

Proceso NHPP y política óptima de mantenimiento sobre sistemas reparables con función de intensidad de falla Log-normal Weibull modificada.

NHPP process and optimal policy of maintenance on repairable systems with fault intensity function log-normal Modified Weibull

Raquel Vargas Correa

Director:

Ph.D. Nelfi Gertrudis González Álvarez.
Profesora Asociada Escuela de Estadística

**Maestría en Ciencias - Estadística
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Octubre de 2021**

Índice general

Índice general	2
Índice de figuras	4
Índice de tablas	5
Nomenclatura	6
1 Introducción	8
1.1. Resumen ejecutivo	8
1.2. Abstract	8
1.3. Planteamiento del problema	9
1.4. Objetivos	10
1.4.1. Objetivo general	10
1.4.2. Objetivos específicos	10
2 Estado del arte	11
3 Conceptos teóricos	16
3.1. Mantenimiento óptimo	16
3.2. Conceptos básicos de los procesos de conteo	21
3.3. Datos de sistemas reparables	21
3.4. Reparación perfecta	22
3.5. Reparación imperfecta	22
3.6. Reparación mínima	24
3.7. Proceso Poisson no homogéneo (NHPP)	24
3.8. Estimación no paramétrica del número esperado de fallas para un sistema	25
3.9. Estimación de máxima verosimilitud para procesos Poisson no homogéneos	25
3.10. Función de intensidad de un NHPP general	26
3.11. Algunas distribuciones de vida con función tasa de falla en forma de bañera	27

3.11.1. Distribución Weibull modificada	27
3.11.2. Distribución de vida Log-normal Weibull modificada	29
3.11.3. Distribución nueva Weibull modificada de Almalki y Yuan	31
3.12. Procesos superpuestos basados en la mezcla de NHPP	33
3.12.1. Proceso Log lineal superpuesto (S-LLP)	33
3.12.2. Proceso de intensidad de falla acotado en forma de bañera (BBIP)	34
3.12.3. Proceso ley potencia superpuesto (S-PLP)	36
4 Proceso Poisson no homogéneo con intensidad de falla Log-normal Weibull modificada y comparación en el ajuste con otros NHPP	39
4.1. Proceso Poisson no homogéneo con intensidad de falla Log-normal Weibull modificada	39
4.2. Estimación por máxima verosimilitud	41
4.3. Medidas de desempeño	42
4.3.1. Medidas por realización del proceso	42
4.3.2. Medidas agregadas	43
4.4. Simulación de los datos	43
4.5. Resultados	46
4.6. Comparación de NHPP con datos reales	48
4.6.1. Resultados del ajuste para datos reales	50
5 Mantenimiento preventivo óptimo	53
5.1. Planteamiento mantenimiento preventivo óptimo	53
5.2. Resultados del mantenimiento óptimo para las aplicaciones	54
6 Conclusiones y recomendaciones	62
A Desarrollo resultados matemáticos	64
A.1. Número esperado de fallas NHPP LNWM	64
A.2. Derivadas log-verosimilitud para μ	65
A.3. Derivadas log-verosimilitud para σ	66
A.4. Derivadas log-verosimilitud para β	68
A.5. Derivadas log-verosimilitud para η	68
B Algoritmos de optimización	69
B.1. Algoritmo de recocido simulado generalizado para optimización global	69
B.2. Método de Nelder-Mead	70
B.3. Método Blend	70
C Funciones y código en R	72
C.1. Funciones de los NHPP	72
C.2. Funciones de log-verosimilitud de los NHPP	74
C.3. Funciones para simular las escenasarios	76
C.4. Funciones para las medidas de desempeño	77

C.5. Código del MPO	79
Bibliografía	81

Índice de figuras

2.1. <i>Hazard</i> en forma de bañera.	14
4.1. Comportamiento de la intensidad de falla $\lambda_{LNWM}(t)$ y el número esperado de falla $\Lambda_{LNWM}(t)$	40
4.2. Escenarios de simulación (a), (b), (c), (d)	44
4.3. Escenario de simulación (e)	45
4.4. Algunas realizaciones de los procesos simulados por cada escenario. El eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la estimación no paramétrica del número esperado de fallas. La curva color negro corresponde al valor real del número esperado de fallas bajo el modelo NHPP simulado.	46
4.5. Resultados del ajuste de los NHPP para el camión de basuras	50
4.6. Resultados del ajuste de los NHPP para la máquina de carga, transporte y descarga	51
5.1. Intensidad de fallas con los parámetros estimados para la aplicación vs tiempo para cada especificación en la aplicación del camión de basuras. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.	57
5.2. Intensidad de fallas bajo el MP óptimo vs tiempo para cada especificación en la aplicación del camión de basuras. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.	58
5.3. Intensidad de fallas con los parámetros estimados para la aplicación vs tiempo para cada especificación en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.	60
5.4. Intensidad de fallas bajo el MP óptimo vs tiempo para cada especificación en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.	61

Índice de tablas

4.1. Resultados del ajuste para el escenario (a)	47
4.2. Resultados del ajuste para el escenario (b)	47
4.3. Resultados del ajuste para el escenario (c)	48
4.4. Resultados del ajuste para el escenario (d)	48
4.5. Resultados del ajuste para el escenario (e)	48
4.6. Tiempos de falla en horas de la máquina de carga, transporte y descarga	49
4.7. Tiempos de falla en horas del camión de basura	49
4.8. Medidas de error medio de ajuste para cada uno de los ajustes de la aplicación del camión de basuras	50
4.9. Valores estimados de los parámetros de los tiempos de falla del camión de basuras .	51
4.10. Medidas de error medio de ajuste para cada uno de los ajustes para las fallas de la máquina de carga, transporte y descarga	52
4.11. Valores estimados de los parámetros para los tiempos de falla de la máquina de carga, transporte y descarga	52
5.1. Valores estimados para los parámetros del proceso ajustado LNWM en las dos aplicaciones	54
5.2. ξ_i óptimos en la aplicación del camión de basuras para cada especificación.	56
5.3. Costo por unidad de tiempo mínimo en la aplicación del camión de basuras para cada especificación.	56
5.4. ξ_i óptimos en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga, para cada especificación.	59
5.5. Costo por unidad de tiempo mínimo en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga, para cada especificación.	59

Nomenclatura

V_{Δ}	Coficiente de variación de la desviación absoluta promedio
V_{Δ}^*	Coficiente de variación de la desviación máxima absoluta
C_{MP}	Costo unitario mantenimiento preventivo
C_{MR}	Costo unitario reparación mínima
Δ_k	Desviación absoluta promedio
Δ_k^*	Desviación máxima absoluta
δ_k	Error absoluto promedio
δ_k^*	Error máximo absoluto
$F(t)$	Función acumulada de probabilidad
$f(t)$	Función de densidad de probabilidad
$l(\cdot)$	Función de log-verosimilitud
$L(\cdot)$	Función de verosimilitud
$H(t)$	Función hazard acumulada o tasa de falla acumulada asociada a $F(t)$
$h(t)$	Función hazard o tasa de falla instantánea asociada a $F(t)$
ρ	Grado de mejora bajo el mantenimiento preventivo (MP)
$\lambda(t)$	Intensidad de falla del proceso de conteo de fallas
MP	Mantenimiento preventivo
$\hat{\Delta}$	Media muestral de la desviación absoluta promedio

$\hat{\Delta}^*$	Media muestral de la desviación máxima absoluta
$\hat{\delta}$	Media muestral del error absoluto promedio
$\hat{\delta}^*$	Media muestral del error máximo absoluto
m	Número de acciones programadas en el mantenimiento preventivo (MP)
$N(t)$	Número de fallas
$\Lambda(t)$	Número esperado de fallas
HPP	Proceso Poisson homogéneo
$NHPP$	Proceso Poisson no homogéneo
ξ	Puntos de control para el mantenimiento preventivo (MP)
t	Tiempo del sistema
T_j	Tiempo donde ocurre la j-ésima falla
τ_i	Tiempo entre fallas
ϵ	Unidades de tiempo que se observara un sistema

Capítulo 1

Introducción

1.1. Resumen ejecutivo

El análisis de equipos reparables ha sido un tema con gran desarrollo en confiabilidad. Un acercamiento común al modelamiento de este tipo de sistemas es por medio procesos de conteo, entre ellos los procesos Poisson. Dentro de los procesos Poisson existen los homogéneos que tienen tasa constante y los no homogéneos donde la tasa de recurrencia depende del tiempo. En la literatura existen dos modelos de procesos Poisson no homogéneos (NHPP) que son ampliamente difundidos: el modelo ley potencia y el modelo log lineal, pero ambos modelos son incapaces de modelar tasas de recurrencia de procesos falla/reparo en forma de bañera, es decir una tasa de recurrencia caracterizada por tres periodos: “mortalidad infantil”, “vida útil” y “desgaste”. Existen alternativas para modelar tasas de recurrencia en forma de bañera, pero modelar tasas de falla en forma de bañera donde la parte de “vida útil” sea “plana” presenta dificultades. Este trabajo consiste en la adaptación de una distribución de vida con *hazard* flexible en un modelo NHPP que pueda modelar tasas de falla en forma de bañera con parte plana extendida, y adicional a esto, plantear un modelo de mantenimiento preventivo óptimo bajo el supuesto de reparación mínima con este nuevo modelo NHPP.

Palabras claves: Intensidad de falla en forma de bañera, reparación imperfecta, reparación mínima, proceso de Poisson no homogéneo, mantenimiento preventivo óptimo, modelo proporcional de reducción de la edad.

1.2. Abstract

The analysis of repairable equipment has been a subject with great development in reliability. A common approach to modeling this type of system is through counting processes, including Poisson processes. Within the Poisson processes there are homogeneous ones that have a constant rate and non-homogeneous ones where the recurrence rate depends on time. In the literature

there are two models of non-homogeneous Poisson processes (NHPP) that are widely spread: the power law model and the linear log model, but both models are unable to model recurrence rates of failure/repair processes in the form of a bathtub, that is, say a recurrence rate characterized by three periods: “infant mortality”, “service life” and “attrition”. There are alternatives to modeling bathtub-shaped recurrence rates, but modeling bathtub-shaped failure rates where the “service life” part is “flat” presents difficulties. This work consists of the adaptation of a life distribution with flexible *hazard* in an NHPP model that can model failure rates in the form of a bathtub with an extended flat part, and in addition to this, propose an optimal preventive maintenance model under the minimum repair assumption with this new NHPP model.

Keywords: Bathtub-Shaped Failure Intensity, Imperfect Repair, Minimal Repair, Nonhomogeneous Poisson Process, Optimal Preventive Maintenance, Proportional Age-Reduction Model.

1.3. Planteamiento del problema

En la industria todos los sistemas están expuestos a fallar, con disposición a la falla dependiendo del tipo de sistema, de las condiciones de uso y según si han sido sujetos a cambios debidos a intervenciones, sin importar si son sistemas reparables o no reparables.

Con respecto a la confiabilidad de sistemas reparables, entendiéndose por sistema reparable aquél que cuando falla puede ser llevado nuevamente a funcionamiento sin tener que reemplazar todas sus partes (Rigdon y Basu, 2000), es de gran interés modelar la cantidad de fallas en un periodo de tiempo y cómo las fallas se distribuyen en éste. Cada sistema tiene su propio patrón de falla y entre todos estos existen sistemas reparables que pasan por tres tipos de fases desde el comienzo de su funcionamiento: la primera fase es llamada mortalidad infantil y es usual que en este periodo se observen muchas fallas causadas por problemas de manufactura y/o en la calidad de las partes del sistema que conducen a fallas tempranas; la segunda fase es conocida como periodo de vida útil caracterizado por una tasa de falla constante, y la tercera fase corresponde a un periodo de desgaste, donde la tasa de falla se torna creciente (Block y Savits, 1997).

Cuando se analiza la estimación no paramétrica de la tasa de recurrencia de estos sistemas, se observa una tasa de falla inicial alta, seguido por un periodo de tasa de falla constante, la cual aumenta al final, dando como resultados intensidades de falla no monótonas en forma de bañera. Usualmente la primera fase de falla del sistema no es observada por el usuario final, dado que existen procesos como el *burn-in* que tienen como propósito descubrir defectos de los sistemas antes que llegue a éste, pero hay ocasiones donde no es posible hacer *burn-in* de los equipos (Mun, Bae y Kvam, 2013) o éste no se hace efectivamente.

Bajo el supuesto de reparación mínima se puede usar un NHPP, para modelar fallas en equipos reparables, es posible usarlo incluso bajo funciones de intensidad de falla no monótonas, pero con los modelos clásicos no era posible modelar tasas de falla en forma de bañera con parte plana extendida, afortunadamente ha habido un gran desarrollo para el análisis de vida en el área de *hazard* hiperflexibles (Zeng y col., 2016; Almalki y Yuan, 2013; Xie, Tang y col., 2002; F. Wang, 2000) y con el resultado expuesto por Krivtsov (2007), es posible llegar a nuevos modelos de NHPP con las características deseadas. En particular se desea adaptar la distribución de vida

Log-normal Weibull modificada para el análisis de equipos reparables, y posteriormente crear un plan de mantenimiento óptimo con reparo mínimo.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el Capítulo 2 se hace una revisión del estado del arte, donde se especifica sobre diferentes sistemas reparables, niveles de información de un sistema, procesos de conteo, diferentes tipos de reparación, políticas de mantenimiento y *hazards* en forma de bañera. En el Capítulo 3 se hace un repaso por diferentes conceptos teóricos; mantenimiento óptimo, tipos de reparación, conceptos básicos de los procesos de conteo, proceso Poisson no homogéneo, datos de sistemas reparables, estimaciones no paramétricas y de máxima verosimilitud para el número esperado de falla, algunas distribuciones con función *hazard* en forma de bañera y procesos Poisson no homogéneos con intensidades de falla no monótonas. En el Capítulo 4 se describe el nuevo proceso Poisson propuesto con base en la función Log-normal Weibull modificada, se describe el proceso de simulación de los datos y se compara el ajuste con datos simulados y reales. Finalmente, en el Capítulo 5 se plantea el mantenimiento preventivo óptimo usando los resultados del Capítulo 4.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

- Derivar un Proceso de Poisson no homogéneo basado en la distribución de vida Log-normal Weibull modificada, para proporcionar una alternativa en la modelación de las fallas de sistemas reparables con intensidad en forma de bañera y formular con este nuevo proceso una estrategia de mantenimiento preventivo óptimo.

1.4.2. Objetivos específicos

- Usar la metodología de Krivstov (2007) para definir la función de intensidad y el número esperado de falla de un proceso de Poisson no homogéneo (NHPP) generado por la sucesión de las fallas de sistemas reparables bajo reparo mínimo, usando como distribución de vida base la Log-normal Weibull modificada y derivar los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de este proceso Poisson.
- Comparar el ajuste del proceso NHPP propuesto con otros modelos encontrados en la literatura en la modelación de las fallas de sistemas reparables cuya intensidad tienen forma de bañera, a través de datos simulados de fallas recurrentes y con datos reales.
- Hacer una revisión de los modelos de mantenimiento preventivo sobre sistemas reparables cuyos procesos de falla son modelables con procesos NHPP, para proponer una estrategia de mantenimiento óptimo basada en el NHPP propuesto.

Capítulo 2

Estado del arte

En confiabilidad los sistemas de componentes y equipos son usualmente divididos en reparables y no reparables, siendo los equipos reparables aquellos que una vez se presenta una falla, éste puede ser llevado nuevamente a funcionamiento sin tener que reemplazar todas las partes del sistema (Rigdon y Basu, 2000). Cabe resaltar que, aunque exista la posibilidad de arreglar sólo partes de éste, por la dificultad del mantenimiento se puede llegar a la decisión de reemplazar todo el sistema (Mun y Bae, 2014).

Con relación a la historia de eventos, se puede tener diferentes niveles de información de un sistema. En Gámiz y col. (2011) se describen tres tipos de aproximaciones:

- *Caja – negra*: Modela la relación entre el tiempo y la falla, pero no evalúa información sobre las condiciones de operación y esta información tampoco es incorporada en la recolección de datos. Las técnicas estadísticas de este nivel se enfocan en hacer inferencias sobre la función de tasa de falla, la función de tasa de falla acumulada, la función de supervivencia, entre otros.
- *Caja – gris*: Modela la incertidumbre temporal asociada con la evolución de las propiedades de desempeño del sistema, considerando cantidades medibles de deterioro y falla como dependientes en el tiempo, es decir, modelando un proceso estocástico.
- *Caja – blanca*: En esta aproximación se modela la relación entre el estado del sistema y de sus componentes a lo largo del tiempo, en este sentido, se basa en modelos que consideran el comportamiento físico intrínseco del sistema y pueden incluso considerar variables exógenas y endógenas (covariables) como factores determinantes del deterioro del sistema.

En nuestro caso nos enfocaremos en los sistemas reparables, y suponemos una aproximación de *Caja – gris*. Según Lindqvist (2006) el análisis de equipos reparables está tradicionalmente enfocado en modelar tiempos de falla por medio de procesos puntuales, específicamente procesos

de conteo, siendo los procesos de renovación y los procesos Poisson los más utilizados; otro tipo de modelos usados con regularidad son los procesos de tendencia-renovación, modelos de edad virtual y procesos geométricos.

Uno de los principales retos al modelar sistemas reparables es determinar el efecto de los mantenimientos o reparaciones; dos de los tipos de mantenimiento más trabajados son reparación perfecta y reparación mínima los cuales dejan respectivamente los sistemas en un estado conocido como “tan bueno como nuevo” y “tan malo como viejo”, como se describe en Barlow y Hunter (1960); Aven (1983); Aven y Jensen (2000). Para modelar este tipo de procesos se pueden usar procesos de renovación y procesos Poisson respectivamente, aunque también se podría modelar equipos en degradación por medio de procesos geométricos. Otros trabajos hablan de efectos de reparaciones que dejan al sistema en mejores condiciones que la reparación mínima pero no como nuevo (Tsai y col., 2011; Pham y H. Wang, 1996; Shin y col., 1996; Malik, 1979), métodos para modelar reparación imperfecta son usados para este tipo de reparaciones. También se habla de efectos de mantenimiento que dejan el sistema en peores condiciones que antes, éstas pueden ser modeladas por procesos de nacimiento puro no homogéneos (Chien, 2019). En la búsqueda de mantenimiento óptimo se pueden combinar estrategias de reparaciones mínimas, mantenimiento imperfecto y mantenimiento perfecto (Mun, Bae y Kvam, 2013; Barlow y Hunter, 1960; Gilardoni y Colosimo, 2007).

El objetivo del mantenimiento óptimo es frecuentemente minimizar los costos manteniendo el sistema en una condición óptima y segura (Pham y H. Wang, 2006; Sherif y Smith, 1981); las políticas de mantenimiento óptimo son planteadas bajo múltiples supuestos, desde los efectos de los mantenimientos, como consideraciones sobre el tipo de inspección, nivel de conocimiento del sistema, sistemas de unidad única o unidad múltiple, tipos de modelos, criterio de optimización, métodos de solución, y planificación en el horizonte de tiempo (Sharma y col., 2011).

Dos políticas de mantenimiento óptimo iniciales son propuestas en Barlow y Hunter (1960); la primera política consiste en una combinación de mantenimiento preventivo perfecto con acciones correctivas perfectas y la segunda consiste en la combinación de mantenimiento preventivo perfecto con acciones correctivas de reparación mínima. La combinación de mantenimiento preventivo con acciones de mantenimiento mínimo es uno de los focos de este trabajo y ha sido principalmente desarrollado en Gertsbakh (1977); Block, Borges y col. (1990); Park y col. (2000); K. Lai y col. (2001); Gilardoni y Colosimo (2007); Mun, Bae y Kvam (2013). También se encuentra en el desarrollo de este tipo de políticas de mantenimiento, estrategias para múltiples sistemas coherentes (Hashemi y col., 2020) o sistemas con dos modos de falla (Colosimo y col., 2010). Otros estudios sobre varios modos de falla con diferentes políticas de mantenimiento, pueden encontrarse en Kim y Makis (2009); Zheng y col. (2016) y sobre sistemas coherentes en Navarro y col. (2019).

Algunos modelos de reemplazo clásicos suponen que el ciclo de operación del sistema se repite indefinidamente y calculan el costo esperado usando teoría de renovación (Sheu y col., 2019), usualmente la estrategia de mantenimiento permanece estática, y para ello existen alternativas que permiten usar la información más actual del sistema; una de las más conocidas se conoce como criterio de un ciclo, propuesta en Mazzuchi y Soyer (1996) y desarrollada para varias políticas de inspección en Coolen-Schrijner y Coolen (2007); Sheu y col. (2019). Otra posible estrategia es propuesta en Gilardoni, Guerra De Toledo y col. (2016) en donde se plantea una política dinámica

que incluye los eventos más recientes.

Hashemi y col. (2020) argumenta que las técnicas de mantenimiento pueden clasificarse principalmente en dos clases; una de ellas es mantenimiento basado en el tiempo, la cual se basa en los datos de tiempo de falla, y la otra es mantenimiento basado en condición, donde la acción de mantenimiento depende de la información recopilada a través de las condiciones de operación de los sistemas, como el nivel de deterioro o información sobre el estado del sistema. Dado que reparar sistemas altamente deteriorados o dañados es muy costoso y puede consumir mucho tiempo, una política de inspección acompañada por reparación puede reducir los costos en gran medida. Las políticas de inspección y reparación óptimas son usualmente pre-especificadas por los planificadores de mantenimiento (Lam y Yeh, 1994). Las siguientes políticas de inspección son descritas en Lam y Yeh (1994):

- Sustitución en la falla: Se reemplaza sólo cuando falla, ya que no se realiza inspección.
- Sustitución por edad: Se reemplaza el sistema en un determinado tiempo sin importar el estado del sistema o cuando éste falla.
- Inspección secuencial: Se hacen inspecciones cada determinado tiempo; se evalúa la condición del sistema (i), en caso de que se encuentre el sistema en condiciones no favorables, se reemplaza o se programa una inspección en el futuro e_i , donde e_i es el intervalo de inspección bajo la condición del sistema i .
- Inspección periódica: Es un caso particular de inspección secuencial, las inspecciones reprogramadas se hacen en un tiempo fijo, $e_i = \text{constante}$.
- Inspección continua: El sistema se inspecciona continuamente, en todo momento mientras está operando se evalúa la condición del sistema (i), entonces: a) el sistema se reemplaza inmediatamente, ó b) el sistema puede continuar operando. Los criterios para la decisión (reemplazo u operación continua) debe especificarse inicialmente.

