Rapport de recherche

Mathématiques et langages

par

Margot De Serres
Jean Denis Groleau

Collège Jean-de-Brébeuf
Direction Pédagogique
Service de la recherche

Rapport de recherche

Mathématiques et langages

par

Margot De Serres
Jean-Denis Groleau

Collège Jean-de-Brébeuf
Direction Pédagogique
Service de la recherche

La publication de cet ouvrage a été rendue possible grâce à la participation financière du Programme d'aide à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage (PAREA)

Le contenu du présent rapport n'engage que la responsabilité du collège et de ses auteurs.

On peut obtenir des exemplaires supplémentaires de ce rapport de recherche à la coopérative étudiante du collège Jean-de-Brébeuf, 3200, Chemin de la Côte-Sainte-Catherine, Montréal, Qc, H3T 1C1

Dans ce document le masculin est utilisé comme un générique sans aucune intention discriminatoire et uniquement dans le but de faciliter la lecture.

Conception de l'édition: Frédéric Tessier

Mise en pages: Jean-Denis Groleau et Frédéric Tessier

Révision linguistique: André Durand

Support technique: Jacques St-Aubin

Couverture: Gilbert Audette, Sophie Lanctôt, Frédéric Tessier et Louise Trudeau

Dépot légal - Bibliothèque nationale du Québec - 1997

ISBN 2-9805181-0-7

Code de diffusion: 1532-563

Tables des matières

Contributions iii

Résumé iv

Table des matières v

Introduction xi

Chapitre 1

Contexte de la recherche ***1***

1.1 Problématique 2

1.2 Objectifs 3

1.3 État de la question 3

1.4 La compétence langagière 5

1.5 Le langage 6

1.6 Le langage mathématique 8
1.6.1 Le langage naturel 9
1.6.2 Le langage symbolique 9
1.6.3 Le langage graphique 9
1.6.4 Le langage mathématique: combinaison de trois langages 10
1.7 Difficultés langagières en mathématiques 11
1.7.1 Difficultés langagières dans le langage naturel 11
1.7.2 Difficultés de nature sémantique 11
1.7.3 Difficultés de nature syntaxique 12
1.7.4 Exemple de difficultés de nature sémantique en mathématiques 12
1.7.5 Difficultés langagières dans le langage symbolique 14
1.7.6 Difficultés dans le langage graphique 16
1.8 Difficultés langagières dans l'utilisation de plus d'un langage 16
1.8.1 Difficultés de traduction 16
1.8.2 Difficultés langagières liées à l'utilisation des trois langages 17

Chapitre 2

Méthodologie **23**

2.1 Choix méthodologiques 24
2.2 Identification des erreurs de nature langagière en mathématiques 24
2.2.1 Étape préliminaire 25
2.2.2 Entrevues individuelles avec des élèves 25
2.2.3 Autres formes de collecte de données 26
2.2.4 Prétest 27
2.2.5 Grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques 30
2.2.6 Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques 30
2.2.7 Précision et classification des erreurs de nature langagière en mathématiques 34
2.3 Évaluation de l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques 35
2.3.1 Cas particuliers documentés lors d'entrevues 35
2.3.2 Évaluation par le prétest 35

Introduction

Introduction

Il est reconnu que la langue est un outil essentiel de communication par lequel passe l'apprentissage et qu'une maîtrise minimale de la langue, parlée et écrite, constitue un atout non négligeable dans la vie d'un être humain et notamment dans sa vie scolaire.

Il est également reconnu que beaucoup d'élèves ont de graves lacunes à ce niveau (Moffet., 1992:13) Combien de fois ne nous arrive-t-il pas d'écrire sur des copies d'examen des remarques comme les suivantes:

- «Question mal comprise»
- «Ceci ne répond pas à la question»
- «Ceci n'est pas une justification»
- «Explication incompréhensible»
- «Formulation ambiguë»

De même, combien de fois n'avons-nous pas vu des élèves frustrés de perdre des points dans leurs diverses disciplines, à cause de leurs lacunes langagières?

Les difficultés langagières qui se manifestent dans l'ensemble des disciplines sont également présentes en mathématiques, que ce soit au niveau du **langage naturel**, du **langage symbolique, ou du langage graphique**.

Concernant ce dernier langage, l'expression, «Un dessin vaut mille mots», ne semble pas s'appliquer dans le cas de ces élèves. En effet, beaucoup éprouvent de la difficulté à décoder un graphique et à en tirer les informations pertinentes, par exemple quand il faut déterminer, d'après son graphique,

- le domaine d'une fonction;
- le signe d'une fonction sur un intervalle donné;
- le comportement de cette fonction dans une région donnée (croissance, décroissance).

Ceci met en évidence le fait qu'ils ont de la difficulté à passer du langage graphique au langage naturel.

Inversement, ces élèves éprouvent également de la difficulté à construire des graphiques représentant des fonctions selon certaines caractéristiques retenues: par exemple, le graphique d'une fonction

- croissante;
- positive;
- qui augmente de moins en moins vite.

Ceci explique les difficultés qu'ils ont à passer du langage naturel au langage graphique. Ils sont donc défavorisés lorsque la compréhension d'un concept ou d'un problème repose sur une compréhension graphique, que ce graphique leur soit donné ou qu'ils aient à le construire.

Cette situation nous a amenés à nous interroger sur la part des difficultés et des échecs en mathématiques attribuable aux lacunes dans les différents langages (naturel, symbolique et graphique) utilisés. Le but est de construire et de valider un test faisant ressortir des difficultés langagières en mathématiques.

La structure du rapport de recherche

Le présent rapport met en lumière l'approche que nous avons préconisée afin de cerner les difficultés langagières en mathématiques, ainsi que les résultats que nous avons obtenus. Dans un premier temps, nous exposons l'état de la question et le cadre théorique qui nous ont guidés dans cette recherche. Nous décrivons ensuite la démarche adoptée pour réaliser les objectifs visés. Par la suite, nous analyserons les résultats de la recherche. Deux chapitres sont consacrés aux résultats du test. Un autre chapitre porte sur les types d'erreurs de nature langagière en mathématiques; on y trouve un processus d'identification et de classement des erreurs. Le dernier chapitre met en relief l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques.

5.4.1 Erreurs sémantiques 126
5.4.2 Erreurs syntaxiques 129
5.4.3 Erreurs mixtes 131

5.5 Erreurs dans l'utilisation du langage symbolique 134
5.5.1 Erreurs sémantiques 134
5.5.2 Erreurs syntaxiques 135
5.5.3 Erreurs mixtes 138

5.6 Erreurs dans l'utilisation du langage graphique 139
5.6.1 Erreurs sémantiques 140
5.6.2 Erreurs syntaxiques 141
5.6.3 Autres erreurs 143

5.7 Erreurs impliquant deux langages ou les trois. 144
5.7.1 Erreurs dans l'utilisation en parallèle de deux ou trois langages 145
5.7.2 Erreurs de traduction d'un langage à un autre 145
5.7.3 Erreurs dans l'utilisation du langage hybride 146

Chapitre 6

Importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques ***149***

6.1 Quelques exemples particuliers 150
6.1.1 Exemples d'évaluations faites à partir de copies d'examens 150
6.1.2 Exemples d'évaluations faites lors d'entrevues 152

6.2 Scores des élèves au prétest 155

6.3 Scores des élèves au test 157
6.3.1 Scores des élèves dans la partie A du test 157
6.3.2 Scores des élèves dans la partie B du test 158

Conclusion 161

Bibliographie 165

Liste des annexes 171

Annexe 1: Lettre de déontologie 173

Annexe 2: Protocole pour les entrevues individuelles avec les élèves 175

Annexe 3: Prétest 179

Annexe 4: Protocole d'entrevue avec les professeurs à la suite du prétest 189

Annexe 5: Liste des questions prioritaires du prétest 193

Annexe 6: Caractéristiques des élèves invités en entrevue à la suite du prétest 195

Annexe 7: Lettre invitant les élèves à une entrevue 199

Annexe 8: Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques 201
- Partie A: questions ouvertes 202
- Partie B: questions objectives 211

Annexe 9: Directives pour l'administration du test 231

Annexe 10: Répartition des élèves, selon le programme et le choix de réponses, pour chaque question analysée de la partie B du test 233

Annexe 11: Répartition des élèves, selon la combinaison de réponses, pour chacune des questions de la partie B du test 239

2.3.3 Évaluation par le test 36

2.4 Discussion sur la démarche 37

Chapitre 3

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques 39

3.1 Schéma d'analyse des résultats de la partie A 40

3.2 Questions portant sur le langage naturel en mathématiques 42

3.2.1 Résultats de la question 1 43

3.2.2 Résultats de la question 2 48

3.2.3 Résultats de la question 17 51

3.2.4 Résultats de la question 13 59

3.3 Questions portant sur le langage symbolique 60

3.3.1 Résultats de la question 8 61

3.3.2 Résultats de la question 4 62

3.3.3 Résultats de la question 11 65

3.3.4 Résultats de la question 12 68

3.4 Questions portant sur le langage graphique 70

3.4.1 Résultats de la question 5 71

3.4.2 Résultats de la question 6 79

3.4.3 Résultats de la question 7 87

3.5 Synthèse de l'analyse des résultats de la partie A du test 98

Chapitre 4

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques. 99

4.1 Schéma d'analyse des résultats de la Partie B 100

4.2 Questions portant sur la langue naturelle en mathématiques 100
4.2.1 Résultats de la question 13 101
4.2.2 Résultats de la question 19 102
4.2.3 Résultats de la question 41 103
4.3 Questions portant sur le langage symbolique 104
4.3.1 Résultats de la question 2 104
4.3.2 Résultats de la question 3 105
4.3.3 Résultats de la question 10 106
4.3.4 Résultats de la question 17 107
4.3.5 Résultats de la question 15 108
4.4 Questions portant sur le langage naturel et le langage symbolique 109
4.4.1 Résultats de la question 7 109
4.4.2 Résultats de la question 8 110
4.4.3 Résultats de la question 9 111
4.4.4 Résultats de la question 24 112
4.5 Questions portant sur le langage graphique 113
4.5.1 Résultats de la question 4 113
4.5.2 Résultats de la question 16 114
4.5.3 Résultats de la question 20 115
4.5.4 Résultats de la question 47 116

Chapitre 5

Types d'erreurs de nature langagière en mathématiques 117

5.1 Processus d'identification et de classement des erreurs langagières 119
5.2 Exemples d'erreurs langagières identifiées lors d'entrevues 120
5.2.1 Erreurs concernant le terme «diviseur» 120
5.2.2 Erreurs concernant l'expression «nombre irrationnel» 120
5.2.3 Erreur langagière dans un calcul de dérivée 122
5.3 Grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques 124
5.4 Erreurs dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques 126

Chapitre 1

Contexte de la recherche

1.1 Problématique

Partout où on exige de la précision dans la transmission d'un savoir ou dans sa réception, on doit convenir d'un code strict et précis qui doit épouser divers modes d'expression. Ce code devra conserver partout la clarté et la précision, faute de quoi il s'établira, dans la communication, des zones d'imprécision pouvant déranger la transmission ou la réception des notions communiquées.

Les mathématiques: domaine de la mesure et de la précision

Les mathématiques ne font pas exception à cette règle générale et, peut-être même, sont-elles particulièrement affectables par les imprécisions des modes d'expression qui servent à leur transmission, et ce pour une double raison. D'une part, parce qu'elles constituent le domaine de la mesure et donc de la précision par excellence (en effet, ce sont elles qui servent de moyen de mesure dans toutes les sciences). D'autre part, parce qu'elles sont un domaine abstrait, même si leurs applications s'étendent à toutes les sciences de la nature et aux sciences humaines, elles se trouvent ainsi amenées sur des territoires bien concrets.

Par ailleurs, des témoignages de professeurs de différentes disciplines, entendus lors de colloques ou de congrès, affirment que nos élèves baignent dès leur jeune âge dans une ambiance culturelle relativement «laxiste». On leur pardonne presque tout, une lecture plus ou moins fidèle au texte, une écriture plus ou moins contrôlée par les règles syntaxiques et grammaticales, et un usage sémantique du langage très large et très peu précis. Quand ils arrivent en mathématiques où la mesure et la précision sont indispensables, on peut pratiquement prévoir le choc qui les attend ou, tout au moins, on peut mesurer les dommages qui en résultent. Un taux d'échec élevé dans une discipline exigeant rigueur et précision, dans un tel milieu culturel, est quelque chose d'assez plausible. Dès lors, il est intéressant de cerner les difficultés provenant d'une mauvaise maîtrise des divers modes d'expression utilisés en mathématiques afin de les identifier et de travailler à les corriger.

Les trois langages en mathématiques

Les notions «mathématiques (définitions, propriétés, théorèmes,...) ne sont accessibles que par trois modes d'expression majeurs: le langage naturel, le langage symbolique et les représentations graphiques, et la réussite en mathématiques ne saurait faire l'économie de la maîtrise de ces différents modes d'expression». (Bednarz, 1990:63)

Ceci nous amène à préciser ce que nous entendons généralement par un langage, à situer dans le temps les origines du langage mathématique, à définir le langage naturel, le langage symbolique, le langage graphique et aussi à faire connaître ce que nous entendons par difficulté langagière. Notre recherche veut alimenter une réflexion sur les difficultés langagières en mathématiques qui sont causes d'échecs pour un bon nombre d'élèves au niveau collégial.

1.2 Objectifs

Cette recherche, qui s'adresse d'abord aux professeurs de mathématiques du niveau collégial, pourra aussi répondre aux préoccupations des didacticiens de la mathématique, aux professeurs de mathématiques du niveau secondaire et aux professeurs du niveau collégial en général. Elle a pour but de montrer qu'il existe un lien entre les difficultés d'apprentissage des mathématiques et les faiblesses dans l'un ou l'autre des langages utilisés (naturel, symbolique et graphique). Les objectifs généraux de la recherche sont les suivants:

1. Identifier les erreurs langagières des élèves en mathématiques. Plus spécifiquement, identifier les erreurs liées aux langages naturel, symbolique et graphique.

2. Évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques.

1.3 État de la question

Selon Tremblay, Lacroix et Lacerte, (1994:15), les difficultés langagières des élèves du postsecondaire, depuis plusieurs décennies, au Québec et ailleurs dans le monde, préoccupent les chercheurs et les pédagogues de plusieurs horizons: philosophie, mathématiques, langues, dans la communauté collégiale comme dans la communauté universitaire (notamment les responsables des sciences de l'éducation).

De nombreux chercheurs se sont préoccupés de ce problème et de ses conséquences sur les élèves. Ainsi, Bourbeau (1988:3) fait remarquer qu'une proportion non négligeable de la clientèle collégiale éprouve des difficultés de lecture. Brouillet et Gagnon (1990:99) constatent qu'au collégial la maturation syntaxique (c'est-à-dire l'allongement des phrases et des subordonnées) ne se fait pas et que, la maîtrise de la langue n'étant pas acquise à la fin du secondaire, certains candidats aux études supérieures manifestent, sur le plan de la langue écrite, des carences assez sérieuses pour compromettre leur succès. Pour leur part, après avoir analysé les profils linguistiques cognitifs et motivationnels d'élèves du postsecondaire faibles en français écrit, Lafontaine et Legros (1995:121) reconnaissent des sujets désorientés par rapport aux apprentissages scolaires antérieurs d'ordre linguistique et elles estiment qu'il n'est plus nécessaire de redire à quel point les résultats des élèves du postsecondaire sont faibles en français écrit. Qui plus est, cette situation linguistique fragile de ces élèves ne semble pas être exclusive au système québécois d'éducation. Legros (1995:59-60) estime qu'à Bruxelles, la mauvaise connaissance de la langue constitue l'une des causes d'échec en première année universitaire et serait à l'origine de l'incapacité des élèves à suivre la complexité d'une pensée scientifique, aussi bien dans un texte écrit que dans un exposé oral. De plus, la compétence langagière à l'entrée à l'université est apparue comme un critère essentiel.

