > \pi/2 \\ 1; & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.18a)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{s}_{Re_v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right). \quad (3.18b)$$

Trotz der Normierungs-/Richtungsbedingung Gl. 3.17 kann es in Einzelfällen dazu kommen, dass eine falsche Richtung vorhergesagt wird. Solche Fehler lassen sich durch einen

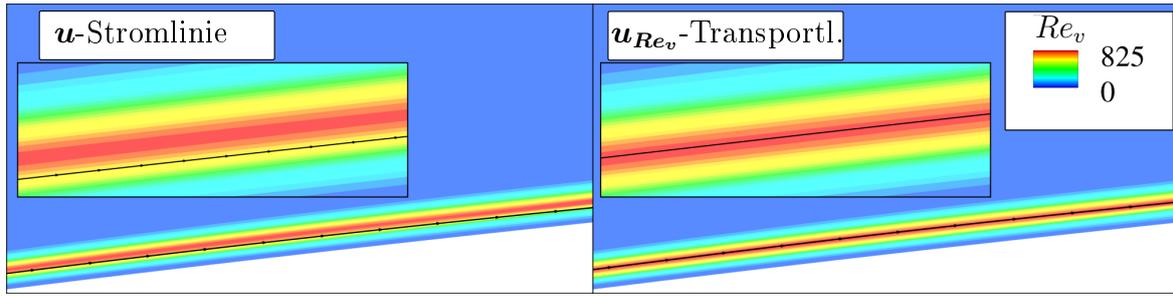


Abbildung 3.4: Auf \mathbf{u} basierende Stromlinie (*links*) im Vergleich zur spezifischen \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie (*rechts*) für eine exemplarische 2D-Profilumströmung; die Re_v -Kontur visualisiert das wandnormale Maximum von Re_v innerhalb der Grenzschicht (aus Ströer et al. 2020b)

Vergleich mit dem lokalen Geschwindigkeitsvektor identifizieren, der die ungefähre Richtung vorgibt. D.h. für zu große Abweichungen vom lokalen Geschwindigkeitsvektor wird der resultierende Vektor gespiegelt.

Durch numerische Fehler kann es zusätzlich in Einzelfällen dazu kommen, dass das Gleichungssystem keine sinnvolle Lösung ergibt. Über einen Vergleich des Winkels zum aktuellen Geschwindigkeitsvektor werden solche Lösungen identifiziert und korrigiert:

$$\xi_b = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left[100 \cos^{-1} \left(\chi_\alpha \mathbf{s}_{Re_v} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) - 2000 \right] \right). \quad (3.19)$$

Diese Gleichung ermöglicht es, falls ein bestimmter Winkel-Schwellenwert erreicht ist, statt der spezifischen Geschwindigkeit die tatsächliche Geschwindigkeit zu verwenden. Das Vorgehen basiert auf der Annahme, dass sich die spezifische und die lokale Geschwindigkeit nicht stark unterscheiden. Ist der Winkel zwischen beiden Vektoren zu groß, kann davon ausgegangen werden, dass es sich um einen numerischen Fehler handelt. In diesen Fällen wird statt der spezifischen die lokale Geschwindigkeit verwendet. Die Korrekturfunktion ist zusätzlich an Stellen wichtig, an denen Re_v innerhalb der Grenzschicht bzgl. der wandnormalen Koordinate Wendepunkte hat. Hier ist die Determinante des Gleichungssystems Null und es existiert keine Lösung. Durch die Korrekturfunktion ergibt sich jedoch ein sinnvolles und stabiles Ergebnis.

Neben den Korrekturfunktionen wird die Funktion zur Abschirmung der Grenzschicht verwendet, sodass innerhalb der Grenzschicht die spezifische und außerhalb der Grenzschicht die tatsächliche Geschwindigkeit verwendet werden:

$$\mathbf{u}_{Re_v} := [(1 - \Gamma_\delta)\mathbf{u} + \Gamma_\delta(\chi_\alpha \mathbf{s}_{Re_v} \|\mathbf{u}\|_2)] \xi_b + (1 - \xi_b)\mathbf{u}. \quad (3.20)$$

Gl. 3.20 ergibt sich aus der Anwendung von Gleichungen 3.18 und 3.19 in Verbindung mit Γ_δ (Gl. 3.11). Für den Fall, dass $\xi_b = 0$ wird in jedem Fall der lokale Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} verwendet. Ist $\xi_b = 1$, ist der linke Term der Gleichung aktiviert. Sofern sich der betrachtete Punkt innerhalb der Grenzschicht befindet, wird die spezifische Ge-

schwindigkeit verwendet, die ggf. vorab durch χ_α gespiegelt wurde.

Abb. 3.4 verdeutlicht den Einfluss der neuen spezifischen Geschwindigkeit \mathbf{u}_{Re_v} anhand einer exemplarischen Profilmströmung. Die Re_v -Kontur visualisiert die Positionen der maximalen Re_v -Werte innerhalb der Grenzschicht. Es ist ersichtlich, dass zwischen einer gedachten Linie, die die Maxima der Re_v -Kontur von stromauf nach stromab verbindet, und der auf \mathbf{u} basierenden Stromlinie ein Versatz entsteht, der für Positionen stromab des Schnittpunktes zwischen der Stromlinie und $\max(Re_v)$ (bspw. der kritische Punkt) in Strömungsrichtung größer wird (Abb. 3.4, *links*). Bei Verwendung der spezifischen Geschwindigkeit verläuft die aus \mathbf{u}_{Re_v} berechnete Stromlinie nahezu ideal durch y_{wR} (Abb. 3.4, *rechts*).

3.3.4 Partielle Transportdifferentialgleichungen

Wird eine nicht-lokale Information an stromab liegenden Stellen im Strömungsfeld benötigt, bieten sich Transportdifferentialgleichungen an, um diese lokal Verfügbar zu machen und Kommunikationsroutinen über Gebietsgrenzen (*Domaingrenzen*) hinweg zu vermeiden. Nachfolgend sollen die für das neue Modell erforderlichen Transportgleichungen hergeleitet werden.

Konservative Form von Transportgleichungen mit modifizierter Transportgeschwindigkeit

Im vorangegangenen Abschnitt wurde eine spezifische Transportgeschwindigkeit hergeleitet. Um den Transport einer reellen, skalaren Variablen ϕ entlang dieser neuen Transportlinien zu realisieren, muss die entsprechende partielle Differentialgleichung bzw. deren Konvektionsterm genauer betrachtet werden. So kann gezeigt werden, dass bei Verwendung einer von \mathbf{u} abweichenden Geschwindigkeit innerhalb einer konservativ formulierten Transportgleichung ein zusätzlicher Term berücksichtigt werden muss (vgl. z.B. Bégou 2018), der nachfolgend \mathbb{K}_ϕ genannt werden soll:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}_{Re_v}) \right) = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}_{Re_v}) + \underbrace{\phi \nabla \cdot (\rho (\mathbf{u}_{Re_v} - \mathbf{u}))}_{=\mathbb{K}_\phi}. \quad (3.21)$$

Unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung ($D\rho/Dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$) kann Gl. 3.21 bewiesen werden:

Beweis. Gl. 3.21

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}_{Re_v}) \\ &= \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u}_{Re_v} \phi) + \phi \nabla \cdot (\mathbf{u}_{Re_v} \rho) - \underbrace{\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \phi \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u}_{Re_v} \phi) + \phi \nabla \cdot (\rho (\mathbf{u}_{Re_v} - \mathbf{u})) \quad \square$$

Die Diskretisierung des Konvektionsterms wird analog zu den Turbulenzgleichungen mit einem Roe-ähnlichen numerischen Schema realisiert. Der Zusatzterm \mathbb{K}_ϕ wird als Quellterm behandelt.

Kritische Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_{θ_c}

Als kritische Reynolds-Zahl oder Indifferenz-Reynolds-Zahl wird in der Stabilitätstheorie diejenige Reynolds-Zahl bezeichnet, ab der Störungen erstmals angefacht werden⁷. Innerhalb des AHD-Transitionskriteriums wird Re_{θ_c} über die auf selbstähnlichen Lösungen basierende Beziehung in Gl. 2.29 abgeschätzt. Dabei wird angenommen, dass, wenn die lokale Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ innerhalb der Grenzschicht erstmals größer als das lokale $Re_{\theta_c}(H_{12})$ wird, Störungen angefacht werden. Das an dieser Stelle vorliegende $Re_\theta = Re_{\theta_c}$ soll, in Abgrenzung vom lokal ausgewerteten Re_{θ_c} , mit einem Stern gekennzeichnet werden: $Re_{\theta_c}^*(s > s_c) := Re_{\theta_c}(s = s_c) = Re_\theta(s = s_c)$. Stromab des kritischen Punktes wird diese nicht-lokale Information zur Auswertung des Transitionskriteriums benötigt. Eine Transportgleichung ermöglicht eine vollständig lokale Bereitstellung dieses Wertes. Die linke Seite der verwendeten partiellen Differentialgleichung orientiert sich in ihrer Form an Gl. 3.21, wobei sich der Term $\mathbb{K}_{Re_{\theta_c}^*}$ auf der rechten Seite der Gleichung befindet. Die rechte Seite beinhaltet zusätzlich einen Diffusionsterm und einen Produktions-/Destruktionsterm:

$$\frac{\partial(\rho \widetilde{Re}_{\theta_c}^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \widetilde{Re}_{\theta_c}^* \mathbf{u}_{Re_v}) = (\mathcal{P} - \mathcal{D})_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t) \sigma_{\theta_c} \nabla \widetilde{Re}_{\theta_c}^* \right) - \mathbb{K}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*}. \quad (3.22)$$

Um oben beschriebenes zu erreichen, wird der folgende Produktions-/Destruktionsterm verwendet:

$$(\mathcal{P} - \mathcal{D})_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} = \rho \|\Omega\| \mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} \Gamma_\delta \left(\widetilde{Re}_{\theta_c}^* - Re_{\theta_c} \right). \quad (3.23)$$

Zur Steuerung des Produktions-/Destruktionsterms wird die Funktion $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*}$ verwendet:

$$\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} = \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \frac{Re_\theta}{Re_{\theta_c}} \right) \right] \left[\tanh \left(110 - 100 \frac{Re_\theta}{Re_{\theta_c}} \right) + 1 \right]. \quad (3.24)$$

Sobald Re_θ/Re_{θ_c} im definierten Intervall liegt, schaltet die Funktion auf 1 (siehe Abb. 3.5, *links*) und aktiviert damit den Quellterm (Gl. 3.23). D.h. die Funktion schaltet nur, wenn $Re_\theta \approx Re_{\theta_c}$. Sobald $Re_\theta > Re_{\theta_c}$ gilt, wird die Funktion wieder deaktiviert. Auf diese Weise wird die transportierte Größe an nur einem Punkt⁸ produziert. Dass die transportierte Variable bei Aktivierung des Quellterms auf das lokale Niveau von Re_{θ_c} produziert wird, stellt der Term $(\widetilde{Re}_{\theta_c}^* - Re_{\theta_c})$ in Gl. 3.23 sicher. Solange $\widetilde{Re}_{\theta_c}^* < Re_{\theta_c}$

⁷D.h. also dort, wo erstmals unter der Annahme räumlicher Theorie $\alpha_i < 0$ gilt.

⁸Bzw. aus technischen Gründen in einem durch die Funktion $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*}$ definierten Intervall von $0,9 Re_{\theta_c} < Re_\theta < 1,1 Re_{\theta_c}$, vgl. Abb. 3.5 (*links*).

ist der Term aktiv und produziert. Falls in der pseudo-transienten Phase $\widetilde{Re}_{\theta c}^* > Re_{\theta c}$, kehrt sich das Vorzeichen des Term um, wodurch dieser zu einem Destruktionsterm wird. So stellt sich in der Anfangsphase⁹ am kritischen Punkt ein $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ -Niveau ein, das dem

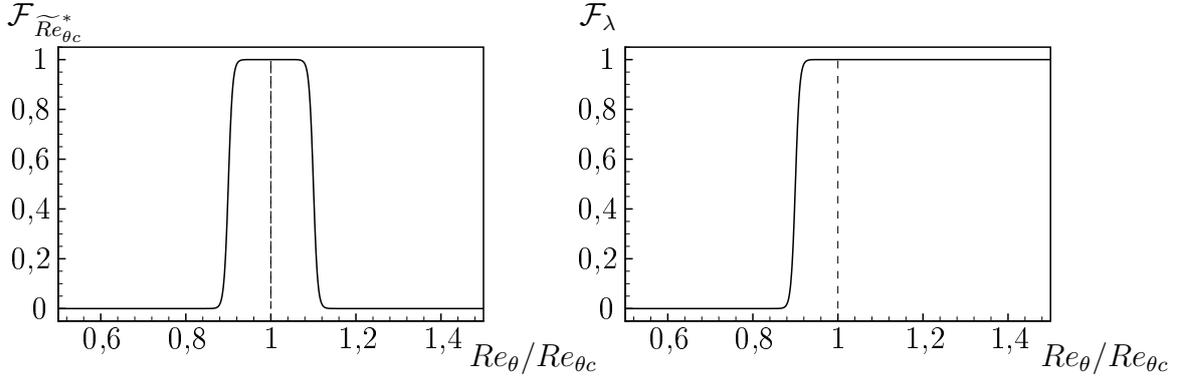


Abbildung 3.5: Sensorfunktionen $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*}$ (links, im Quellterm der $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ -Gleichung verwendet) und \mathcal{F}_{λ} ohne Zusatzterme (rechts, im Quellterm der $\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ - und $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ -Gleichungen verwendet)

lokalen Niveau entspricht. Stromab dieses Intervalls ist der Quellterm deaktiviert und es gilt $\partial(\rho\widetilde{Re}_{\theta c}^*)/\partial t + \nabla \cdot (\rho\widetilde{Re}_{\theta c}^* \mathbf{u}_{Re_{\theta}}) + \mathbb{K}_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*} = 0$ (unter der Annahme kleiner Diffusion), womit das produzierte $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ konstant nach stromab transportiert wird.

Diffusion ist in Gl. 3.22 grundsätzlich unerwünscht, da, nachdem $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ am kritischen Punkt produziert wurde, dieser Wert konstant transportiert werden soll. Um die Stabilität des Verfahrens zu erhöhen, wird dennoch ein kleiner Diffusionsterm verwendet ($\sigma_{\theta c} = 0,0001$).

Neben den Sensorfunktionen wird in Gl. 3.23 die Funktion Γ_{δ} (Gl. 3.11) zur Abschirmung der Grenzschicht verwendet, um zu verhindern, dass Artefakte außerhalb der Grenzschicht in ebendiese transportiert werden und die Lösung für $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ beeinflussen. So wird $(\mathcal{P} - \mathcal{D})_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*}$ außerhalb der Grenzschicht Null.

Herleitung integrierender partieller Differentialgleichungen

Der Terminus *integrierende* partielle Differentialgleichung wird in diesem Kontext verwendet, um auszudrücken, dass eine Differentialgleichung gelöst wird und diese Lösung den Wert des bestimmten Integrals einer Größe entlang eines definierten Pfades gitterpunktlokal bereitstellt. Die ursprüngliche Idee zur Anwendung integrierender Gleichungen in Transitionsmodellen stammt von Mark Drela (Uranga 2011) (vgl. Abschn. 2.6.3). Nachfolgend soll die zugrundeliegende Mathematik in Orientierung an Bégou (2018) zu-

⁹Bzw. der *transienten* Phase, oft pseudo-transiente Phase genannt, in der die stationäre Simulation noch nicht konvergiert ist und Anfangsstörungen abgebaut werden müssen.

sammenfassend hergeleitet werden.

Es kann gezeigt werden, dass sich die Integration einer skalaren Funktion entlang einer Stromlinie in eine partielle Transportdifferentialgleichung überführen lässt. Dazu soll ψ auf dem Intervall $[s, s + \Delta s]$ integriert werden:

$$\phi(s) = \int_s^{s+\Delta s} \psi(\mathcal{S}) d\mathcal{S}. \quad (3.25)$$

Gemäß des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung ergibt die Ableitung der Stammfunktion ϕ wieder ψ (stetige Differenzierbarkeit von ϕ vorausgesetzt), sodass

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = \psi(s) \Leftrightarrow \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta s} = \psi(s) \quad (3.26)$$

gilt. Folglich können die Gleichungen 3.25 und 3.26 in eine Finite-Differenzen-Approximation mit entsprechendem Abbruchfehler überführt werden:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}(t), t + \Delta t) &= \psi(\mathbf{x}(t), t) \|\mathbf{u}\|_2 \Delta t + \phi(\mathbf{x}(t), t) \\ &+ \mathcal{O}(\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Unabhängig davon kann ϕ als Taylorreihe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}(t), t + \Delta t) &= \phi(\mathbf{x}(t), t) + \Delta\mathbf{x} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) + \Delta t \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &+ \mathcal{O}(\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Gleichsetzen der Gleichungen 3.27 und 3.28 ergibt die gesuchte integrierende Transportgleichung:

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho\psi(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{u}\|_2. \quad (3.29)$$

Die konservative Form folgt unter Forderung von $D\rho/Dt = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\psi(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{u}\|_2. \quad (3.30)$$

Wird eine modifizierte Konvektionsgeschwindigkeit innerhalb des Konvektionsterms $\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u})$ verwendet, muss, wie in Gl. 3.21 gezeigt, der Zusatzterm \mathbb{K}_ϕ berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{u}_{\mathbf{R}\mathbf{e}_v}) = \rho\psi(\mathbf{x}, t) \|\mathbf{u}\|_2 - \mathbb{K}_\phi. \quad (3.31)$$

Die Integration wurde damit in eine generische integrierende partielle Transportdifferentialgleichung Gl. 3.31 überführt.

Für eine abschließende Plausibilitätsbetrachtung soll eine stationäre Transportgleichung ohne Diffusion unter Verwendung der Geschwindigkeit \mathbf{u} für den eindimensionalen Fall

betrachtet werden. D.h. aus $\mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \psi \|\mathbf{u}\|_2$ folgt unmittelbar:

$$\mathbf{u} \frac{d\phi}{dx} = \psi u \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = \psi \Leftrightarrow \phi = \int \psi dx. \quad (3.32)$$

Mittlerer Druckgradientenparameter

Entsprechend Gl. 3.31 können nun die Transportgleichungen zur Berechnung des in Gl. 2.28 eingeführten mittleren Druckgradientenparameters $\bar{\lambda}_\theta(s)$ formuliert werden, der sich aus einer Integration des lokalen Druckgradientenparameters λ_θ stromab des kritischen Punktes und einer räumlichen Mittelung ergibt: $\bar{\lambda}_\theta(s) := \frac{1}{s-s_c} \int_{s_c}^s \lambda_\theta(\mathcal{S}) d\mathcal{S}$. Das erste zu berechnende Integral ist somit das Folgende:

$$\lambda_{\theta\Sigma}(s) = \int_{s_c}^s \lambda_\theta(\mathcal{S}) d\mathcal{S}. \quad (3.33)$$

Gl. 3.33 kann durch Lösen der folgenden Transportgleichung gitterpunktlokal berechnet werden:

$$\frac{\partial(\rho \tilde{\lambda}_{\theta\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} \mathbf{u}_{Re_v}) = \mathcal{P}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t) \sigma_{\theta c} \nabla \tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} \right) - \mathbb{K}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}}. \quad (3.34)$$

Der Produktionsterm ergibt sich mit $\psi(\mathbf{x}, t) = \lambda_\theta$ zu:

$$\mathcal{P}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} = \rho \mathcal{F}_\lambda \Gamma_\delta \|\mathbf{u}\|_2 \lambda_\theta. \quad (3.35)$$

Als Zweites wird eine Differentialgleichung benötigt, die eine Länge Δs bereitstellt:

$$\Delta s = s - s_c = l_{c\Sigma}(s) = \int_{s_c}^s d\mathcal{S}. \quad (3.36)$$

Das Vorgehen ist analog zu Gl. 3.34, wobei hier $\psi(\mathbf{x}, t) = 1$ gilt, sodass sich die folgende Transportgleichung ergibt:

$$\frac{\partial(\rho \tilde{l}_{c\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{l}_{c\Sigma} \mathbf{u}_{Re_v}) = \mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t) \sigma_{\theta c} \nabla \tilde{l}_{c\Sigma} \right) - \mathbb{K}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} \quad (3.37)$$

mit

$$\mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} = \rho \mathcal{F}_\lambda \Gamma_\delta \|\mathbf{u}\|_2. \quad (3.38)$$

Die Produktionsterme beider Gleichungen 3.35 und 3.38 werden über die Funktion \mathcal{F}_λ gesteuert:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \left(\frac{Re_\theta}{Re_{\theta c}} + 10 \frac{\mu_t}{\mu} \Gamma_\delta F_{H_{12}} F_l \right) \right) \right] \quad (3.39a)$$

$$F_{H_{12}} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(10^4 - 10^4 H_{12} (\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} / \tilde{l}_{c\Sigma}) / 2, 65 \right) \right] \quad (3.39b)$$

$$F_l = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10^4 - 10^4 \tilde{l}_{c\Sigma} / y_w \right) \right]. \quad (3.39c)$$

Der Sensor schaltet, sobald der kritische Punkt detektiert wurde, von 0 auf 1 und aktiviert so die Produktionsterme. Im Gegensatz zu Gl. 3.24 bleibt \mathcal{F}_λ stromab des kritischen Punktes aktiv (siehe Abb. 3.5, *rechts*), um eine Integration über den gesamten Bereich abzubilden. Um an der Position beginnender Transition unter Gegendruck zu gewährleisten, dass $\mathcal{F}_\lambda = 1$ bleibt, werden zusätzliche Funktionen $F_{H_{12}}$ und F_l verwendet. Diese Funktionen werden in der ursprünglichen Modellversion Ströer et al. (2020b) nicht verwendet, erhöhen aber die numerische Stabilität des Verfahrens. Zusätzlich wird in beiden Produktionstermen 3.35 und 3.38 die Funktion Γ_δ (Gl. 3.11) verwendet, um zu verhindern, dass Werte außerhalb der Grenzschicht die Integration verfälschen.

Der lokal berechnete, mittlere Druckgradientenparameter wird nun entsprechend seiner Definition aus dem Quotienten von $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ und $\tilde{l}_{c\Sigma}$ gebildet:

$$\bar{\lambda}_\theta = \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}}{\tilde{l}_{c\Sigma}} \mathcal{F}_\lambda + (1 - \mathcal{F}_\lambda) \lambda_\theta \quad (3.40)$$

$\forall \tilde{l}_{c\Sigma} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hierbei gilt es zu beachten, dass die Größen $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ und $\tilde{l}_{c\Sigma}$ per Definition (der Transportgleichungen) nur dort größer 0 sind, wo $\mathcal{F}_\lambda > 0$ ist. Da auch stromab des kritischen Punktes in Wandnähe Bereiche mit $\mathcal{F}_\lambda \approx 0$ existieren, kann $\bar{\lambda}_\theta$ dort nicht aus dem Quotienten $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} / \tilde{l}_{c\Sigma}$ gebildet werden. Die praktikabelste und stabilste Lösung ist es, falls $\mathcal{F}_\lambda \approx 0$, $\bar{\lambda}_\theta = \lambda_\theta$ zu fordern. Da Transition zuerst an der Stelle y_{wR} innerhalb der Grenzschicht ausgelöst wird, entstehen durch dieses Vorgehen keine Einschränkungen.

3.3.5 Berechnung eines Intermittenzfeldes

Die vorangegangenen Abschnitte beschreiben alle erforderlichen Operationen, die notwendig sind, um die Transition-*Onset*-Position gitterpunktlokal zu bestimmen. Um diese Position beginnender Transition nun innerhalb der Lösung zu setzen, wird eine Intermittenzvariable γ definiert. Das Intermittenzfeld bestimmt laminare und turbulente Bereiche ($\gamma \approx 0$: laminar, $\gamma \approx 1$: turbulent). Dieses γ stellt somit eine Hilfsvariable dar, die das Turbulenzmodell bzw. dessen Produktions- und Destruktionsterme steuert. Sie ist daher nicht mit der physikalischen Intermittenz nach Emmons (1951) zu verwechseln. Zur Berechnung dieses Feldes werden zwei Ansätze vorgeschlagen:

- Die **erste Variante** basiert auf der Intermittenzgleichung nach Langtry und Menter (2009) sowie Menter et al. (2015). Vorteil dieser Version ist ihre Stabilität in turbulenten Bereichen.
- Die in Ströer et al. (2020a) und Ströer et al. (2020b) eingeführte **zweite Variante** verwendet eine integrierende Transportgleichung, die ab dem Punkt beginnender Transition (ähnlich Gl. 3.37) eine Längenvariable aufintegriert. Vorteil dieser Variante ist, dass unter Verwendung weiterer Korrelationen mit Hilfe dieser Länge ein Transitionsbereich abgebildet werden kann (z.B. unter Verwendung einer Korrelation für den kritischen N -Faktor an der Stelle abgeschlossener Transition nach

van Ingen 1977 oder Abschätzungen der Länge des Transitionsbereiches, vgl. Stock und Haase 2000).

Beide Ansätze können auf zwei unterschiedliche Weisen angewendet werden:

- Zum einen besteht die Möglichkeit, die Werte einer *Onset*-Funktion F_o , die die Quellterme der entsprechenden Gleichung (d.h. γ - oder \tilde{l}_γ -Gleichung) steuert, in wandnormaler Richtung zu kommunizieren. Dadurch wird das Setzen einer Art Punkttransition¹⁰ ermöglicht. Das führt dazu, dass die detektierte Transitionsposition ohne weitere Ungenauigkeiten direkt übertragen werden kann. Technisch wird dazu der lokale Wert der *Onset*-Funktion an der Stelle y_{wR} gesucht und an den zugehörigen Wandpunkt kommuniziert. Von der Wand aus wird dieser Wert an alle zugehörigen Punkte im Feld zurückkommuniziert. So haben die Punkte entlang eines gedachten wandnormalen Strahls den Wert der *Onset*-Funktion an der Stelle y_{wR} . Diese Vorgehensweise ist als nicht-lokal einzustufen.
- Die zweite Möglichkeit ist, die Gleichung, wie von Langtry und Menter (2009) vorgeschlagen, lokal anzuwenden. Hierbei werden in Abhängigkeit des Strömungszustandes jedoch weitere Ungenauigkeiten durch die Intermittenzgleichung eingebracht: Da die Transition an der Stelle y_{wR} ausgelöst wird, beginnt auch hier die Produktion von γ , die sich ab diesem Punkt stromab keilförmig ausbreitet. D.h. es wird in Abhängigkeit des Strömungszustandes ein Versatz zwischen berechneter Transitionsposition und gesetzter Transitionsposition eingebracht. Diese Beobachtung wird in Abschn. 3.4.4 detailliert diskutiert und ist in Abb. 3.8 visualisiert.

Da das Basismodell das Ziel hat, das zugrundeliegende Kriterium (d.h. die Berechnung von $Re_{\theta t}$) möglichst genau gitterpunktlokal abzubilden, ist es zur Validierung sinnvoll, Fehler, die durch das reine Setzen der berechneten Transitionslage eingebracht werden, zunächst auszuschließen. Daher soll für die Validierung des Basismodells Punkttransition und damit Wandkommunikation verwendet werden. Einem Anwender steht jedoch zusätzlich die vollständig lokale Variante zur Verfügung.

Für die **erste Variante** wird die folgende Intermittenzgleichung nach Langtry und Menter (2009) sowie Menter et al. (2015) verwendet:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) = \mathcal{P}_\gamma - \mathcal{D}_\gamma + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t/\sigma_\gamma)\nabla\gamma), \quad (3.41)$$

wobei $\sigma_\gamma = 2$. Der Produktions- und der Destruktionsterm sind dabei wie folgt definiert:

$$\mathcal{P}_\gamma = \rho F_t F_o \|\mathbf{S}\| (1 - \gamma) \quad (3.42)$$

und

$$\mathcal{D}_\gamma = c_1 \rho F_t \|\mathbf{\Omega}\| \gamma (c_2 \gamma - 1) \quad (3.43)$$

¹⁰D.h. ein näherungsweise binäres, sprunghaftes Umschalten von laminar zu turbulent über die gesamte Grenzschicht.

mit $c_1 = 3/50$ und $c_2 = 50$. Die Funktion F_t schaltet den Destruktionsterm ab, sobald ein bestimmtes Niveau an Wirbelviskosität produziert wurde:

$$F_t = e^{-\left(\frac{\mu_t/\mu}{3}\right)^4}. \quad (3.44)$$

Die Transition-*Onset*-Funktion F_o steuert die γ -Produktion und ist hier ähnlich zu Langtry und Menter (2009) formuliert. Abweichend wird in Gl. 3.45a der zusätzliche Term $\min(1; \mathcal{F}_\lambda + 1 - F_t)$ verwendet, der dazu führt, dass Transition nur dort ausgelöst werden kann, wo $\mathcal{F}_\lambda = 1$, d.h. stromab des kritischen Punktes. Um sicherzustellen, dass in vollturbulenten Bereichen auch außerhalb von $\mathcal{F}_\lambda = 1$ $F_o = 1$ möglich ist, wird zusätzlich die Funktion F_t verwendet. Insgesamt ergibt sich so die folgende Definition der Transition-*Onset*-Funktion:

$$F_o = \max(F_{o2} - F_{o3}; 0) \min(1; \mathcal{F}_\lambda + 1 - F_t) \quad (3.45a)$$

$$F_{o1} = \frac{Re_\theta}{Re_{\theta t}} \quad (3.45b)$$

$$F_{o2} = \min(\max(F_{o1}; F_{o1}^4); 2) \quad (3.45c)$$

$$F_{o3} = \max\left(1 - \left(\frac{\mu_t/\mu}{3,5}\right)^3; 0\right). \quad (3.45d)$$

Gl. 3.45b entspricht in Gl. 3.45 dem eigentlichen Transitionskriterium und definiert die Transition-*Onset*-Position. Die Funktion F_l ermöglicht eine Gewichtung des Produktionsterms der γ -Gleichung in Abhängigkeit der lokalen Impulsverlustdicken-Reynoldszahl Re_θ :

$$F_l = 6 + 24F_{R_T}\mathcal{F}_\lambda \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(10 - 10 \frac{Re_\theta}{400}\right)\right]. \quad (3.46)$$

Da diese Funktion für die nicht-lokale Variante nicht zwingend erforderlich ist, soll sie erst bei der Herleitung der Galilei-invarianten Modelle in Abschn. 3.4.4 genauer beschrieben und diskutiert werden. Da das vorliegende Modell auch vollständig lokal angewendet werden kann, wird die Funktion hier dennoch verwendet.

Die **zweite Variante** basiert auf einer integrierenden Differentialgleichung, die stromab der Transition-*Onset*-Position die Größe \tilde{l}_γ produziert (Ströer et al. 2020a und Ströer et al. 2020b):

$$\frac{\partial(\rho\tilde{l}_\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\tilde{l}_\gamma) = \mathcal{P}_{\tilde{l}_\gamma} - \mathcal{D}_{\tilde{l}_\gamma}. \quad (3.47)$$

Die Produktions- und Destruktionsterme sind wie folgt definiert:

$$\mathcal{P}_{\tilde{l}_\gamma} = \rho\Gamma_\delta\|\mathbf{u}\|_2 F_o \quad (3.48)$$

$$\mathcal{D}_{\tilde{l}_\gamma} = \rho\Gamma_\delta\|\mathbf{u}\|_2(1 - F_o). \quad (3.49)$$

Eine *Onset*-Funktion, die den Integrationsprozess startet, wird in Abhängigkeit des Ver-

hältnisses von Re_θ and Re_{θ_t} definiert:

$$F_o = \frac{1}{2} \min \left[2; \left(1 + \tanh \left(10^5 \frac{Re_\theta}{Re_{\theta_t}} - 10^5 \right) \right) + \left(1 + \tanh \left(10^5 \frac{\mu_t}{15\mu} - 10^5 \right) \right) \right]. \quad (3.50)$$

Zusätzlich wird hier eine Funktion verwendet, die, sobald genug Wirbelviskosität produziert wurde, verhindert, dass der Wert von F_o stromab der Position beginnender Transition wieder abfällt. Punkttransition kann dazu führen, dass durch eine Stromaufwirkung der produzierten Wirbelviskosität die Transitionslinie nach stromauf verschoben wird (ähnlich dem von Drela 1998 and Stock 2005 beschriebenen Phänomen der viskosen/nicht-viskosen Interaktion). Um das zu verhindern, wird die Transition-*Onset*-Position und diejenige Position, ab der die Produktion des Turbulenzmodells aktiv wird, räumlich geringfügig voneinander getrennt. Dazu wird die folgende γ -Definition verwendet, die das Setzen der Transition um eine vordefinierte Länge L verzögert:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(10^5 \frac{\tilde{l}_\gamma}{L} - 10^5 \right) \right). \quad (3.51)$$

Im Gegensatz zur γ -Gleichung, die im transitionellen Bereich stark produziert, sodass schnell Werte von $\gamma \approx 1$ erreicht werden, hat diese Gleichung den Nachteil, dass die Werte von \tilde{l}_γ dem Wert $s - s_t$ entsprechen, also im transitionellen Bereich deutlich kleiner sind. Damit steigt die Anfälligkeit gegenüber einer unerwünschten Destruktion durch $F_o = 0$ (was bei Strömungen nahe der Selbstähnlichkeit häufig vorkommt) in turbulenten Bereichen nahe dem Punkt beginnender Transition. Vorteil dieser Gleichung ist, dass die Information $s - s_t$ lokal verfügbar ist. So bietet sich zusätzlich die Möglichkeit, einen Transitionsbereich auf Basis von Korrelationen für den Punkt abgeschlossener Transition zu definieren (z.B. lokale Berechnung oder Abschätzung von L , s. oben).

3.3.6 Kopplung an Wirbelviskositätsturbulenzmodelle

In als turbulent identifizierten Bereichen wird das Menter et al. (2003) $k - \omega$ *shear stress transport* (SST) Turbulenzmodell aktiviert. Analog zu Langtry und Menter (2009) steuert dazu das γ -Feld die k -Gleichung:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) = \gamma \mathcal{P}_k - \max(\gamma; 0, 1) \mathcal{D}_k + \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k). \quad (3.52)$$

Der Produktions- und der Destruktionsterm der ω -Gleichung wird jeweils ohne Modifikationen angewendet:

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{u}) = \mathcal{P}_\omega - \mathcal{D}_\omega + \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega) + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega 2}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega. \quad (3.53)$$

Um zu verhindern, dass die F_1 -Funktion des SST-Modells in der laminaren Grenzschicht auf Null schaltet, wird die folgende Modifikation verwendet (Langtry und Menter 2009):

$$F_1 = \max(F_{1orig}; F_{1lam}) \quad \text{mit} \quad F_{1lam} = e^{-(y_w \sqrt{k}/(120\nu))^8}. \quad (3.54)$$

Unter Verwendung des γ -Feldes kann das Modell auch mit anderen Turbulenzmodellen gekoppelt werden, wie z.B. dem Spalart-Allmaras-Wirbelviskositätsmodell (vgl. bspw. Medida und Baeder 2011) oder mit Reynoldsspannungsmodellen (vgl. bspw. für das SSG/LRR- ω -Modell Nie et al. 2018). Für die SST-Modellvariante Menter (1994) ist die Kopplung identisch.

3.3.7 Initial- und Randbedingungen

Zur Lösung der zusätzlichen partiellen Differentialgleichungen ($\phi \in \{\widetilde{Re}_{\theta c}^*, \widetilde{\lambda}_{\theta \Sigma}, \widetilde{l}_{c\Sigma}, \widetilde{l}_\gamma\}$) werden auf dem Rand (des Definitionsgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) $\partial\Omega$ Randbedingungen vorgegeben. Für außenaerodynamische Strömungen sind dabei insbesondere Wände und Fernfeldränder relevant. An der Wand gilt:

$$(\nabla\phi \cdot \mathbf{n})|_w = 0. \quad (3.55)$$

Am Fernfeldrand wird

$$\phi_\infty = 0 \quad (3.56)$$

vorgegeben. Als Initialbedingung wird

$$\phi(\mathbf{x}, t^* = 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.57)$$

definiert. Für die, in Abschn. 3.3.5 vorgestellte, γ -Gleichung ändern sich die Initial- und Randbedingungen folgendermaßen:

$$\gamma_\infty = 1 \quad (3.58)$$

$$\gamma(\mathbf{x}, t^* = 0) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.59)$$

An der Wand gilt auch für die γ -Gleichung:

$$(\nabla\gamma \cdot \mathbf{n})|_w = 0. \quad (3.60)$$

3.3.8 Kompressibilität

Wie in Kap. 2 gezeigt, ist die Berücksichtigung von Kompressibilitätseffekten auf die laminar-turbulente Transition von großer Bedeutung, da sich in Abhängigkeit der Mach-Zahl die Stabilitätseigenschaften der laminaren Strömung ändern. Da Transitionsmodelle und -kriterien oftmals unter der Annahme einer inkompressiblen Strömung hergeleitet sind, müssen für Strömungen hoher Mach-Zahl Anpassungen vorgenommen werden. Im Folgenden wird das vorgestellte Transitionsmodell für die Anwendung im transsonischen Bereich erweitert.

Modifiziertes Transitionskriterium

Die Herleitung des originalen AHD-Kriteriums basiert an verschiedenen Stellen auf Annahmen, die Inkompressibilität voraussetzen. Entsprechend ist die Anwendung streng genommen auf schwach-kompressible Strömungen limitiert. Im Transsonischen ist der Einfluss der Mach-Zahl der Außenströmung auf die Anfachung von Störungen nach Arnal (1993) als stabilisierend einzustufen (siehe Abschn. 2.5 und Abb. 3.6, *links*). Die Verwendung des inkompressiblen Kriteriums unterschätzt folglich die Stabilität der laminaren Strömung. Abb. 3.6 (*links*) zeigt für die beschleunigte, verzögerte und unbeschleunigte Plattenströmungen die Abhängigkeit der Größe $Re_{\theta t}$ (angenommen $N_t = 9$) von der Mach-Zahl am Grenzschichttrand Ma_e . Erwartungsgemäß ist der Einfluss für beschleunigte Strömungen auf $Re_{\theta t}$ am größten. Im Gegensatz zur inkompressiblen AHD-

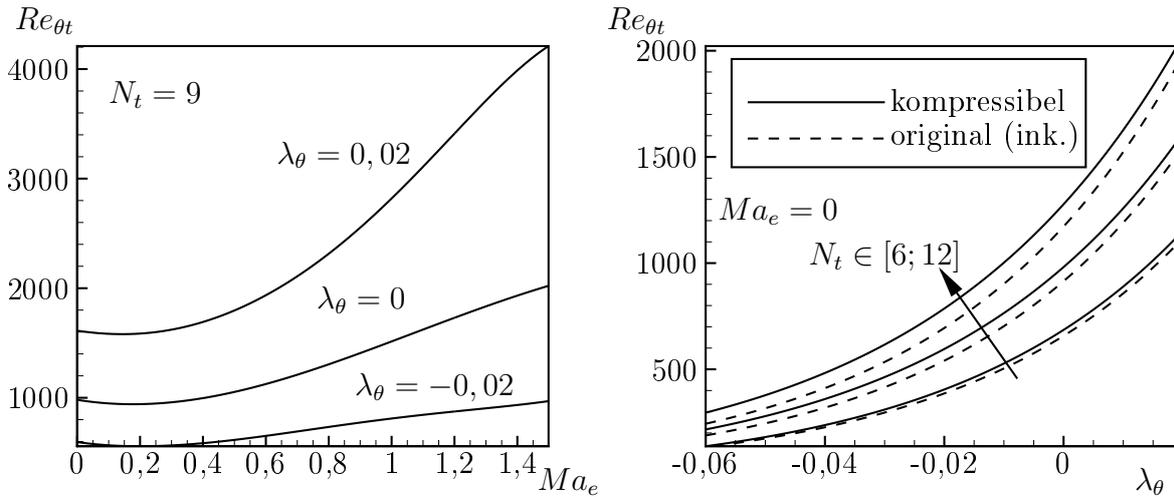


Abbildung 3.6: Auftragung der kompressiblen Form des AHD-Kriteriums in Abhängigkeit der Mach-Zahl am Grenzschichttrand Ma_e für verschiedene Werte des Druckgradientenparameters λ_θ (*links*) und Darstellung für $Ma_e = 0$ in Abhängigkeit von λ_θ und N_t im Vergleich zur inkompressiblen/originalen Form des Kriteriums (*rechts*)

Formulierung verwenden Arnal et al. (2011) zur Herleitung des Kriteriums die kompressiblen Falkner-Skan-Gleichungen und kompressible Stabilitätsgleichungen, wodurch der stabilisierende Einfluss im transsonischen Bereich in Abhängigkeit der lokalen Mach-Zahl berücksichtigt wird:

$$Re_{\theta t} - Re_{\theta c}^* = \mathcal{A} e^{\mathcal{B}\bar{\lambda}_\theta} [\ln(\mathcal{C} Tu) - \mathcal{D}\bar{\lambda}_\theta] \quad \forall Tu < 2,7\%, \quad (3.61a)$$

$$Re_{\theta c} = e^{\mathcal{E}/H_{12} - \mathcal{F}}. \quad (3.61b)$$

Die Werte für $\mathcal{A}(Ma_e)$, $\mathcal{B}(Ma_e)$, $\mathcal{C}(Ma_e)$, $\mathcal{D}(Ma_e)$, $\mathcal{E}(Ma_e)$ und $\mathcal{F}(Ma_e)$ hängen von der lokalen Mach-Zahl ab und sind in Abschn. 2.6.2 explizit aufgeführt. Für $Ma \rightarrow 0$

ergibt sich eine der ursprünglichen Formulierung ähnliche Form des Kriteriums (siehe Abb. 3.6, *rechts*). Die Mach-Zahl am Grenzschichtrand wird mit Hilfe von Gl. 3.8 für u_e und der folgenden Gleichung für a_e berechnet:

$$a_e = \sqrt{\kappa R_i T_e} \quad \text{mit} \quad T_e = \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} T_\infty, \quad (3.62)$$

wobei T_∞ und p_∞ den Referenzzustand am Fernfeldrand beschreiben. T_e , a_e und u_e sind die aus Isentropenbeziehungen und der kompressiblen Bernoulli-Gleichung berechneten Werte für die Temperatur, die Schallgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand. Insgesamt ergibt sich so für die Mach-Zahl:

$$Ma_e = \frac{u_e}{a_e}. \quad (3.63)$$

Die Anwendung des erweiterten Modells sei auf den transsonischen Bereich ($Ma_\infty < 1$) beschränkt, da hier noch approximativ davon ausgegangen werden kann, dass Zustandsänderungen (inklusive schwacher Stöße) isentrop sind (Lee 2016). Ferner muss in diesem Zusammenhang beachtet werden, dass eine Zuström-Mach-Zahl von $Ma_\infty \approx 1$ bereits eine höhere lokale Mach-Zahl am Grenzschichtrand bedeuten kann.

Modifizierte Sensorfunktionen für Transportgleichungen

Für superkritische Profile kann es, wie in Ströer et al. (2020a) und Ströer et al. (2021) gezeigt, notwendig sein, zusätzliche Sensorfunktionen zu verwenden, um zu verhindern, dass $\mathcal{F}_{Re_{\theta c}^*}$ und \mathcal{F}_λ unerwünscht schalten. Dieses Verhalten tritt durch die für diese Art von Profilen typische Druckverteilung (Abb. 3.7, *links*, blau) auf, wodurch unter Umständen ein zweiter (stromab des ersten liegender) Bereich existiert, in dem die Strömung einem negativen Druckgradienten ausgesetzt ist.¹¹ Hier steigt der lokale Wert von $Re_{\theta c}$ wieder an und führt ggf. zu einer unerwünschten Aktivierung/Deaktivierung der Sensoren (Abb. 3.7, *links*, rot). Es ist zu erwarten, dass dieses Verhalten bei allen Transitionsmodellen auftritt, die den kritischen Punkt durch den Quotienten $Re_\theta/Re_{\theta c}$ approximieren und $Re_{\theta c}$ gleichzeitig über einen an den Oberflächendruck gekoppelten Parameter abbilden. Die zusätzlichen Sensorfunktionen basieren auf der Idee, das Schalten der Sensoren an die Produktion anderer Transportgleichungen zu koppeln. Für $\mathcal{F}_{Re_{\theta c}^*}$ wird dazu die folgende Funktion verwendet:

$$F_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10 - 100 \frac{\tilde{l}_{c\Sigma}}{\mathcal{L}} \right) \right]. \quad (3.64)$$

¹¹Eine eventuelle Relaminarisierung der Strömung durch starke Beschleunigung müsste getrennt berücksichtigt und modelliert werden. Das Verhalten der Sensoren wird daher als unerwünscht eingestuft.

Die ursprüngliche Sensorfunktion ändert sich unter Verwendung von $F_{\mathcal{L}}$ zu:

$$\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}}^* = F_{\mathcal{L}} \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} \right) \right] \left[\tanh \left(110 - 100 \frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} \right) + 1 \right]. \quad (3.65)$$

Die Zusatzfunktion verhindert, dass $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}}^*$ stromab des kritischen Punktes unabhängig des Verhältnisses von $Re_{\theta}/Re_{\theta c}$ auf 1 schalten kann. Für eine Neudefinition von \mathcal{F}_{λ} wird eine zusätzliche Funktion F_R entwickelt, die, falls der kritische Punkt detektiert wurde, dafür sorgt, dass das Argument in \mathcal{F}_{λ} entsprechend groß bleibt:

$$F_R = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh(1000 - 100 \widetilde{Re}_{\theta c}^*) \right] \quad (3.66)$$

$$\mathcal{F}_{\lambda}^* = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \left(\frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} + 10 \frac{\mu_t}{\mu} \Gamma_{\delta} F_{H_{12}} F_l + F_R \right) \right) \right]. \quad (3.67)$$

Auch hier erscheint es sinnvoll, den in Abschn. 3.3.4 diskutierten Zusatzterm (s. Gl. 3.39a, Term: $10\mu_t/\mu\Gamma_{\delta}F_{H_{12}}F_l$) zu berücksichtigen, der verhindert, dass \mathcal{F}_{λ}^* in transitionellen Bereichen abfällt.

In vielen Fällen liefert eine alleinige Verwendung des Arguments $Re_{\theta}/Re_{\theta c}$ in den Gleichungen für $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}}^*$ und \mathcal{F}_{λ} eine hinreichend gute Steuerung der Transportgleichungen. Dass die erneut erhöhte Komplexität der Sensorfunktionen in Abhängigkeit von Strömungsbedingungen und Geometrie dennoch notwendig ist, soll nachfolgend an einem Beispiel veranschaulicht werden:

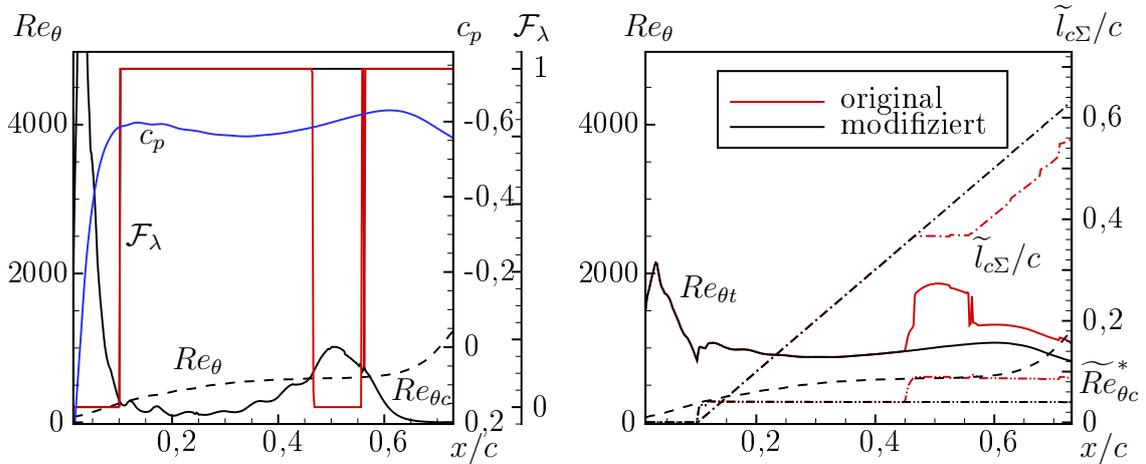


Abbildung 3.7: Einfluss der modifizierten Sensoren (Gleichungen 3.65 mit 3.64 und 3.67 mit 3.66) auf die transportierten Größen $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ und $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ und schließlich $Re_{\theta t}$ am Beispiel einer CAST10-2-Profilumströmung (aus Ströer et al. 2020a)

Abb. 3.7 zeigt den Einfluss der redefinierten Sensorfunktionen. Unter Verwendung der

ursprünglichen Formulierung kann beobachtet werden, dass der Sensor \mathcal{F}_λ nach initialer Aktivierung am kritischen Punkt erneut auf Null schaltet (vgl. c_p -Verlauf). Analoges gilt für den Sensor $\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*}$, der dort auf Eins schaltet (hier nicht gezeigt; an der Größe $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ in Abb. 3.7, *rechts* erkennbar). Der Einfluss auf die transportierten Größen und $Re_{\theta t}$ ist in Abb. 3.7 (*rechts*) dargestellt. Unter Verwendung der zusätzlichen Sensoren ist ersichtlich, dass $\widetilde{l}_{c\Sigma}$ wieder linear steigt und $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ konstant bleibt, womit auch die Unregelmäßigkeiten im $Re_{\theta t}$ -Verlauf korrigiert sind.