Bajo el supuesto de reparación mínima y tiempo de la reparación despreciable, se puede usar el NHPP como modelo de los eventos en el sistema reparable (Ebrahimi, 1993). Dos de los NHPP con mayor documentación son el proceso ley potencia y el proceso log lineal, ambos modelos logran describir exitosamente tasas de falla monótonas crecientes o decrecientes (Ascher y Feingold, 1984; Rigdon y Basu, 2000). En el caso de que el sistema tenga dos tipos de falla, uno por mortalidad infantil y otro por degradación, lo que se espera no es una tasa de falla monótona, sino una tasa de falla que es alta en su primera etapa de funcionamiento y en sus últimos años; este tipo de problemas ha sido principalmente tratado por medio de los procesos superpuestos como se evidencia en Guida y Pulcini (2009); Mun, Bae y Kvam (2013); Pulcini (2001b); Musa y Okumoto (1984). Otra alternativa de modelación es por métodos no paramétricos o por medio de NHPP por partes con múltiples etapas que tienen el propósito de adaptarse a diferentes circunstancias que cambien el funcionamiento del sistema; para supuestos y estimaciones ver Leemis (1991) y Guo y col. (2010) respectivamente.

En Krivtsov (2007) se expone un interesante resultado que permite definir NHPP diferentes a los tradicionalmente formulados; si se piensa en un NHPP como un proceso de renovación con

un tipo de renovación por falla “tan malo como viejo”, este proceso también es conocido como un proceso de renovación generalizado y bajo el supuesto que el factor de restauración es igual a 1 se reduce a un NHPP. Se muestra que el número esperado de fallas de un sistema ($\Lambda(t)$) de un NHPP es formalmente igual al *hazard* acumulado ($H(t)$), esto indica que se pueden adecuar múltiples distribuciones de vida como NHPP, en particular se pueden encontrar distribuciones en el análisis de vida con *hazards* flexibles, por ejemplo *hazards* en forma de bañera como se muestra en la siguiente figura.

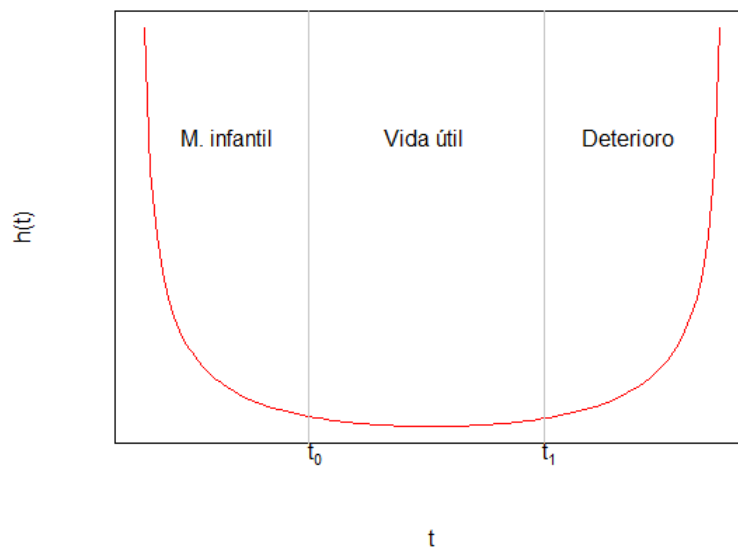


Figura 2.1: *Hazard* en forma de bañera.

Nair y col. (2018) define que una variable aleatoria tiene función tasa de falla $h(t)$ en forma de bañera, si es estrictamente decreciente para $0 \leq t \leq t_0$, constante para $t_0 < t < t_1$, y estrictamente creciente para $t > t_1$, donde t_0 y t_1 son los puntos de cambio. Cuando se considera solo un punto de cambio, la función tasa de falla $h(t)$ es estrictamente decreciente para $t < t_0$ y estrictamente creciente para $t > t_0$. Como ejemplos, Nair y col. (2018) habla de las distribuciones Weibull inversa, Poisson Exponencial, Weibull modificada de Nooghabi, Weibull modificada extendida, Weibull aditiva y Weibull modificada discreta extendida. Tasas de falla en forma de bañera son usualmente fruto de la mezcla de la tasas de falla de dos distribuciones (Finkelstein, Cha y col., 2013).

Recientemente Shakhathreh y col. (2019) introducen una nueva distribución de vida llamada Log-normal Weibull modificada. El principal aporte de esta distribución es que su *hazard* puede tener forma de bañera con una parte plana extendida, lo cual puede llegar a ser complicado de modelar; algunas distribuciones capaces de modelar tasas de falla en forma de bañera son recopiladas

en C.-D. Lai y Xie (2006), posterior a este estudio se pueden encontrar las distribuciones Perks con 4 y 5 parámetros (Zeng y col., 2016), la nueva Weibull modificada (Almalki y Yuan, 2013), la distribución de Crevecoeur (Liu e Y. Wang, 2013), Weibull modificada (Xie, Tang y col., 2002) y Burr XII aditiva (F. Wang, 2000). Otra alternativa para modelar datos de vida con tasas en forma de bañera es modelar basado en el uso de la transformación de datos como se propone en Mudholkar y col. (2009).

Capítulo 3

Conceptos teóricos

3.1. Mantenimiento óptimo

Muchos sistemas están sujetos a deterioro, lo que significa que con el tiempo su condición empeora, posiblemente hasta llegar al no funcionamiento o a niveles inseguros y poco eficientes. Dada la relación que existe entre el nivel de condición y el rendimiento, cuanto más bajo es el nivel de condición, peor es el rendimiento del sistema. El mantenimiento óptimo consiste en acciones de mantenimiento planificadas y no planificadas, que incluyen inspección, reparación local o reemplazo para asegurar un rendimiento óptimo de confiabilidad y seguridad del sistema con los costos de mantenimiento más bajos posibles (Sherif y Smith, 1981).

Pham y H. Wang (2006) contemplan que el mantenimiento puede clasificarse en dos formas; la primera por el grado de mejoramiento de la condición del sistema cuando éste es intervenido y la segunda por la motivación del mantenimiento. De la primera forma de clasificación se tienen las siguientes categorías:

- Reparación perfecta: Una vez que el sistema ha fallado y se ha completado una reparación, su comportamiento es exactamente el mismo que si fuera nuevo (Gámiz y col., 2011). Para modelar esta situación se han usado tradicionalmente los procesos de renovación.
- Reparación mínima: Una vez que el sistema ha sido reparado, su estado es idéntico al de justo antes de la falla (Gámiz y col., 2011). Para modelar esta situación se han usado tradicionalmente los procesos de Poisson no homogéneos.
- Reparación imperfecta: Después de completada la acción de reparación, el sistema es restaurado a un estado mejor que el de justo antes de la falla, pero no necesariamente tan bueno como nuevo (Gámiz y col., 2011). Para modelar esta situación se ha usado tradicionalmente el modelo Brown-Proschan (Brown y Proschan, 1983)

- Mala reparación o mal mantenimiento (Worse repair or worse maintenance): Acciones de mantenimiento que hacen que la tasa de falla del sistema o la edad real aumenten, pero el sistema no se descompone. Por lo tanto, con una reparación peor, la condición operativa de un sistema es peor que antes de su falla (Pham y H. Wang, 2006), para este tipo de reparaciones se ha usado el proceso de nacimiento puro no homogéneo (Chien, 2019).
- La peor reparación o el peor mantenimiento (Worst repair or worst maintenance): Acciones de mantenimiento que involuntariamente hacen que el sistema falle o se averíe.

Clasificando por la motivación del mantenimiento, se observan dos categorías principales: correctivo y preventivo (Pham y H. Wang, 2006). El mantenimiento correctivo (MC) es el mantenimiento que ocurre cuando el sistema falla y se realiza en puntos de tiempo impredecibles, dado que no se conoce cuándo va a fallar exactamente el sistema. El mantenimiento preventivo (MP) es el mantenimiento que se realiza cuando el sistema está funcionando y comprende las acciones realizadas en un intento de retener un sistema en condiciones específicas. Dentro del MP se encuentran las acciones de inspección, detección y prevención.

Dos políticas de mantenimiento óptimo fueron propuestas en Barlow y Hunter (1960), la primera política consiste en realizar el mantenimiento preventivo después de t_0 horas de operación continúa sin fallar, se permite la posibilidad de que t_0 sea infinito. Si el sistema falla antes de que hayan transcurrido t_0 horas, se realiza el mantenimiento en el momento de la falla, por lo que el mantenimiento preventivo luego se reprograma para cuando que hayan transcurrido t_0 horas, después de cualquier tipo de mantenimiento (o reemplazo) se asume que la condición del equipo es como nueva. La segunda política consiste en realizar mantenimiento preventivo en el sistema después de haber estado funcionando un total de t^* horas, independientemente del número de fallas intermedias, nuevamente se permite la posibilidad de que t^* sea infinito y se supone que después de cada falla solo se realiza una reparación mínima, por lo tanto la tasa de falla del sistema es igual a antes de la falla, pero después del mantenimiento programado se supone que el sistema es tan bueno como nuevo. Desarrollos en la combinación de MP y reparación mínima se encuentran también en artículos como Gertsbakh (1977); Block, Borges y col. (1990); Park y col. (2000); K. Lai y col. (2001); Gilardoni y Colosimo (2007); Mun, Bae y Kvam (2013).

A continuación, se detallan los modelos de mantenimiento preventivo óptimo desarrollados en Gilardoni y Colosimo (2007) y Mun, Bae y Kvam (2013), debido a que son lo más cercano a lo que se espera desarrollar en este trabajo de investigación.

- Modelo de Gilardoni y Colosimo (2007):

Considere un sistema reparable que funcionará durante un total de ϵ unidades de tiempo comenzando en $t_0 = 0$, y asuma las siguientes condiciones:

- Los puntos de control del mantenimiento preventivo (MP) se programan en cada ξ unidades de tiempo.
- Cada control de MP tiene un costo fijo C_{MP} .
- Las acciones de MP devuelven instantáneamente el sistema a una condición como nueva (MP perfecta).

- Entre puntos de control de MP sucesivos, acciones de reparación mínima (MR) se realizan después de cada falla y el costo esperado para cada acción de reparación es C_{MR} .
- Los costos de reparación y los tiempos de falla son independientes.
- Los tiempos de reparación son despreciables.

Sea $N(t)$ el número de fallas en el intervalo $(0, t]$ y $\lambda(\cdot)$ la intensidad de falla de un proceso Poisson. Para calcular el costo total esperado $H_{(0, \epsilon]}(\xi)$ de esta política de MP, se descompone el intervalo de tiempo $(0, \epsilon]$ como $(0, \xi] \cup (\xi, 2\xi] \cup \dots \cup ((m-1)\xi, m\xi] \cup (m\xi, \epsilon]$ donde $m = \lceil \epsilon/\xi \rceil$ es el entero más grande menor o igual a ϵ/ξ , considerando $\epsilon, \xi > 0$. Debido a que en cada punto de verificación del MP el estado del sistema se restablece a una condición como nueva, el costo esperado para cada intervalo de la forma $((i-1)\xi, i\xi]$ esta dado por

$$C_{MP} + C_{MR}E[N(\xi)] = C_{MP} + C_{MR} \int_0^\xi \lambda(u)du, \quad (3.1)$$

al final del intervalo $((i-1)\xi, i\xi]$ se completan todas las reparaciones y el primer y segundo término correspondientes a los costos de las reparaciones programadas y no programadas se convierten en el costo total esperado. Por lo tanto, el costo total esperado será dado por

$$C_{(0, \epsilon]}(\xi) = m \left\{ C_{MP} + C_{MR} \int_0^\xi \lambda(u)du \right\} + R, \quad (3.2)$$

donde $R = C_{MR}E[N(\epsilon - m\xi)]$ es el costo esperado para el intervalo $(m\xi, \epsilon]$.

Para valores grandes de ϵ , $C_{(0, \epsilon]}(\xi)$ es también grande. Por lo tanto tiene sentido trabajar con el costo límite esperado por unidad de tiempo,

$$H(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} C_{(0, \epsilon]}(\xi)/\epsilon = \frac{1}{\xi} \left[C_{MP} + C_{MR} \int_0^\xi \lambda(u)du \right], \quad (3.3)$$

dado que $\epsilon \approx m\xi = \lceil \epsilon/\xi \rceil \xi$, con $\xi > 0$. Un horizonte infinito representado por $\epsilon \rightarrow \infty$ es una aproximación razonable y conveniente cuando ϵ es grande.

La política de MP óptima consiste en determinar ξ que maximiza $H(\xi)$, por lo tanto, resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{dH}{d\xi}(\xi) = \frac{C_{MR}}{\xi^2} \left[\xi\lambda(\xi) - \int_0^\xi \lambda(u)du - \frac{C_{MP}}{C_{MR}} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Usando integración por partes, con $\xi > 0$, ξ debe satisfacer:

$$\frac{C_{MP}}{C_{MR}} = \xi\lambda(\xi) - \int_0^\xi \lambda(u)du = \int_0^\xi u\lambda'(u)du, \quad (3.5)$$

donde $\lambda'(u)$ es la derivada de la tasa de falla $\lambda(u)$.

■ Modelo de Mun, Bae y Kvam (2013):

Dado que el mantenimiento preventivo (MP) es razonable solo cuando la intensidad de falla es creciente, y el MP debería realizarse solo cuando la intensidad de falla alcance un valor suficientemente alto, Mun, Bae y Kvam (2013) adapta el MP de Malik (1979) para un proceso con intensidad de falla en forma de bañera. Desde que, en estos procesos la intensidad de falla es inicialmente decreciente, debido a defectos de manufactura que no son eliminados completamente durante el proceso de *burn-in*, estos defectos se pueden eliminar en su mayoría mediante la actividad del MP. Como resultado, la etapa de intensidad decreciente desaparecerá después de la primera actividad del MP. Por esto, el MP perfecto que restaura la condición del sistema a tan bueno como nuevo, no es realista para procesos con intensidad de falla en forma de bañera.

Siguiendo a Mun, Bae y Kvam (2013) se plantea el siguiente MP. Considere un sistema reparable que funcionará durante t_a unidades de tiempo comenzando en $t_0 = 0$, y asuma las siguientes condiciones:

- Los puntos de control del MP se programan en $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < \xi_m < t_a$ unidades de tiempo. El intervalo $(0, t_a]$ se descompone en intervalos de tiempo de la siguiente manera $(0, \xi_1] \cup (\xi_1, \xi_2] \cup \dots \cup (\xi_{m-1}, \xi_m] \cup (\xi_m, t_a]$.
- La actividad de MP, se realiza cuando la intensidad de falla alcanza un nivel inaceptablemente alto. La acción de reparación (o reemplazo) con un tiempo de reparación insignificante se ejecuta en cada punto de control de MP, lo que causa un costo fijo de C_{MP} unidades. La actividad de MP mejora notablemente la condición del sistema, pero no hace que la condición del sistema sea tan buena como nueva (MP imperfecto).
- Entre puntos sucesivos de control del MP, acciones de reparación mínima son realizadas después de cada falla. El costo esperado para cada acción de reparación es C_{MR} .
- Los costos de reparación y los tiempos de falla son independientes.
- Los tiempos de reparación son despreciables.

Este modelo MP fue propuesto para funcionar bajo el NHPP ley potencia superpuesto. La tasa de falla inicialmente alta decreciente desaparecerá después del primer MP y la función de intensidad ya no tendrá forma de bañera. Se asume un modelo de reducción proporcional a la edad (PAR), propuesto por Malik (1979), para acomodar la flexibilidad del proceso de falla después de la actividad del MP. El modelo PAR supone que las actividades del MP, cambian la función de tasa de falla del sistema a la de algún tiempo más nuevo, pero no completamente a cero. Cada actividad de MP reduce la edad del equipo en una cantidad proporcional al tiempo de operación transcurrido desde el MP más reciente. La tasa de falla inicial está dada por $\lambda_1(t)$ y la función de intensidad condicional en un intervalo genérico $(\xi_{i-1}, \xi_i]$ dado que el MP ha sido realizado en ξ_{i-1} es

$$\lambda_i(t|\xi_{i-1}) \equiv \lambda_1(t + \alpha - \rho\xi_{i-1}) \quad (3.6)$$

Para $i = 2, 3, \dots, m$, α es el punto de cambio de la tasa decreciente a creciente y ρ mide el grado de mejora bajo el MP. Cuando $\rho = 0$ el efecto del MP es nulo, y cuando $\rho = 1$ el MP restaura el sistema a la tasa de falla mínima en el tiempo α .

El costo total esperado es

$$C_{(0, \epsilon]}(\boldsymbol{\xi}) = C_{MR} \left\{ \int_0^{\xi_1} \lambda_1(u) du + \sum_{i=2}^{m+1} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \lambda_i(u|\xi_{i-1}) du \right\} + mC_{MP}. \quad (3.7)$$

para el conjunto de puntos de control $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Para este caso ξ_{m+1} denota t_a . Para entender la ecuación (3.7) es necesario notar que los intervalos $(0, \xi_1] \cup (\xi_1, \xi_2] \cup \dots \cup (\xi_{m-1}, \xi_m] \cup (\xi_m, t_a]$ tienen diferentes intensidades de falla. En el intervalo $(0, \xi_1]$ la intensidad de falla es $\lambda_1(t)$ y el número esperado de fallas es $\int_0^{\xi_1} \lambda_1(s) ds$, para el segundo intervalo $(\xi_1, \xi_2]$ la intensidad de falla es $\lambda_2(t | \xi_1)$ y el número esperado de fallas es $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \lambda_2(s | \xi_1) ds$ y así hasta llegar al intervalo $(\xi_m, t_a]$ con intensidad de falla $\lambda_{t_a}(t | \xi_m)$ y número esperado de fallas $\int_{\xi_m}^{t_a} \lambda_{t_a}(s | \xi_m) ds$. Por lo tanto, en la ecuación (3.7) se observan los costos de las reparaciones no programadas por el número de fallas y los costos de las reparaciones programadas por el número programado de éstas.

El costo esperado por unidad de tiempo es

$$LC(\boldsymbol{\xi}) = \frac{C_{(0, \epsilon]}(\boldsymbol{\xi})}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \left[mC_{MP} + C_{MR} \left\{ \int_0^{\xi_1} \lambda_1(u) du + \sum_{i=2}^{m+1} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \lambda_i(u|\xi_{i-1}) du \right\} \right]. \quad (3.8)$$

El MP óptimo es aquel que minimice el $LC(\xi)$, (Mun, Bae y Kvam, 2013) realizan una restricción adicional que asume que la $m - \text{ésima}$ actividad del MP se realiza siempre que la intensidad de la falla alcanza el valor de intensidad en el primer punto de mantenimiento preventivo ξ_1 para $i = 2, 3, \dots, m$; es decir, $\lambda_1(\xi_1) = \lambda_2(\xi_2 | \cdot) = \dots = \lambda_m(\xi_m | \cdot)$. El segundo punto de chequeo del MP, ξ_2 , es obtenido resolviendo la ecuación $f(\xi_2) = \lambda_2(\xi_2 | \xi_1) - \lambda_1(\xi_1) = 0$. El tercer punto de chequeo, ξ_3 es obtenido resolviendo la ecuación $f(\xi_3) = \lambda_3(\xi_3 | \xi_2) - \lambda_1(\xi_1) = 0$, y así sucesivamente, El m -ésimo punto de chequeo, ξ_m , se obtiene resolviendo la ecuación $f(\xi_m) = \lambda_m(\xi_m | \xi_{m-1}) - \lambda_1(\xi_1) = 0$. Siguiendo con esta lógica se encuentra el patrón:

$$\xi_i = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)\xi_1 - \left(\frac{1-\rho^{i-1}}{1-\rho}\right)\alpha & \text{si } \rho \neq 1 \\ i\xi_1 - (i-1)\alpha & \text{si } \rho = 1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

para ξ_i con $i = 2, 3, \dots, m$. Dado el primer punto de MP(ξ_1), las demás intervenciones del MP se pueden encontrar secuencialmente.

3.2. Conceptos básicos de los procesos de conteo

Sea T_0 el momento cuando un sistema es puesto en operación y $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ son los tiempos en donde ocurren fallas. Asumiendo que el tiempo de reparación es despreciable, el tiempo entre fallas está dado por $\tau_j = T_j - T_{j-1}$ para $j = 1, 2, 3, \dots$.

Siguiendo a Gámiz y col. (2011) el modelo estocástico para la evolución del sistema debe especificar la distribución conjunta de los tiempos entre fallas con $N(t); t \geq 0$, donde $N(t)$ es una función no decreciente que denota el número de fallas en el intervalo $(0, t]$. El número esperado de fallas está dado por $\Lambda(t) = E[N(t)]$, siendo $\Lambda(t)$ una función continua a derecha. Cuando el número esperado de fallas es diferenciable se define $\lambda(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t)$ como la tasa de ocurrencia de fallas.

3.3. Datos de sistemas reparables

De acuerdo con Meeke y Escobar (1998:Capítulo 16) el modelo estocástico para los datos de recurrencia corresponde a un proceso puntual. Una aplicación importante son los datos de reparación del sistema. El término “reparación del sistema” describe un evento general de interés, donde el evento puede ser una falla, un reemplazo, un ajuste, entre otros.

En general, los tiempos de reparación se miden en términos de antigüedad o tiempo del sistema desde algún evento específico bien definido en el historial del sistema. Las reparaciones generalmente se observan durante un intervalo de observación fijo (a, t) , donde, típicamente, $a = 0$.

Según Meeke y Escobar (1998:Capítulo 16), algunas aplicaciones tienen datos en un solo sistema, pero en otras puede haber datos de una muestra u otra colección de sistemas. Para aplicaciones con múltiples sistemas en ocasiones es apropiado considerar que la muestra puede contener sistemas heterogéneos probablemente resultantes de diferentes ambientes de funcionamiento.

Para algunas aplicaciones, también puede ser de interés registrar la causa de la falla o el costo de reparación.

Los datos del sistema reparable se recopilan para estimar o predecir cantidades como:

- La distribución de los tiempos entre reparaciones, $T_j - T_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$
- El número acumulado de reparaciones en el intervalo $(0, t]$ como función de la edad del sistema t .
- El tiempo esperado entre fallas o tiempo medio entre fallas.
- El número esperado de reparaciones en el intervalo $(0, t]$ como función de t .
- La tasa de reparación como función de t .
- Costo promedio de reparación como función de t .

3.4. Reparación perfecta

Siguiendo a Gámiz y col. (2011) dada la suposición que los tiempos de falla sean independientes e idénticamente distribuidos, el comportamiento del sistema es exactamente el mismo que si fuera nuevo; por lo tanto, se lleva a cabo una acción de mantenimiento de reparación perfecta en el entorno del sistema.