Depuis le début des cégeps, toutes sortes d'initiatives ont été mises de l'avant pour venir en aide aux élèves ayant des difficultés langagières: centres d'aide, tutorat par les pairs, cours de français correctif, etc. Insistant sur la persistance de ces difficultés langagières malgré toutes ces mesures préconisées pour y remédier, T.Giard (1991:10) estime que la maîtrise de la langue est un sujet majeur de préoccupation, car si 20% des élèves écrivent très bien le français à leur entrée au cégep, 60% en ont une connaissance plutôt médiocre et les derniers 20% présentent des lacunes que beaucoup jugent irrécupérables. De plus, ajoute-t-elle, l'enseignement du français au collégial ne réussit pas à pallier ces lacunes, puisqu'environ 50% des élèves échouent au test de français administré à l'entrée à l'université.

Pour leur part, les universités imposent depuis 1987 des tests de français aux élèves qui s'y inscrivent. Mais tout cela n'a pas changé beaucoup la réalité, comme on peut le constater à la lecture du récent numéro thématique de la revue des sciences de l'éducation sur la maîtrise du français écrit aux ordres supérieurs d'enseignement. (Vol.XXI, no 1, 1995). Entre autres, Lafontaine et Legros (1995:121), citant les publications d'Asselin et McLaughlin(1992), de Bibeau (1975), de Bureau (1976), de Roy (1989) et Lafontaine (1990), mentionnent qu'il n'est plus nécessaire de répéter à quel point les résultats en français écrit des élèves des ordres postsecondaires sont faibles.

Comme on peut le constater, les travaux ayant trait aux difficultés langagières sont nombreux. Certains d'entre eux touchent à des aspects sémantiques, d'autres s'arrêtent sur des aspects divers. En mathématiques, déjà en 1981, Bouchard, Daigle et al.(1981:16), préoccupés par le taux élevé d'échecs et d'abandons dans les premiers cours de mathématiques suivis par les élèves au collégial, avaient reconnu que beaucoup d'élèves échouent à ces cours, entre autres raisons, à causes des difficultés à comprendre les questions et à saisir correctement les définitions. Ces chercheurs avaient alors créé un centre d'aide en mathématique individualisée (AMI). Bigard (1977:39) estime que les difficultés rencontrées en mathématiques sont des difficultés de langage. Pour ce chercheur, qui est préoccupé par le sens, il est évident que, pour résoudre un problème, il faut d'abord en comprendre l'énoncé; toutefois, ajoute-t-il, on ne sait pas exactement quels aspects linguistiques interviennent dans la compréhension. Comprenons que Bigard ne fait pas de recherche sur cette question des difficultés langagières en mathématiques, mais que ses propos s'inscrivent dans une perspective théorique où les mathématiques sont vues comme un instrument d'échec ou de sélection. Baruk (1977:46), dans «*Fabrice, ou l'école des mathématiques*» montre toute la culpabilité exprimée par l'enfant qui fait constamment des erreurs alors qu'il ne saisit pas le sens des mots. D'un cancre, Baruk se propose de faire un bon élève, tout d'abord en rendant compréhensible le langage mathématique, ensuite en apportant un minimum de sens à l'énoncé des problèmes.

Si l'on revient maintenant à la recherche générale sur les difficultés langagières, on se rend vite compte du grand nombre des chercheurs qui s'y sont arrêtés: Bibeau (1975), Houle (1989), Moffet et Demalsy (1994), Moffet (1992,95), Roy, Boudreau, Lafontaine et Viau (1992), pour n'en citer que quelques-uns. Et l'on constate que l'horizon de ces recherches est très large et qu'il est difficile d'y voir une unité. La convergence se trouve surtout dans la préoccupation que tous ces chercheurs ont d'améliorer la situation de l'élève qui éprouve des difficultés langagières. De fait, chacun aborde le problème sous un angle particulier. Les uns s'arrêtent par exemple sur les difficultés d'accord de genre et de nombre, (Legros et Roy 1995). Moffet (1995) élabore des stratégies pour favoriser le transfert des connaissances en écriture au collégial; Houle (1989) étudie le processus de lecture. Pour leur part, Lecavalier et Brassard (1993) s'intéressent à l'enseignement stratégique en lecture et écriture; Moffet et Demalsy (1994) s'occupent des compétences et de la maîtrise du français au collégial et Sierpinska (1995) invite ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques à réfléchir sur le problème de la compréhension.

À cette brochette de chercheurs qui se sont préoccupés, sur un plan local, des difficultés langagières, on peut en ajouter une autre, tout aussi riche, sur le plan mondial, ce qui confirme que le problème des difficultés langagières en est un qui interpelle le milieu éducatif. On peut signaler en France les travaux de Glaeser (1971), Bigard (1977), Laborde (1981,82,83), Baruk (1977,85,92) Nimier (1985,88) et de Legros (1995). On peut également noter ceux de Vygotsky (Bronckart 1985) qui ont marqué l'Europe dans son ensemble. Aux États-Unis, on notera avec intérêt les travaux de Clement (1981, 89), Rosnick (1981), Wollman (1983), Kaput et Sims-Knight (1983), Burton (1988), Bradley (1990)et de Dunham et Osborne (1991).

1.4 La compétence langagière

Compétence langagière

Bien qu'apparemment facile à comprendre, l'expression **«difficultés langagières»** gagne à être explicitée. Dans les recherches, d'une façon générale, on parle de **«compétence langagière»** (Moffet et Demalsy 1994; Moffet 1995; Legros 1995) plutôt que de «difficultés langagières». Pour Legendre (1993:225), «la compétence langagière se définit comme étant la connaissance qu'a un individu de sa langue maternelle et l'habileté à l'utiliser».

Dans la compétence langagière, on trouve trois composantes:

1. la compétence linguistique;
2. la compétence textuelle;
3. la compétence discursive».

Difficultés langagières en mathématiques

Or quelqu'un qui a des problèmes avec l'une ou l'autre de ces composantes en a nécessairement avec sa compétence langagière et nous disons alors qu'il a des **«difficultés langagières»**.

Pour Laborde (1983:2) toute opération langagière en mathématiques intègre de nombreux paramètres. Elle évoque les principaux qui sont relatifs à l'activité langagière de l'élève en situation scolaire:

- les objets mathématiques qui définissent le contenu du discours,

- les opérations sur ces objets ou sur des représentations physiques de ces objets;
- l'élève avec ses conceptions des objets mathématiques, qu'il construit;
- le modèle langagier en vigueur dans la classe de mathématiques;
- etc.

Le langage utilisé en mathématiques est en effet, comme nous l'avons mentionné, fort complexe. La formulation en mathématiques nécessite le recours à l'utilisation conjointe et parfois très imbriquée des langages: naturel, symbolique et graphique. Selon Laborde(1983:3), «les difficultés langagières des élèves dans l'enseignement mathématique au niveau secondaire se manifestent surtout lors de l'usage de l'écriture symbolique et au moment où ils doivent abstraire les objets mathématiques du contexte dans lequel ils les utilisent». Nous constatons qu'au niveau collègial ces difficultés langagières sont souvent présentes.

1.5 Le langage

Qu'est-ce qu'un langage?

Selon Leclerc (1989:15), le langage «correspond à la faculté naturelle, inhérente et universelle qu'a l'être humain de construire des langues, c'est-à-dire des codes pour communiquer». Pour sa part, le Larousse (1995:dossier) estime qu'on parle de langage «dès que l'on considère un ensemble de symboles (dessinés, écrits, parlés, etc.) concaténés en suites de phrases, selon un nombre fini de règles servant à distribuer de façon acceptable et significative ces symboles». Dès lors, on peut dire que le langage est un système, qui a pour finalité de réaliser un message d'un émetteur vers un récepteur. Pour le mathématicien Georges Glaeser (1971:59), le langage a des fonctions variées: «il permet de rendre intelligible et de communiquer une pensée claire, il suggère des états affectifs et, parfois, il joue un rôle algorithmique. Le fondement de l'utilisation des langages est l'aptitude des êtres intelligents à substituer des symboles à des idées ou objets et à opérer directement sur les symboles pour exprimer des relations. Un langage est un système de signes, dont l'emploi est codifié pour permettre de remplir une partie des fonctions précédentes».

Qu'est-ce que la langue?

Quant à la langue, Legendre (1993:772) estime qu'elle est «cette capacité de l'être humain lui permettant de symboliser le réel et de communiquer avec ses semblables». Selon ce même auteur, Ferdinand de Saussure différencie la langue du langage de la façon suivante. La langue est la forme prise par le langage dans une communauté linguistique donnée. L'exercice du langage repose sur une faculté naturelle tandis que la langue est acquise et conventionnelle. La langue est l'ensemble des habitudes linguistiques qui permettent à un sujet de comprendre et de se faire comprendre. Elle est un fait culturel, une institution sociale alors que le langage est inné.

Les origines du langage mathématique

Si l'on s'arrête maintenant au langage mathématique comme tel et à ses origines, on découvre qu'il a pris naissance dans l'exercice du quotidien à partir de situations concrètes permettant de mieux agir sur le réel. En ce sens, il était d'abord constitué de calculs et de techniques utiles aux gestionnaires, aux commerçants et aux arpenteurs. Selon le Larousse (1995:dossier), l'origine du langage mathématique remonte aux civilisations babylonienne et égyptienne, où ont été trouvées de multiples traces d'utilisation d'algorithmes et de travaux liés à l'arpentage. Cependant, c'est avec l'éclosion des mathématiques comme science des démonstrations rationnelles, mettant en oeuvre une démarche hypothético-déductive et non plus simplement un ensemble de recettes, de calculs ou de manipulations de figures, qu'apparaît ce qui constitue la vraie science mathématique comme on la connaît aujourd'hui. À la Renaissance s'opère un changement décisif. Ainsi, Galilée postule que la nature est écrite en langage mathématique. Cette prise de position, fondamentale pour l'avènement de la science moderne, ne résout pas la question de la nature des objets mathématiques. Aucun accord n'a jamais été trouvé sur ce point : les uns leur attribuent une réalité indépendante de la connaissance que nous en avons, les autres les réduisent à l'état de signes dont le sens se limite aux règles formelles de leur emploi.

Naissance de l'écriture symbolique

Selon Bourbaki (1969:15), «lorsqu'au XVII^e siècle la notation algébrique a pris sa forme définitive entre les mains de Viète et de Descartes, on voit presque aussitôt apparaître divers essais d'une écriture symbolique destinée à représenter les opérations logiques». A ce propos, Baruk (1992:1292) nous rappelle que ce n'est qu'avec Viète (1540-1603) que s'introduit l'usage de «désigner par des lettres tous les éléments donnés et inconnus qui interviennent dans un problème d'algèbre».

Leibniz, philosophe et mathématicien de premier plan, va savoir tirer de son expérience mathématique le germe des idées qui feront sortir la logique formelle de l'impasse scolastique. Jusque-là, toujours selon Bourbaki, les seules équations qui soient résolues dans les traités d'algèbre sont à coefficients numériques. Lorsque l'auteur énonce une règle générale pour traiter les équations analogues, il le fait du mieux qu'il peut en langage ordinaire. En l'absence d'un énoncé explicite de ce genre, la conduite des calculs dans les cas numériques traités rend plus ou moins vraisemblable la possession d'une telle règle.

Pour sa part, Laborde (1983:4) note également que «la notation algébrique reçoit ses perfectionnements décisifs de Descartes et qu'à partir de lui, l'écriture algébrique est déjà, à peu de choses près, celle que nous utilisons aujourd'hui». Aussi évoque-t-elle le fait que la forme que possède actuellement le discours mathématique est le fruit d'une évolution longue et mouvementée et qu'en particulier, l'histoire du symbolisme mathématique est une suite d'adoptions, d'abandons et de remaniements, qui a parfois donné lieu à des débats passionnés.

Langage «sans abus»

D'après Baruk (1992:41), «un langage sans abus, ne présentant aucune ambiguïté ou impropriété, c'est-à-dire parfaitement rigoureux et qui serait compris de la même façon par tous, est un vieux rêve des philosophes et des mathématiciens. Il connut son apogée au cours de ce siècle avec la tentative de constituer ce qu'on appelle des langages formalisés, c'est-à-dire des collections de signes dont chacun aurait une signification unique et qui seraient assemblés selon des lois ne comportant pas d'exception. Des langages tels que ceux-là, avec un *vocabulaire* et une *syntaxe* fixés, dont la signification serait obtenue de façon mécanique, qui éliminerait tout recours à l'intuition et toute possibilité d'interprétation autre que celle voulue par l'auteur, ont donc été construits, produisant ce que l'on appelle le formalisme, courant des mathématiques explicitement développé par le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) et poussé à l'extrême en France par Bourbaki».

Toujours selon Baruk (1992:20), «la difficulté première des mathématiques réside dans leur langage propre, ces *médiatrices, bissectrices, orthocentre* et autres mots savants écorcheurs de collégiens ou écorchés par eux». Elle ajoute: «Il n'y a pas de vocabulaire en mathématiques, il y a tout de suite des idées, et ce que les mots véhiculent ce sont, le plus souvent, des questions ou des questions et des réponses. Pour que ces mots-idées, quand ils sont hors du champ de la langue maternelle, s'intègrent à une langue qui deviendrait langue de savoir, il faut que les mots savants prennent place à côté des autres, il faut les raccrocher à la fois entre eux, et à d'autres, qui sont dans la langue naturelle. Il faut disposer d'une langue qui est outillée pour procéder à sa propre élimination: mots de tous les jours, mots savants, substantifs, adjectifs, lettres, signes, expressions consacrées par un usage, la langue des mathématiques est, lorsqu'elle est élémentaire, d'une extrême complexité». En particulier, pour prendre son sens, un mot dans un texte mathématique doit pouvoir:

- «matériellement se situer par rapport au vocabulaire habituel s'il est commun, c'est-à-dire coexister pacifiquement avec lui;[...]
- se justifier dans sa désignation s'il est savant, par exemple à partir de son étymologie, et si, son sens a évolué au cours de l'Histoire, être situé dans cette évolution;[...]
- s'expliquer si, innocent en apparence, il contient un sens supposé transparent ou évident, alors que, pour qui débute, rien n'est évident.[...]

En mathématiques, les mots utilisés sont déjà des idées.[...]

- pour aborder des idées, on a besoin de disposer de mots conceptuels qui permettent de les formuler: d'où la présence de mots tels que critère, explicite, implicite, statut, spécifier, etc.». (Baruk; 1992:23)

1.6 Le langage mathématique

Selon Laborde (1982:20), «dans un texte mathématique écrit sont utilisés deux codes, la langue naturelle et l'écriture symbolique, c'est-à-dire une écriture formée de signes extérieurs à la langue naturelle tels parenthèses, «+», «x» ou lettres et nombres. Ces signes peuvent entrer en combinaison suivant des règles spécifiques pour engendrer des expressions symboliques».

Nous nous distinguons de Laborde en intégrant les codes graphiques au langage mathématique. Dans la présente étude, nous considérons donc le langage mathématique comme étant constitué de trois langages: le langage naturel, le langage symbolique et le langage graphique.