Integrale Grenzsichtgrößen

Die gitterpunktlokale Bestimmung integraler Grenzsichtgrößen erfolgt für die ursprüngliche Modellvariante an vielen Stellen unter der Annahme von Inkompressibilität (z.B. inkompressible Falkner-Skan-Gleichungen, siehe Abschn. 3.3.2). D.h. für eine Anwendung bei hohen Mach-Zahlen ist eine Betrachtung und Diskussion des Kompressibilitätseinflusses auf diese Größen nötig.

Der Einfluss auf die Re_{θ} -Approximation unter Verwendung von Re_v scheint im betrachteten Mach-Zahlbereich gering. Selbstähnliche Lösungen für Strömungen ohne Druckgradienten von Fehrs (2017) zeigen, dass der Proportionalitätsfaktor erst ab Mach-Zahlen, die deutlich größer als 1 sind, so stark variiert, dass die inkompressible Approximation unzulässig wird. Auch wenn für negative Druckgradienten ein stärkerer Einfluss erwartet werden kann, soll hier zunächst weiter mit der bereits eingeführten Re_{θ} -Approximation gearbeitet werden.

Für die Approximation des Formfaktors wurden ebenfalls inkompressible Falkner-Skan-Lösungen verwendet. In der Literatur vorhandene Korrekturfunktionen zeigen durchaus einen Einfluss dieser Funktionen (z.B. Korrekturfunktionen nach Walz 1966 oder Cebeci und Cousteix 2005). Da die erweiterten AHD-Kriterien alle auf Basis des inkompressiblen Formfaktors hergeleitet wurden (Arnal et al. 2011, Perraud und Durant 2016, Perraud und Brazier 2019), muss jedoch auch hier das inkompressible H_{12} verwendet werden.

Die Approximation des Druckgradientenparameters λ_θ basiert auf der aus Re_θ berechneten Impulsverlustdicke θ . Da für Re_θ auf eine Korrektur verzichtet wird, gilt dies auch für θ . Unter Zuhilfenahme der Korrektur nach Cebeci und Cousteix (2005) scheint im betrachteten Mach-Zahlbereich eine inkompressible Approximation der Größe θ näherungsweise zulässig.

Die Abschirmung der Grenzsicht basiert ebenfalls auf der lokal approximierten Impulsverlustdicke θ und wird daher, wie oben beschrieben, ohne Kompressibilitätskorrekturen verwendet. Da der Zweck eines solchen *Shieldings* nicht ist, den Grenzsichttrand möglichst genau zu approximieren, sondern zu gewährleisten, dass keine Werte aus dem Fernfeld die Lösung der (integrierenden) Transportgleichungen kontaminieren, ist die Approximationstoleranz groß und daher eine Korrektur hinsichtlich Kompressibilitätseinflüssen nicht nötig.

3.3.9 Ablösungsinduzierte Transition

Für die Vorhersage in Bereichen starken Gegendrucks, der bis zur laminaren Ablösung führt, soll das in Abschn. 2.6 eingeführte Kriterium nach Gleyzes et al. (1985) und Habiballah (1981) (GH) an den vorgestellten Modellierungsansatz gekoppelt werden:

$$N = N_G + \int_{Re_{\theta G}}^{Re_{\theta}} \frac{-2,4}{B_G(H_{12})} dRe_{\theta}. \quad (3.68)$$

Sobald der Formfaktor einen Wert von 2,7 überschreitet, wird das GH-Kriterium aktiviert. Ein Nachteil dieser Methode ist, dass, um eine Integration des N -Faktors zu realisieren, die Verwendung einer weiteren Transportgleichung nötig wäre. Daher scheint es naheliegend, das Kriterium in eine bereits vorhandene Gleichung zu integrieren. So kann der Einfluss des GH-Kriteriums als Anteil von $Re_{\theta c}$ aufgefasst werden, womit sich $Re_{\theta c}^G$ ergibt (Pascal et al. 2020):

$$Re_{\theta c}^G = Re_{\theta c} + \int_{s_G}^s \left(\frac{2,4}{a(\bar{\lambda}_{\theta t G}) B_G(H_{12})} + 1 \right) \frac{dRe_{\theta}}{dS} dS \quad (3.69a)$$

$$a(\bar{\lambda}_{\theta t G}) = 2,4/206e^{25,7\bar{\lambda}_{\theta t G}} \quad (3.69b)$$

$$\frac{dRe_{\theta}}{ds} = \frac{1}{2\theta} \left(\frac{0,058(H_{12} - 4)^2}{(H_{12} - 1)} + \frac{6,54H_{12} - 14,07}{H_{12}^2} - 0,068 \right), \quad (3.69c)$$

dRe_{θ}/ds wird hier unter Verwendung des Falkner-Skan-*Fits* von Drela und Giles (1987) approximiert. Für $\bar{\lambda}_{\theta t G}$ wird gefordert: $\bar{\lambda}_{\theta t G} = \text{konst.} \forall s > s_G$. Das wird realisiert, indem die Produktionsterme der Gleichungen $\tilde{l}_{c\Sigma}$ und $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ ausgeschaltet werden, sobald der Formfaktor einen Schwellwert überschreitet (d.h. Multiplikation der Quellterme mit dem Term $1 - \mathcal{F}_G$). Dazu wird eine neue Sensorfunktion verwendet:

$$\mathcal{F}_G = \frac{1}{2} [1 - \tanh(10^3 - 10^3 H_{12}/2, 7)]. \quad (3.70)$$

Das Integral in Gl. 3.69a kann nun unter Verwendung der Gleichung für $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ durch Hinzufügen eines weiteren Produktionsterms abgebildet werden:

$$\mathcal{P}_G = \rho \|\mathbf{u}\|_2 \left(\frac{2,4}{a(\bar{\lambda}_{\theta t G}) B_G(H_{12})} + 1 \right) \frac{dRe_{\theta}}{ds} \mathcal{F}_G. \quad (3.71)$$

Die Herleitung dieses Produktionsterms erfolgt analog zu den bisher hergeleiteten integrierenden Transportgleichungen (vgl. Abschn. 3.3.4).

3.4 Galilei-invariante Formulierung - 3- und 1-Gleichungsmodell

Galilei-Invarianz bezeichnet im Rahmen der Newton'schen Mechanik¹² die Invarianz physikalischer Gesetze gegenüber Galilei-Transformationen. Dabei werden Transformationen zwischen Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, als Galilei-Transformationen bezeichnet (vgl. auch Abschn. 4.4.1). Ein physikalisches Gesetz oder Modell ist also genau dann Galilei-invariant, wenn es in jedem Inertialsystem dieselbe Form hat. Ein Inertialsystem bezeichnet ein Koordinatensystem, das sich gleichförmig translatorisch (unbeschleunigt) bewegt oder (relativ zur Erde) in Ruhe befindet. Letzteres soll nachfolgend als Absolutsystem bezeichnet werden. Gleichungen, wie bspw. die Navier-Stokes Gleichungen sind Galilei-invariant, allerdings nicht invariant gegenüber gradliniger Beschleunigung oder unter Rotation. Im rotierenden System müssen Scheinkräfte berücksichtigt werden.

In dem vorgestellten Modellansatz wird der Grundsatz der Galilei-Invarianz verletzt. Im Kern betrifft dies Stellen, an denen explizit der Geschwindigkeitsvektor, dessen Richtung oder Betrag verwendet wird. In Fällen, in denen eine Relativgeschwindigkeit eindeutig angegeben werden kann, stellt die Verletzung des Grundsatzes der Galilei-Invarianz aus praktischer Sicht keine Einschränkung dar. Falls mehrere Wände relativ zueinander bewegt werden, kann dies jedoch nicht mehr vorausgesetzt werden. Vor dem Hintergrund, dass Transportgleichungsansätze insbesondere für komplexe Testfälle ihren Kernanwendungsbereich finden, ist es sinnvoll, die Formulierung so allgemeingültig wie möglich zu halten. Zusätzlich beschreibt die Galilei-Invarianz ein fundamentales physikalisches Prinzip, das alle physikalischen Modelle und Gesetze erfüllen sollten.

In diesem Abschnitt werden daher Ansätze vorgestellt, die eine neue, Galilei-invariante Formulierung des vorgestellten Modells erlauben. Da das Basismodell das zugrundeliegende Kriterium mit großer Genauigkeit abbildet, ist die Komplexität der Modellformulierung recht groß. Die neue Formulierung hat daher gleichzeitig den Anspruch, die Komplexität und den Rechenaufwand zu reduzieren.

3.4.1 Integrale Grenzschichtgrößen

Um eine konsistente und vollständige Darstellung der zwei neuen, eigenständigen Galilei-invarianten Modelle zu bekommen, wiederholen sich im Folgenden einige wenige Gleichungen. Ausdrücke, die im Vergleich zum 4-Gleichungsmodell unverändert übernommen wurden, sind nicht erneut aufgeführt.

¹²D.h. für Geschwindigkeiten, die als nicht-relativistisch betrachtet werden können.

Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl

Die Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ wird analog zu Abschn. 3.3.2 über die *Vorticity*-Reynolds-Zahl Re_v approximiert, d.h.:

$$Re_\theta = \frac{Re_v}{\pi_{H_{12}}}, \quad (3.72)$$

wobei $\pi_{H_{12}} = \min(5; \max(2, 193; 0, 0717H_{12}^3 - 0, 7319H_{12}^2 + 4, 2563H_{12} - 5, 1743))$. Die Herleitung dieser Gleichungen ist Abschn. 3.3.2 zu entnehmen.

Lokaler Druckgradientenparameter und Formfaktor

Für den neuen in Abschn. 3.3.2 eingeführten auf Re_v basierenden Druckgradientenparameter λ_v soll nachfolgend eine Galilei-invariante Reformulierung hergeleitet werden. Dazu wird neben einem Substitut für $\|\mathbf{u}\|_2$ ein Ersatz für du_e/ds verwendet, der auf der zweidimensionalen inkompressiblen Kontinuitätsgleichung basiert (Menter et al. 2015):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{du_e}{dx} = -\frac{dv_e}{dy} \quad (3.73)$$

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, wobei x die Strömungsrichtung und y die wandnormale Koordinate für den simplen Fall einer ebenen Plattenströmung beschreiben. Dieser Ausdruck kann unter Verwendung des Wandnormalenvektors \mathbf{n} verallgemeinert werden:

$$\frac{du_e}{ds} \approx \left. \frac{d\|\mathbf{u}\|_2}{ds} \right|_{y_w R} \stackrel{\text{Gl. 3.73}}{\approx} -\frac{dv_e}{dy_w} \approx -\left. \frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{dy_w} \right|_{y_w R} = -\nabla(\mathbf{u}|_{y_w R} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.74)$$

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Bei diesem, auf stark vereinfachenden Annahmen basierenden, Ausdruck geht es weniger darum du_e/ds möglichst exakt abzubilden, als vielmehr einen Parameter zu finden, der das grundsätzliche physikalische Verhalten von du_e/ds wiedergibt.

Neben der Approximation für du_e/ds ist zusätzlich ein Substitut für den Betrag der Geschwindigkeit $\|\mathbf{u}\|_2$ erforderlich. Nach Menter et al. (2015) kann dieser Geschwindigkeitsbetrag innerhalb der Grenzschicht über den Betrag der *strain rate* und den wandnormalen Abstand approximiert werden. Die zugrundeliegende Annahme entspricht einer linearen Approximation der Geschwindigkeit:

$$\|\mathbf{u}\|_2 \approx y_w \frac{d\|\mathbf{u}\|_2}{dy_w} \approx \frac{\|\mathbf{S}\|}{k_S} y_w \approx \frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|}{k_\Omega} y_w. \quad (3.75)$$

In Menter et al. (2015) wird für $k_S = 0,3$ eine gute Approximation erreicht. Nachfolgend soll die Näherung verwendet werden, die den Betrag der *strain rate* $\|\mathbf{S}\|$ verwendet. Ein Vorteil im Gegensatz zur *Vorticity* ist, dass erstere rotationsinvariant ist (Speziale 1989). Ansonsten ergeben beide Größen in der Grenzschicht eine sehr ähnliche Approximation. Ferner sei darauf hingewiesen, dass die Auswertung an der wandnormalen Position $y_w R$ erfolgt, die Approximation im engeren Sinne auch nur an dieser Stelle gilt. In Fällen, in

denen die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand u_e benötigt wird, soll daher zusätzlich angenommen werden, dass $\|\mathbf{u}\|_2|_{y_{wR}} \approx u_e$. Darüber hinaus kann k_S so kalibriert werden, dass der Wert des lokalen $\|\mathbf{u}\|_2$ überschätzt und eher u_e abgebildet wird.

Generell gilt jedoch auch hier, dass weniger eine exakte Approximation der Größe u_e gesucht ist, als vielmehr das physikalische Verhalten dieser Größe wiedergegeben werden soll. Der Grund hierfür ist, dass keine möglichst exakte quantitative Annäherung an die Größe benötigt wird, sondern eine Zielgröße gesucht ist, die innerhalb einer Korrelation mit selbstähnlichen Lösungen verwendet werden kann. Gibt der Parameter das grundsätzliche physikalische Verhalten wieder, liefert in der Regel auch die Korrelation eine hinreichend gute lokale Approximation des abzubildenden integralen Grenzschichtparameters.

Werden diese Substitute nun in die ursprüngliche λ_v -Formulierung (Gl. 3.7) eingesetzt, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\lambda_v := Re_v^2 \frac{\nu}{u_e^2} \frac{du_e}{ds} \approx - \left(\frac{\|\mathbf{S}\| y_w^2}{\nu} \right)^2 \frac{\nu k_S^2}{(\|\mathbf{S}\| y_w)^2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = - \frac{y_w^2 k_S^2}{\nu} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.76)$$

Ein zusätzlicher Vorteil dieser Reformulierung ist, dass sich der Ausdruck deutlich vereinfacht. Dieser neue Parameter ist bei unterschiedlichen Herleitungen dem von Menter et al. (2015) verwendeten sehr ähnlich. Ferner wird zwecks weiterer Vereinfachung auf das negative Vorzeichen des Parameters verzichtet, da dies nur eine Spiegelung des Falkner-Skan-Korrelation an der vertikalen Achse zufolge hätte. Zusätzlich kann ohne Einschränkung auf den konstanten Faktor k_S verzichtet werden, sodass sich final ergibt:

$$\lambda_{vG} = \frac{y_w^2}{\nu} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.77)$$

Wie oben beschrieben, hat der modifizierte Ausdruck nicht den expliziten Anspruch, den originalen Parameter exakt quantitativ wiederzugeben, sondern vielmehr das physikalische Verhalten abzubilden. Daher ist es sinnvoll, neue Falkner-Skan-Korrelationen zu nutzen. So können eventuelle Fehler durch die Verwendung von für das 4-Gleichungsmodell hergeleiteten Approximationen a priori ausgeschlossen werden. Der neue Falkner-Skan-*Fit*, der den neuen Parameter λ_{vG} mit dem inkompressiblen Formfaktor H_{12} korreliert, lautet:

$$H_{12} = 0,0031 \lambda_{vG}^2 + 0,1037 \lambda_{vG} + 2,3551. \quad (3.78)$$

Zur Approximation des lokalen Druckgradientenparameters λ_θ wird analog verfahren und es werden auch hier Falkner-Skan-Lösungen für λ_{vG} und λ_θ an der Stelle y_{wR} verwendet, sodass

$$\lambda_\theta = 0,0015204 \lambda_{vG}^2 - 0,0250572 \lambda_{vG} + 0,0469616, \quad (3.79)$$

wobei λ_{vG} auf einen sinnvollen Bereich an Formfaktoren H_{12} limitiert wird: $-1,5 \leq \lambda_{vG} \leq 7$.

Abschirmung der Grenzschicht

Die Funktion zur Abschirmung der Grenzschicht vereinfacht sich zu:

$$\Gamma_\delta = e^{-(\|\mathbf{S}\|y_w^2/(\nu 10^4))^8}. \quad (3.80)$$

Das Ziel dieser Abschirmung ist es nicht, den Grenzschichttrand möglichst präzise zu detektieren, sondern auch hier zu verhindern, dass numerische Störungen im Fernfeld aufintegriert werden und die Lösung in der Grenzschicht kontaminieren.

3.4.2 Partielle Transportdifferentialgleichungen

Konvektionsterme zusätzlicher Transportgleichungen

Neben der im vorangegangenen Abschnitt gezeigten Verletzung der Galilei-Invarianz für verschiedene lokal approximierte, integrale Grenzschichtgrößen sind zusätzlich die Konvektionsterme der partiellen Transportdifferentialgleichungen, die die spezifische Geschwindigkeit \mathbf{u}_{Re_v} verwenden, nicht Galilei-invariant. Da eine Galilei-invariante Formulierung von \mathbf{u}_{Re_v} weitere Komplexität in das Modell einbrächte, soll hier geprüft werden, unter welchen Bedingungen auf eine Korrektur verzichtet werden kann.

Die spezifische Geschwindigkeit ermöglicht einen Integrationspfad, der die wandnormalen Maxima von Re_v verbindet (siehe Abb. 3.3). Da alle Approximationen nur an der wandnormalen Position y_{wR} korrekt sind und in Entfernung dieser Position ihre Gültigkeit verlieren, muss untersucht werden, wann auf die spezifische Geschwindigkeit verzichtet werden kann. Ob das der Fall ist, hängt von folgenden Punkten ab:

- Ist die Verteilung des Integranden ψ in wandnormaler Richtung konstant, führt jeder mögliche Integrationspfad entlang paralleler Stromlinien zu einem ähnlichen Ergebnis. D.h. es muss für den Integranden ψ gefordert werden, dass näherungsweise

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{n} \approx 0 \quad \forall y_w : (y_{wR} - \Delta y_w < y_w < y_{wR} + \Delta y_w) \quad (3.81)$$

in einem möglichst großen Bereich Δy_w um y_{wR} gilt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse bei unterschiedlichen Integrationspfaden aber erfüllter Bedingung gemäß Gl. 3.81 nicht identisch sind, da sich Längen unterschiedlicher Stromlinien und der \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie geringfügig unterscheiden. Dieser Einfluss kann jedoch vernachlässigt werden.

- Der Sensor, der den Produktionsterm kontrolliert (d.h. ab dem kritischen Punkt aktiviert), muss über die Grenzschicht in wandnormaler Richtung an derselben Position starten, sodass (krummlinig) parallele Stromlinien (falls die erste Forderung erfüllt ist) tatsächlich identische Ergebnisse liefern. Andernfalls würde die Integration zu weit stromauf bzw. stromab beginnen.

Für die Transportgleichungen $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ und $\tilde{l}_{e\Sigma}$ sowie $\tilde{Re}_{\theta c}^*$ bedeutet das:

- Für die $\tilde{l}_{c\Sigma}$ -Gleichung, gilt $\psi(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, wodurch Gl. 3.81 a priori erfüllt wird. D.h. für $\tilde{l}_{c\Sigma}$ kann ohne nennenswerte Einschränkungen die folgende Gleichung verwendet werden, sodass sich Gl. 3.37 zu

$$\frac{\partial(\rho\tilde{l}_{c\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\tilde{l}_{c\Sigma}) = \mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t)\sigma_{\tilde{l}_{c\Sigma}} \nabla\tilde{l}_{c\Sigma} \right) \quad (3.82)$$

vereinfacht, wobei $\sigma_{\tilde{l}_{c\Sigma}} = 0, 1$. Mit den im Folgenden hergeleiteten Modifikationen für den Quellterm $\mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}}$ ergibt sich so eine vollständig Galilei-invariante Transportgleichung für $\tilde{l}_{c\Sigma}$.

- Für die $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ -Gleichung muss analog gefordert werden, dass $\nabla\lambda_{\theta} \cdot \mathbf{n} \approx 0 \forall y_w < \delta$, also $\psi(\mathbf{x}) = \lambda_{\theta}(\mathbf{x})$ in wandnormale Richtung innerhalb der Grenzschicht näherungsweise konstant bleibt. Im Gegensatz zu Gl. 3.82 kann dies hier jedoch nicht a priori vorausgesetzt werden, sodass Approximationsfehler in das Modell eingebracht werden. Da es gängige Praxis ist, auf eine Geschwindigkeitskorrektur zu verzichten, soll angenommen werden, dass in der Umgebung von y_{wR} der Term $\nabla\lambda_{\theta} \cdot \mathbf{n}$ ungefähr null bzw. hinreichend klein wird, sodass Gl. 3.34 analog zu Gl. 3.82 vereinfacht werden kann:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}) = \mathcal{P}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t)\sigma_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} \nabla\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} \right) \quad (3.83)$$

mit $\sigma_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} = 0$. Auch hier ergibt sich mit dem neuen Produktionsterm eine vollständig Galilei-invariante Transportgleichung.

- Den größten Einfluss hat die Geschwindigkeitskorrektur auf die $\tilde{Re}_{\theta c}^*$ -Gleichung, deren Lösung innerhalb der Grenzschicht ohne eine Korrektur nicht wie gefordert konstant bleibt und signifikant abfällt (vgl. Abb. 4.3). Abgesehen von einer Reformulierung der spezifischen Geschwindigkeit oder der $\tilde{Re}_{\theta c}^*$ -Gleichung, sollen nachfolgend zwei Möglichkeiten der Umformulierung diskutiert werden, ein Galilei-invariantes Substitut zu finden, das zusätzlich Komplexität und den Rechenaufwand reduziert. Für eine Umformulierung soll Gl. 2.26 der Herleitung des AHD-Kriteriums betrachtet werden:

$$Re_{\theta t} - \cancel{Re_{\theta c}} = Re_{\theta 0} - \cancel{Re_{\theta c}} - \frac{8,43}{dN/dRe_{\theta}} - \frac{2,4}{dN/dRe_{\theta}} \ln(Tu). \quad (3.84)$$

Es ist ersichtlich, dass an dieser Stelle die Größe $Re_{\theta c}$ nachträglich eingebracht wurde und auf beiden Seiten auftaucht.

- 1) Die erste Möglichkeit bestünde daher darin, das Kriterium erneut herzuleiten und auf eine Addition der Größe $-Re_{\theta c}$ zu verzichten.
- 2) Im weiteren Verlauf der Herleitung des Kriteriums wird die rechte Seite der Gleichung 3.84 in einem Falkner-Skan-*Fit* zusammengefasst, wodurch ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Zielgröße und dem Parameter $\bar{\lambda}_{\theta}$

hergestellt wird. D.h. wenn Re_{θ_c} auf der linken Seite der Gleichung ebenfalls unter Verwendung von $\bar{\lambda}_\theta$ approximiert wird, hätte das einen ähnlichen Effekt. $\widetilde{Re}_{\theta_c}^*$ wird somit zu:

$$\widetilde{Re}_{\theta_c}^* = Re_{\theta_c}^* = Re_{\theta_c}(H_{12}(\bar{\lambda}_\theta)). \quad (3.85)$$

Da Möglichkeit 1) das zugrundeliegende Kriterium verändert und eine erneute Validierung erforderte, soll Lösung 2) verwendet werden. Ferner wäre unter Verwendung von Herangehensweise 1) eine identische Modifikation der kompressiblen Kriterien nötig. Weg 2) lässt sich hingegen auf die kompressiblen Kriterien übertragen.

Der lokale Wert von Re_{θ_c} soll zusätzlich mit limitiertem Formfaktor berechnet werden, sodass abweichend von Gl. 2.29 der folgende Ausdruck verwendet wird:

$$Re_{\theta_c} = e^{\frac{52}{\min(2,725;H_{12})} - 14,8}. \quad (3.86)$$

Diese Limitierung scheint sinnvoll, da der kritische Punkt gemäß Stabilitätstheorie nicht weit stromab der Saugspitze liegen kann: Laut des sogenannten Wendepunktkriteriums ist ein laminares Geschwindigkeitsprofil, das einen Wendepunkt hat, instabil, d.h. instabile Wellen werden angefacht (Schlichting und Gersten 2006). Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend. Aus Gl. 2.17 lässt sich ableiten, dass laminare Profile, die unter dem Einfluss eines Gegendruckgradienten stehen, einen Wendepunkt besitzen müssen (Schlichting und Gersten 2006).

Quellterme integrierender Transportgleichungen

Die Herleitung einer integrierenden Transportdifferentialgleichung ergibt für den Produktionsterm der generischen Gleichung 3.30 einen Ausdruck, der inhärent den Betrag der Geschwindigkeit $\|\mathbf{u}\|_2$ enthält: $\mathcal{P}_\phi = \rho\psi\|\mathbf{u}\|_2$. Dadurch wird das Prinzip der Galilei-Invarianz verletzt. Daher sollen die Quellterme der integrierenden Differentialgleichungen für $\phi \in \{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}; \tilde{l}_{\theta\Sigma}\}$ mit $\psi \in \{1; \lambda_\theta\}$, in denen explizit der Betrag des lokalen Geschwindigkeitsvektors $\|\mathbf{u}\|_2$ auftaucht, unter Verwendung von Gl. 3.75 durch die folgenden rotationsinvarianten Produktionsterme ersetzt werden:

$$\mathcal{P}_\phi = \rho\psi(\mathbf{x}) \frac{\|\mathcal{S}\|}{k_S} y_w \Gamma_\delta \mathcal{F}_\lambda. \quad (3.87)$$

Um sicherzustellen, dass die Integration nur innerhalb der Grenzschicht und erst ab dem kritischen Punkt erfolgt, sind hier zusätzlich Γ_δ und \mathcal{F}_λ multipliziert.

Der Vorteil für den speziellen Fall eines mittleren Druckgradientenparameters ist, dass die Genauigkeitseinbuße für den Quotienten $\bar{\lambda}_\theta$ besonders gering ist. Obwohl sich die Lösungen bei Verwendung der unterschiedlichen Produktionsterme sowohl für $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ als auch für $\tilde{l}_{\theta\Sigma}$ unterscheiden, ist der Einfluss im Endergebnis $\bar{\lambda}_\theta$ im Vergleich zur nicht-Galilei-invarianten Referenz sehr gering und scheint sich zu kompensieren (vgl. Verifikation in

Abschn. 4.1.1, z.B. Abb. 4.5).

3.4.3 Lokale Mach-Zahl

Auch wenn für die neuen Galilei-invarianten Modelle das inkompressible Kriterium verwendet wird, soll nachfolgend ein möglicher Ansatz für die Bereitstellung der lokalen Mach-Zahl diskutiert werden. Die in Abschnitt 3.3.8 vorgestellte Approximation der lokalen Mach-Zahl am Grenzschichtrand Ma_e erfolgt über die kompressible Bernoulli-Gleichung und Isentropenbeziehungen. Auch wenn dieses Vorgehen grundsätzlich Galilei-invariant ist, schränkt es die Anwendbarkeit dennoch auf solche Fälle ein, für die ein Fernfeldzustand klar definiert ist. Für innenaerodynamische Anwendungen kann dies z.B. nicht zwangsläufig vorausgesetzt werden. Damit ist dieses Vorgehen nicht strikt gitterpunktlokal. Zusätzlich ist die Bernoulli-Gleichung nur in Inertialsystemen gültig. Im Falle eines rotierenden Systems müssen Scheinkräfte berücksichtigt werden. Insgesamt scheint es daher für kompressible Anwendungsfälle wünschenswert, Alternativen zu erarbeiten.

Eine Möglichkeit zur vollständig lokalen Beschaffung der Größe Ma_e bietet auch hier die lineare Approximation von u_e über die Norm des Scherspannungstensors an der Stelle y_{wR} . Unter der Annahme einer nicht beheizten Wand stellt sich für die Temperatur ein Grenzschichtprofil ein, das zur Wand hin steigt und am Grenzschichtrand ungefähr seinen Fernfeldwert annimmt. In der laminaren Grenzschicht kann in erster Näherung angenommen werden, dass die Aufheizung in Wandnähe so gering ist, dass postuliert werden kann, dass die lokale Temperatur an der Stelle y_{wR} ungefähr der Temperatur am Grenzschichtrand entspricht, d.h. $T_e \approx T$, sodass $a_e \approx \sqrt{\kappa RT}$. Insgesamt ergibt sich somit für die Mach-Zahl am Grenzschichtrand der folgende Zusammenhang:

$$Ma_e \approx \frac{\|\mathbf{S}\|_{y_w}}{k_{S2}\sqrt{\kappa RT}} \quad (3.88)$$

mit $k_{S2} = 0,4$ (anhand des CAST10-2-Testfalls kalibriert).

In vorangegangenen Abschnitten wurde erörtert, dass oftmals keine quantitativ exakte Approximation als vielmehr eine Abbildung des grundsätzlichen physikalischen Verhaltens hinreichend ist. Für die Approximation der Mach-Zahl ist jedoch eine möglichst genaue quantitative Vorhersage der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand wünschenswert, da diese unmittelbar den Wert des Kriteriums beeinflusst. Die verwendete lineare Approximation muss also getrennt und detailliert untersucht werden, um abzuschätzen inwieweit die approximierte Mach-Zahl für eine Transitionsvorhersage unter kompressiblen Bedingungen hinreichend genau abgebildet wird.

3.4.4 Berechnung eines Intermittenzfeldes

Abschließend muss die Position beginnender Transition innerhalb des Löserturbinenrotors so übersetzt werden, dass mittels einer definierten Hilfsgröße die Steuerung des zugrundeliegenden Turbulenzmodells numerisch stabil möglich wird. Abweichend von Abschnitt

3.3.5 (4-Gleichungsmodell), soll, um eine vollständig gitterpunktlokale Formulierung zu gewährleisten, zwingend auf wandnormale Kommunikation verzichtet werden, wodurch zusätzliche Betrachtungen erforderlich sind.

Hierbei gilt es zu beachten, dass die Gleichung (γ -Gleichung), die laminare und turbulente Bereiche definieren soll, selber wieder einen Einfluss auf die tatsächlich gesetzte Transitionsposition haben kann. Grundsätzlich ist es dabei so, dass die betrachtete Klasse von Modellen, wie auch das vorgestellte Modell, oftmals Transition-*Onset*-Positionen berechnen. Um keinen Einfluss durch die transitionssetzende Gleichung auf die tatsächlich gesetzte Transitionsposition zu haben, müsste die berechnete Position ungefähr mit der Position übereinstimmen, an der c_f in Strömungsrichtung minimal wird. Dieser Zusammenhang zwischen berechneter und tatsächlich gesetzter Transitionsposition soll nachfolgend diskutiert und in der Modellierung berücksichtigt werden.

Vorbetrachtungen zum Produktionsverhalten von γ -Gleichungen

Ausgangspunkt der folgenden Vorbetrachtungen ist die von Langtry und Menter (2009) eingeführte γ -Gleichung in Verbindung mit dem SST-Turbulenzmodell (losgelöst vom restlichen Teil des γ - Re_θ -Modells). Sobald das Verhältnis $Re_\theta/Re_{\theta t} > 1$, wird der Produktionsterm dieser Gleichung aktiv und es werden Werte von γ produziert. In Abhängigkeit des Anwendungsbereiches sollen für den Fall niedriger Reynolds-Zahlen (ungefähr $Re_c < \mathcal{O}(10^6)$) zunächst zwei Fälle unterschieden werden:

- Tritt bei Fällen mit niedrigen Reynolds-Zahlen Transition nur ablösungsinduziert auf und nicht über TS-Instabilitäten, können die neuen Modelle ohne Einschränkungen und Modifikationen an die in Langtry und Menter (2009) oder in Menter et al. (2015) verwendete γ -Gleichung gekoppelt werden. Ggf. ist es sinnvoll, einen Zusatzterm zu verwenden, der eine schnelle Druckrückgewinnung ermöglicht. Dieser Aspekt wird später getrennt behandelt.
- Werden seltenere Fälle bei niedrigen Reynolds-Zahlen betrachtet, bei denen Transition über TS-Instabilitäten ausgelöst wird, muss das Verhalten der γ -Gleichung differenzierter untersucht werden.

Unter besonderer Berücksichtigung des letzten Falles soll das Produktionsverhalten der γ -Gleichung bei TS-Transition nachfolgend genauer analysiert werden. Abb. 3.8 zeigt schematisch verschiedene Fälle der γ -Produktion (für TS-Transition bei außenaerodynamisch relevanten Turbulenzgraden). Hierbei ist x_{tw} die Position, an der in Wandnähe erstmals $\gamma \approx 1$ gilt und entspricht erfahrungsgemäß auch ungefähr der Position, an der c_f minimal wird; x_t ist die Position beginnender Transition, die sich für eine vollständig laminare Strömung einstellt¹³:

¹³D.h. eine Strömung, für die die Transitionsberechnung und Turbulenzproduktion ideal entkoppelt sind. Das Transitionskriterium wurde also anhand der laminaren Strömung unbeeinflusst ausgewertet.

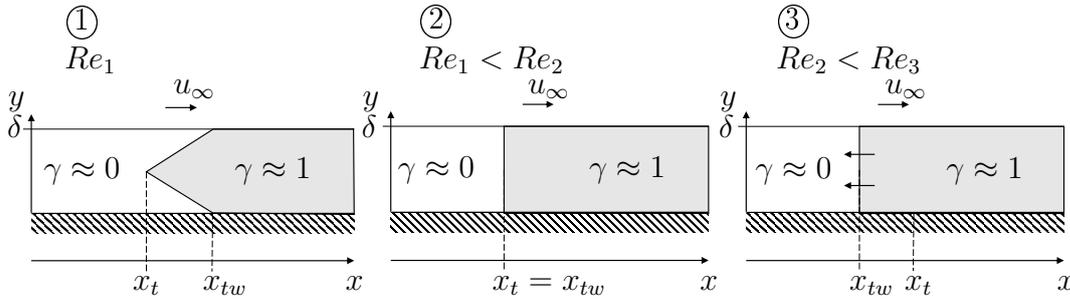


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung der γ -Produktion für TS-Transition unter unterschiedlichen Strömungsbedingungen; x_t beschreibt die aus dem Transitionskriterium resultierende Position beginnender Transition; x_{tw} die Position, an der erstmals in Wandnähe $\gamma \approx 1$

- Bei niedrigen Reynolds-Zahlen (**Fall ①**, Abb. 3.8, *links*) kann eine Art keilförmige γ -Ausbreitung beobachtet werden. Die Größe γ wird inhärent zuerst an derjenigen Stelle y_{wR} produziert, an der Re_v innerhalb der Grenzschicht in wandnormaler Richtung maximal wird (in erster Näherung oberhalb $0,5\delta$), und breitet sich dann normal zur (im allgemeinen Fall krummlinigen) x -Koordinate stromab in wandnormaler y -Richtung breiter werdend aus, bis auch in Wandnähe $\gamma \approx 1$ gilt (Position x_{tw}). Für Fall ① gilt folglich: $x_t < x_{tw}$, d.h. die berechnete Position beginnender Transition liegt stromauf der Position x_{tw} und dem Minimum von c_f .

An dieser Stelle sei erwähnt, dass Transition bei sehr niedrigen Reynolds-Zahlen in vielen Fällen über eine laminare Ablöseblase stattfindet. Hier tritt das beschriebene Verhalten eines sehr langen Transitionsbereiches nicht oder nur in geringem Ausmaß auf (u.a. weil oftmals Zusatzfunktionen verwendet werden, die Werte von $\gamma > 1$ erlauben, und die γ -Produktion in einer abgelösten Grenzschicht stärker ist).

- Bei sehr hohen Reynolds-Zahlen (**Fall ③**, Abb. 3.8, *rechts*) kann die Berechnung von x_t nicht mehr von der Turbulenzproduktion entkoppelt betrachtet werden, da Re_θ , der Destruktionsterm und Produktionsterm der γ -Gleichung auch stromauf von x_t durch die produzierte Wirbelviskosität beeinflusst werden. Im äußersten Fall ③ (abhängig von der *Onset*-Funktion, die die γ -Produktion steuert) kann es dazu kommen, dass die Position x_{tw} durch eine Stromaufwirkung während des Lösungsprozesses nach stromauf verschoben wird, womit im konvergierten Zustand $x_{tw} < x_t$ gilt. D.h. die aus dem Kriterium und Re_θ berechnete Transitionsposition x_t liegt stromab der tatsächlich gesetzten Position x_{tw} .

Das bedeutet jedoch nicht, dass die Lösung oder auch nur die zusätzliche skalare Transportgleichung divergieren oder numerisch instabil werden (vgl. auch Ströer et al. 2019). In der Regel stellt sich ein konvergierter Zustand ein, für den dann nur eine vollständig laminare Vergleichslösung offenbart, dass $x_{tw} > x_t$, also die eigentliche Transitionsposition stromab von x_{tw} und des Minimums von c_f liegen.

- **Fall ②** (Abb. 3.8, *Mitte*) beschreibt eine Situation, bei der sich weder ein Keil ausbildet, noch eine Stromaufwirkung beobachtet werden kann und $x_t \approx x_{tw}$ gilt. Dieser Fall entspricht näherungsweise dem Setzen von Punkttransition und ist abgesehen von einer physikalisch korrekten Berücksichtigung des Transitionsbereiches der Fall, der am wenigsten zusätzliche Unsicherheiten und Ungenauigkeiten in die Modellierung einbringt.
- **Bemerkung zur Modellierung eines Transitionsbereiches:**
 Da die Transition vom laminaren in den turbulenten Zustand naturgemäß kein abrupter Umschlag, sondern ein kontinuierlicher Übergang ist, der von den Strömungsbedingungen abhängt, ist die Frage nach einer Abbildung des Transitionsbereiches zu diskutieren. Die in Fall ① beschriebene keilförmige Ausbreitung scheint eine gute Möglichkeit, einen solchen Bereich zu modellieren, da hier inhärent ein kontinuierlicher Übergang für die Transition angenommen wird. Bei genauerer Betrachtung wird jedoch klar, dass eine quantitativ sinnvolle Modellierung ähnlich der Beobachtung in Fall ① (γ -Keil) insofern problematisch ist, als dass die keilförmige Ausbreitung schwer steuerbar ist, von einer Vielzahl von Parametern abhängt (inklusive der Turbulenzgrößen) und trotzdem von x_t entkoppelt sein kann. Wollte man einen Transitionsbereich abbilden, ist das nach Meinung des Autors der vorliegenden Arbeit konsistenteste Vorgehen, das Turbulenzmodell über die gesamte Grenzschicht zu schalten und den Parameter γ im Intervall $[0; 1]$ entsprechend schnell oder langsam hochzufahren (Funktionen sind in der Literatur vorhanden). Hierbei ist allerdings zusätzlich zu beachten, dass auch das Produktionsverhalten des Turbulenzmodells nach Aktivierung wieder von den Strömungsbedingungen abhängt.

Der beschriebene Einfluss ist dabei nicht als explizite Reynolds-Zahlenabhängigkeit anzusehen, sondern vielmehr als ein sich selbst verstärkender Effekt, der durch die im tiefen Reynolds-Zahlenbereich (physikalisch durchaus sinnvolle) langsame Turbulenzproduktion entsteht. Dadurch wird wiederum die Produktion der γ -Gleichung beeinflusst, wodurch letztendlich kein physikalisch sinnvoller Transitionsbereich abgebildet werden kann.

Ansätze zur Modellierung

Um neben einer Galilei-invarianten Formulierung vollständig gitterpunktlokal zu sein, soll im Rahmen der neuen Modelle für das Setzen der berechneten Transitionsposition gänzlich auf Wandkommunikation verzichtet werden und unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Eigenschaften eine entsprechende γ -Gleichung hergeleitet werden. Ausgangspunkt ist der Ansatz von Langtry und Menter (2009) sowie Menter et al. (2015):

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\gamma) = \mathcal{P}_\gamma - \mathcal{D}_\gamma + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t/\sigma_\gamma)\nabla\gamma), \quad (3.89)$$

wobei $\sigma_\gamma = 2$. Die Produktions- und Destruktionsterme sind wie folgt definiert:

$$\mathcal{P}_\gamma = \rho F_t F_o \|\mathbf{S}\| (1 - \gamma) \quad (3.90)$$

$$\mathcal{D}_\gamma = c_1 \rho F_t \|\boldsymbol{\Omega}\| \gamma (c_2 \gamma - 1) \quad (3.91)$$

mit $c_1 = 3/50$ und $c_2 = 50$. Die Funktion F_t (Gl. 3.44) schaltet den Destruktionsterm in Bereichen, in denen das Viskositätsverhältnis μ_t/μ einen Schwellwert (hier 3) überschritten hat, aus, um Stabilität in vollturbulenten Bereichen sicherzustellen.

Die Funktion F_o definiert den Beginn der γ -Produktion und hat, wie die Vorbetrachtungen zeigen, maßgeblichen Einfluss auf das Produktionsverhalten der γ -Transportgleichung. Neben der ursprünglich von Langtry und Menter (2009) vorgeschlagenen Definition soll mit Blick auf die Modellierung bei tiefen Reynolds-Zahlen eine weitere Möglichkeit vorgestellt werden. Im Gegensatz zur Definition nach Langtry und Menter (2009) führt diese neue Variante zu einer direkteren bzw. schnelleren γ - und in Folge Wirbelviskositätsproduktion¹⁴:

- **Möglichkeit 1 - γ -Gleichung nach Langtry und Menter (2009):** Für Testfälle in einem Reynolds-Zahlenbereich $\mathcal{O}(10^6)$ bis $\mathcal{O}(10^7)$, die üblicherweise in der Literatur für die Validierung von Transitionsmodellen gerechnet werden, kann die in Abschn. 3.3.5 (Gleichungen 3.45) vorgestellte *Onset*-Funktion (entsprechend ohne wandnormale Kommunikation) nach Langtry und Menter (2009) und Menter et al. (2015) ohne nennenswerte Einschränkungen verwendet werden. Für tiefe Reynolds-Zahlen, bei denen Transition über TS-Instabilitäten stattfindet, kann jedoch beobachtet werden, dass diese Definition in Verbindung mit dem SST-Modell zu weit stromab liegenden Transitionspositionen führt, auch wenn das reine Kriterium eine sinnvolle Transition-*Onset*-Position ergibt (Fall ① in Abb. 3.8, d.h. die berechnete Transition-*Onset*-Position liegt deutlich stromauf der Position, ab der das Turbulenzmodell tatsächlich aktiviert wird).
- **Möglichkeit 2 - Modifizierte *Onset*-Funktion:** Für eine unmittelbare Produktion von Wirbelviskosität soll daher im Folgenden eine alternative Definition der Funktion F_o verwendet werden:

$$F_o = \min(1; \mathcal{F}_\lambda + 1 - F_t) \underbrace{(1 - \tanh(10^5 - 10^5 \xi))}_{=: F_o^*}. \quad (3.92)$$

Neben dem Basisterm F_o^* sorgt die Funktion \mathcal{F}_λ dafür, dass Transition nur in Bereichen stromab des kritischen Punktes detektiert werden kann. Diese Trivialbedingung soll die Stabilität erhöhen und verhindern, dass (bspw. am Staupunkt) unerwünscht der Produktionsterm aktiv wird. Die Funktion $(1 - F_t)$ ist zusätzlich notwendig, um sicherzustellen, dass im Turbulenten auch in den Bereichen,

¹⁴Die folgenden Definitionen setzen voraus, dass das SST-Modell nach Menter et al. (2003) mit der in Abschn. 3.4.4 beschriebenen Kopplung an die Variable γ verwendet wird. Die Details der Kopplung an das Turbulenzmodell sind hier nicht erneut dokumentiert.

in denen $\mathcal{F}_\lambda \approx 0$, γ produziert wird. Die eigentliche Steuerung/Aktivierung der γ -Gleichung erfolgt über den Term F_o^* bzw. dessen Argument ξ , das durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$\xi = \left(\frac{Re_v}{\pi_H Re_{\theta t}} \right)^4 + \underbrace{\left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^2}_{=: f(\mu_t/\mu)} + \gamma^2. \quad (3.93)$$

Falls das Verhältnis von Re_θ zum Kriterium $Re_{\theta t}$ größer als 1 wird, schaltet die Funktion F_o^* aus Gl. 3.92 von 0 auf 2. Zusätzlich bleibt der Term aktiv, wenn bereits genügend Wirbelviskosität oder Intermittenz γ produziert wurde. Diese Bedingung gewährleistet, dass die Produktion in Bereichen, in denen das Verhältnis von Re_θ zum Kriterium $Re_{\theta t}$ stromab der detektierten *Onset*-Position unter 1 fällt, nicht einbricht. Der Term $f(\mu_t/\mu)$, der zunächst eine allgemeine Abhängigkeit des Zusammenhangs ξ von μ_t/μ andeuten soll, hat dadurch maßgeblichen Anteil daran, in welcher Ausprägung die einleitend anhand von Abb. 3.8 beschriebenen Fälle der γ -Produktion zu beobachten sind. D.h. falls erwünscht ist, dass stromab der Transition-*Onset*-Position schnell Werte von γ und auch Wirbelviskosität produziert wird, ist eine starke Abhängigkeit von μ_t/μ erforderlich. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit Fälle bei niedrigen Reynolds-Zahlen im Fokus stehen, soll hier eine sehr direkte Variante verwendet werden: $f(\mu_t/\mu) = (\mu_t/\mu)^2$.

Die Funktion F_l wird verwendet, um den Produktionsterm der γ -Gleichung in Abhängigkeit der lokalen Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ zu gewichten. Die generelle Idee ist, so eine implizite und lokale Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl zu realisieren: Für Fälle bei niedrigen Reynolds-Zahlen wächst Re_θ in Strömungsrichtung recht langsam, wohingegen der Anstieg bei hohen Reynolds-Zahlen größer ist. Die folgende Funktion gewichtet den Produktionsterm somit stärker, falls die lokalen Werte von Re_θ klein sind:

$$F_l = 6 + 24F_{RT}\mathcal{F}_\lambda \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10 - 10 \frac{Re_\theta}{400} \right) \right]. \quad (3.94)$$

So ist F_l mindestens 6 und kann in Abhängigkeit des lokalen Wertes von Re_θ bis auf 30 ansteigen. Das ist der Fall, wenn Re_θ klein wird. Um zu verhindern, dass F_l in Wandnähe (wo Re_θ per Definition 0 wird) für alle Strömungen auf seinen Maximalwert ansteigt, ist die Funktion mit \mathcal{F}_λ multipliziert, wodurch in diesen Regionen $F_l = 6$ gilt. Darüber hinaus gibt \mathcal{F}_λ Stabilität, da F_l auf diese Weise am Staupunkt, wo Re_θ klein wird, grundsätzlich seinen Minimalwert annimmt. Zusätzlich wird ein Sensor F_{RT} verwendet, der den Zusatzterm im voll turbulenten Bereich abschaltet (d.h. sobald $\mu_t/\mu < 5$ wird $F_{RT} = 0$).

3.4.5 Ablösungsinduzierte Transition, Transitionsbereich und Kopplung an Wirbelviskositätsturbulenzmodelle

Neben der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen γ -Gleichung soll im Folgenden ein (optional aktivierbarer) Zusatzterm hergeleitet werden, der bei starken Gegendruckgradienten eine schnellere Turbulenzproduktion gewährleisten und in Folge den transitionellen Bereich (Druckrückgewinnung, schneller c_f -Anstieg) bei niedrigen Reynolds-Zahlen physikalischer abbilden soll. Das grundsätzliche Vorgehen, die Turbulenzproduktion bei Gegendruck, der zu laminarer Ablösung und ablösungsinduzierter Transition führt, zu erhöhen, ist bekannt (vgl. bspw. Langtry und Menter 2009 oder Bernardos et al. 2019). Hier soll dieses Prinzip auch für schwächere Gegendruckgradienten nahe der Ablösung angewendet und erweitert werden, um der für diesen Bereich im vorangegangenen Abschnitt 3.4.4 ausführlich diskutierten verzögerten Turbulenz- und γ -Produktion bei niedrigen Reynolds-Zahlen entgegenzuwirken.

Zu diesem Zweck wird eine neue Funktion $\gamma_{\nabla p}$ eingeführt (in entfernter Anlehnung an Menter et al. 2015), die in Abhängigkeit des lokalen Formfaktors Werte größer als 1 (bis 2) für die effektive, das Turbulenzmodell steuernde Intermittenz (Gl. 3.100) erlaubt:

$$\gamma_{\nabla p} = c_1 F_{\nabla p} F_{Re\theta} F_\gamma F_{\mu_t} \mathcal{F}_\lambda \Gamma_\delta \quad (3.95)$$

mit der Konstanten $c_1 = 5$. Das Produkt der bereits bekannten Funktionen $\mathcal{F}_\lambda \Gamma_\delta$ wird hier verwendet, um den Term $\gamma_{\nabla p}$ außerhalb der Grenzschicht zu deaktivieren und eine Aktivierung stromauf des kritischen Punktes zu unterbinden.

Der grundsätzliche Mechanismus des Terms $\gamma_{\nabla p}$ basiert auf dem lokalen Formfaktor, um die einleitend beschriebene Steuerung in Abhängigkeit des Druckgradienten zu realisieren:

$$F_{\nabla p} = \frac{1}{2} (1 - \tanh(20 - 20H_{12}/3, 25)). \quad (3.96)$$

Überschreitet H_{12} einen bestimmten Wert, schaltet $F_{\nabla p}$ von 0 auf 1. Da der in Gl. 3.96 verwendete approximierter Formfaktor durch die lokale Formulierung nicht über die gesamte Grenzschicht in wandnormaler Richtung konstant ist, sind weitere Annahmen und Funktionen nötig, die ein unerwünschtes Schalten des Terms $\gamma_{\nabla p}$ verhindern sollen. Eine weitere Forderung ist daher, dass der Term nur im transitionellen Bereich wirken soll.