Bajo los modelos de reparación perfecta en cada momento de falla, el sistema se reemplaza por uno nuevo del mismo tipo. Este proceso se repite a lo largo del tiempo (el tiempo de reemplazo no se considera). Como resultado se obtiene una sucesión de variables aleatorias que son independientes e idénticamente distribuidas. Los procesos de renovación son los usualmente utilizados para este tipo de variables aleatorias, el caso más simple es el proceso Poisson homogéneo (HPP), donde el tiempo entre fallas tiene una distribución Exponencial.

3.5. Reparación imperfecta

En la literatura se pueden encontrar diferentes modelos propuestos para reparación imperfecta, revisiones de estos modelos se pueden encontrar en De Carlo y Arleo (2017); Pham y H. Wang (1996). Algunas categorías principales son:

- Método de la regla (p, q) : Después de una actividad de mantenimiento el sistema puede ir a un estado de “tan bueno como nuevo” con probabilidad p a un estado “tan malo como viejo” con probabilidad $q = 1 - p$. Cuando $p = 1$ la reparación es perfecta y para $q = 1$, se realiza reparación mínima. Se asume que el sistema es reparado cada que falla y tiene tasa de falla $\lambda(t)$.

$$\lambda_p(t) = p\lambda(t), \quad (3.10)$$

para $0 < p < 1$. También existe el método $(p(t), q(t))$, en el cual $p(t)$ y $q(t)$ dependen del tiempo.

- Método del factor de mejora: Considera que el mantenimiento imperfecto puede reducir la edad del sistema de t a t/β , tal que

$$\lambda(t') = \lambda(t/\beta), \quad (3.11)$$

dado que $\lambda(t) > \lambda(t/\beta)$. β es conocido como factor de mejora con $\beta > 1$ para el caso de mantenimiento imperfecto, existen diferentes propuestas de cómo especificarlo, una de ellas es en términos del costo del mantenimiento y la edad del sistema (Lie y Chun, 1986).

- Método de edad virtual: Se consideran dos escalas de tiempo, la escala del tiempo calendario, que representa el tiempo transcurrido desde la puesta en servicio del sistema, y la escala de tiempo de edad virtual. En cualquier momento, el sistema equivale entonces a uno nuevo sin mantenimiento que ha sobrevivido hasta un tiempo igual a su edad virtual (Doyen y col., 2020). En modelos de edad virtual, el efecto del mantenimiento es modificar la edad real. Es necesario, distinguir entre la edad real del sistema y la edad virtual del sistema que describe su condición actual.

Siguiendo a (Kijima, 1989), sea V_n la edad virtual del sistema inmediatamente después de la n -ésima reparación. Si $V_n = y$, y el tiempo entre falla $X_{n+1} = t - T_n$ (T_n es el tiempo a la falla n), es tal que:

$$\Pr[X_{n+1} \leq x \mid V_n = y] = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}, \quad (3.12)$$

donde $F(x)$ es la distribución de vida de un nuevo sistema (sistemas nuevos tienen edad virtual $V_0 = 0$). Sea S_n la edad real del sistema en n , tal que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, por lo cual $\Pr[N(t) \geq n] = \Pr[S_n \leq t]$.

Sea A_n el factor que representa el grado de mejora de la n -ésima reparación. Dos modelos pueden ser construidos dependiendo de cómo las reparaciones afecten el proceso de edad virtual $\{V_n\}_0^\infty$:

- Modelo I: se asume que la n -ésima reparación solo puede remover los daños ocurridos durante el n -ésimo tiempo de vida, de modo que reduce X_n a $A_n X_n$. En consecuencia después de la n -ésima reparación, $V_n = V_{n-1} + A_n X_n$.
- Modelo II: En la n -ésima reparación, el sistema tiene edad virtual $V_n = A_n (V_{n-1} + X_n)$

En general, A_n es una variable aleatoria entre 0 y 1. En ambos modelos, si $A_n = 0$ para todos $n \geq 1$, entonces es un modelo de reparación perfecta, mientras que si $A_n = 1$ para todos $n \geq 1$, entonces es un modelo de reparación mínima. A_n puede ser calculada recursivamente siguiendo el modelo de reparación escogido (Doyen y col., 2020).

- Modelos de choques: siguiendo a Kijima y Nakagawa (1991), considere una unidad que está sujeta a choques que ocurren aleatoriamente en el tiempo. En el tiempo $t = 0$, se supone que el nivel de daño de la unidad es 0, cuando ocurre un choque, la unidad sufre un daño aleatorio no negativo que se suma al nivel de daño actual de la unidad. Entre choques, el

nivel de daño se mantiene constante. La unidad falla cuando el daño acumulado excede un nivel especificado. Para mantener la unidad en funcionamiento se realizan MP imperfectos, imperfectos en el sentido que cada acción de MP reduce el daño en un $100(1 - b)$ % del daño total, donde $0 \leq b \leq 1$.

3.6. Reparación mínima

Siguiendo a Gámiz y col. (2011) sea F la función de distribución correspondiente a $T = T_1$. La función de supervivencia es $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ y $h(t)$ es la función *hazard*.

$$\bar{F}(t) = \exp \left[- \int_0^t h(u) du \right]. \quad (3.13)$$

La función de supervivencia de un sistema que ha fallado y ha sido reparado instantáneamente con reparación mínima a la edad t^* es:

$$\bar{F}_{t^*}(t) = \frac{1 - F(t^* + t)}{1 - F(t^*)} \exp \left[- \int_0^{t^*+t} h(u) du \right]. \quad (3.14)$$

En general, cuando se hacen reparaciones mínimas, dado que la j -ésima falla ha ocurrido al tiempo $T_j = t_j$ tenemos que:

$$Pr(T_{j+1} > t | T_j = t_j) = \bar{F}_{t_j}(t). \quad (3.15)$$

3.7. Proceso Poisson no homogéneo (NHPP)

De acuerdo con Meeker y Escobar (1998:Capítulo 16) el NHPP es un proceso puntual en donde se cuentan eventos en el tiempo, cuando éste es continuo y satisface los siguientes supuestos:

- El número de ocurrencias a $t = 0$, $N(0) = 0$.
- La tasa de recurrencia $\lambda(t)$ es estrictamente positiva y el número esperado de fallas $\Lambda(t)$ es igual a la integral de la tasa de falla.

$$\Lambda(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du = E[N(t_1, t_2)] \quad (3.16)$$

Con $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ y $N(t_1, t_2)$ el número de fallas en el intervalo $(t_1, t_2]$.

- Las recurrencias son estadísticamente independientes en intervalos de tiempo disjuntos.

El NHPP tiene función de distribución de probabilidad dado por:

$$Pr[N(t_1, t_2) = d] = \frac{[\Lambda(t_1, t_2)]^d}{d!} \exp[-\Lambda(t_1, t_2)] \quad (3.17)$$

$$d = 0, 1, 2, \dots$$

3.8. Estimación no paramétrica del número esperado de fallas para un sistema

Meeker y Escobar (1998:Capítulo 16) muestran la estimación no paramétrica $\Lambda(t_j)$ que denotaremos por $\tilde{\Lambda}(t_j)$ requiere los siguientes supuestos: existe una función acumulada de la cual se ha observado una muestra, la aleatoriedad en la muestra es debido al muestreo aleatorio de funciones acumulativas de la población, y se asume que el tiempo en que se termina la observación de un sistema no depende de la historia del sistema.

Dados los anteriores supuestos, sea $t_1 < \dots < t_m$ los tiempos de falla y $d(t_k)$ el indicador de falla en el tiempo t_k

$$\tilde{\Lambda}(t_j) = \sum_{k=1}^j d(t_k), \quad (3.18)$$

para $j = 1, \dots, m$. Como puede observarse el estimador no paramétrico de $\Lambda(t_j)$ hasta un tiempo t_j es simplemente el número acumulado de fallas hasta dicho tiempo.

3.9. Estimación de máxima verosimilitud para procesos Poisson no homogéneos

Siguiendo a (Jean, 1999), sea $\{N(t); t \geq 0\}$ un NHPP con función de intensidad $\lambda(t; \theta)$, donde θ son los parametros del NHPP, se observa una sola realización del proceso en el periodo $(0, t_a]$, con n eventos en los tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. La probabilidad de no observar eventos en $(0, t_1)$, un evento en $(t_1, t_1 + \delta t_1)$, ningún evento en $(t_1 + \delta t_1, t_2)$, un evento en $(t_2, t_2 + \delta t_2)$, y así sucesivamente hasta ningún evento en $(t_n + \delta t_n, t_a)$, para $\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_n$ pequeños, es:

$$L(\theta) = \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda(y; \theta) dy\right) \lambda(t_1; \theta) \delta t_1 \exp\left(-\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2} \lambda(y; \theta) dy\right) \lambda(t_2; \theta) \delta t_2 \times$$

$$\dots \times \exp\left(-\int_{t_n+\delta t_n}^{t_a} \lambda(y; \theta) dy\right). \quad (3.19)$$

Dividiendo por $\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_n$ y haciendo $\delta t_i \rightarrow 0$, se obtiene,

$$L(\theta) = \left[\prod_{j=1}^n \lambda(t_j; \theta) \right] \exp[-\Lambda(0, t_n; \theta)]. \quad (3.20)$$

3.10. Función de intensidad de un NHPP general

Siguiendo a Krivtsov (2007), sea $\Lambda(t)$ la función de intensidad acumulada del proceso puntual asociado al proceso de reparación de un sistema reparable, con tiempos de reparo despreciables, función que representa el número esperado de fallas en el intervalo de operación $(0, t]$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$, siendo $\lambda(\cdot)$ la función de intensidad de las fallas. Considere el proceso de renovación generalizado (GRP, por sus siglas en inglés), para el cual su ecuación de renovación según Kijima y Sumita (1986), es dada por

$$\Lambda(t) = \int_0^t \left[g(\tau|0) + \int_0^\tau h(x)g(\tau - x|x)dx \right] d\tau, \quad (3.21)$$

donde $g(t|x) = \frac{f(t+qx)}{1-F(qx)}$, $t, x \geq 0$, es definido de forma que $g(t|0) = f(t)$, y $F(\cdot)$, $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, son respectivamente, la CDF, la pdf, y la función hazard de la distribución subyacente del tiempo de la primera falla, y q es el denominado factor de restauración o de efectividad del reparo.

Para $q = 1$ se tiene que el GRP se reduce a un NHPP, y por tanto, la función de intensidad acumulada del GRP se reduce a la correspondiente función del NHPP, así

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_0^t \left[f(\tau) + \int_0^\tau h(x) \frac{f(\tau - x + x)}{1 - F(x)} dx \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[f(\tau) + f(\tau) \int_0^\tau \frac{h(x)}{1 - F(x)} dx \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.22)$$

ahora bien, como $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-F(x)} \right] = \frac{h(x)}{1-F(x)}$, entonces

$$\int_0^\tau \frac{h(x)}{1 - F(x)} dx = \frac{1}{1 - F(x)} \Big|_0^\tau = \frac{1}{1 - F(\tau)} - 1. \quad (3.23)$$

Por tanto, reemplazando (3.23) en (3.22) se obtiene que:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{1 - F(\tau)} d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau = H(t), \quad (3.24)$$

donde $H(t)$ es la función *hazard* acumulada de la distribución subyacente del primer tiempo de falla.

Con lo anterior, Krivtsov (2007) resalta el hecho de que la función de intensidad de falla de un NHPP coincide con la función *hazard* de la distribución de vida subyacente del primer tiempo de falla, y por tanto, bajo reparo mínimo, para cualquiera que sea tal distribución subyacente, con función *hazard* monótona o no monótona, se cumple que el $\lambda(t) = h(t)$.

3.11. Algunas distribuciones de vida con función tasa de falla en forma de bañera

La distribución de probabilidad del tiempo de falla de un dispositivo se puede caracterizar por la tasa de falla. Es una situación común que la función de tasa de falla tenga forma de bañera (Xie, Tang y col., 2002), y en esos casos los modelos que permiten solo tasas de falla monótona pueden no ser adecuados para modelar toda la información en forma de bañera, por ello se han desarrollado muchas distribuciones de vida que tienen tasa de falla de esta forma, en C.-D. Lai y Xie (2006) se pueden encontrar algunas que fueron propuestas antes del 2001. A continuación se introducen algunas distribuciones con tasa de falla en forma de bañera.

3.11.1. Distribución Weibull modificada

Xie, Tang y col. (2002) proponen una nueva distribución llamada Weibull modificada para $t \geq 0$. La distribución Weibull modificada está basada en la distribución propuesta por Chen (2000) la cual tiene dos ventajas con respecto a otros modelos Weibull extendidos; la primera es que solo se requieren dos parámetros para modelar la función de tasa de falla en forma de bañera y la segunda es que los intervalos de confianza para el parámetro de forma y las regiones de confianza conjunta para sus dos parámetros tiene forma cerrada. La distribución Weibull modificada puede considerarse una mejora de la distribución propuesta por Chen (2000) ya que ésta incluye un parámetro de escala y es más flexible.

A continuación se introduce la distribución Weibull modificada con tres parámetros:

- Función de densidad de probabilidad

$$f_{MW}(t) = \lambda\beta (t/\alpha)^{\beta-1} \exp \left[(t/\alpha)^\beta + \lambda\alpha \left(1 - \exp \left[(t/\alpha)^\beta \right] \right) \right] \quad (3.25)$$

- Función tasa de falla

$$h_{MW}(t) = \lambda\beta (t/\alpha)^{\beta-1} \exp \left[(t/\alpha)^\beta \right] \quad (3.26)$$

Donde α , β y λ son no negativos; α es el parámetro de escala, β es el parámetro que da la forma a la tasa de falla y λ es un factor de expansión.

- Estimación de máxima verosimilitud

Sea t_1, \dots, t_n una muestra de tamaño n de una distribución Weibull modificada de tres parámetros, α , β y λ . Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$L(\alpha, \beta, \lambda; t_1, \dots, t_n) = \lambda^n \beta^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} \times \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta + \sum_{i=1}^n \lambda \alpha \left[1 - \exp \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\} \quad (3.27)$$

y

$$l(\alpha, \beta, \lambda; t_1, \dots, t_n) = n \log(\lambda) + n \log(\beta) + n \lambda \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \lambda \alpha \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \quad (3.28)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros, $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta, \lambda; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{n(\hat{\beta}-1)}{\hat{\alpha}} + n\hat{\lambda} - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n \left\{ \exp \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \left[1 - \hat{\beta} \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \right] \right\} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta, \lambda; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{n}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right) + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \log \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right) \right\} - \hat{\lambda} \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ \exp \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} \log \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right) \right\} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\alpha, \beta, \lambda; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{n}{\hat{\lambda}} + n\hat{\alpha} - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} = 0 \quad (3.31)$$

Igualando a cero y despejando los términos en la ecuación (3.31), se encuentra que el estimador de máxima verosimilitud para λ es de la siguiente forma

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}} \right)^{\hat{\beta}} - n\hat{\alpha}} \quad (3.32)$$

No es posible despejar los parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Para obtener las estimaciones de máxima verosimilitud se pueden utilizar métodos numéricos, por ejemplo el algoritmo de Newton-Raphson, Newton-Raphson generalizado y algoritmo esperanza-maximización (Kazeminiya y Mehrjoo, 2013).

3.11.2. Distribución de vida Log-normal Weibull modificada

Shakhatreh y col. (2019) proponen una nueva distribución llamada Log-normal Weibull modificada. Esta distribución es vista teóricamente como el conjunto de dos subsistemas funcionando en serie independientemente, donde la distribución de un subsistema es Log-normal y el otro Weibull modificada. En los siguientes capítulos se usará esta distribución para proponer un nuevo NHPP.

Existen tres motivaciones principales en la creación de esta distribución; la primera es proponer una nueva distribución de vida flexible que pueda usarse para modelar datos de vida en una clase amplia de problemas de confiabilidad, la segunda es extender las distribuciones Log-normal y Weibull modificada y la tercera es modelar mediante una sola distribución una gran cantidad de formas para tasa de falla.

A continuación se introduce la distribución Log-normal Weibull modificada con cuatro parámetros:

- Función de densidad de probabilidad

$$f_{LNWM4}(t) = \left\{ \frac{\phi(z)}{\sigma t [1 - \Phi(z)]} + \beta (1/2 + \eta t) t^{-1/2} \exp(\eta t) \right\} \times \frac{1 - \Phi(z)}{\exp[\beta t^{1/2} \exp(\eta t)]} \quad (3.33)$$

- Función tasa de falla

$$h_{LNWM4}(t) = \frac{\phi(z)}{\sigma t [1 - \Phi(z)]} + \beta (1/2 + \eta t) t^{-1/2} \exp(\eta t) \quad (3.34)$$

donde $z := z(t; \mu, \sigma) = [\log(t) - \mu]/\sigma$, $\Phi(\cdot)$ es la distribución acumulada de una normal estándar, $\phi(\cdot)$ es la densidad de una normal estándar, $\sigma, \beta, \eta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

- Estimación de máxima verosimilitud

Sea t_1, \dots, t_n una muestra de tamaño de n de una distribución Log-normal Weibull modificada de cuatro parámetros, $\theta(\mu, \sigma, \beta, \eta)$. Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$L(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right\} \times \frac{1 - \Phi(z_i)}{\exp[\beta t_i^{1/2} \exp(\eta t_i)]} \quad (3.35)$$

y

$$l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta \left(\frac{1}{2} + \eta t_i \right) \frac{\exp(\eta t_i)}{\sqrt{t_i}} \right\} \\ + \sum_{i=1}^n \log[1 - \Phi(z_i)] - \beta \sum_{i=1}^n \sqrt{t_i} \exp(\eta t_i) \quad (3.36)$$

donde $z_i = [\log(t_i) - \mu]/\sigma$ para $i = 1, \dots, n$.

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros, $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\hat{z}_i \hat{h}_{LN}(t_i) - \hat{\sigma} t_i \hat{h}_{LN}^2(t_i)}{\hat{\sigma} \hat{h}_{LNWM4}(t_i)} \right] \\ + \sum_{i=1}^n t_i \hat{h}_{LN}(t_i) = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\hat{z}_i^2 - 1) \hat{h}_{LN}(t_i) - t_i \log(t_i) \hat{h}_{LN}^2(t_i)}{\hat{\sigma} \hat{h}_{LNWM4}(t_i)} \right] \\ + \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i \log(t_i) \hat{h}_{LN}(t_i) = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1/2 + \hat{\eta} t_i) t_i^{-1/2} \exp(\hat{\eta} t_i)}{\hat{h}_{LNWM4}(t_i)} \right] \\ - \sum_{i=1}^n \sqrt{t_i} \exp(\hat{\eta} t_i) = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(3/2 + \hat{\eta} t_i) t_i^{1/2} \exp(\hat{\eta} t_i)}{\hat{h}_{LNWM4}(t_i)} \right] \\ - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n t_i^{3/2} \exp(\hat{\eta} t_i) = 0 \quad (3.40)$$

donde $\hat{h}_{LN}(t_i) = \phi(\hat{z}_i)/\hat{\sigma} t_i [1 - \Phi(\hat{z}_i)]$ es la función de tasa de falla estimada de una variable aleatoria Log-normal con parámetros estimados $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, $\hat{h}_{LNWM4}(t_i)$ es la función tasa de falla estimada de una variable aleatoria Log-normal Weibull modificada y $\hat{z}_i := \hat{z}(t_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = [\log(t_i) - \hat{\mu}]/\hat{\sigma}$.

3.11.3. Distribución nueva Weibull modificada de Almalki y Yuan

Almalki y Yuan (2013) proponen la distribución nueva Weibull modificada para $t > 0$. Esta nueva distribución está basada en dos distribuciones; Weibull y Weibull modificada las cuales son combinadas en un sistema en serie; la función tasa de falla de la nueva distribución es la suma de *hazards* de estas dos distribuciones. Las distribuciones Weibull aditiva (Xie y C. D. Lai, 1996), nueva Weibull modificada (C. Lai y col., 2003), S-Z Weibull modificada (Sarhan y Zaindin, 2009), tasa de falla lineal (Bain, 1974), valor extremo (Bain, 1974), Weibull (Weibull, 1951), Rayleigh (Bain, 1974) y Exponencial (Bain, 1974) son submodelos de la nueva Weibull modificada de Almalki y Yuan. La distribución ha ajustado mejor que otras modificaciones de la Weibull para algunas bases de datos conocidas (Almalki y Yuan, 2013).

A continuación, se introduce la distribución nueva Weibull modificada con cinco parámetros $\alpha, \beta, \theta, \eta$ y γ :

- Función de densidad de probabilidad

$$f_{NWM}(t) = \left[\alpha \theta t^{\theta-1} + \beta (\gamma + \eta t) t^{\gamma-1} \exp(\eta t) \right] \exp[-\alpha t^\theta - \beta t^\gamma \exp(\eta t)] \quad (3.41)$$

- Función tasa de falla

$$h_{NWM}(t) = \alpha \theta t^{\theta-1} + \beta (\gamma + \eta t) t^{\gamma-1} \exp(\eta t) \quad (3.42)$$

Donde $\alpha, \beta, \theta, \eta$ y γ son no negativas, θ y γ son los parámetros de forma, α y β son los parámetros de escala y η es el parámetro de aceleración.

- Estimación de máxima verosimilitud

Sea t_1, \dots, t_n una muestra de tamaño de n de una distribución nueva Weibull modificada de cinco parámetros, $\alpha, \beta, \theta, \eta$ y γ . Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$L(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left[\alpha \theta t_i^{\theta-1} + \beta (\gamma + \eta t_i) t_i^{\gamma-1} \exp(\eta t_i) \right] \times \exp \left[- \sum_{i=1}^n \alpha t_i^\theta - \sum_{i=1}^n \beta t_i^\gamma \exp(\eta t_i) \right] \quad (3.43)$$

y

$$l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log \left[\beta (\gamma + \eta t_i) t_i^{\gamma-1} \exp(\eta t_i) + \alpha \theta t_i^{\theta-1} \right] - \alpha \sum_{i=1}^n t_i^\theta - \beta \sum_{i=1}^n t_i^\gamma \exp(\eta t_i) \quad (3.44)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros $\hat{\nu} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}, \hat{\eta}, \hat{\gamma})$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) \right|_{\nu=\hat{\nu}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\theta} t_i^{\hat{\theta}-1}}{\hat{h}_{NWM}(t_i)} - \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\theta}} = 0 \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) \right|_{\nu=\hat{\nu}} = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\gamma} + \hat{\eta} t_i) t_i^{\hat{\gamma}-1} \exp(\hat{\eta} t_i)}{\hat{h}_{NWM}(t_i)} - \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\gamma}} \exp(\hat{\eta} t_i) = 0 \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) \right|_{\nu=\hat{\nu}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha} t_i^{\hat{\theta}-1} [1 + \hat{\theta} \log(t_i)]}{\hat{h}_{NWM}(t_i)} - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\theta}} \log(t_i) = 0 \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) \right|_{\nu=\hat{\nu}} = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\hat{\gamma}-1} \exp(\hat{\eta} t_i) [(\hat{\gamma} + \hat{\eta} t_i) \log(t_i) + 1]}{\hat{h}_{NWM}(t_i)} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\gamma}} \exp(\hat{\eta} t_i) \log(t_i) = 0 \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} l(\alpha, \beta, \theta, \eta, \gamma; t_1, \dots, t_n) \right|_{\nu=\hat{\nu}} = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\hat{\gamma}} \exp(\hat{\eta} t_i) (\delta + \hat{\eta} t_i + 1)}{\hat{h}_{NWM}(t_i)} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\gamma}+1} \exp(\hat{\eta} t_i) = 0 \quad (3.49)$$

donde $\hat{h}_{NWM}(t_i)$ es la función de tasa de falla estimada de una variable aleatoria nueva Weibull modificada. Las estimaciones de máxima verosimilitud pueden obtenerse resolviendo ecuaciones no lineales numéricamente, por ejemplo por medio del algoritmo de Newton-Raphson (Ypma, 1995).