1.6.1 Le langage naturel

Le langage naturel en mathématiques est composé de termes usuels et de termes scientifiques propres à la discipline. Voici des exemples d'énoncés mathématiques formulés en langage naturel:

- L'addition est une opération commutative.
- La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.
- La médiane d'une distribution est le cinquantième centile.
- Deux droites sont dites gauches si elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

1.6.2 Le langage symbolique

Le langage symbolique en mathématiques est constitué d'un ensemble de symboles ayant un sens bien précis et de règles régissant leur agencement. Parmi les symboles mathématiques, on trouve les chiffres (0, 1, 2, ...), les symboles représentant des mots, des locutions ou des concepts (x, y, f, Σ, ∞, $\varnothing$, Δ, $\forall$, $\exists$, ...), les symboles d'opération (+, -, x, $\div$, $\surd$, $\int$, $\cup$, $\cap$, ...), les symboles de relation (=, <, >, $\neq$, $\approx$, $\in$, ...), les signes de ponctuation.

Voici des exemples d'énoncés formulés en langage symbolique:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

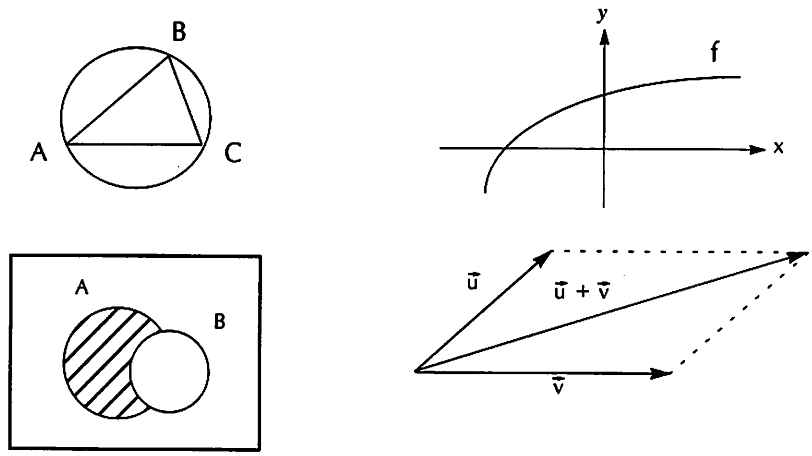
2. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

3. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$ où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.6.3 Le langage graphique

Peu d'auteurs utilisent l'expression «langage graphique». Par exemple, Janvier (1993:17) parle de représentation graphique. Laborde (1982) expérimente avec des élèves de niveau secondaire et utilise des codages pour désigner des figures géométriques. Pour Duval (1993:59), le couple (tracé,axe) constitue une image qui représente un «objet» décrit par une expression algébrique. Toute modification de cette image, qui entraîne une modification dans l'écriture de l'expression algébrique correspondante, détermine une variable visuelle pertinente pour l'interprétation du graphique. De même, avec Nadot (1993:137), le graphique est souvent présenté comme explicatif. Elle montre, en travaillant sur le triplet (fonction, repère, courbe), que les activités mathématiques liées aux représentations graphiques des fonctions sont de nature différente. Selon Nadot, le langage graphique est considéré comme un signifiant pertinent pour la description de certains concepts, et il est tout naturellement intégré au texte des mathématiques.

Dans la présente recherche, nous appelons langage graphique l'ensemble des éléments visuels ou pictogrammes utilisés en mathématiques, munis de règles d'agencement. Dans le langage graphique, on trouve, par exemple, des figures géométriques, des représentation cartésiennes, des diagrammes de Venn, des représentations vectorielles, des graphiques sagitaux. En voici des exemples:



1.6.4 Le langage mathématique: combinaison de trois langages

Nous remarquons que l'intersection de l'ensemble des énoncés appartenant à chacun des langages: naturel, symbolique et graphique est non vide. Tout comme Laborde qui considère le langage mathématique comme un hybride de deux codes (langue naturelle et écriture symbolique), Nadot constate qu'en analysant les signes utilisés dans l'enseignement des fonctions, les mots de l'algèbre et les traits du graphique sont constamment mêlés dans une même intention: faire savoir, faire comprendre. Toutefois, les expressions algébriques et les traits du graphique ne jouent pas le même rôle: l'expression algébrique est utilisée pour calculer et établir des lois ou des propriétés alors que le graphique est employé pour visualiser, pour vérifier, quelquefois pour conjecturer, plus rarement pour démontrer.

Le langage mathématique se présente donc souvent comme une association complexe de deux ou trois langages:

langage naturel et langage symbolique,

langage naturel et langage graphique,

langage symbolique et langage graphique,

langage naturel, langage symbolique et langage graphique.

1.7 Difficultés langagières en mathématiques

1.7.1 Difficultés langagières dans le langage naturel

Parmi les problèmes liés au langage, on peut distinguer ceux qui sont propres au **langage mathématique** et ceux, plus généraux, qui sont liés à la **maîtrise du français.**

Les problèmes liés à la maîtrise du français engendrent bien souvent des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques. Ceci, selon Perrin-Glorian (1994:14), a des répercussions sur l'apprentissage des élèves, à plusieurs niveaux:

- dans la compréhension des énoncés,
- dans la formulation des résultats ou de questions,
- dans l'interprétation de ce qui se fait en classe.

Il n'est donc pas étonnant que les difficultés langagières se trouvent dans l'expression et dans la formulation des résultats ou des questions chez les élèves qui en souffrent. Ceci entraîne chez eux un rendement inférieur à celui que devrait leur permettre leurs véritables connaissances.

Cette situation d'élèves ayant parfois compris l'ensemble de la démarche mathématique, mais qui sont entravés par une mauvaise compréhension du problème ou par une explication inadéquate, amène souvent des frustrations aussi bien chez eux que chez les enseignants. En effet, ces élèves, bien que faisant un effort louable et bien que comprenant la démarche dans son ensemble, sont souvent pris avec des problèmes de nuances et de précision qui finissent par nuire à leur rendement. Quant aux enseignants, leur frustration vient surtout du fait que les difficultés en cause ne relèvent pas de leur discipline, même si elles conditionnent la compréhension chez les élèves. Ne pouvant pas facilement corriger ces difficultés, parce qu'elles sont extra-disciplinaires, les enseignants ne font souvent que constater les carences et regretter qu'il en soit ainsi.

Parmi les problèmes liés à la maîtrise du français, on peut distinguer ceux qui relèvent de la sémantique et ceux qui ont trait à la syntaxe.

1.7.2 Difficultés de nature sémantique

Sémantique: définition

Selon Le Nouveau Petit Robert, la *sémantique* est l'étude du langage considéré du point de vue du sens. La sémantique étudie les relations du signifiant au signifié, les changements de sens, la synonymie, la polysémie, la structure du vocabulaire (1993, p. 2068). Dans le Grand Dictionnaire de la langue française de Larousse, on mentionne que «longtemps restreinte à l'étude du sens des mots et à celle des conditions internes et externes de leurs changements, la sémantique s'étend désormais aux règles de représentation et d'interprétation sémantique des phrases» (1971-1978, p. 5444).

Difficultés de nature sémantique en mathématiques

L'utilisation du langage naturel en mathématiques comporte donc un grand nombre de difficultés de nature sémantique. De plus, la présence de mots usuels et de termes scientifiques augmente le niveau de complexité, car, comme le fait remarquer Jacobi (1993), les mots de la langue usuelle sont polysémiques et leur sens dépend fortement du contexte, alors que les termes scientifiques sont monosémiques, ils ont un seul sens et renvoient à un unique référentiel, à une seule notion ou à un seul concept.

La définition de la sémantique, donnée pour le langage naturel, peut aussi s'appliquer au langage symbolique et au langage graphique. La seule différence, dans ces cas, est qu'elle porte sur le sens des symboles ou des éléments visuels plutôt que sur le sens des mots.

Les difficultés de nature sémantique sont donc très nombreuses en mathématiques, car il faut non seulement maîtriser le sens des termes (usuels ou mathématiques) du langage naturel, mais aussi le sens d'un très grand nombre de symboles et de codes visuels.

1.7.3 Difficultés de nature syntaxique

Syntaxe: définition

Le Nouveau Petit Robert définit la *syntaxe* comme «l'étude des relations entre les formes élémentaires du discours (mot, syntagme); l'étude des règles qui président à l'ordre des mots et à la construction des phrases, dans une langue» (1993, p. 2193). Dans le Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, on définit la syntaxe comme «la partie de la grammaire décrivant les règles par lesquelles se combinent en phrases les unités significatives» (Dubois et autres, 1994, p. 468).

Ces définitions, qui concernent le langage naturel, peuvent être transposées au langage symbolique et au langage graphique. Ainsi, dans le cas de la *syntaxe symbolique*, on parlera de l'ordre des symboles plutôt que de l'ordre des mots. De même, dans le cas de la *syntaxe graphique*, on parlera de la construction de figures ou de graphiques plutôt que de la construction de phrases.

Difficultés de nature syntaxique en mathématiques

Si la définition de la syntaxe peut s'appliquer aux trois langages, il n'en va pas de même pour les règles. Ainsi, les règles qui président à l'ordre des mots dans une phrase ne sont pas les mêmes que celles régissent l'ordre des symboles dans une expression ou l'agencement des éléments visuels dans une figure ou dans un graphique. Chacun de ces langages (naturel, symbolique et graphique) a ses propres règles de syntaxe. Le langage mathématique, reposant sur ces trois langages, comporte donc trois systèmes de règles syntaxiques. Il est donc compréhensible que les élèves éprouvent de nombreuses difficultés de nature syntaxique en mathématiques.

1.7.4 Exemple de difficultés de nature sémantique en mathématiques

Difficultés sémantiques liées à l'utilisation du concept d'égalité

Certains concepts nous sont tellement coutumiers que nous avons du mal à envisager qu'ils puissent poser problème à nos élèves. Tel est le cas du **concept d'égalité**, «élémentaire» mais, sans conteste, fondamental. Toutefois, il n'est pas aussi évident qu'il semble l'être! Nous présentons brièvement des résultats de recherches concernant ce sujet pour le langage naturel et pour le langage symbolique.

Dans un article sur le concept d'égalité, Francis Reynes (1994:62) montre les différentes utilisations et difficultés langagières reliées au signe d'égalité (=). Pour lui, les «objets mathématiques» ne sont pas des objets physiques, matériels, appréhendables par les sens, et il importe de mettre en évidence cette différence. En effet, les **«objets mathématiques»** sont des **«concepts»**, des idées. En ce sens, il signale que personne n'a jamais vu et ne verra jamais le nombre «douze», que personne n'a jamais vu un cercle, et pourtant ces objets sont parfaitement appréhendables, à condition que l'on dispose de quoi les représenter, les nommer.

De plus, un même objet mathématique peut avoir des noms divers: ainsi le nombre 36 peut être désigné par une infinité d'expressions, telles que $33+3$, $(3+3)^2$, etc. Dans ces cas, le signe d'égalité n'est pas un signe mathématique, mais un signe sémantique, exprimant que deux termes signifient la même chose. Cette information se traduit en langage symbolique par le fait que ces deux dénominations sont égales entre elles et l'on écrit alors: $33+3 = (3+3)^2$.

Signifié et signifiants

L'égalité est donc plus un signe linguistique que mathématique, et, lorsqu'elle est exprimée en mathématique, elle est nécessairement une traduction d'une propriété linguistique. Le premier travail à faire est donc de considérer les expressions d'un point de vue linguistique et d'assurer ensuite la traduction mathématique en fonction du sens, sans oublier qu'un signifié peut admettre plusieurs signifiants. L'on aura alors droit à une égalité, lorsque le signifié est le même mais qu'il est visé par des signifiants différents. Assurer un bon passage du niveau linguistique au niveau mathématique nécessite un retour à l'aspect linguistique qu'on néglige souvent, et également des exercices de traduction.

Traduction du concept d'égalité, du langage naturel au langage symbolique

Par exemple, traduire «trente-six est le triple de douze» oblige à analyser la phrase et à la partager en trois composantes (sujet, verbe, attribut) dont les traductions vont faire émerger le sens:

«trente-six» s'écrira 36,

«est» se traduira par «=»

«le triple de douze» s'écrira 3x12.

Et la traduction symbolique donnera: $36 = 3x12$.

A propos du sens du signe de l'égalité, Baruk (1992:389) signale qu'avant toute chose, pour que le signe «=» ait un sens, il faut qu'il soit utilisé entre des objets de même nature:

- nombre = nombre,
- nombre de = nombre de,
- vecteur = vecteur,
- etc.

On comprend encore mieux les multiples usages du signe «=» lorsque Baruk, passant du langage symbolique au langage naturel, examine le sens de ce signe quand le **verbe sous-entendu** traduit une **information** qui peut être, par exemple:

1. **une désignation:**

   $f(x) = 2x+3$, $\sqrt{2} = 1,41421...$, $N = \{0,1,2,3,.....\},...$

   Quand le signe «=» a pour fonction d'informer du nom d'un objet mathématique, il pourrait être remplacé par «*est*», ou bien «*s'appelle*», ou «*est désigné par*», selon le sens dans lequel on donne cette information;

2. **l'expression d'une formule:**

   Par exemple, si x désigne le déplacement vers le bas à partir de la position d'équilibre d'un poids attaché à un ressort, la loi de Hooke énonce que la force F est donnée par:

   $F = -kx$, k étant la constante positive du ressort.

   Dans la lecture d'une formule, le signe «=» pourrait ici se traduire par «*est obtenu(e) par*», «est la résultante de».

Ces quelques exemples d'utilisation du signe «=», choisis parmi les plus courants, montrent d'abord l'importance de la compréhension du concept d'égalité pour qu'on puisse ensuite en assurer une traduction adéquate, du langage naturel au langage symbolique, ou l'inverse. Être sensibilisé à cette réalité facilite le travail de traduction qu'on est appelé à faire continuellement en mathématiques. Il s'agit chaque fois de bien comprendre le sens d'un concept, avant de le traduire, et cela ne se fait pas sans effort.

1.7.5 Difficultés langagières dans le langage symbolique

On constate souvent chez les élèves une méconnaissance de la sémantique et de la syntaxe symboliques. Cela se traduit par des omissions de symboles (oubli de parenthèses, par exemple), ou par la confusion d'un symbole avec un autre, (comme par exemple «=» à la place de «⇔»). Nombreux sont les élèves qui ne savent pas décoder les expressions symboliques qu'ils ont à manipuler. Ils fonctionnent par automatisme ou par mimétisme, sans comprendre vraiment ce qu'ils font et on peut conclure qu'ils comptent plus sur des recettes que sur la maîtrise des notions.

À la section précédente, nous avons mis en évidence certaines difficultés sémantiques élémentaires liées à l'utilisation du concept d'égalié. Examinons maintenant quelques difficultés rencontrées lors de l'utilisation de ce concept dans le langage symbolique.

Concept d'égalité et langage symbolique

Prenons l'expression symbolique suivante: $(a+b)(a+b)$. Elle représente un objet mathématique: un binôme multiplié par lui-même, ou le carré d'un binôme. Si on utilise la notation exponentielle pour écrire cette expression, on obtient: $(a+b)^2$. On dit alors que $(a+b)^2$ est signifiant du signifié $(a+b)(a+b)$.

De même, si on utilise le résultat obtenu de la multiplication des deux binômes pour écrire l'expression symbolique, on obtient: $a^2+2ab+b^2$. On dit alors que $a^2+2ab+b^2$ est un un autre signifiant du signifié $(a+b)(a+b)$.

Puisque ces deux signifiants ont le même signifié, $(a+b)(a+b)$, le concept d'égalité nous permet d'écrire l'expression symbolique suivante:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Omettre de faire le passage de l'objet mathématique au signifiant, oublier de rappeler que le signe d'égalité n'est pas un signe mathématique mais un signe sémantique, donne lieu à des difficultés langagières assez fréquentes lors de son utilisation dans le langage symbolique. A cet effet, nous constatons qu'il n'est pas rare de voir l'élève écrire le signe d'égalité entre des expressions symboliques qui n'ont pas le même signifié; par exemple:

$$(a - b)^2 = a^2 - b^2, \qquad \sqrt{a^2+b^2} = a+b, \qquad \sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Assude (1989:24) estime que, dans l'écriture $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, la difficulté langagière provient du fait que l'élève transfère des savoirs du domaine de la linéarité des fonctions, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, à celui des racines.