Dazu wird die Funktion F_{μ_t} im Turbulenten (für Werte $\mu_t/\mu > 3$) durch den linken Teil von Gl. 3.97 inaktiv und deaktiviert damit den gesamten Term $\gamma_{\nabla p}$ (Gl. 3.95):

$$F_{\mu_t} = \max(3 - \mu_t/\mu; 0) \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(4 - 4 \frac{(\mu_t/\mu + F_{sep1})}{0,15} \right) \right] \quad (3.97)$$

mit $F_{sep1} = \frac{1}{2} [1 - \tanh(10^4 - 10^4 H_{12}/3, 5)]$. Im Falle laminarer Ablösung hat es sich zusätzlich als wichtig erwiesen, dass, um die Region konstanten Druckes physikalisch sinnvoll wiedergeben zu können (d.h. ein zu schnelles Schließen der Ablöseblase zu verhindern), das Einschalten von $\gamma_{\nabla p}$ leicht in Strömungsrichtung verzögert ist. So wird,

falls der Formfaktor 3,5 überschreitet, $F_{sep1} = 0$ geschaltet, was dazu führt, dass der rechte Term in Gl. 3.97 aktiviert und nun in Abhängigkeit von μ_t/μ gesteuert wird (ist $F_{sep1} = 1$, ist der rechte Term in Gl. 3.97 automatisch 1 und das Argument μ_t/μ hat keinen Einfluss). D.h. der rechte Term in Gl. 3.97 und damit F_{μ_t} werden 0, falls μ_t/μ entsprechend klein ist. Auf diese Weise wird erreicht, dass $\gamma_{\nabla p}$ im Falle laminarer Ablösung erst leicht stromab der Transition-*Onset*-Position aktiviert wird. Für Formfaktoren unter 3,5 ist der rechte Teil von F_{μ_t} immer 1, da $F_{sep1} = 1$, womit die Funktion F_{μ_t} nur durch den linken Term gesteuert wird.

Zusätzlich wird $\gamma_{\nabla p}$ erst dann aktiv, wenn bereits γ produziert wurde und damit $F_\gamma > 0$ gilt:

$$F_\gamma = \max(\gamma - 0, 2; 0). \quad (3.98)$$

So soll ein instabiles Verhalten in der transienten Phase vermieden werden.

Um zu verhindern, dass $\gamma_{\nabla p}$ für zu hohe Reynolds-Zahlen aktiv wird (vgl. Einleitung Abschn. 3.4.4), wird die folgende Funktion verwendet:

$$F_{Re_\theta} = \min \left[1; F_{sep2} + \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(10^3 - 10^3 \frac{Re_\theta}{350} \right) \right) \right]. \quad (3.99)$$

Die Wirkungsweise der Funktion über das Argument Re_θ ist analog zu Gl. 3.94. Eine Ausnahme bilden auch hier wieder abgelöste Grenzschichten (bzw. Grenzschichten nahe der Ablösung): $F_{sep2} = \frac{1}{2} (1 - \tanh(10^2 - 10^2 H_{12}/3, 3))$, für die F_{Re_θ} , unabhängig vom lokalen Wert von Re_θ , 1 bleibt.

Das Grundprinzip der in diesem Abschnitt vorgestellten Methodik basiert auf der Aktivierung des Zusatzterms $\gamma_{\nabla p}$ im transitionellen Bereich bei Gegendruck für niedrige Reynolds-Zahlen und einer leicht modifizierten Funktionalität für laminar abgelöste Strömungen. Die exakten Zahlenwerte für Schwellwerte innerhalb der verschiedenen Funktionen und Konstanten der Gleichungen 3.95 - 3.99 wurden anhand des 2D-RTG-Testfalls abgeschätzt bzw. kalibriert.

Der effektive Wert der Intermittenz, die das Turbulenzmodell steuert, berechnet sich nun aus der Summe von γ (das sich aus der Lösung der γ -Gleichung ergibt) und dem neuen Zusatzterm $\gamma_{\nabla p}$:

$$\gamma_{eff} = \min(2; \gamma + \gamma_{\nabla p}). \quad (3.100)$$

Die Kopplung an das k - ω SST-Turbulenzmodell (Menter et al. 2003) erfolgt identisch zum 4-Gleichungsmodell (s. Abschn. 3.3.6). In Gl. 3.52 ist die Variable γ gegen die in den Galilei-invarianten Modellversionen verwendeten effektive Intermittenz γ_{eff} zu tauschen.

Da integrale Größen durch die lokale Definition einen über die Grenzschicht nicht konstanten Wert haben, kann für Fälle bei sehr hohen Reynolds-Zahlen trotz Gl.3.99 beobachtet werden, dass der Zusatzterm in kleinen Bereichen aktiv ist, wodurch für diese Fälle ein leicht unerwünschter Einfluss entsteht. Daher soll der Term zunächst manuell für Fälle bei $Re > 10^6$ ausgeschaltet und getrennt untersucht werden.

4 Validierung der Modelle

Im Folgenden werden die vorgestellten Transportgleichungsmodelle für verschiedene Validierungstestfälle verglichen und detailliert analysiert. Die Notation bzw. Bezeichnung der verschiedenen Modelle ist Tab. 3.1 zu entnehmen.

4.1 Schwach-kompressible Testfälle

4.1.1 NLF(1)-0416-Profil und Netzstudie

Als Standardtestfall soll das NLF(1)-0416-Laminarprofil inklusive einer Netzstudie untersucht werden. Das von Somers (1981) vermessene Profil wird bei einer auf die Sehnenlänge des Profils bezogenen Reynolds-Zahl $Re_c = 4 \times 10^6$ und einer Mach-Zahl $Ma_\infty = 0,1$ sowie einem Turbulenzgrad $Tu \approx 0,03\%$ simuliert. Neben einer Verifikation, die die grundlegende Funktionsweise wichtiger Modellgleichungen überprüfen soll, wird das Modell gegenüber experimentellen Daten validiert und abschließend anhand systematisch verfeinerter Gitter Netzkonvergenz demonstriert.

Verifikation

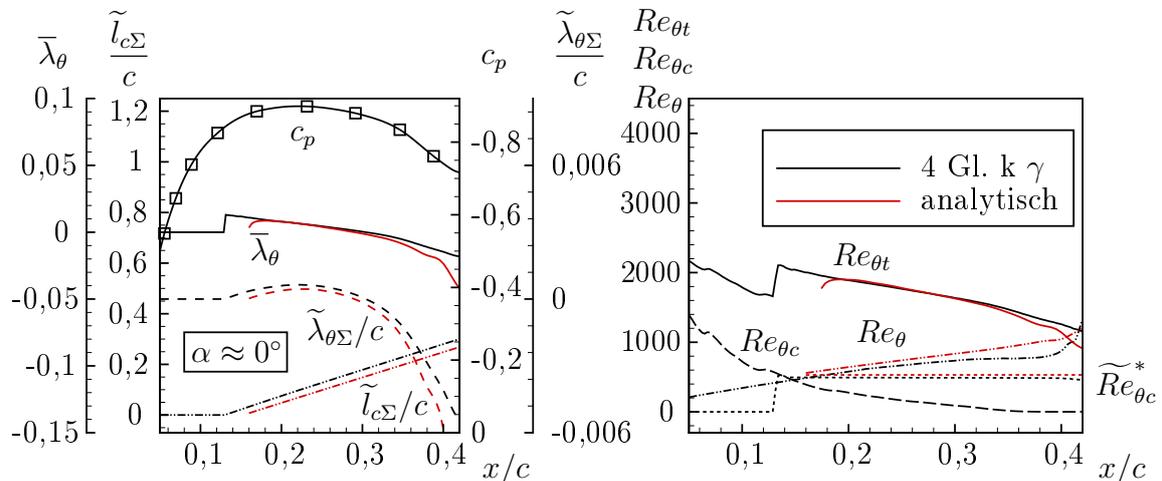


Abbildung 4.1: Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen und integrale Grenzschichtgrößen im Vergleich zur analytischen Referenzlösung für einen Anstellwinkel $\alpha \approx 0^\circ$; Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert

Vorab sollen die Modelle für zwei Anstellwinkel gegenüber analytisch ausgewerteten Größen verifiziert werden. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen hierzu wichtige Feldlösungen des kompressiblen 4-Gleichungsmodells, die an der Stelle y_{wR} extrahiert wurden, im Vergleich zum integral, analytisch ausgewerteten Kriterium¹⁵.

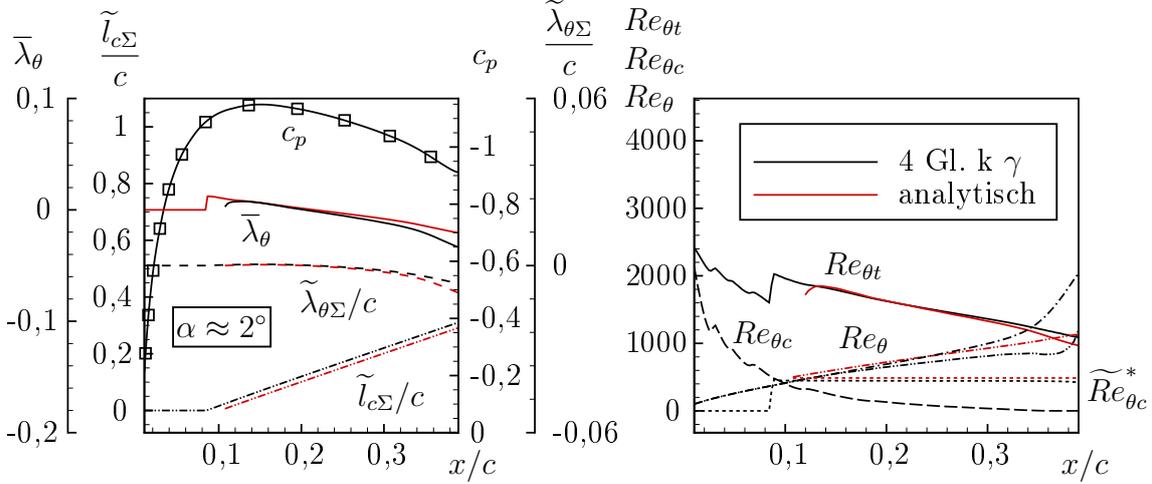


Abbildung 4.2: Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen und integrale Grenzschichtgrößen im Vergleich zur analytischen Referenzlösung für einen Anstellwinkel $\alpha \approx 2^\circ$; Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert

Für eine Bereitstellung des mittleren Druckgradientenparameters $\bar{\lambda}_\theta$ müssen die Größen $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$ als auch $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/c$ betrachtet werden. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 (*links*) zeigen, dass die Größe $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$ in sehr guter Übereinstimmung mit der analytischen Lösung bestimmt werden kann. Die Steigung beider linearer Funktionen ist nahezu identisch. Die leichte Abweichung liegt im Approximationsfehler des kritischen Punktes begründet, der den Beginn der Integration über die Funktion \mathcal{F}_λ definiert. Insgesamt startet der Integrationsprozess geringfügig zu weit stromauf. Die Größe $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$ eignet sich in besonderem Maße für eine Beurteilung der Qualität der reinen Integration über eine Transportgleichung, da der Integrand für alle Punkte des Definitionsgebietes $\psi = 1$ ist, also keine Abhängigkeiten des Integranden von weiteren Approximationen besteht. Zusätzlich kann die korrekte Lösung leicht auf Plausibilität überprüft werden, da der Wert für $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$ durch die Krümmung des Profils an einer betrachteten Stelle einen geringfügig größeren Betrag als den lokalen Wert von x/c ergeben sollte. Für die Größe $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/c$ gilt Ähnliches. Hier hängt die Lösung allerdings zusätzlich vom Integranden λ_θ ab. Insgesamt ist die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung unter Berücksichtigung, dass ein auf Basis laminarer Falkner-Skan-Lösungen approximierter Wert von λ_θ verwendet wird, sehr gut. Entsprechend kann auch der Quotient beider Größen $\bar{\lambda}_\theta$ für beide Winkel in sehr guter

¹⁵Der Terminus *analytisch* wird verwendet, wenn das Kriterium unter Verwendung von aus manuellen Integrationen gewonnen Grenzschichtgrößen ausgewertet wird.

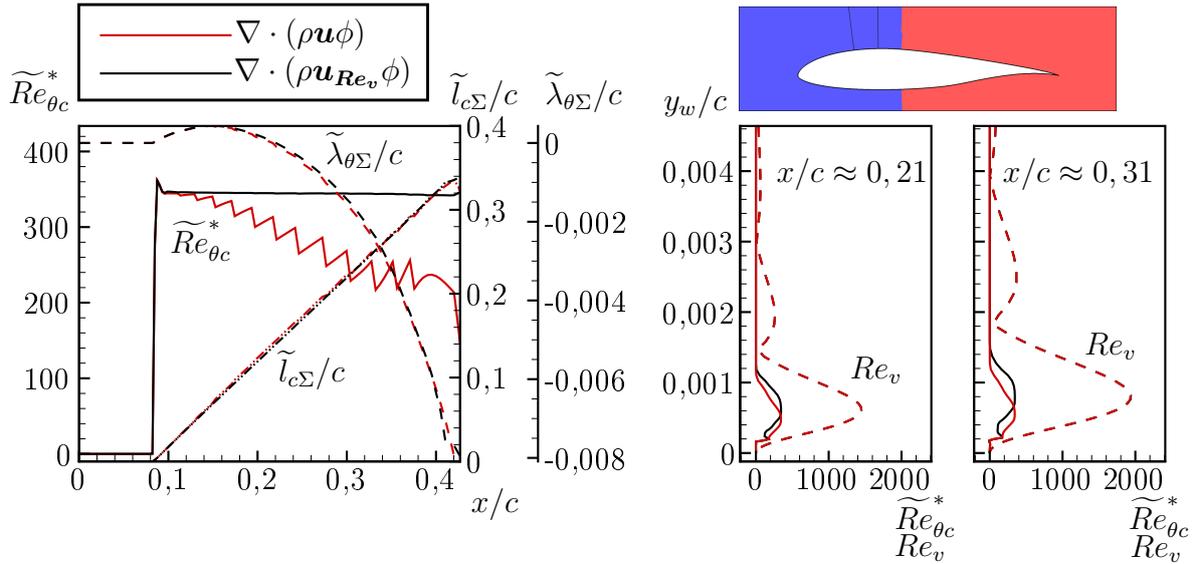


Abbildung 4.3: Einfluss der spezifischen Konvektionsgeschwindigkeit für verschiedene Strömungsgrößen entlang der x -Koordinate an der wandnormalen Position y_w/c (links) und Grenzschichtprofile an verschiedenen x -Positionen (schwarze wandnormale Linien im Konturplot, oben rechts, wobei blau: laminar, rot: turbulent) stromauf der künstlich gesetzten Transition-Onset-Position bei $x/c = 0,4$ (rechts)

Übereinstimmung mit der Referenz wiedergegeben werden.

Eine weitere Transportgleichung wird für eine Bereitstellung der Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl am kritischen Punkt benötigt. Die Transportgleichung für $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ produziert über den Produktionsterm Werte am kritischen Punkt, d.h. dort, wo erstmals $Re_{\theta} \approx Re_{\theta c} =: Re_{\theta c}^*$. Die an dieser Stelle vorliegende Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl wird in Abgrenzung zur lokalen Größe $Re_{\theta c}$ mit einem * gekennzeichnet als $Re_{\theta c}^*$ definiert. Die Produktion der transportierten Größe $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ ist aktiv, bis das lokale Niveau $Re_{\theta c}$ erreicht ist. In den Abbildungen 4.1 und 4.2 (rechts) ist diese Produktion als nahezu sprunghafter Anstieg von 0 auf das lokale $Re_{\theta c}$ erkennbar, sodass dort $\widetilde{Re}_{\theta c}^* = Re_{\theta c}$ gilt. Sobald stromab des kritischen Punktes wieder $Re_{\theta} \neq Re_{\theta c}$ gilt, wird der Destruktionsterm über den Sensor deaktiviert. D.h. abgesehen von einer vernachlässigbaren Diffusion und für den stationären Fall lautet die Gleichung nun:

$$\nabla \cdot (\rho \widetilde{Re}_{\theta c}^* \mathbf{u}_{Re_v}) + \mathbb{K}_{\widetilde{Re}_{\theta c}^*} = 0, \quad (4.1)$$

was unter Vernachlässigung der spezifischen Geschwindigkeit Folgendem entspricht: $\nabla \cdot (\rho \widetilde{Re}_{\theta c}^* \mathbf{u}) = 0$. Die Feldgröße $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ wird also konstant transportiert. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 (rechts) bestätigen, dass die produzierte Größe tatsächlich nahezu exakt konstant

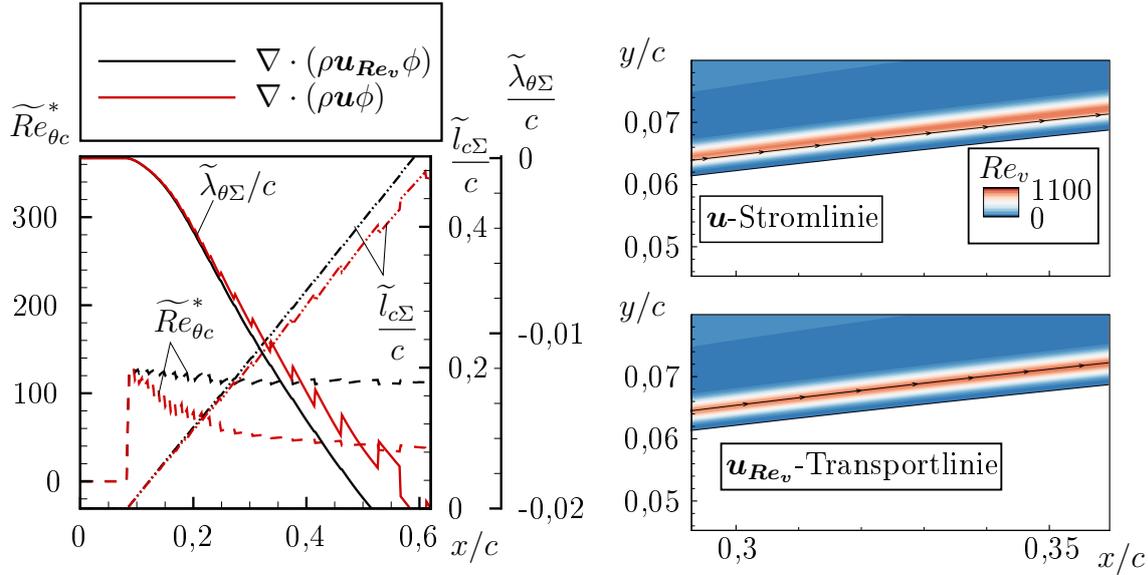


Abbildung 4.4: Einschub: Einfluss der spezifischen Konvektionsgeschwindigkeit bei einer niedrigen Reynolds-Zahl anhand des 2D-RTG-Profiles für einen kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ (Fall in Abschnitt 4.1.2 diskutiert); Verlauf der transportierten Größen (*links*) und Vergleich einer \mathbf{u} -Stromlinie und einer \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie (*rechts*)

transportiert wird, womit das Verhalten der Transportgleichung verifiziert ist. Der leichte Unterschied im Betrag der transportierten Größe ist auch hier in einer Ungenauigkeit der Approximation des kritischen Punktes über den Formfaktor zu begründen.

Als Zwischenfazit kann bzgl. der zusätzlichen Transportgleichungen schlussgefolgert werden, dass die Differentialgleichungen rein mathematisch exakt in der Lage sind, eine Integration bzw. den konstanten Transport einer Größe abzubilden. Approximationsfehler werden durch die Näherung integraler Grenzschichtgrößen eingebracht.

Insgesamt liegen die bereitgestellten Größen $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$, $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/c$ und $\tilde{Re}_{\theta c}^*$ damit in so guter Übereinstimmung mit der analytischen Referenzlösung, dass die finale Größe $Re_{\theta t}$ in sehr guter Näherung gitterpunktlokal wiedergegeben werden kann. Die leichte Abweichung in der Umgebung des Schnittpunktes $Re_\theta = Re_{\theta t}$ im verzögerten Bereich ist durch eine Stromaufwirkung durch die produzierte Turbulenz begründbar.

Die letzte zu diskutierende Größe ist die lokale Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_θ , die unter Verwendung der Größe Re_v approximiert wird. Insgesamt ist die Approximation in sehr guter Übereinstimmung mit der Referenzlösung. In Abb. 4.2 (*rechts*) ist zusätzlich die Lösung unter Verwendung eines konstanten Reynolds-Zahlenverhältnisses (d.h. Wert auf Basis der Blasius-Lösung, vgl. Abschn. 3.3.2) geplottet, das eine leicht bessere Übereinstimmung mit dem analytischen bzw. integralen Re_θ -Verlauf zeigt. Aus Konsistenzgründen wird dennoch ein variables, vom lokalen Formfaktor abhängiges Ver-

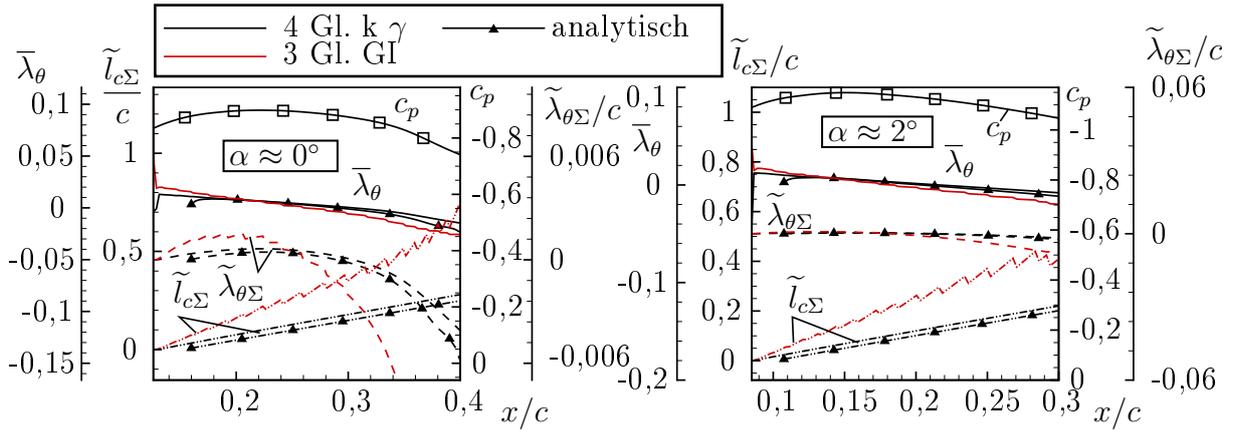


Abbildung 4.5: Lösung der integrierenden Transportgleichungen des Galilei-invarianten 3-Gleichungsmodells im Vergleich zum 4-Gleichungsmodell und zur analytischen Referenzlösung für die Anstellwinkel $\alpha \approx 0^\circ$ (links) und $\alpha \approx 2^\circ$ (rechts), Feldgrößen an der wandnormalen Position y_{wR} extrahiert

hältnis verwendet.

Zusätzlich soll nun auf Basis von Abb. 4.3 der Einfluss der spezifischen, modifizierten Transportgeschwindigkeit, die für die 4-Gleichungsmodelle verwendet wird, auf die transportierten Größen für den NLF(1)-0416-Testfall gezeigt werden.

Insbesondere für die $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ -Gleichung kann ein sehr großer Effekt beobachtet werden. Ohne die angepasste Konvektionsgeschwindigkeit wird der Wert von $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ nicht wie erforderlich konstant gehalten. Die Größe fällt stark ab. Für die weiteren Transportgleichungen hat die Geschwindigkeitskorrektur im mittleren bis hohen Reynolds-Zahlenbereich einen geringeren Einfluss (vgl. auch theoretische Betrachtung in Abschnitt 3.4.2). Für dicke Grenzschichten wird der Einfluss jedoch merklich größer: In Abb. 4.4 ist dies vorgreifend anhand des im folgenden Abschnitt diskutierten 2D-RTG-Profiles gezeigt, das eine deutlich niedrigere Reynolds-Zahl aufweist. Während die Größe $\widetilde{Re}_{\theta c}^*$ in Abb. 4.4 (links) ähnlich stark wie in Abb. 4.3 abfällt, zeigen $\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/c$ und $\widetilde{l}_{c\Sigma}/c$ für diesen Fall eine deutlich größere Abhängigkeit hinsichtlich der verwendeten Konvektionsgeschwindigkeit. In Abb. 4.4 (rechts) ist zusätzlich eine Stromlinie, die am kritischen Punkt eine gedachte horizontale Linie auf der wandnormalen Position y_{wR} schneidet (also genau die Position, an der die Integration startet), im Vergleich zu einer \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie, die sich ebenfalls am kritischen Punkt bei y_{wR} befindet, dargestellt. D.h. die Stromlinie und auch die Transportlinie werden ab dem kritischen Punkt auf wandnormaler Höhe y_{wR} nach stromab beobachtet. Die Position bzw. Linie $y_{wR}(s)$ ist in Abb. 4.4 (rechts) genau diejenige gedachte Kurve, die alle Maxima von Re_v bzgl. y_w von stromauf nach stromab verbindet. Es ist zu erkennen, dass die Stromlinie (oben) im betrachteten Bereich bereits deutlich unter die gedachte y_{wR} -Linie abgefallen ist. Die \mathbf{u}_{Re_v} -Transportlinie (unten) hingegen hält die Position y_{wR} für alle stromab des kritischen Punktes betrachteten Stellen.

Die Galilei-invariante Neuformulierung des Modells erforderte auch eine Anpassung der integrierenden Transportgleichungen. In den Galilei-invarianten Quelltermen dieser Gleichungen (Gl. 3.87) taucht nun ein Faktor $1/k_S$ auf, der den Term $\|\mathbf{S}\|y_w$ so skaliert, dass an der Stelle y_{wR} approximativ der lokale Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\|\mathbf{u}\|_2$ wiedergegeben wird. Wie in Abb. 4.5 für zwei Anstellwinkel gezeigt, ist die Abweichung unter Verwendung des gewählten Faktors sowohl für $\tilde{l}_{c\Sigma}/c$ als auch für $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/c$ recht groß. Der finale gemittelte Druckgradientenparameter $\bar{\lambda}_\theta$ hingegen weist eine sehr gute Übereinstimmung im Vergleich zum 4-Gleichungsmodell (d.h. zur Lösung der Gleichungen, die nicht Galilei-invariant formuliert sind) und der analytischen Lösung auf. Eine Variation des Faktors offenbart, dass der Einfluss vernachlässigbar gering ist und sich im finalen Quotienten herauszuheben scheint: In allen Fällen ergibt sich nahezu derselbe Verlauf für $\bar{\lambda}_\theta$ (hier nicht gezeigt), sodass die Approximation nur vom lokalen λ_θ abhängt und die Integration in ihrer Galilei-invarianten Form als nahezu äquivalent angesehen werden kann. Die Lösung für $Re_{\theta t}$ wird hier nicht mit der analytischen Lösung verglichen, da das Kriterium im Rahmen der Modellierung modifiziert wurde, um auf eine Transportgleichung verzichten zu können. Insgesamt kann also keine exakte Übereinstimmung an jedem Punkt mit dem ursprünglichen Kriterium erwartet werden. Die final bestimmte Transitionsposition ist jedoch, wie im Folgenden gezeigt werden kann, in ähnlich guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

Validierung

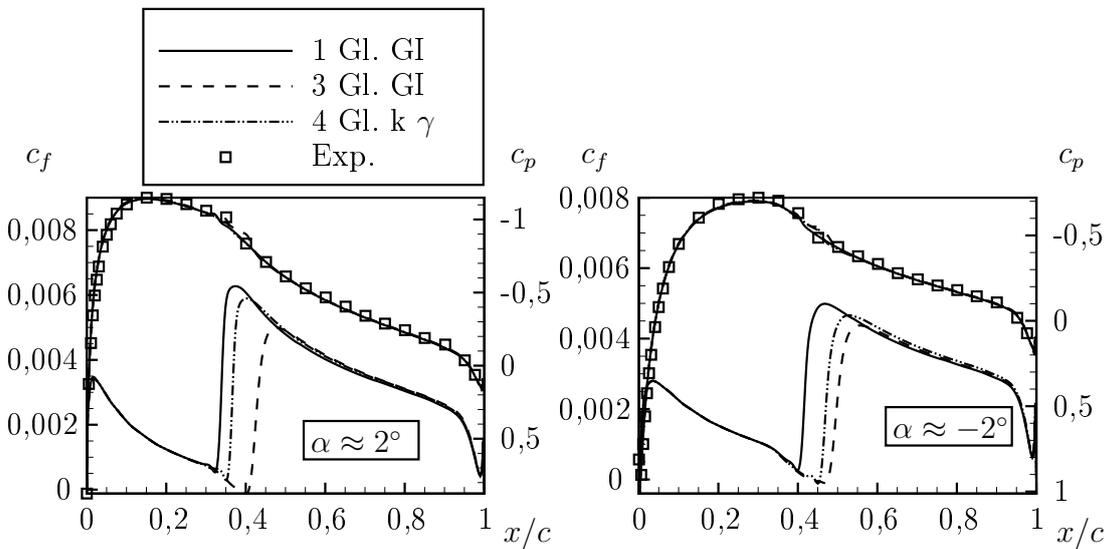


Abbildung 4.6: Druckverteilungen und Wandschubspannungsbeiwerte für die Oberseite bei Anstellwinkeln $\alpha = 2^\circ$ (links) und $\alpha = -2^\circ$ (rechts)

In Abb. 4.6 sind exemplarisch für zwei Winkel Druckverteilungen und Wandschubspannungsbeiwerte geplottet. Es ist zu erkennen, dass in beiden Fällen eine sehr gute Überein-

stimmung mit den experimentellen c_p -Daten nach Somers (1981) erreicht wird. Zusätzlich ergibt sich für die gezeigten Winkel ein qualitativ physikalisch sinnvoller c_f -Verlauf. In Abb. 4.7 sind die Lösungen der Transitionsmodelle für verschiedene Anstellwinkel und die dazugehörigen Polaren im Vergleich zum Experiment gezeigt. Die in Abb. 4.7 (*links*) dargestellte Position beginnender Transition wurde aus c_f -Verläufen extrahiert (lokales Minimum c_f über x/c). Neben den Transitionsmodellen und experimentellen Daten von Somers (1981) sind Ergebnisse aus Ströer et al. (2020b), die aus einer lokalen linearen Stabilitätsanalyse in Verbindung mit der e^N -Methode gewonnen wurden, gezeigt. Für die experimentellen Daten sind in Abb. 4.7 (*links*) zwei Linien dargestellt, wobei die stromaufliegende die noch laminare und die stromabliegende Linie die bereits turbulente Strömung kennzeichnet. Transition fand im Experiment also zwischen diesen Linien statt. Für die Saugseite ist zu erkennen, dass alle Modelle weitgehend ei-

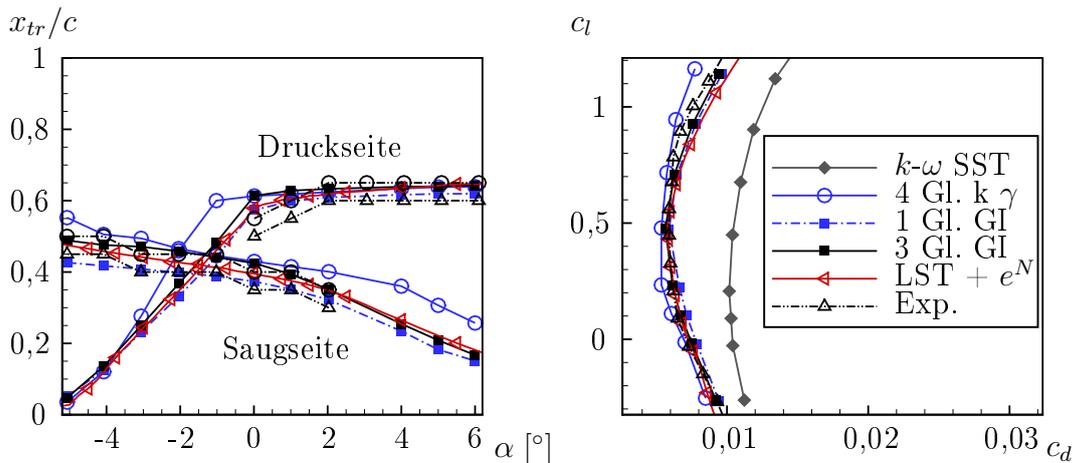


Abbildung 4.7: Transition-*Onset*-Positionen für die Ober- und Unterseite in Abhängigkeit des Anstellwinkels α (*links*) und c_l - c_d -Polaren inklusive Vergleichsergebnissen für das $k-\omega$ SST-Modell aus Seyfert und Krumbein (2012) (*rechts*)

ne sehr gute bis gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten und den LST + e^N -Ergebnissen aufweisen: Die Ergebnisse des 1-Gleichungsmodells liegen geringfügig stromauf, was daran liegt, dass durch die fehlende Mittelung ein stärkerer Gegendruckgradient angenommen wird, was den Wert von Re_{θ_t} mindert und im Vergleich zu einer gemittelten Größe zu einer im Vergleich stromauf liegenden Transitionsposition führt. Das 3-Gleichungsmodell liegt entsprechend weiter stromab und im Bereich $\alpha \in [-5^\circ; 2^\circ]$ in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Ab $\alpha = 2^\circ$ liegen auf der Oberseite keine experimentellen Daten vor, sodass die LST + e^N -Lösung als Referenz verwendet wird. Auch in diesem Bereich zeigt das 3-Gleichungsmodell eine sehr gute Übereinstimmung mit den LST + e^N -Daten. Diese Ergebnisse spiegeln sich auch in den in Abb. 4.7 (*rechts*) gezeigten Polaren wieder. Sowohl das 1-Gleichungsmodell als auch das 3-Gleichungsmodell ergeben eine sehr gute Übereinstimmung mit den ex-

perimentellen Daten. Bei genauem Hinsehen ist zu erkennen, dass für $c_l > 0,7$ das 3-Gleichungsmodell etwas näher an den experimentellen c_d -Daten liegt.

Das an die γ -Gleichung gekoppelte kompressible 4-Gleichungsmodell zeigt, wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen $Re_{\theta t}$ -Werten. Die Approximation der Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_{θ} wird jedoch unter Verwendung eines variablen, vom Formfaktor abhängigen Reynolds-Zahlenverhältnisses schlechter als unter Verwendung des konstanten Wertes (Blasius-Lösung) und sagt leicht zu tiefe Re_{θ} -Werte voraus, was zu einer an manchen Stellen ($\alpha \in [2^\circ; 6^\circ]$) stromab liegenden Transitionslinie führt. Insgesamt liegen die Transitionslagen für das 4-Gleichungsmodell trotz einer sehr guten Wiedergabe des Kriteriums dadurch etwas stromab der Experimente. Beschriebenes ist exemplarisch für den Winkel $\alpha \approx 4^\circ$, der

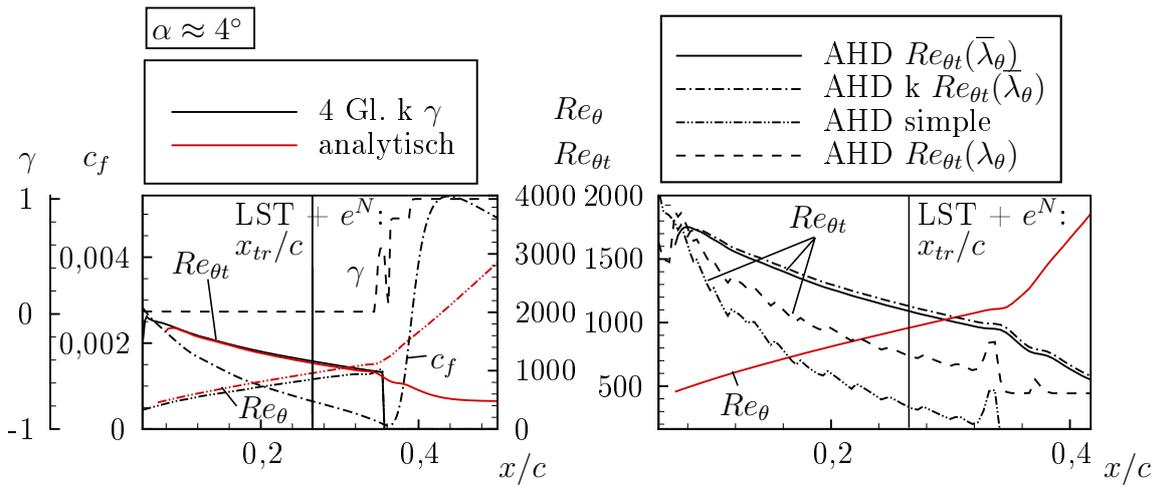


Abbildung 4.8: Analyse des 4-Gleichungsmodells (*links*) und Betrachtung verschiedener analytisch ausgewerteter Kriterien (*rechts*) für einen Anstellwinkel von $\alpha \approx 4^\circ$

in Abb. 4.7 (*links*) die größte Abweichung zwischen 4-Gleichungsmodell und LST + e^N zeigt, anhand von Abb. 4.8 visualisiert. Der Wert für $Re_{\theta t}$ wird nahezu exakt wiedergegeben. Re_{θ} wird leicht unterschätzt, ist aber dennoch in guter Übereinstimmung. Zusätzlich ist die γ -Produktion leicht verzögert, was zu einem leichten Versatz zwischen dem initialen γ -Anstieg und dem Minimum von c_f führt. Ferner ist zu erkennen, dass auch das analytisch ausgewertete Kriterium stromab der mittels LST + e^N -Methode bestimmten Position beginnender Transition liegt.

In Abb. 4.8 (*rechts*) ist zusätzlich ein Vergleich zwischen dem originalen und dem kompressiblen Kriterium gezeigt, da die kompressible Variante auch für $Ma \rightarrow 0$ leicht höhere Werte von $Re_{\theta t}$ liefert. Der Unterschied führt allerdings nur zu einem geringen Versatz in der finalen Position beginnender Transition. Zusätzlich sind weitere Kriterien gezeigt, für die die Transitionsposition jedoch deutlich weiter stromauf und in schlechterer Übereinstimmung mit den LST + e^N -Ergebnissen liegt.

Netzstudie

Für den bereits analysierten Fall des NLF(1)-0416-Profiles wurde eine Netzstudie auf drei systematisch verfeinerten Netzen durchgeführt. Die Topologie der Netze ist in Abb. 4.9

Netz	Strömungsrichtung: N_x	Grenzschicht: $N_{y_{GS}}$	Gesamt: $N_{ges}/10^3$
\mathcal{M}_3	250	60	290
\mathcal{M}_2	375	90	620
\mathcal{M}_1	500	120	1100

Tabelle 4.1: Auflösung der im Rahmen der Netzstudie verwendeten Gitter \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3

(oben) dargestellt. Alle Gitter sind hybrid vernetzt und bestehen aus einem strukturierten Bereich um das Profil inklusive des Nachlaufs und einem unstrukturiert vernetzten Fernfeld. Der strukturierte Nachlauf weitet sich stromab der Hinterkante normal zur Strömungsrichtung auf (Abb. 4.9, oben), um Zellen mit sehr großem Seitenverhältnis im Nachlauf zu verhindern und zusätzlich der Aufweitung der Nachlaufströmung Rechnung zu tragen. Die Auflösung der Netze ist Tab. 4.1 zu entnehmen. In Abb. 4.9 (unten)

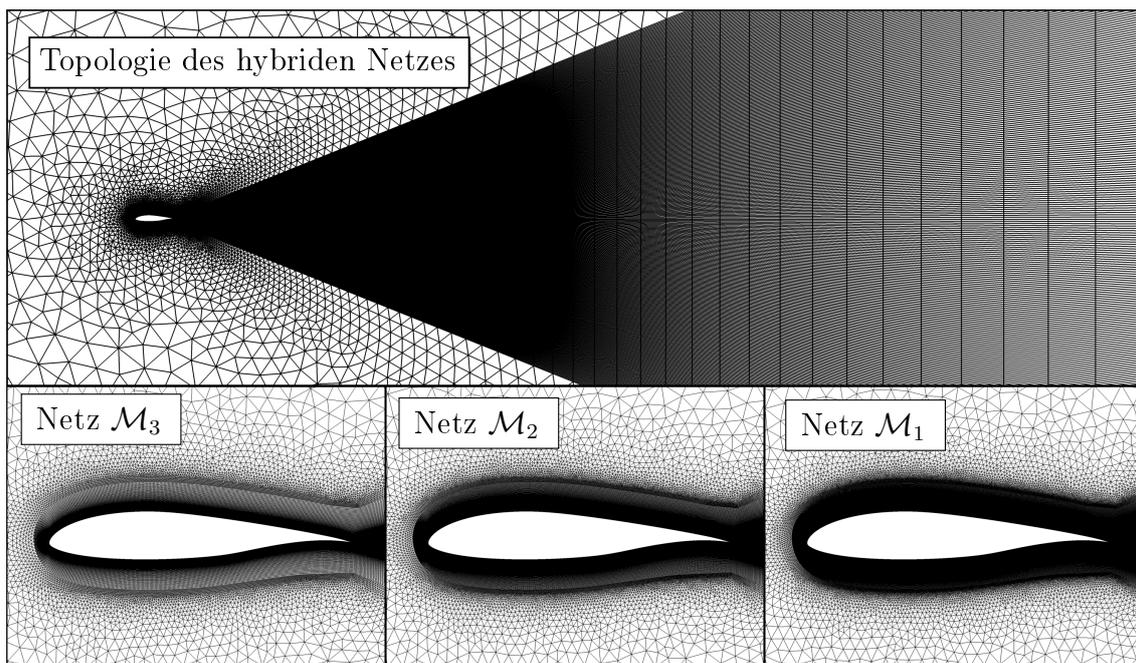


Abbildung 4.9: Visualisierung der Topologie der Gitter am Beispiel von Netz \mathcal{M}_3 (oben) und Darstellung der von links nach rechts feiner werdenden hybriden Gitter \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 (unten)

sind die von links nach rechts feiner werdenden Gitter \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 dargestellt. Die

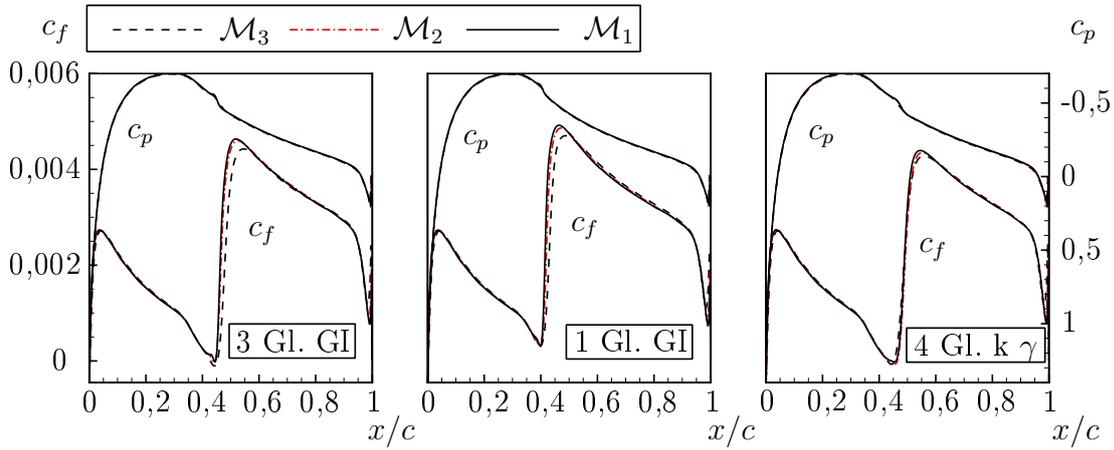


Abbildung 4.10: c_f - und c_p -Verläufe für verschiedene systematisch verfeinerte Netze bei einem Anstellwinkel $\alpha \approx -2^\circ$

Punkte in Strömungsrichtung beziehen sich hierbei auf jeweils eine Seite des Profils (d.h. Ober- und Unterseite enthalten jeweils N_x Knoten). Zur Bestimmung, der in der Grenzschicht liegenden Punkte, wurden Grenzschichtdicken aus Rechnungen auf vorläufigen Netzen verwendet.¹⁶

Für alle Modelle ist erkennbar, dass sich ein netzkonvergentes Verhalten einstellt. Die Transitionsposition (Minimum in c_f) ist für alle betrachteten Netze nahezu identisch. Leichte Unterschiede sind im c_f -Anstieg und dementsprechend im Maximum von c_f zu erkennen. Insgesamt kann das zweitfeinste Netz \mathcal{M}_2 als hinreichend fein betrachtet werden. Alle Modelle zeigen ein sehr ähnliches Verhalten, wobei die Lösung des kompressiblen 4-Gleichungsmodells auf dem größten Netz \mathcal{M}_3 im Vergleich zu den anderen Modellen bereits etwas näher am netzkonvergierten Zustand liegt. Die Druckverteilung zeigt eine erwartungsgemäß sehr geringe Sensitivität gegenüber einer Variation des Rechengitters.

4.1.2 DSA-9A-Profil

Der zweite Testfall ist ein 2D-Profil im tiefen Reynolds-Zahlenbereich (an der Blattspitze auf die Sehnenlänge bezogen: $Re_{cR} = \mathcal{O}(10^5)$), das in Anlehnung an Weiss et al. (2019) aus dem 3D-RTG-Rotorblatt extrahiert wurde. Der in Weiss et al. (2019) detailliert beschriebene Zweiblattrotor basiert auf dem DSA-9A-Profil und wurde in der in Schwermer et al. (2016) entwickelten Rotor Testanlage Göttingen (RTG) aufwendig vermessen. Die Messung der Transitionslagen erfolgte mit temperatursensitiver Farbe. Weitere Details zum Versuchsaufbau sind Weiss et al. (2019) zu entnehmen. Die Experimente stellen einen Testfall bereit, bei dem u.a. Tollmien-Schlichting-Transition (TS-Transition) im

¹⁶Der um das Blatt in Abb. 4.9 (*unten*) zu erkennende strukturierte Bereich ist breiter als die Grenzschichtdicke und enthält in wandnormaler Richtung mehr als $N_{y_{GS}}$ Punkte.

verzögerten Bereich bei tiefen Reynolds-Zahlen $\mathcal{O}(10^5)$ und tiefen Turbulenzgraden auftritt.

Die erste Analyse der Modelle und Voruntersuchungen werden im Folgenden anhand zweidimensionaler Rechnungen durchgeführt. Im weiteren Verlauf der Arbeit (s. Abschn. 4.4.2) wird zusätzlich der volle Rotor im Steigflug analysiert.

Äquivalente 2D-Strömungsbedingungen

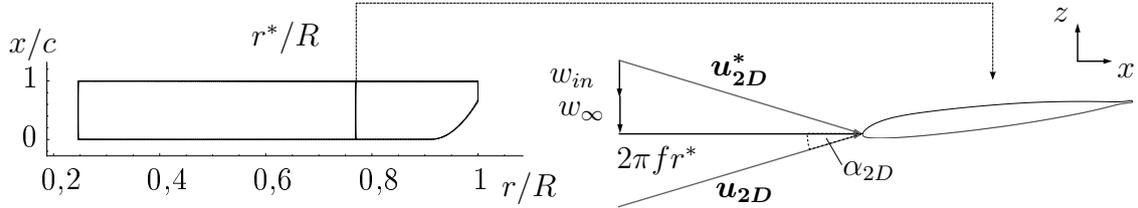


Abbildung 4.11: Rotorblatt des RTG-Rotors (*links*) und Schemazeichnung äquivalenter 2D-Anströmbedingungen am betrachteten radialen Schnitt (*rechts*)

Die verfügbaren Messdaten beziehen sich auf den vollen Rotor. Daher ist es im Zweidimensionalen nicht unmittelbar möglich, äquivalente Anströmbedingungen zu definieren. Neben der relativen Anströmung durch die Rotation mit der Frequenz f müssen aus dem Wirbelsystem induzierte Geschwindigkeiten w_{in} und die sich aus der vertikalen Zuströmung ergebende Geschwindigkeit (entspricht einem Steigflug) w_∞ berücksichtigt werden. Abb. 4.11 (*rechts*) visualisiert Beschriebenes am Schnitt r^*/R . Der Betrag der Anströmgeschwindigkeit ergibt sich unter der Annahme, dass die Komponenten orthogonal aufeinander stehen, zu:

$$\|\mathbf{u}_{2D}\|_2 = u_{2D} = \sqrt{(2\pi f r^*)^2 + (w_\infty + w_{in})^2}. \quad (4.2)$$

Der äquivalente Anstellwinkel α_{2D} folgt, indem der kollektive Nickwinkel β entsprechend verringert wird:

$$\alpha_{2D} = \beta - \arctan\left(\frac{(w_\infty + w_{in})}{2\pi f r^*}\right). \quad (4.3)$$

Das in Abb. 4.11 (*rechts*) dargestellte Profil ist nicht in seiner neutralen Position gezeigt, da Rotorblätter typischerweise verwunden sind, um die inhärente Variation des Auftriebs entlang des Rotorradius auszugleichen. So zeigt Abb. 4.11 das DSA-9A-Profil an seiner tatsächlichen Position $r/R = r^*/R \approx 0,77$. Die induzierte, am betrachteten Schnitt vorliegende Geschwindigkeit w_{in} wurde hierbei mit Hilfe der 1D-Impulstheorie abgeschätzt und anschließend variiert, bis eine hinreichend gute Übereinstimmung mit der experimentellen Druckverteilung vorlag. Die so berechneten Größen werden dem Fernfeldrand aufgeprägt. Die Referenzgrößen (d.h. Reynolds-Zahl und Mach-Zahl), die sich typischerweise auf die Geschwindigkeit an der Blattspitze beziehen, können entsprechend angepasst werden.