3.12. Procesos superpuestos basados en la mezcla de NHPP

Los siguientes NHPP exhiben tasas de falla en forma de bañera para algunas combinaciones de valores de sus parámetros, las cuales pretenden modelar un sistema con dos modos de falla; uno por piezas defectuosas o defectos de ensamblaje que no se eliminaron completamente a través del proceso de *burn-in*, así como fallas de desgaste causadas por fenómenos de deterioro (Mun, Bae y Kvam, 2013). Para su construcción, se superpusieron NHPP independientes como el proceso ley potencia, Log lineal y proceso de intensidad acotada (Pulcini, 2001a).

3.12.1. Proceso Log lineal superpuesto (S-LLP)

Es introducido en Mun, Bae y Kvam (2013), Su intensidad de falla consiste en la superposición de dos procesos Log lineales. Su intensidad de falla $\lambda(t)$ y número esperado de fallas $\Lambda(t)$ son de la forma:

$$\lambda(t) = \alpha_1 \exp(-\beta_1 t) + \alpha_2 \exp(\beta_2 t) \quad (3.50)$$

y

$$\Lambda(t) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t)) + \frac{\alpha_2}{\beta_2} (\exp(\beta_2 t) - 1) \quad (3.51)$$

$$t > 0, \alpha_i, \beta_i > 0, i = 1, 2$$

es necesario que $\alpha_1 \beta_1 > \alpha_2 \beta_2$ para que $\lambda(t)$ sea en forma de bañera, esto es debido que $\lambda(t)$ es inicialmente decreciente solo bajo esta condición.

Se dispone de un sistema que se ha observado durante un período $(0, t_a]$, el cual después de cada falla ha sido mantenido con reparación mínima. Sean $t_1 \leq \dots \leq t_n$ los tiempos hasta las primeras n fallas donde $t_n \leq t_a$. Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n (\alpha_1 \exp(-\beta_1 t_i) + \alpha_2 \exp(\beta_2 t_i)) \quad (3.52)$$

$$\times \exp \left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t_a)) - \frac{\alpha_2}{\beta_2} (\exp(\beta_2 t_a) - 1) \right]$$

y

$$l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log[\alpha_1 \exp(-\beta_1 t_i) + \alpha_2 \exp(\beta_2 t_i)] \quad (3.53)$$

$$- \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t_a)) + \frac{\alpha_2}{\beta_2} (\exp(\beta_2 t_a) - 1) \right]$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-\hat{\beta}_1 t_i)}{\hat{\alpha}_1 \exp(-\hat{\beta}_1 t_i) + \hat{\alpha}_2 \exp(\hat{\beta}_2 t_i)} - \left[\frac{1}{\hat{\beta}_1} (1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_a)) \right] = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\hat{\beta}_2 t_i)}{\hat{\alpha}_1 \exp(-\hat{\beta}_1 t_i) + \hat{\alpha}_2 \exp(\hat{\beta}_2 t_i)} - \left[\frac{1}{\hat{\beta}_2} (\exp(\hat{\beta}_2 t_a) - 1) \right] = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \frac{-\hat{\alpha}_1 t_i \exp(-\hat{\beta}_1 t_i)}{\hat{\alpha}_1 \exp(-\hat{\beta}_1 t_i) + \hat{\alpha}_2 \exp(-\hat{\beta}_2 t_i)} + \left[\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\beta}_1^2} (1 - \exp(-\hat{\beta}_1 t_a)) - \frac{\hat{\alpha}_1 t_a}{\hat{\beta}_1} \exp(-\hat{\beta}_1 t_a) \right] = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_2 t_i \exp(-\hat{\beta}_2 t_i)}{\hat{\alpha}_1 \exp(-\hat{\beta}_1 t_i) + \hat{\alpha}_2 \exp(-\hat{\beta}_2 t_i)} + \left[\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\beta}_2^2} (\exp(\hat{\beta}_2 t_a) - 1) - \frac{\hat{\alpha}_2 t_a}{\hat{\beta}_2} \exp(\hat{\beta}_2 t_a) \right] = 0 \quad (3.57)$$

3.12.2. Proceso de intensidad de falla acotado en forma de bañera (BBIP)

El modelo BBIP tiene la ventaja de que su función de intensidad no tiende a infinito a mayor tiempo de operación, por lo cual es apto para modelar sistemas muy confiables. Se introduce en Guida y Pulcini (2009) y su intensidad de falla consiste en la superposición de un LLP y un proceso de intensidad acotada. Su intensidad de falla $\lambda(t)$ y número esperado de fallas $\Lambda(t)$ en el intervalo $(0, t]$, son de la forma:

$$\lambda(t) = \alpha_1 \exp\left(\frac{-t}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\beta_2}\right)\right) \quad (3.58)$$

y

$$\Lambda(t) = \alpha_1 \beta_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\beta_1}\right) \right] + \alpha_2 \beta_2 \left(\frac{t}{\beta_2} - 1 + \exp\left(\frac{-t}{\beta_2}\right) \right), \quad (3.59)$$

para $t > 0$, $\alpha_i, \beta_i > 0$, $i = 1, 2$, $\lambda(t)$ tiene forma de bañera si y solo si se cumple $\alpha_2 \beta_1 < \alpha_1 \beta_2$ y $\beta_1 < \beta_2$, esto es debido que $\lambda(t)$ es inicialmente decreciente solo bajo esta condición.

Se dispone de un sistema que se ha observado durante un período $(0, t_a]$, el cual después de cada falla ha sido mantenido con reparación mínima. Sean $t_1 \leq \dots \leq t_n$ los tiempos hasta las primeras n fallas donde $t_n \leq t_a$. Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) &= \prod_{i=1}^n \left[\alpha_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\beta_2}\right) \right) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\alpha_1 \beta_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-t_a}{\beta_1}\right) \right] \right. \\ &\left. - \alpha_2 \beta_2 \left(\frac{t_a}{\beta_2} - 1 + \exp\left(\frac{-t_a}{\beta_2}\right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

y

$$\begin{aligned} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \log \left[\alpha_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\beta_2}\right) \right) \right] \\ &- \alpha_1 \beta_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-t_a}{\beta_1}\right) \right] \\ &+ \alpha_2 \beta_2 \left(\frac{t_a}{\beta_2} - 1 + \exp\left(\frac{-t_a}{\beta_2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right)}{\hat{\alpha}_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right) + \hat{\alpha}_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right) \right)} \right] \\ &- \hat{\beta}_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_1}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right)}{\hat{\alpha}_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right) + \hat{\alpha}_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right) \right)} \right] \\ &- \hat{\beta}_2 \left[\frac{t_n}{\hat{\beta}_2} - 1 + \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_2}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_1} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\hat{\alpha}_1 \frac{t_i}{\hat{\beta}_1^2} \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right)}{\hat{\alpha}_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right) + \hat{\alpha}_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right)\right)} \right] \\ &- \hat{\alpha}_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_1}\right) - \frac{t_a \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_1}\right)}{\hat{\beta}_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{-\hat{\alpha}_2 \frac{t_i}{\hat{\beta}_2^2} \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right)}{\hat{\alpha}_1 \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_1}\right) + \hat{\alpha}_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_2}\right)\right)} \right] \\ &+ \left[\hat{\alpha}_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_2}\right)\right) \right. \\ &\left. - \frac{\hat{\alpha}_2 t_a \exp\left(\frac{-t_a}{\hat{\beta}_2}\right)}{\hat{\beta}_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.12.3. Proceso ley potencia superpuesto (S-PLP)

El modelo S-PLP es introducido en Pulcini (2001b), su intensidad de falla consiste en la superposición de dos PLPs. Su intensidad de falla $\lambda(t)$ y número esperado de fallas $\Lambda(t)$ son de la forma:

$$\lambda(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} \quad (3.66)$$

y

$$\Lambda(t) = \left(\frac{t}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{t}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}, \quad (3.67)$$

para $t > 0$, $\alpha_i, \beta_i > 0$, $i = 1, 2$, los parámetros β_1 y β_2 determinan el patrón de falla y $\lambda(t)$ tiene forma de bañera si y solo si, se cumple $(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 0$, bajo esta condición $\Lambda(t)$ tiene un punto de inflexión. Cuando $\beta_1 = \beta_2$ el proceso se reduce a un PLP.

Se dispone de un sistema que se ha observado durante un intervalo de tiempo $(0, t_a]$, el cual después de cada falla ha sido mantenido con reparación mínima. Sean $t_1 \leq \dots \leq t_n$ los tiempos hasta las primeras n fallas donde $t_n \leq t_a$. Las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud son:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \right] \times \exp \left[- \left(\frac{t_a}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{t_a}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] \quad (3.68)$$

y

$$l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t_i}{\alpha_1} \right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t_i}{\alpha_2} \right)^{\beta_2-1} \right] - \left[\left(\frac{t_a}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{t_a}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right] \quad (3.69)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{- \left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \right)^2 \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1-1}}{\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1-1} + \left(\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\hat{\beta}_2-1}} \right] + \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{- \left(\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2} \right)^2 \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\hat{\beta}_2-1}}{\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1-1} + \left(\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\hat{\beta}_2-1}} \right] + \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2} \left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\hat{\beta}_2} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} l(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \hat{\beta}_1 \log \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right) \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1-1} \frac{1}{\hat{\alpha}_1}}{\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1-1} + \left(\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2} \right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2} \right)^{\hat{\beta}_2-1}} \right] - \left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_1} \right)^{\hat{\beta}_1} \log \left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_1} \right) = 0 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_2} l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \hat{\beta}_2 \log\left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2}\right)\right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2-1} \frac{1}{\hat{\alpha}_2}}{\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1}\right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_1}\right)^{\hat{\beta}_1-1} + \left(\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2}\right) \left(\frac{t_i}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2-1}} \right] \\
&\quad - \left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_2}\right)^{\hat{\beta}_2} \log\left(\frac{t_a}{\hat{\alpha}_2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Capítulo 4

Proceso Poisson no homogéneo con intensidad de falla Log-normal Weibull modificada y comparación en el ajuste con otros NHPP

En este capítulo se desarrolla el NHPP con intensidad de falla Log-normal Weibull modificada (LNWM) y se comparará su ajuste con tres NHPP: proceso log lineal superpuesto, ley potencia superpuesto, proceso de intensidad de falla acotado en forma de bañera, en cinco escenarios de datos simulados y dos bases de datos reales.

4.1. Proceso Poisson no homogéneo con intensidad de falla Log-normal Weibull modificada

Usando como principio base la propiedad de igualdad entre la intensidad de falla y la función *hazard* de la distribución subyacente, bajo el supuesto de reparación mínima como se discutió en la Sección 3.10, la intensidad de fallas y número esperado de fallas para el proceso LNWM son:

- Intensidad de falla

$$\lambda_{LNWM}(t) = h_{LN}(t) + \beta (1/2 + \eta t) t^{-1/2} \exp(\eta t), \quad (4.1)$$

- Número esperado de fallas en el intervalo $(0, t]$, el procedimiento usado para llegar a esta expresión se puede encontrar en el Apéndice A.1 del Apéndice A.

$$\Lambda_{LNWM}(t) = -\log[1 - \Phi(z)] + \beta t^{1/2} \exp(\eta t), \quad (4.2)$$

donde $h_{LN}(t) = \phi(z)/\sigma t[1 - \Phi(z)]$, $z := z(t; \mu, \sigma) = [\log(t) - \mu]/\sigma$, $\Phi(\cdot)$ es la distribución acumulada de una normal estándar, $\phi(\cdot)$ es la densidad de una normal estándar, $\sigma, \beta, \eta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

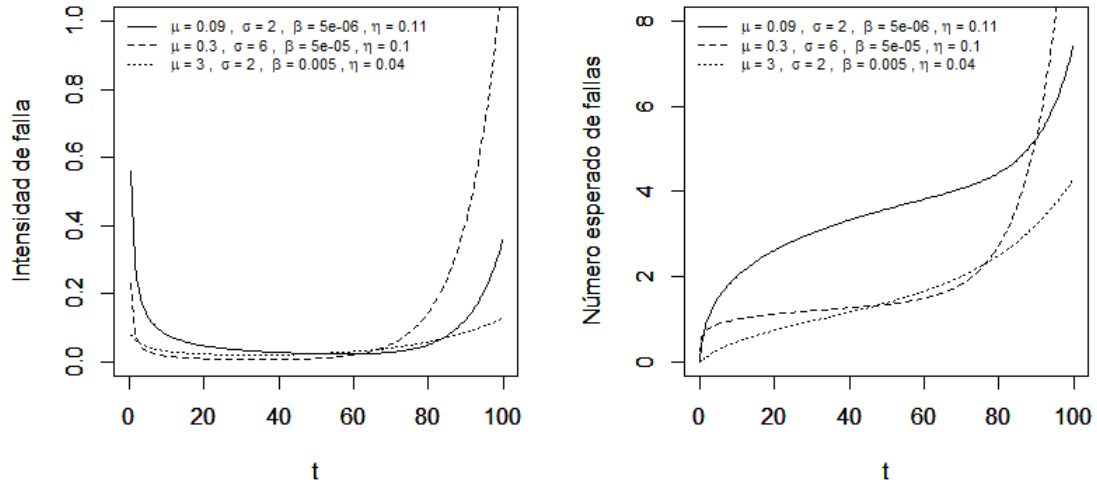


Figura 4.1: Comportamiento de la intensidad de falla $\lambda_{LNWM}(t)$ y el número esperado de falla $\Lambda_{LNWM}(t)$

La Figura 4.1 ilustra el comportamiento de $\lambda_{LNWM}(t)$ y $\Lambda_{LNWM}(t)$ para algunos valores de sus parámetros $\theta = (\mu, \sigma, \beta, \eta)$, donde la intensidad de falla tiene forma de bañera.

La primera derivada de la función de intensidad $\lambda_{LNWM}(t)$ con respecto a t es

$$\lambda'_{LNWM}(t) = -\frac{h_{LN}(t)}{\sigma t} (z + \sigma - \sigma t h_{LN}(t)) + \beta \exp(\eta t) \left[\eta^2 t^{1/2} + \eta t^{-1/2} - \frac{1}{4} t^{-3/2} \right], \quad (4.3)$$

la cual no cuenta con forma cerrada para t .

4.2. Estimación por máxima verosimilitud

Se dispone de un sistema que se ha observado durante un período $(0, t_a]$, el cual después de cada falla ha sido mantenido con reparación mínima. Sean $t_1 \leq \dots \leq t_n$ los tiempos hasta las primeras n fallas donde $t_n \leq t_a$. Entonces la verosimilitud del NHPP considerando que $\lambda(0) = 0$ es:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \left[\prod_{j=1}^n \lambda(t_j; \boldsymbol{\theta}) \right] \exp[-\Lambda(0, t_a; \boldsymbol{\theta})] \\ &= \prod_{i=1}^n \left[h_{LN}(t_i) + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\ &\quad \times \exp \left[\log [1 - \Phi(z_a)] - \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

y

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \log \left[h_{LN}(t_i) + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\ &\quad + \log [1 - \Phi(z_a)] - \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a), \end{aligned} \quad (4.5)$$

con $h_{LN}(t_i) = \phi(z_i)/\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]$, $z_i := z(t_i; \mu, \sigma) = [\log(t_i) - \mu]/\sigma$ y $z_a := z(t_a; \mu, \sigma) = [\log(t_a) - \mu]/\sigma$. Los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\beta}, \hat{\eta})$, se pueden obtener como solución del siguiente sistema de ecuaciones y el procedimiento para llegar a estas ecuaciones puede encontrarse en el apéndice A :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{h}_{LN}(t_i) \left[\hat{z}_i - \hat{\sigma} t_i \hat{h}_{LN}(t_i) \right]}{\hat{\sigma} \hat{\lambda}_{LNWM}(t_i)} + t_a \hat{h}_{LN}(t_a) = 0, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{z}_i \hat{h}_{LN}(t_i) \left[\hat{z}_i - \hat{\sigma} t_i \hat{h}_{LN}(t_i) \right]}{\hat{\sigma} \hat{\lambda}_{LNWM}(t_i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{h}_{LN}(t_i)}{\hat{\sigma} \hat{\lambda}_{LNWM}(t_i)} + \hat{z}_a t_a \hat{h}_{LN}(t_a) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1/2 + \hat{\eta} t_i) t_i^{-1/2} \exp(\hat{\eta} t_i)}{\hat{\lambda}_{LNWM}(t_i)} \right] \\ &\quad - \sqrt{t_a} \exp(\hat{\eta} t_a) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) \Big|_{\hat{\theta}} = \hat{\theta} = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(3/2 + t_i \hat{\eta}) t_i^{1/2} \exp(\hat{\eta} t_i)}{\hat{\lambda}_{LNWM}(t_i)} \right] \\ - \hat{\beta} t_a^{3/2} \exp(\hat{\eta} t_a) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\hat{h}_{LN}(t_i) = \phi(\hat{z}_i)/\hat{\sigma} t_i [1 - \Phi(\hat{z}_i)]$ es la función de tasa de falla estimada de una variable aleatoria Log-normal con parámetros estimados $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, $\hat{\lambda}_{LNWM}$ es la intensidad de falla estimada de un proceso LNWM y $\hat{z}_i := \hat{z}(t_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = [\log(t_i) - \hat{\mu}]/\hat{\sigma}$.

4.3. Medidas de desempeño

Siguiendo a Johnson y col. (1994), para caracterizar la exactitud de las estimaciones del NHPP son usadas técnicas numéricas y gráficas. Para ello, en la k -ésima replicación del proceso y su estimación, sea $\hat{\lambda}_k(t)$ y $\hat{\Lambda}_k(t)$ la función de intensidad y la función de intensidad acumulada estimadas, respectivamente. Para $k = 1, \dots, K$, se definen las siguientes medidas de error de estimación y sus valores medios, como veremos a continuación.

4.3.1. Medidas por realización del proceso

El error absoluto promedio en la estimación de la función de intensidad de falla $\lambda(t)$ en la realización k en el intervalo observado $(0, t_a]$ es

$$\delta_k \equiv \frac{1}{t_a} \int_0^{t_a} |\hat{\lambda}_k(t) - \lambda(t)| dt \quad (4.10)$$

y el error máximo absoluto es

$$\delta_k^* \equiv \max \left\{ |\hat{\lambda}_k(t) - \lambda(t)| : 0 \leq t \leq t_a \right\} \quad (4.11)$$

La desviación absoluta promedio del número esperado de fallas $\Lambda(t)$ es

$$\Delta_k \equiv \frac{1}{t_a} \int_0^{t_a} |\hat{\Lambda}_k(t) - \Lambda(t)| dt \quad (4.12)$$

y la desviación absoluta máxima correspondiente es

$$\Delta_k^* \equiv \max \left\{ |\hat{\Lambda}_k(t) - \Lambda(t)| : 0 \leq t \leq t_a \right\} \quad (4.13)$$

Los códigos para calcular estas medidas pueden encontrarse en el Apéndice B.4, en las funciones *integral_abs* y *max_abs*, ambas funciones reciben dos objetos. La función *integral_abs* calcula las medidas absolutas promedios y la función *max_abs* calcula las medidas absolutas máximas. Si se desea calcular δ_k o δ_k^* se debe ingresar $\hat{\lambda}_k(t)$ y $\lambda(t)$ en las funciones respectivas. Para calcular Δ_k o Δ_k^* se debe ingresar $\hat{\Lambda}_k(t)$ y $\Lambda(t)$.

4.3.2. Medidas agregadas

Para K realizaciones de un NHPP en un intervalo $(0, t_a]$, sean $\bar{\delta}$, $\bar{\delta}^*$ las medias muestrales de los estadísticos δ_k y δ_k^* respectivamente, para $k = 1, \dots, K$. Sean además V_{δ} y V_{δ}^* los respectivos coeficientes de variación muestrales. Entonces,

$$\bar{\delta} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta_k, \quad (4.14)$$

$$\bar{\delta}^* = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta_k^*, \quad (4.15)$$

$$V_{\delta} = \frac{\left[\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\delta_k - \bar{\delta})^2 \right]^{1/2}}{\bar{\delta}} \quad (4.16)$$

$$V_{\delta^*} = \frac{\left[\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\delta_k^* - \bar{\delta}^*)^2 \right]^{1/2}}{\bar{\delta}^*} \quad (4.17)$$

Las medias muestrales de las desviaciones absolutas promedio, desviaciones máximas absolutas y sus coeficientes de variación, son respectivamente,

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta_k, \quad (4.18)$$

$$\bar{\Delta}^* = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta_k^*, \quad (4.19)$$

$$V_{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\Delta_k - \bar{\Delta})^2 \right]^{1/2}}{\bar{\Delta}} \quad (4.20)$$

$$V_{\Delta^*} = \frac{\left[\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\Delta_k^* - \bar{\Delta}^*)^2 \right]^{1/2}}{\bar{\Delta}^*} \quad (4.21)$$

4.4. Simulación de los datos

Se simularon cinco escenarios con intensidades de falla en forma de bañera como se observa en las Figuras 4.2 y 4.3. Los escenarios propuestos en la Figura 4.2 son con base en las ecuaciones (4.22) y (4.23), ambas usadas originalmente en (Dijoux, 2009) como intensidad de falla inicial en un proceso de edad virtual. El escenario propuesto en la Figura 4.3 es generado con una intensidad de falla LNWM.