Égalité relationnelle

D'autres difficultés langagières surgissent au moment où l'on introduit les égalités relationnelles, c'est-à-dire celles qui établissent une relation entre deux ou plusieurs quantités. Selon Vergnaud, dans l'expression symbolique P=KOJ, on peut accepter l'idée que la formule est facile d'utilisation pour l'élève lorsqu'il connaît la valeur de K, O et J, mais attention! il peut être victime de l'application aveugle d'une recette. «*On peut encore penser que, pour beaucoup d'élèves, les lettres ne représentent que des grandeurs connues ou inconnues mais pas des variables. La formule fonctionne alors comme une recette, sans que ses raisons puissent être rendues intelligibles*» (Vergnaud, 1993:13).

Pour donner du sens à une expression symbolique, il faut commenter les inconnus que l'on trouve dans l'expression avec des énoncés du langage naturel ou avec un autre système de signifiants. Ainsi, selon Vergnaud, si, dans l'expression P=KOJ, «P» représente la production, «K» une constante, «O» le nombre d'ouvriers et «J» le nombre de jours de travail, la formule P=KOJ peut s'interpréter de diverses façons; par exemple:

- La production «P» est proportionnelle au nombre «O» d'ouvriers, lorsque le nombre de jours «J» de travail est constant. C'est-à-dire, la production «P» est fonction du nombre «O» d'ouvriers, et l'on écrit: P(O)=KOJ.
- La production «P» est proportionnelle au nombre de jours «J» de travail, quand le nombre «O» d'ouvriers est constant. C'est-à-dire la production «P» est fonction du nombre de jours «J» de travail, et l'on écrit: P(J)= KOJ.

C'est à ce type de réflexions que l'élève doit se livrer lorsqu'il est aux prises avec le symbolisme algébrique des fonctions.

Nous passons maintenant aux difficultés liées à l'utilisation du langage graphique. Ici aussi, on remarquera que bon nombre de difficultés ont pour causes un problème de «lecture» des représentations graphiques.

1.7.6 Difficultés dans le langage graphique

À la lecture d'un graphique, tout comme à la lecture d'une expression symbolique, on est souvent aux prises avec deux difficultés. Selon Dreyfus et Mazouz (1993:245), «*le langage des graphiques est composé de codes qui représentent des concepts. Ceux-ci ne sont considérés comme acquis par l'élève que lorsqu'il est capable de les utiliser à bon escient*». Ces auteurs constatent que, même quand les élèves possèdent le bagage cognitif nécessaire à l'utilisation judicieuse des représentations graphiques, ils semblent ne pas toujours l'utiliser spontanément.

On imagine trop souvent que l'élève est en mesure de faire une interprétation qualitative du graphique, c'est-à-dire de l'observer globalement et d'entrevoir une correspondance entre le visualisé et l'écrit. Mais on oublie que, malgré ses aptitudes à un tel travail, il n'a pas une tendance spontanée à utiliser ses habiletés pour entrevoir ce qui est représenté par le graphique. Dreyfus et Mazouz nous rappellent cette réalité: «*Pour qu'un graphique illustre un processus, il faut, d'une part, que l'élève possède les aptitudes et les habiletés intellectuelles nécessaires à la «saisie de sens», et, d'autre part, qu'il ait tendance à les utiliser spontanément*»(1993:247).

Bien que le langage graphique soit de plus en plus intégré au texte mathématique, Nadot souliqne que «*le langage graphique est considéré comme un signifiant pertinent pour la description de concepts, et il est tout naturellement intégré au texte des mathématiques*» (1993:137). Sa saisie par l'usager est loin d'être spontanée et automatique: elle nécessite des apprentissages préalables.

1.8 Difficultés langagières dans l'utilisation de plus d'un langage

1.8.1 Difficultés de traduction

Des chercheurs au niveau de l'enseignement secondaire (Burkhart, 1977) et Janvier, 1978, cités par Janvier (1993:18) ont imaginé de décrire, dans un tableau, les processus mentaux de traduction que mettent en branle divers exercices scolaires sur les variables-fonctions en imposant de réaliser le passage d'un mode de représentation à un autre. Dans ces recherches, le concept de variable-fonction est l'idée maîtresse qui sert à l'étude de la notion de traduction d'un langage à un autre langage.

Les différentes traductions sont exprimées dans le tableau suivant:

de → **à**	Description verbale	**Tableau**	Graphique	Formule équation
Description verbale	*Dv* → *Dv*	*Dv* → *Tb*	*Dv* → *Gr*	*Dv* → *Fo*
Tableau	*Tb* → *Dv*	*Tb* → *Tb*	*Tb* → *Gr*	*Tb* → *Fo*
Graphique	*Gr* → *Dv*	*Gr* → *Tb*	*Gr* → *Gr*	*Gr* → *Fo*
Formule équation	*Fo* → *Dv*	*Fo* → *Tb*	*Fo* → *Gr*	*Fo* → *Fo*

Voici un exemple d'exercice scolaire tiré d'un test comportant cinq questions sur les variables-fonctions imposant de réaliser le passage d'une description verbale à une description graphique:

> «*Tracer sur le système d'axes (deux axes orthogonaux apparaissent sur le questionnaire) comment varie le temps que met un avion pour franchir la distance Paris-Montréal en fonction de sa vitesse*». (Janvier, 1993:30)

Cet exercice fut soumis en décembre 1991 à des élèves de collège I se destinant à des études scientifiques. Le taux de réussite fut de 40%. Beaucoup de ceux qui ont réussi ont fait une traduction Dv → Fo pour ensuite faire une traduction Fo → Gr.

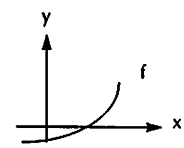
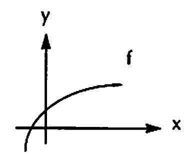
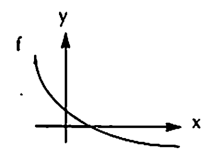
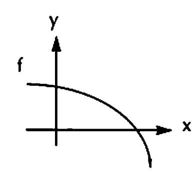
Selon l'auteur, l'absence de valeurs numériques est susceptible de déclencher des réponses aux caractères imprévisibles et les résultats obtenus le confirment. Janvier estime que, parmi les élèves qui ont réussi cette épreuve, beaucoup sont partis de la formule $s = v \times t$ pour trouver $t = s/v$. Ceux qui n'ont pas su faire la traduction de l'énoncé du problème (donné en langage naturel) en langage symbolique et aussi la traduction du langage symbolique au langage graphique ont éprouvé des difficultés langagières. En effet, 17% des élèves ont tracé une droite de pente négative, c'est-à-dire qu'ils ont linéarisé la relation proportionnelle inverse et plusieurs représentent plutôt la façon dont varie la vitesse de l'avion tout au long du parcours.

1.8.2 Difficultés langagières liées à l'utilisation des trois langages

Description du comportement d'une fonction

La notion de variation d'une fonction (croissance et décroissance) est habituellement associée à une étude du signe de la dérivée. Dans une recherche menée sur une approche graphique de la dérivée. Parker (1993:29) constate que «*peu d'élèves sont capables de décrire, à l'aide de mots et par un graphique, le comportement d'une fonction f, connaissant le signe des dérivées f' et f''.*»

Par exemple, le tableau suivant illustre les combinaisons possibles de signes, pour f' et f'', et la traduction (en langage naturel et en langage graphique) des résultats au sujet de f.

Information donnée en langage symbolique	Traduction en langage naturel	Traduction en langage graphique
$f' > 0$ et $f'' > 0$	accélération de la croissance de f	
$f' > 0$ et $f'' < 0$	ralentissement de la croissance de f	
$f' < 0$ et $f'' > 0$	ralentissement de la décroissance de f	
$f' < 0$ et $f'' < 0$	accélération de la décroissance de f	

Parker souligne des difficultés de traduction du langage symbolique au langage naturel et du langage symbolique au langage graphique. Ainsi, ce qui fait obstacle, dans la lecture de l'expression symbolique: $f' > 0$ et $f'' > 0$, par exemple, est le fait que le sens qui en découle est obtenu de la conjonction de deux expressions symboliques et que ce sens est différent de celui accordé à chacune des deux expressions prises de façon isolée. Sous l'angle du comportement d'une fonction, l'énoncé précédent se traduit par: f une fonction croissante et sa courbe est concave vers le haut; c'est-à-dire il y a une accélération de la croissance de f.

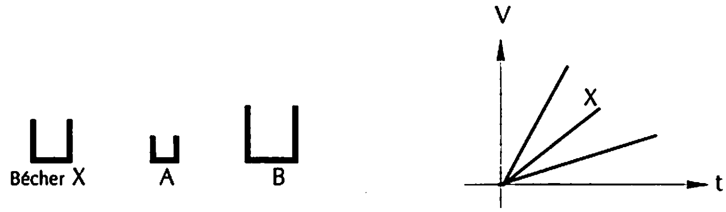
De même, pour traduire graphiquement le concept de *l'accélération de la croissance*, l'élève doit être en mesure de construire des signifiants graphiques qui l'amèneront à conceptualiser le phénomène étudié.

Cet exercice montre jusqu'à quel point l'élève doit, comme le mentionnent Dreyfus et Mazouz, posséder les aptitudes et les habiletés intellectuelles nécessaires à la «saisie du sens». Dans un énoncé en apparence aussi anodin que celui de «l'accélération de la croissance», il doit associer les notions de dérivée première, de dérivée seconde, de croissance d'une fonction et connaître les liens existant entre chacune de ces notions, pour finalement faire une déduction. Ce sont là des conditions dont l'absence est susceptible de bloquer son apprentissage.

Autre exemple de traduction

Claude Janvier signale le même type de problèmes lorsqu'il aborde les difficultés rencontrées par l'élève dans la traduction d'une description verbale en langage graphique. À cet effet, il donne l'exemple d'exercices impliquant des courbes représentant des phénomènes de remplissage de contenants différents.

> *«On demande de tracer comment varie la hauteur du liquide contenu dans la bouteille illustrée, lorsqu'elle est remplie à débit constant.*

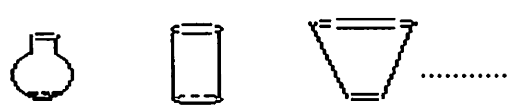


Janvier (1993:22) »

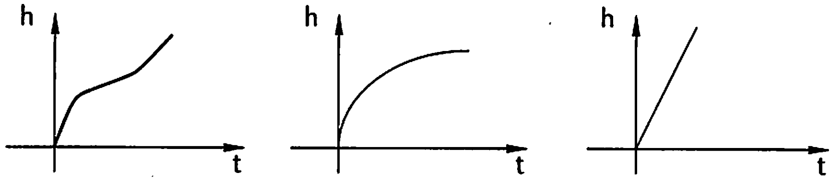
Le problème consiste à établir une bijection entre les récipients et les graphiques. Une première difficulté langagière surgit au moment où l'élève veut traduire en langage graphique l'expression verbale suivante: «**comment varie** la hauteur du liquide contenu dans la bouteille». Implicitement, cette expression veut dire: «comment la hauteur du liquide dans chacune des bouteilles varie-t-elle en fonction du temps?»

L'auteur a choisi d'écrire V au lieu de h pour la hauteur (en ordonnée). Il aurait été préférable d'identifier l'ordonnée par h ou h(t), afin d'éviter à l'élève une confusion entre la vitesse et la hauteur. De même, comme il est habitué à utiliser la lettre x comme abscisse, l'utilisation du symbole X pour désigner le récipient étalon est aussi un mauvais choix. Ces difficultés (comprendre l'implicite, décoder l'ordonnée et bien identifier l'abscisse) étant surmontées, il faut maintenant établir la bijection entre les récipients et les graphiques. Si la hauteur dans le bécher X varie selon le graphique donné (ce qui est déjà fourni par l'auteur), il devient évident que la hauteur du liquide dans la bouteille A variera plus rapidement que celle du bécher X, ce qui facilite la bijection entre récipient et courbe.

Parker (1993:30), dans le but d'habituer les élèves à raisonner graphiquement, sans passer par l'application d'une formule ou d'une technique calculatoire, reprend l'exercice proposé par Janvier en utilisant six récipients de même volume et de même hauteur mais de formes différentes remplis à l'aide de six robinets qui ont tous le même débit. Ces six récipients sont des surfaces de révolution, trois sont dessinés ci-dessous:



Ici aussi, il est demandé d'établir une bijection entre les récipients et les graphiques. La hauteur **h** de l'eau, dans chacun des récipients, varie en fonction du temps **t**, suivant l'un des graphiques suivants:



Parker soulève la difficulté de justifier ou de faire comprendre aux élèves la formule:

$$\text{débit} = \frac{dV}{dt} = \pi\, r^2(h)\, \frac{dh}{dt}$$

mais elle n'a aucun doute sur la compréhension que devrait avoir l'élève du lien qualitatif existant entre le rayon du récipient et la vitesse à laquelle le niveau du liquide y monte. Ce que Parker illustre ici, c'est le fait que les difficultés liées au langage symbolique peuvent être évacuées temporairement en faisant raisonner l'élève graphiquement.

En ce qui concerne ces problèmes de débit, Janvier (1993:23) fait remarquer «que la traduction du langage graphique au langage naturel s'avère beaucoup plus difficile que l'inverse.» Dans les deux exemples que nous venons de traiter, il s'agirait de décrire verbalement la forme que devrait prendre la bouteille pour laquelle on aurait une courbe de remplissage donnée.

Pour ce qui est de la traduction du langage graphique au langage symbolique, même si les exercices sont simples, la difficulté n'est pas moindre. En effet, Duval (1993:57) mentionne que l'on observe chez l'élève «l'impossibilité de trouver l'équation d'une droite en partant de sa représentation graphique, même dans les cas les plus élémentaires.» Nous avons observé des résultats similaires dans cette recherche (voir à ce sujet la section 4.5). Duval n'attribue pas ces difficultés à la connaissance des concepts mathématiques mais bien à la méconnaissance du décodage des représentations graphiques et à celui de l'écriture algébrique. Sa critique porte sur la façon d'effectuer le passage du langage symbolique au langage graphique. Il va jusqu'à affirmer que: «*Dans l'enseignement et dans certaines études didactiques, on s'en tient au passage d'une équation à sa représentation avec construction point par point, et on oublie que c'est le passage inverse qui fait problème. Pour effectuer ce passage inverse, l'approche point par point, non seulement est inadéquate, mais constitue un obstacle*» (1993:58).

Signalons enfin que la revue de la documentationnous a permis de soupçonner beaucoup de difficultés langagières en mathématiques. Cependant, les recherches en didactique des mathématiques concernent habituellement les niveaux primaire et secondaire. Une des motivations de notre recherche est d'abord de mettre en évidence l'existence de ces difficultés langagières au niveau collégial et, subséquemment, par le biais de la validation et de la diffusion, les faire connaître aux professeurs de ce niveau.

Les objectifs de cette recherche sont les suivants:

1. Identifier les erreurs liées aux langages naturel, symbolique et graphique. Pour ce faire, nous nous proposons:
   - d'établir un processus d'identification des erreurs de nature langagière en mathématiques.
   - d'élaborer un test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques.
   - de classer les erreurs de nature langagière en mathématiques.
2. Évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques. À cet effet, nous nous proposons:
   - d'établir un processus pour évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats à divers tests mathématiques.

La méthode de recherche utlisée pour atteindre ces objectifs est décrite dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Méthodologie

Pour atteindre les objectifs poursuivis, plusieurs étapes ont été prévues et des choix méthodologiques ont été faits. Nous décrivons dans un premier temps ces choix, puis les étapes méthodologiques pour l'atteinte de chacun des objectifs.