Bestimmung des Turbulenzgrades

Für Transitionsberechnungen spielt neben dem Druckgradienten der Turbulenzgrad eine entscheidende Rolle. In Weiss et al. (2019) wird dieser invers aus den berechneten Transitionslagen am 2D-Profil bestimmt. Hierzu wird die laminare 2D-Strömung mit Hilfe lokaler, linearer Stabilitätstheorie (LST) analysiert. Anschließend werden Anfachungsraten und die Einhüllende dieser Anfachungsraten bestimmt. Weiss et al. (2019) verwenden vollturbulente MSES-Lösungen für eine Bestimmung der Druckverteilung, die variiert wird, bis eine gute Übereinstimmung mit experimentellen c_p -Daten vorliegt. Diese Druckverteilung wird als Eingabe für einen laminaren Grenzschichtcode (Coco) verwendet, der durch Lösen der Grenzschichtgleichungen die laminaren Grenzschichtprofile bestimmt, die abschließend unter Verwendung des Stabilitätslösers Lilo die Anfachungsraten und folglich die Enveloppe ergibt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit

Referenz	Vorgehen	N_{krit}	Tu (Mack)
vorl. Arbeit	TAU \rightarrow GS-Gl. \rightarrow LST	8,5	0,086%
vorl. Arbeit	TAU \rightarrow LST	8,1	0,1%
Weiss et al. (2019)	MSES \rightarrow GS-Gl. \rightarrow LST	$8,4 \pm 0,5$	$0,09 \pm 0,02\%$

Tabelle 4.2: Bestimmung des kritischen N-Faktors/Turbulenzgrades, GS-Gl.: Grenzschichtgleichungen (Grenzschichtcode Coco), TAU: CFD-Löser, MSES: CFD-Löser, LST: lokale, lineare Stabilitätstheorie (Stabilitätscode Lilo)

(vorläufige Ergebnisse in Kaufmann et al. 2019 veröffentlicht) wurde dieses Vorgehen unter Verwendung verschiedener Methoden nachvollzogen und ergänzt. Zunächst wurde die aus einer laminaren TAU-Lösung extrahierte Druckverteilung als Eingabe für den Grenzschichtcode Coco verwendet, woraus sich ein zu Weiss et al. (2019) sehr ähnlicher kritischer N -Faktor ergibt. Zusätzlich wurden ohne die Verwendung eines Grenzschichtcodes direkt laminare TAU-Grenzschichtprofile als Eingabe für den Stabilitätslöser Lilo verwendet (TAU-Transitionsmodul, vgl. Krimmelbein und Radespiel 2009 und Krimmelbein 2021). Der resultierende kritische N -Faktor ist etwas tiefer. Beide Ergebnisse liegen in dem von Weiss et al. (2019) angegebenen Bereich und zeigen insgesamt eine gute Übereinstimmung (s. Tab. 4.2). In Abb. 4.12 (*links oben*) ist eine exemplarische Stabilitätslösung inkl. der Einhüllenden für beide Vorgehensweisen dargestellt. Unter Verwendung der experimentellen Position beginnender Transition wird so anhand der Enveloppe gemäß der e^N -Theorie ein kritischer N -Faktor bestimmt, aus dem durch Invertieren der Beziehung von Mack (1977) ein entsprechender Turbulenzgrad berechnet werden kann.

Verifikation und Validierung

Dieser Abschnitt soll eine zum vorangegangenen Abschnitt ergänzende Verifikation bieten:

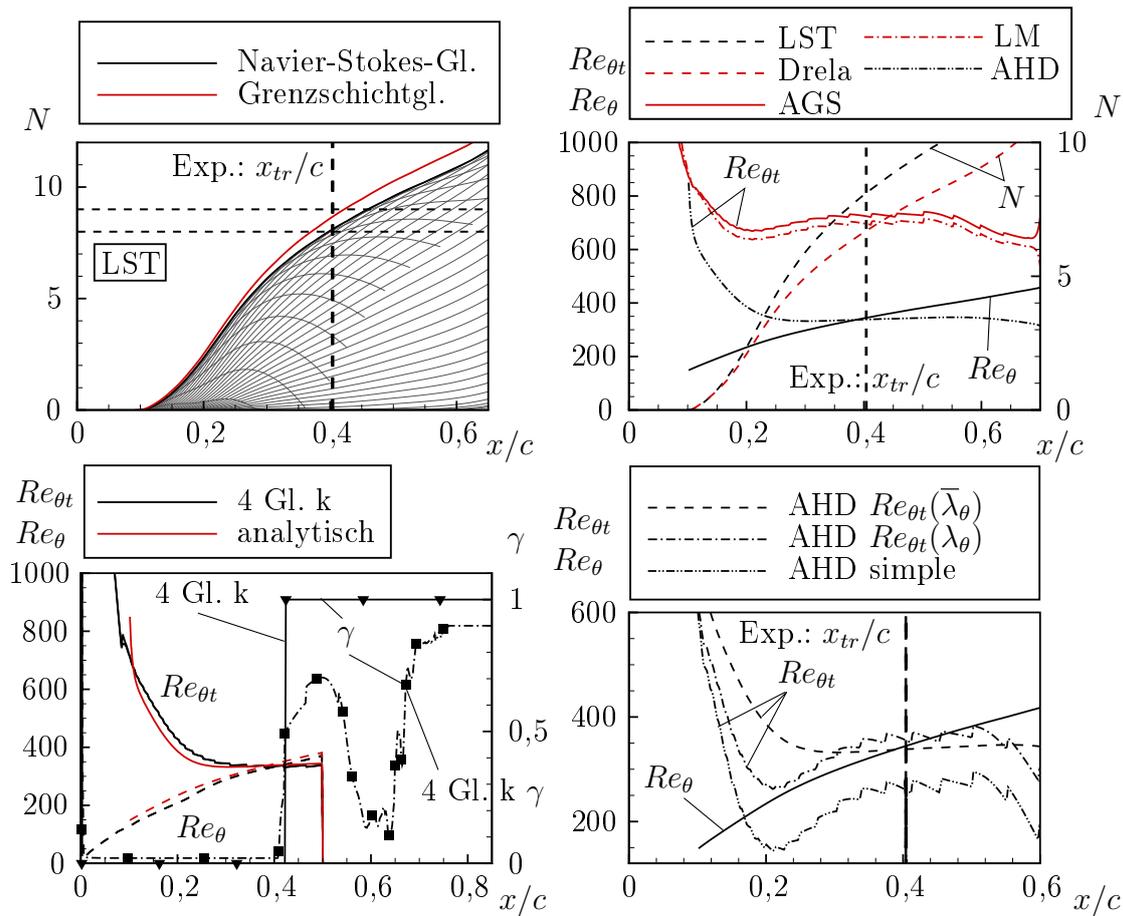


Abbildung 4.12: Anfachungsraten aus der lokalen, linearen Stabilitätstheorie (LST) (*links oben*), Vergleich verschiedener Transitionskriterien (*rechts oben und unten*) und Vergleich des AHD-Kriteriums mit dem 4-Gleichungsmodell (*links unten*) für das 2D-RTG-Profil; Abkürzungen der Transitionskriterien: Drela: Drela und Giles (1987), AGS: Abu-Ghannam und Shaw (1980), LM: Langtry und Menter (2009), AHD: Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981)

- Betrachtung und Vergleich verschiedener integral ausgewerteter zugrundeliegender Transitionskriterien für diesen Testfall mit niedriger Reynolds-Zahl unabhängig von Transitionsmodellen
- Vergleich des 4-Gleichungsmodells mit dem zugrundeliegenden Transitionskriterium
- Untersuchung verschiedener Methoden des Setzens der Transitionsposition (γ -Gleichung und \tilde{l}_{γ} -Gleichung) für das 4-Gleichungsmodell
- Ergebnisse anhand von c_f - und c_p -Plots

Abb. 4.12 (*rechts unten, rechts oben*) zeigt die analytische Auswertung verschiedener Transitionskriterien unter Verwendung integraler Grenzschichtgrößen. Ein Vergleich der dem AHD-Kriterium sehr ähnlichen Methode von Drela und Giles (1987) mit der Enveloppe aus den in Abb. 4.12 (*links oben*) gezeigten LST-Ergebnissen (basierend auf den laminaren Profilen der CFD-Lösung) zeigt eine Unterschätzung des N -Faktors im verzögerten Bereich (vgl. c_p -Verteilung 4.13, *rechts*) und eine damit verbundene Stromabverschiebung der Position beginnender Transition im Vergleich zum Experiment (unter Annahme der kritischen N -Faktoren aus Tab. 4.2).

Für die Re_θ basierten Kriterien ergibt sich die Transition-*Onset*-Position aus dem Schnittpunkt der Verläufe von Re_θ und dem eigentlichen Kriterium $Re_{\theta t}$ (Abb. 4.12, *rechts oben und unten*). Ein Vergleich dieser Kriterien mit der experimentellen Position beginnender Transition zeigt, dass die auf der Methode von Abu-Ghannam und Shaw (1980) basierenden Kriterien (AGS und LM, Langtry und Menter 2009) den Wert von $Re_{\theta t}$ deutlich überschätzen und keine TS-Transition vorhersagen, da sich die Verläufe von Re_θ und $Re_{\theta t}$ erst weit stromab bei starkem Gegendruck schneiden (hier nicht zu sehen, stromab des rechten Bildrandes von Abb. 4.12, *rechts oben*). Das AHD-Kriterium zeigt hingegen eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten und trifft die experimentelle Transitionsposition für den gezeigten Winkel nahezu exakt. Da anstelle des 3-Gleichungsmodells auch ein vereinfachtes 1-Gleichungsmodell verfügbar ist, soll zusätzlich analysiert werden, wie sich das reine AHD-Kriterium verhält, wenn statt des räumlich, ab dem kritischen Punkt gemittelten Druckgradientenparameters $\bar{\lambda}_\theta$, der lokale Druckgradientenparameter verwendet wird (Abb. 4.12, *rechts unten*). Zusätzlich ist das AHD-simple-Kriterium gezeigt, das eine vereinfachte Variante des reinen AHD-Kriteriums darstellt und auf den gemittelten Druckgradientenparameter verzichtet. Es ist ersichtlich, dass sowohl AHD $Re_{\theta t}(\bar{\lambda}_\theta)$ als auch AHD $Re_{\theta t}(\lambda_\theta)$ eine ähnliche Position beginnender Transition vorhersagen. Der mit λ_θ berechnete Schwellwert $Re_{\theta t}(\lambda_\theta)$ reagiert jedoch in unmittelbarer Nähe der Saugspitze sehr sensitiv auf den starken Gegendruckanstieg, wodurch hier die Gefahr besteht, dass unmittelbar stromab des Druckminimums Transition detektiert wird. Das simple AHD-Kriterium reagiert noch sensitiver auf den starken Gegendruck und detektiert Transition kurz stromab an der Saugspitze.

Das 4-Gleichungsmodell hat das Ziel, das zugrundeliegende Kriterium möglichst genau im Rahmen eines Transitionsmodellierungsansatzes abzubilden und den Wert für $Re_{\theta t}$ gitterpunktlokal bereitzustellen. Abb. 4.12 (*links unten*) zeigt einen Vergleich des 4-Gleichungsmodells mit dem analytisch ausgewerteten kompressiblen AHD-Kriterium. Es ist ersichtlich, dass sowohl Re_θ als auch $Re_{\theta t}$ sehr gut mit der analytischen Lösung übereinstimmen.

Wie in Abschnitt 3.3.5 beschrieben, stehen für das 4-Gleichungsmodell zwei Methoden für das Setzen der berechneten Transitionslage zur Verfügung: Die ursprüngliche in Ströer et al. (2020b) eingeführte Variante verwendet die integrierende \tilde{l}_γ -Gleichung (Gl. 3.47), die, sobald Transition detektiert wurde, eine Integration entlang der krummlinigen Abszisse startet. Das ermöglicht eine quantifizierbare räumliche Trennung der Transitionsposition und des Ortes, an dem das Turbulenzmodell aktiviert wird, oder die Modellierung eines Transitionsbereiches unter Verwendung dieser Länge. Eine weitere

Möglichkeit bietet die γ -Gleichung von Langtry und Menter (2009) (Gl. 3.41). Beide Ansätze werden inklusive wandnormaler Kommunikation verwendet. Auf diese Weise kann ein Einfluss des Produktionsverhaltens der verwendeten γ - bzw. $\tilde{\gamma}$ -Gleichung¹⁷ ausgeschlossen werden und das Turbulenzmodell wird direkt ab einer bestimmten Position über die gesamte Grenzschicht aktiviert (vgl. Diskussion in den Abschnitten 3.3.5 und 3.4.4).

Für den vorliegenden Fall ist ersichtlich, dass beide Methoden erwartungsgemäß an derselben Position Transition detektieren (Re_θ und $Re_{\theta t}$ für beide Methoden identisch und daher in Abb. 4.12, *links unten* nur für ein Modell gezeigt). Ab dieser Position sollten beide Methoden zu einem möglichst schnellen Anstieg der Variablen γ führen. Es ist jedoch zu erkennen, dass die in Abb. 4.12 (*links unten*) mit 4 Gl. k γ bezeichnete Variante (d.h. die Variante, die die γ -Transportgleichung verwendet) zu langsam γ produziert und weiter stromab wieder abfällt. Die γ -Gleichung entkoppelt in ihrer ursprünglichen Variante die Größe μ_t/μ , die ein Maß für die bereits produzierte Wirbelviskosität darstellt, und die γ -Produktion stärker. Für Fälle bei tiefen Reynolds-Zahlen (bei außenaerodynamisch tiefen Turbulenzgraden), bei denen ein verzögertes Anfahrverhalten des SST-Turbulenzmodells bekannt ist, führt diese Entkopplung zu dem in Abb. 4.12 (*links unten*) gezeigten Verlauf: Für turbulente Grenzschichten kann es dazu kommen, dass das Verhältnis aus Re_θ und $Re_{\theta t}$ durch die produzierte Wirbelviskosität (und deren Einfluss auf integrale Grenzschichtgrößen) in der Transitionszone wieder unter 1 abfällt (hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gezeigt). Ist unter diesen Umständen der Wert μ_t/μ zu gering, wird der Destruktionsterm aktiv und zerstört bereits produziertes γ . Die zweite Methode, die eine integrierende Gleichung verwendet (Gl. 3.47), wurde im Hinblick auf Fälle mit tiefen Reynolds-Zahlen entworfen und enthält eine direkte Kopplung der Produktion der transportierten Länge und μ_t/μ . Sobald ein bestimmtes Maß an Wirbelviskosität produziert wurde, bleibt der Wert der integrierten Größe und damit γ hoch, womit das Turbulenzmodell weiterhin aktiv bleibt. Beschriebenes ist in Abb. 4.12 (*links unten*) zu erkennen: Der mit 4 Gl. k gekennzeichnete γ -Verlauf steigt am Transition-*Onset*-Punkt auf 1 und bleibt stromab konstant.

Im weiteren Verlauf soll das kompressible 4-Gleichungsmodell mit den Galilei-invarianten 3- und 1-Gleichungsmodellen mit besonderem Blick auf den Transitionsbereich verglichen werden. Das 3- sowie 1-Gleichungsmodell verwenden eine vollständig lokale γ -Gleichung und verzichten folglich auf wandnormale Kommunikation. In Kombination mit dem verzögert produzierenden Turbulenzmodell ergibt sich trotz korrekt vorhergesagter Transitionsposition kein sinnvoller Transitionsbereich. Deshalb wird für die Galilei-Invarianten 3- und 1-Gleichungsmodelle ein zusätzlicher Anfachungsterm verwendet, der eine stärkere Turbulenzproduktion ermöglicht.

Abb. 4.13 zeigt für das 4-Gleichungsmodell, dass (wie bereits anhand von Abb. 4.12, *links unten* diskutiert) die berechnete Transitionsposition in sehr guter Übereinstim-

¹⁷D.h. ein nicht-quantifizierbarer räumlicher Versatz zwischen der berechneten, aus dem Kriterium resultierenden Transition-*Onset*-Position und der tatsächlich gesetzten Position, ab der das Turbulenzmodell aktiv wird.

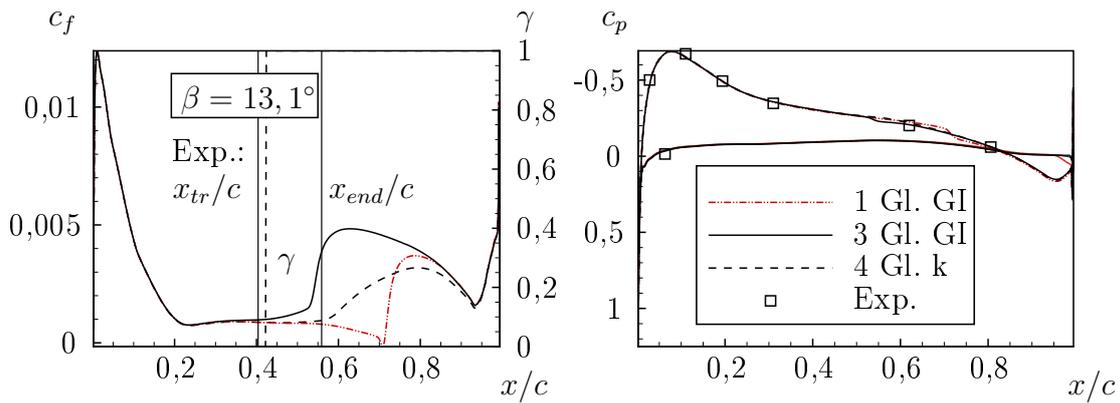


Abbildung 4.13: c_f - (links) und c_p -Verläufe (rechts) für einen kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$

mung mit der experimentellen Transition-*Onset*-Position vorhergesagt wird (vertikale gestrichelte Linie in Abb. 4.13, *links*). Der in Abb. 4.12 (*links unten*) dargestellte Verlauf der γ -Lösung, die aus der integrierten Länge \tilde{l}_γ berechnet wurde, zeigt, dass ab dieser Position das Turbulenzmodell über die gesamte Grenzschicht aktiv ist. Dennoch ist die Turbulenzproduktion deutlich verzögert und der c_f -Verlauf indiziert, dass insbesondere die Position abgeschlossener Transition zu weit stromab im Vergleich zu den experimentellen Daten liegt. Da die γ -Feldlösung in wandnormaler Richtung konstant ist, hängt diese Beobachtung mit dem verzögerten Produktionsverhalten des Turbulenzmodells zusammen und verdeutlicht, dass für Testfälle bei niedrigen Reynolds-Zahlen eine gute Vorhersage der Transition-*Onset*-Position für eine physikalische Modellierung des Transitionsbereiches nicht ausreichend ist (ähnlich wie bei laminarer Ablösung bzw. ablösungsinduzierter Transition).

Das 3-Gleichungsmodell zeigt die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Positionen beginnender und abgeschlossener Transition, da hier der Zusatzterm zu einer starken Turbulenzproduktion führt. Das 1-Gleichungsmodell liegt deutlich stromab, da das Kriterium durch die Verwendung des lokalen Druckgradientenparameters einen höheren Schwellwert $Re_{\theta t}$ ergibt: Der lokale Druckgradient im Transitionsbereich ist schwach (siehe Abb. 4.13, *rechts*) und Konvektionseffekte des stromauf liegenden Bereiches starken Gegendruckes werden nur durch den gemittelten Parameter berücksichtigt. Eine zusätzliche, detaillierte Analyse dieses Testfalls ist in Abschnitt 4.4.2 anhand des vollen Rotors gegeben.

4.1.3 NACA64₂ A015-Profil

Das NACA64₂ A015-Profil stellt einen Testfall im hohen Reynolds-Zahlenbereich $Re_c/10^7 \in [1; 4]$ (im Folgenden nur als Re bezeichnet) bei Mach-Zahlen im Intervall $Ma \in [0,08; 0,3]$ bereit. Der Turbulenzgrad variiert in Abhängigkeit der Mach-Zahl: $Tu \in [0,01\%; 0,04\%]$. Die Experimente fanden im *Low-Turbulence Pressure Tunnel* der NASA

statt (Boltz et al. 1960b). Die Transition wurde unter Verwendung kleiner Mikrophone bestimmt. Zusätzlich liegen Druckdaten vor.

Krimmelbein (2021) approximiert den Zusammenhang zwischen Mach-Zahl und kritischem N -Faktor, basierend auf Daten aus Boltz et al. (1960a), mit folgender linearer Gleichung:

$$N_t = -11 Ma + 13,5. \quad (4.4)$$

Unter Verwendung der Korrelation von Mack (Gl. 2.21) ergibt sich der Turbulenzgrad. Die Mach-Zahl kann bei gegebener Reynolds-Zahl folgendermaßen berechnet werden (Krimmelbein 2021): Da in Boltz et al. (1960b) keine Angaben zur Temperatur gemacht sind, sei hier $T = 300 K$ angenommen. Die dynamische Viskosität ergibt sich so aus dem Sutherland'schen Gesetz: $\mu = f(T)$. Zur Bestimmung der Dichte ρ lässt sich unter Verwendung von $p_{tot} = 515038,35 Pa$ (Boltz et al. 1960b) und dem idealen Gasgesetz die folgende quadratische Gleichung umstellen und lösen: $p_{tot} = p + 1/2\rho u_\infty^2$. Die Geschwindigkeit u_∞ folgt nun aus der Reynolds-Zahl Re .

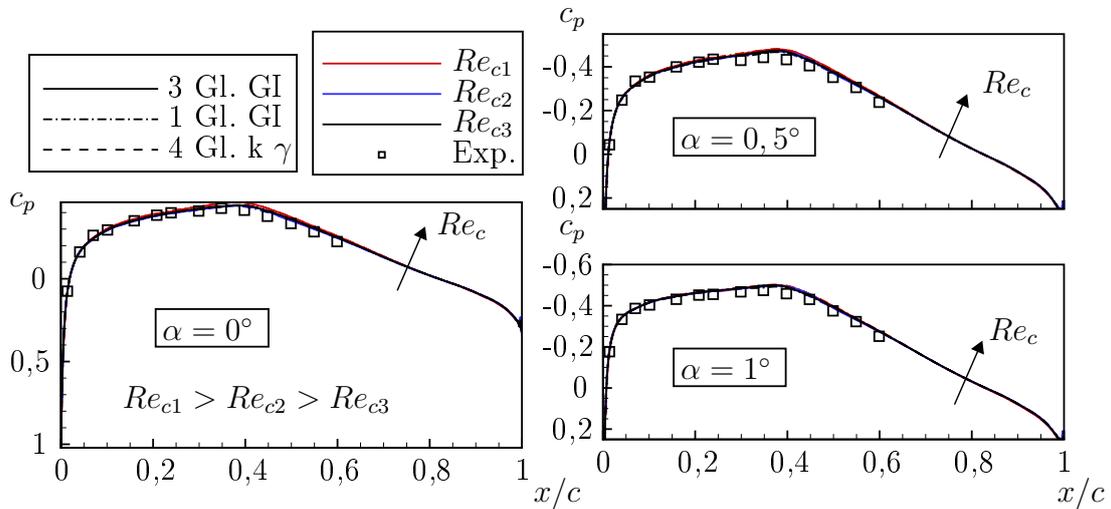


Abbildung 4.14: Druckbeiwert c_p für alle Transitionsmodelle im Vergleich zu experimentellen Daten von Boltz et al. (1960b) für die Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 40$, $Re_{c2}/10^6 \approx 25$, $Re_{c3}/10^6 \approx 16$); $\alpha = 0,5^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 32$, $Re_{c2}/10^6 \approx 20,5$, $Re_{c3}/10^6 \approx 12,7$) sowie $\alpha = 1^\circ$ (mit $Re_{c1}/10^6 \approx 27$, $Re_{c2}/10^6 \approx 17,7$, $Re_{c3}/10^6 \approx 11,6$)

Für den Anstellwinkel wurde, um Effekte durch Windkanalwände auszugleichen, die folgende Anstellwinkelkorrektur angewendet: $\alpha_{korr} = \alpha - 0,25^\circ + \Delta\alpha$, wobei $\Delta\alpha$ leichte weitere Anpassungen beinhaltet, sodass $\alpha_{korr}(\alpha = 0^\circ) = -0,25^\circ$, $\alpha_{korr}(\alpha = 0,5^\circ) = 0,245^\circ$ und $\alpha_{korr}(\alpha = 1^\circ) = 0,69^\circ$. So wird, wie in Abb. 4.14 gezeigt, eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen c_p -Daten erreicht. Eine Variation der Reynolds-Zahl (und damit der Grenzschichtdicke) hat im betrachteten Reynolds-Zahlenbereich einen erwartungsgemäß geringen Einfluss auf die Druckverteilung. Stromauf der Saugspitze wird für alle Modelle und Winkel eine ähnlich gute Übereinstimmung erreicht. Stromab

unterschätzt die Simulation die Werte von c_p geringfügig. Dieser Versatz kann als vernachlässigbar eingestuft werden, da Transition ohnehin im beschleunigten Bereich stattfindet, womit die leichte Abweichung stromab der Saugspitze nahezu keinen Einfluss auf die Vorhersage der Position beginnender Transition hat.

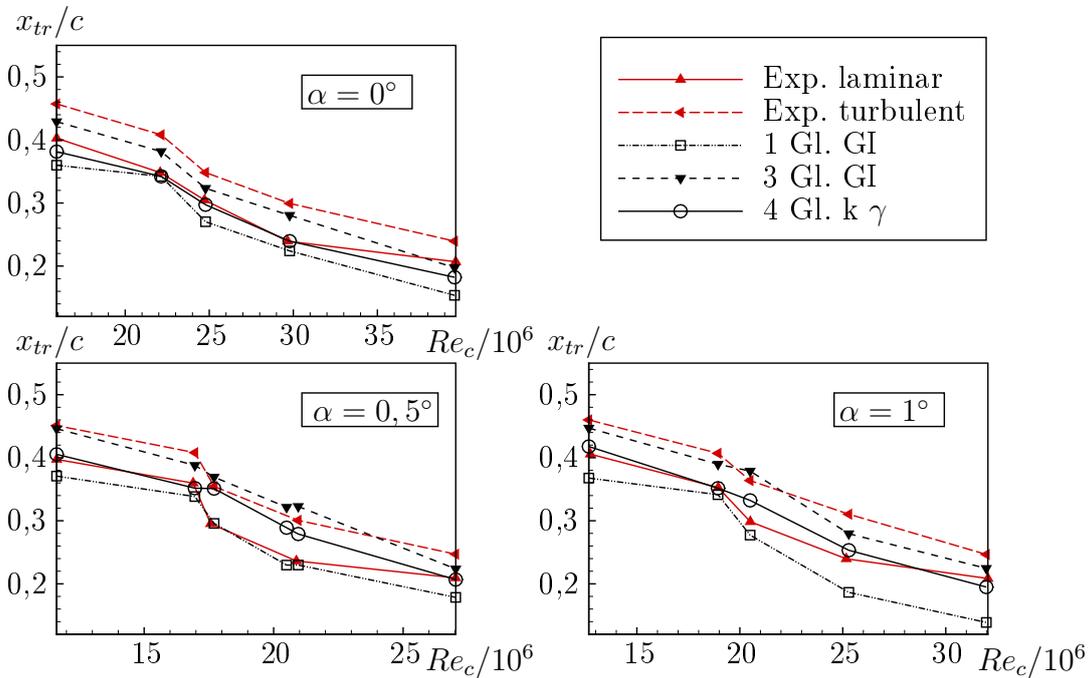


Abbildung 4.15: Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten von Boltz et al. (1960b) für verschiedene Anstellwinkel und Reynolds-Zahlen

In Abb. 4.15 sind die Ergebnisse für drei Anstellwinkel gezeigt. Für alle Winkel wird die Reynolds-Zahl erhöht bis Transition nahe der Vorderkante auftritt. Neben der Reynolds-Zahl variiert auch die Mach-Zahl, die mit größer werdender Reynolds-Zahl ebenfalls ansteigt, und der davon abhängige Turbulenzgrad (Zusammenhang einleitend beschrieben). Die in Boltz et al. (1960b) verwendete Messmethode funktioniert derart, dass die, in Abb. 4.15 zu sehenden, stromauffliegenden Linien jeweils Positionen angeben, an denen die Strömung noch laminar ist. Die stromabliegenden Linien kennzeichnen eine bereits turbulente Strömung. D.h. Transition vom laminaren in den turbulenten Zustand findet zwischen diesen Linien statt.

Für den Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$ (Abb. 4.15, *links oben*) ist erkennbar, dass das Galilei-invariante 3-Gleichungsmodell die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aufweist und abgesehen von $Re/10^6 \approx 40$ zwischen den besagten experimentellen Positionen liegt. Zusätzlich wird der qualitative Verlauf inkl. Stromaufknick der experimentellen Transitionslinie zwischen $Re/10^6 \in [22; 25]$ sehr gut wiedergegeben. Das kompressible 4-Gleichungsmodell liegt näherungsweise auf den laminaren experimentellen Daten und damit mutmaßlich geringfügig zu weit stromauf. Das 1-Gleichungsmodell unterschätzt infolge der fehlenden Mittelung den Einfluss des negativen Druckgradienten-

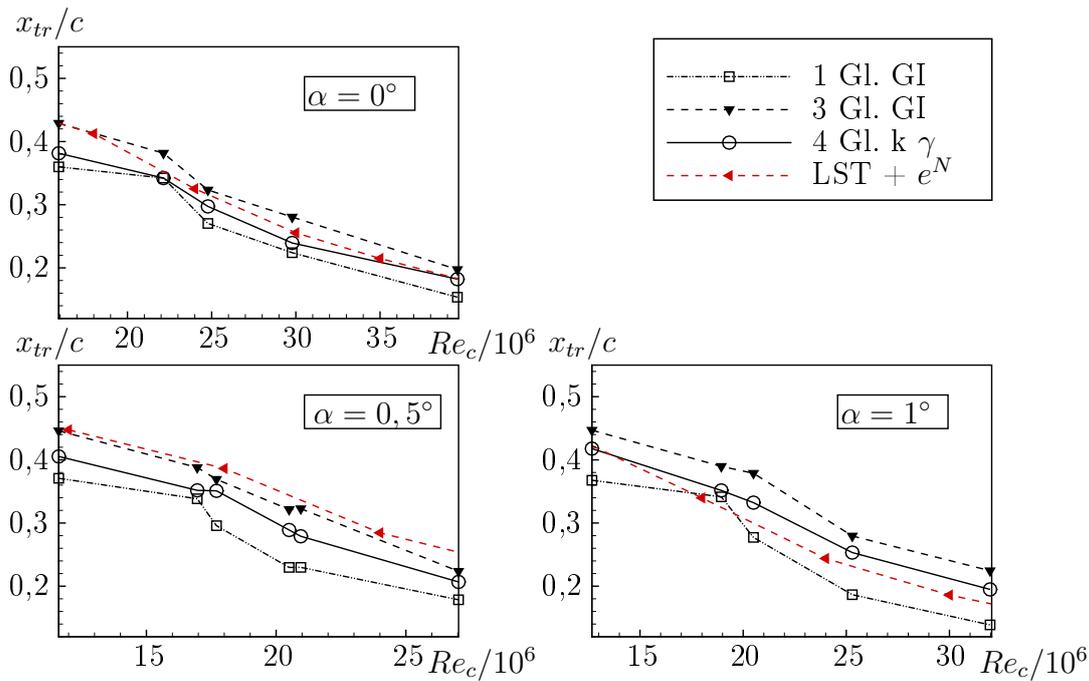


Abbildung 4.16: Vergleich der Transitionsmodelle mit Ergebnissen lokaler, linearer Stabilitätstheorie und der e^N -Methode aus Ströer et al. (2020b)

ten und liegt etwas weiter stromauf aber immer noch in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

Für $\alpha = 0,5^\circ$ (Abb. 4.15, *links unten*) ergibt sich von stromab nach stromauf eine ähnliche Verteilung, wobei das Galilei-invariante 3-Gleichungsmodell in einem kleinen Reynolds-Zahlenbereich geringfügig stromab liegt. Das kompressible 4-Gleichungsmodell liegt etwas weiter stromauf und damit in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Beide Modelle unterschätzen den Stromaufsprung der experimentellen Transitionslinie bei $Re/10^6 \approx 17$ und geben diesen als zu gering wieder. Das 1-Gleichungsmodell gibt die Verschiebung in x_{tr} bzw. x_t nach stromauf am besten wieder, liegt aber insgesamt leicht zu weit stromauf. In Abb. 4.16 sind zusätzlich Vergleiche mit Ergebnissen der lokalen linearen Stabilitätstheorie und der e^N -Methode (aus Ströer et al. 2020b) gezeigt. Es ist für alle Fälle erkennbar, dass die Modelle in guter Übereinstimmung mit diesen Ergebnissen liegen, aber auch die LST + e^N -Lösung den besagten Sprung nicht wiedergibt.

Für $\alpha = 1^\circ$ (Abb. 4.15, *rechts unten*) wiederholt sich für $\alpha = 0,5^\circ$ Beschriebenes, wobei das 1-Gleichungsmodell weiter stromauf der Experimente liegt. Die beste Übereinstimmung zeigt das Galilei-invariante 3-Gleichungsmodell. Der Stromaufknick der Transitionslinie wird jedoch erst bei höheren Reynolds-Zahlen vorhergesagt, was dazu führt, dass das Ergebnis für $Re/10^6 \approx 20$ geringfügig zu weit stromab liegt.

Zusammenfassend ergibt sich für alle Modelle eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Ergebnisse der Galilei-invarianten Modelle können die Qua-

lität des vollen Modells erhalten und zeigen keine Einschränkungen in der Vorhersage.

4.1.4 Ablösungsinduzierte Transition - Eppler 387-Profil

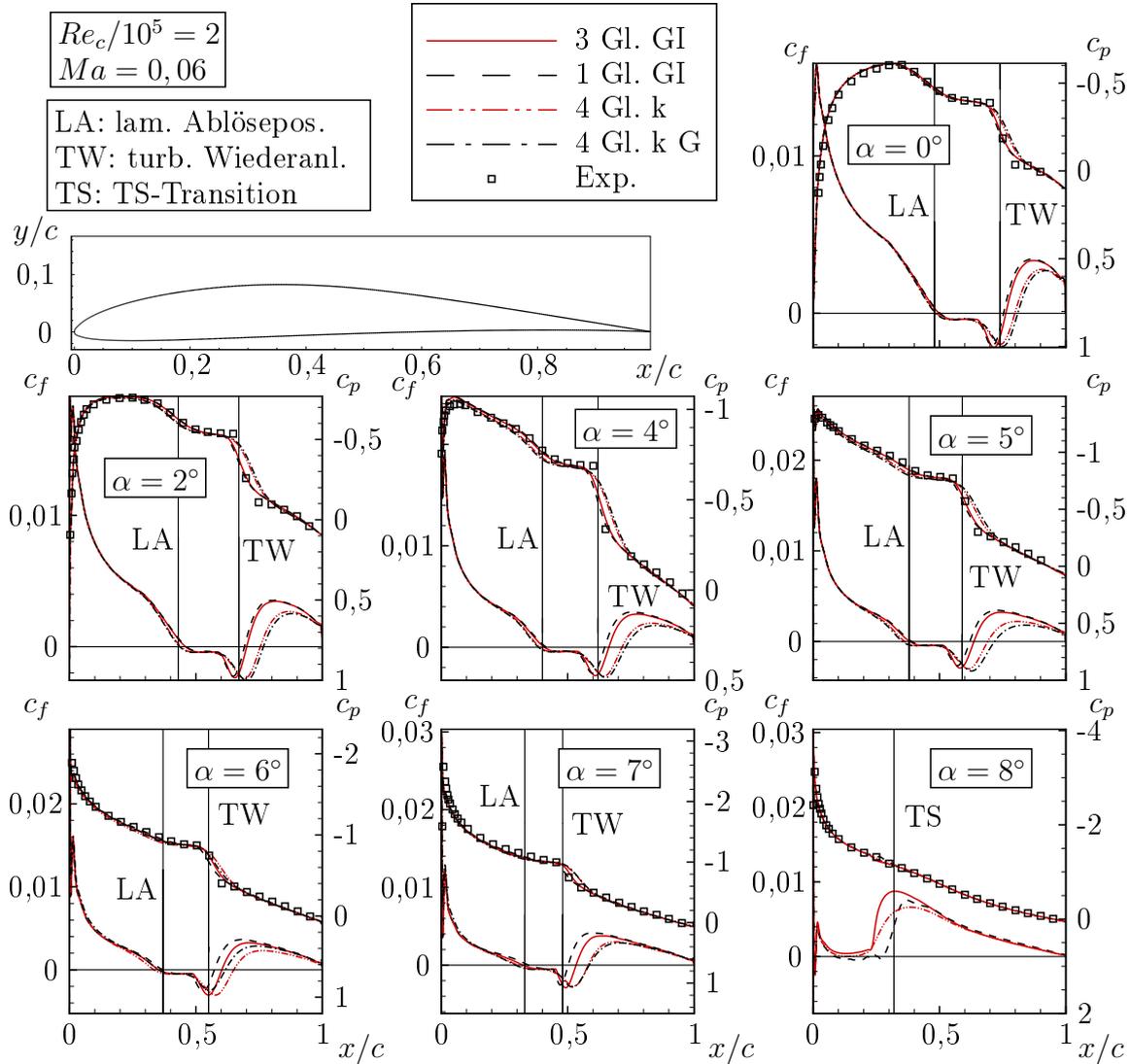


Abbildung 4.17: Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten (McGhee et al. 1988) anhand von c_f - und c_p -Verläufen für verschiedene Anstellwinkel bei einer Reynolds-Zahl von $Re_c = 2 \times 10^5$

Das Eppler 387-Profil stellt einen Testfall dar, der die Analyse der Transition bei laminar abgelösten Strömungen im tiefen Reynolds-Zahlenbereich $Re_c = \mathcal{O}(10^5)$ ermöglicht und zusätzlich Fälle bietet, bei denen der laminar-turbulente Übergang im besagten Reynolds-Zahlenbereich über TS-Instabilitäten auftritt. Experimente wurden von

McGhee et al. (1988) im *Langly Low-Turbulence Pressure*-Windkanal durchgeführt. Die hier nachgerechneten Fälle sind bei Reynolds-Zahlen $Re_c/10^5 \in \{2; 3\}$ und Mach-Zahlen $Ma_\infty \in \{0,06; 0,09\}$ vermessen worden. Als Turbulenzgrad wird $Tu = 0,04\%$ verwendet (cf. McGhee et al. 1988). Ablöse-, Wiederanlege- und (im TS-Fall) Transitionspositionen wurden über einen auf die Oberfläche des Profils aufgetragenen Ölfilm detektiert. D.h. für anliegende Strömungen, bei denen natürliche Transition stattfindet, ist nicht unmittelbar eindeutig, ob es sich um eine Transition-*Onset*-, Transition-*End*-Position oder etwas dazwischen handelt: Die Messtechnik basiert auf dem Prinzip, dass das Öl in turbulenten Bereichen durch den Anstieg der Wandschubspannung schneller transportiert wird. Die Messung kann somit am wahrscheinlichsten als eine Position nahe dem Ort abgeschlossener Transition (Transition-*End*-Position) aufgefasst werden. Für den Fall, dass Transition über eine laminare Ablöseblase stattfindet, sind die Ablöse- und Wiederanlegepositionen gegeben und es kann folglich nur eine implizite Aussage über eine Transitionsposition innerhalb der Blase gemacht werden.

Für eine korrekte Vorhersage des c_f -Verlaufs im Falle ablösungsinduzierter Transition müssen in einem RANS-Verfahren, das mit einem Wirbelviskositätsturbulenzmodell verwendet wird, zwei wichtige Einflüsse unterschieden und in der Modellierung berücksichtigt werden:

- Transition findet statt, nachdem die Strömung laminar ablöst. D.h. die Transitionsposition liegt in der Region konstanten Druckes. Ein elementarer Bestandteil ist somit die korrekte Vorhersage der Position beginnender Transition innerhalb der Ablöseblase, da ab diesem Ort Wirbelviskosität produziert wird.
- Da gemeinhin bekannt ist (vgl. bspw. Bernardos et al. 2019), dass das Produktionsverhalten einiger Turbulenzmodelle für abgelöste Strömungen zu schwach ist, ist eine verstärkte Gewichtung der Produktion notwendig, die zu einem direkten Schließen der Ablöseblase und einer schnellen Druckrückgewinnung führen. So ergeben sich die, für solche Fälle typischen, c_p - und c_f -Verläufe (vgl. Abb. 2.3).

In den Abbildungen 4.17 und 4.18 sind c_f - und c_p -Ergebnisse für die Reynolds-Zahlen $Re_c = 2 \times 10^5$ und $Re_c = 3 \times 10^5$ im Vergleich zu experimentellen Daten gezeigt. Neben, in den Abbildungen durch vertikale Linien gekennzeichneten, experimentellen Ablöse-, Wiederanlege- und (im TS-Fall) Transitionspositionen sind experimentelle c_p -Daten gegeben. Zu dem kompressiblen 4-Gleichungsmodell mit und ohne Erweiterung um das Gleyzes-Kriterium werden hier die Galilei-invarianten 3- und 1-Gleichungsmodelle verglichen.

Analyse des 3- und 1-Gleichungsmodells

Für die Galilei-invarianten Modelle ist in den Abbildungen 4.17 und 4.18 zu erkennen, dass im Falle einer abgelösten Strömung beide Modelle sehr ähnliche Ergebnisse liefern, die sich mit steigendem Anstellwinkel leicht unterscheiden. Die c_f -Verläufe für die Winkel $\alpha \in \{0^\circ; 2^\circ; 4^\circ; 5^\circ\}$ bei $Re_c = 2 \times 10^5$ zeigen für beide Modelle eine sehr gute Übereinstimmung mit der experimentellen Wiederanlegeposition. Auch die c_p -Verläufe werden in

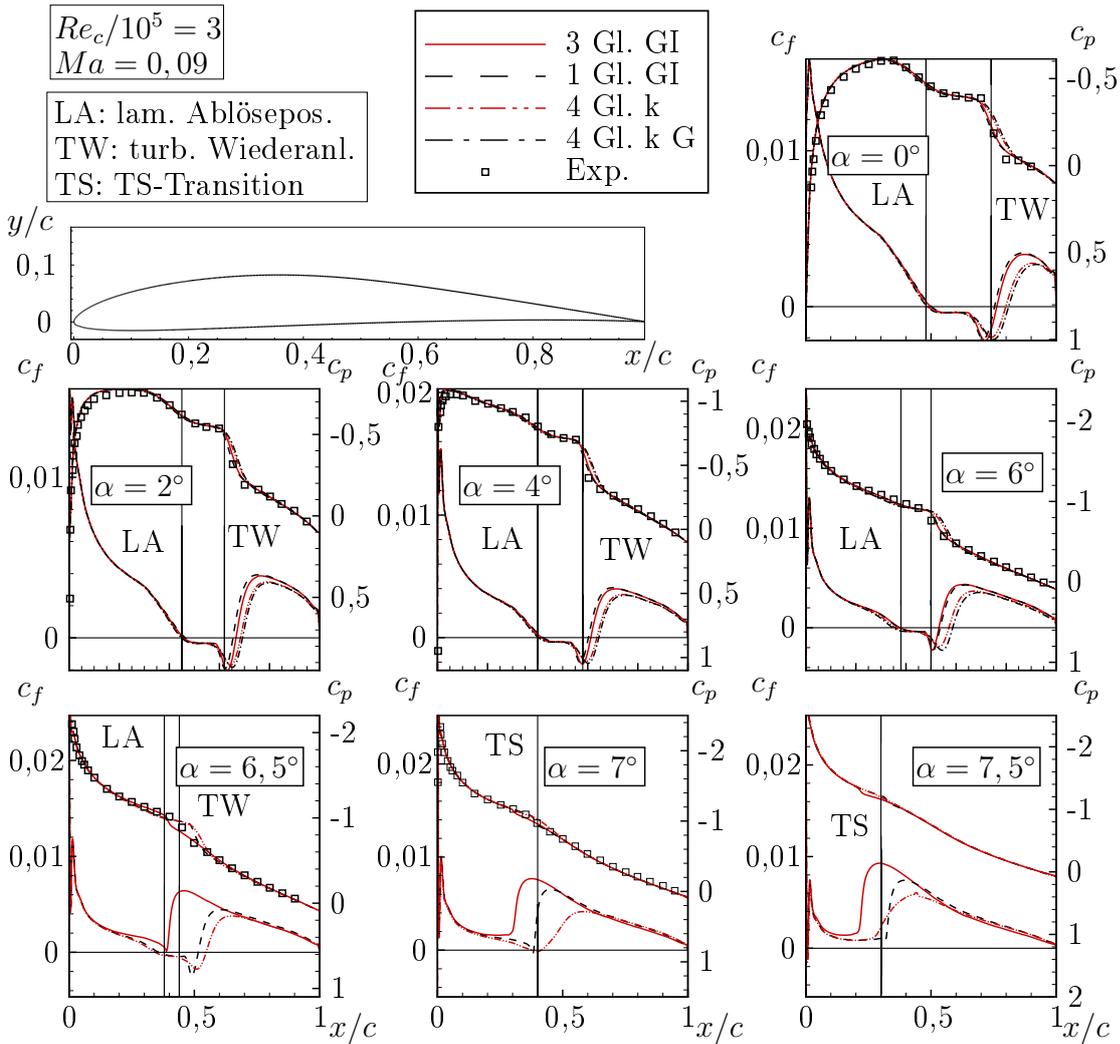


Abbildung 4.18: Vergleich der Transitionsmodelle mit experimentellen Daten (McGhee et al. 1988) anhand von c_f - und c_p -Verläufen für verschiedene Anstellwinkel bei einer Reynolds-Zahl von $Re_c = 3 \times 10^5$

sehr guter Übereinstimmung wiedergegeben. Tendenziell ist anhand der experimentellen c_p -Daten zu erkennen, dass die Region konstanten Druckes räumlich etwas zu kurz ist, also die Transitionsposition geringfügig zu weit stromauf zu liegen scheint. Bei einer weiter stromab liegenden Transitionsposition wäre es dann in Folge erforderlich, eine noch stärkere Turbulenzproduktion zu erzwingen, um ein schnelles Schließen der Blase zu gewährleisten. Das würde zusätzlich das c_p -Level im Bereich konstanten Druckes leicht absenken und zu einer noch besseren Übereinstimmung mit den experimentellen Daten führen. Mit steigendem Anstellwinkel wird die Region konstanten Druckes immer besser getroffen. Die über den Zusatzterm Gl. 3.95 verstärkte Turbulenzproduktion führt für die Galilei-invarianten Modelle zu einer deutlich besseren Vorhersage der Wiederanlegeposi-

tion, sodass die Ablöseblase in guter Übereinstimmung zum Experiment wiedergegeben wird. Die experimentellen Daten deuten darauf hin, dass eine noch stärkere Turbulenzproduktion für eine bessere Übereinstimmung nötig wäre. In diesem Fall würde die Blase schneller schließen, was zu einer sich nach stromauf verschiebenden Wiederanlegeposition und einer noch schnelleren Druckrückgewinnung führen würde. Bei einem Winkel von $\alpha = 8^\circ$ ist zu erkennen, dass es zu natürlicher Transition kommt. Alle betrachteten Modelle sagen TS-Transition vorher und führen zu einer sinnvollen Transitionslage. Das 4-Gleichungsmodell liegt hier unter der Annahme, dass die Messungen einer Position nahe der Position abgeschlossener Transition entsprechen, in bester Übereinstimmung. Das 3-Gleichungsmodell liegt leicht stromauf und das 1-Gleichungsmodell leicht stromab.