Los escenarios de simulación (a), (b), (c) y (d) son casos particulares de las siguientes ecuaciones

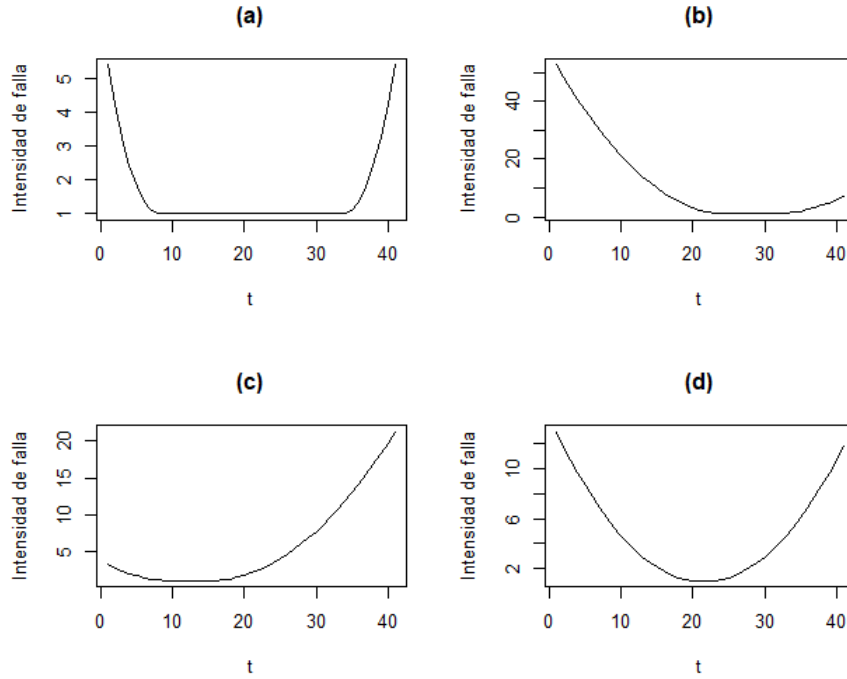


Figura 4.2: Escenarios de simulación (a), (b), (c), (d)

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_1 \beta_1 (t_1 - t)^{\beta_1 - 1} & \text{si } t \leq t_1 \\ \lambda & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \lambda + \alpha_2 \beta_2 (t - t_2)^{\beta_2 - 1} & \text{si } t_2 \leq t \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \lambda t - \alpha_1 (t_1 - t)^{\beta_1} + \alpha_1 t_1^{\beta_1} & \text{si } t \leq t_1 \\ \lambda t + \alpha_1 t_1^{\beta_1} & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \lambda t + \alpha_2 (t - t_2)^{\beta_2} + \alpha_1 t_1^{\beta_1} & \text{si } t_2 \leq t \end{cases} \quad (4.23)$$

con $\lambda, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\beta_1, \beta_2 > 1$ y $t_2 > t_1 > 0$. En particular los valores para generar los escenarios son: (a) $\lambda = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,03$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$; $t_1 = 7$; $t_2 = 33$, (b) $\lambda = 1$; $\alpha_1 = 0,03$; $\alpha_2 = 0,02$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$; $t_1 = 24$; $t_2 = 30$, (c) $\lambda = 1$; $\alpha_1 = 0,009$; $\alpha_2 = 0,01$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$; $t_1 = 9$; $t_2 = 14$ y (d) $\lambda = 1$; $\alpha_1 = 0,03$; $\alpha_2 = 0,02$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$; $t_1 = 20$; $t_2 = 21$.

El último escenario se realiza con el proceso LNWM introducido en el Capítulo 4, con los valores de los parámetros; $\mu = -1,811$, $\sigma = 0,960$, $\beta = 4,464 \times 10^{-5}$ y $\eta = 0,271$.

Para el estudio de simulación, se realiza un total de mil realizaciones, donde un sistema ha sido observado durante un periodo $(0, t_a]$. Cada realización es obtenida por medio de la técnica para simular NHPP conocida como “Transformación a escala temporal de un HPP”. La

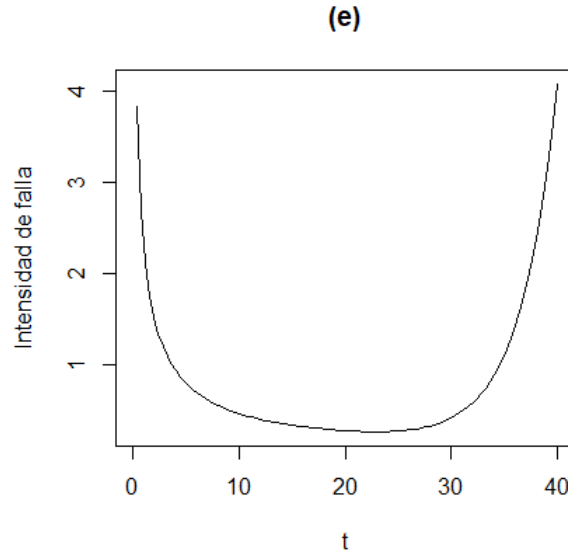


Figura 4.3: Escenario de simulación (e)

idea básica detrás de este método es la conexión entre el HPP con intensidad igual a 1 y un NHPP, este resultado proporciona un procedimiento análogo al método de transformación inversa. Específicamente, sea t'_1, t'_2, \dots tiempos de los eventos en un NHPP con $\Lambda(t)$ continua, entonces, $t_1 = \Lambda(t'_1), t_2 = \Lambda(t'_2), \dots$ son puntos de un HPP con intensidad de falla 1. Por lo tanto, la simulación implica generar variables Exponenciales y tomar $\Lambda^{-1}()$ del logaritmo de estas variables, que corresponde a los instantes de tiempo generados (Patrow, 1977). El programa R (R Core Team, 2019) implementado para este procedimiento puede encontrarse en los Apéndices por el nombre de `get_nhpp_realizations_int`, un paso a paso de la simulación es como sigue:

1. Se inicializa $t_a, s_0 = 0, t_0 = 0$ y $i = 0$.
2. Se simula una variable uniforme en $(0, 1)$, u_{i+1} .
3. Se asigna $s_{i+1} = s_i - \log(u_{i+1})$.
4. Se asigna $t_{i+1} = \Lambda^{-1}(s_{i+1})$.
5. Si $t_{i+1} > t_a$, devuelve t_1, t_2, \dots, t_i . Si no, vuelve a paso 2.

La Figura 4.4 muestra algunas realizaciones de los procesos simulados en el intervalo $(0, t_a = 40)$. Se observan que el número esperado de fallas final y la forma acumulada de estas varía en cada proceso.

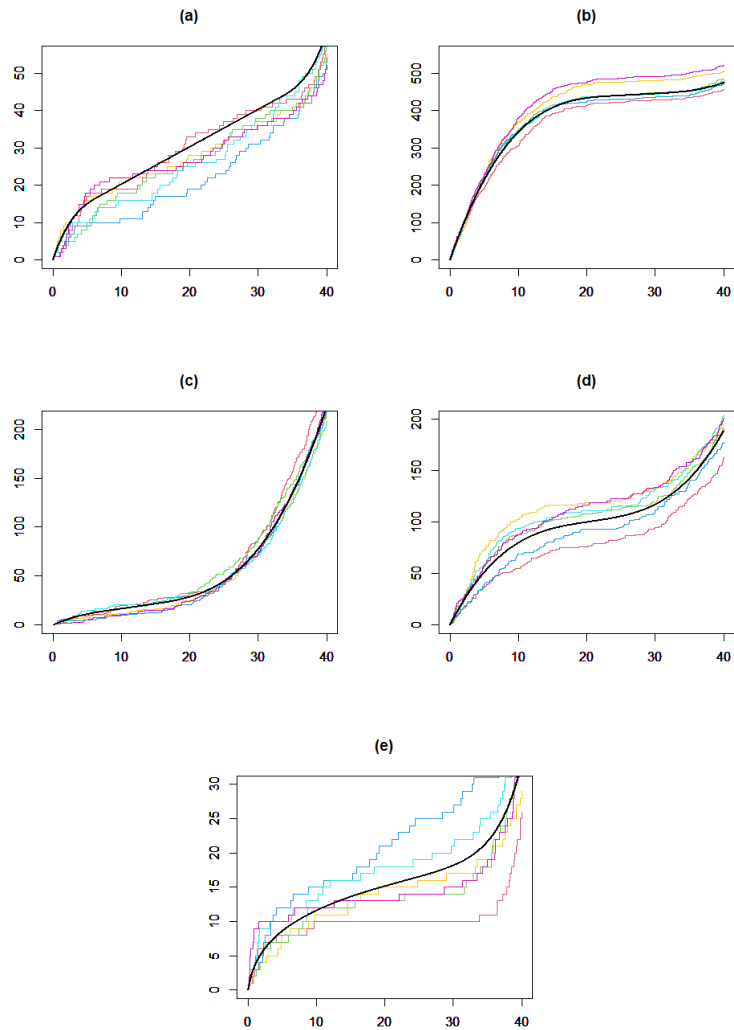


Figura 4.4: Algunas realizaciones de los procesos simulados por cada escenario. El eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la estimación no paramétrica del número esperado de fallas. La curva color negro corresponde al valor real del número esperado de fallas bajo el modelo NHPP simulado.

4.5. Resultados

Para estimar los parámetros de cada NHPP se usa el método de máxima verosimilitud minimizando el negativo de la función de log-verosimilitud. Se encuentran numéricamente los parámetros mediante la función *GenSA* del paquete *GenSA* y *Nelder_Mead* del paquete *lme4* en R. La función *GenSA* corresponde a un “algoritmo de recocido simulado generalizado” para

optimización global, el cual es usado en primera instancia para encontrar valores iniciales para el método de optimización de Nelder-Mead. Ambos algoritmos se describen en el Apéndice B.

Las siguientes tablas, muestran los resultados con las diferentes medidas de desempeño agregadas descritas en la Sección 4.3, para la comparación del ajuste de los cuatro modelos NHPP en los cinco escenarios a, b, c, d y e. De acuerdo a estos resultados el proceso Poisson no homogéneo LNWN tiene desempeños competitivos con respecto a los otros procesos.

La Tabla 4.1 muestra los resultados para el primer escenario de simulación. Se observa que el proceso S-PLP exhibe los mejores resultados en el error absoluto promedio, error máximo absoluto promedio y la desviación absoluta promedio. Por otro lado, a pesar de no contar con las mejores medidas de error, el modelo LNWM cuenta con menores medidas en los coeficientes de variación de estimación de las funciones de intensidad y de intensidad acumulada de falla, comparado con los otros procesos.

Tabla 4.1: Resultados del ajuste para el escenario (a)

Proceso	$\bar{\delta}$	V_{δ}	$\bar{\delta}^*$	V_{δ^*}	$\bar{\Delta}$	V_{Δ}	$\bar{\Delta}^*$	V_{Δ^*}
BBIP	0.481	0.181	26.990	0.379	4.401	0.607	24.412	0.442
S-LLP	0.495	0.214	21.152	0.521	4.785	0.727	22.659	0.462
LNWM	0.428	0.249	23.380	0.434	4.634	0.640	26.721	0.368
S-PLP	0.373	0.245	18.479	0.664	4.110	0.643	27.727	0.396

En la Tabla 4.2 se observa que para el segundo escenario, el proceso S-LLP muestra los mejores resultados con respecto a las medidas de errores y desviaciones, pero no tiene muy buenos resultados en las medidas de variación. Nuevamente el modelo LNWM muestra menores medidas en los coeficientes de variación de error respecto a los otros modelos.

Tabla 4.2: Resultados del ajuste para el escenario (b)

Proceso	$\bar{\delta}$	V_{δ}	$\bar{\delta}^*$	V_{δ^*}	$\bar{\Delta}$	V_{Δ}	$\bar{\Delta}^*$	V_{Δ^*}
BBIP	2.287	0.074	21.677	0.149	16.955	0.538	22.400	0.402
S-LLP	1.685	0.227	17.480	0.357	16.905	0.905	21.733	0.411
LNWM	7.182	0.009	23.000	0.003	56.287	0.213	13.739	0.028
S-PLP	7.271	0.006	23.051	0.002	58.152	0.193	14.223	0.023

En la Tabla 4.3 se observa que para el tercer escenario, el proceso S-PLP muestra los mejores resultados en el error absoluto promedio, desviación máxima absoluto promedio y la desviación absoluta promedio, y el proceso BBIP muestra los menores valores en la de dispersión de los errores y en el error absoluto promedio. En este caso, cuando se observa el desempeño del modelo LNWM, el desempeño de este modelo no dista mucho los demás.

En la Tabla 4.4 se observa que el modelo S-PLP tiende a tener los mejores resultados basados en diferentes medidas de error de ajuste. Ahora, respecto a la dispersión de las medidas de error, el modelo LNWM tiende a comportarse relativamente bien en este aspecto.

Finalmente, en la Tabla 4.5 se observa que para el quinto escenario las medidas de error y sus dispersiones son muy similares entre ellas, el proceso BBIP muestra los mejores resultados en

Tabla 4.3: Resultados del ajuste para el escenario (c)

Proceso	δ	V_δ	δ^*	V_{δ^*}	$\bar{\Delta}$	V_Δ	$\bar{\Delta}^*$	V_{Δ^*}
BBIP	2.663	0.017	18.459	0.017	24.681	0.203	29.020	0.030
S-LLP	0.689	0.239	23.170	0.299	5.180	0.504	23.486	0.403
LNWM	0.740	0.204	22.173	0.321	5.281	0.504	23.491	0.394
S-PLP	0.604	0.330	23.043	0.343	4.938	0.541	24.680	0.422

Tabla 4.4: Resultados del ajuste para el escenario (d)

Proceso	$\bar{\delta}$	V_δ	$\bar{\delta}^*$	V_{δ^*}	$\bar{\Delta}$	V_Δ	$\bar{\Delta}^*$	V_{Δ^*}
BBIP	1.670	0.052	22.794	0.029	11.795	0.425	26.886	0.306
S-LLP	0.682	0.458	19.967	0.504	7.703	0.989	22.192	0.410
LNWM	2.296	0.116	21.013	0.127	14.688	0.275	18.435	0.555
S-PLP	1.489	0.070	17.509	0.311	10.428	0.396	14.531	0.489

el error máximo absoluto promedio, la desviación absoluta promedio y la desviación máxima absoluta promedio, pero los procesos no parecen diferir mucho entre sí.

Tabla 4.5: Resultados del ajuste para el escenario (e)

Proceso	δ	V_δ	δ^*	V_{δ^*}	$\bar{\Delta}$	V_Δ	$\bar{\Delta}^*$	V_{Δ^*}
BBIP	3.8977	0.0370	0.7351	1.1532	81.1229	0.0421	40.0000	1×10^{-16}
S-LLP	3.8979	0.0370	2.3270	3.5124	83.2312	0.0426	39.9995	0.0003
LNWM	3.8970	0.0372	0.8282	0.6407	83.2434	0.0401	39.9990	0.0004
S-PLP	3.9126	0.0362	0.7416	0.3038	83.6929	0.0379	39.9975	0.0006

De acuerdo con los resultados observados para el modelo NHPP-LNWM, según varias de las medidas de ajuste usadas este es un modelo competitivo y aunque no es el que muestra las mejores cifras, puede clasificarse como un modelo flexible, es decir, que puede aproximar relativamente bien diferentes procesos con funciones de intensidad de falla en forma de bañera.

4.6. Comparación de NHPP con datos reales

En esta sección se usarán los cuatro NHPP considerados hasta ahora, para ajustar los datos de falla de un camión de basura introducidos en Coetzee (1996) y los datos de falla de una máquina de carga, transporte y descarga operada por diesel, introducidos inicialmente en Kumar y col. (1989), ambos conjuntos de datos fueron utilizados por Pulcini (2001b) para mostrar el ajuste del proceso S-PLP. Para ambos equipos se evidencian intensidades de falla no monótonas. En la siguiente Sección, se evalúa el ajuste de todos los procesos por comparaciones gráficas y por medidas de ajuste: error cuadrático medio (MSE), raíz del error cuadrático medio (RMSE) y error absoluto medio (MAE). Las medidas se calculan comparando el número esperado de fallas estimado de forma paramétrica y el número esperado de fallas estimado de forma no paramétrica según la ecuación (3.18), siguen la lógica de Meeker y Escobar (1998) de comparar

las estimaciones de máxima verosimilitud con la estimación no paramétrica del número esperado de fallas, se toman en cuenta algunas de las medidas de error más populares:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\hat{\Lambda}(t_i) - \tilde{\Lambda}(t_i) \right]^2,$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\hat{\Lambda}(t_i) - \tilde{\Lambda}(t_i) \right]^2},$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \hat{\Lambda}(t_i) - \tilde{\Lambda}(t_i) \right|,$$

donde t_i son los tiempos de falla registrados, n el número de fallas, $\hat{\Lambda}(t_i)$ es el número esperado de fallas estimado de forma paramétrica y $\tilde{\Lambda}(t_i)$ es el número esperado de fallas estimado de forma no paramétrica.

La Tabla 4.6 muestra los tiempos de las 44 fallas para una máquina de carga, transporte y descarga y la Tabla 4.7 muestra los tiempos de las 128 fallas de un camión de basura.

Tabla 4.6: Tiempos de falla en horas de la máquina de carga, transporte y descarga

16	39	71	95	98	110	114	226	294
344	555	599	757	822	963	1077	1167	1202
1257	1317	1345	1372	1402	1536	1625	1643	1675
1726	1736	1772	1796	1799	1814	1868	1894	1970
2042	2044	2094	2127	2291	2295	2299	2317	

Tabla 4.7: Tiempos de falla en horas del camión de basura

78	158	331	381	523	620	664	1805	1817	2068	3253
4489	4725	4961	5138	5200	5278	5711	6400	6444	6677	7999
8001	8489	9000	9086	10262	10817	11062	11082	11086	11122	11534
12031	12339	12733	13265	13508	13673	13780	14443	14501	14656	14906
14983	15004	15062	15072	15136	15206	15247	15700	15714	15972	16186
16284	16329	16425	16605	16723	16731	16797	16859	17090	17305	17484
17510	17511	17536	17621	17703	17809	17968	17984	18175	18443	18458
18667	18669	18701	18723	18822	18860	18922	18935	18945	18960	18961
18979	19013	19032	19034	19169	19184	19201	19416	19455	19525	19595
19601	19613	19643	19671	19713	19785	19801	19937	19990	20432	20433
20434	20698	21460	21543	21584	21602	21645	21706	21762	21867	21912
21914	21937	21938	21939	21951	21954	21982				

4.6.1. Resultados del ajuste para datos reales

En el ajuste para las fallas del camión de basuras, el proceso BBIP muestra un buen ajuste al comienzo de las horas de operación pero a partir de la hora de operación 5000 la calidad del ajuste empieza a decaer, mientras que los otros tres procesos ajustan consistentemente durante todo la operación. Según las medidas de error de la Tabla 6.8, los procesos S-LLP, LNWM y S-PLP parecen tener un buen ajuste.

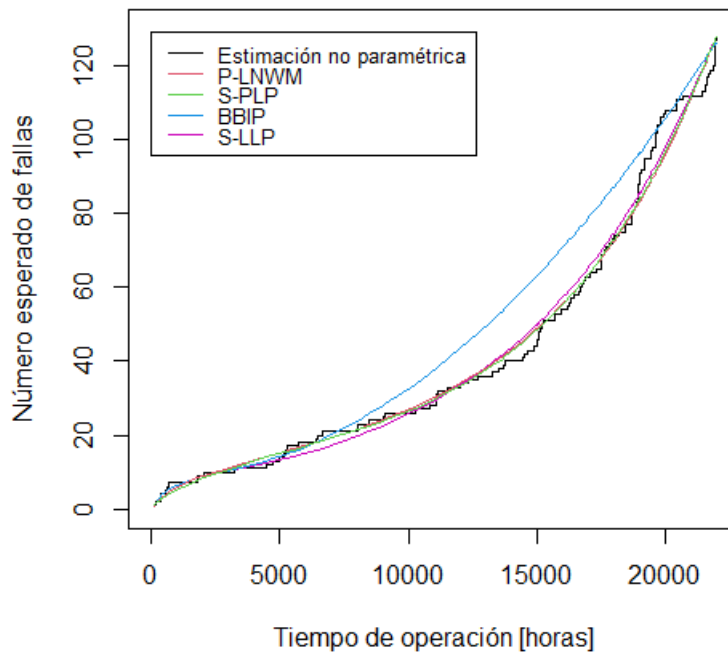


Figura 4.5: Resultados del ajuste de los NHPP para el camión de basuras

Tabla 4.8: Medidas de error medio de ajuste para cada uno de los ajustes de la aplicación del camión de basuras

Proceso	MSE	RMSE	MAE
BBIP	103.509	10.174	7.982
S-LLP	16.983	4.121	3.267
LNWM	20.639	4.543	3.146
S-PLP	18.348	4.284	2.975

Tabla 4.9: Valores estimados de los parámetros de los tiempos de falla del camión de basuras

BBIP	$\hat{\alpha}_1 = 0.013$	$\hat{\alpha}_2 = 451.637$	$\hat{\beta}_1 = 646.465$	$\hat{\beta}_2 = 9,123 \times 10^8$
S-LLP	$\hat{\alpha}_1 = 0.012$	$\hat{\alpha}_2 = 8,762 \times 10^{-4}$	$\hat{\beta}_1 = 0.002$	$\hat{\beta}_2 = 1,357 \times 10^{-4}$
LNWM	$\hat{\mu} = 4.659$	$\hat{\sigma} = 0.930$	$\hat{\beta} = 0.028$	$\hat{\eta} = 1,481 \times 10^{-4}$
S-PLP	$\hat{\alpha}_1 = 73.586$	$\hat{\alpha}_2 = 7396.775$	$\hat{\beta}_1 = 0.639$	$\hat{\beta}_2 = 4.130$

Para los datos de falla de la máquina de carga, transporte y descarga, todos los procesos parecen ser muy competitivos. En términos de medidas de ajuste, los procesos BBIP y LNWM son los mejores procesos.