2.1 Choix méthodologiques

Type de recherche

La présente recherche est de type qualitatif; elle est à la fois exploratoire, descriptive, et collaborative. Pour identifier les erreurs de nature langagière en mathématiques, nous avons choisi de débuter par une phase exploratoire et de terminer en décrivant les types d'erreurs langagières.

Pour mieux atteindre les objectifs visés, nous avons sollicité la collaboration des professeurs et des élèves à plusieurs étapes de la recherche. La nature du projet leur a été exposée dès le début ainsi que la collaboration souhaitée de leur part. Les élèves et les professeurs ont été informés des résultats de toutes les étapes auxquelles ils ont participé. L'étroite collaboration qui a existé entre toutes ces personnes et les chercheurs est une des caractéristiques importantes de cette recherche.

Population cible

La recherche a été réalisée au collège Jean-de-Brébeuf auprès des élèves de première année du secteur général, entre l'automne 1994 et le printemps 1996. Les programmes concernés sont les suivants: sciences de la nature, sciences humaines, baccalauréat international et programme intégré.

Aspects déontologiques

Les buts de la recherche ont été expliqués à toutes les personnes impliquées. Au tout début de la recherche, une lettre de déontologie (voir annexe 1) a été distribuée à tous les élèves, sollicitant l'autorisation d'utiliser certains de leurs travaux et examens. Cette lettre a été signée par 632 des 660 élèves concernés; les documents des 28 élèves qui n'ont pas signé n'ont donc pas été analysés. La confidentialité a été assurée tout au long de la recherche et la permission d'enregistrer les entrevues a toujours été demandée aux personnes impliquées.

Dans la section suivante, nous décrivons les étapes méthodologiques suivies pour atteindre le premier objectif visé.

2.2 Identification des erreurs de nature langagière en mathématiques

Le premier objectif de cette recherche était d'identifier les erreurs langagières des élèves en mathématiques dans chacun des langages utilisés (naturel, symbolique et graphique). Pour atteindre cet objectif, nous avons établi plusieurs étapes, élaboré des instruments et combiné diverses approches.

Dans la suite, nous décrivons, selon l'ordre chronologique, chacune des étapes suivies et chacun des instruments élaborés.

2.2.1 Étape préliminaire

Nous avons amorcé la liste des erreurs langagières en mathématiques en analysant des copies d'examens finals de la session précédente (hiver 1994) à l'aide d'une grille préliminaire de types d'erreurs. Lorsqu'il y avait une erreur sur une copie, nous cherchions d'abord à déterminer s'il s'agissait d'une erreur langagière ou d'un autre type d'erreurs. Chaque erreur langagière relevée était analysée afin de déterminer le(s) langage(s) en cause (naturel, symbolique ou graphique) et les aspects langagiers concernés.

Nous avons ainsi obtenu un début de liste d'erreurs, mais nous avons rapidement été limités dans notre analyse de documents. Par exemple, lorsqu'il n'y avait pas de réponse à une question, nous ne pouvions pas savoir ce qui avait amené l'élève à ne pas répondre. Dans les cas où la solution était erronée, il était souvent difficile de déterminer la nature de l'erreur commise. Même lorsque la solution était détaillée, il n'était pas toujours facile d'identifier le ou les mots ou symboles à l'origine de l'erreur.

Il est alors apparu nécessaire de rencontrer des élèves en entrevue pour qu'ils nous éclairent sur leurs erreurs ou leur absence de réponse à des questions. Nous avons donc modifié la planification de la démarche initialement prévue, en procédant à des entrevues individuelles avec les élèves et en réduisant le nombre de copies à analyser.

2.2.2 Entrevues individuelles avec des élèves

Les premières entrevues ont été faites dans un but exploratoire. Pour cette raison, nous avons opté pour des entrevues non dirigées où le chercheur n'intervient presque pas, son rôle se limitant à recueillir l'information, à stimuler la communication et à maintenir le flot d'informations sur les variables étudiées; il utilise, entre autres moyens, l'écoute verbale et non verbale, les questions et la reformulation (Viens, 1994:4).

Ces premières entrevues ayant été concluantes, nous avons décidé de poursuivre l'identification des erreurs langagières en combinant l'analyse de copies d'élèves et les entrevues individuelles. Cependant, pour préciser davantage les erreurs relevées, nous avons opté pour des entrevues semi-dirigées (Viens, 1994). Un protocole d'entrevue a été préparé (voir annexe 2), puis a été validé par une experte en entrevues. Des questions étaient préparées avant chaque entrevue, en fonction de l'analyse de la copie de l'élève à interviewer. D'autres questions s'ajoutaient en cours d'entrevue, selon les informations obtenues.

Au total, dans cette étape, nous avons analysé environ cinq cents copies d'examens, ou de travaux d'élèves et réalisé trente entrevues individuelles avec dix-huit élèves (dix filles et huit garçons).

Les élèves étaient sélectionnés en fonction des erreurs observées sur les copies d'examens ou de travaux. Lorsque plusieurs élèves avaient fait les mêmes erreurs, nous consultions leur professeur de mathématiques afin de choisir les élèves les plus habiles à parler ou les plus susceptibles d'apporter une collaboration. Les élèves sélectionnés étaient ensuite, par l'intermédiaire de leur professeur, invités à nous rencontrer. Quelques élèves l'ont été à plusieurs reprises, car ils étaient très volubiles et nous permettaient de préciser beaucoup d'erreurs langagières. Nous avons jugé plus efficace de continuer à travailler avec ces élèves plutôt que d'en prendre de nouveaux chaque fois.

La plupart des entrevues semi-dirigées ont été enregistrées, avec le consentement des élèves. Lorsqu'un élève préférait ne pas être enregistré, nous prenions des notes sur place. Dans tous les cas, le rapport de l'entrevue a été fait le jour même. Chaque entrevue faisait ensuite l'objet d'une discussion ou d'une mise au point entre les deux chercheurs.

D'autres entrevues avec des élèves ont été réalisées dans les étapes suivantes de la recherche, pour valider les instruments élaborés ou préciser l'analyse des résultats. Chacune de ces entrevues a permis de déceler ou de préciser des erreurs langagières. En combinant l'analyse de documents et les entrevues, nous avons donc été en mesure de mieux comprendre les difficultés des élèves et de mieux interpréter leurs erreurs en mathématiques. La grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques s'est ainsi raffinée tout au long de la recherche.

Plusieurs résultats d'entrevues sont rapportés dans les chapitres suivants, notamment dans les chapitre 5 et 6 portant sur les *types d'erreurs de nature langagière en mathématiques* et l'*importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques*.

2.2.3 Autres formes de collecte de données

Dans le cadre de cet objectif, nous avons aussi réalisé d'autres formes de collecte de données. Ainsi, nous avons eu plusieurs discussions de groupe (environ une par semaine ou par deux semaines) avec les professeurs de mathématiques enseignant aux élèves de première année du programme de sciences de la nature. Au cours de ces discussions, les professeurs nous rapportaient les erreurs langagières qu'ils avaient notées chez leurs élèves ou examinaient avec nous les copies du dernier examen. Cette collaboration des professeurs a été très précieuse tout au long de la recherche.

Nous avons aussi observé deux groupes d'élèves en classe à l'occasion d'un petit test faisant ressortir des difficultés langagières. Comme ils devaient le faire en équipes de deux, il a été possible de suivre leur démarche. Pour faciliter davantage l'observation, des consignes ont été données aux élèves et une grille d'observation a été préparée. Le résultat de cette observation est rapporté au chapitre 5 (section 5.7.3).

À ce stade de la recherche, de nombreuses erreurs langagières en mathématiques avaient été identifiées, mais les formes de collecte de données utilisées ne permettaient pas de savoir si ces erreurs étaient marginales ou très répandues chez les élèves. Pour évaluer leur fréquence dans la population étudiante, il était prévu d'élaborer un test faisant ressortir des difficultés langagières en mathématiques. Un prétest a d'abord été préparé afin d'étendre l'étape exploratoire à une plus grande échelle et de déterminer la forme et le style des questions. Voici les informations relatives au prétest.

2.2.4 Prétest

Caractéristiques

La population visée par le prétest comprenait l'ensemble des élèves du collège Jean-de-Brébeuf inscrits au cours Mat. 203 (calcul différentiel et intégral II) à la session d'hiver 1995.

Compte tenu du moment où le prétest pouvait être administré, soit au tout début de la session d'hiver, nous avons décidé de faire porter le contenu des questions sur des notions importantes du premier cours de calcul différentiel et intégral (Mat.103) et des notions mathématiques de niveau secondaire. Nous avons aussi fixé la durée du prétest à un maximum de 45 minutes.

Le prétest ne devait pas nécessiter de révision ni de calcul de la part des élèves. Cependant, il devait permettre de vérifier s'ils étaient capables d'analyser des phrases, des expressions symboliques ou des graphiques, s'ils avaient bien saisi le sens des termes, des symboles et des aspects graphiques visés, et s'ils pouvaient traduire d'un langage à un autre.

Le prétest ayant un but exploratoire, nous avons opté pour des questions simples, courtes et ouvertes, plutôt qu'à choix multiples, car il nous apparaissait essentiel de ne pas influencer les élèves dans leurs réponses. L'élaboration des questions a été basée sur les types d'erreurs déjà identifiés et sur les travaux d'autres chercheurs (Bibeau, Comeau et Richard, 1992; Clement, Lokhead & Monk, 1981; Duval, 1993; Janvier, 1993).

Validation

Pour valider le questionnaire, nous avons eu une première entrevue de groupe avec trois professeurs de mathématiques enseignant aux élèves visés par le prétest. La discussion a porté sur le contenu, la formulation et la clarté des questions, et sur le vocabulaire utilisé. Des corrections ont été apportées à la suite des commentaires, puis nous avons eu des entrevues individuelles avec ces mêmes professeurs pour valider la version corrigée du questionnaire, la durée du prétest et la classification des questions suivant le ou les langages impliqués. La version finale (voir l'annexe 3) comportait une soixantaine de questions regroupées en 18 thèmes. À la fin du prétest, nous demandions aux élèves de nous indiquer les questions qui les avaient embêtés ou qu'ils jugeaient ambiguës.

Administration

Le prétest a été administré entre le 18 et le 23 janvier 1995 aux 348 élèves inscrits en Mat. 203. De ce groupe, 237 provenaient du programme de sciences de la nature (Sc.N.), 22 du programme intégré (P.I.), 45 du baccalauréat international (B.I.), option sciences de la nature, et 44 du B.I. sciences humaines.

Les objectifs du prétest ont été présentés verbalement aux élèves par leurs professeurs. Les consignes ont été respectées fidèlement par l'ensemble des groupes et tous les élèves ont réussi à faire le prétest dans les délais prévus.

Correction

Comme le prétest devait aussi être utilisé pour évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques (objectif 2), un barème de correction a été établi. Les détails relatifs à ce barème sont donnés à la section suivante (en 2.3.2).

Pour des raisons d'uniformité, la correction a été faite par un des chercheurs. Nous avons retenu les résultats suivants pour fins d'analyse: les réponses erronées, les questions jugées embêtantes ou ambiguës par les élèves, les questions laissées sans réponses, ainsi que les scores moyens des élèves, par question, par langage et pour l'ensemble du prétest.

Entrevues avec des professeurs

Dans le but d'analyser plus en profondeur ces résultats, nous avons procédé à des entrevues avec des professeurs et des élèves. Deux entrevues de groupe ont d'abord été réalisées avec cinq professeurs de mathématiques. Pour préparer ces entrevues, un protocole a été élaboré, (voir l'annexe 4) puis validé par une experte en méthodologie de recherche. Un questionnaire tiré de ce protocole a été envoyé deux semaines à l'avance à chacune des personnes invitées. Les entrevues ont été enregistrées et ont porté sur les points suivants: les questions du prétest à conserver pour le test, celles dont la formulation devait être corrigée, les styles de questions à retenir, les thèmes importants qui devraient être abordés dans le test, ainsi que les termes, les symboles, les éléments graphiques et les aspects langagiers importants qui devraient être testés.

De ces discussions, nous avons dégagé une liste de questions prioritaires du prétest (voir l'annexe 5), questions devant faire l'objet d'entrevues avec les élèves. En nous basant sur cette liste, nous avons sélectionné les élèves dont les résultats au prétest correspondaient aux caractéristiques recherchées. Les professeurs ont ensuite été consultés afin d'identifier, dans chaque groupe, les élèves les plus susceptibles de nous aider. Un échantillon de trente-six élèves a ainsi été obtenu. L'annexe 6 donne le résumé des caractéristiques de ces élèves d'après leurs réponses au prétest.

Entrevues avec des élèves

Une lettre (voir l'annexe 7) a été envoyée à chacun de ces élèves, les invitant à nous rencontrer en entrevue. La majorité d'entre eux ont répondu positivement. De ceux-là, douze ont été choisis pour l'analyse des résultats du prétest; les autres ont été retenus pour une étape ultérieure. Le groupe des douze élèves comprenait six filles et six garçons; six d'entre eux provenaient du programme de sciences de la nature, deux du programme intégré et quatre du baccalauréat international (trois de l'option sciences de la nature et un de l'option sciences humaines). Parmi ces élèves, deux avaient eu un résultat élevé au prétest, huit avaient eu un résultat moyen et les deux autres, un résultat faible.

Les douze élèves ont été interviewés individuellement. Toutes ces entrevues ont été enregistrées; un protocole avait préalablement été préparé, puis validé par une experte en méthodologie de recherche. Les entrevues ont porté sur les questions prioritaires du prétest, notamment sur les réponses erronées des élèves, sur leurs absences de réponse et sur les questions qu'ils avaient jugées embêtantes ou ambiguës.

Après que les entrevues aient eu lieu, nous avons fait une synthèse des commentaires des élèves et des professeurs en vue de l'élaboration du test et de l'établissement définitif de la grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques. Les scores par langage et pour l'ensemble du prétest ont été retenus pour évaluer l'importance des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques (voir la section 2.3).

Le tableau suivant résume les informations relatives au prétest ainsi que le déroulement des activités.

TABLEAU 2.1
Prétest

Population:	tous les élèves du collège Jean-de-Brébeuf inscrits au cours Mat. 203 à la session Hiver 1995, soit 348 élèves de 4 programmes (Sc.N.: 237; P.I.: 22; B.I. (Sc.N.): 45; B.I. (Sc.H.): 44).
Contenu:	notions mathématiques de niveau secondaire et de Mat. 103.
Format:	type exploratoire, questions ouvertes, courtes.
Élaboration:	basée sur les types d'erreurs langagières déjà identifiés, des travaux d'autres chercheurs.
Validation:	3 professeurs de mathématiques de niveau collégial.
Durée:	45 minutes.
Administration:	début de la session Hiver 1995.
Correction:	par un des chercheurs, barème: 0, 1 ou 2 point(s) par sous-question.
Résultats analysés:	les réponses erronées, les absences de réponses, les questions jugées ambiguës par les élèves, les scores moyens des élèves: par question, par langage, pour l'ensemble du prétest.
Entrevues:	2 entrevues de groupe avec 5 professeurs de mathématiques de niveau collégial, 12 entrevues individuelles avec des élèves (F: 6; G: 6) choisis selon le programme (Sc.N.: 6; P.I.: 2; B.I.(Sc.N.): 3; B.I. (Sc.H.): 1) et le résultat au prétest (2 forts, 8 moyens, 2 faibles).
Synthèse:	pour préciser la grille des types d'erreurs langagière en mathématiques, élaborer le test, évaluer l'importance des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques.