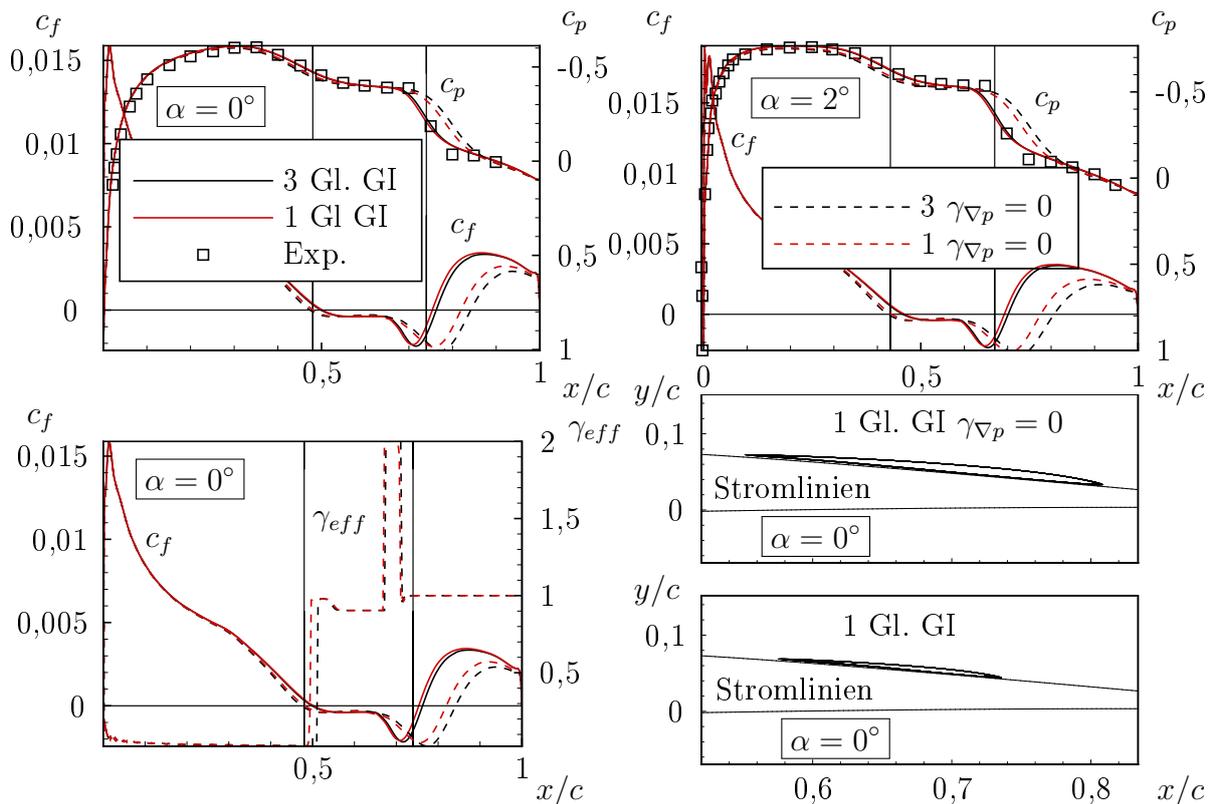


Abbildung 4.19: Einfluss des Zusatzterms $\gamma_{\nabla p}$ (Gl. 3.95) für ablösungsinduzierte Transition bei Anstellwinkeln $\alpha = 0^\circ$ (links oben) und $\alpha = 2^\circ$ (rechts oben) inklusive des γ_{eff} -Verlaufes und Stromlinienplots für $\alpha = 0^\circ$ (links und rechts unten)

Für eine Reynolds-Zahl von $Re_c = 3 \times 10^5$ ist in Abb. 4.18 zu beobachten, dass die Modelle für die Winkel $\alpha \in [0^\circ; 6^\circ]$ noch näher am Experiment liegen, da hier die Region konstanten Druckes besser wiedergegeben wird. Das hängt vermutlich mit einer besseren Vorhersage der Transitionsposition zusammen, die weiter stromab zu liegen scheint. Die Druckrückgewinnung wirkt hingegen geringfügig zu schwach. Insgesamt werden die

experimentelle Wiederanlegeposition und der c_p -Verlauf dennoch in guter Übereinstimmung getroffen. Ab einem Winkel von $\alpha = 7^\circ$ kommt es zu natürlicher Transition. Bei $\alpha = 6,5^\circ$ ist die Ablöseblase laut Experiment sehr klein und auch im Druckverlauf nur schwach ausgeprägt. Diesen Zustand *zwischen* natürlicher Transition und laminarer Ablösung sagt keines der Modelle korrekt vorher: Das 3-Gleichungsmodell liegt stromauf und detektiert TS-Transition nahe der Ablösung (minimaler c_f -Wert nahe 0), wohingegen das 1- und das 4-Gleichungsmodell deutlich zu große Ablöseblasen vorhersagen. D.h. für das 1-Gleichungsmodell, dass erstens die Position beginnender Transition zu weit stromab detektiert wird und zweitens die Ablöseblase zu spät schließt. Beschriebenes kann auch anhand der experimentellen Druckverteilung analysiert werden, die auf eine sehr kleine Ablöseblase hindeutet.

In Abb. 4.19 ist für $Re_c = 3 \times 10^5$ und zwei Anstellwinkel gezeigt, wie der Zusatzterm $\gamma_{\nabla p}$ (Gl. 3.95) im Falle der Transition über eine laminare Ablöseblase funktioniert. Erwartungsgemäß liegen für beide Modelle die Wiederanlegepositionen der Rechnungen ohne Zusatzterm stromab der Ergebnisse mit Zusatzterm, da die Ablöseblase erst weiter stromab schließt. Abb. 4.19 (*links unten*) zeigt zusätzlich den Verlauf der Variablen γ_{eff} an der Stelle y_{wR} . Hierbei ist jedoch zu beachten, dass Werte von $\gamma_{eff} \approx 1$ bei $y = y_{wR}$ nicht bedeuten, dass auch in Wandnähe (d.h. $y < y_{wR}$) $\gamma_{eff} \approx 1$ gilt. D.h. die effektive Transitionsposition liegt stromab des hier zu sehenden Sprungs auf ≈ 1 . Bei einem entsprechend starken Gegendruck ist zu erkennen, dass $\gamma_{eff} > 1$ wird, wodurch über das übliche Maß hinaus Turbulenz produziert wird und c_f deutlich stärker ansteigt. Beschriebenes ist zusätzlich anhand von Stromlinien in Abb. 4.19 (*rechts unten*) für das 1-Gleichungsmodell bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$ visualisiert. Für $\alpha = 2^\circ$ (Abb. 4.19, *rechts oben*) gilt ähnliches. Beide Winkel zeigen, dass durch die verstärkte Produktion die Wiederanlegeposition besser getroffen und die Übereinstimmung mit den experimentellen c_p -Daten durch die schnellere Druckrückgewinnung besser ist. Wie bereits erörtert, ist auch hier zu sehen, dass eine noch bessere Übereinstimmung durch eine stromabliegende Transitionsposition und eine infolge noch stärkere Turbulenzproduktion erreicht würde.

Analyse der 4-Gleichungsmodelle

Für die 4-Gleichungsmodelle ist für beide Reynolds-Zahlen zu erkennen, dass die Wiederanlegeposition relativ weit stromab der Experimente liegt. Das hängt damit zusammen, dass keine zusätzliche Gewichtung der Produktionsterme des Turbulenzmodells verwendet wird. Die Produktion ist dadurch, wie bereits erörtert, zu schwach, um eine bessere Übereinstimmung der Wiederanlegepunkte zu erreichen. Daher soll für die 4-Gleichungsmodelle im Folgenden nur die reine Transitionsvorhersage beurteilt werden. Ein Nebeneffekt dieses Vorgehens ist, dass die Rechnungen aufgrund spät schließender Ablöseblasen insbesondere für das Modell inklusive Gleyzes-Kriterium numerisch oft weniger stabil sind, weswegen für höhere Anstellwinkel keine Lösungen für das Gleyzes-Kriterium gezeigt werden.

Die reine Transitionsposition ist schwer getrennt vom gesamten c_f -Verlauf zu beurteilen, scheint aber für alle Winkel etwas stromab der Galilei-invarianten Modelle zu liegen,

wodurch in vielen Fällen der Bereich konstanten Druckes im c_p -Verlauf leicht besser getroffen wird. Zusätzlich ist zu beobachten, dass die Simulationen mit Anstellwinkeln, bei denen TS-Transition auftritt, in guter Nähe zum Experiment wiedergeben werden. Es ist anhand der Abbildungen 4.17 und 4.18 zu erkennen, dass die laminare Ablöseposition für alle Fälle und alle betrachteten Modelle in ähnlich guter Übereinstimmung vorhergesagt wird. Leichte Unterschiede und Abweichungen kommen durch die unterschiedlichen Längen der Ablöseblasen zustande, die die Druckverteilung auch stromauf der laminaren Ablöseposition beeinflussen.

4-Gleichungsmodell inklusive Gleyzes-Kriterium

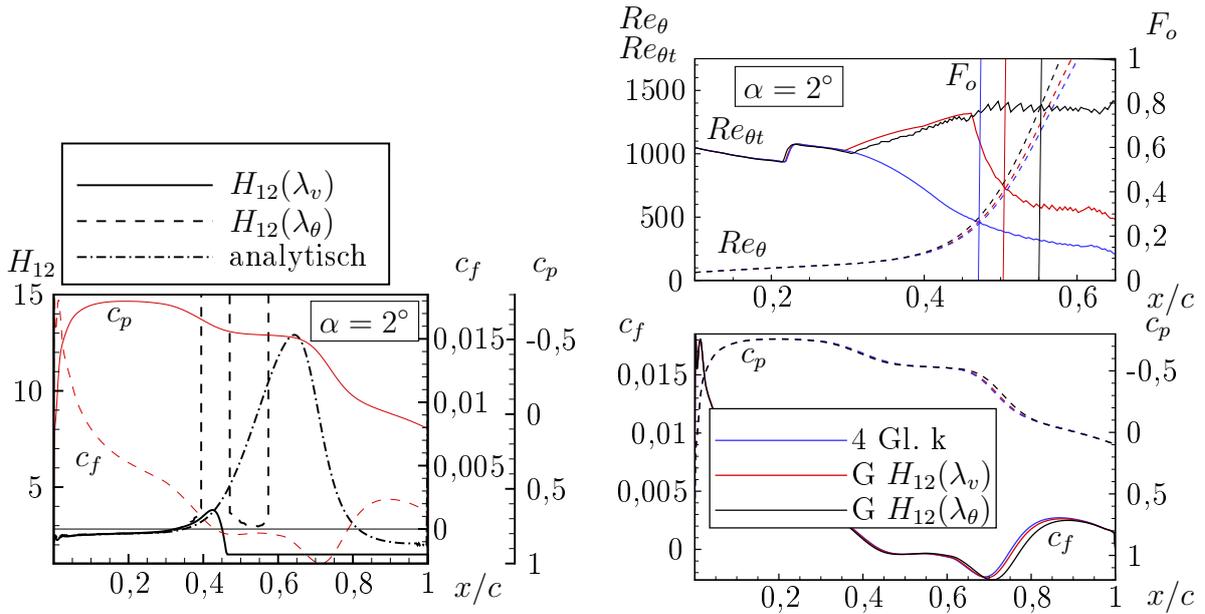


Abbildung 4.20: Approximation des Formfaktors für abgelöste Strömungen (*links*) und Einfluss auf das Transitionskriterium inkl. des Gleyzes-Kriteriums (*rechts oben*) sowie auf die Wiederanlageposition (*rechts unten*)

Die Wirkungsweise des um das Gleyzes-Kriterium erweiterten 4-Gleichungsmodells ist in Abb. 4.20 inklusive weiterer Details visualisiert. In Abb. 4.20 (*rechts oben*) ist zu erkennen, dass $Re_{\theta t}$ für das nicht-erweiterte 4-Gleichungsmodell im starken Gegendruckbereich schnell abfällt. Bei Zuschalten des Gleyzes-Kriteriums wird ab einem bestimmten Formfaktor (d.h. bei entsprechend starkem Gegendruck) ein Zusatzterm aktiviert, der den Wert von $Re_{\theta t}$ in Abhängigkeit des approximierten Formfaktors erhöht (Abb. 4.20, *rechts oben, schwarze durchgezogene Linie*). Zur Analyse dieses Verlaufes ist ein genauere Blick auf das Verhalten des approximierten Formfaktors für abgelöste Strömungen erforderlich. Wie Abb. 4.20 (*links*) zeigt, steigt der analytische Formfaktor, sobald die Strömung ablöst, stark an. Dieser Verlauf soll mit den lokal approximierten Formfaktoren auf Basis des neuen Druckgradientenparameters λ_v und des auf der Impulsverlustdicke θ

basierenden Druckgradientenparameters λ_θ verglichen werden. Für beide Formfaktoren ist im anliegenden Bereich eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen. Für die abgelöste Strömung weichen beide stark ab, wobei $H_{12}(\lambda_\theta)$ den tatsächlichen Formfaktor über- und $H_{12}(\lambda_v)$ den Wert unterschätzt. Entsprechend verhalten sich auch die Verläufe für $Re_{\theta t}$, wobei die Unterschätzung ($H_{12}(\lambda_v)$) zu einem unerwünschten plötzlichen Abfall von $Re_{\theta t}$ und einem dem ursprünglichen Modell sehr ähnlichem c_f -Verlauf (s. Abb. 4.20, *rechts unten*) führt. Eine Verwendung von $H_{12}(\lambda_\theta)$ inklusive einer Limitierung des überschätzten Formfaktors hält den Wert von $Re_{\theta t}$ wie gefordert konstant (Abb. 4.20, *rechts oben*). Die Limitierung verhindert eine Destabilisierung durch eine zu weit stromab liegende Transition-*Onset*-Position.

Obwohl das Grundprinzip funktioniert und der Wert von $Re_{\theta t}$ bei entsprechendem Gegendruckgradienten deutlich erhöht wird, zeigen sich für alle Varianten in Summe nur sehr geringe Unterschiede in der finalen Transitionsposition bzw. im c_f -Verlauf. Es kann tendenziell beobachtet werden, dass bei Verwendung des Gleyzes-Kriteriums die Ablöseblase in den meisten Fällen aufgrund der nach stromab verschobenen Transitionsposition etwas weiter stromab schließt und die Region konstanten Druckes länger wird. Insgesamt liegt für diesen Testfall aber bereits die Modellvariante ohne Gleyzes-Kriterium in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten (vgl. Abbildungen 4.17 und 4.18), sodass aus anwendungsorientierter Sicht keine weitere Anpassung notwendig scheint. Da das Modell ohnehin sensitiv auf starke Gegendruckgradienten reagiert, ist der Einfluss im finalen Ergebnis so gering, dass die gesteigerte Komplexität nicht gerechtfertigt werden kann. Ferner führt die Verwendung des Zusatzkriteriums zu einer weiteren viskosen/nicht-viskosen Kopplung, die die Stabilität der Lösung negativ beeinflusst. Daher soll das Gleyzes-Kriterium, obwohl die Anbindung an das 4-Gleichungsmodell als erfolgreich eingestuft wird, im Folgenden nicht weiter verwendet und betrachtet werden.

4.2 Kompressible Testfälle

Das 4-Gleichungsmodell sieht in seiner ursprünglichen Form keine Berücksichtigung von Kompressibilitätseffekten vor und wurde entsprechend erweitert. Im Folgenden sollen zwei Testfälle vorgestellt werden, die die kompressible Modellvariante mit dem ursprünglichen inkompressiblen Modell vergleichen.

Die Physik der laminar-turbulenten Transition für Strömungen hoher Mach-Zahl mit besonderem Fokus auf Ergebnissen der Stabilitätstheorie ist in Abschnitt 2.5 dargelegt. In Abschnitt 2.6 sind Methoden der Transitionsvorhersage für kompressible Strömungen zu finden. Grundsätzlich gilt dabei, dass der Einfluss einer Mach-Zahlerhöhung im betrachteten Bereich als stabilisierend eingestuft werden kann. In Abb. 4.21 (*rechts*) ist das kompressible AHD-Kriterium für den Fall einer (konstant) verzögerten, unbeschleunigten und einer beschleunigten Strömung zu sehen. D.h. die Abbildung zeigt Stabilitätsergebnisse für laminare Falkner-Skan-Lösungen bei verschiedenen konstanten Druckgradienten $\bar{\lambda}_\theta = \lambda_\theta$: Für die verzögerte Falkner-Skan-Lösung ($\lambda_\theta < 0$) ist zu sehen, dass ein Vergleich von $Re_{\theta t}(Ma_e \rightarrow 0)$ mit $Re_{\theta t}(Ma_e > 0, 3)$ zu einer verhältnismäßig geringen Erhöhung des Wertes von $Re_{\theta t}$ führt. Der Einfluss steigt jedoch für beschleunigte Strömungen und

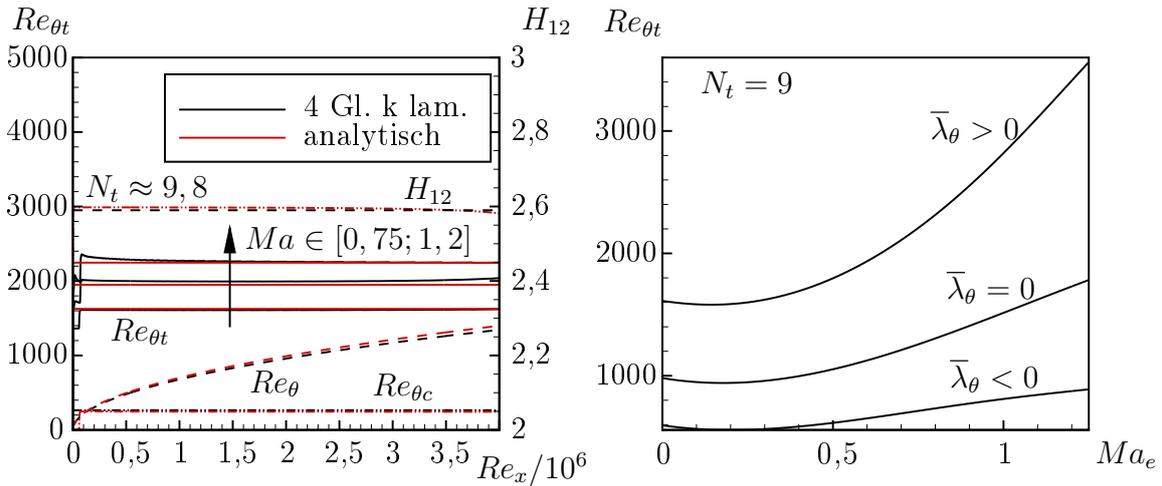


Abbildung 4.21: Laminare Lösung des kompressiblen 4-Gleichungsmodells für die ebene Platte (*links*) und kompressibles AHD-Kriterium in Abhängigkeit der Mach-Zahl am Grenzschichttrand für verschiedene Druckgradienten (*rechts*); Abbildung aus Ströer et al. (2020a)

scheint dort selbst im niedrigen transsonischen Bereich nicht vernachlässigbar zu sein ($\lambda_\theta > 0$).

Für eine Verifikation der kompressiblen Modifikation sind in 4.21 (*links*) Ergebnisse für die (laminare) ebene Platte gezeigt. Für alle Größen ist zu erkennen, dass sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Referenzlösung ergibt. Diese Beobachtung ist erwartungsgemäß, da die im Rahmen der Modellierung verwendeten Approximationen integraler Grenzschichtgrößen unter der Annahme von Selbstähnlichkeit entwickelt wurden.

4.2.1 NLR 7301-Profil

Das NLR 7301-Profil ist ein superkritisches Profil, das von Zwaaneveld (1979) für einen Mach-Zahlenbereich von $Ma_\infty \in [0, 3; 0, 825]$ und einem Reynolds-Zahlenbereich von $Re_c/10^6 \in [1, 1; 2, 3]$ vermessen wurde. In Anlehnung an Fehrs (2017) wird eine Anstellwinkelkorrektur verwendet, um eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Druckdaten zu erreichen. Die verwendeten Strömungsbedingungen inkl. des innerhalb der Si-

$Re_c/10^6$	1,1	1,7	1,9	2	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3
Ma_∞	0,299	0,502	0,599	0,649	0,699	0,724	0,747	0,774	0,8	0,825
Tu [%]	0,05	0,095	0,126	0,138	0,149	0,153	0,158	0,159	0,16	0,155
α [°]	0,78	0,58	0,52	0,48	0,4	0,3	0,41	0,75	1,2	1,2

Tabelle 4.3: Strömungsbedingungen für den NLR 7301-Testfall aus Fehrs (2017)

mulation verwendeten Anstellwinkels sind Tab. 4.3 zu entnehmen. Die Störumgebung im Windkanal ist in Zwaaneveld (1979) durch Druckschwankungen gegeben. Fehrs (2017) rechnet diese Schwankungen in Anlehnung an Michel und Froebel (1988) unter der Annahme ebener Schallwellen in Turbulenzgrade um, die in Tab. 4.3 gegeben sind.

In Abb. 4.22 sind Ergebnisse für die Druckseite (*links*) und die Saugseite (*rechts*) gezeigt. Die stromaufliegende Transitionslinie ist dabei die auf dem c_f -Verlauf basierende Position beginnender Transition und die stromab liegende Linie die Position abgeschlossener Transition. Für die experimentellen Daten ist nicht gegeben, um welche Position innerhalb der Transition es sich handelt. Die Verwendung von Visualisierungsmethoden auf der Oberfläche deutet darauf hin, dass für eine Sichtbarmachung der Transition ein entsprechender c_f -Anstieg vorhanden gewesen sein muss. D.h. die experimentelle Transitionslinie entspricht vermutlich einer Position stromab der Position beginnender Transition.

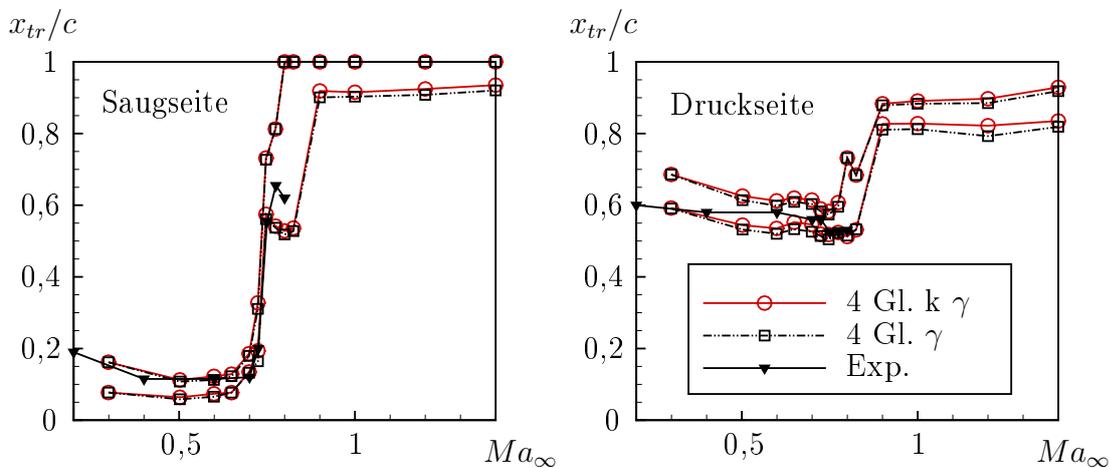


Abbildung 4.22: Vergleich der inkompressiblen mit der kompressiblen Modellvariante des 4-Gleichungsmodells für eine Variation der Mach-Zahl; stromaufliegende Transitionslinien sind aus c_f extrahierte Punkte beginnender, stromabliegende abgeschlossener Transition

Insgesamt zeigt Abb. 4.22 (*links*), dass beide Modelle für die Saugseite eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aufweisen und beide den Sprung der Transitionsposition nach stromab zwischen $0,7 < Ma_\infty < 0,8$ vorhersagen. Insgesamt wird der qualitative Verlauf der experimentellen Daten so sehr gut wiedergegeben. Für die Druckseite liegt ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten vor. Hier liegen einige Punkte des Experiments jedoch näher an den Positionen beginnender Transition, sodass die berechnete Transitionslinie vermutlich geringfügig zu weit stromab liegt.

Zusätzlich wurde die Zuström-Mach-Zahl bis $Ma_\infty = 1,4$ erhöht. Auch wenn für diesen Bereich keine experimentellen Daten vorliegen, kann geschlussfolgert werden, dass die

Stromabverschiebung der Transitionsposition für hohe Mach-Zahlen physikalisch sinnvoll scheint und das Modell prinzipiell in der Lage ist, auch für diesen Mach-Zahlbereich eine Transitionsposition zu berechnen. Da für das zugrundeliegende Kriterium eine maximale Mach-Zahl von 1,6 angegeben ist, wird die Einström-Mach-Zahl für das Transitionsmodell auf 1 limitiert, da beachtet werden muss, dass die Mach-Zahl am Grenzschichttrand Ma_e deutlich höhere Werte als Ma_∞ annehmen kann.

Zwischen der inkompressiblen und der kompressiblen Modellvariante kann in allen Fällen nahezu kein Unterschied in den Transitionslinien beobachtet werden. Obwohl die Werte von $Re_{\theta t}$ gerade für die höheren Mach-Zahlen merkbar unterschiedlich sind (Abb. 4.23, links), ergeben sich sehr ähnliche Positionen beginnender und infolge auch abgeschlossener Transition. Das hängt mit der einleitend beschriebenen Beobachtung zusammen, dass Transition bei moderaten Reynolds-Zahlen oft stromab der Saugspitze stattfindet. Beschriebenes ist in Abb. 4.23 (links, rote und schwarze durchgezogene Linien) visualisiert. Obwohl die Werte für $Re_{\theta t}$ stark unterschiedlich sind, d.h. der Wert für die kompressible Variante (rote Linie) deutlich höher liegt, findet Transition an bzw. leicht stromab des Druckminimums statt. Stromauf der Saugspitze ist der Wert von Re_θ (gestichelte Linien) so tief, dass weder der kompressible noch der inkompressible Schwellwert $Re_{\theta t}$ zur Transition führt. Erst ab der Saugspitze steigt Re_θ und fällt $Re_{\theta t}$ so stark, dass sofort Transition detektiert wird und der Wert von $Re_{\theta t}$ stromab dieser Position nahezu keinen Einfluss mehr hat. D.h. für diesen Fall dominieren die Druckeffekte und bestimmen so, an welcher Position Transition vorhergesagt wird.

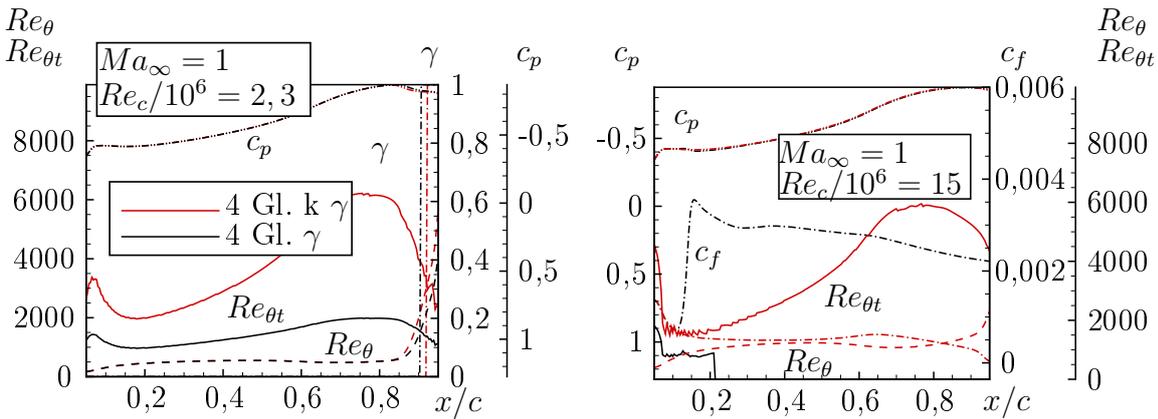


Abbildung 4.23: Vergleich der Transitionsvorhersage für zwei Reynolds-Zahlen $Re_c = 2,3 \times 10^6$ (links) und $Re_c = 15 \times 10^6$ (rechts) unter Verwendung der kompressiblen (4 Gl. k γ) und der inkompressiblen (4 Gl. γ) 4-Gleichungsmodellvarianten ($Re_{\theta t}$ -Verlauf für das inkomp. Modell stromab der Transitionsposition aus Übersichtlichkeitsgründen künstlich auf 0 gesetzt)

Diese wichtige Erkenntnis kann verwendet werden, um einen Fall zu konstruieren, für den eine Kompressibilitätskorrektur unabdingbar wird. Dieser Fall ist bereits einleitend beschrieben und hat besondere praktische Relevanz. Für hohe Reynolds-Zahlen, wie sie

bspw. für Transportflugzeuge wichtig sind, findet Transition oft im beschleunigten Bereich statt. Der Wert von Re_θ ist hier oftmals hoch genug, wodurch die Sensitivität der Transition-*Onset*-Position bzgl. der Werte von $Re_{\theta t}$ deutlich größer ist. Dieser Fall ist in Abb. 4.23 (*rechts*) künstlich herbeigeführt. Die Reynolds-Zahl wurde auf $Re_c = 15 \times 10^6$ erhöht, was im Vergleich zu Abb. 4.23 (*links*) zu einem deutlich stärkeren Anstieg von Re_θ führt. Da sich durch die veränderte Reynolds-Zahl eine sehr ähnliche Druckverteilung ergibt (Auswirkung der veränderten Grenzschichtdicke auf c_p für diese Betrachtung vernachlässigbar), sind bei unverändertem Turbulenzgrad auch die Verläufe von $Re_{\theta t}$ sehr ähnlich. D.h. für den vorliegenden Fall tritt unter Verwendung des inkompressiblen Modells nun Transition nahe der Vorderkante auf. Im Gegensatz dazu führt das erhöhte $Re_{\theta t}$ des kompressiblen Modells dazu, dass Transition erst weit stromab stattfindet.

Es konnte somit ein Fall konstruiert werden, für den die Kompressibilitätserweiterung signifikant andere Ergebnisse liefert und die inkompressible Variante die Stabilität der Strömung deutlich unterschätzen könnte. Diese Fälle liegen typischerweise vor, wenn der Wert von Re_θ so hoch ist, dass das inkompressible Modell Transition im beschleunigten Bereich detektiert. Insgesamt kann somit geschlossen werden, dass eine Kompressibilitätserweiterung insbesondere für Fälle mit hohen Reynolds-Zahlen, bei denen (zumindest durch das inkompressible Modell) Transition im beschleunigten Bereich detektiert wird, von großer Wichtigkeit sein kann. Für moderate Reynolds-Zahlen, bei denen Transition stromab der Saugspitze stattfindet, dominieren oftmals Druckgradienteneffekte und beide Modellvarianten führen zu sehr ähnlichen Ergebnissen.

4.2.2 CAST10-2-Profil

Das von Stanewsky und Zimmer (1980) entworfene CAST10-2-Profil stellt einen weiteren Testfall zur Untersuchung der Kompressibilitätserweiterung dar. Das Profil wurde bei einer Reynolds-Zahl von $Re_c = 2 \times 10^6$ und einer transsonischen Mach-Zahl $Ma_\infty = 0,7$ vermessen. Die Experimente wurden von Hebler et al. (2013) und Hebler (2013) im transsonischen Windkanal Göttingen (DNW-TWG) unter Verwendung von Heißfilmfolien zur Transitionsmessung durchgeführt. Fehrs (2017) schlägt auf Basis von Turbulenzgradmessungen im DNW-TWG (Meyer et al. 2011) einen Turbulenzgrad $Tu = 0,35\%$ vor.

Die CFD-Simulationen werden in Anlehnung an Hebler et al. (2013) mit einer Mach-Zahl und Anstellwinkelkorrektur durchgeführt, sodass $Ma_\infty = 0,69$ und $\Delta\alpha = -0,3^\circ$. Abb. 4.24 (*links*) zeigt einen Vergleich der inkompressiblen mit der kompressiblen Modellvariante des 4-Gleichungsmodells gegenüber experimentellen Daten. In Hebler (2013) ist für die Position beginnender Transition ein Bereich angegeben, der in Abb. 4.24 (*links*) durch zwei Linien dargestellt ist. Es ist zu erkennen, dass beide Modelle qualitativ den Verlauf der experimentellen Daten wiedergeben und ab einem bestimmten Anstellwinkel von einer Transitionsposition nahe der Vorderkante hin zu einer Position nahe der Hinterkante springen. Diese Beobachtung kann anhand der für superkritische Profile typischen Druckverteilung erklärt werden. In Abb. 4.24 (*rechts*) ist der c_p -Verlauf inklusive verschiedener $Re_{\theta t}$ -Verläufe für unterschiedliche Turbulenzgrade bei einem kon-

stanten Anstellwinkel gezeigt. Es ist von stromauf nach stromab zu erkennen, dass die

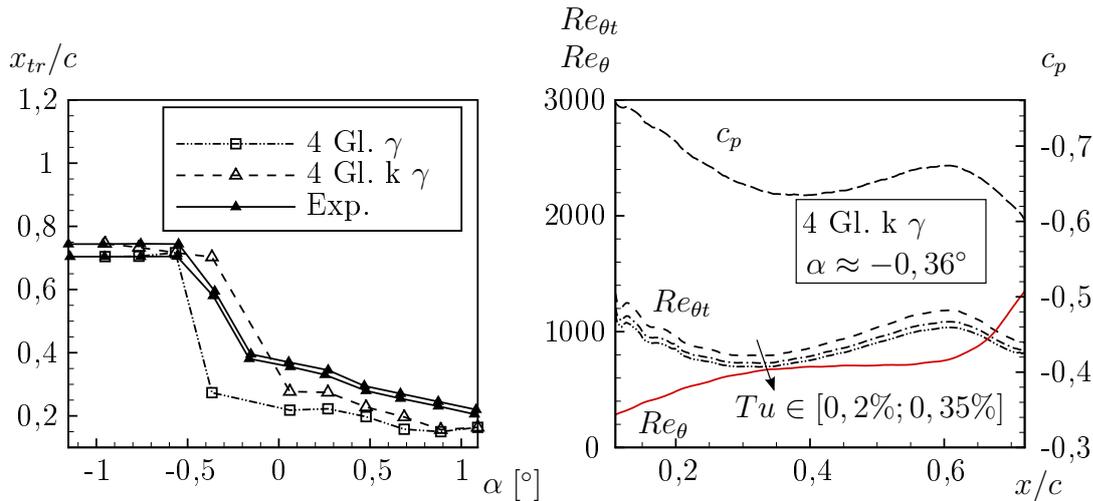


Abbildung 4.24: Variation des Anstellwinkels (*links*) und Analyse des Kriteriums in Abhängigkeit des Turbulenzgrades (*rechts*)

Strömung zunächst beschleunigt (nicht zu sehen), dann verzögert, anschließend wieder beschleunigt und dann wieder verzögert wird. Durch diese Druckverteilung zeigt auch $Re_{\theta t}$ qualitativ einen wellenförmigen Verlauf. Für die vorliegende Strömung ist es so, dass Re_{θ} und $Re_{\theta t}$ bei $x/c \approx 0,34$ einen ähnlichen Wert haben. So kommt es in Abhängigkeit des Turbulenzgrades (siehe Variation Tu) bereits an dieser Position zur Transition oder die Strömung wird erneut beschleunigt, $Re_{\theta t}$ steigt wieder und Transition wird deutlich stromab detektiert. Da in diesem Bereich, wie am Turbulenzgrad gezeigt, die Transitionsvorhersage besonders sensitiv ist, ist dort auch der größte Unterschied zwischen der kompressiblen und der inkompressiblen Modellvariante zu erkennen: Das kompressible Modell sagt eine stabilere laminare Grenzschicht in Form eines höheren $Re_{\theta t}$ voraus, wodurch die Transition schon bei kleineren Winkeln stromab des ersten lokalen c_p -Minimums vorhergesagt wird. In den Bereichen $\alpha > 0^\circ$ und $\alpha < -0,5^\circ$ ergeben beide Varianten ähnliche Ergebnisse, da die Vorhersage hier primär durch Druckgradienten getrieben ist (vgl. Analyse des NLR 7301-Profiles, Abschn. 4.2.1). Insgesamt ergeben beide Modelle eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, wobei die Modellvariante mit Kompressibilitätserweiterung für $\alpha > 0^\circ$ näher am Experiment liegt und den Sprung in deutlich besserer Übereinstimmung vorhersagt.

4.2.3 Schlussfolgerungen Kompressibilität

Abschließend sollen Schlussfolgerungen formuliert werden, unter welchen Bedingungen Kompressibilitätseffekte im transsonischen Bereich von Transitionsmodellen zu berücksichtigen sind:

- Für Transition im verzögerten Bereich (bei moderaten Reynolds-Zahlen) dominieren Druckgradienteneffekte und der Einfluss einer Kompressibilitätskorrektur

ist in den meisten Fällen gering. Oftmals ist für solche Fälle zu beobachten, dass sich der Wert für $Re_{\theta t}$ im stromaufliegenden, beschleunigten Bereich stark unterscheidet, Re_{θ} (bei tiefen Reynolds-Zahlen) aber so tief ist, dass Transition erst im verzögerten Bereich stattfindet. Hier wird der Unterschied zwischen kompressibler und inkompressibler Modellvariante durch den plötzlichen Gegendruck für beide Modelle deutlich kleiner und Transition findet nahezu unabhängig vom Einfluss der Mach-Zahl auf das Kriterium stromab des Druckminimums statt.

- Detektiert das inkompressible Kriterium Transition im beschleunigten Bereich, ist eine Kompressibilitätskorrektur oftmals unabdingbar, da eine Änderung im Wert des Kriteriums einen großen Einfluss haben kann. Dieser Fall ist aus anwendungsorientierter Sicht besonders wichtig, da Transition im beschleunigten Bereich oft bei Strömungsbedingungen eines Transportflugzeugs auftritt (d.h. Flug-Reynolds-Zahlen und transsonische Anströmbedingungen).
- Wie am CAST10-2-Testfall gezeigt, kann die Berücksichtigung von Kompressibilitätseffekten außerdem bei moderaten Reynolds-Zahlen für superkritische Profile durch ihre typische Form wichtig werden.

4.3 3D-Testfälle

4.3.1 Rotationsellipsoid

Der von Kreplin et al. (1985) vermessene angestellte Rotationsellipsoid ist ein generischer Testfall, der einer Flugzeugrumpfkongfiguration nachempfunden ist (Geometrie in Abb. 4.25, *links oben* gezeigt). Experimentelle Daten liegen in Form von c_f -Verläufen vor. Die Wandschubspannung wurde unter Verwendung von Heißfilmen gemessen. Der Testfall eignet sich damit gut, um Modelle anhand dieser komplexen 3D-Strömung, für die die Stromlinien stark nicht-parallel sind, zu untersuchen. Im Folgenden sind Testbedingungen nachgerechnet, bei denen bekannt ist, dass reine TS-Transition auftritt. Das verwendete strukturierte Gitter enthält insgesamt $10,5 \times 10^6$ Punkte. Innerhalb der Grenzschicht liegen in wandnormaler Richtung 60 bis 90 Punkte. Der Wandabstand des ersten Punktes in wandnormaler Richtung erfüllt die Bedingung $y^+(1) < 1$. Die Oberfläche ist im Folgenden in Zylinderkoordinaten dargestellt. Die x -Koordinate beschreibt die Strömungsrichtung und φ den Winkel. Es ist jedoch zu beachten, dass die Projektion nicht flächentreu ist und dazu führt, dass bestimmte Bereiche (d.h. $x/L \rightarrow 0$ und $x/L \rightarrow 1$) vergrößert dargestellt sind.

Abb. 4.25 zeigt Ergebnisse für eine Reynolds-Zahl von $Re_L = 1,5 \times 10^6$ bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$. Für alle gezeigten Modell ist es so, dass Transition in Übereinstimmung mit dem Experiment in der oberen Hälfte $\varphi > 90^\circ$ detektiert wird. Für eine genaue Analyse der Transitionslinie (d.h. eine gedachte Linie der lokal minimalen c_f -Werte) wird diese stückweise betrachtet: Der untere (in Bezug auf φ) Teil der Linie wird vom 4-Gleichungsmodell, vom 3-Gleichungsmodell und dem γ - Re_{θ} -Modell in guter Übereinstimmung wiedergegeben. Das 1-Gleichungsmodell sagt generell eine zu

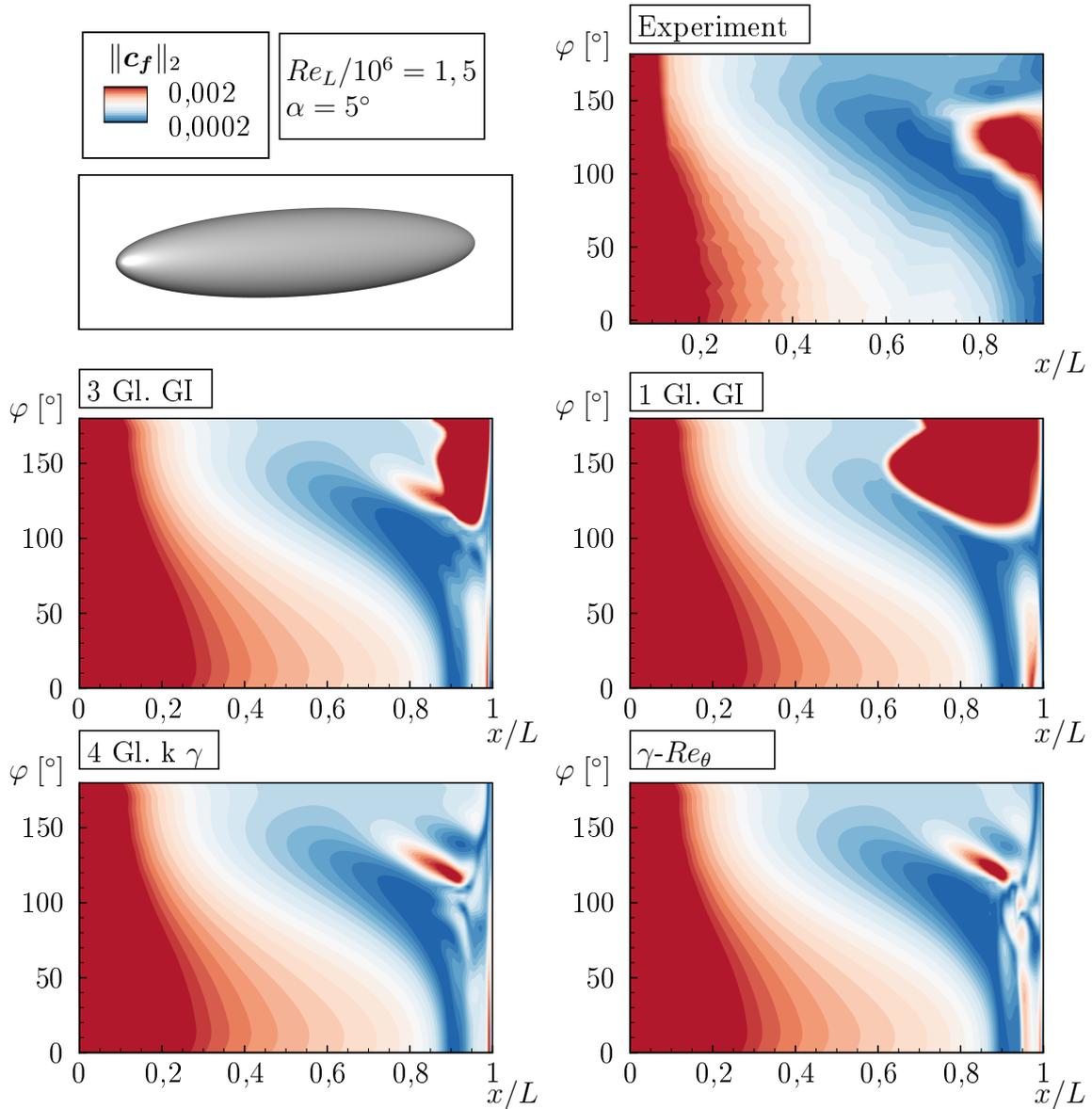


Abbildung 4.25: $\|c_f\|_2$ -Konturen für die drei neuen Modelle sowie für das $\gamma-Re_\theta$ -Modell im Vergleich zu experimentellen Daten von Kreplin et al. (1985) für einen Winkel von $\alpha = 5^\circ$

weit stromauf liegende Linie voraus. Das Minimum der experimentellen Transitionslinie bzgl. x bei $\varphi \approx 140^\circ$ wird vom 4-Gleichungsmodell, vom 3-Gleichungsmodell und vom $\gamma-Re_\theta$ -Modell gut getroffen. Die größten Abweichungen ergeben sich für $\varphi > 150^\circ$. Die Galilei-invarianten Modelle sagen hier eine turbulente Strömung voraus und auch das 4-Gleichungsmodell und das $\gamma-Re_\theta$ -Modell zeigen in diesem Bereich zu hohe Werte des Schubspannungsbeiwertes c_f .