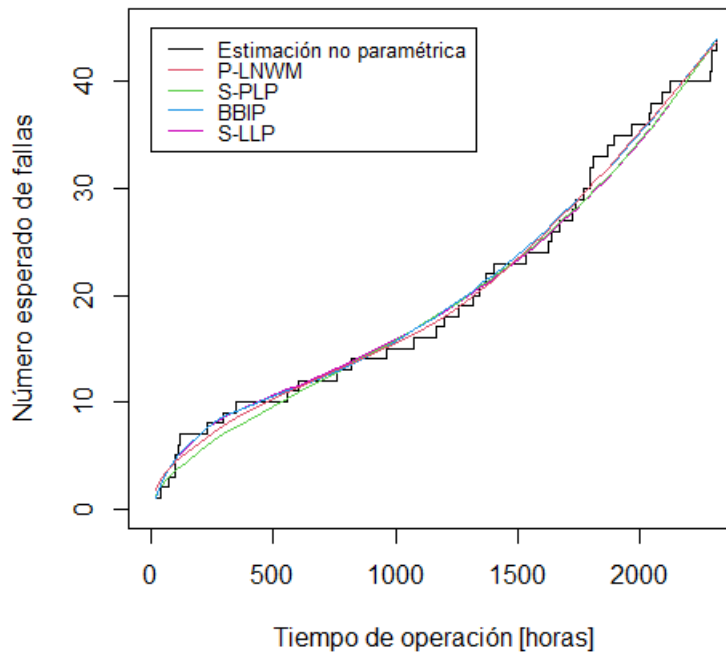


Figura 4.6: Resultados del ajuste de los NHPP para la máquina de carga, transporte y descarga

Tabla 4.10: Medidas de error medio de ajuste para cada uno de los ajustes para las fallas de la máquina de carga, transporte y descarga

Proceso	MSE	RMSE	MAE
BBIP	1.196	1.093	0.855
S-LLP	1.972	1.404	1.031
LNWM	1.292	1.136	0.896
S-PLP	2.424	1.557	1.209

Tabla 4.11: Valores estimados de los parámetros para los tiempos de falla de la máquina de carga, transporte y descarga

BBIP	$\hat{\alpha}_1 = 0.065$	$\hat{\alpha}_2 = 10.644$	$\hat{\beta}_1 = 141.922$	$\hat{\beta}_2 = 8,197 \times 10^5$
S-LLP	$\hat{\alpha}_1 = 0.060$	$\hat{\alpha}_2 = 0.006$	$\hat{\beta}_1 = 0.008$	$\hat{\beta}_2 = 7,953 \times 10^{-4}$
LNWM	$\hat{\mu} = 7.070$	$\hat{\sigma} = 0.126$	$\hat{\beta} = 0.440$	$\hat{\eta} = 9,777 \times 10^{-5}$
S-PLP	$\hat{\alpha}_1 = 908.269$	$\hat{\alpha}_2 = 11.848$	$\hat{\beta}_1 = 3.203$	$\hat{\beta}_2 = 0.602$

Capítulo 5

Mantenimiento preventivo óptimo

En este capítulo se plantea un programa de mantenimiento preventivo (MP) óptimo basado en costo, suponiendo como proceso de fallas el NHPP introducido en el Capítulo 4 y se adaptó a la estrategia propuesta en Mun, Bae y Kvam (2013) descrita en este documento en la Sección 3.1. El MP óptimo consiste en la combinación de acciones de reparación mínima dada una falla y acciones de mantenimiento imperfecto programadas. Se emplea el MP para datos reales introducidos en el Capítulo 5, se tienen en cuenta diferentes niveles de mejora dadas las acciones programadas y diferentes razones o “ratios” entre los costos del mantenimiento imperfectos y reparación mínima (C_{MP}/C_{MR}).

5.1. Planteamiento mantenimiento preventivo óptimo

En consideración a lo descrito anteriormente en la Sección 3.1, adaptando el MP de Mun, Bae y Kvam (2013) para el proceso LNWM, la tasa de falla inicial que se conserva hasta la primera acción de MP, es:

$$\lambda_1(t) = h_{LN}(t) + \beta(1/2 + \eta t)t^{-1/2} \exp(\eta t), \quad (5.1)$$

y la función condicional de intensidad en un intervalo genérico $(\xi_{i-1}, \xi_i]$ dado que el MP ha sido realizado en ξ_{i-1} es

$$\lambda_i(t|\xi_{i-1}) \equiv \lambda_1(t + t_J - \rho\xi_{i-1}), \quad (5.2)$$

para $i = 2, 3, \dots, m$, donde t_J es el tiempo en el que $\lambda(t)$ es mínima y por lo tanto, para $t > t_J$ la intensidad de falla es estrictamente creciente. Desviando el tiempo en la cantidad t_J después de cada mantenimiento preventivo, el modelo NHPP-LNWM no toma en cuenta la parte inicial donde la intensidad es decreciente. Reemplazando la ecuación 5.1 en la 5.2,

$$\lambda_i(t|\xi_{i-1}) \equiv h_{LN}(t + t_J - \rho\xi_{i-1}) + \beta(1/2 + \eta(t + t_J - \rho\xi_{i-1})) \times (t + t_J - \rho\xi_{i-1})^{-1/2} \exp(\eta(t + t_J - \rho\xi_{i-1})). \quad (5.3)$$

Dados valores específicos de ρ y costos se procede a encontrar el ξ_i que minimice el costo total unitario por medio de métodos numéricos, en este caso se uso el algoritmo conocido como “Brent” (Brent, 1973), el cual está descrito en el Apéndice B.

5.2. Resultados del mantenimiento óptimo para las aplicaciones

Se inicia hallando el valor de ξ_1 tal que el costo esperado por unidad sea mínimo, dados diferentes grados de mejora con la reparación imperfecta y “ratios” entre el costo de la reparación imperfecta y la mínima. Es necesario mencionar que los costos de mantenimiento usados son solo con fines ilustrativos.

Los valores estimados de los parámetros de los procesos LNWM para ambas aplicaciones previamente presentadas en la Sección 4.6, se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Valores estimados para los parámetros del proceso ajustado LNWM en las dos aplicaciones

Aplicación	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$
Camión de basuras (CB)	4.659	0.930	0.028	$1,481 \times 10^{-4}$
Maquina de carga transporte y descarga (MCTD)	7.070	0.126	0.440	$9,777 \times 10^{-5}$

Usando los valores estimados de los parámetros, reportados en la Tabla 5.1 se obtienen las estimaciones de las funciones de intensidades iniciales de falla con los datos del camión de basuras (CB) y la maquina de carga transporte y descarga (MCTD) respectivamente,

$$\hat{\lambda}_1^{CB}(t) = \frac{\phi(\hat{z})}{0,930t [1 - \Phi(\hat{z})]} + 0,028 (1/2 + 1,481 \times 10^{-4}t) \times t^{-1/2} \exp(1,481 \times 10^{-4}t), \quad (5.4)$$

donde $\hat{z} = [\log(t) - 4,659]/0,930$,

$$\hat{\lambda}_1^{MCTD}(t) = \frac{\phi(\hat{z})}{0,126t [1 - \Phi(\hat{z})]} + 0,440 (1/2 + 9,777 \times 10^{-5}t) \times t^{-1/2} \exp(9,777 \times 10^{-5}t), \quad (5.5)$$

donde $\hat{z} = [\log(t) - 7,070]/0,126$.

Para la construcción de funciones condicionales de intensidad estimadas se tienen en cuenta las tasas iniciales de falla para encontrar el punto t_j por medio de optimización usando el método Brent, y reemplazando este tiempo en las ecuaciones de las intensidades condicionales estimadas, se obtienen las siguientes funciones:

$$\hat{\lambda}_i^{CB}(t|\xi_{i-1}) \equiv \hat{\lambda}_1^{CB}(t + 4631,522 - \rho\xi_{i-1}), \quad (5.6)$$

$$\hat{\lambda}_i^{MCTD}(t|\xi_{i-1}) \equiv \hat{\lambda}_1^{MCTD}(t + 849,347 - \rho\xi_{i-1}), \quad (5.7)$$

como se menciona anteriormente ρ representa el nivel de mejora.

Después de encontrar ξ_1 se calculan los valores de ξ_i para $i = 2, 3, 4, \dots$ por medio de la ecuación 3.9. El procedimiento se realiza para $\rho = 0,8, 0,9, 1$ y “ratios” entre el costo de mantenimiento programado y reparación mínima de 0,5, 1, 5. Para la aplicación del camión de basuras $t_j = 4631,522$ y $t_a = 21982$ y para la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga $t_j = 849,347$ y $t_a = 2317$. El código para la implementación del mantenimiento se puede encontrar en el Apéndice C.5.

Como se puede apreciar en las Tablas 5.3 y 5.5 el costo del mantenimiento por unidad de tiempo es menor a menor sea el “ratios” (C_{MP}/C_{MR}) y mayor sea el grado de mejora. También se deduce de las Figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 que el número de mantenimientos depende directamente del “ratio”. De las Tablas 5.2 y 5.4 se deduce que las intervenciones programadas óptimas empiezan más temprano a mayor nivel de mejora y menor “ratio”.

Tabla 5.2: ξ_i óptimos en la aplicación del camión de basuras para cada especificación.

ρ	ξ_i	"Ratios"		
		0.5	1	5
0.8	ξ_1	9887.32	10606.33	12425.71
	ξ_2	13165.65	14459.88	17734.76
	ξ_3	15788.31	17542.72	
	ξ_4	17886.45	20008.98	
	ξ_5	19564.95		
	ξ_6	20907.76		
0.9	ξ_1	8739.25	8739.25	11358.63
	ξ_2	11973.05	11973.05	16949.88
	ξ_3	14883.48	14883.48	
	ξ_4	17502.86	17502.86	
	ξ_5	19860.30	19860.30	
1	ξ_1	7523.27	7523.28	10415.01
	ξ_2	10415.02	10415.03	16198.51
	ξ_3	13306.77	13306.78	
	ξ_4	16198.51	16198.54	
	ξ_5	19090.26	19090.29	

Tabla 5.3: Costo por unidad de tiempo mínimo en la aplicación del camión de basuras para cada especificación.

ρ	"Ratios"		
	0.5	1	5
0.8	1401.513	1463.859	1721.473
0.9	1285.552	1342.417	1595.48
1	1214.273	1271.137	1505.199

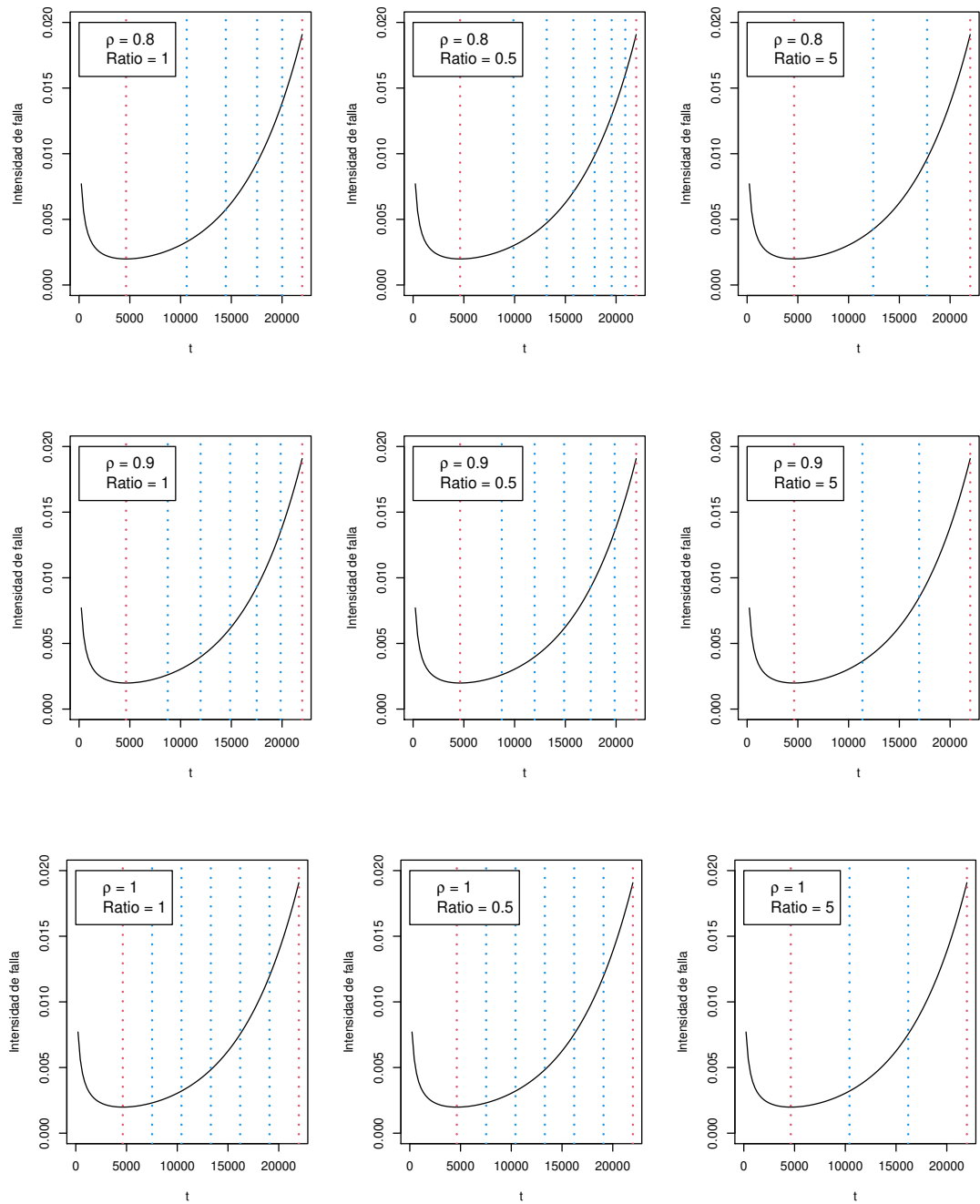


Figura 5.1: Intensidad de fallas con los parámetros estimados para la aplicación vs tiempo para cada especificación en la aplicación del camión de basuras. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.

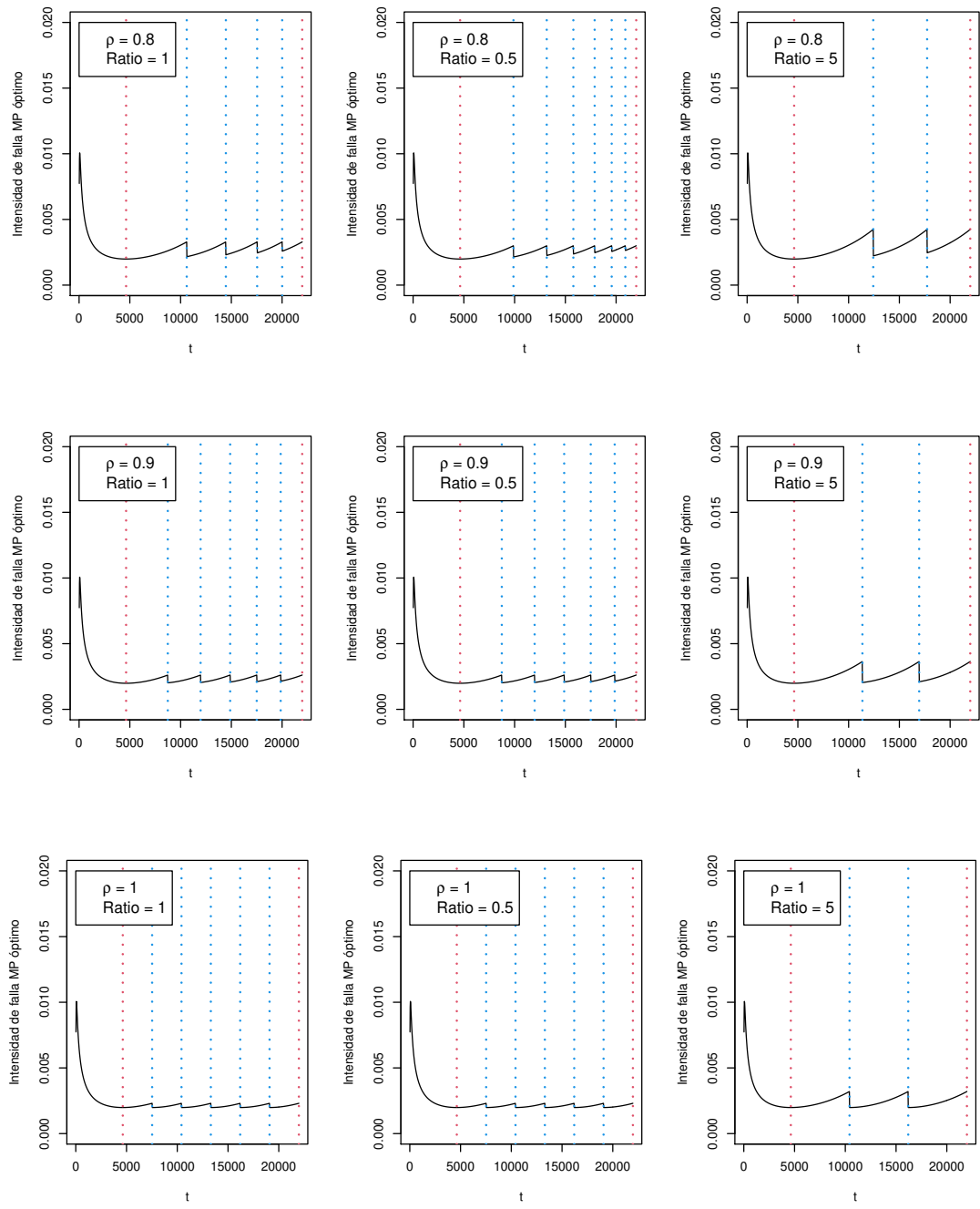


Figura 5.2: Intensidad de fallas bajo el MP óptimo vs tiempo para cada especificación en la aplicación del camión de basuras. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.

Tabla 5.4: ξ_i óptimos en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga, para cada especificación.

ρ	ξ_i	"Ratios"		
		0.5	1	5
0.8	ξ_1	1486.93	1576.16	1759.08
	ξ_2	1827.12	1987.74	
	ξ_3	2099.28		
0.9	ξ_1	1236.81	1279.07	1666.50
	ξ_2	1500.58	1580.88	
	ξ_3	1737.98	1852.51	
	ξ_4	1951.64	2096.98	
	ξ_5	2143.94		
1	ξ_1	1093.96	1142.88	1583.17
	ξ_2	1338.56	1436.41	
	ξ_3	1583.17	1729.94	
	ξ_4	1827.78	2023.47	
	ξ_5	2072.39		

Tabla 5.5: Costo por unidad de tiempo mínimo en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga, para cada especificación.

ρ	"Ratios"		
	0.5	1	5
0.8	8506.869	8808.673	9800.749
0.9	7615.145	8070.608	9370.726
1	6904.62	7352.691	8923.915

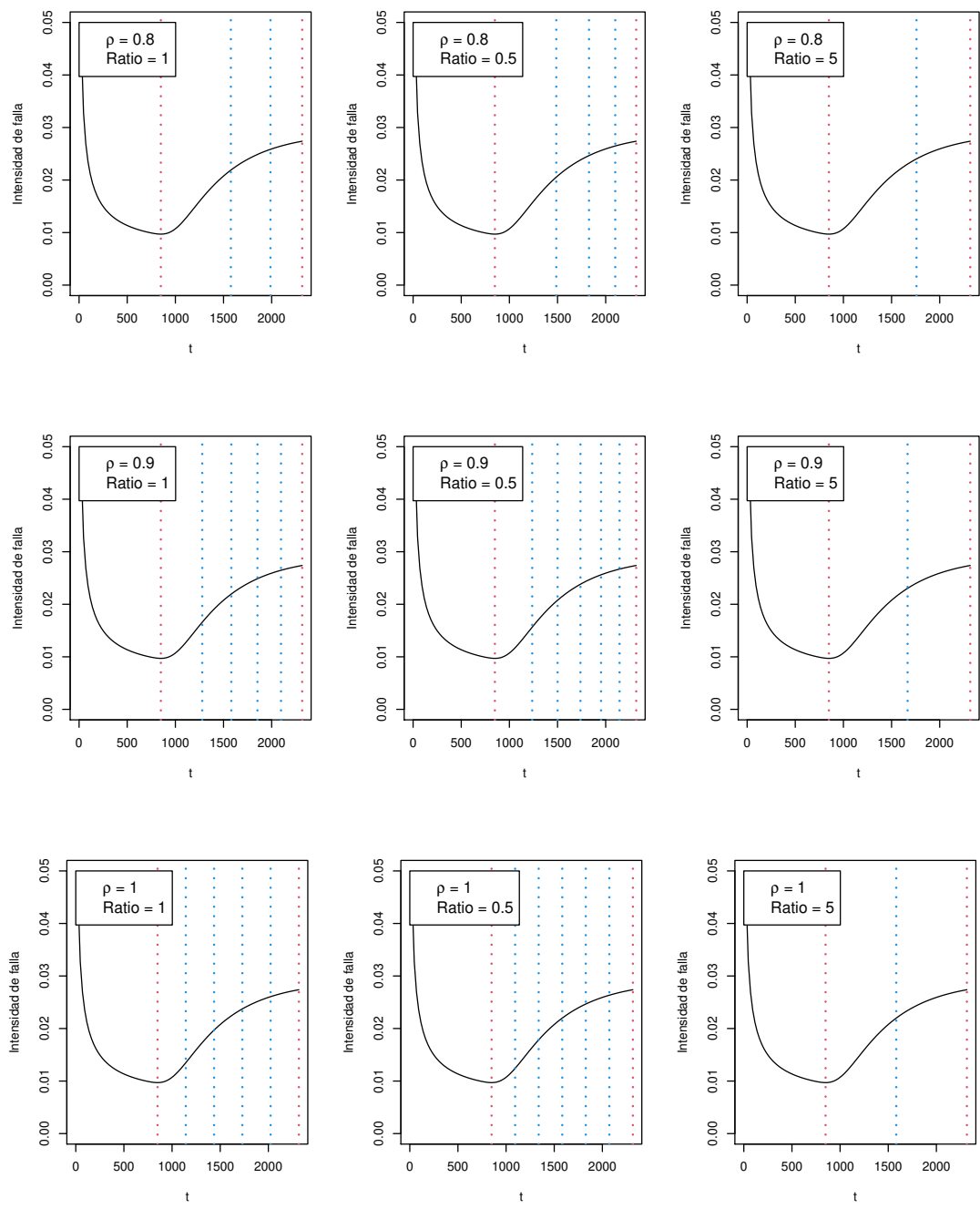


Figura 5.3: Intensidad de fallas con los parámetros estimados para la aplicación vs tiempo para cada especificación en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.