2.2.5 Grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques

L'ensemble des activités précédentes, notamment celles reliées au prétest, ont permis d'identifier un grand nombre d'erreurs langagières en mathématiques. Pour nous guider dans l'élaboration du test, nous avons procédé à une classification de ces erreurs et précisé la grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques.

La grille obtenue comportait quatre catégories: langage naturel, langage symbolique, langage graphique et «plus d'un langage». Chaque catégorie était subdivisée en sous-catégories selon les types d'erreurs identifiés à ce moment. La grille a été validée par une experte en méthodologie de recherche et par trois professeurs de mathématiques. Une copie de la grille incluant des exemples d'erreurs pour chaque sous-catégorie a été envoyée à chacune de ces personnes pour analyse. Des entrevues individuelles ont suivi quelques jours plus tard.

Cette grille des types d'erreurs a suscité beaucoup de commentaires de la part des personnes consultées. Toutes s'accordaient à dire que la classification des erreurs langagières est une tâche très complexe et que la grille devrait être revue à la lumière des résultats du test. Quelques modifications ont toutefois été suggérées et nous avons corrigé la grille en conséquence. Ce travail fait, nous sommes passés à l'élaboration d'un test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques.

2.2.6 Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques

Caractéristiques

Le test s'adressait à des élèves qui entrent au collégial et qui sont inscrits à un cours de mathématiques. Il devait faire ressortir un grand nombre de difficultés langagières en mathématiques sans exiger de révision de la part des élèves. Il devait notamment permettre de vérifier si les élèves avaient bien saisi le sens des termes, des symboles et des aspects graphiques visés, s'ils étaient capables d'analyser des phrases, des expressions symboliques ou des graphiques, et s'ils pouvaient traduire d'un langage à un autre.

Les thèmes retenus pour les questions portent donc sur des notions mathématiques de niveau secondaire. Ils résultent de l'analyse des résultats du prétest et des entrevues, des types d'erreurs déjà identifiés et des travaux d'autres chercheurs.

Le test avait un but exploratoire, mais devait aussi permettre d'évaluer la fréquence, dans la population visée, de certaines erreurs langagières déjà identifiées. Il a donc été divisé en deux parties. Dans la partie exploratoire (partie A), nous avons opté pour des questions ouvertes et très courtes. La plupart des questions de cette partie demandent aux élèves de donner un exemple ou de compléter un énoncé. Dans la partie B, nous avons opté pour des questions à choix multiples afin de faciliter la correction d'un grand nombre de copies. Chaque question de cette partie comporte un choix de cinq réponses, avec un nombre variable de bonnes réponses par question; ces questions sont donc des regroupements de cinq «vrai ou faux» portant sur le même thème, le nombre de «vrais» pouvant varier de 0 à 5.

Validation

Pour valider le test, nous avons fait appel à des experts, à des professeurs et à des élèves. Nous l'avons d'abord fait valider sur le plan méthodologique par une experte en méthodologie de recherche. Comme cette personne est également professeure de mathématiques et experte dans divers domaines liés à l'apprentissage, nous lui avons aussi demandé de valider le test sous d'autre aspects.

Des entrevues individuelles ont ensuite été réalisées avec quatre professeurs de mathématiques, trois enseignant au collégial et un au secondaire. Le test, accompagné d'un questionnaire, a été envoyé quelques jours à l'avance afin de préparer l'entrevue. La validation par les professeurs a porté notamment sur les points suivants: le contenu du test en regard du programme de mathématiques du secondaire, la répartition des questions entre les trois langages (naturel, symbolique et graphique), la pertinence des questions par rapport aux aspects langagiers visés, la clarté des questions et le vocabulaire utilisé.

Des corrections ont été apportées au test à la suite des commentaires de l'experte et des professeurs, puis nous avons procédé à la deuxième étape de validation. Les élèves qui avaient été sélectionnés lors du prétest (voir l'annexe 7) et qui n'avaient pas encore été interviewés ont été invités à participer à cette étape. Huit d'entre eux ont accepté et ont été rencontrés en deux entrevues de groupe (quatre élèves par groupe). Des élèves de secondaire V, sélectionnés par le professeur qui avait participé à l'étape précédente de validation, ont également été invités. Quatre d'entre eux ont accepté et ont été rencontrés en entrevue de groupe. Un protocole d'entrevue a été préparé et validé.

Lors de ces entrevues, nous avons d'abord demandé aux élèves de faire le test individuellement, en soulignant les mots et les symboles qui les embêtaient. Pour chacune de leurs réponses, nous leur avons demandé d'indiquer leur degré de certitude sur une échelle de 1 à 6 (échelle inspirée de T. Bouffard-Bouchard, dans Lafortune,1994). Une discussion de groupe a suivi et a porté notamment sur les points suivants: la difficulté des questions, les problèmes causés par certains mots ou symboles, la clarté des questions et la longueur du test. Les élèves de collège I ont aussi été questionnés sur la pertinence des sujets traités dans le test en regard du contenu des cours de mathématiques du collégial.

À la suite des remarques des élèves, des modifications ont été apportées au questionnaire et au texte des directives (page titre), puis le tout a été validé par une experte en linguistique. La version finale du test, partie A et partie B, apparaît à l'annexe 8.

Administration

Le test a été administré au début de la session d'automne 1995 à tous les élèves nouvellement inscrits au collège Jean-de-Brébeuf et suivant un cours de mathématiques, soit 620 élèves provenant tous du secteur général. Ce groupe comprenait 298 filles et 322 garçons; 283 élèves étaient inscrits en sciences de la nature, 178 en sciences humaines, 50 au programme intégré et 109 au baccalauréat international, dont 60 dans l'option sciences de la nature et 49 dans l'option sciences humaines.

Le calendrier pour l'administration du test a été établi en collaboration avec les professeurs impliqués qui, lors d'une réunion, ont été informés de la procédure relative à son déroulement. Le détail de la procédure (voir annexe 9), le calendrier et l'ensemble des directives leur ont été remis par écrit à cette occasion, ainsi que les copies du test et le matériel nécessaire pour leurs groupes.

Dans chaque classe, les directives ont été communiquées aux élèves par un des chercheurs ou par leur professeur, selon le cas. Les élèves pouvaient suivre les explications sur le texte de la page titre du test. Pour éviter que les questions de la partie B n'influencent les réponses des élèves dans la partie A (partie exploratoire), les deux parties du test avaient été agrafées séparément. Les élèves ont reçu la partie B après avoir terminé la partie A.

Les directives ont été suivies dans toutes les classes. Dans l'ensemble, les élèves ont mis entre 75 et 90 minutes pour faire le test, environ 35 minutes pour la partie A et 45 minutes pour la partie B.

Correction

Pour la correction du test, nous avons traité les deux parties séparément. Comme la partie A exigeait une correction manuelle, ce qui était très long vu la taille de la population, nous avons décidé de retenir un échantillon de 125 copies. Dans chaque groupe, nous avons prélevé 20% des copies, en procédant par échantillonnage aléatoire simple, stratifié suivant le sexe. Pour des raisons d'uniformité, la correction de cette partie a été faite par un des chercheurs. La partie B (partie objective) a été traitée par lecteur optique pour l'ensemble de la population.

Résultats retenus pour fins d'analyse

Plusieurs résultats du test ont été retenus et analysés dans le cadre des objectifs de la recherche. Ainsi, l'ensemble des réponses erronées ont été analysées pour poursuivre l'identification des erreurs de nature langagière en mathématiques. Les scores moyens pour chacune des parties du test et par langage ont été utilisés pour évaluer l'importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques (objectif 2). Pour obtenir ces scores, un barème de correction a été établi pour chacune des parties du test. Les détails relatifs à ces barèmes sont donnés à la section 2.3.

Entrevues

Pour raffiner l'analyse des erreurs langagières relevées dans le test, nous avons réalisé des entrevues individuelles avec douze élèves choisis selon le sexe, le programme d'études et le score à la partie B du test, globalement et pour chacun des langages. Parmi ces élèves, il y avait six filles et six garçons. Six d'entre eux étaient en sciences de la nature (D.E.C. ou B.I.), cinq en sciences humaines (D.E.C. ou B.I.) et un autre au programme intégré. Deux avaient eu un score élevé à la partie B du test, huit avaient eu un score moyen et les deux autres un score faible. Parmi ceux qui avaient eu un score moyen, deux avaient moins bien réussi dans le langage naturel, trois dans le langage symbolique et trois autres dans le langage graphique. Un protocole d'entrevue a été préparé et validé; il a ensuite été adapté aux caractéristiques de chacun des élèves interviewés.

Le tableau suivant résume les informations relatives au test ainsi que le déroulement des activités.

TABLEAU 2.2
Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques

Population:	tous les élèves nouvellement inscrits au collège Jean-de-Brébeuf à l'automne1995 et suivant un cours de mathématiques, soit 620 élèves (F: 298; G: 322) du secteur général répartis en 22 groupes (Sc.N.: 283; Sc.H.: 178; P.I.: 50; B.I.(Sc.N.): 60; B.I. (Sc.H.):49).
Contenu:	notions mathématiques de niveau secondaire.
Élaboration:	basée sur les résultats du prétest et des entrevues, des travaux d'autres chercheurs, les types d'erreurs déjà identifiés.
Format:	Partie A: questions ouvertes, courtes; Partie B: questions à choix multiples, choix de 5 réponses par question, nombre variable de bonnes réponses par question.
Validation:	Professeurs de mathématiques, par entrevues individuelles, niveau collégial: 3 niveau secondaire: 1 Élèves, par entrevues de groupe, 4 élèves par groupe, niveau collégial: 8 élèves niveau secondaire: 4 élèves Experte en méthodologie de recherche Experte en linguistique
Administration:	début de la session d'automne 1995.
Durée:	75 à 90 minutes.
Correction:	Partie A: par un des chercheurs. échantillon aléatoire de 125 élèves, barème: 0,1 ou 2 points par sous-question. Partie B: par lecteur optique, ensemble des 620 élèves.
Résultats analysés:	l'ensemble des réponses erronées, pour documenter et préciser la grille des types d'erreurs; les scores moyens, par partie et par langage, pour évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques (voir la section 2.3).
Entrevues:	12 entrevues individuelles avec des élèves choisis selon: le sexe (F: 6; G: 6), le programme d'études (Sc.N.: 6; Sc.H.: 5; P.I.: 1), le score à la partie B du test dans chacun des langages (F: 2; M: 8; f: 2).

Le test a été l'aboutissement d'une longue démarche et l'instrument important qui a permis d'atteindre chacun des objectifs de cette recherche. Pour cette raison, et puisque le test peut à nouveau être utilisé pour d'autres groupes d'élèves, nous consacrons une partie du rapport à l'analyse des résultats de chacune des parties. La partie A est analysée au chapitre 3 et la partie B au chapitre 4.

2.2.7 Précision et classification des erreurs de nature langagière en mathématiques

L'analyse des résultats du test nous a considérablement fait avancer dans l'identification des erreurs langagières en mathématiques. En effet, un très grand nombre d'erreurs ont été analysées et classées; les questions jugées embêtantes ou ambiguës par les élèves ont été notées, ainsi que les questions où il y avait des absences de réponse. Les entrevues qui ont suivi ont permis de mieux classer les erreurs langagières et de documenter plusieurs types d'erreurs. De plus, les scores par question ont mis en lumière les erreurs langagières les plus fréquentes chez les élèves.

Ceci nous a amenés à mieux identifier les erreurs langagières en mathématiques et à préciser la grille des types d'erreurs. Nous avons pu ainsi procéder à une classification finale des erreurs langagières. Cette classification a été validée par deux responsables de centres d'aide, l'un en français et l'autre en mathématiques. La version corrigée est présentée au chapitre 5. Le tableau suivant résume la démarche suivie pour atteindre le premier objectif de la recherche.

TABLEAU 2.3
Démarche suivie pour identifier les erreurs de nature langagière en mathématiques

• Grille préliminaire des types d'erreurs	
• Première série de documents analysés:	~ 500 copies (examens, tests ou devoirs)
• Premières entrevues avec des élèves:	30 entrevues individuelles, 18 élèves (F:10; G: 8)
• Autres formes de collecte de données:	observation d'élèves en classe, rapports de professeurs.
• Prétest (voir le tableau 2.1)	
• Grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques validation: professeurs de mathématiques (3), experte en méthodologie de recherche.	
• Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques (voir le tableau 2.2)	
• Précision et classification des erreurs de nature langagière en mathématiques validation: responsable d'un centre d'aide en français, responsable d'un centre d'aide en mathématiques.	

À la section suivante, nous décrivons la démarche suivie pour atteindre le deuxième objectif de la recherche.

2.3 Évaluation de l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques

Le deuxième objectif de la recherche consistait à évaluer l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques. En cherchant à évaluer la proportion des points perdus dans les examens pour des erreurs langagières, nous voulions avoir une meilleure idée de l'ampleur du problème afin d'augmenter les chances de réussite des élèves.

Pour atteindre cet objectif, nous avons procédé en parallèle avec l'identification des erreurs (objectif 1). Chaque fois qu'une erreur langagière était décelée dans un examen ou dans un test, nous tentions d'évaluer le nombre de points qu'elle avait fait perdre à l'élève. Mais, comme nous l'avons expliqué précédemment (à la section 2.2.1), l'identification des erreurs langagières à partir des copies seulement s'est avérée extrêmement complexe et il a fallu recourir à des entrevues avec des élèves pour préciser une grande partie de celles que nous avons relevées. Nous n'avons donc pas évalué, pour une classe entière, la proportion des points perdus dans un examen pour des erreurs de nature langagière. Cependant, nous avons pu évaluer l'impact de ces erreurs sur les résultats des élèves, par le biais des entrevues, du prétest et du test.

2.3.1 Cas particuliers documentés lors d'entrevues

Ainsi, nous avons documenté plusieurs cas particuliers avec les élèves que nous avons rencontrés en entrevue. En analysant certains de leurs examens en leur présence, et en nous basant sur le barème utilisé par les professeurs, nous avons pu évaluer l'impact de leurs erreurs langagières sur leurs résultats dans ces examens.

Les entrevues qui ont permis de faire cette évaluation sont les mêmes que celles qui ont été réalisées pour l'identification des erreurs langagières. Pour cette étape, nous avons analysé environ cent copies d'examens.

2.3.2 Évaluation par le prétest

Nous avons aussi utilisé le prétest pour évaluer l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques. Comme son contenu s'apparentait à un test de révision du premier cours de calcul différentiel et intégral (Mat.103), c'est-à-dire à un test de mathématiques, qu'il soulevait plusieurs difficultés langagières et qu'il s'adressait à une clientèle importante (348 élèves), le prétest se prêtait bien à l'évaluation souhaitée dans le cas des élèves concernés. Les professeurs de mathématiques enseignant à ces élèves étaient également de cet avis.

Pour évaluer les scores des élèves au prétest, nous avons tenu compte du fait que les sous-questions étaient d'égale importance et que leur formulation amenait, dans presque tous les cas, une réponse très courte, soit bonne, soit mauvaise. Nous avons donc établi le barème suivant: deux points pour une bonne réponse, aucun point pour une mauvaise réponse ou une absence de réponse et, occasionnellement, un point pour une réponse incomplète ou partiellement bonne. Les résultats ont ensuite été ramenés en pourcentage.

Pour évaluer les scores par langage, nous avons réparti les questions en fonction du ou des langages visés. Si une question visait plus d'un langage, elle était comptée pour chacun d'eux, car il était difficile de déterminer si les erreurs étaient plus attribuables à un langage qu'à un autre. Nous avons aussi ajouté, dans la catégorie «langage naturel», toutes les questions dont l'énoncé était susceptible de soulever une difficulté langagière pour les élèves, même si ces questions ne visaient pas directement le langage naturel. Une même question pouvait donc se retrouver dans chacune des catégories (langage naturel, langage symbolique et langage graphique). Les scores par langage ont ensuite été ramenés en pourcentage afin qu'on puisse les comparer.