Für eine genauere Analyse dieser Beobachtung sollen die zugrundeliegenden Kriterien

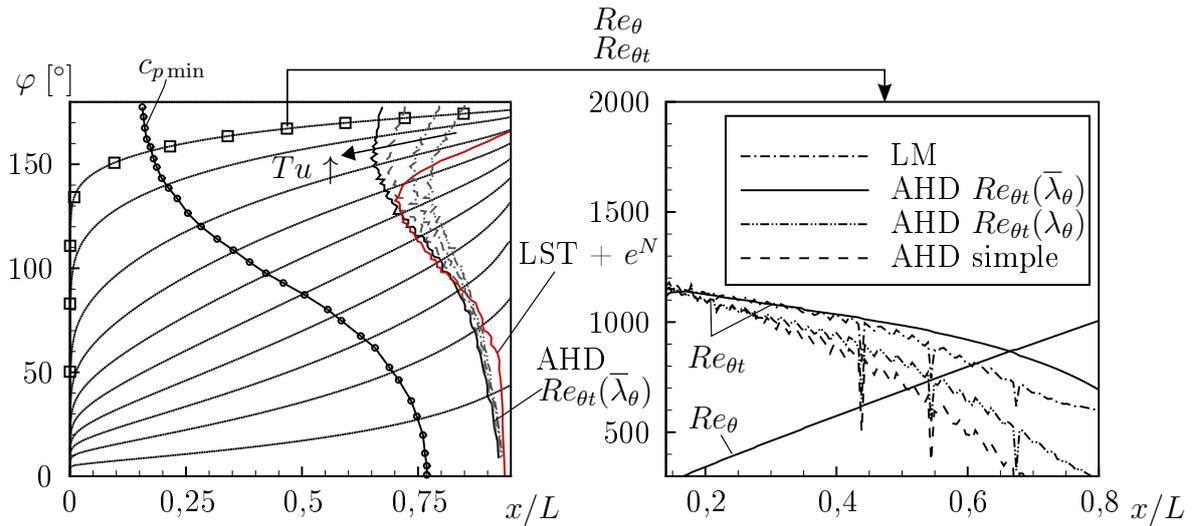


Abbildung 4.26: Untersuchung der analytisch entlang von Stromlinien am Grenzschichttrand ausgewerteten Transitionskriterien für $\alpha = 5^\circ$: Transitionslinien des AHD-Kriteriums für $Tu = 0,1\%$ (schwarz) und kleinere Turbulenzgrade (grau) im Vergleich zu Ergebnissen der linearen Stabilitätstheorie + e^N -Methode aus Krimmelbein (2021) (rot) und Darstellung der Stromlinien am Grenzschichttrand sowie des Druckminimums (*links*); Verläufe der Transitionskriterien anhand einer exemplarischen mit Symbolen gekennzeichneten Stromlinie (*rechts*)

für einzelne Stromlinien ausgewertet werden. Als Basis dient eine laminare Rechnung, für die aus Stabilitätsgründen ab einer festen Position $x/L > 0,9$ das Turbulenzmodell eingeschaltet wird. Abb. 4.26 (*links*) zeigt Ergebnisse, die aus der laminaren Stabilitätstheorie in Verbindung mit der e^N -Methode gewonnen wurden (aus Krimmelbein 2021) und Ergebnisse des AHD-Kriteriums für verschiedene Turbulenzgrade. Die in Abb. 4.26 (*links*) abgebildete schwarze durchgezogene Linie entspricht der Auswertung bei dem für alle Rechnungen verwendeten Turbulenzgrad $Tu = 0,1\%$. Für die nicht-durchgezogenen grauen Linien wurde der Turbulenzgrad bis $Tu = 0,01\%$ reduziert. Ein Vergleich der LST + e^N -Ergebnisse mit dem Experiment zeigt, dass die, in Abb. 4.25 (*rechts oben*) anhand der c_f -Verteilung zu sehende, experimentelle Transitionslinie sehr gut getroffen wird. Insbesondere wird für den Bereich $\varphi > 150^\circ$ eine laminare Strömung vorhergesagt. Für die analytisch ausgewerteten Kriterien ist hingegen (in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Transitionsmodelle) unabhängig vom Turbulenzgrad zu erkennen, dass für diesen Bereich Transition deutlich stromauf der Experimente und der LST + e^N -Ergebnisse detektiert wird. Für steigende Turbulenzgrade verlagert sich die gesamte Transitionslinie und der turbulente Bereich für $\varphi > 150^\circ$ nach stromauf. D.h. der qualitative Verlauf kann bei einer Verringerung des Turbulenzgrades nicht wiedergegeben werden und auch der turbulente Bereich bleibt bestehen. Die beste Übereinstimmung für den restlichen Bereich $\varphi < 150^\circ$ zeigt das mit $Tu = 0,1\%$ ausgewertete Kriterium. Für

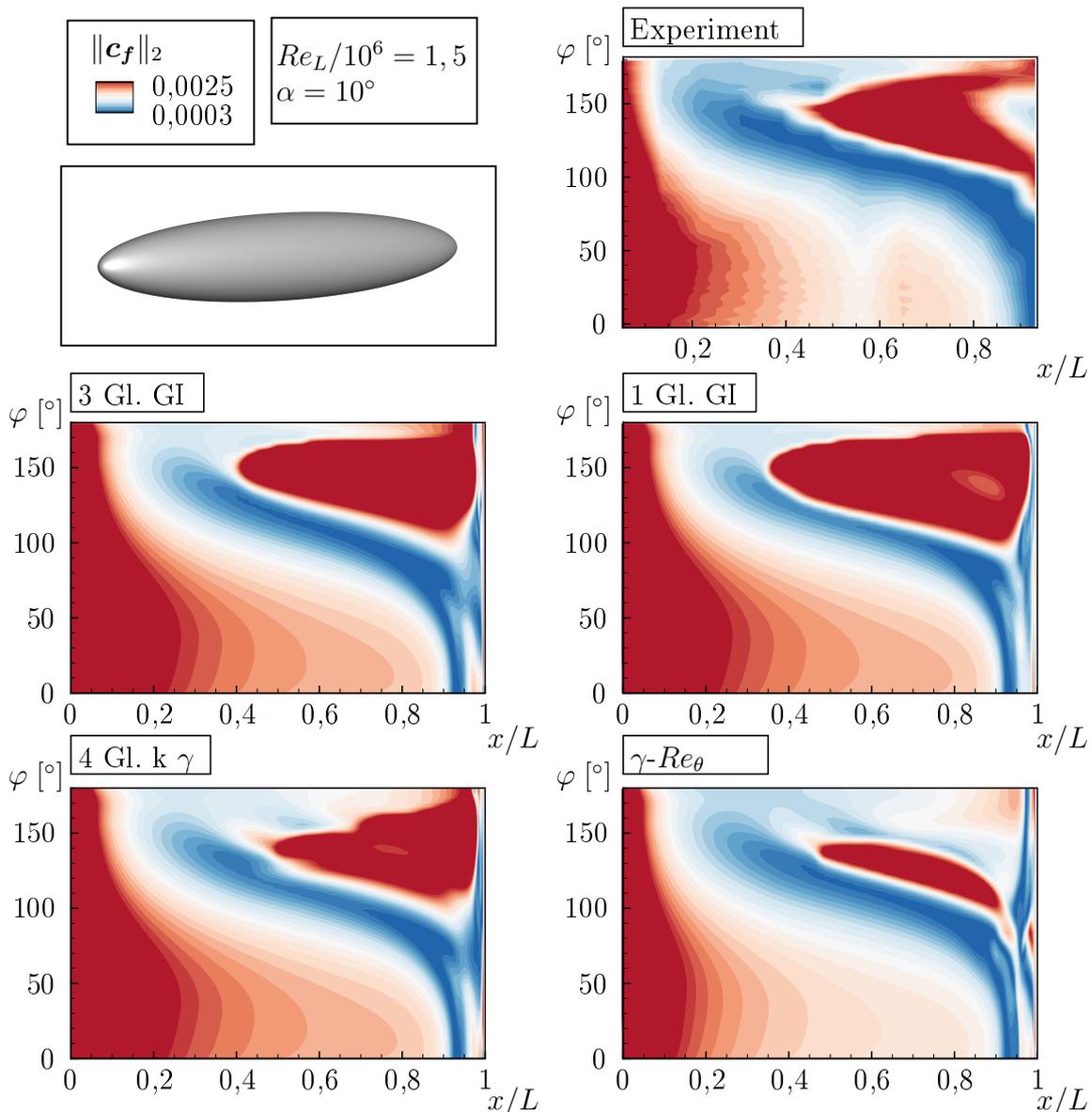


Abbildung 4.27: $\|c_f\|_2$ -Konturen für die drei neuen Modelle sowie für das $\gamma-Re_\theta$ -Modell im Vergleich zu experimentellen Daten von Kreplin et al. (1985) für einen Winkel von $\alpha = 10^\circ$

eine genauere Analyse des Bereiches $\varphi > 150^\circ$ sollen verschiedene analytisch ausgewertete Transitionskriterien anhand einer Stromlinie 4.26 (*links*, mit Symbolen versehen) betrachtet werden. Der leicht verrauschte Verlauf ist der Auswertemethode geschuldet. Es ist zu erkennen, dass alle ausgewerteten Kriterien deutlich stromauf der Experimente Transition detektieren. Diejenigen AHD-Kriterien, die basierend auf dem lokalen Druckgradientenparameter ausgewertet wurden, liegen noch deutlich weiter stromauf. Es scheint, als würde der lokale Druckgradientenparameter zu einer zusätzlichen Unter-

schätzung der Stabilität der Strömung führen. Das Kriterium von Langtry und Menter (2009) (mit LM abgekürzt), das vom Kriterium von Abu-Ghannam und Shaw (1980) abgeleitet wurde, liegt näher am AHD-Kriterium, aber dennoch deutlich stromauf. Die Transitionslinien dieser Kriterien, die aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abb. 4.26 (*links*) nicht gezeigt sind, liegen im Vergleich zur AHD-Linie insgesamt für alle ausgewerteten Stromlinien weiter stromauf und damit auch für $\varphi < 150^\circ$ in deutlich schlechterer Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Untersuchungen der analytisch ausgewerteten Kriterien zeigen somit, dass den Beobachtungen aus Abb. 4.25 keine modellierungstechnischen Probleme zugrunde liegen, sondern die Kriterien die Strömungsphysik nicht ausreichend gut wiederzugeben scheinen. Abb. 4.26 (*links*) zeigt zusätzlich Stromlinien am Grenzschichttrand. Es ist unmittelbar zu erkennen, dass die Stromlinien nicht parallel verlaufen, sondern in Strömungsrichtung bei $\phi = 0^\circ$ divergieren und bei $\phi = 180^\circ$ konvergieren. Diese stark dreidimensionale Grundströmung ist laut Arnal (1986) Kern des Problems. Arnal (1986) beschreibt, dass Kriterien, die auf integralen Grenzschichtgrößen basieren, für Fälle, bei denen die Stromlinien stark nicht-parallel verlaufen, oftmals versagen. Hier sei es notwendig, die Anfachung einzelner Moden im Rahmen einer Stabilitätsanalyse zu betrachten. Auch wenn viele Transitionsmodelle versuchen, durch eine starke Kalibrierung die Vorhersage zu verbessern, scheint es insbesondere für diese Art von Fällen mit komplexer 3D-Strömung sinnvoller, eine stärker auf der Strömungsphysik basierende Lösung zu finden, die die Dreidimensionalität der Grundströmung berücksichtigt.

Für einen Winkel von $\alpha = 10^\circ$ ergibt sich eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten (Abb. 4.27). Die Form der Transitionslinie wird von allen Modellen (vom $\gamma-Re_\theta$ -Modell nur teilweise) getroffen. Das 1-Gleichungsmodell liegt wieder leicht stromauf und der gesamte Keil wird etwas zu breit (in φ -Richtung) vorhergesagt. Die qualitative Übereinstimmung des 4-Gleichungsmodells mit der experimentellen c_f -Verteilung scheint etwas besser als die der anderen Modelle. Insgesamt kann die Qualität des 4-Gleichungsmodells unter Verwendung der Galilei-invarianten Modelle in guter Näherung erhalten werden.

4.3.2 TU Braunschweig Sichelflügel

Der TU Braunschweig Sichelflügel wurde von Petzold und Radespiel (2015) vermessen und stellt einen Flügeltestfall mit komplexer 3D-Strömung, die in spannweitischer Richtung variiert, dar. Für die Simulation wird ein hybrides Netz mit 15×10^6 Punkten verwendet. Die Grenzschicht ist in wandnormale Richtung fein mit 128 Punkten aufgelöst. Um korrekte Oberflächendruckverteilungen zu erhalten, sind Windkanalwände berücksichtigt, da die Abmessungen des Flügels im Vergleich zum Windkanal groß sind. Das Rechengitter wurde vom Institut für Strömungsmechanik der TU Braunschweig bereitgestellt. Laut Petzold und Radespiel (2015) findet Transition bei einer Reynolds-Zahl $Re_c = 2,75 \times 10^6$, einer Mach-Zahl $Ma_\infty = 0,16$, einem Anstellwinkel $\alpha = -2,6^\circ$ und $Tu = 0,17\%$ auf der Unterseite des Flügels (überwiegend) über TS-Wellen statt, womit sich dieser Testfall für eine Validierung der neuen Transitionsmodelle eignet. Für

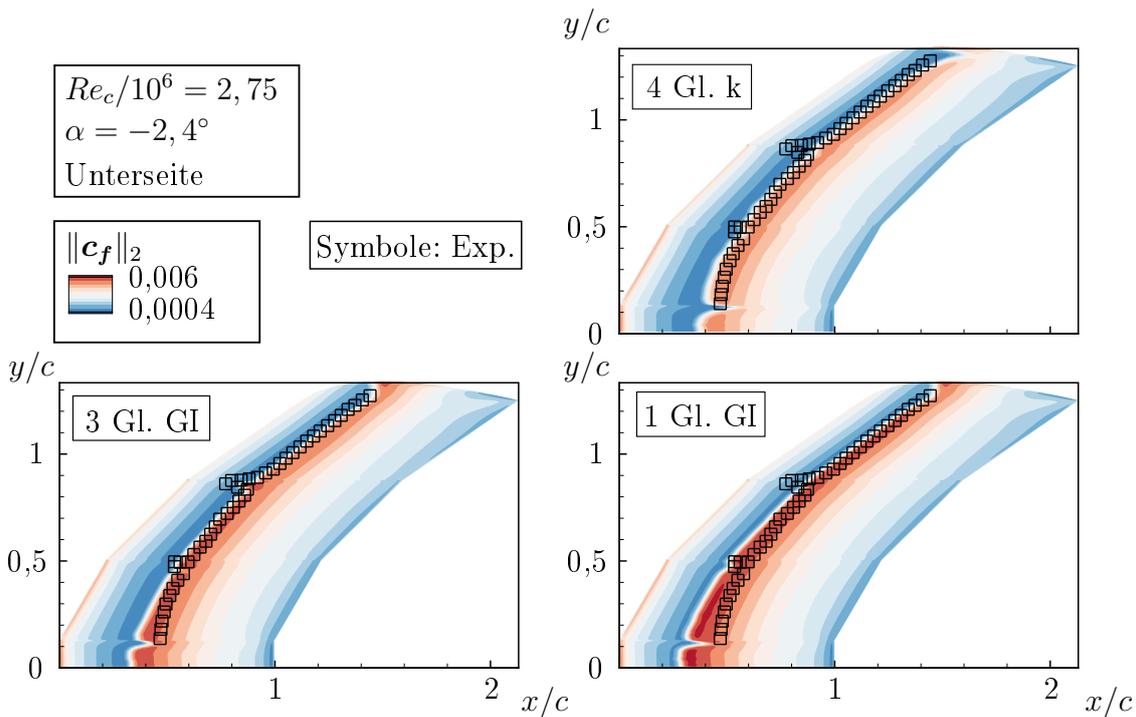


Abbildung 4.28: Vergleich der $\|\mathbf{c}_f\|_2$ -Konturen für die vorgestellten Transitionsmodelle gegenüber experimentellen Daten von Petzold und Radespiel (2015) für die Unterseite des Sichelflügels

die experimentellen Daten gilt es zu beachten, dass diese keiner Position beginnender Transition entsprechen, sondern weiter stromab liegen (Petzold und Radespiel 2015). Somit ist zu erwarten, dass die aus $\|\mathbf{c}_f\|_2$ extrahierte Linie beginnender Transition leicht stromauf der experimentellen Linie liegt.

In Abb. 4.28 sind Ergebnisse für diese Strömungsbedingungen im Vergleich zum Experiment gezeigt. Es ist bekannt, dass die Transition in Bereichen, in denen sich der stückweise konstante Pfeilwinkel ändert, durch Querströmungsinstabilitäten (CF) auftritt. Dieser in der experimentellen Transitionslinie keilförmig sichtbare Einfluss kann erwartungsgemäß nicht von den Transitionsmodellen wiedergegeben werden. Arbeiten von Grabe et al. (2018) zeigten, dass unter Verwendung eines zusätzlichen CF-Transitionskriteriums auch die besagten Keile vorhergesagt werden können.

Abgesehen von diesen kleinen CF-dominierten Bereichen ist zu erkennen, dass alle Modelle in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten liegen. Das 4-Gleichungsmodell zeigt die beste Übereinstimmung. Für $y/c > 1$ liegt die Transitionslinie unter Beachtung, dass es sich bei den gemessenen Daten um keine Positionen beginnender Transition handelt, minimal stromab. Ab $y/c < 0,5$ liegt das lokale Minimum von $\|\mathbf{c}_f\|_2$ leicht stromauf. Insgesamt kann die Übereinstimmung jedoch als sehr gut eingestuft werden. Für das 3-Gleichungsmodell ergibt sich ein dem 4-Gleichungsmodell sehr ähnlicher Verlauf der Transitionslinie, wobei für den Bereich $y/c < 0,3$ etwas weiter

stromauf Transition detektiert wird. Das 1-Gleichungsmodell sagt eine ähnliche Transitionslinie vorher, liegt aber insgesamt ab $y/c < 0,85$ stromauf der anderen Modelle und ab $y/c < 0,5$ stromauf der experimentellen Daten. Der modellierungstechnische Hauptunterschied im Vergleich zum ähnlichen 3-Gleichungsmodell ist, dass aufgrund der fehlenden Mittelung ein stärkerer Gegendruck angenommen wird. Zusätzlich gilt es für die Galilei-invarianten Modelle zu beachten, dass eine im Vergleich zur originalen Formulierung direktere Definition der *Onset*-Funktion der γ -Gleichung verwendet wird, was zu einer schnelleren Turbulenzproduktion führt.

Abschließend kann geschlussfolgert werden, dass alle Modelle eine sehr gute bis gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aufweisen und die Galilei-invarianten Versionen die Genauigkeit für diesen Testfall im Vergleich zum 4-Gleichungsmodell sehr gut erhalten.

4.4 Bewegte Gitter

Nachfolgend sind zwei Testfälle gezeigt, für die eine von der üblichen Simulationsmethodik abweichende Vorgehensweise angewendet werden soll. Im Gegensatz zur typischen Simulation, die einen feststehenden Flügel, der einer Anströmung ausgesetzt ist, annimmt, sollen bewegte Gitter verwendet werden. Die Testfälle werden daher mit besonderem Blick auf das Thema Invarianz in Inertialsystemen betrachtet.

4.4.1 NLF(1)-0416-Profil

Das bereits detailliert analysierte NLF(1)-0416-Profil soll im Folgenden zur Verifikation der Galilei-invarianten Modelle, hinsichtlich deren inertialsystemunabhängigen Formulierungen, verwendet werden. Ein Modell wird als Galilei-invariant bezeichnet, wenn es in jedem Inertialsystem dieselbe Form hat. In Abschn. 3.4 wurde bereits theoretisch hergeleitet, dass die Modelle den Grundsatz der Galilei-Invarianz erfüllen (d.h. das Modell hat unter Transformation in jedem Inertialsystem dieselbe Form).

Ein klassisches Gedankenexperiment zur Veranschaulichung der Galilei-Transformation ist, sich einen gleichförmig bewegten Körper vorzustellen: Ein Körper fliegt mit konstanter Geschwindigkeit in eine definierte Richtung. Diese Bewegung kann nun in verschiedenen Inertialsystemen beschrieben werden. Ein mitbewegter Beobachter (körpergebundenes Bezugssystem) nimmt das System als (relativ zur Erde) ruhend, ein stillstehender als bewegt wahr und ein anderweitig gleichförmig bewegter Beobachter nimmt wiederum eine andere Geschwindigkeit wahr. D.h. sowohl die Koordinaten als auch die Geschwindigkeiten unterscheiden sich in Abhängigkeit der gewählten Basisvektoren: Die Geschwindigkeiten hängen somit vom Bewegungszustand des Inertialsystems ab. Bildet man jedoch die Gradienten (bspw. der Geschwindigkeit), sind diese unabhängig vom Koordinatensystem. Führt man innerhalb dieser Inertialsysteme eine Koordinatentransformation durch (Galilei-Transformation), müssen physikalische Gesetze ihre Form beibehalten, um den Grundsatz der Galilei-Invarianz zu erfüllen.

Nachfolgend soll nun ein Testfall konstruiert werden, der eine Verifikation der Modelle

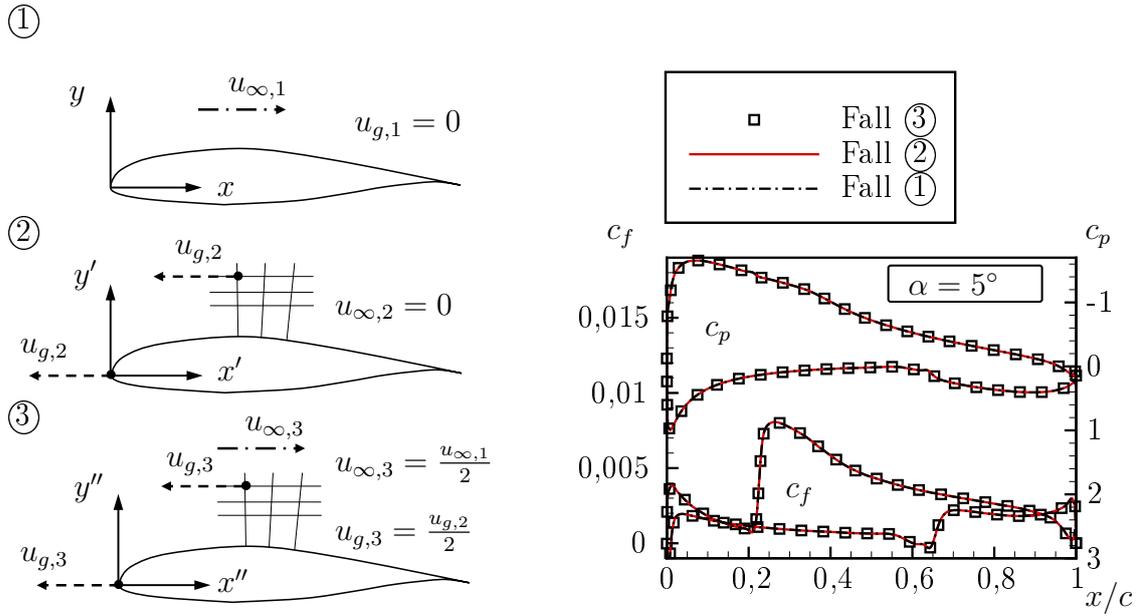


Abbildung 4.29: Verifikation der Galilei-invarianten Formulierung (3-Gleichungsmodell) anhand des NLF(1)-0416-Profiles bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$: Vergleich der c_f - und c_p -Verläufe für die Ober- und Unterseite (*rechts*) zwischen Fall (1) mit am Fernfeldrand aufgeprägter Geschwindigkeit, Fall (2) mit bewegtem Gitter und einem Mischfall (3) (schematische Darstellung der Fälle *links*)

hinsichtlich Galilei-Invarianz ermöglicht. Dazu wird ein, das Fluid repräsentierende, Fluidelement (FE) betrachtet. Im Rechengebiet befindet sich eine stillstehende Geometrie, auf die sich ein FE zubewegt: Das FE bewegt sich relativ zur Erde mit der Geschwindigkeit u_∞ in x -Richtung auf die Geometrie zu und wird an irgendeiner Stelle von der besagten Geometrie beeinflusst. D.h. die Geschwindigkeit des FE ändert sich derart, dass sich für einen unbewegten Beobachter die Geschwindigkeiten $u_{abs} = u$ und $v_{abs} = v$ ergeben. Für ein mit u' translativ bewegtes System kann diese Bewegung ebenfalls gleichwertig beschrieben werden und es gilt $u_{rel} = u + u'$ und $v_{rel} = v$. Für die Gradienten muss sich $\nabla \mathbf{u}_{rel} = \nabla \mathbf{u}_{abs}$ ergeben, da bspw. $\partial u_{rel} / \partial x = \partial u / \partial x$ und $\partial u_{abs} / \partial x = \partial u / \partial x$, da $u' = \text{konst.}$ per Annahme. D.h. die Gradienten sind in beiden Fällen dieselben, da sich der konstante Geschwindigkeitsanteil heraushebt. Nun sei angenommen, dass sich die Geometrie zusätzlich gleichförmig bewegt. Es können zwei Fälle unterschieden werden: Das FE bewegt sich auf die Geometrie zu oder das FE steht relativ zur Erde still und die Geometrie bewegt sich. Es wird klar, dass auch diese Bewegung in beliebigen Inertialsystemen gleichwertig beschrieben werden kann (sofern Reynolds- und Mach-Zahl identisch sind).

Der verwendete Strömungslöser TAU löst die Navier-Stokes-Gleichungen, das Turbulenzmodell und alle weiteren Transportdifferentialgleichungen in einem relativen System, das

mit dem Gitter bewegt wird. Die Navier-Stokes-Gleichungen und das Turbulenzmodell sind bereits Galilei-invariant. Für die neuen als Galilei-invariant deklarierten Transitionsmodelle gilt es, dies anhand von Testrechnungen zu verifizieren. Ein übliches Gedankenexperiment wäre es, den Fall (wie einleitend beschrieben) unverändert zu lassen und nur das für die Beschreibung verwendete Koordinatensystem (die Basisvektoren) zu verändern. D.h. man könnte ein absolutes System und ein bewegtes System für denselben Fall verwenden, bei dem sich das Fluid auf eine unbewegte Geometrie zubewegt. In beiden Fällen müsste das Modell, für das Galilei-Invarianz postuliert wird, dieselbe Lösung ergeben. Da es für den verwendeten Strömungslöser nicht möglich ist, ein Inertialsystem zu verwenden, das sich unabhängig von der Geometrie bewegt, werden folgende drei Fälle konstruiert, die in Abb. 4.29 (*links*) schematisch dargestellt sind:

- Fall ①: Dieser Fall stellt den Referenzfall dar. Hier ist die Simulation unter Verwendung des absoluten (relativ zur Erde unbewegten) Systems anhand einer stehenden Geometrie durchgeführt. Das Fluid bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $u_{\infty,1}$ auf die Geometrie zu. Beschriebenes stellt das Standardvorgehen für die Simulation eines typischen starren Flügels dar.
- Fall ②: Die Geometrie bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $u_{g,2} = -u_{\infty,1}$ durch das Fluid. Die Simulation erfolgt im Gegensatz zu Fall ① im relativen körpergebundenen System. Das Transitionsmodell wird jedoch ohne weitere Modifikationen unter Verwendung der absoluten Geschwindigkeit (im relativen System) angewendet, also der Geschwindigkeit, mit der ein unbewegter Beobachter die Bewegung der FE wahrnimmt.
- Fall ③: Dieser Fall stellt einen Mischfall aus dem ersten und dem zweiten Fall dar. Die Geometrie bewegt sich mit $u_{g,3} = u_{g,2}/2 = -u_{\infty,1}/2$ durch das Fluid und das Fluid bewegt sich mit $u_{\infty,1}/2$ auf die Geometrie zu. Die Simulation erfolgt auch hier im relativen, körpergebundenen System. Das Transitionsmodell wird jedoch wieder ohne weitere Modifikationen unter Verwendung der absoluten Geschwindigkeiten verwendet.

In Abb. 4.30 ist für die drei Fälle das jeweilige Geschwindigkeitslösungsfeld inklusive Stromlinien gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die absolute Geschwindigkeit im relativen System einen gänzlich anderen Betrag ergibt als die relative Anströmung: Für den Fall ② ist klar, dass ein unbewegter Beobachter im Fernfeld ein ruhendes Fluid wahrnehmen muss, da sich nur die Geometrie bewegt. In Blattnähe erfolgt eine Interaktion des Fluids mit dem Profil. Beschriebenes ist auch anhand wandnormaler Geschwindigkeitsprofile gezeigt Abb. 4.30 (*rechts*). Für die absolute Geschwindigkeit in Fall ② ist zu erkennen, dass sich der Betrag der Geschwindigkeit für $y_w \rightarrow \infty$ dem Wert 0 annähert. Das ist sinnvoll, da das Fluid für einen unbewegten Beobachter ruht und sich das Profil durch das Fluid bewegt. Auf dem Flügel an der Wand ergibt sich im absoluten System eine Geschwindigkeit $\neq 0$, da das Fluid von der Geometrie beeinflusst wird. Im relativen System ist zu erkennen, dass sich ein bekanntes Geschwindigkeitsprofil ergibt. Der mitbewegte Beobachter sieht das Fluid an der Wand ruhend, d.h. das Fluid hat dort dieselbe Geschwindigkeit wie das Profil und erscheint dem mitbewegten Beobachter als ruhend. Im

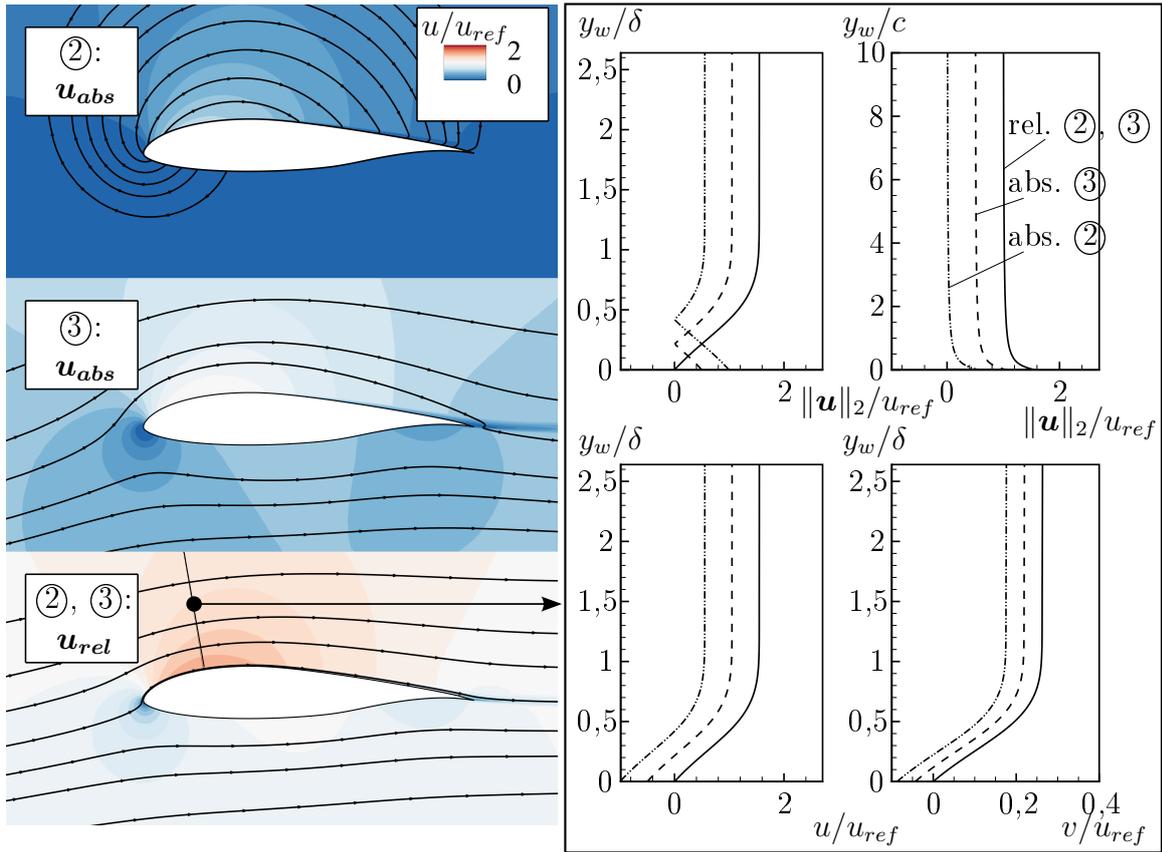


Abbildung 4.30: Visualisierung der Geschwindigkeitskomponente u inkl. Stromlinien (*links*) und wandnormale Geschwindigkeitsprofile, die an der *links unten* gezeigten Position extrahiert wurden (*rechts*); Fälle ①, ② und ③ in Abb. 4.29 (*links*) eingeführt

Fernfeld verhält es sich umgekehrt. Unabhängig vom Koordinatensystem ergeben sich auch hier wieder identische Gradienten.

D.h. insgesamt, dass das Transitionsmodell unter Verwendung verschiedener Basisvektoren (bewegt und unbewegt) und Geschwindigkeiten angewendet wird. Bestünde eine Abhängigkeit vom Inertialsystem und den damit assoziierten Geschwindigkeiten, könnte das Ergebnis des Referenzfalls ① durch die Fälle ② und ③ nicht wiedergegeben werden. Sofern ein Transitionsmodell Galilei-invariant formuliert ist, berechnet es also für alle diese Inertialsysteme dieselbe Position beginnender Transition.

Abb. 4.29 (*rechts*) zeigt anhand von c_f - und c_p -Verläufen, dass alle Fälle erwartungsgemäß (nahezu) exakt dieselbe Lösung ergeben. D.h. die vorhergesagte Transitionsposition ist für alle Fälle identisch. Zusätzlich ist zu erkennen, dass auch der gesamte c_f -Verlauf nahezu identisch ist, was bedeutet, dass auch die restlichen Gleichungen unabhängig vom betrachteten Fall dieselbe Lösung ergeben.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Besagtes nur in Inertialsystemen gilt. So-

bald das Bezugssystem selber beschleunigt wird, müssen weitere Kräfte berücksichtigt werden, wodurch sich die Bilanzgleichungen ändern. So müssen bspw. bei einer Rotation, die inhärent beschleunigt ist, im mitbewegten System sogenannte Scheinkräfte berücksichtigt werden.

4.4.2 RTG-Helikopterrotor

Im Rahmen industrieller CFD-Anwendungen werden Helikopter-Konfigurationen oft vollturbulent simuliert. Eine Berücksichtigung der laminar-turbulenten Transition bietet jedoch großes Potential, da der Leistungsbedarf durch die vollturbulente Abschätzung deutlich überschätzt wird (vgl. bspw. Dietz und Dieterich 2009). Nachfolgend soll der volle RTG-Zweiblattrotor, der in der Rotor Testanlage Göttingen (RTG) vermessen wurde, hinsichtlich der Vorhersagekapazitäten der Galilei-invarianten Transitionsmodelle untersucht werden. Die experimentellen Arbeiten von Weiss et al. (2019) stellen qualitativ hochwertige Transitionslagen für Validierungszwecke bereit, die mittels temperatursensitiver Farbe (TSP) bestimmt wurden. Der volle Versuchsaufbau für den steifen Zweiblattrotor ist in Weiss et al. (2019) beschrieben.

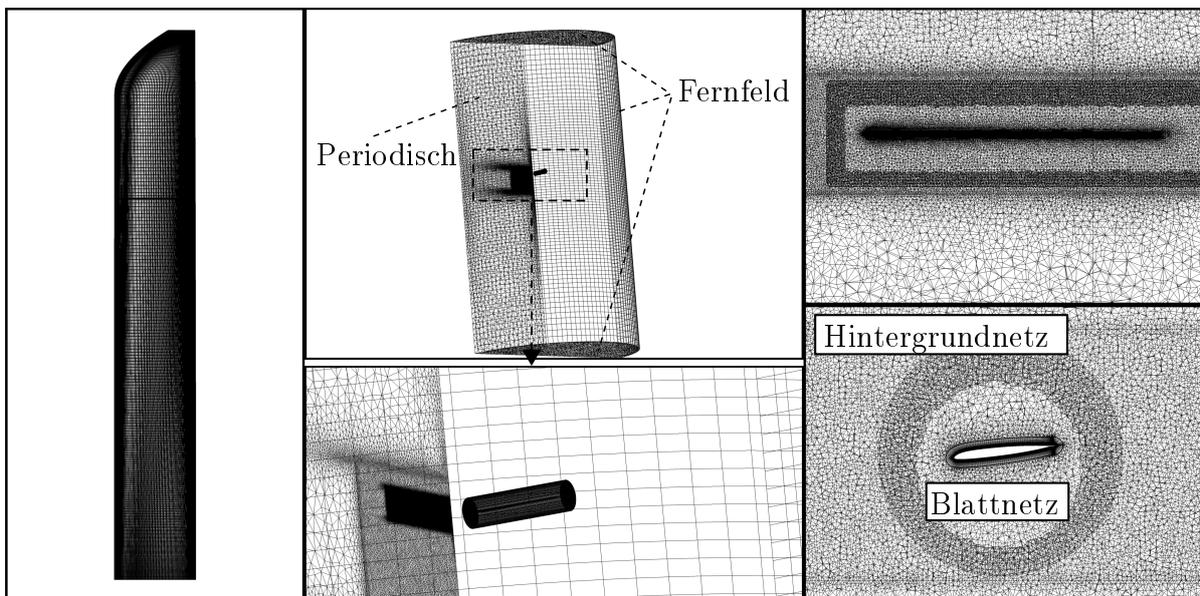


Abbildung 4.31: Rechengitter für Simulationen des 3D-RTG-Helikopterrotors und Randbedingungen

Das in Abb. 4.31 gezeigte Gitter enthält insgesamt ca. $8,6 \times 10^6$ Punkte. Das hybride Blattnetz wird unter Verwendung der Chimera-Technik so in das unstrukturierte Hintergrund-Fernfeldnetz eingebunden, dass an den Überlappungsrändern eine Interpolation möglich ist (s. Abb. 4.31, *rechts unten*). Unter Verwendung dieser Methode kann die Qualität des Blattnetzes in Bezug auf Orthogonalität und Zellqualität sichergestellt werden, da der Rotor so weitgehend unabhängig vom Hintergrundnetz diskretisiert wird.

β [°]	$Re_{cR}/10^5$	Ma_R	f [1/s]	u_z [m/s]
13,1	4,851	0,29	23,6	2,08
12,1	4,83	0,29	23,6	2,04
10	9,29	0,57	47,2	4,05

Tabelle 4.4: Strömungsbedingungen der simulierten Testfälle; der Index R kennzeichnet die radiale Position der Blattspitze $r = R$

Die radiale und normale Ausdehnung des Blattnetzes orientiert sich dabei an der Forderung, einen ausreichenden Abstand zwischen Interpolationszone und Grenzschicht zu gewährleisten. Ein weiterer Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass unterschiedliche Nickwinkel (*pitch angle*) durch Drehen des Blattnetzes abgebildet werden, ohne dass ein neues Netz erzeugt werden muss. Von den $8,6 \times 10^6$ Knoten sind $3,8 \times 10^6$ im Blattnetz zu finden. Für die erste Zelle in wandnormaler Richtung ist sichergestellt, dass $y_w^+(1) < 1$ gilt. In Strömungsrichtung ist das Blatt mit ca. 120 Punkten vernetzt. In der Grenzschicht befinden sich ca. 50 Punkte in wandnormaler Richtung. Das Oberflächennetz des

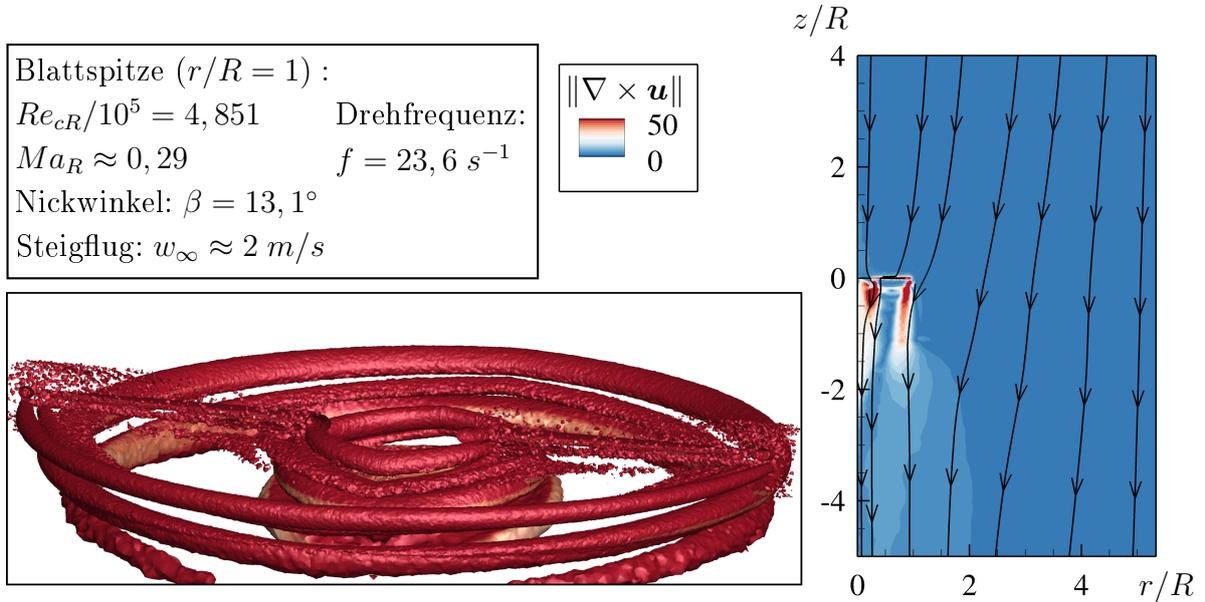


Abbildung 4.32: Mit $\|\nabla \times \mathbf{u}\|$ konturierte λ_2 -Isofläche für den Eigenwert $\lambda_2 = -350$ (*links*) und $\|\nabla \times \mathbf{u}\|$ -Kontur in einem Fernfeldauschnitt mit Stromlinien basierend auf dem absoluten Geschwindigkeitsvektorfeld (*rechts*)

Rotorblattes ist in Abb. 4.31 (*links*) gezeigt. Das Hintergrundnetz ist ein unstrukturiertes Netz, das lokale Verfeinerungen aufweist (s. Abb. 4.31, *rechts* und *Mitte*). Da es sich bei dem RTG-Rotor um einen Zweiblattroter handelt, kann die Geometrie unter Annahme von Rotationssymmetrie und Verwendung von periodischen Randbedingungen mit

einem Rotor, der sich in einem halbzyklindrischen Fernfeld befindet, approximiert werden (Randbedingungen in Abb. 4.31, *Mitte oben* gezeigt). Die Fernfeldränder befinden sich horizontal 5 Rotorradien vom Ursprung (d.h. $r/R \in [0; 5]$) und vertikal 8 bzw. 10 Rotorradien vom Blatt entfernt (d.h. $z/R \in [8; -10]$, vgl. Abb. 4.31, *Mitte oben*). An den Rändern (d.h. Zylindermantel und Grundflächen) ist eine Fernfeldrandbedingung aufgeprägt. Da für alle Simulationen eine vertikale Anströmung vorliegt, ist eine Verwendung spezieller in Ströer und Krumbein (2017) entwickelter Randbedingungen für Rotorsimulationen nicht zwingend erforderlich.

In Tab. 4.4 sind die Strömungsbedingungen der drei gerechneten Testfälle gezeigt. Die Fälle $\beta = 13, 1^\circ$ und $\beta = 12, 1^\circ$ haben ähnliche Strömungsbedingungen (die Reynolds-Zahl unterscheidet sich aus messtechnischen Gründen leicht). Der Fall $\beta = 10^\circ$ weist hingegen eine höhere Blattspitzen-Reynolds- und Mach-Zahl auf. Die Bestimmung des Turbulenzgrades ist in Abschn. 4.1.2 detailliert beschrieben.

Die Galilei-invarianten Modelle wurden hier in derart angewendet, dass, auf Gradienten basierende, nicht-rotationsinvariante Größen durch, auf Basis der relativen Geschwindigkeit berechnete, Gradienten ersetzt wurden. So ist bspw. der Betrag des Scherratenensors rotationsinvariant, der der Wirbelstärke hingegen nicht. Auch der Konvektionsterm ist in allen Transportgleichungen des Löser TAU standardmäßig für bewegte Gitter angepasst, indem ein zusätzlicher Fluss berücksichtigt wird, der aus der Gitterbewegung resultiert (hier anhand einer generischen Transportgleichung für die exemplarische Variable ϕ gezeigt):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) - \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}_g\phi) = \mathcal{R}_\phi, \quad (4.5)$$

wobei die rechte Seite hier in \mathcal{R}_ϕ zusammengefasst ist.

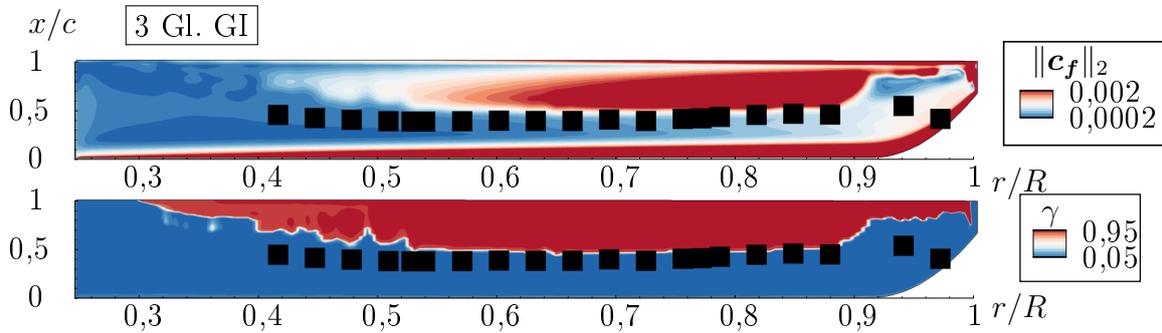


Abbildung 4.33: $\|\mathbf{c}_f\|_2$ - (*oben*) und γ -Konturen (*unten*) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13, 1^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

Abb. 4.32 (*rechts*) zeigt für eine qualitative Analyse einen Ausschnitt der Fernfeldlösung inklusive Stromlinien der absoluten Geschwindigkeit. Es zu erkennen, dass der Rotor eine vertikale Anströmung erfährt, was einen Steigflug simuliert. Die Kontur des Betrages der Wirbelstärke verdeutlicht, dass bereits im gezeigten Ausschnitt nur noch geringe Geschwindigkeitsgradienten vorliegen und die Entfernung des Fernfeldrandes

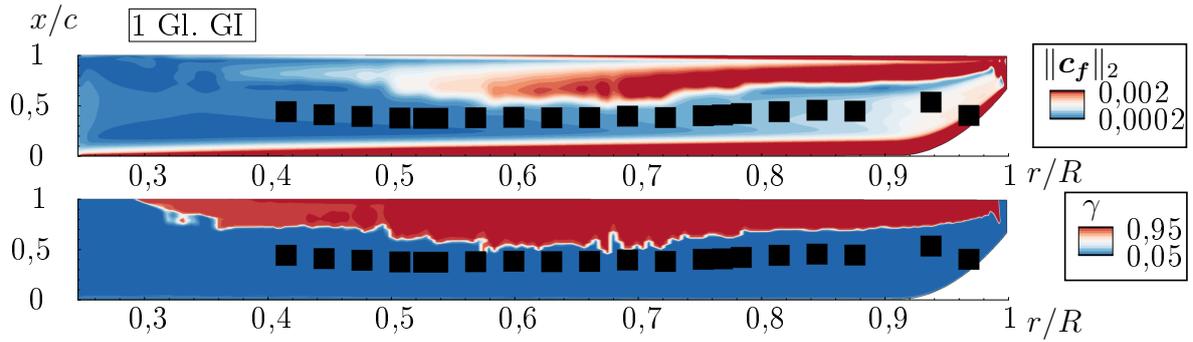


Abbildung 4.34: $\|\mathbf{c}_f\|_2$ - (*oben*) und γ -Konturen (*unten*) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

vom Blatt (deutlich größer als der gezeigte Ausschnitt) auszureichen scheint. Zusätzlich sind die Blattspitzenwirbel anhand des λ_2 -Kriteriums visualisiert (Abb. 4.32, *links*). Aufgrund der vertikalen Anströmung werden die Wirbel abgesehen von der induzierten Geschwindigkeit aktiv aus dem Rechengebiet heraustransportiert, sodass die Interaktion von Blattspitzenwirbel mit der Blattspitze keine gesonderte Gitterauflösung benötigt.

In den Abbildungen 4.33 bis 4.41 sind Lösungen für die Galilei-invarianten 3- und 1-Gleichungsmodelle im Vergleich zu experimentellen Daten gezeigt. Für alle Modelle und Lösungen sind die Größen $\|\mathbf{c}_f\|_2$ sowie die an der wandnormalen Position y_{wR} extrahierte Größe γ geplottet. Zusätzlich sind an jeweils zwei radialen Schnitten ($r/R \approx 0,77$ und $r/R = 0,5$), an denen Druckdaten vorliegen, c_p - und c_f -Verläufe gezeigt. Hierbei gilt es zu beachten, dass c_f die Komponente c_{fx} bedeutet und dass sich die zur Berechnung verwendeten Bezugsgrößen auf die Blattspitze beziehen, um Konsistenz zwischen den c_{fx} -Linienplots und den $\|\mathbf{c}_f\|_2$ -Oberflächenlösungen innerhalb der Abbildungen sicherzustellen. Die c_p -Daten sind hingegen so berechnet, dass die relative Anströmung am jeweiligen Schnitt für eine Entdimensionierung verwendet wird, damit an der Saugspitze jeweils $c_p \approx 1$ gilt. Für die gezeigten Konturplots (z.B. Abb. 4.33), auf denen das Rotorblatt in der Draufsicht betrachtet wird, strömt das Fluid von unten nach oben. D.h. das Blatt bewegt sich nach unten, rotiert also bzgl. der aus der Blattebene kommenden Koordinate z im Uhrzeigersinn.