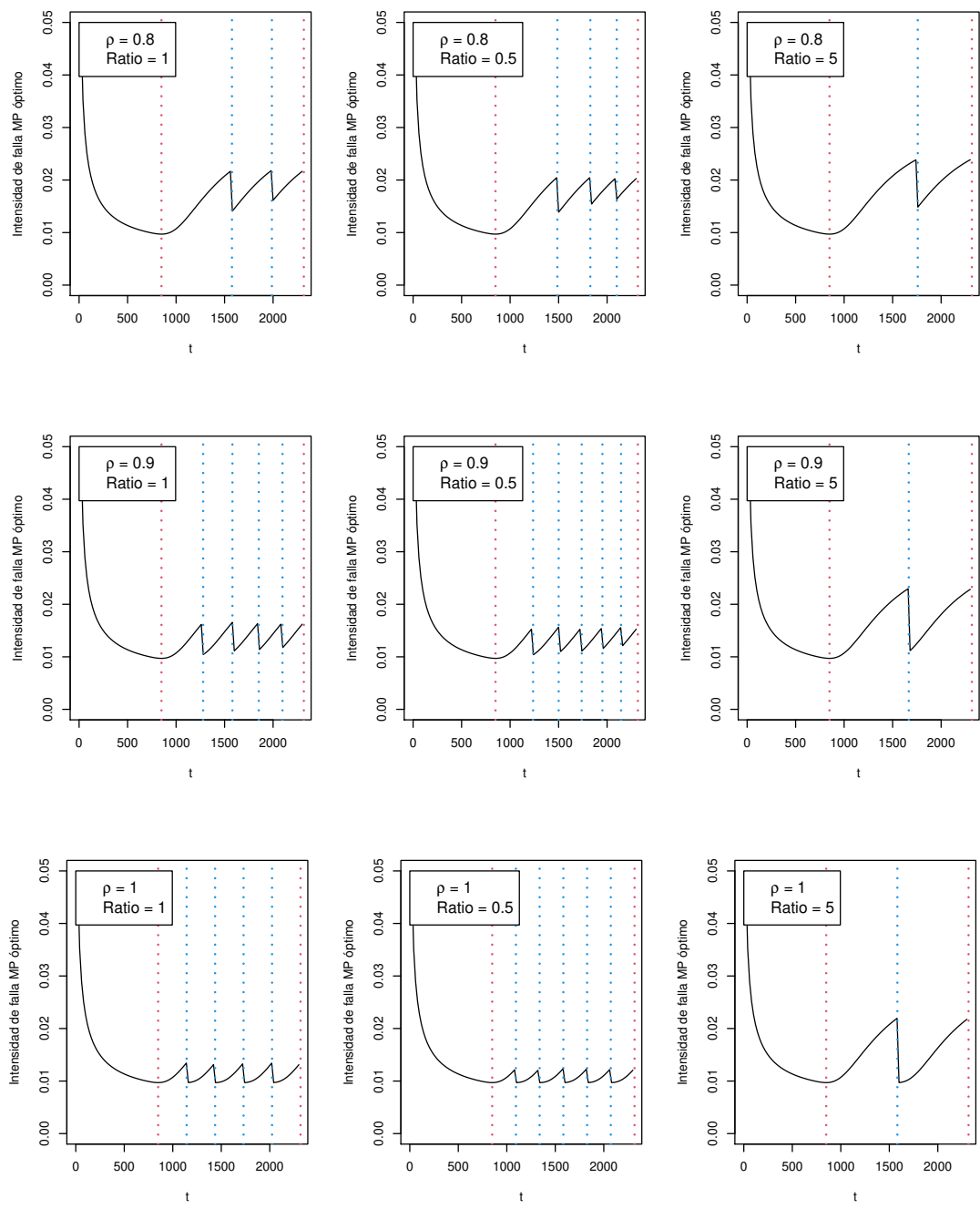


Figura 5.4: Intensidad de fallas bajo el MP óptimo vs tiempo para cada especificación en la aplicación de la maquina de carga, transporte y descarga. Las líneas verticales rojas corresponde a t_J y t_a , y las líneas azules a los puntos óptimos del MP.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se propone un NHPP basado en la distribución de vida Log-normal Weibull, obteniendo un NHPP capaz de modelar intensidades de falla no monótonas, en particular en forma de bañera. Bajo cinco escenarios simulados y dos aplicaciones se compara este nuevo NHPP con otros NHPP, capaces de modelar intensidades de falla no monótonas, obteniendo resultados competitivos. Por último, se plantean modelos de mantenimiento preventivo para los procesos estimados en las aplicaciones y los resultados de los modelos son consistentes, intuitivos y fáciles de implementar.

Como se pudo evidenciar en la etapa de modelación del Capítulo 4, entre los casos estudiados mediante simulación, se observaron algunos escenarios en los cuales se encontraron pocas diferencias en la calidad de los ajustes de los modelos NHPP considerados, mientras que en otros escenarios las diferencias fueron más notorias, pero en general se encuentra que los modelos S-PLP, S-LLP son bastante flexibles, en el sentido de que ajustan relativamente bien sobre procesos con distintas funciones de intensidad de falla no monótonas y el NHPP-LNWM propuesto en este trabajo es competitivo frente a estos dos modelos.

Una de las grandes dificultades encontradas en la estimación de los modelos NHPP es la definición de valores iniciales apropiados para los algoritmos numéricos de optimización, pues debido a que no hay formas cerradas para las ecuaciones en la estimación de máxima verosimilitud y al estar involucrados cuatro o más dimensiones en el espacio paramétrico, los algoritmos de optimización generales pueden converger muy lentamente o aún llegar a soluciones locales muy distintas según los valores iniciales. Los resultados de estimación pueden variar en función de estos valores de inicio y por tanto, la calidad de los ajustes a los datos reales o simulados también pueden variar significativamente. El problema es que no es posible determinar una regla general para definir tales valores de inicio sino que para cada modelo a estimar hay que tratar de calibrar estas cantidades. En la literatura se han recomendado para algunos procesos como el S-PLP, procesos log-lineales, entre otros, pero para el NHPP-LNWM que se ha propuesto en este trabajo es necesario hacer una exploración en esta vía. Así es probable que los resultados presentados

con este proceso pudieran ser mejorados si se logra una mejor estrategia de inicio en las rutinas de estimación.

Finalmente, con respecto al mantenimiento preventivo óptimo, vimos que el costo del mantenimiento por unidad de tiempo es menor a menor sea el “ratio” de costo y mayor sea el grado de mejora. Por su parte, el número de mantenimientos preventivos es inversamente proporcional al “ratio”. A medida que el sistema se va deteriorando es necesario hacer mantenimientos más seguidos y esto incrementa a su vez los costos.

Apéndice A

Desarrollo resultados matemáticos

A.1. Número esperado de fallas NHPP LNWM

$$\Lambda_{LNWM}(t) = \int_0^t \left[\frac{\phi(z)}{\sigma s [1 - \Phi(z)]} + \beta (1/2 + \eta s) s^{-1/2} \exp(\eta s) \right] ds \quad (\text{A.1})$$

donde $z := z(s; \mu, \sigma) = [\log(s) - \mu]/\sigma$, $\Phi(\cdot)$ es la distribución acumulada de una normal estándar, $\phi(\cdot)$ es la densidad de una normal estándar. Luego,

$$\Lambda_{LNWM}(t) = \int_0^t \left[\frac{\phi(z)}{\sigma s [1 - \Phi(z)]} \right] ds + \int_0^t \left[\beta (1/2 + \eta s) s^{-1/2} \exp(\eta s) \right] ds, \quad (\text{A.2})$$

Para la integral $\int_0^t \left[\frac{\phi(z)}{\sigma s [1 - \Phi(z)]} \right] ds$, realizamos sustitución, donde $u = \Phi(z)$ y $du = \phi(z)/\sigma s ds$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\frac{\phi(z)}{\sigma s [1 - \Phi(z)]} \right] ds &= \int_0^{\Phi(z)} \frac{dv}{1 - u} \\ &= -\log(1 - u) \Big|_0^{\Phi(z)} \\ &= -\log[1 - \Phi(z)] + \log(1) \\ &= -\log[1 - \Phi(z)]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para resolver la segunda integral se separa de la siguiente forma

$$\int_0^t \left[\beta (1/2 + \eta s) s^{-1/2} \exp(\eta s) \right] ds = \underbrace{\beta \int_0^t 1/2 s^{-1/2} \exp(\eta s) ds}_{(1)} + \underbrace{\beta \int_0^t \eta s^{1/2} \exp(\eta s) ds}_{(2)}, \quad (\text{A.4})$$

para (1) en la ecuación (A.4) se aplica integración por partes, tal que $dv = 1/2 s^{-1/2}$ y $u = \exp(\eta s)$, entonces $du = \eta \exp(\eta s) ds$ y $v = s^{1/2}$. La integral $\int_0^t 1/2 s^{-1/2} \exp(\eta s) ds = t^{1/2} \exp(\eta t) - \int_0^t \eta s^{1/2} \exp(\eta s) ds$. Por lo tanto en A.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\beta (1/2 + \eta s) s^{-1/2} \exp(\eta s) \right] ds &= \beta t^{1/2} \exp(\eta t) - \beta \int_0^t \eta s^{1/2} \exp(\eta s) ds \\ &+ \beta \int_0^t \eta s^{1/2} \exp(\eta s) ds \\ &= \beta t^{1/2} \exp(\eta t). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Reemplazando los resultados de (A.3) y (A.5) en (A.2)

$$\Lambda_{LNWM}(t) = -\log[1 - \Phi(z(t))] + \beta t^{1/2} \exp(\eta t). \quad (\text{A.6})$$

con $z := z(t; \mu, \sigma) = [\log(t) - \mu]/\sigma$.

A.2. Derivadas log-verosimilitud para μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mu} \log [1 - \Phi(z_a)] - \frac{\partial}{\partial \mu} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mu} \log [1 - \Phi(z_a)] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \lambda_{LNWM}(t_i)}{\lambda_{LNWM}(t_i)} + \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} [1 - \Phi(z_a)]}{[1 - \Phi(z_a)]}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial \mu} \phi(z_i) = z_i \phi(z_i)/\sigma$ y $\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(z_i) = -\phi(z_i)/\sigma$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} \lambda_{LNWM}(t_i) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} \right] = \frac{1}{\sigma t_i} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\phi(z_i)}{[1 - \Phi(z_i)]} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma t_i} \frac{\frac{z_i \phi(z_i)}{\sigma} [1 - \Phi(z_i)] - \phi(z_i) \frac{\phi(z_i)}{\sigma}}{[1 - \Phi(z_i)]^2} \\
&= \frac{1}{\sigma^2 t_i} \frac{z_i \phi(z_i) [1 - \Phi(z_i)] - \phi(z_i)^2}{[1 - \Phi(z_i)]^2} \\
&= \frac{z_i}{\sigma} \frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i (1 - \Phi(z_i))} - t_i \frac{\phi^2(z_i)}{\sigma^2 t_i^2 (1 - \Phi(z_i))^2} \\
&= \frac{z_i}{\sigma} h_{LN}(t_i) - t_i h_{LN}^2(t_i) = \frac{h_{LN}(t_i)}{\sigma} [z_i - \sigma t_i h_{LN}(t_i)]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Reemplazando (A.8) en (A.7)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \frac{h_{LN}(t_i) [z_i - \sigma t_i h_{LN}(t_i)]}{\sigma \lambda_{LNWM}(t_i)} + t_a h_{LN}(t_a), \tag{A.9}$$

donde $h_{LN}(t_i) = \phi(z_i) / \sigma t_i [1 - \Phi(z)]$ con $z_i = \log(t_i) - \mu / \sigma$
y $h_{LN}(t_a) = \phi(z_a) / \sigma t_a [1 - \Phi(z_a)]$ con $z_a = \log(t_a) - \mu \sigma$

A.3. Derivadas log-verosimilitud para σ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \sigma} \log [1 - \Phi(z_a)] - \frac{\partial}{\partial \sigma} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \sigma} \log [1 - \Phi(z_a)] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \lambda_{LNWM}(t_i)}{\lambda_{LNWM}(t_i)} + \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} [1 - \Phi(z_a)]}{[1 - \Phi(z_a)]},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial \sigma} \phi(z_i) = z_i^2 \phi(z_i) / \sigma$ y $\frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi(z_i) = -z_i \phi(z_i) / \sigma$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} \lambda_{LNWM}(t_i) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} \right] \\
&= \frac{1}{t_i} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma [1 - \Phi(z_i)]} \right] \\
&= \frac{\frac{z_i^2 \phi(z_i)}{\sigma} \sigma (1 - \Phi(z_i)) - \phi(z_i) \left[1 - \Phi(z_i) + \frac{\sigma z_i \phi(z_i)}{\sigma} \right]}{\sigma^2 t_i [1 - \Phi(z_i)]^2} \\
&= \frac{z_i^2 \phi(z_i)}{\sigma^2 t_i (1 - \Phi(z_i))} - \frac{z_i \phi^2(z_i)}{\sigma^2 t_i (1 - \Phi(z_i))^2} - \frac{\phi(z_i)}{\sigma^2 t_i (1 - \Phi(z_i))} \\
&= \frac{z_i^2}{\sigma} h_{LN}(t_i) - t_i z_i h_{LN}^2(t_i) - \frac{1}{\sigma} h_{LN}(t_i) \\
&= \frac{z_i}{\sigma} h_{LN}(t_i) [z_i - \sigma t_i h_{LN}(t_i)] - \frac{1}{\sigma} h_{LN}(t_i)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Reemplazando la Ecuación (A.11) en (A.10)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{z_i h_{LN}(t_i) [z_i - \sigma t_i h_{LN}(t_i)]}{\sigma \lambda_{LNWM}(t_i)} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{h_{LN}(t_i)}{\sigma \lambda_{LNWM}(t_i)} + z_a t_a h_{LN}(t_a),
\end{aligned} \tag{A.12}$$

donde $h_{LN}(t_i) = \phi(z_i) / \sigma t_i [1 - \Phi(z)]$ con $z_i = \log(t_i) - \mu / \sigma$
y $h_{LN}(t_a) = \phi(z_a) / \sigma t_a [1 - \Phi(z_a)]$ con $z_a = \log(t_a) - \mu / \sigma$

A.4. Derivadas log-verosimilitud para β

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \beta} \log [1 - \Phi(z_a)] - \frac{\partial}{\partial \beta} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \beta} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1/2 + \eta t_i) t_i^{-0,5} \exp(\eta t_i)}{\lambda_{LNWM}(t_i)} \right] - \sqrt{t_a} \exp(\eta t_a),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A.5. Derivadas log-verosimilitud para η

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} l(\mu, \sigma, \beta, \eta; t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \log [1 - \Phi(z_a)] - \frac{\partial}{\partial \eta} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \eta} \log \left[\frac{\phi(z_i)}{\sigma t_i [1 - \Phi(z_i)]} + \beta (1/2 + \eta t_i) t_i^{-1/2} \exp(\eta t_i) \right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \eta} \beta t_a^{1/2} \exp(\eta t_a) \\
&= \beta \sum_{i=1}^n \left[\frac{(3/2 + t_i \eta) t_i^{1/2} \exp(\eta t_i)}{\lambda_{LNWM}(t_i)} \right] - \beta t_a^{3/2} \exp(\eta t_a),
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Apéndice B

Algoritmos de optimización

B.1. Algoritmo de recocido simulado generalizado para optimización global

Es un método de naturaleza estocástica, en principio, los mínimos locales se pueden saltar más fácilmente que en los métodos de gradiente (Xiang y col., 2013). En esta técnica se introducen una o más temperaturas artificiales que actúan como fuente estocástica. Sea $f(\cdot)$ la función objetivo, se inicializa el algoritmo en el punto $x(1)$ escogido aleatoriamente y se obtiene el valor $E(1) = f(x(1))$, al igual que una temperatura inicial $T_{q_v}(1)$. La siguiente función basada en la distribución Cauchy-Lorentz es usada para generar un salto de distancia $\Delta x(t)$,

$$g_{q_v}(\Delta x(t)) \propto \frac{[T_{q_v}(t)]^{-\frac{D}{3-q_v}}}{\left[1 + (q_v - 1) \frac{(\Delta x(t))^2}{[T_{q_v}(t)]^{\frac{2}{3-q_v}}}\right]^{\frac{1}{q_v-1} + \frac{D-1}{2}}}, \quad (\text{B.1})$$

donde D es el número de parámetros a optimizar, t es el tiempo artificial y q_v es uno de parámetros de entrada. El salto es aceptado con probabilidad 1 si implica una reducción en la función objetivo, en caso contrario es aceptado con una probabilidad,

$$p_{q_a} = \min \left\{ 1, [1 - (1 - q_a) \beta \Delta E]^{\frac{1}{1-q_a}} \right\}, \quad (\text{B.2})$$

donde q_a es otro parámetro, $\beta = 1/(kT_{q_a})$ y k una constante mayor a 0. En caso de que $\Delta x(t)$ sea aceptado, un nuevo punto es generado tal que $x(t+1) = x(t) + \Delta x(t)$, $E(t+1) = f(x(t+1))$.

La temperatura artificial $T_{q_v}(t)$ decrece acorde a

$$T_{q_v}(t) = T_{q_v}(1) \frac{2^{q_v-1} - 1}{(1+t)^{q_v-1} - 1}. \quad (\text{B.3})$$

B.2. Método de Nelder-Mead

Seguendo a Nelder y Singer (2009) el algoritmo Nelder-Mead está diseñado para minimizar funciones no lineales sin necesidad de las derivadas, el método usa el concepto de *simplex*, lo cual es un politopo de $n + 1$ vértices en n dimensiones.

El algoritmo se constituye de tres pasos principales:

1. Construir el *simplex* inicial S : se construye S con base en un punto de inicio definido por el usuario.
2. Repetir los siguientes pasos hasta que la condición de terminación sea satisfecha
 - Realizar el "test" de terminación: se termina el proceso si los vértices de S o la función a minimizar evaluada en los vértices están lo suficientemente cerca.
 - Si la condición de terminación no ha sido satisfecha, transformar a S ; para esto, se determina cuál de los vértice es el peor, el segundo peor y el mejor, y se calcula el centroide c excluyendo el peor vértice. Se calcula el nuevo S a partir del cual, reemplazando el peor vértice por medio de reflexión, expansión o contracción. Si el valor de la función a minimizar en este punto es menor que en el punto anterior, se acepta el punto, si no, se contrae S hacia el mejor lado y se calculan nuevos vértices.
3. Devuelve el mejor vértice de S y el valor de la función en este punto.

B.3. Método Blend

Seguendo a Brent (1973) este algoritmo combina la búsqueda de sección áurea¹ y la interpolación parabólica sucesiva², dada una función a minimizar $f(\cdot)$ en el intervalo (a, b) . En un paso típico hay seis puntos significativos a, b, u, v, w y x , no todos distintos. Las posiciones de estos puntos cambian durante el algoritmo, pero no debería haber confusión si omitimos los subíndices. Inicialmente (a, b) es el intervalo en el que se define f y los demás puntos se encuentran inicialmente como

$$v = w = x = a + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) (b - a) \quad (\text{B.4})$$

Al comienzo de un ciclo, los puntos a, b, u, v, w y x siempre sirven como sigue: un mínimo local se encuentra en $[a, b]$; de todos los puntos en los que se ha evaluado f , x es el que tiene el menor valor de f , o el punto de la evaluación más reciente si hay un empate; w es el punto con el siguiente valor más bajo de f ; v es el valor anterior de w ; y u es el último punto en el que se ha evaluado f (indefinido la primera vez).

¹También conocida como búsqueda sección dorada es una técnica para hallar el óptimo de una función unimodal, mediante reducciones sucesivas del rango de valores en el cual se conoce que se encuentra el óptimo.

²Técnica para encontrar el óptimo de una función unimodal, mediante el ajuste sucesivo de polinomios de grado dos.

Sea $m = \frac{1}{2}(a + b)$ el punto medio del intervalo. Si $|x - m| \leq 2tol - \frac{1}{2}(b - a)$ o si $\max(x - a, b - x) \leq 2tol$, entonces el procedimiento termina con x como la solución aproximada para el mínimo. De otra forma, los números p y q ($q \geq 0$) son calculados tal que $x + p/q$ es el punto de inflexión de la parábola que pasa por $(v, f(v))$, $(w, f(w))$ y $(x, f(x))$. Si dos o más de estos puntos coinciden, o si la parábola degenera en una línea recta, entonces $q = 0$. p y q están dados por

$$\begin{aligned} p &= \pm [(x - v)^2(f(x) - f(w)) - (x - w)^2(f(x) - f(v))] \\ &= \pm(x - v)(x - w)(w - v)\{(x - w)f[v, w, x] + f[w, x]\} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

y

$$\begin{aligned} q &= \pm 2[(x - v)(f(x) - f(w)) - (x - w)(f(x) - f(v))] \\ &= \pm 2(x - v)(x - w)(w - v)f[v, w, x] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

De (B.5) y (B.6), la corrección p/q debe ser pequeña si x está cerca de un mínimo donde la segunda derivada es positiva, por lo que el efecto de redondear los errores al calcular p y q se minimiza.

Sea e el valor de p/q del segundo ciclo anterior. Si $|e| \leq tol$, $q = 0$, $x + p/q \notin (a, b)$, o $|p/q| \geq \frac{1}{2}|e|$, entonces se procede a usar el algoritmo de selección áurea y el siguiente valor de u es

$$u = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) a \text{ si } x \geq m \\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) b \text{ si } x < m \end{array} \right\} \quad (\text{B.7})$$

en caso contrario se usa el algoritmo de interpolación parabólica y $u = x + p/y$. El algoritmo termina cuando la resta de dos puntos propuestos consecutivos es menor a tol .

Apéndice C

Funciones y código en R

C.1. Funciones de los NHPP

En esta sección se encuentran las funciones intensidad de falla $\lambda(t)$ y número esperado de fallas $\Lambda(t)$ de los NHPP descritos en el cuerpo de este documento. Todas en funciones reciben en primera instancia un vector *par* con los parámetros, devolviendo una función de *t*.