Le barème du prétest et la répartition des questions par langage ont été validés par les professeurs de mathématiques qui avaient validé le questionnaire.

2.3.3 Évaluation par le test

Le troisième instrument utilisé pour évaluer l'effet des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques est le test. Cet instrument a été très important à cette étape, car il s'adressait à une vaste clientèle (620 élèves).

Comme le test faisait ressortir un grand nombre de difficultés langagières relativement à des notions mathématiques vues au secondaire, il pouvait être considéré comme un test de mathématiques. Il permettait donc d'évaluer l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats dans un test de mathématiques.

Pour évaluer les scores des élèves, nous avons considéré les deux parties (A et B) du test séparément, car la première partie n'a pas été corrigée pour tout le groupe. Pour la partie A, constituée de questions ouvertes, nous avons utilisé le même barème que pour le prétest à cause de la similitude dans le style des questions. Pour évaluer les scores par langage, nous avons aussi procédé de la même façon que pour le prétest.

Pour la partie B, nous avons examiné trois barèmes différents, compte tenu du style particulier des questions. En effet, les 56 questions de cette partie offraient un choix de cinq réponses, avec un nombre variable de bonnes réponses par question. Chaque question était donc un regroupement de cinq «vrai ou faux» portant sur le même thème, le nombre de «vrais» pouvant varier de 0 à 5.

Après avoir examiné les avantages et les limites de chacun des barèmes (voir les détails au chapitre 6, section 6.3.2), nous avons retenu le suivant: deux points pour une question si les cinq «vrai ou faux» étaient exacts, un point s'il y avait une seule erreur, et aucun point autrement.

Pour évaluer les scores par langage, nous avons procédé de la même façon que dans le prétest et dans la partie A du test, en regroupant les questions selon le ou les langages impliqués. Les scores des élèves, par langage et pour l'ensemble de la partie B, ont ensuite été ramenés en pourcentage.

Le tableau suivant résume la démarche suivie pour évaluer l'effet des erreurs de nature langagière en mathématiques. Les résultats de cette évaluation sont détaillés et analysés au chapitre 6.

TABLEAU 2.4
Démarche suivie pour évaluer l'importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques

En parallèle avec l'identification des erreurs de nature langagière	
• Première série de documents analysés:	~ 100 copies (examens ou tests)
• Premières entrevues avec des élèves:	30 entrevues individuelles, 18 élèves (F:10; G:8)
• Prétest:	348 élèves
• Test faisant ressortir des erreurs de nature langagière en mathématiques, partie A et partie B: score global et scores par langage (naturel, symbolique et graphique).	620 élèves

Dans la dernière section, nous concluons la description méthodologique en commentant certains aspects particuliers de la recherche.

2.4 Discussion sur la démarche

Rigueur de la démarche

La dynamique de la recherche nous a amenés à réaliser un grand nombre d'entrevues tout au long du projet et à élaborer plusieurs instruments. Il en a résulté beaucoup de rigueur dans la démarche. Un des instruments élaborés, le *test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques*, a non seulement été extrêmement important pour cette recherche, mais il peut de nouveau être utilisé pour d'autres groupes d'élèves. Le tableau suivant résume l'ensemble des instruments utilisés ou élaborés au cours de la recherche.

TABLEAU 2.5
Tableau-synthèse des instruments de recherche

Instruments	Population ou échantillon
Entrevues (63)	54 élèves interviewés: entrevues individuelles: 54 entrevues de groupes: 3 6 professeurs interviewés: entrevues individuelles: 4 entrevues de groupes: 2
Prétest	348 élèves
Test	620 élèves

Collaboration des élèves et des professeurs

La recherche a aussi bénéficié de l'apport des élèves et des professeurs. Nous avons sollicité la collaboration de ces personnes au début du projet, mais nous ne nous attendions pas à une telle implication de leur part; cela a dépassé de loin nos attentes. Les nombreux élèves qui ont passé le prétest et le test l'ont fait avec beaucoup de sérieux, ce qui donne une grande crédibilité aux résultats. Ceux d'entre eux qui ont participé aux entrevues l'ont fait sans compter leur temps; ils nous ont appris beaucoup et ont permis de faire avancer la recherche.

La collaboration des élèves est attribuable en grande partie à l'implication des professeurs. Grâce à ces derniers, il a été possible de faire passer le prétest et le test à de grands groupes d'élèves et de réaliser l'ensemble des activités dans des conditions idéales. Les professeurs ont communiqué leur enthousiasme aux élèves et nous ont grandement stimulés. En plus de la participation qui leur a été demandée dans le cadre du projet, plusieurs ont apporté une collaboration spontanée, en nous communiquant des erreurs langagières de leurs élèves, en suggérant des idées ou en suscitant des discussions sur des aspects langagiers.

Caractéristiques de la clientèle

Pour terminer, il est important de rappeler que la recherche a été réalisée auprès d'une clientèle d'élèves du secteur général seulement. Or ils sont en moyenne plus forts en mathématiques et en français que ceux du secteur professionnel. De plus, cette clientèle, provenant d'un collège privé, est probablement plus forte que dans l'ensemble des collèges, à cause de la sélection des élèves. Les problèmes langagiers identifiés dans cette recherche sont donc à prendre au sérieux, car il y a de fortes chances qu'ils soient aussi importants, sinon pires, dans les autres collèges.

Les chapitres suivants portent sur l'analyse des résultats. Les parties A et B du *test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques* sont traitées aux chapitres 3 et 4 respectivement, la synthèse des *types d'erreurs de nature langagière en mathématiques* au chapitre 5 et *l'importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques* au chapitre 6.

Chapitre 3

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques

PARTIE A: Questions ouvertes

L'objectif du test *faisant ressortir des difficultés langagières en mathématiques* était de vérifier si les erreurs langagières relevées à la première étape de cette recherche étaient fréquentes ou, au contraire, des cas isolés d'élèves marginaux. La partie A, constituée de questions ouvertes, avait pour but d'explorer l'éventail des difficultés langagières des élèves en mathématiques. Des 620 élèves qui ont passé le test, nous avons retenu un échantillon aléatoire de 125 copies pour fins d'analyse de cette partie. Les résultats discutés dans ce chapitre sont ceux de ces 125 élèves.

3.1 Schéma d'analyse des résultats de la partie A

Pour des raisons de pertinence, nous ne commentons pas toutes les questions de la partie A dans ce chapitre. Nous avons retenu les questions où les erreurs étaient les plus significatives, notamment celles qui permettent d'expliquer des difficultés que rencontrent les élèves dans leurs cours de mathématiques au collégial. Nous nous sommes également assurés d'avoir des aspects sémantiques et syntaxiques de chacun des langages (naturel, symbolique et graphique) dans le choix des questions retenues pour fins de discussion.

Pour des raisons de cohérence dans l'analyse, nous avons choisi de ne pas suivre l'ordre des questions tel qu'il apparaît dans le questionnaire. Cet ordre avait été déterminé en fonction des élèves; d'une part pour graduer la difficulté des questions, mais aussi pour éviter qu'une question puisse influencer la réponse à la question suivante ou à des questions voisines. Dans un contexte d'analyse des erreurs de nature langagière en mathématiques, nous avons plutôt opté pour un regroupement des questions par langage.

Les questions du premier groupe portent principalement sur le **langage naturel** en mathématiques. Ces questions visent des aspects précis de la sémantique ou de la syntaxe. Certaines font intervenir d'autres éléments comme, par exemple: une expression algébrique, une figure géométrique ou un tableau; mais, dans chaque cas, la question vise avant tout le langage naturel. Les questions liées ou connexes sont analysées l'une à la suite de l'autre.

Les questions du deuxième groupe portent surtout sur le **langage symbolique**, parfois en liaison avec des aspects du langage naturel, parfois non. Les énoncés de ces questions comportent tous une partie en langage naturel, mais l'importance de cette partie varie d'une question à l'autre et n'est pas nécessairement source de difficultés langagières.

Les questions du dernier groupe portent sur le **langage graphique** ou, plus précisément, sur des graphiques cartésiens (un des aspects importants du langage graphique au niveau collégial). Chacune de ces questions met la *représentation cartésienne* en relation avec le langage naturel ou avec le langage symbolique

Le tableau suivant donne le numéro des questions de la partie A retenues pour fins de discussion, dans l'ordre où elles sont analysées. Le tableau donne également, pour chacune des questions retenues, les langages impliqués, les principaux aspects langagiers visés, ainsi que les questions du test qui lui sont liées ou connexes. Se référer à l'annexe 8 pour l'énoncé des questions.

TABLEAU 3.1
Liste des questions de la partie A du test analysées dans ce chapitre, langages impliqués, aspects langagiers visés et questions liées ou connexes.

Numéro de question	Principaux langage(s) impliqués	Principaux aspects langagiers visés	Questions liées ou connexes	
			partie A	partie B
1. a), b), c), d), e)	Naturel	Sémantique (L. nat.)	3, 19	12, 14, 19 34 à 39
1. f), g)	Naturel, Symbolique	Sémantique (L. nat.) Syntaxe (L. symb.) Traduction(L. nat. → L. symb.)	12	7, 8, 24, 26 à 33
2.	Naturel, Graphique (figures géométriques)	Sémantique (L. nat.) Sémantique (L. gr.) Traduction (L. nat. → L. gr.)	5, 19	21, 40 à 46
17.	Naturel (tableau)	Syntaxe (L. nat.) Sémantique (L. nat.) Décodage d'un tableau		9, 13
13.	Naturel	Sémantique (L. nat.)	8, 16	9, 19
8.	Symbolique	Syntaxe (L. symb.)	9, 13, 16, 18	9, 17
4.	Symbolique, Naturel	Sémantique et syntaxe (L. symb.) Sémantique et syntaxe (L. nat.)	11	1, 2, 3, 15 et 18
11.	Symbolique	Sémantique (L. symb.) Syntaxe (L. symb.)	4	1, 2, 3, 10, 15, 18
12.	Naturel, Symbolique	Traduction (L. nat. → L. symb.) Syntaxe (L. nat.) Syntaxe (L. symb.)	1 g)	9, 18
5. a), c), d)	Naturel, Graphique (cartésien)	Traduction (L. nat. → L. gr.) Sémantique (L. nat.) Sémantique et syntaxe (L. gr.) Syntaxe (L. nat.)	5 b), 6, 2	16, 52 à 56
6. a), b)	Symbolique, Graphique (cartésien)	Traduction (L. symb. → L. gr.) Sémantique et syntaxe (L. symb.) Sémantique et syntaxe (L. gr.)	6 c) et d) 5, 7, 14, 15	4, 25, 47 à 51
7. a), b), d)	Graphique (cartésien), Symbolique, Naturel	Traduction (L. symb. → L. gr.) Sémantique (L. gr.) Sémantique (L. symb.) Syntaxe (L. symb.) Syntaxe (L. gr.)	5, 6, 7 c) 14 a) et d) 15	16 et 20

Pour chacune des questions analysées, nous procédons en donnant d'abord l'énoncé de la question ainsi que les aspects langagiers visés. Nous indiquons ensuite, parmi les 125 élèves pour lesquels nous avons corrigé la partie A, combien ont donné une réponse erronée, combien n'ont pas répondu à la question et le total de non-réussites, exprimé en pourcentage.

À l'occasion, lorsque cela semble pertinent, nous mentionnons le nombre d'élèves qui ont indiqué avoir été embarrassés par la question. Nous ne donnons pas cette information de façon systématique, car nous ne connaissons pas le nombre exact de ceux qui ont *réellement été embarrassés* par une question donnée, mais uniquement le nombre de ceux qui *ont signalé l'avoir été*. Nous demandions aux élèves, dans une section à la fin de la partie A, de nous indiquer s'ils avaient été embarrassés par des questions, en nous précisant lesquelles; cependant, plusieurs n'ont pas rempli cette section alors qu'ils avaient laissé une ou quelques questions en blanc. Nous avons donc de bonnes raisons de croire que ces élèves ont pu être embarrassés par des questions mais ne l'ont pas mentionné. Il faut donc interpréter cette information comme *un nombre minimal d'élèves embarrassés par une question* et non comme une donnée précise.

Nous poursuivons l'analyse de chaque question en donnant la liste des réponses erronées, regroupées par catégories, en indiquant le nombre d'élèves qui ont donné la même mauvaise réponse; puis nous terminons en commentant les résultats de cette question. Lorsque nous connaissons la ou les causes d'une erreur, souvent découvertes lors d'entrevues avec des élèves, nous les mentionnons; sinon, nous nous limitons à énoncer des hypothèses. En effet, les entrevues nous ont permis de constater, dans certains cas, qu'une même erreur pouvait avoir plusieurs causes, parfois fort diverses.

3.2 Questions portant sur le langage naturel en mathématiques

Nous avons regroupé dans cette section les questions de la partie A qui portent essentiellement sur le langage naturel. Certaines de ces questions mènent à une réponse en langage graphique ou en langage symbolique, cependant chacune d'elles est formulée en langage naturel et fait ressortir des aspects sémantiques ou syntaxiques susceptibles de causer des difficultés aux élèves. Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont, dans l'ordre: 1, 2, 17 et 13.

3.2.1 Résultats de la question 1

Question 1

Donnez un exemple

a) d'un nombre rationnel: ____________________

b) d'un nombre irrationnel: ____________________

c) d'un diviseur de 12: ____________________

d) d'un multiple de 12: ____________________

e) d'une puissance de 5: ____________________

f) d'un binôme: ____________________

g) d'une équation: ____________________

Par cette question, portant sur la sémantique, nous voulions vérifier le sens que les élèves attribuent à des termes utilisés assez couramment dans les cours de mathématiques au niveau secondaire. Nous nous demandions si, à défaut de se rappeler les définitions, les élèves pensaient au côté évocateur des mots. Par exemple, *nombre rationnel*: ratio, rapport; ou encore, *diviseur de 12*: qui divise 12.

Cette question nous semblait relativement facile puisque les élèves étaient libres de donner les exemples qu'ils voulaient. Ils pouvaient s'en tenir aux plus simples; ils n'avaient pas à définir les termes proposés, ni à se prononcer sur des cas-problèmes comme ils ont eu à le faire plus loin, aux numéros 34 à 39 de la partie B par exemple.

Question 1: Résultats

Les résultats des 125 élèves de l'échantillon à cette question apparaissent dans le tableau suivant.

TABLEAU 3.2
Résultats de 125 élèves à la question 1

Exemple demandé	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Un nombre rationnel	1	2	2%
Un nombre irrationnel	25	2	22%
Un diviseur de 12	4	0	3%
Un multiple de 12	17	0	14%
Une puissance de 5	23	2	20%
Un binôme	30	6	30%
Une équation	18	0	14%

On observe qu'un élève seulement sur 125 a donné un mauvais exemple d'un nombre *rationnel*, alors que vingt-cinq, soit un élève sur cinq, ont donné un mauvais exemple d'un nombre *irrationnel*. De même, quatre élèves seulement ont donné un mauvais exemple d'un *diviseur de 12*, alors que dix-sept ont donné un mauvais exemple d'un *multiple de 12*. Le maximum d'erreurs a été observé au terme *binôme* pour lequel trente élèves sur 125 ont donné une mauvaise réponse. Les 125 élèves ont répondu aux sous-questions *diviseur de 12*, *multiple de 12* et *équation*, alors que six n'ont pas répondu à *binôme*.