Die Abbildungen 4.33 und 4.34 zeigen Ergebnisse für einen kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$ (Strömungsbedingungen sind Tab. 4.4 zu entnehmen). Da die Referenzgeschwindigkeit für die Berechnung des Beiwertes $\|\mathbf{c}_f\|_2$ die Blattspitzengeschwindigkeit ist, variieren die Werte entlang des Radius und die Transitionslinie ist anhand von $\|\mathbf{c}_f\|_2$ gerade für kleinere r/R schwer erkennbar. Daher ist hier und im Folgenden zusätzlich der Verlauf von γ an der wandnormalen Position y_{wR} , an der Re_v in der Grenzschicht maximal wird, gezeigt. Für das 3-Gleichungsmodell ist so zu erkennen, dass die Transitionslinie insgesamt in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten

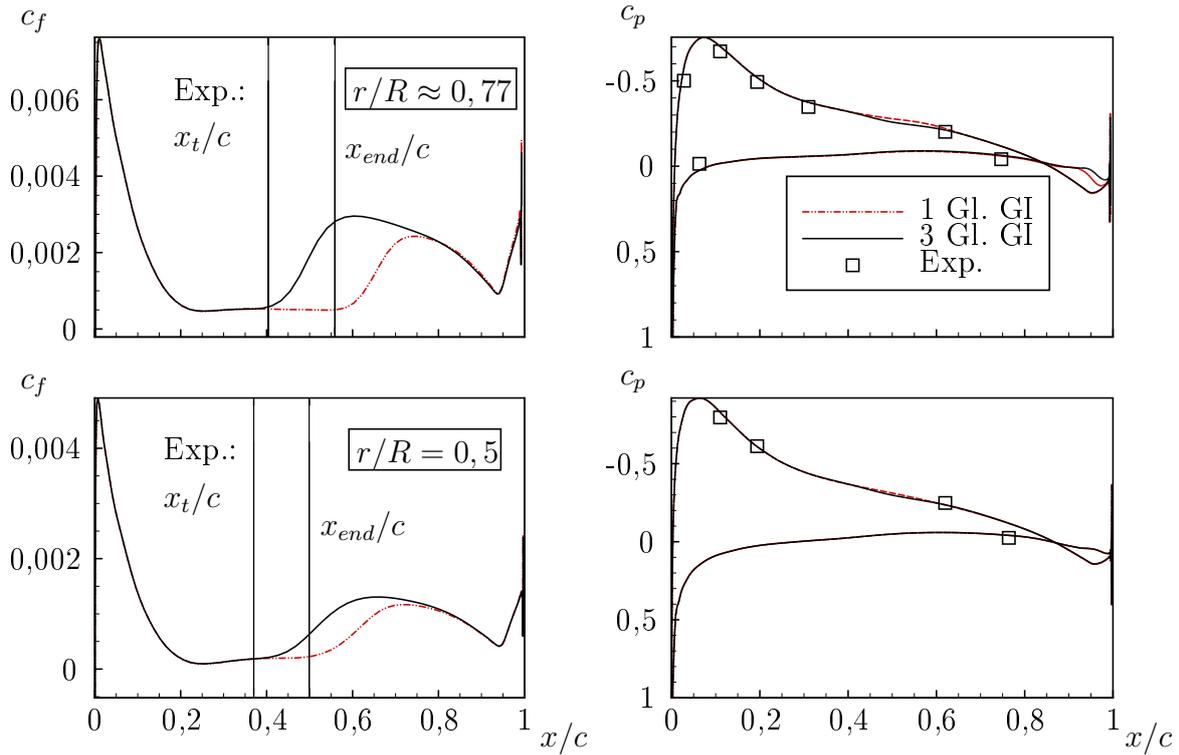


Abbildung 4.35: Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 13,1^\circ$

wiedergegeben wird. Für $r/R < 0,5$ liegt die Linie leicht stromab, gibt den in den experimentellen Daten zu erkennenden Trend jedoch wieder. An der Blattspitze $r/R > 0,9$ ist zu sehen, dass die Transitionslinie deutlich stromab der experimentellen Daten liegt, was vermutlich damit zusammenhängt, dass der als konstant angenommene Turbulenzgrad hier durch eine Interaktion mit dem Blattspitzenwirbel unterschätzt wird. Das 1-Gleichungsmodell zeigt eine im Vergleich zum Experiment insgesamt weiter stromab liegende Transitionslinie. Für den Bereich $0,5 < r/R < 0,75$ ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gut. Für die anderen Positionen liegt die Transitionslinie stromab. Einen genaueren Blick ermöglichen die an zwei radialen Schnitten extrahierten Daten. Beide Modelle zeigen für die betrachteten Schnitte eine sehr gute Übereinstimmung mit der experimentellen Druckverteilung (Abb. 4.35, rechts). Die Verläufe der enddimensionierten Wandschubspannung bestätigen bereits Beschriebenes. Das 3-Gleichungsmodell zeigt für den Schnitt $r/R \approx 0,77$ eine nahezu perfekte Übereinstimmung mit den Positionen beginnender und auch abgeschlossener Transition. Für das 1-Gleichungsmodell ergibt sich eine Stromabverschiebung. Für den Schnitt $r/R = 0,5$ liegen beide Modelle stromab. Für das 3-Gleichungsmodell wird die Position beginnender Transition getroffen, die Produktion scheint in Folge jedoch nicht stark genug zu sein, um den experimentell vorhergesagten Anstieg der Wandschubspannung korrekt vorher-

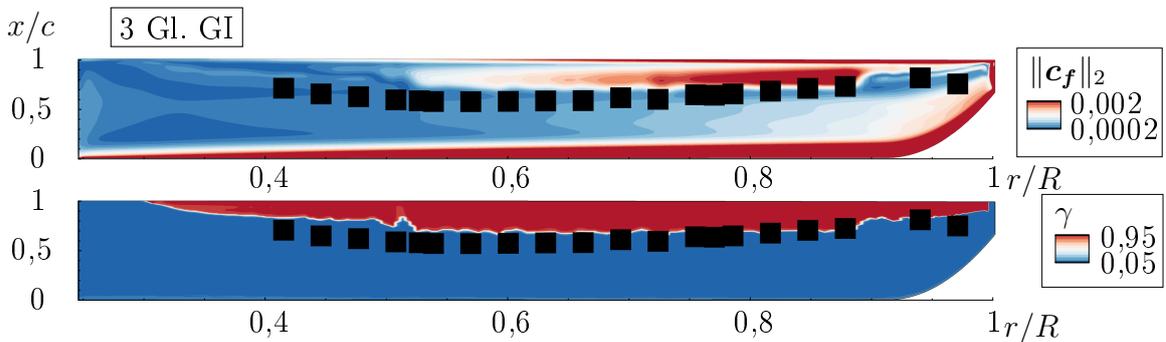


Abbildung 4.36: $\|\mathbf{c}_f\|_2$ - (*oben*) und γ -Konturen (*unten*) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

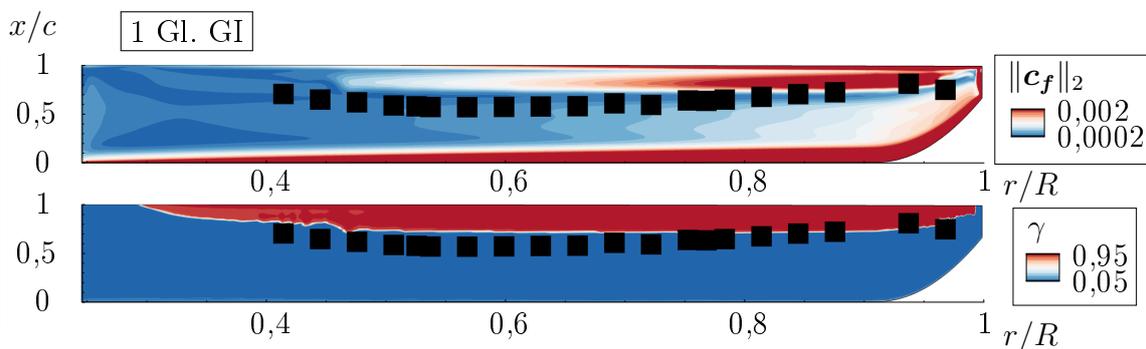


Abbildung 4.37: $\|\mathbf{c}_f\|_2$ - (*oben*) und γ -Konturen (*unten*) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

zusagen.

Für den kollektiven Nickwinkel $\beta = 12,1^\circ$ zeigt das 3-Gleichungsmodell ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Analog zum Winkel $\beta = 13,1^\circ$ liegt das Experiment auch hier für kleine r/R leicht stromauf. Der Trend einer sich für kleine r nach stromab verschiebenden Transitionslinie wird jedoch wiedergegeben. Die Transitionspositionen an der Blattspitze werden für diesen Fall in besserer Übereinstimmung mit dem Experiment vorhergesagt, lassen aber anhand des in r -Richtung letzten Datenpunktes vermuten, dass das Modell für $r/R > 0,97$ etwas zu weit stromab liegt. Für das 1-Gleichungsmodell zeigt sich im Vergleich zu den Ergebnissen für $\beta = 13,1^\circ$ eine deutlich bessere und insgesamt sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Für tiefe r/R ergibt sich ein ähnliches Verhalten wie für das 3-Gleichungsmodell. Eine genauere Betrachtung der Blattspitze offenbart, dass der zweite Datenpunkt in $-r$ -Richtung nicht getroffen wird und das 1-Gleichungsmodell Transition zu weit stromauf vorhersagt. Das 3-Gleichungsmodell detektiert diesen Effekt. Es scheint, als sei der leichte Stromabsprung der Transitionslinie druckgetrieben und der lo-

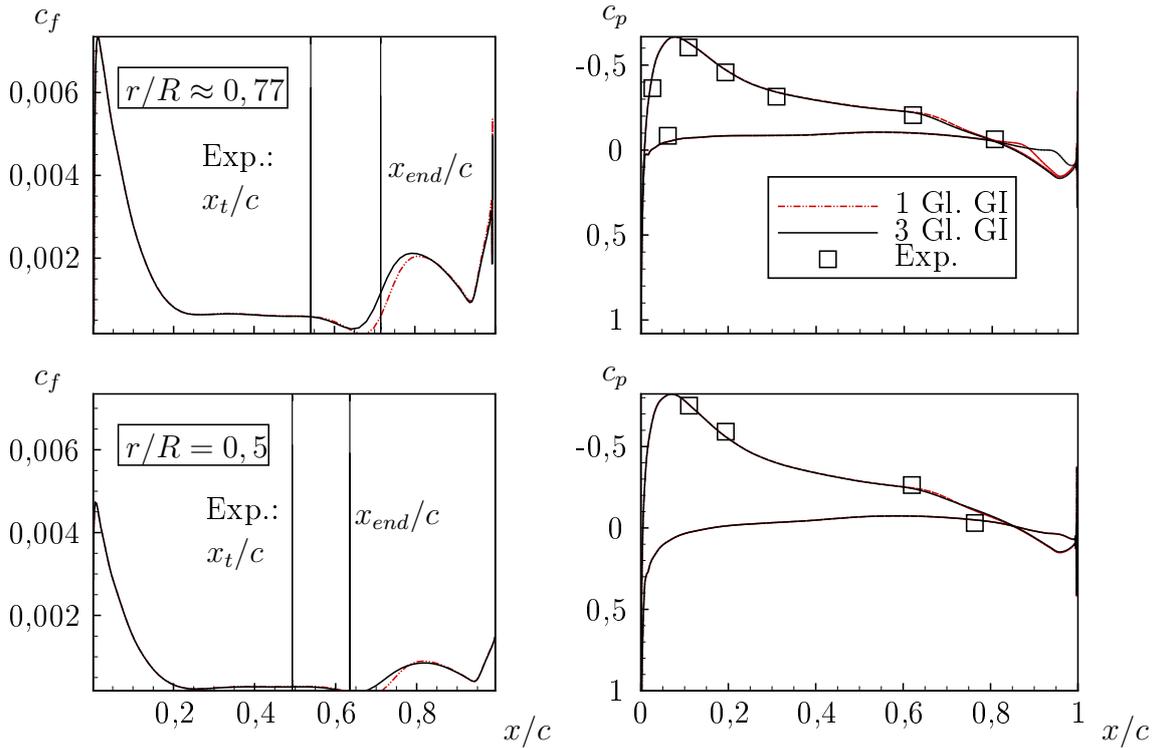


Abbildung 4.38: Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 12,1^\circ$

kale Druckgradientenparameter unterschätzt infolge der lokalen Approximation die Stabilität der Strömung. Der erneute Stromauftritt der Transitionslinie, den der erste Datenpunkt in $-r$ -Richtung andeutet, ist vermutlich infolge eines lokal hohen Turbulenzgrades zu begründen. Dieser Stromauftritt nahe der Blattspitze wird von beiden Modellen nicht wiedergegeben. Insgesamt liegt die Transitionslinie des 1-Gleichungsmodells leicht stromab und im Vergleich zum 3-Gleichungsmodell in leicht schlechterer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die experimentellen Druckdaten werden für beide Modelle erneut sehr gut getroffen. Anhand der c_f -Verläufe bestätigt sich für $r/R \approx 0,77$, dass beide Modelle leicht stromab liegen, aber insbesondere das 3-Gleichungsmodell eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zeigt. Für $r/R = 0,5$ liegen beide Modelle wie auch für $\beta = 13,1^\circ$ etwas weiter stromab und die Turbulenzproduktion scheint wie auch für den Fall $\beta = 13,1^\circ$ zu schwach.

Der Testfall $\beta = 10^\circ$ zeichnet sich im Gegensatz zu den bereits diskutierten Strömungsbedingungen durch eine höhere Reynolds- und Mach-Zahl an der Blattspitze aus. Für beide Modelle ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Transitionslagen. Das 1-Gleichungsmodell liegt leicht stromab, das 3-Gleichungsmodell stromauf. Für ersteres ist zu erkennen, dass die Übereinstimmung im äußeren Bereich des Blattes inkl. der Blattspitze sehr gut ist und die Abweichung zur Wurzel hin leicht größer wird.

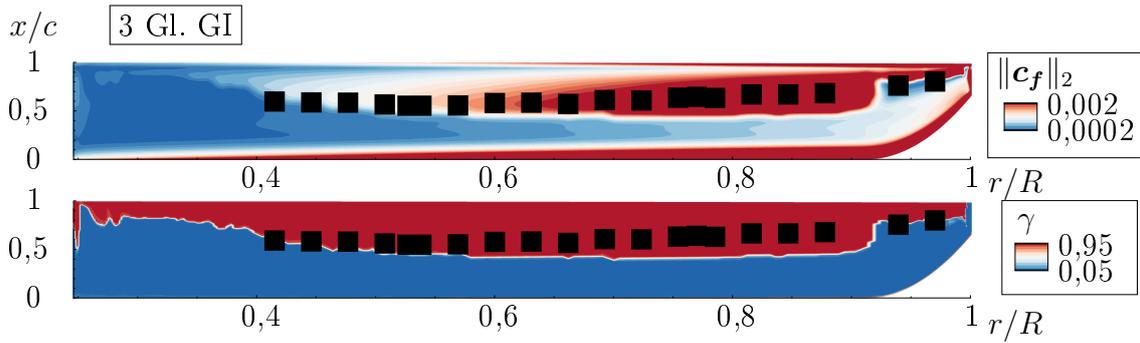


Abbildung 4.39: $\|c_f\|_2$ - (oben) und γ -Konturen (unten) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$ für das 3-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

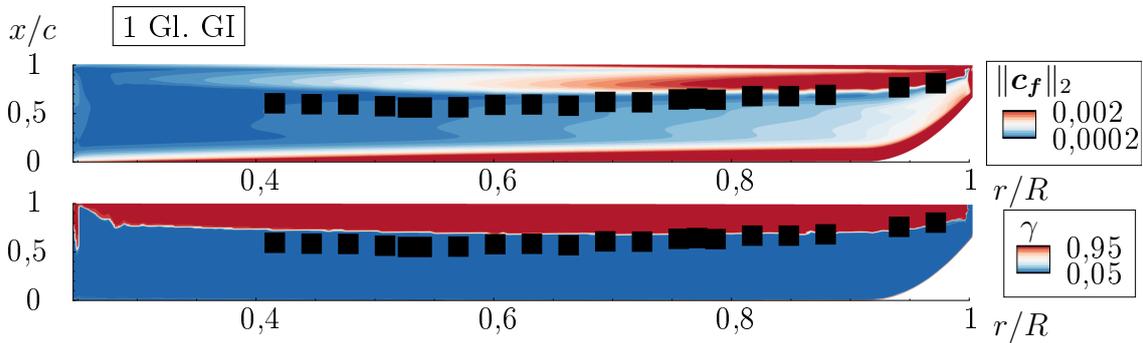


Abbildung 4.40: $\|c_f\|_2$ - (oben) und γ -Konturen (unten) auf der Blattoberseite bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$ für das 1-Gleichungsmodell im Vergleich zu experimentellen Daten von Weiss et al. (2019) (Symbole)

Ein Blick auf Abb. 4.41 (links) bestätigt diese Beobachtung. Für beide Schnitte liegt die Position beginnender Transition stromab. Die Länge des Transitionsbereiches wird gut wiedergegeben. Das 3-Gleichungsmodell liegt insbesondere im Bereich $0,6 < r/R < 0,9$ stromauf der experimentellen Daten. Abb. 4.41 bestätigt für den Schnitt $r/R \approx 0,77$ einen zu frühen Beginn der Transition, zeigt aber insgesamt eine gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Transitionsbreich. Für $r/R = 0,5$ ergibt sich eine nahezu perfekte Übereinstimmung, die vermutlich eine Folge der insgesamt stromauffliegenden Transitionslinie ist. Die Druckverteilung (Abb. 4.41, rechts) treffen beide Modelle an beiden Schnitten sehr gut.

Insgesamt können für diesen Testfall die folgenden Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Unter Verwendung hybrider Gitter und der Chimera-Technik konnte ein stabiler Rechentestfall aufgesetzt werden.
- Die Druckdaten können in allen Fällen in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment wiedergegeben werden.

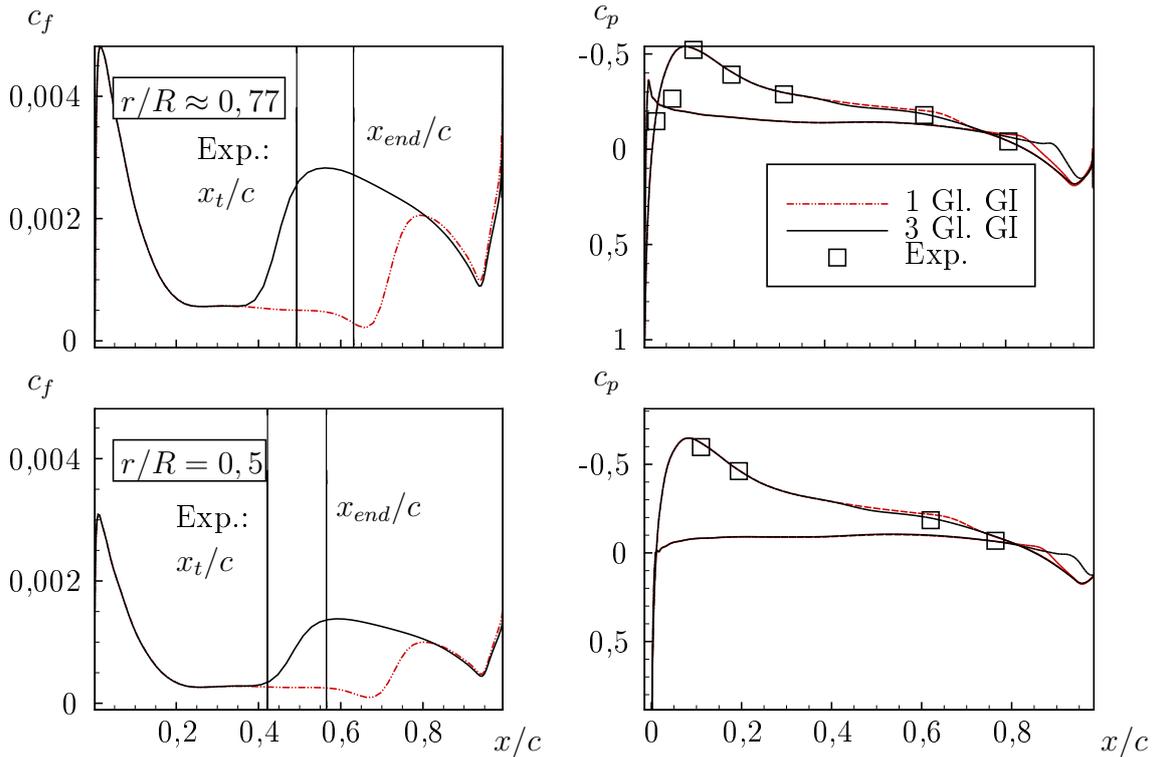


Abbildung 4.41: Vergleich der c_p - und c_f -Verteilung an zwei radialen Schnitten mit experimentellen Daten (Weiss et al. 2019) bei einem kollektiven Nickwinkel von $\beta = 10^\circ$

- Da die experimentellen Daten sowohl eine Position beginnender als auch abgeschlossener Transition angeben, kann eine valide Aussage über den Transitionsbereich gemacht werden. Die Daten deuten darauf hin, dass der c_f -Anstieg unter Verwendung des Zusatzterms (Gl. 3.95) realistische c_f -Verläufe ergibt. Es scheint damit sinnvoll, den Zusatzterm neben seinem bekannten Anwendungsgebiet in Bereichen laminar abgelöster Strömungen auch für solche Fälle, bei denen TS-Transition im niedrigen Reynolds-Zahlenbereich unter Gegendruck auftritt, anzuwenden.
- Insgesamt ergeben beide Modelle eine sehr gute bis gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die einleitend beschriebenen, deutlich stromab (im Bereich der laminaren Ablösung) liegenden Transitionspositionen des $\gamma-Re_\theta$ -Modells können unter Verwendung der vorliegenden Modelle mit signifikant höherer Übereinstimmung vorhergesagt werden.
- Zur Nabe hin werden die Abweichungen in allen Fällen größer, sodass es scheint, als bestünde auch hier ein Zusammenhang zur kleiner werdenden Reynolds-Zahl, die dazu führt, dass die Transitionsbereiche länger als im Experiment vorhergesagt werden. Ein weiterer Grund kann der konstant angenommene Turbulenzgrad sein.

Durch die zur Nabe hin kleiner werdende Bezugsgeschwindigkeit müsste, unter der Annahmen eines näherungsweise konstanten Feldes der turbulenten kinetischen Energie, ein zur Nabe hin größer werdender Turbulenzgrad resultieren.

- An der Blattspitze kann in fast allen Fällen beobachtet werden, dass die Transitionslinie qualitativ einen Stromauftritt zeigt, den die Modelle nur bedingt wiedergeben. Es scheint, als wäre auch hier eine Berücksichtigung eines lokalen Turbulenzgrades sinnvoll.

5 Schlussfolgerungen und Ausblick

5.1 Schlussfolgerungen

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der physikalischen Modellierung der laminar-turbulenten Transition und stellt eine neue in Abb. 5.1 gezeigte, stabilitätsbasierte Familie von Transitionsmodellen vor, die aus drei Modellen besteht, welche sich in Komplexität, Rechenaufwand und Approximationsgrad unterscheiden. Die Modelle kompensieren einleitend beschriebene Defizite bestehender Transitionsmodelle (für Tollmien-Schlichting-Transition) bei niedrigen Reynolds-Zahlen, die mit Gegendruckgradienten assoziiert sind, und bei hohen Reynolds-Zahlen, bei denen Transition oftmals in beschleunigter Strömung auftritt. Zusätzlich zeigt die Arbeit allgemeine Eigenschaften dieser Klasse von Transitionsmodellen und deren Auswirkungen auf die Modellierung auf.

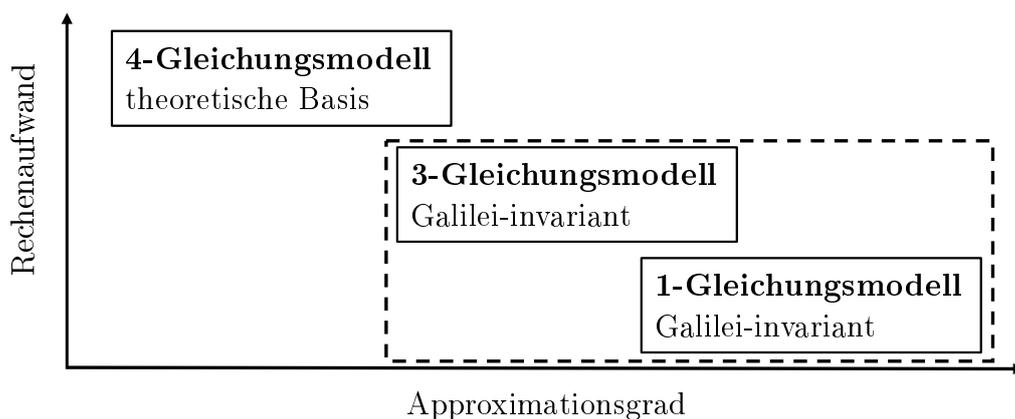


Abbildung 5.1: Einordnung der stabilitätsbasierten Transitionsmodelle in ein Framework zur Transitionstransportgleichungsmodellierung hinsichtlich Rechenaufwand und Approximationsgrad

Die Modelle basieren auf der semi-empirischen Familie von stabilitätsbasierten Transitionskriterien nach Arnal et al. (1984) und Habiballah (1981) (Arnal, Habiballah und Delcourt, AHD) für Tollmien-Schlichting-Instabilitäten. Die reine Form dieses AHD-Kriteriums zeigt in Voruntersuchungen eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Es gilt zu beachten, dass für Abwandlungen dieser Kriterien, wie das simple AHD-Kriterium (vgl. Perraud et al. 2014), gezeigt werden konnte, dass

diese vereinfachten Kriterien für viele gezeigte Fälle eine deutlich schlechtere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aufweisen. Daher basiert die folgende Modellierung auf der reinen (d.h. originalen), dafür aber etwas aufwendigeren, Form des Kriteriums. Das simple Kriterium wurde dennoch für alle Modelle verifiziert und kann innerhalb des Frameworks verwendet werden.

Das **4-Gleichungsmodell** ermöglicht eine genaue Berechnung/Bereitstellung des Kriteriums (d.h. $Re_{\theta t}$) in gitterpunktlokaler Art und Weise. Da das Transitionskriterium die physikalische Basis dieser Klasse von Transitionsmodellen darstellt und das Modell möglichst allgemeingültig gehalten werden soll, wurde auf eine Kalibrierung auf Basis bestimmter Testfälle verzichtet.

Generell kann gezeigt werden, dass eine Modellierung des AHD-Kriteriums in einen Transportgleichungsansatz, der die generellen Anforderungen dieser Klasse von Modellen erfüllt, möglich ist. Dieses Modell bildet somit eine eigene Methode der Transitionsvorhersage und stellt den theoretischen Überbau der weiteren Modelle des Frameworks dar. Das 4-Gleichungsmodell basiert auf vier partiellen Transportdifferentialgleichungen, von denen zwei entwickelt wurden, um eine Integration in Strömungsrichtung zu realisieren und so einen gemittelten Druckgradientenparameter bereitstellen zu können. Es kann geschlussfolgert werden, dass integrierende Transportgleichungen in der Lage sind, einen mittleren Druckgradientenparameter hinreichend genau wiederzugeben. Die Integration selber ist als nahezu exakt einzustufen. Limitierend ist in diesem Zusammenhang der lokal approximierende Integrand. Eine dritte, neue Gleichung macht eine physikalische Größe des kritischen Punktes unter Verwendung eines neuen Produktionsterms stromab des kritischen Punktes verfügbar und eine vierte Gleichung wird für das Setzen der berechneten Transition-*Onset*-Position benötigt. Hierzu werden zwei Methoden bereitgestellt. Zusätzlich ergeben sich aus der Entwicklung dieses 4-Gleichungsmodells folgende wichtige Erkenntnisse:

- Die Approximation der Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl Re_{θ} erfolgt unter Verwendung von der *Vorticity*-Reynolds-Zahl Re_v . Abweichend vom Standardvorgehen wird hier ein Parameter definiert, der in Abhängigkeit des lokalen Druckgradientenparameters unterschiedliche lokale Proportionalitätskonstanten verwendet.
- Es wird ein neuer, auf Re_v basierender Druckgradientenparameter definiert, der einen modellierungstechnisch vorteilhaften wandnormalen Verlauf aufweist.
- Das Maximum von Re_v innerhalb der Grenzschicht skaliert mit der Grenzschichtdicke. Der Transport einer Größe entlang einer Stromlinie erzeugt inhärent einen Fehler, wenn alle Größen an der Stelle, an welcher Re_v innerhalb der Grenzschicht maximal wird, ausgewertet werden.
- Es wurde eine neuartige, spezifische Geschwindigkeit hergeleitet, die den Transport einer Strömungsgröße entlang der Maxima von Re_v ermöglicht. Diese Geschwindigkeit wird innerhalb einer partiellen Differentialgleichung in einem neuen Konvektionsterm angewendet.

- Es konnte ein Kriterium identifiziert werden, das vorgibt, in welchen Fällen die Verwendung einer modifizierten, spezifischen Konvektionsgeschwindigkeit notwendig ist. Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass der Einfluss der spezifischen Geschwindigkeit insbesondere für dicke Grenzschichten relevant wird.
- Für bestimmte Fälle kann gezeigt werden, dass die Berücksichtigung von Konvektionseffekten/*History*-Effekten durch den mittleren Druckgradientenparameter notwendig ist.

Ein großer Nachteil dieser Modellvariante ist, dass an verschiedenen Stellen der Grundsatz der Galilei-Invarianz verletzt wird.

Zusätzlich wurde das 4-Gleichungsmodell an das **kompressible** AHD-Kriterium gekoppelt und im transsonischen Bereich untersucht. Entgegen der Vermutung, dass Kompressibilitätserweiterungen im transsonischen Bereich einen vernachlässigbaren Einfluss haben, konnten Strömungszustände definiert werden, bei denen auch in diesem Mach-Zahlbereich der stabilisierende Einfluss berücksichtigt werden muss. Das betrifft zum einen Transition im beschleunigten Bereich und zum anderen typische superkritische Profile, die zwei lokale Druckminima aufweisen und daher insbesondere stromab des ersten Druckminimums sehr sensitiv gegenüber kleinen Änderungen des Kriteriums sein können.

Eine Kopplung des kompressiblen 4-Gleichungsmodells an das **Gleyzes-Kriterium** hat eine geringfügige Verbesserung der Vorhersage bei Strömungen, die unter hohem Gegendruck stehen, ergeben. Aus anwendungsorientierter Sicht scheint jedoch nicht die Vorhersage der Transition-*Onset*-Position, sondern eine zu schwache Produktion des Turbulenzmodells, der limitierende Faktor in der Vorhersage des Transitionsbereiches laminar abgelöster Strömungen und der Wiedergabe einer entsprechend schnellen Druckrückgewinnung zu sein. Die vorhergesagte Position beginnender Transition ist aufgrund der verwendeten Approximation integraler Größen inhärent sensitiv gegenüber starkem Gegendruck, da $Re_{\theta t}$ hier schnell abfällt. Insgesamt hat das Gleyzes-Kriterium für die untersuchten Fälle somit nur einen geringen Einfluss und wurde daher nur anhand des Eppler 387-Testfalls untersucht. Für die im Folgenden diskutierten Galilei-invarianten Modelle wird ein Zusatzterm verwendet, der basierend auf diesen Erkenntnissen bei abgelösten Strömungen eine starke Turbulenzproduktion und entsprechend schnelle Druckrückgewinnung sicherstellt.

Das **3-Gleichungsmodell** und das **1-Gleichungsmodell** stellen eigenständige Modelle dar, die basierend auf dem 4-Gleichungsmodell Galilei-invariant entwickelt wurden. Ein Vorteil dieser Modelle ist, dass statt des mittleren Druckgradientenparameters auch der lokale Druckgradientenparameter verwendet werden kann. So erhält ein Nutzer zwei Modelle mit unterschiedlichem Approximationsgrad und Rechenaufwand bei gleichbleibendem Implementierungsaufwand (s. Abb. 5.1).

Kernaufgabe bei der Entwicklung dieser Modelle ist die Invariantmachung verschiedener Gleichungen und Terme, wodurch wichtige Strömungsgrößen/Informationen für die

Modellierung nicht mehr verfügbar sind und durch invariante Ausdrücke unter Beibehaltung der Genauigkeit ersetzt werden müssen. So z.B. die integrierenden partiellen Differentialgleichungen, die den Betrag des lokalen Geschwindigkeitsvektors im Produktionsterm verwenden, welcher in Anlehnung an Menter et al. (2015) durch einen Galilei-invarianten Ausdruck ersetzt wurde. Ein in diesem Zusammenhang wichtiges Ergebnis ist, dass sich für diese Gleichungen der Einfluss der invarianten Formulierung des lokalen Geschwindigkeitsbetrages im mittleren Zielparameter nahezu heraushebt und damit eine potentielle Fehlerquelle bei dieser Art der Abbildung von Konvektionseffekten inhärent ausgeschlossen werden kann. Ferner wurde ein neuartiger Galilei-invarianter Druckgradientenparameter auf Basis des erstmals von Ströer et al. (2020b) definierten Parameters λ_v hergeleitet, der dem von Menter et al. (2015) verwendeten Galilei-invarianten Druckgradientenparameter ähnlich ist. Die Gleichung für den Transport der Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl am kritischen Punkt wurde durch zwei Annahmen vermieden und durch einen Galilei-invarianten Ausdruck ersetzt, der lokal ohne eine weitere Transportgleichung berechnet werden kann.

Eine weitere wichtige Erkenntnis der vorliegenden Arbeit ist, dass eine lokale **transitionssetzende Gleichung** wie die γ -Gleichung einen deutlichen Einfluss auf die final gesetzte Transitionsposition haben kann, der als unerwünscht einzustufen ist, da bei dieser Klasse von Transitionsmodellen zunächst nur das Transitionskriterium die physikalische Grundlage beinhaltet. Das Verhalten einer typischen γ -Gleichung in Verbindung mit einem k - ω SST-Turbulenzmodell wurde daher phänomenologisch in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl beschrieben. Für niedrige Reynolds-Zahlen ergibt sich ein charakteristischer γ -Keil. Für hohe Reynolds-Zahlen ist eine Stromaufwirkung zu beobachten. Für Fälle mit niedrigen Reynolds-Zahlen, bei denen Transition über einen Tollmien-Schlichting-Mechanismus stattfindet, ist neben dem beschriebenen γ -Keil die Produktion des SST-Turbulenzmodells deutlich zu schwach. Für Strömungen bei starken Gegendruckgradienten, die bis zur laminaren Ablösung führen, wird daher im Modell ein Zusatzterm verwendet, der eine verstärkte Turbulenzproduktion ermöglicht. Dieses Vorgehen ist in der Literatur bekannt und wird in verschiedenen Modellen angewendet. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Term entwickelt, der dieses Prinzip erweitert und zusätzlich auch bei schwächeren Gegendruckgradienten aktiv wird, um Transition bei verzögerter Strömung im niedrigen Reynolds-Zahlenbereich abzubilden. Aktuell wird der Term so angewendet, dass er für hohe Reynolds-Zahlen deaktiviert werden kann, um unerwünschte Effekte zu vermeiden. Dieses manuelle Schalten des Anwenders ist nicht im Sinne dieser Klasse von Modellen und bedarf weiterer Modellierung.

Für Testfälle mit ablösungsinduzierter Transition kann unter Verwendung dieses Terms eine deutlich bessere Übereinstimmung mit der experimentellen Wiederanlegeposition und der c_p -Verteilung im abgelösten Bereich beobachtet werden. Die lokal beschleunigte bzw. verstärkte Turbulenzproduktion führt zu einer besseren Vorhersage der experimentellen Druckrückgewinnung.

Anhand von **Verifikations- und Validierungstestfällen** kann gezeigt werden, dass das 4-Gleichungsmodell in guter bis sehr guter Übereinstimmung mit den experimen-

tellen Daten liegt und es mit den Galilei-invarianten Modellen gelingt, die Qualität des 4-Gleichungsmodells zu erhalten. Insbesondere mit dem 4-Gleichungsmodell lässt sich das zugrundeliegende Kriterium in allen Fällen sehr genau in gitterpunktlokaler Art und Weise abbilden. Insgesamt ergeben sich für die untersuchten Testfälle, die das Ziel haben, einen möglichst breiten Bereich an Strömungsbedingungen zu repräsentieren, unter Verwendung aller Modelle im Vergleich zu Experimenten gute bis sehr gute Ergebnisse. Die Verwendung eines mittleren Druckgradientenparameters kann insgesamt als vorteilhaft eingestuft werden, da für das 1-Gleichungsmodell durch die Vernachlässigung von Konvektionseffekten in einigen Fällen gezeigt werden kann, dass Druckgradienteneffekte über- oder unterschätzt werden. Ferner wurden die Galilei-invarianten Modelle so implementiert, dass eine Verwendung in Nicht-Inertialsystemen möglich ist. So konnte ein Helikopterrotor im axialen Flug erfolgreich simuliert werden.

Da grundsätzlich das zugrundeliegende Transitionskriterium die physikalische Basis von Transitionsmodellen enthält, wird im Rahmen dieser Ansätze (bis auf wenige Stellen) auf eine umfangreiche Kalibrierung auf Basis bestimmter Testfälle verzichtet. Ein in diesem Kontext besonders interessanter Testfall ist die generische Ellipsoidkonfiguration, für die für das reine Transitionskriterium gezeigt werden konnte, dass bestimmte Effekte von stabilitätsbasierten Kriterien nicht wiedergegeben werden (bereits von Arnal 1986 beschrieben). Anstelle einer Kalibrierung sollte hier also zunächst das reine Transitionskriterium für diese dreidimensionale Strömung bei stark divergierenden und konvergierenden Stromlinien untersucht werden.

5.2 Ausblick

Vor dem Hintergrund sich wandelnder Anforderungen in der Luftfahrt gewinnt die physikalische Modellierung der laminar-turbulenten Transition an Bedeutung. Diese Klasse von Transitionstransportgleichungsmodellen und allgemeiner die Bemühungen, Transitionsvorhersagemethoden automatisiert in Strömungslösern zu implementieren und weiter zu verbessern, sind ein wichtiger Bestandteil der physikalischen Modellierung. Insbesondere für Laminaranwendungen und für viele weitere Bereiche ergibt sich ein deutlicher Einfluss auf die Simulationsgenauigkeit. Zusätzlich haben diese Methoden perspektivisch einen über reine RANS-Simulationen hinausgehenden Anwendungsbereich (z.B. innerhalb hybrider RANS/LES-Methoden).

Folgearbeiten zum vorgestellten, semi-empirischen Transitionsmodellierungsframeworks sollten sich nach Ansicht des Autors auf die folgenden Punkte konzentrieren:

- Modellierung bei stark dreidimensionalen Strömungen
- Kopplung des Modells an Transitionskriterien für querströmungsinduzierte Transition
- Kopplung des Kriteriums nach Abu-Ghannam und Shaw (1980) für hohe Turbulenzgrade und des Kriteriums nach Mayle (1991) für Bypass-Transition

- Validierung einer lokalen Approximation des lokalen Turbulenzgrades
- Genaue Trennung der Effekte zwischen Modellgleichungen und Physik (γ -Gleichung) sowie weitere Modellierung des Zusatzterms, der bei Transition unter Gegendruck angewendet wird.
- Anwendung und ggf. Weiterentwicklung der Modelle für hypersonische Strömungen

Verschiedene Formen der Stabilitätstheorie konnten zeigen, dass sie den Prozess der laminar-turbulenten Transition in vielen Fällen hochgenau abbilden und ein tiefgehendes physikalisches Verständnis vermitteln. Perspektivisch sollten daher nach Ansicht des Autors der vorliegenden Arbeit anstatt stark kalibrierter, empirischer Methoden die vorhandenen Theorien auf natürliche, mit CFD-Lösern kompatible und konsistente Art und Weise verfügbar gemacht werden. Neben den im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten, stabilitätsbasierten Kriterien wäre es hierzu erstrebenswert, reine (d.h. nicht-approximierte), lokale, lineare Stabilitätstheorie in Verbindung mit der e^N -Theorie oder einen Ansatz von vergleichbarer physikalischer Vorhersagequalität unter Verwendung von Transportgleichungen in ein vollständig lokales Transitionsmodell zu überführen (z.B. die linearisierte Stördifferentialgleichung).

Die Verwendung von Methoden, die in irgendeiner Form starke Approximationen enthalten, werden bei Testfällen, bei denen Grundannahmen verletzt werden, natürlicherweise zu Problemen führen. Daher ist es erstrebenswert, die Modelle möglichst transparent auszuwerten. Auf diese Weise können modellierungstechnische Probleme von Fragestellungen, die die physikalische Grundlage betreffen, getrennt werden.

Literaturverzeichnis

- Abu-Ghannam, B. J. und Shaw, R. (1980): Natural Transition of Boundary Layers: The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History. In: *Journal of Mechanical Engineering Science*, Band 22(5):S. 213–228.
- Arnal, D. (1986): Three-dimensional boundary layers: laminar-turbulent transition. *Technischer Bericht, AGARD Bericht 741*.
- Arnal, D. (1989): Transition Prediction in Transonic Flow. In: Zierep, J. und Oertel, H. (Hg.) *Symposium Transsonicum III, International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Springer, Berlin, S. 253–262.
- Arnal, D. (1993): Boundary layer transition: Predictions based on linear theory. *Technischer Bericht SEE N94-33884 10-34, AGARD, Special Course on Progress in Transition Modelling 63*.
- Arnal, D.; Habiballah, M. und Coustols, E. (1984): Laminar Instability Theory and Transition Criteria in Two and Three-Dimensional Flow. In: *La Rech. Aérop.*, Band 1984-2.
- Arnal, D.; Houdeville, R.; Seraudie, A. und Vermeersch, O. (2011): Overview of Laminar-Turbulent Transition Investigations at ONERA Toulouse. In: *41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. S. 3074.
- Bernardos, L.; Francois, R.; Gleize, V. und Gerolymos, G. A. (2019): Algebraic Nonlocal Transition Modeling of Laminar Separation Bubbles Using $k - \omega$ Turbulence Models. In: *AIAA Journal*, Band 57(2):S. 553 – 565. doi:10.2514/1.J057734.
- Bégou, G. (2018): Prévission de la transition laminaire-turbulent dans le code elsA par la méthode des paraboles. *Dissertation, Universität Toulouse, Toulouse, Frankreich*.
- Bégou, G.; Deniau, H.; Vermeersch, O. und Casalis, G. (2017): Database Approach for Laminar-Turbulent Transition Prediction: Navier–Stokes Compatible Reformulation. In: *AIAA Journal*, Band 55(11):S. 3648–3660. doi:10.2514/1.J056018.
- Blasius, H. (1908): Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Band 56(1):S. 1–37.
- Blazek, J. (2015): *Computational Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, dritte Auflage.

- Boltz, F. W.; Kenyon, G. C. und Allen, C. Q. (1960a): The boundary-layer transition characteristics of two bodies of revolution, a flat plate, and an unswept wing in a low-turbulence wind tunnel. Technischer Bericht, NASA Tech. Rep. TN D-309, NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA, USA.
- Boltz, F. W.; Kenyon, G. C. und Allen, C. Q. (1960b): Effects of Sweep Angle on the Boundary-Layer Stability, Characteristics of an Untapered Wing at Low Speeds. Technischer Bericht, NASA Tech. Rep. TN D-338, NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA, USA.
- Carmichael, B. (1982): Low Reynolds number airfoil survey. Technischer Bericht, NASA-CR-165803.
- Cebeci, T. und Cousteix, J. (2005): Modeling and Computation of Boundary-Layer Flow. Horizons Publishing Inc., Long Beach, California.
- Christian, J. W.; Hankey, W. L. und Petty, J. S. (1970): Similar Solutions of the Attached and Separated Compressible Laminar Boundary Layer With Heat Transfer and Pressure Gradient. Technischer Bericht, Aerospace Research Labs Wright-Patterson AFB Ohio.
- Cliquet, J.; Houdeville, R. und D., Arnal (2008): Application of laminar-turbulent transition criteria in Navier-Stokes computations. In: AIAA Journal, Band 46(5):S. 1182–1190.
- Coder, J. G. (2014): Development of a CFD-Compatible Transition Model Based on Linear Stability Theory. Dissertation, Pennsylvania State University, State College, PA, USA.
- Coder, J. G. (2017): Enhancement of the Amplification Factor Transport Transition Modeling Framework. In: AIAA SciTech Forum, 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Grapevine, Texas. doi: 10.2514/6.2019-0039.
- Coder, J. G. (2019): Further Development of the Amplification Factor Transport Transition Model for Aerodynamic Flows. In: AIAA SciTech Forum, AIAA Scitech 2019 Forum. San Diego, California. doi:0.2514/6.2019-0039.
- Coder, J. G. und Maughmer, M. D. (2014): Computational Fluid Dynamics Compatible Transition Modeling Using an Amplification Factor Transport Equation. In: AIAA Journal, Band 52(11):S. 2506–2512. doi:10.2514/1.J052905.
- Crouch, J. D. (2015): Boundary-layer transition prediction for laminar flow control. In: 45th AIAA Fluid Dynamics Conference, Dallas, TX. S. 2472.
- Dagenhart, J. R. und Saric, W. S. (1999): Crossflow stability and transition experiments in swept-wing flow. Technischer Bericht, NASA/TP-1999-209344.

- Dhawan, S. und Narasimha, R. (1958): Some properties of boundary-layer flow during transition from laminar to turbulent motion. In: *Journal of Fluid Mechanics*, Band 3(4):S. 414–436.
- Dietz, M. und Dieterich, O. (2009): Towards increased industrial Application of Rotor Aeroelastic CFD. In: 35th European Rotorcraft Forum, Hamburg, 22.-25.September.
- Dini, P. (1990): A Computational Efficient Model of Laminar Separation Bubbles. Dissertation, Pennsylvania State University, Department of Aerospace Engineering, State College, PA, USA.
- Dini, P.; Selig, M. S. und Maughmer, M. D. (1992): Simplified linear stability transition prediction method for separated boundary layers. In: *AIAA Journal*, Band 30(8):S. 1953–1961.
- Drela, M. (1998): MISES Implementation of Modified Abu-Ghannam/Shaw Transition Criterion. Technischer Bericht, Massachusetts Inst. of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics TR, Cambridge, MA.
- Drela, M. und Giles, M. B. (1987): Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils. In: *AIAA Journal*, Band 25(10):S. 1347–1355.
- Emmons, H. W. (1951): The Laminar-Turbulent Transition in a Boundary Layer - Part I. In: *Journal of Aeronautical Sciences*, Band 18(7):S. 490–498.
- Falkner, V. M. und Skan, S. W. (1931): Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations. In: *Philosophical Magazine*, Band 12:S. 865–896. doi: 10.1080/14786443109461870.
- Fasel, H. (1976): Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations. In: *Journal of Fluid Mechanics*, Band 78(2):S. 355 – 383.
- Fehrs, M. (2017): Boundary layer transition in external aerodynamics and dynamic aeroelastic stability. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.
- Gaster, M. (1962): A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. In: *Journal of Fluid Mechanics*, Band 14(2):S. 222–224.
- Gleyzes, C.; Cousteix, Jr. und Bonnet, J. L. (1985): Theoretical and Experimental Study of Low Reynolds Number Transitional Separation Bubbles. In: *Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics*, University of Notre Dame, Notre Dame, IN.
- Grabe, C.; Nie, S. und Krumbein, A. (2018): Transport Modeling for the Prediction of Crossflow Transition. In: *AIAA Journal*, Band 56(8):S. 3167–3178.

- Granville, P. S. (1953): Calculation of the Viscous Drag of Bodies of Revolution. Technischer Bericht, David Taylor Model Basin Rept. 849.
- Green, J. (2008): Laminar Flow Control - Back to the Future? In: 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, AIAA 2008-3738. Seattle, Washington, USA.
- Habiballah, M. (1981): Analyse de l'instabilité des couches limites laminaires et prévision de la transition de régime laminaire au régime turbulent. Dissertation, L'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- Hain, R.; Kähler, C. J. und Radespiel, R. (2009): Dynamics of laminar separation bubbles at low-Reynolds-number aerofoils. In: Journal of Fluid Mechanics, Band 630:S. 129 – 153.
- Hall, P.; Malik, M. R. und Poll, D. I. A. (1984): On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer. In: Proceedings of the Royal Society of London. 395.
- Hebler, A. (2013): Aeroelastik am Laminarflügel - Versuchsbericht ALF-3. Technischer Bericht, DLR IB 232-2013 J 12, Göttingen.
- Hebler, A.; Schojda, L. und Mai, H. (2013): Experimental Investigation of the Aeroelastic Behavior of a Laminar Airfoil in Transonic Flow. In: Proc. IFASD 2013, IFASD, Bristol.
- Herbert, T. (1997): Parabolized stability equations. In: Annual Review of Fluid Mechanics, Band 29(1):S. 245–283.
- Herbst, F. (2013): Modellierung des Einflusses von Ausblasungen auf die Grenzschichttransition in hochbelasteten Niederdruckturbinen. Dissertation, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland.
- Kaufmann, K.; Ströer, P.; Richez, F.; Lienard, C.; Gardarein, P.; Krimmelbein, N. und Gardner, A. D. (2019): Validation of boundary-layer-transition computations for a rotor with axial inflow. In: Vertical Flight Society 75th Annual Forum and Technology Display. Philadelphia, PA, USA.
- Kožulović, D. (2007): Modellierung des Grenzschichtumschlags bei Turbomaschinenströmungen unter Berücksichtigung mehrerer Umschlagsarten. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Deutschland.
- Kreplin, H. P.; Vollmers, H. und U., Meier H. (1985): Wall shear stress measurements on an inclined prolate spheroid in the DFVLR 3 m × 3 m low speed wind tunnel, Göttingen. Technischer Bericht, Report IB 222-84 A 33, DFVLR - Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, DFVLR-AVA.

- Krimmelbein, N. (2021): Transition prediction method for three-dimensional flows using linear stability theory. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.
- Krimmelbein, N. und Radespiel, R. (2009): Transition Prediction for Three-Dimensional Flows Using Parallel Computation. In: Computers and Fluids, Band 38(1):S. 121–136.
- Kroo, I. und Sturdza, P. (2003): Design-Oriented Aerodynamic Analysis for Supersonic Laminar Flow Wings. In: 41st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. Reno, Nevada, USA, AIAA-2003-0774.
- Langtry, R. B. und Menter, F. R. (2009): Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. In: AIAA Journal, Band 47(12):S. 2894–2906.
- Lee, D.; Kawai, S.; Nonomura, T.; Anyoji, M.; Aono, H.; Oyama, A.; Asai, K. und Fujii, K. (2015): Mechanisms of surface pressure distribution within a laminar separation bubble at different Reynolds numbers. In: Physics of Fluids, Band 27(2):S. 02360–1 – 02360–22. doi:10.1063/1.4913500.
- Lee, J. (2016): The Gas Dynamics of Explosions. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781316226926.
- Lord Rayleigh, F. R. S. (1880): On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. In: Proceedings of the London Mathematical Society, Band 11(1):S. 57 – 72.
- Mack, L. M. (1975): Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition. In: AIAA Journal, Band 13(3):S. 278–289.
- Mack, L. M. (1977): Transition Prediction and Linear Stability Theory. In: AGARD Conference Proceedings. 227.
- Mayle, R. E. (1991): The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines. In: Journal of Turbomachinery, Band 113(4):S. 509–537.
- Mayle, R. E. und Schulz, A. (1997): The Path to Predicting Bypass Transition. In: ASME 1996 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- McDaniel, R. D.; Nance, R. P. und Hassan, H. A. (2000): Transition onset prediction for high-speed flow. In: Journal of Spacecraft and Rockets, Band 37(3):S. 304 – 309.
- McGhee, R. J.; Walker, B. S. und Millard, B. F. (1988): Experimental results for the Eppler 387 airfoil at low Reynolds numbers in the Langley low-turbulence pressure tunnel. Technischer Bericht, NASA Technical Memorandum 4062.
- Medida, S. und Baeder, J. D. (2011): Application of the Correlation-based $\gamma-Re_{\theta,t}$ Transition Model to the Spalart-Allmaras Turbulence Model. In: 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, HI. 2011-3979. doi:10.2514/6.2011-3979.