#función de intensidad de falla S LLP

```
S_LLIP <- function( par){  
  a1 <- par[1]  
  a2 <- par[2]  
  b1 <- par[3]  
  b2 <- par[4]  
  function( t){  
    l <- a1*exp(-t*b1)+a2*(exp(t*b2))  
    return(l)  
  }  
}
```

#función de número esperado de fallas S LLP

```
S_LLIP_integral <- function( par){  
  a1 <- par[1]  
  a2 <- par[2]  
  b1 <- par[3]  
  b2 <- par[4]  
  function( t){  
    L <- (a1/b1)*(1-exp(-t*b1))+(a2/b2)*(exp(t*b2)-1)  
    return(L)  
  }  
}
```



```

    }
  }
#función de intensidad de falla BBIP
S_BBIP <- function( par){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]
  function(t){
    l <- a1*exp(-t/b1)+a2*(1-exp(-t/b2))
    return(l)
  }
}
#función de número esperado de fallas BBIP
S_BBIP_integral <- function( par){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]
  function(t){
    L <- a1*b1*(1-exp(-t/b1))+a2*b2*((t/b2)-1+exp(-t/b2))
    return(L)
  }
}
#función de intensidad de falla S PLP
S_PLP <- function( par){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]
  function(t){
    l <- (b1/a1)*((t/a1)^(b1-1))+(b2/a2)*((t/a2)^(b2-1))
    return(l)
  }
}
#función de número esperado de fallas S PLP
S_PLP_integral <- function(par){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]
  function(t){
    L <- (t/a1)^(b1)+(t/a2)^(b2)
  }
}

```

```

    return(L)
  }
}
#función de intensidad de falla LNWM
S_LNWM <- function(par){
  m <- par[1]
  o <- par[2]
  b <- par[3]
  y <- par[4]
  function(t){
    z <- (log(t)- m)/o
    l <- (dnorm(z)/(o*t*(1-pnorm(z))))+ b*(0.5+y*t)*(t^(-1/2))*exp(y*t)
    return(l)
  }
}
#función de número esperado de fallas LNWM
S_LNWM_integral <- function(par){
  m <- par[1]
  o <- par[2]
  b <- par[3]
  y <- par[4]
  function(t){
    z <- (log(t)- m)/o
    L <- -log(1-pnorm(z))+ b*(t^(1/2))*exp(y*t)
    return(L)
  }
}

```

C.2. Funciones de log-verosimilitud de los NHPP

En esta sección se encuentran las funciones de log-verosimilitud de los NHPP descritos en el cuerpo de este documento. Todas en funciones reciben en primera instancia un vector *par* con los parámetros y un vector de los tiempos de falla y t_a al final de este. Las funciones devuelven $-l(\cdot)$.

```

#función de log-verosimilitud de S-LLP
ML_S_LLP <- function( par , t){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]

  ML <- sum(log(a1*exp(-t[-length(t)]*b1)

```

```

+a2*(exp(t[-length(t)]*b2)))) -
  ((a1/b1)*(1-exp(-t[length(t)]*b1))
  +(a2/b2)*(exp(t[length(t)]*b2)-1))

  return(-ML)
}
#función de log-verosimilitud de BBIP
MLS_BBIP<- function( par , t){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]

  ML <- sum(log( a1*exp(-t[-length(t)]/b1)
  +a2*(1-exp(-t[-length(t)]/b2))))
  - (a1*b1*(1-exp(-t[length(t)]/b1))
  +a2*b2*((t[length(t)]/b2)-1+exp(-t[length(t)]/b2)))
  return(-ML)
}
#función de log-verosimilitud de S-PLP
MLS_PLP<- function( par , t){
  a1 <- par[1]
  a2 <- par[2]
  b1 <- par[3]
  b2 <- par[4]

  ML <- sum( log(((b1/a1)*((t[-length(t)]/a1)^(b1-1)))+((b2/a2)*
  ((t[-length(t)]/a2)^(b2-1))))
  - (((t[length(t)]/a1)^(b1))+((t[length(t)]/a2)^(b2))))
  return(-ML)
}
#función de log-verosimilitud de LNWM
MLS_LNWM<- function( par , t){

  m <- par[1]
  o <- par[2]
  b <- par[3]
  y <- par[4]

  z <- (log(t[-length(t)])- m)/o
  z1 <- (log(t[length(t)])- m)/o

  ML <- sum( log(((dnorm(z)/(o*t[-length(t)]*(1-pnorm(z))))

```

```

+ b*(0.5+y*t[-length(t)]*(t[-length(t)]^(-1/2))*exp(y*t[-length(t)])))
- (-log(1-pnorm(z1))+ b*(t[length(t)]^(1/2))*exp(y*t[length(t)]))
return(-ML)
}

```

C.3. Funciones para simular las escenarios

En esta sección se pueden encontrar las funciones para simular los escenarios descritos en la Sección 6.2 y el código para simular NHPP llamado transformación a escala temporal de un HPP.

#funciones de los escenarios a simular

#Es la función $\lambda(t)$, ecuación 6.13

```

parametrosin <- function( a1, a2, b1, b2, l, t1, t2 ){
  bathfunciopaper <- function(x){
    ifelse(x<t1, l+ (a1*b1*((t1-x)^(b1-1))),
    ifelse(x <=t2, l, l+ (a2*b2*((x- t2)^(b2-1))))))
  }
}

fun1 <- do.call( parametrosin ,
args = list( a1 = 0.03, a2 = 0.03, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 7, t2 = 33))
fun2 <- do.call( parametrosin ,
args = list( a1 = 0.03, a2 = 0.02, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 24, t2 = 30))
fun3 <- do.call( parametrosin ,
args = list( a1 = 0.009, a2 = 0.01, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 9, t2 = 14))
fun4 <- do.call( parametrosin ,
args = list( a1 = 0.01, a2 = 0.01, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 20, t2 = 21))

```

#Es la función $\Lambda(t)$, ecuación 6.14.

```

parametrosin_int <- function( a1, a2, b1, b2, l, t1, t2 ){
  bathfunciopaper <- function(x){
    ifelse(x<t1, l*x+a1*t1^b1-a1*(t1-x)^b1,
    ifelse(x <=t2, l*x+a1*t1^b1, l*x+a1*t1^b1+a2*(x-t2)^b2))
  }
}
fun1_int <- do.call( parametrosin_int ,

```

```

args = list( a1 = 0.03, a2 = 0.03, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 7, t2 = 33))
fun2_int <- do.call(parametrosin_int ,
args = list( a1 = 0.03, a2 = 0.02, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 24, t2 = 30))
fun3_int <- do.call(parametrosin_int ,
args = list( a1 = 0.009, a2 = 0.01, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 9, t2 = 14))
fun4_int <- do.call(parametrosin_int ,
args = list( a1 = 0.01, a2 = 0.01, b1 = 3, b2 = 3, l = 1,
t1 = 20, t2 = 21))

```

#función para simular realizaciones de los escenarios, entra la integral indefinida de la ecuación 6.13 y sale un vector con los tiempos de falla hasta $t = 40$ que corresponde a t_a .

```

get_nhpp_realization_int <- function(Lambda){
  t_max <- 40
  t <- 0
  s <- 0
  Lambda_inv <- function(s){
    v <- seq(0,t_max+3, length.out = 1000)
    min(v[ Vectorize(Lambda)(v)>=s ])
  }
  X <- numeric(0)
  while(t < t_max){
    u <- runif(1)
    s <- s -log(u)
    t <- Lambda_inv(s)
    X <- c( X, t)
  }
  if(length(X)>40){
    X[length(X)] <- 40
  } else{
    X[length(X)+1] <- 40
  }
  return(X)
}

```

C.4. Funciones para las medidas de desempeño

#función auxiliar para el error absoluto promedio y el error máximo absoluto
aux_iden_lambda <- function(modo, parametros){

```

if(modo== "par_plp"){
  lambda <- S_PLP(parametros)
} else if(modo == "par_INWM"){
  lambda <- S_INWM(parametros)
} else if(modo == "par_bbip"){
  lambda <- S_BBIP(parametros)
} else if(modo == "par_llp"){
  lambda <- S_LLP(parametros)
}
}
return(lambda)
}
#función auxiliar para la desviación absoluta promedio y la desviación absoluta máxima
aux_iden_lambda_integral <- function(modo, parametros){
  if(modo== "par_plp"){
    lambda <- S_PLP_integral(parametros)
  } else if(modo == "par_INWM"){
    lambda <- S_INWM_integral(parametros)
  } else if(modo == "par_bbip"){
    lambda <- S_BBIP_integral(parametros)
  } else if(modo == "par_llp"){
    lambda <- S_LLP_integral(parametros)
  }
  return(lambda)
}
#función para el error absoluto promedio y la desviación absoluta promedio
integral_abs <- function(esc, lambda){

  fun <- function(t){ abs(esc(t)- lambda(t))}
  res <- (1/40)* integrate(f = fun, lower = 0, upper = 40,
  subdivisions = 50000, stop.on.error= FALSE)$value
  return(res)
}
#función para el error máximo absoluto y la desviación absoluta máxima
max_abs <- function(esc, lambda){
  fun <- function(t){ abs(esc(t)- lambda(t))}
  dd <- optimize(fun, interval = c(0,40), maximum = TRUE)
  return(dd$maximum)
}

```

C.5. Código del MPO

Calcula de forma individual el i -ésimo punto de chequeo, ξ_i , para $i \geq 2$, como función de ξ_1 (argumento x_{i-1}), así como de ρ (argumento rho) y de τ (argumento tau), esta función es llamada luego por la función xis20; el argumento i corresponde al índice de ξ_i , para $i \geq 2$. Al usar esta función Es necesario que $\xi_1 \geq \tau$.

```
auxiliarxis=function(xi_1,i,rho,tau){
  if(rho!=1)xii=((1-rho^i)/(1-rho))*xi_1-((1-rho^(i-1))/(1-rho))*tau
  else
    if(rho==1)xii=i*xi_1-(i-1)*tau
  xii
}
```

Crea la sucesión de puntos de chequeo, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < t_a$, como función de ξ_1 (argumento x_{i-1}), de ρ (argumento rho), de τ (argumento tau) y del límite del tiempo de observación t_a (argumento ta) y tales que todos los $\xi_i \leq t_a$; de esta manera, el número de puntos de chequeo m queda como función de ξ_1, ρ, τ, t_a

```
xis2=function(xil,rho,tau,ta){
  if(xil<ta){
    j=1
    xii=xil
    vectorxis=0
    while(xii<ta){
      vectorxis=append(vectorxis,xii)
      j=j+1
      xii=auxiliarxis(xi_1=xil,i=j,rho=rho,tau=tau)
    }
    vectorxis=vectorxis[-1]
  }else
    if(xil>=ta)vectorxis=ta
  vectorxis
}
```

Es la función de costo por unidad de tiempo en el intervalo $(0, t_a]$, es decir $LC(\xi)$. el argumento x corresponde al valor del primer punto de chequeo ξ_1 . También depende ρ (argumento rho), de τ (argumento tau) y del límite del tiempo de observación t_a (argumento ta), costo reparación mínima (CMR) y costos mantenimiento programado (CPM)

Los otros argumentos son rho ρ ,

```
LC3=function(rho,lambda_int,ta,tau,CMR,CPM){
  function(x){
    aux1=xis2(xil=x,rho=rho,tau=tau,ta=ta)
    m=length(aux1)
```

```

    xiis=append(aux1 , ta)
    w2=c()
    for(i in 1:m){
      w2[i]=xiis[i+1]+tau-rho*xiis[i]
    }
    w1=c()
    for(i in 1:m){
      w1[i]=(1-rho)*xiis[i]+tau
    }
    LambdaSup= lambda_int(w2)
    LambdaInf= lambda_int(w1)
    DifLambda=LambdaSup-LambdaInf
    lc=(m*CPM+CMR*( lambda_int(xiis[1])+sum(DifLambda)))/ta
    lc
  }
}

```

#Función para encontrar el ξ_1 óptimo, recibe los parámetros f que corresponde a la función LC3 evaluada, t y tau conforman el intervalo para buscar el óptimo ξ_1 .

```

ejecicios <- function(f, t, tau){
  op <- optimize(f, c(tau, t))
  resultados <- op$objective
  xi_i <- op$minimum

  res <- cbind("Costo" = resultados, xi_i)
  return(res)
}

```

Bibliografía

- Almalki, S. J. y Yuan, J. (2013). "A new modified Weibull distribution". En: *Reliability Engineering & System Safety* 111, págs. 164-170.
- Ascher, H. y Feingold, H. (1984). *Repairable systems reliability: modeling, inference, misconceptions and their causes*. M. Dekker New York.
- Aven, T. (1983). "Optimal replacement under a minimal repair strategy : A general failure model". En: *Advances in Applied Probability* 15(1), págs. 198-211.
- Aven, T. y Jensen, U. (2000). "A general minimal repair model". En: *Journal of Applied Probability* 37(1), págs. 187-197.
- Bain, L. J. (1974). "Analysis for the linear failure-rate life-testing distribution". En: *Technometrics* 16(4), págs. 551-559.
- Barlow, R. y Hunter, L. (1960). "Optimum preventive maintenance policies". En: *Operations Research* 8(1), págs. 90-100.
- Block, H. W., Borges, W. D. S. y Savits, T. H. (1990). "A general age replacement model with minimal repair". En: *Naval Research Logistics (NRL)* 35(5), págs. 365-372.
- Block, H. W. y Savits, T. H. (1997). "Burn-in". En: *Statistical Science* 12(1), págs. 1-19.
- Brent, R. P. (1973). "Algorithms for Minimization without Derivatives". En: *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*.
- Brown, M. y Proschan, F. (1983). "Imperfect repair". En: *Journal of Applied Probability* 20(4), págs. 851-859.
- Chen, Z. (2000). "A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function". En: *Statistics & Probability Letters* 49(2), págs. 155-161.
- Chien, Y.-H. (2019). "The optimal preventive-maintenance policy for a NHPBP repairable system under free-repair warranty". En: *Reliability Engineering & System Safety* 188, págs. 444-453.
- Coetzee, J. L. (1996). "Reliability degradation and the equipment replacement problem". En: *Proceedings of the International Conference of Maintenance Societies*.
- Colosimo, E. A., Gilardoni, G. L., Santos, W. B. y Motta, S. B. (2010). "Optimal maintenance time for repairable systems under two types of failures". En: *Communications in Statistics Theory and Methods* 39(7), págs. 1289-1298.

- Coolen-Schrijner, P. y Coolen, F. P. (2007). "Nonparametric adaptive age replacement with a one-cycle criterion". En: *Reliability Engineering & System Safety* 92(1), págs. 74-84.
- De Carlo, F. y Arleo, M. A. (dic. de 2017). "Imperfect Maintenance Models, from Theory to Practice". En: *System Reliability*. InTech. Cap. 18. DOI: 10.5772/intechopen.69286. URL: <https://doi.org/10.5772/intechopen.69286>.
- Dijoux, Y. (2009). "A virtual age model based on a bathtub shaped initial intensity". En: *Reliability Engineering & System Safety* 94(5), págs. 982-989.
- Doyen, L., Drouilhet, R. y Brenière, L. (2020). "A generic framework for generalized virtual age models". En: *IEEE Transactions on Reliability* 69(2), págs. 816-832.
- Ebrahimi, N. (1993). "Improvement and Deterioration of a Repairable System". En: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)* 55(2), págs. 233-243. ISSN: 0581572X. URL: <http://www.jstor.org/stable/25050930>.
- Finkelstein, M., Cha, J. H. y col. (2013). "Stochastic modeling for reliability". En: *Shocks, burn-in and heterogeneous populations. Springer Series in Reliability Engineering, London: Springer*.
- Gámiz, M. L., Kulasekera, K. B., Limnios, N. y Lindqvist, B. H. (2011). *Applied Nonparametric Statistics in Reliability*. Springer-Verlag, London.
- Gertsbakh, I. B. (1977). *Models of Preventive Maintenance*. Elsevier Publishing, Amsterdam.
- Gilardoni, G. L. y Colosimo, E. A. (2007). "Optimal maintenance time for repairable systems". En: *Journal of Quality Technology* 39(1), págs. 48-53.
- Gilardoni, G. L., Guerra De Toledo, M. L., Freitas, M. A. y Colosimo, E. A. (2016). "Dynamics of an optimal maintenance policy for imperfect repair models". En: *European Journal of Operational Research* 248(3), págs. 1104-1112.
- Guida, M. y Pulcini, G. (2009). "Reliability analysis of mechanical systems with bounded and bathtub shaped intensity function". En: *IEEE Transactions on Reliability* 58(3), págs. 432-443.
- Guo, H., Mettas, A., Sarakakis, G. y Niu, P. (2010). "Piecewise NHPP models with maximum likelihood estimation for repairable systems". En: *2010 Proceedings-Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), San Jose*, págs. 1-7. DOI: 10.1109/RAMS.2010.5448029.
- Hashemi, M., Asadi, M. y Zarezadeh, S. (2020). "Optimal maintenance policies for coherent systems with multi-type components". En: *Reliability Engineering & System Safety* 195, págs. 106674.
- Jean, J. (1999). "Inference in nonhomogeneous Poisson process models, with applications to software reliability". En: *Ph.D. Thesis, University of Waterloo*.
- Johnson, M. A., Lee, S. y Wilson, J. R. (1994). "Experimental evaluation of a procedure for estimating nonhomogeneous Poisson processes having cyclic behavior". En: *ORSA Journal on Computing* 6(4), págs. 356-368.
- Kazemini, M. y Mehrjoo, M. (2013). "A new method for maximum likelihood parameter estimation of Gamma-Gamma distribution". En: *Journal of lightwave technology* 31(9), págs. 1347-1353.
- Kijima, M. (1989). "Some results for repairable systems with general repair". En: *Journal of Applied Probability* 26(1), págs. 89-102. DOI: 10.2307/3214319.
- Kijima, M. y Nakagawa, T. (1991). "A cumulative damage shock model with imperfect preventive maintenance". En: *Naval Research Logistics (NRL)* 38(2), págs. 145-156.

- Kijima, M. y Sumita, U. (1986). "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Processes Governed by Non-Negative Markovian Increments". En: *Journal of Applied Probability* 23(1), págs. 71-88. ISSN: 00219002. URL: <http://www.jstor.org/stable/3214117>.
- Kim, M. J. y Makis, V. (2009). "Optimal maintenance policy for a multi-state deteriorating system with two types of failures under general repair". En: *Computers & Industrial Engineering* 57(1), págs. 298-303.
- Krivtsov, V. V. (2007). "Practical extensions to NHPP application in repairable system reliability analysis". En: *Reliability Engineering & System Safety* 92(5), págs. 560-562.
- Kumar, U., Klefsjö, B. y Granholm, S. (1989). "Reliability investigation for a fleet of load haul dump machines in a Swedish mine". En: *Reliability Engineering & System Safety* 26(4), págs. 341-361.
- Lai, C., Xie, M. y Murthy, D. (2003). "A modified Weibull distribution". En: *IEEE Transactions on Reliability* 52(1), págs. 33-37.
- Lai, C.-D. y Xie, M. (2006). *Stochastic ageing and dependence for reliability*. Springer Science & Business Media, New York, págs. 71-107.
- Lai, K., Leung, K. N. F., Tao, B. y Wang, S. Y. (2001). "A sequential method for preventive maintenance and replacement of a repairable single-unit system". En: *Journal of the Operational Research Society* 52(11), págs. 1276-1283.
- Lam, C. T. y Yeh, R. (1994). "Optimal maintenance-policies for deteriorating systems under various maintenance strategies". En: *IEEE Transactions on Reliability* 43(3), págs. 423-430.
- Leemis, L. M. (1991). "Nonparametric estimation of the cumulative intensity function for a nonhomogeneous Poisson process". En: *Management Science* 37(7), págs. 886-900.
- Lie, C. H. y Chun, Y. H. (1986). "An algorithm for preventive maintenance policy". En: *IEEE Transactions on Reliability* 35(1), págs. 71-75.
- Lindqvist, B. H. (2006). "On the statistical modeling and analysis of repairable systems". En: *Statistical Science* 21(4), págs. 532-551.
- Liu, J. y Wang, Y. (2013). "On Crevecoeur's bathtub-shaped failure rate model". En: *Computational Statistics & Data Analysis* 57(1), págs. 645-660.
- Malik, M. A. K. (1979). "Reliable preventive maintenance scheduling". En: *AIIE transactions* 11(3), págs. 221-228.
- Mazzuchi, T. A. y Soyer, R. (1996). "A Bayesian perspective on some replacement strategies". En: *Reliability Engineering & System Safety* 51(3), págs. 295-303.
- Meeker, W. Q. y Escobar, L. A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. John Wiley & Sons, New York, págs. 393-426.
- Mudholkar, G. S., Asubonteng, K. O. y Hutson, A. D. (2009). "Transformation of the bathtub failure rate data in reliability for using Weibull-model analysis". En: *Statistical Methodology* 6(6), págs. 622-633.
- Mun, B. M. y Bae, S. J. (2014). "Nonlinear Mixed-Effects Models for Multiple Repairable Systems". En: *Proceedings of the 2014 International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Indonesia*.
- Mun, B. M., Bae, S. J. y Kvam, P. H. (2013). "A superposed log-linear failure intensity model for repairable artillery systems". En: *Journal of Quality Technology* 45(1), págs. 100-115.

- Musa, J. D. y Okumoto, K. (1984). "A logarithmic Poisson execution time model for software reliability measurement". En: *Proceedings of the 7th International Conference on Software Engineering*. Citeseer, págs. 230-238.
- Nair, U., Sankaran, P. y Balakrishnan, N. (2018). *Reliability modelling and analysis in discrete time*. Academic Press, págs. 247-279.
- Navarro, J., Arriaza, A. y Suárez-Llorens, A. (2019). "Minimal repair of failed components in coherent systems". En: *European Journal of Operational Research* 279(3), págs. 951-964.
- Nelder, J. y Singer, S. (2009). "Nelder-Mead algorithm". En: *Scholarpedia* 4(7), pág. 2928.
- Park, D. H., Jung, G. M. y Yum, J. K. (2000). "Cost minimization for periodic maintenance policy of a system subject to slow degradation". En: *Reliability Engineering & System Safety* 68(2), págs. 105-112.
- Patrow, M. L. (1977). *A comparison of two algorithms for the simulation of non-homogeneous Poisson processes with degree-two Exponential polynomial intensity function*. Inf. téc. NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CALIF.
- Pham, H. y Wang, H. (1996). "Imperfect maintenance". En: *European Journal of Operational Research* 94(3), págs. 425-438.
- Pham, H. y Wang, H. (2006). *Reliability and Optimal Maintenance*. Springer-Verlag, London.
- Pulcini, G. (2001a). "A bounded intensity process for the reliability of repairable equipment". En: *Journal of Quality Technology* 33(4), págs. 480-492.
- Pulcini, G. (2001b). "Modeling the failure data of a repairable equipment with bathtub type failure intensity". En: *Reliability Engineering & System Safety* 71(2), págs. 209-218.
- R Core Team (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>.
- Rigdon, S. E. y Basu, A. P. (2000). *Statistical methods for the reliability of repairable systems*. John Wiley & Sons New York.
- Sarhan, A. M. y Zaindin, M. (2009). "Modified Weibull distribution." En: *Applied Sciences* 11, págs. 123-136.
- Shakhatreh, M., Lemonte, A. y Moreno-Arenas, G. (2019). "The Log-normal modified Weibull distribution and it's reliability implications". En: *Reliability Engineering & System Safety* 188, págs. 6-22.
- Sharma, A., Yadava, G. S. y Deshmukh, S. G. (2011). "A literature review and future perspectives on maintenance optimization". En: *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 17(1), págs. 5-25.
- Sherif, Y. y Smith, M. (1981). "Optimal maintenance models for systems subject to failure—a review". En: *Naval Research Logistics Quarterly* 28(1), págs. 47-74.
- Sheu, S.-H., Tsai, H.-N., Sheu, U.-Y. y Zhang, Z. G. (2019). "Optimal replacement policies for a system based on a one-cycle criterion". En: *Reliability Engineering & System Safety* 191, pág. 106527.
- Shin, I., Lim, T. y Lie, C. (1996). "Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit". En: *Reliability Engineering & System Safety* 54(1), págs. 1-10.
- Tsai, T.-R., Liu, P.-H. y Lio, Y. L. (2011). "Optimal maintenance time for imperfect maintenance actions on repairable product". En: *Computers & Industrial Engineering* 60(4), págs. 744-749.