- Menter, F. R. (1994): Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. In: AIAA Journal, Band 32(8):S. 1598–1605.
- Menter, F. R.; Esch, T. und Kubacki, S. (2002): Transition modelling based on local variables. In: Rodi, W. und Fueyo, N. (Hg.) Engineering Turbulence Modelling and Experiments. Elsevier Science Ltd., 5, S. 555–564.
- Menter, F. R.; Kuntz, M. und Langtry, R. (2003): Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. In: Turbulence, Heat and Mass Transfer, Band 4(1):S. 625–632.
- Menter, F. R.; Langtry, R. B.; Likki, S. R.; Suzen, Y. B.; Huang, P. G. und Völker, S. (2006a): A Correlation-Based Transition Modeling Using Local Variables—Part 1: Model Formulation. In: Journal of Turbomachinery, Band 128(3):S. 413–422. doi: 10.1115/1.2184352.
- Menter, F. R.; Langtry, R. B.; Likki, S. R.; Suzen, Y. B.; Huang, P. G. und Völker, S. (2006b): A Correlation-Based Transition Modeling Using Local Variables—Part 2: Test Cases and Industrial Applications. In: Journal of Turbomachinery, Band 128(3):S. 423–434. doi:10.1115/1.2184353.
- Menter, F. R.; Smirnov, P. E.; Liu, T. und Avancha, R. (2015): A one-equation local correlation-based transition model. In: Flow, Turbulence and Combustion, Band 95(4):S. 583–619. doi:10.1007/s10494-015-9622-4.
- Meyer, R.; Hakansson, S. und Liesner, K. (2011): Turbulenzgradmessungen im DNW-TWG 2011. Technischer Bericht, DLR-IB-92517-12 / B4.
- Michel, U. und Froebel, E. (1988): Lower Limit for the Velocity Fluctuation Level in Wind Tunnels. In: Experiments in Fluids, Band 6(1):S. 49 – 54.
- Morkovin, M. V.; Reshotko, E. und Herbert, T. (1994): Transition in open flow systems - a reassessment. In: Bull. Am. Phys. Soc, Band 39(9).
- Moukalled, F.; Mangani, L. und Darwish, M (2016): The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. Springer-Verlag.
- Nie, S.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2018): Coupling of a Reynolds Stress Model with the $\gamma-Re_\theta$ Transition Model. In: AIAA Journal, Band 56(1):S. 146–157. doi:10.2514/1.J056167. URL <https://arc.aiaa.org/doi/full/10.2514/1.J056167>.
- Oertel Jr., H. und Delfs, J. (1996): Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-60931-2.
- Paredes, P. (2014): Advances in Global Instability Computations: From Incompressible to Hypersonic flow. Dissertation, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spanien.

- Pascal, L.; Delattre, G.; Deniau, H. und Cliquet, J. (2020): Stability-Based Transition Model Using Transport Equations. In: *AIAA Journal*, Band 58(7):S. 2933 – 2942.
- Perraud, J.; Arnal, D.; Casalis, G.; Archambaud, J. und Donelli, R. (2009): Automatic Transition Predictions Using Simplified Methods. In: *AIAA Journal*, Band 47(11):S. 2676–2684. doi:10.2514/1.42990.
- Perraud, J. und Brazier, J. (2019): A Stability Based Transition Prediction Criterion for up to Mach 8 Hypersonic Flows. In: FAR conference. Monopoli, Italy.
- Perraud, J.; Deniau, H. und Casalis, G. (2014): Overview of transition prediction tools in the elsA software. In: ECCOMAS 2014. Barcelona, Spanien.
- Perraud, J. und Durant, A. (2016): Stability-Based Mach Zero to Four Longitudinal Transition Prediction Criterion. In: *Journal of Spacecraft and Rockets*, Band 53(4):S. 730–742.
- Petzold, R. und Radespiel, R. (2015): Transition on a Wing with Spanwise Varying Crossflow Evaluated with Linear Stability Theory. In: *AIAA Journal*, Band 53(2):S. 321–335.
- Reshotko, E. (2001): Transient Growth: A Factor in Bypass Transition. In: *Physics of Fluids*, Band 13(5):S. 1067 – 1075.
- Reynolds, O. (1883): XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels *Philosophical Transactions of the Royal society of London*. In: *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, Band 174:S. 935–982.
- Rumsey, C. L. und Spalart, P. R. (2009): Turbulence Model Behavior in Low Reynolds Number Regions of Aerodynamic Flowfields. In: *AIAA Journal*, Band 47(4):S. 982 – 993. doi:10.2514/1.39947.
- Sanz, W.; Pecnik, R.; Tratnig, A. und Heitmeir, F. (2007): Application of Modern Turbulence Modells to Steady Transitional Flow. In: 7th European Turbomachinery Conference, Fluid Dynamics and Thermodynamics. Athen, Griechenland.
- Saric, W. S.; Reed, H. L. und Kerschen, E. J. (2002): Boundary-layer receptivity to freestream disturbances. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, Band 34(1):S. 291 – 319.
- Schlatter, P. (2005): Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow. Dissertation, ETH Zürich, Zürich, Schweiz.
- Schlichting, H. (1949): Über die Theorie der Turbulenzentstehung. Zusammenfassender Bericht. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, Band 16:S. 65 – 78.

- Schlichting, H. und Gersten, K. (2006): Grenzschicht-Theorie. 10. Auflage. Springer-Verlag, Berlin.
- Schmidt, R. C. und Patankar, S. V. (1991a): Simulating Boundary Layer Transition With Low-Reynolds-Number $k - \epsilon$ Turbulence Models: Part 1—An Evaluation of Prediction Characteristics. In: Journal of Turbomachinery, Band 113(1):S. 10 – 17. doi:10.1115/1.2927728.
- Schmidt, R. C. und Patankar, S. V. (1991b): Simulating Boundary Layer Transition With Low-Reynolds-Number $k - \epsilon$ Turbulence Models: Part 2— An Approach to Improving the Predictions. In: Journal of Turbomachinery, Band 113(1):S. 18 – 26. doi:10.1115/1.2927732.
- Scholz, P.; Kožulović, D. und Radespiel, R. (2009): Vorlesungsskript - Turbulenz und Transition. Institut für Strömungsmechanik, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, Deutschland.
- Schwermer, T.; Richter, K. und Raffel, M. (2016): Development of a rotor test facility for the investigation of dynamic stall. In: A. Dillmann, E. Krämer C. Wagner, G. Heller und Breitsamter, C. (Hg.) New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics X. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer International, Cham, Switzerland, S. 663–673.
- Seyfert, C. und Krumbein, A. (2012): Evaluation of a Correlation-based Transition Model and Comparison with the e^N method. In: Journal of Aircraft, Band 49(6):S. 1765–1773.
- Smith, A. M. O. und Gamberoni, N. (1956): Transition, Pressure Gradient and Stability Theory. Technischer Bericht, Rept. ES 26388, Douglas Aircraft Co., LongBeach, CA.
- Somers, D. M. (1981): Design and Experimental Results for a Natural-Laminar Flow Airfoil for General Aviation Applications. Technischer Bericht, NASA TP 1861.
- Speziale, C. G. (1989): Turbulence modeling in noninertial frames of reference. In: Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Band 1(1):S. 3–19.
- Stanewsky, E. und Zimmer, H. (1980): Development and Wind Tunnel Investigation of Three Supercritical Airfoil Profiles for Transport Aircraft. Technischer Bericht, NASA TM-75840, Washington, D.C.
- Steelant, J. und Dick, E. (1996): Modelling of bypass transition with conditioned Navier–Stokes equations coupled to an intermittency transport equation. In: International journal for numerical methods in fluids, Band 23(3):S. 193 – 220.
- Steelant, J. und Dick, E. (1999a): Prediction of By-Pass Transition by Means of a Turbulence Weighting Factor: Part II Application on Turbine Cascades. In: ASME paper 99-GT-30.

- Steelant, J. und Dick, E. (1999b): Prediction of bypass transition by means of a turbulence weighting factor - Part I : Theory and Validation. In: ASME paper 99-GT-29.
- Steelant, J. und Dick, E. (2001): Modeling of Laminar-Turbulent Transition for High Freestream Turbulence. In: Journal of Fluids Engineering, Band 123(1):S. 22.
- Stock, H. W. (2005): Infinite Swept-Wing Navier Stokes Computations with e^N Transition Prediction. In: AIAA Journal, Band 43(6):S. 1221–1229.
- Stock, H. W. und Haase, W. (2000): Navier–Stokes Airfoil Computations with e^N Transition Prediction Including Transitional Flow Regions. In: AIAA Journal, Band 38(11):S. 2059 – 2066.
- Ströer, P.; Grabe, C. und Krumbein, A. (2019): Assessment and modification of the $\gamma - Re_\theta$ transition model behavior outside the boundary layer. In: A., Dillmann; G., Heller; E., Krämer; C., Wagner; C., Tropea und S., Jakirlić (Hg.) New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XII. DGLR 2018. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Band 142, Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-030-25253-3_12. URL https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-25253-3_12.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2020a): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics at Transonic Flow Conditions. In: AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando, FL, USA. doi: 10.2514/6.2020-0564. AIAA Paper 2020-0564, URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2020-0564>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2020b): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics Including Convection Effects. In: AIAA Journal, Band 85(4):S. 1506–1517. doi: 10.2514/1.J058762. URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.J058762>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2021): Stability-Based Transition Transport Modeling for Unstructured Computational Fluid Dynamics at Transonic Conditions. In: AIAA Journal, Band 59(9):S. 3585 – 3597. doi:10.2514/1.J059892. URL <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.J059892>.
- Ströer, P.; Krimmelbein, N.; Krumbein, A. und Grabe, C. (2022): Galilean-invariant Stability-Based Transition Transport Modeling Framework. In: AIAA Journal, Band 60. doi:10.2514/1.J061401. URL <https://doi.org/10.2514/1.J061401>.
- Ströer, P. und Krumbein, A. (2017): Integration analytischer Nachlaufmodelle in Fernfeld-Randbedingungen für Rotorsimulationen im axialen Flug. In: 18. STAB-Workshop Göttingen, 07.-08. Nov. 2017, Göttingen, Deutschland.
- Sturdza, P. (2004): An aerodynamic design method for supersonic natural laminar flow aircraft. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, USA.

- Sutherland, W. (1893): The viscosity of gases and molecular force. In: *Philosophical Magazine and Journal of Science*, Band 5(36):S. 507–531. doi:10.1080/14786449308620508.
- Theofilis, V (2011): Global linear instability. In: *Annual Review of Fluid Mechanics*, Band 43:S. 319–352.
- Tollmien, W (1935): Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. In: *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe 1*, S. 79–114.
- Uranga, A. (2011): Investigation of transition to turbulence at low Reynolds numbers using Implicit Large Eddy Simulations with a Discontinuous Galerkin method. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA.
- van der Eynde, J.; Steelant, J. und Passaro, A. (2017): Intermittency-based Transition Model with Local Empirical Correlations. In: *21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference*.
- van Driest, E. R. und Blumer, C. B. (1963): Boundary Layer Transition: Freestream Turbulence and Pressure Gradient Effects. In: *AIAA Journal*, Band 1(6):S. 1303–1306.
- van Ingen, J. L. (1956): A Suggested Semi-Empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. Technischer Bericht, Rept. VTH-74, University of Delft, Dept. Aerospace Engineering, Delft, The Netherlands.
- van Ingen, J. L. (1977): Transition, Pressure Gradient, Suction, Separation and Stability Theory. Technischer Bericht, AGARD-CP-224.
- Volino, R. J. (1998): A New Model for Free-Stream Turbulence Effects on Boundary Layers. In: *Journal of Turbomachinery*, Band 120:S. 613–620.
- Walters, D. K. und Cokljat, D. (2008): A three-equation eddy-viscosity model for Reynolds-averaged Navier–Stokes simulations of transitional flow. In: *Journal of Fluids Engineering*, Band 130(12).
- Walters, D. K. und Leylek, J. H. (2004): A new model for boundary layer transition using a single-point RANS approach. In: *Journal of Turbomachinery*, Band 126(1):S. 193–202. doi:10.1115/1.1622709.
- Walz, A. (1966): Strömungs- und Temperaturgrenzschichten. G. Braun, No. 4241, Karlsruhe.
- Wang, L. und Fu, S. (2009): Modelling Flow Transition in a Hypersonic Boundary Layer with Reynolds-Averaged Navier-Stokes Approach. In: *Science in China, Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*, Band 52(5):S. 768 – 774. doi:10.1007/s11433-009-0047-8.

- Wang, L. und Fu, S. (2011): Development of an Intermittency Equation for the Modeling of the Supersonic/Hypersonic Boundary Layer Flow Transition. In: Flow, Turbulence and Combustion, Band 87(1):S. 165 – 187. doi:10.1007/s10494-011-9336-1.
- Wang, L.; Fu, S.; Carnarius, A.; Mockett, C. und Thiele, F. (2012): A Modular RANS Approach for Modelling Laminar-Turbulent Transition in Turbomachinery Flows. In: International Journal of Heat and Fluid Flow, Band 34:S. 62 – 69. doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2012.01.008.
- Wang, L.; Xiao, L. und Fu, S. (2016): A Modular RANS Approach for Modeling Hypersonic Flow Transition on a Scramjet- Forebody Configuration. In: Aerospace Science and Technology, Band 56:S. 112 – 124. doi:10.1016/j.ast.2016.07.004.
- Warren, E. S.; Harris, J. E. und Hassan, H. A. (1995): Transition model for high-speed flow. In: AIAA Journal, Band 33(8):S. 1391 – 1397.
- Warren, E. S. und Hassan, H. A. (1998): Transition Closure Model for Predicting Transition Onset Introduction. In: Journal of Aircraft, Band 35(5):S. 769 – 775.
- Warren, E. W. und Hassan, H. A. (1997): Alternative to the e^n method for determining onset of transition. In: AIAA Journal, Band 36(1):S. 111 – 113.
- Weiss, A.; Gardner, A. D.; Schwermer, T.; Klein, C. und Raffel, M. (2019): On the Effect of Rotational Forces on Rotor Blade Boundary-Layer Transition. In: AIAA Journal, Band 57(1). doi:10.2514/1.J057036.
- Wilcox, D. C. (1994): Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model. In: AIAA Journal, Band 32(2):S. 247 – 255. doi:10.2514/3.59994.
- Wilcox, D. C. (2006): Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, 3. Auflage.
- Würz, W. (1995): Hitzdrahtmessungen zum laminar-turbulenten Strömungsumschlag in anliegenden Grenzschichten und Ablöseblasen sowie Vergleich mit der linearen Stabilitätstheorie und empirischen Umschlagskriterien. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, Deutschland.
- Xu, J.; Qiao, L. und Bai, J. (2020): A CFD-Compatible Amplification Factor Transport Equation for Oblique Tollmien-Schlichting Waves in Supersonic Boundary Layers. In: International Journal of Aerospace Engineering, Band 2020. doi:10.1155/2020/3945463.
- Yang, M. und Xiao, Z. (2019): Distributed roughness induced transition on windturbine airfoils simulated by four-equation $k-\omega-\gamma-A_r$ transition model. In: Renewable Energy, Band 135:S. 1166 – 1177.
- Yang, M. und Xiao, Z. (2020): Improving the $k-\omega-\gamma-A_r$ transition model by the field inversion and machine learning framework. In: Physics of Fluids, Band 32(6):S. 064101–1 – 064101–19.

- Young, T. W.; Warren, E. S.; Harris, J. E. und Hassan, H. A. (1993): New approach for the calculation of transitional flows. In: AIAA Journal, Band 31(4):S. 629 – 636.
- Zhou, L.; Yan, C.; Hao, Z. H. und Du, R. F. (2016): Improved k - ω - γ model for hypersonic boundary layer transition prediction. In: International Journal of Heat and Mass Transfer, Band 94:S. 380 – 389.
- Zwaaneveld, J. (1979): NLR 7301 Airfoil: Experimental Data Base for Computer Program Assessment. Technischer Bericht, AGARD-AR-138.

A Zusammenfassung der Modellgleichungen

A.1 4-Gleichungsmodell

Integrale Grenzschichtgrößen

- Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl:

$$Re_v = \frac{y_w^2 \|\mathbf{S}\|}{\nu} \quad (\text{A.1})$$

$$Re_\theta = \frac{Re_v}{\pi_H} \quad (\text{A.2})$$

mit $\pi_H = \min(5; \max(2, 193; 0, 0717H_{12}^3 - 0, 7319H_{12}^2 + 4, 2563H_{12} - 5, 1743))$

- Formfaktor:

$$\lambda_v = Re_v^2 K = Re_v^2 \frac{\nu}{u_e^2} \frac{du_e}{ds} \quad (\text{A.3})$$

$$u_e = \sqrt{u_\infty^2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1 - \frac{1}{\kappa}} \right] \frac{p_\infty}{\rho_\infty}} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{du_e}{ds} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \cdot \nabla u_e, \quad \text{wobei } \nabla u_e = -\frac{1}{u_e \rho_\infty} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \nabla p \quad (\text{A.5})$$

$$H_{12} = -1, 2433 \lambda_v^4 - 2, 9805 \lambda_v^3 - 2, 2245 \lambda_v^2 - 1, 5196 \lambda_v + 2, 5979 \quad (\text{A.6})$$

Abschirmung der Grenzschicht

$$\Gamma_\delta = e^{-\left(\frac{y_w}{\delta}\right)^4} e^{-\left(\frac{\|\mathbf{S}\| y_w^2}{\nu 10^5}\right)^4} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$\delta = 375 \theta \|\boldsymbol{\Omega}\| \frac{y_w}{\|\mathbf{u}\|_2} \quad (\text{A.8})$$

und

$$\theta = \frac{Re_\theta \nu}{u_e} \quad (\text{A.9})$$

Spezifische Transportgeschwindigkeit

- Gleichungssystem:

$$y_w^2 \nabla(\mathbf{n} \cdot \nabla Re_v) \cdot \mathbf{s}_{Re_v}^* \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{s}_{Re_v}^* \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \times \mathbf{n} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\mathbf{s}_{Re_v}^* - \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.12})$$

- Korrekturfunktionen:

$$\chi_\alpha = \begin{cases} -1; & \alpha > \pi/2 \\ 1; & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.13a})$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{s}_{Re_v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) \quad (\text{A.13b})$$

$$\xi_b = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left[100 \cos^{-1} \left(\chi_\alpha \mathbf{s}_{Re_v} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) - 2000 \right] \right) \quad (\text{A.14})$$

- Finale spezifische Transportgeschwindigkeit:

$$\mathbf{u}_{Re_v} = [(1 - \Gamma_\delta)\mathbf{u} + \Gamma_\delta(\chi_\alpha \mathbf{s}_{Re_v} \|\mathbf{u}\|_2)] \xi_b + (1 - \xi_b)\mathbf{u}, \quad (\text{A.15})$$

wobei $\mathbf{s}_{Re_v} = \mathbf{s}_{Re_v}^* / \|\mathbf{s}_{Re_v}^*\|_2$

Kritische Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl

- Transportgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \widetilde{Re}_{\theta_c}^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \widetilde{Re}_{\theta_c}^* \mathbf{u}_{Re_v}) &= (\mathcal{P} - \mathcal{D})_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} \\ &+ \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t) \sigma_{\theta_c} \nabla \widetilde{Re}_{\theta_c}^* \right) - \mathbb{K}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

mit $\mathbb{K}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} = \widetilde{Re}_{\theta_c}^* \nabla \cdot (\rho (\mathbf{u}_{Re_v} - \mathbf{u}))$, $\sigma_{\theta_c} = 0,0001$ und

$$(\mathcal{P} - \mathcal{D})_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} = \rho \|\Omega\| \mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} \Gamma_\delta \left(\widetilde{Re}_{\theta_c}^* - Re_{\theta_c} \right) \quad (\text{A.17})$$

- Sensorfunktion:

$$\mathcal{F}_{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*} = \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \frac{Re_\theta}{Re_{\theta_c}} \right) \right] \left[\tanh \left(110 - 100 \frac{Re_\theta}{Re_{\theta_c}} \right) + 1 \right] \quad (\text{A.18})$$

- Kompressibilitätserweiterung:

$$\mathcal{F}_{Re_{\theta c}}^* = F_{\mathcal{L}} \frac{1}{4} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} \right) \right] \left[\tanh \left(110 - 100 \frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} \right) + 1 \right] \quad (\text{A.19})$$

$$F_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10 - 100 \frac{\tilde{l}_{c\Sigma}}{\mathcal{L}} \right) \right] \quad (\text{A.20})$$

Mittlerer Druckgradientenparameter

- $\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}$ -Gleichung:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}\mathbf{u}_{Re_v}) = \mathcal{P}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t)\sigma_{\theta c}\nabla\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma} \right) - \mathbb{K}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} \quad (\text{A.21})$$

mit $\mathbb{K}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} = \tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}\nabla \cdot (\rho(\mathbf{u}_{Re_v} - \mathbf{u}))$ und

$$\mathcal{P}_{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}} = \rho \mathcal{F}_{\lambda}\Gamma_{\delta}\|\mathbf{u}\|_2\lambda_{\theta} \quad (\text{A.22})$$

mit

$$\lambda_{\theta} = \frac{\theta^2 du_e}{\nu ds} \quad (\text{A.23})$$

- $\tilde{l}_{c\Sigma}$ -Gleichung:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{l}_{c\Sigma})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{l}_{c\Sigma}\mathbf{u}_{Re_v}) = \mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t)\sigma_{\theta c}\nabla\tilde{l}_{c\Sigma} \right) - \mathbb{K}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} \quad (\text{A.24})$$

mit $\mathbb{K}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} = \tilde{l}_{c\Sigma}\nabla \cdot (\rho(\mathbf{u}_{Re_v} - \mathbf{u}))$ und

$$\mathcal{P}_{\tilde{l}_{c\Sigma}} = \rho \mathcal{F}_{\lambda}\Gamma_{\delta}\|\mathbf{u}\|_2 \quad (\text{A.25})$$

- Sensorfunktionen:

$$\mathcal{F}_{\lambda} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \left(\frac{Re_{\theta}}{Re_{\theta c}} + 10 \frac{\mu_t}{\mu} \Gamma_{\delta} F_{H_{12}} F_l \right) \right) \right] \quad (\text{A.26a})$$

$$F_{H_{12}} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(10^4 - 10^4 H_{12} (\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}/\tilde{l}_{c\Sigma})/2, 65 \right) \right] \quad (\text{A.26b})$$

$$F_l = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10^4 - 10^4 \tilde{l}_{c\Sigma}/y_w \right) \right] \quad (\text{A.26c})$$

- Kompressibilitätserweiterung:

$$\mathcal{F}_\lambda^* = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \left(\frac{Re_\theta}{Re_{\theta c}} + 10 \frac{\mu_t}{\mu} \Gamma_\delta F_{H_{12}} F_l + F_R \right) \right) \right] \quad (\text{A.27})$$

$$F_R = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh(1000 - 100 \widetilde{Re}_{\theta c}^*) \right] \quad (\text{A.28})$$

- Mittlerer Druckgradientenparameter:

$$\bar{\lambda}_\theta = \frac{\widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}}{\widetilde{l}_{c\Sigma}} \mathcal{F}_\lambda + (1 - \mathcal{F}_\lambda) \lambda_\theta \quad (\text{A.29})$$

Transition-Onset Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl

- Original:

$$Re_{\theta t} - Re_{\theta c}^* = -206 e^{25,7\bar{\lambda}_\theta} [\ln(16,8Tu) - 2,77\bar{\lambda}_\theta] \quad (\text{A.30a})$$

$$Re_{\theta c} = e^{\frac{52}{H_{12}} - 14,8} \quad (\text{A.30b})$$

- Kompressibilitätserweiterung:

$$Re_{\theta t} - Re_{\theta c}^* = \mathcal{A} e^{\mathcal{B}\bar{\lambda}_\theta} [\ln(\mathcal{C} Tu) - \mathcal{D}\bar{\lambda}_\theta] \quad (\text{A.31a})$$

$$Re_{\theta c} = e^{\mathcal{E}/H_{12} - \mathcal{F}} \quad (\text{A.31b})$$

Werte für $\mathcal{A}(Ma_e)$, $\mathcal{B}(Ma_e)$, $\mathcal{C}(Ma_e)$, $\mathcal{D}(Ma_e)$, $\mathcal{E}(Ma_e)$ und $\mathcal{F}(Ma_e)$ sind Abschn. 2.6.2 zu entnehmen.

$$a_e = \sqrt{\kappa R_i T_e} \quad \text{mit} \quad T_e = \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} T_\infty \quad (\text{A.32})$$

$$Ma_e = \frac{u_e}{a_e} \quad (\text{A.33})$$

Berechnung Intermittenzfeld

- Möglichkeit 1:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) = \mathcal{P}_\gamma - \mathcal{D}_\gamma + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t/\sigma_\gamma)\nabla\gamma) \quad (\text{A.34})$$

wobei $\sigma_\gamma = 2$

$$\mathcal{P}_\gamma = \rho F_l F_o \|\mathbf{S}\| (1 - \gamma) \quad (\text{A.35})$$

und

$$\mathcal{D}_\gamma = c_1 \rho F_t \|\boldsymbol{\Omega}\| \gamma (c_2 \gamma - 1) \quad (\text{A.36})$$

mit $c_1 = 3/50$ und $c_2 = 50$

$$F_t = e^{-(\frac{\mu_t}{\mu})^4} \quad (\text{A.37})$$

$$F_o = \max(F_{o2} - F_{o3}; 0) \min(1; \mathcal{F}_\lambda + 1 - F_t) \quad (\text{A.38a})$$

$$F_{o1} = \frac{Re_\theta}{Re_{\theta t}} \quad (\text{A.38b})$$

$$F_{o2} = \min(\max(F_{o1}; F_{o1}^4); 2) \quad (\text{A.38c})$$

$$F_{o3} = \max\left(1 - \left(\frac{\mu_t/\mu}{3,5}\right)^3; 0\right) \quad (\text{A.38d})$$

$$F_l = 6 + 24F_{R_T}\mathcal{F}_\lambda\frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(10 - 10\frac{Re_\theta}{400}\right)\right] \quad (\text{A.39})$$

- Möglichkeit 2:

$$\frac{\partial(\rho\tilde{l}_\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\tilde{l}_\gamma) = \mathcal{P}_{\tilde{l}_\gamma} - \mathcal{D}_{\tilde{l}_\gamma} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathcal{P}_{\tilde{l}_\gamma} = \rho\Gamma_\delta\|\mathbf{u}\|_2F_o \quad (\text{A.41})$$

$$\mathcal{D}_{\tilde{l}_\gamma} = \rho\Gamma_\delta\|\mathbf{u}\|_2(1 - F_o) \quad (\text{A.42})$$

$$F_o = \frac{1}{2} \min\left[2; \left(1 + \tanh\left(10^5\frac{Re_\theta}{Re_{\theta t}} - 10^5\right)\right) + \left(1 + \tanh\left(10^5\frac{\mu_t}{15\mu} - 10^5\right)\right)\right] \quad (\text{A.43})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(10^5\frac{\tilde{l}_\gamma}{L} - 10^5\right)\right) \quad (\text{A.44})$$

A.2 3-Gleichungsmodell und 1-Gleichungsmodell

Integrale Grenzschichtgrößen

$$\lambda_{vG} = \frac{y_w^2}{\nu} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.45})$$

$$H_{12} = 0,0031 \lambda_{vG}^2 + 0,1037 \lambda_{vG} + 2,3551 \quad (\text{A.46})$$

$$\lambda_\theta = 0,0015204 \lambda_{vG}^2 - 0,02506 \lambda_{vG} + 0,04696 \quad (\text{A.47})$$

$$\forall -1,5 \leq \lambda_{vG} \leq 7$$

$$Re_\theta = \frac{Re_v}{\pi_H} \quad (\text{A.48})$$

Kritische Impulsverlustdicken-Reynolds-Zahl

$$\tilde{Re}_{\theta c}^* = Re_{\theta c}^* = Re_{\theta c}(H_{12}(\bar{\lambda}_\theta)) \quad (\text{A.49})$$

mit $H_{12}(\bar{\lambda}_\theta) = -354,0245\bar{\lambda}_\theta^3 + 56,9761\bar{\lambda}_\theta^2 - 6,7442\bar{\lambda}_\theta + 2,586$

Mittlerer Druckgradientenparameter

1-Gleichungsmodell

Der lokale Druckgradientenparameter wird für das 1-Gleichungsmodell im Folgenden statt des gemittelten Druckgradientenparameters verwendet, d.h.:

$$\bar{\lambda}_\theta = \lambda_\theta \quad (\text{A.50})$$

3-Gleichungsmodell

- Transportgleichungen:

Für $\phi \in \{\lambda_{\theta\Sigma}, \tilde{l}_{c\Sigma}\}$ mit $\psi \in \{\lambda_\theta, 1\}$:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) = \rho\|\mathbf{S}\|y_w/c_S\psi\mathcal{F}_\lambda\Gamma_\delta + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t)\sigma_\phi\nabla\phi) \quad (\text{A.51})$$

mit $c_S = 0,2$ and $\sigma_\phi \in \{0; 0,1\}$

$$\bar{\lambda}_\theta = \mathcal{F}_\lambda \frac{\tilde{\lambda}_{\theta\Sigma}}{\tilde{l}_{c\Sigma}} + (1 - \mathcal{F}_\lambda)\lambda_\theta \quad (\text{A.52})$$

- Sensorfunktionen:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(90 - 100 \left(\frac{Re_v}{\pi_H Re_{\theta c}} + 10 \frac{\mu_t}{\mu} \Gamma_\delta F_{H_{12}} F_l \right) \right) \right] \quad (\text{A.53a})$$

$$F_{H_{12}} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh (10^4 - 10^4 H_{12}(\bar{\lambda}_\theta) / 2, 65) \right] \quad (\text{A.53b})$$

$$F_l = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(10^4 - 10^4 \frac{\tilde{l}_{c\Sigma}}{y_w} \right) \right] \quad (\text{A.53c})$$

- Abschirmung der Grenzschicht:

$$\Gamma_\delta = e^{-(\|\mathbf{S}\|y_w^2/(\nu 10^4))^8} \quad (\text{A.54})$$

Transition-Onset Impulsverlustdicken Reynolds-Zahl

$$Re_{\theta t} - Re_{\theta c}^* = -206 e^{25,7\bar{\lambda}_\theta} [\ln(16,8Tu) - 2,77\bar{\lambda}_\theta] \quad (\text{A.55a})$$

$$Re_{\theta c} = e^{\frac{52}{\min(2,725; H_{12})} - 14,8} \quad (\text{A.55b})$$

Berechnung Intermittenzfeld

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\gamma) = \mathcal{P}_\gamma - \mathcal{D}_\gamma + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t/\sigma_\gamma)\nabla\gamma) \quad (\text{A.56})$$

mit $\sigma_\gamma = 2$

$$\mathcal{P}_\gamma = \rho\|\mathbf{S}\|F_lF_o(1 - \gamma) \quad (\text{A.57a})$$

$$\mathcal{D}_\gamma = c_1\rho\|\boldsymbol{\Omega}\|F_t\gamma(c_2\gamma - 1) \quad (\text{A.57b})$$

mit $c_1 = 0,06$ und $c_2 = 50$

$$F_o = \min(1; \mathcal{F}_\lambda + 1 - F_t) (1 - \tanh(10^5 - 10^5\xi)) \quad (\text{A.58a})$$

$$\xi = \left(\frac{Re_v}{\pi_H Re_{\theta t}}\right)^4 + \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)^2 + \gamma^2 \quad (\text{A.58b})$$

$$F_l = 6 + 24F_{RT}\mathcal{F}_\lambda\frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(10 - 10\frac{Re_\theta}{400}\right)\right] \quad (\text{A.59})$$

$$F_t = e^{-\left(\frac{\mu_t/\mu}{3}\right)^4} \quad (\text{A.60})$$

Ablösungsinduzierte Transition und effektive Intermittenz

$$\gamma_{\nabla p} = c_1 F_{\nabla p} F_{Re_\theta} F_\gamma F_{\mu_t} \mathcal{F}_\lambda \Gamma_\delta F_{Re} \quad (\text{A.61})$$

mit $c_1 = 5$

$$F_{\nabla p} = \frac{1}{2} (1 - \tanh(20 - 20H_{12}/3, 25)) \quad (\text{A.62a})$$

$$F_{\mu_t} = \max(3 - \mu_t/\mu; 0) \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(4 - 4\frac{(\mu_t/\mu + F_{sep1})}{0,15}\right)\right] \quad (\text{A.62b})$$

mit $F_{sep1} = \frac{1}{2} [1 - \tanh(10^4 - 10^4 H_{12}/3, 5)]$

$$F_\gamma = \max(\gamma - 0, 2; 0) \quad (\text{A.62c})$$

$$F_{Re_\theta} = \min\left[1; F_{sep2} + \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(10^3 - 10^3\frac{Re_\theta}{350}\right)\right)\right] \quad (\text{A.62d})$$

mit $F_{sep2} = \frac{1}{2} [1 - \tanh(10^2 - 10^2 H_{12}/3, 3)]$

$$F_{Re} = \frac{1}{2} (1 + \tanh(10^4 - 10^4 Re/10^6)) \quad (\text{A.62e})$$

$$\gamma_{eff} = \min(2; \gamma + \gamma_{\nabla p}) \quad (\text{A.63})$$

A.3 Randbedingungen

- $\phi \in \{\widetilde{Re}_{\theta_c}^*, \widetilde{\lambda}_{\theta\Sigma}, \widetilde{l}_{c\Sigma}, \widetilde{l}_\gamma\}$:

Wand:

$$(\nabla\phi \cdot \mathbf{n})|_w = 0 \quad (\text{A.64})$$

Fernfeldrand:

$$\phi_\infty = 0 \quad (\text{A.65})$$

Initialbedingungen:

$$\phi(\mathbf{x}, t^* = 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{A.66})$$

- γ -Gleichung:

Fernfeld:

$$\gamma_\infty = 1 \quad (\text{A.67})$$

Initialbedingung:

$$\gamma(\mathbf{x}, t^* = 0) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{A.68})$$

Wand:

$$(\nabla\gamma \cdot \mathbf{n})|_w = 0 \quad (\text{A.69})$$

A.4 Kopplung an das $k - \omega$ -SST-Wirbelviskositätsmodell

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) = \gamma \mathcal{P}_k - \max(\gamma; 0, 1) \mathcal{D}_k + \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k) \quad (\text{A.70})$$

Je nach Modellvariante ist hier γ durch γ_{eff} zu ersetzen.

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{u}) = \mathcal{P}_\omega - \mathcal{D}_\omega + \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega) + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega^2}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (\text{A.71})$$

$$F_1 = \max(F_{1orig}; F_{1lam}) \quad \text{mit} \quad F_{1lam} = e^{-(y_w \sqrt{k} / (120\nu))^8} \quad (\text{A.72})$$

B Implementierung und Lösungsverhalten

Generell gilt es zu beachten, dass das Lösungsverhalten partieller Transportdifferentialgleichungen stark löserabhängig ist. Nachfolgend sollen einige numerische Details der Implementierung und des Modellverhaltens für den Strömungslöser DLR-TAU dargestellt werden. TAU ist ein kompressibler, unstrukturierter, Finite-Volumen Navier-Stokes Strömungslöser.

Die Konvektionsterme der Hauptströmungsgleichungen werden mit einem zentralen Schema und zusätzlicher Matrixdissipation diskretisiert. Für Strömungen tiefer Mach-Zahl wird, um eine korrekte Skalierung dieser künstlichen Dissipation sicherzustellen, eine Vorkonditionierung (sogenanntes *Low Mach number preconditioning*) verwendet. Zur Konvergenzbeschleunigung wird ein Mehrgitterverfahren angewendet. Für die Turbulenz- und neuen Transitions-gleichungen wird darauf aus Gründen der Stabilität verzichtet. Abgesehen von wenigen nachfolgend diskutierten Ausnahmen werden die zusätzlichen Gleichungen analog zu den Transportgleichungen des Turbulenzmodells behandelt.

B.1 Zeitliche Integration und Quellterme

Die zeitliche Integration erfolgte im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit einem impliziten Euler-Schema in Verbindung mit einem LUSGS-Lösungsalgorithmus analog zu den Gleichungen des Turbulenzmodells. Die CFL-Zahl wird identisch zu den Hauptströmungsgleichungen und dem Turbulenzmodell gewählt. Die Quellterme werden entsprechend definiert. D.h. neben der expliziten Definition existieren Funktionen, die implizite Terme bereitstellen.

B.2 Konvektionsterm

Die Konvektionsterme werden analog zum Turbulenzmodell mit einem numerischen Roe-Schema diskretisiert. Im Gegensatz zum Turbulenzmodell ist eine Extrapolation zu den *Faces* (Seitenflächen des Kontrollvolumens) deaktiviert. Für das 4-Gleichungsmodell wurde in allen Fällen, die Geschwindigkeit \mathbf{u} durch die spezifische Transportgeschwindigkeit \mathbf{u}_{Re_v} ersetzt. Das Konvergenzverhalten ist in den untersuchten Fällen unabhängig von der verwendeten Konvektionsgeschwindigkeit ähnlich. In den im Folgenden gezeigten Testfällen wird der Fall mit spezifischer Transportgeschwindigkeit betrachtet.

B.3 Konvergenzverhalten

Es gilt zu beachten, dass es sich im Gegensatz zu den Hauptströmungsgleichungen bei den zusätzlichen Differentialgleichungen um keine physikalischen Erhaltungsgleichungen handelt. Die zusätzlichen skalaren Gleichungen sind so hergeleitet, dass die Struktur einer Transportgleichung erhalten bleibt und durch entsprechend konstruierte Produktions-/Destruktionsterme eine bestimmte Operation gitterpunktlokal ermöglicht wird. Daher werden an diversen Stellen Funktionen verwendet, die ein quasi-unstetiges Schalten¹⁸ realisieren, was die Steifheit der Gleichungen erhöht und die numerische Lösung erschwert.

B.3.1 Eppler 387-Profil

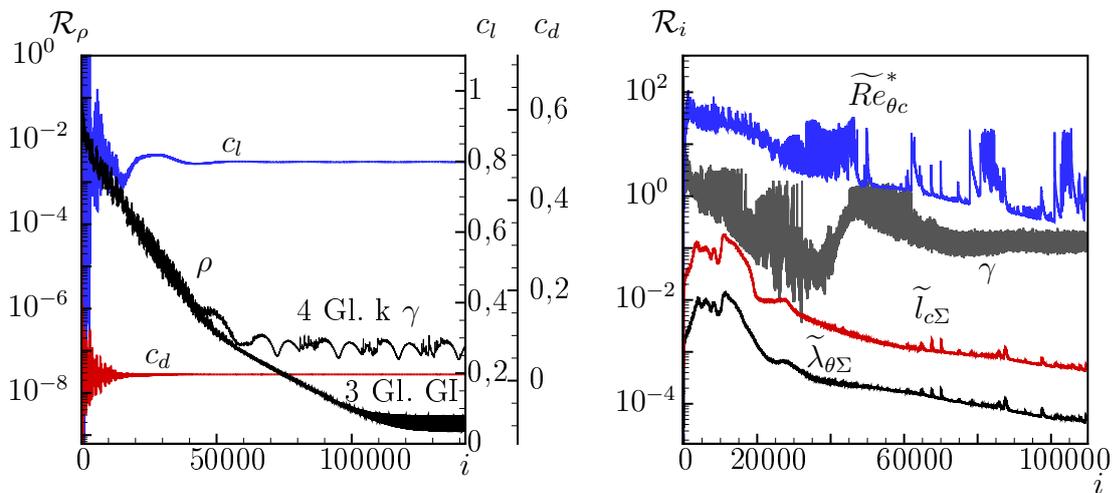


Abbildung B.1: Residuenverläufe für das 4-Gleichungsmodell (4 Gl. k γ): Dichteresiduum (zusätzlich für das 3 Gl. GI-Modell) und integrale Beiwerte (*links*) sowie nicht-normierte Residuen zusätzlicher Transitionsgleichungen (*rechts*)

Das Konvergenzverhalten der zusätzlichen Gleichungen soll an zwei Testfällen demonstriert werden. Mit dem Eppler 387-Profil liegt ein Fall vor, bei dem Transition über eine laminare Ablöseblase stattfindet. Hierbei gilt es zu beachten, dass das 4-Gleichungsmodell keinen Zusatzterm verwendet, der eine verstärkte Turbulenzproduktion und schnelleres Schließen der Ablöseblase erzwingt (vgl. Kap. 3). Das Dichteresiduum fällt daher für das 3-Gleichungsmodell zwei Größenordnungen tiefer als das 4-Gleichungsmodell (Abb. B.1, *links*).

¹⁸Auch wenn die häufig verwendeten Tangens Hyperbolicus-Funktionen an sich stetig differenzierbar sind, kann das Schalten je nach Konstruktion dieser Funktionen vom Löser als quasi-unstetig/sprunghaft empfunden werden.

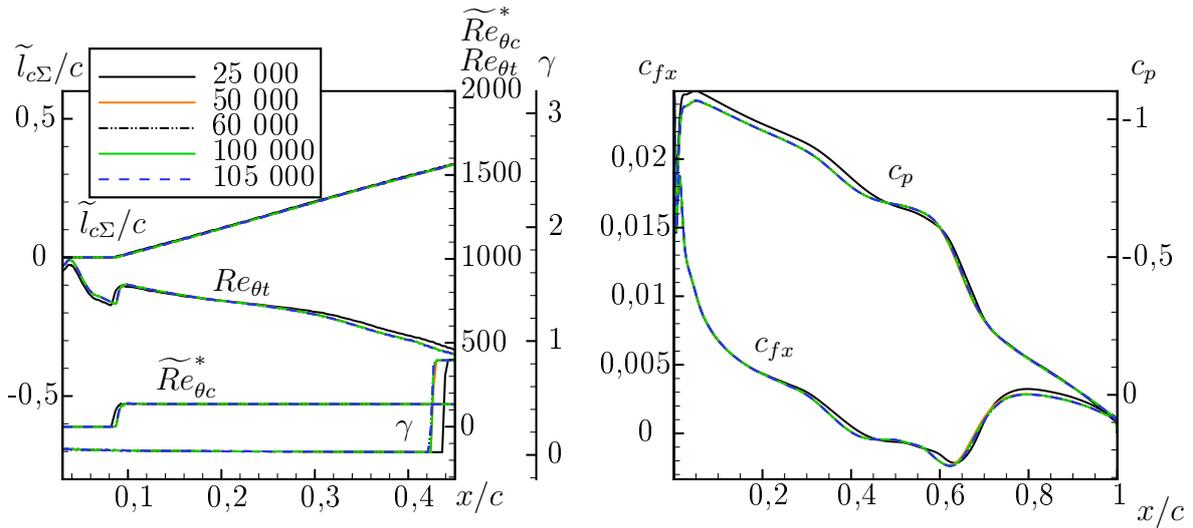


Abbildung B.2: Feldlösungen der zusätzlichen Gleichungen des 4-Gleichungsmodells (4 Gl. k γ) an der wandnormalen Position y_{wR} (links) sowie c_p - und c_f -Verläufe (rechts) für unterschiedliche Iterationszahlen

Im Folgenden soll die Konvergenz der zusätzlichen Gleichungen für das 4-Gleichungsmodells analysiert werden (Abb. B.1, rechts). Generell kann hierbei kein Fallen des Residuums auf Maschinengenauigkeit erwartet werden kann. Wie einleitend beschrieben, ist diese Art zusätzlicher Gleichungen aufgrund vieler sprunghaft steigender oder fallender Funktionen mathematisch besonders steif. Zusätzlich gilt es zu beachten, dass es sich bei den gezeigten Residuen um quadratische Mittelwerte handelt (sogenannte RMS-Residuen). D.h. auch, wenn die Gleichungen innerhalb der Grenzschicht konvergieren, können Werte außerhalb der Grenzschicht den quadratischen Mittelwert dominieren. Anhand der Feldlösung an der Stelle y_{wR} sowie der c_p - und c_f -Verläufe kann jedoch gezeigt werden, dass die Gleichungen, sobald ihre Residuen um zwei oder drei Größenordnungen gefallen sind, eine hinreichend genaue und zeitlich konstante Lösung liefern (Abb. B.2). So liegen die Lösungen nach 50000 Iterationen in allen Werten nahezu exakt aufeinander. Selbst bei 25000 Iterationen (Dichteresiduum zwischen $\mathcal{O}(10^{-4})$ und $\mathcal{O}(10^{-5})$) sind die zusätzlichen Gleichungen schon nah an ihrem konvergierten Zustand.

B.3.2 CAST 10-2-Profil

Als zweiter Testfall wird das CAST 10-2-Profil gezeigt. Es ist ersichtlich, dass die Residuen für sehr hohe Iterationszahlen deutlich fallen (Abb. B.3). Das Dichteresiduum fällt ungefähr auf Maschinengenauigkeit. Die weiteren Residuen fallen später. Das ist sinnvoll, da die Hauptströmungsgleichungen Konvergenzbeschleunigungstechniken verwenden und die Lösungen der zusätzlichen Gleichungen auf der Lösung der Hauptströmungsgleichungen basieren. So ist unabhängig von der Art und Steifheit der zusätzlichen Gleichungen zu erwarten, dass diese langsamer konvergieren.

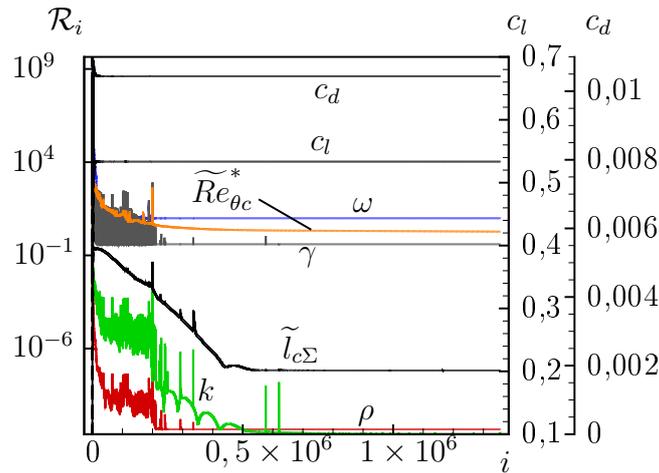


Abbildung B.3: Residuenverläufe für das 4-Gleichungsmodell (4 Gl. k γ): Dichteresiduum und integrale Beiwerte sowie nicht-normierte Residuen zusätzlicher Gleichungen

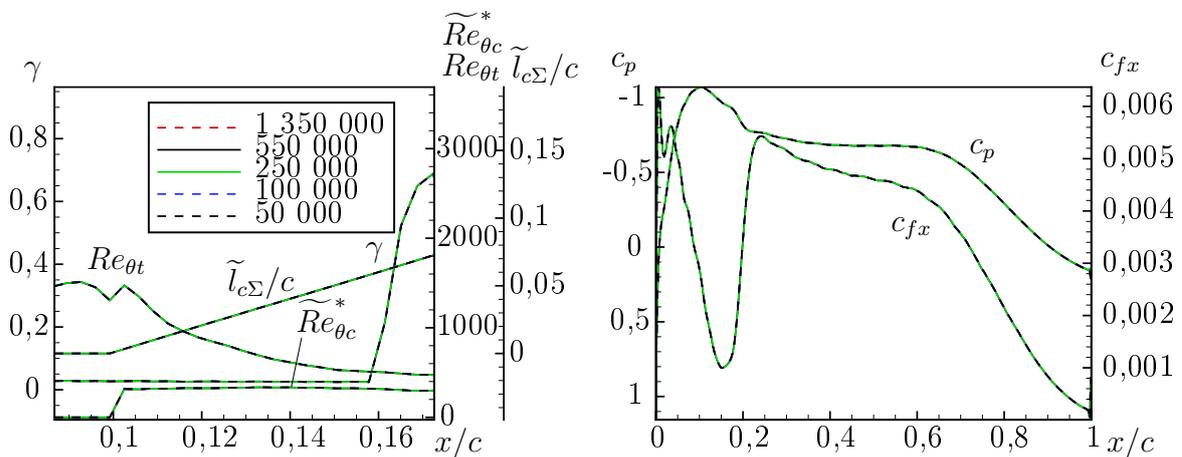


Abbildung B.4: Feldlösungen der zusätzlichen Gleichungen des 4-Gleichungsmodells (4 Gl. k γ) an der wandnormalen Position y_{wR} (links) sowie c_p - und c_f -Verläufe (rechts) für unterschiedliche Iterationszahlen

Auch für dieses Profil ist anhand der Feldlösung an der Stelle y_{wR} (Abb. B.4) zu erkennen, dass sich, auch wenn die Residuen der zusätzlichen Gleichungen erst um ca. zwei Größenordnungen gefallen sind (vgl. Abb. B.3, $i \approx 50000$), eine stabile und konstante Feldlösung einstellt (Abb. B.4, $i = 50000$), die identisch zur Lösung bei tiefen Residuen und hohen Iterationszahlen ist. Für sehr hohe Iterationszahlen fallen jedoch auch die Residuen der zusätzlichen Gleichungen deutlich und die überlagerten hochfrequenten Schwingungen scheinen gedämpft.

B.3.3 Schlussfolgerungen

Die diskutierten Testfälle zeigen, dass die Aussagekraft der RMS-Residuen für diese Art von zusätzlichen Gleichungen begrenzt ist. Erfahrungsgemäß kann ein Fallen des RMS-Residuums um zwei Größenordnungen als hinreichend betrachtet werden.

Zusätzlich kann die Sinnhaftigkeit der Lösungen einfach überprüft werden: So wird bspw. für die $\tilde{l}_{c\Sigma}$ -Gleichung ein lineares Anwachsen in Strömungsrichtung und für die $\widetilde{Re}_{\theta_c}^*$ -Gleichung eine Produktion am kritischen Punkt und ein konstanter Transport stromab dieser Position erwartet (vgl. Abb. B.2, *links* und Abb. B.4, *links*).