Si on fait le total des mauvaises réponses et des absences de réponses, on obtient un taux de non-réussite allant de 2%, pour *nombre rationnel*, à 30% pour *binôme*. Ainsi, près d'un élève sur trois n'a pas donné un bon exemple d'un *binôme*, environ un élève sur cinq n'a pas donné un bon exemple d'un *nombre irrationnel* ou d'une *puissance de 5* et environ un élève sur sept n'a pas donné un bon exemple d'un *multiple de 12* ou d'une *équation*. Pourtant, quatre élèves seulement sur les 125 ont indiqué avoir été embarrassés par le terme «binôme», trois par «nombre rationnel», trois par «nombre irrationnel» et trois par «puissance de 5».

Les mauvaises réponses à cette question sont très variées et parfois étonnantes. Comme la liste des erreurs est trop longue pour figurer en un seul tableau, nous examinerons les sous-questions une par une, en regroupant les expressions *nombre rationnel* et *nombre irrationnel*, ainsi que *diviseur de 12* et *multiple de 12*.

Nombre rationnel et nombre irrationnel: Exemples d'erreurs

On a observé une seule erreur dans les exemples de *nombres rationnels* fournis par les élèves, soit le nombre $\sqrt{0,99}$; par contre, on a noté vingt-cinq erreurs dans les exemples de *nombres irrationnels*. Le tableau suivant donne la liste des réponses erronées, regroupées par types d'erreurs, ainsi que le nombre d'élèves qui ont commis le même type d'erreurs.

TABLEAU 3.3
Exemples erronés d'un nombre irrationnel, par type d'erreurs, pour 125 élèves.

Type d'erreurs	Exemple	Nombre d'élèves
Nombres **non réels**	$\sqrt{-2}$	5
Nombres **rationnels** sous forme décimale:		
• une ou deux décimales	6,7	5
• trois à sept décimales	3,1000001	5
• illimité et périodique	$3,\bar{5}$	1
• le nombre 3,1416	3,1416	2
Nombres **rationnels** sous forme fractionnaire	$\frac{9}{40}$; $\frac{1}{3}$ (2 fois); $\frac{2}{3}$	4
Nombres rationnels **entiers**	0 ; 3 ; $\sqrt{4}$	3

On constate que certains élèves, se référant à la forme décimale des nombres, n'ont retenu que la première partie de la définition d'un *nombre irrationnel*, c'est-à-dire un nombre dont *le développement décimal est illimité*. Ils ont cependant oublié que le développement décimal devait également être *non périodique* pour que le nombre soit irrationnel. Ce n'est pas le seul cas où nous avons observé que des élèves ne retiennent que le début ou une partie seulement d'une phrase. Qu'il s'agisse de lire une question ou de mémoriser une définition, ces élèves ont des problèmes, notamment lorsqu'une phrase est composée de deux ou de plusieurs propositions.

D'autres élèves semblent interpréter l'expression «développement décimal illimité» comme voulant dire «beaucoup de décimales», le terme «beaucoup» étant relatif, comme on peut le voir. Ces élèves connaissent peut-être la définition d'un nombre irrationnel, mais auront omis d'ajouter le signe «...» après la dernière décimale pour indiquer que le développement était illimité. Cela est possible et pourrait être dû à une négligence dans l'écriture ou à une connaissance insuffisante des signes et symboles.

On observe aussi que des élèves semblent confondre les termes «irrationnel» et «non-réel»; certains pensent peut-être qu'il suffit de mettre le signe de racine carrée devant un nombre, quel qu'il soit, pour obtenir un nombre irrationnel.

Il est intéressant de comparer les résultats de ces sous-questions avec ceux de la question 13 de la partie B (voir la section 4.2.1).

Diviseur de 12 et multiple de 12: Exemples d'erreurs

Comme dans le cas précédent, il y a plus de mauvais exemples d'un *multiple de 12* que de mauvais exemples d'un *diviseur de 12*. Par contre, les erreurs sont toutes du même type: on a donné un multiple de 12 au lieu d'un diviseur de 12 ou l'inverse. Le tableau suivant résume ces erreurs.

TABLEAU 3.4
Exemples erronés d'un diviseur de 12 ou d'un multiple de 12, par type d'erreurs, pour 125 élèves

Exemple demandé	Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Un diviseur de 12	Un multiple de 12	24 ; 36 ; ...	4
Un multiple de 12	Un diviseur de 12	2 ; 3 ; ...	17

On serait tenté de conclure que les élèves qui se sont trompés dans ce cas ont fait une erreur sémantique, ou une erreur de distraction en lisant ou en répondant trop rapidement. Il y a cependant d'autres explications. À titre d'exemple, un élève qui avait donné 36 comme diviseur de 12 a justifié sa réponse en entrevue en disant: «*Trente-six est un diviseur de douze parce que douze divise trente-six*».

Puissance de 5: Exemples d'erreurs

Parmi les 125 élèves, vingt-trois ont donné un mauvais exemple d'une *puissance de 5*. Les erreurs se regroupent en trois catégories: dix-sept élèves ont donné *la cinquième puissance d'un nombre*, deux élèves ont donné *un multiple de 5* et quatre élèves ont donné *le nombre 2*. Parmi les dix-sept élèves qui ont donné une *cinquième puissance*, douze ont donné la cinquième puissance de 2, sous la forme

«2^5» ou sous la forme «32», et un a donné: $1^5 = 5$. Le tableau suivant résume ces erreurs.

TABLEAU 3.5
Exemples erronés d'une puissance de 5, par type d'erreurs, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Une cinquième puissance	2^5 ou 32 ; 3^5 ; x^5 ; 8×10^5 ; $1^5 = 1$; $1^5 = 5$	17
Un multiple de 5	10 ; 50	2
Le nombre 2	2	4

On peut supposer que les élèves qui ont donné pour réponse une *cinquième puissance* au lieu d'une *puissance **de** cinq* ont fait une erreur syntaxique en inversant les mots dans l'expression proposée. Les deux élèves qui ont donné des multiples de 5 ne semblent pas comprendre le sens du mot «puissance». Quant à ceux qui ont donné le nombre «2», on peut supposer qu'ils ont pensé à «5^2», mais que, confondant les termes «puissance» et «exposant», ils n'ont donné que l'exposant, c'est-à-dire «2».

Binôme: Exemples d'erreurs

Trente élèves sur 125 ont donné un mauvais exemple d'un *binôme*. Les erreurs se regroupent en cinq catégories: des monômes, des équations du premier degré à deux variables, des équations du second degré à une variable, des nombres à deux chiffres et d'autres erreurs variées. Le tableau suivant résume ces erreurs.

TABLEAU 3.6
Exemples erronés d'un binôme, par type d'erreurs, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Un monôme	x^2 ; $2x$; ab ; mx^3y^2 ; ...	11
Une équation du premier degré à deux variables	$3x + 2y = 1$; ...	6
Une équation du second degré à une variable	$x^2 + 2x + 1 = 0$; ...	3
Un nombre à deuxchiffres	13; 15; 30	3
Autres	$2+3$; $(2,3)$; $\{1,2\}$; $(x-5)^2$; $a+b+c=0$;...	7

Si on observe attentivement ces erreurs, on note presque partout la présence du nombre 2: comme coefficient ou comme exposant, comme nombre de variables, comme nombre d'éléments, comme nombre ou autrement. Du terme «binôme», ces élèves ont donc retenu l'idée de «deux», mais deux quoi? Tout semble possible.

Il n'est pas étonnant que cette sous-question soit moins réussie que les précédentes puisqu'elle met en cause deux langages: le langage naturel et le langage symbolique. Pour y répondre correctement, il faut non seulement savoir ce qu'est un binôme, mais il faut aussi être en mesure de traduire cette définition en écriture symbolique. Sur un thème analogue, on peut consulter les résultats des questions 7 et 8 de la partie B à la section 4.4.

Équation: Exemples d'erreurs

Dix-huit élèves sur 125 ont donné un mauvais exemple d'une *équation* dont douze trinômes, deux binômes, deux inéquations et deux autres cas. Le tableau suivant résume ces erreurs.

TABLEAU 3.7
Exemples erronés d'une équation, par type d'erreurs, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Un trinôme	$x^2 + 4x - 5$; ...	12
Un binôme	$2x + 1$; ...	2
Une inéquation	$x + 10 > 2$; ...	2
Autre	2×3 ; ...	2

Cette sous-question, comme la précédente, porte sur le langage naturel et le langage symbolique. Il est cependant étonnant de constater que des élèves de ce niveau ne connaissent pas le sens du mot «équation», alors qu'il est fréquemment utilisé dans leurs cours de mathématiques. Mais ce qui est plus étonnant encore, c'est de constater qu'autant d'élèves (14%) se soient trompés sur ce terme.

Parmi les autres exemples d'équations, nous avons noté trente égalités numériques (par exemple: $1 + 4 = 5$) dont une était fausse. Nous avons hésité avant de classer ces exemples parmi les bons ou les mauvais, puis les avons finalement mis avec les bons. Nous pensons cependant qu'il serait préférable de distinguer les termes «égalité» et «équation» en réservant le premier aux égalités numériques et l'autre à celles qui contiennent au moins un terme variable.

Question 1: Résumé

Le nombre et la variété des erreurs dans cette question nous ont surpris et ont dépassé ce que nous imaginions, car, d'une part, nous pensions que les élèves avaient une meilleure connaissance des termes mathématiques usuels à leur arrivée au collégial et, d'autre part, nous jugions que ce type de question, où il faut donner un exemple, était très facile pour eux. D'autres questions portant sur l'aspect sémantique de la langue courante ont eu des résultats encore plus faibles. On peut notamment consulter les questions 3 et 19 de la partie A, ainsi que les questions 7, 8, 13 et 19 de la partie B (au chapitre 4).

Il est important que les professeurs de mathématiques au collégial soient informés de ces lacunes chez leurs élèves, car ils peuvent ainsi éviter que de nouveaux concepts enseignés soient associés à de fausses réalités. Si tant d'élèves ne savent pas ce qu'est un nombre rationnel, une puissance, un binôme ou une équation, qu'imaginent-ils lorsqu'on leur parle de fonction polynomiale, de fonction rationnelle, du binôme de Newton ou du développement d'une puissance d'un binôme, de la loi binomiale, d'une équation exponentielle, d'une équation différentielle, ... ? Il ne faut pas s'étonner que beaucoup d'élèves aient de la difficulté en mathématiques si, au départ, ils ont des lacunes importantes au niveau du vocabulaire mathématique.

La question suivante porte également sur la sémantique, mais, cette fois, en relation avec le langage graphique ou, plus précisément, avec les figures géométriques.

3.2.2 Résultats de la question 2

Question 2

Donnez un exemple (dessinez)

a) d'un segment de droite:

b) d'un triangle isocèle:

c) d'un quadrilatère:

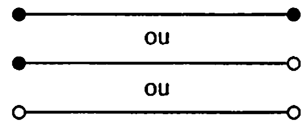
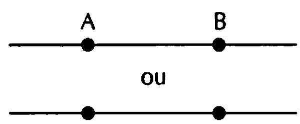
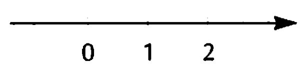
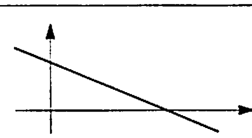
Avec cette question, nous voulions vérifier le sens que les élèves accordent à certains termes mathématiques, ainsi que leur connaissance des conventions ou des codes utilisés pour le tracé de figures géométriques.

Il est difficile de classer les réponses des élèves à cette question, en bons ou en mauvais exemples, car il y a beaucoup d'ambiguïtés dans le tracé des figures. De plus, il semble y avoir différentes conventions pour la représentation d'un «segment de droite». Un dessin qui représente un segment de droite pour les uns représente une droite pour d'autres et vice versa. Nous ne donnerons donc pas de taux de réussite ou de non-réussite dans ces cas, mais uniquement la liste des types de réponses.

Segment de droite: Types de réponses

Le trait dessiné par les élèves était plus ou moins long et avait une inclinaison variable; il était parfois horizontal, parfois oblique, rarement vertical. Pour une raison d'espace, nous avons décidé de présenter les réponses à l'horizontale. Le tableau suivant résume les différents types de réponses.

TABLEAU 3.8
Exemples d'un segment de droite donnés par 125 élèves, par type de dessin

Type de dessin	Nombre d'élèves	Explications
	71	Les dessins mettent en évidence les points extrémités, parfois inclus, parfois exclus.
	30	Il n'y a qu'un trait, sans aucun autre signe. Ce trait est plus ou moins long, il sort parfois du rectangle ou s'arrête aux côtés.
	5	Il y a une flèche à une extrémité du trait et un point en évidence à l'autre extrémité.
	5	Il y a deux points en évidence sur le trait, mais non aux extrémités. Les points sont identifiés par des lettres, sauf dans un cas.
	4	Il y a une flèche à la droite du trait, rien à gauche, et des subdivisions identifiées par des chiffres.
	3	Il y a un point en évidence à une extrémité du trait et rien à l'autre.
	2	Il y a une flèche à la droite du trait et rien à gauche.
	2	Il y a une flèche aux deux extrémités du trait.
	1	Le dessin est reproduit tel quel.
Absence de réponse	2	

En ce qui concerne le deuxième type de dessin dans le tableau, on peut supposer que les élèves qui ont fait un trait s'arrêtant exactement aux côtés de la case réponse ont considéré que les extrémités du segment étaient ainsi indiquées de façon évidente. Mais ceci n'est qu'une hypothèse, c'est pourquoi nous n'avons pas traité ce cas séparément.

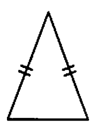
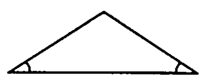
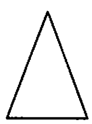
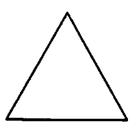
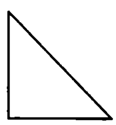
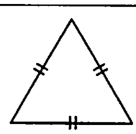
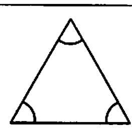
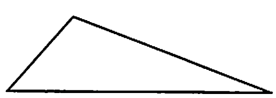
Devant la variété des réponses des élèves, on peut se demander s'il n' y a pas un **manque d'uniformité dans les conventions graphiques** utilisées dans les manuels de mathématiques. Cette observation vaut pour l'ensemble des questions graphiques du test, notamment pour les graphiques cartésiens. Nous commentons plus longuement ce problème aux questions 5, 6 et 7 de la partie A.

Triangle isocèle: Types de réponses

Les triangles dessinés par les élèves étaient plus ou moins soignés, plus ou moins grands et dans des positions diverses; certains étaient précis et d'autres assez ambigus. Le tableau suivant résume leurs réponses, par types de triangle et par degré de précision.

TABLEAU 3.9

Exemples d'un triangle isocèle donnés par 125 élèves, par type de dessin

Type de dessin	Nombre d'élèves	Explications
 ou 	81	Le dessin met en évidence les deux côtés ou les deux angles égaux du triangle. Il s'agit d'un triangle isocèle quelconque et non d'un cas particulier (triangle équilatéral ou triangle rectangle).
 ou 	17	Le triangle «semble» être isocèle, mais aucun signe ne le précise. De façon évidente, ce triangle n'est ni équilatéral ni rectangle.
 ou 	12	Le triangle «semble» être équilatéral ou isocèle rectangle, donc un cas particulier de triangle isocèle. Aucun signe ne précise l'aspect «isocèle» du triangle.
 ou 	10	Le triangle est équilatéral; le dessin met en évidence l'égalité des côtés ou des angles. Il s'agit donc d'un cas particulier de triangle isocèle.
	4	Le triangle n'est pas isocèle, mais scalène.
Absence de réponse	1	

Ces résultats font ressortir deux mauvaises habitudes malheureusement trop répandues chez les élèves: le **manque de précision** et la **propension à utiliser des cas particuliers.** On constate en effet que 29 élèves sur 125, soit presque un sur quatre, ont tracé une figure ambiguë, par manque de précision.

D'autre part, 22 élèves ont donné un cas particulier de triangle isocèle. Les cas particuliers ne sont pas des mauvaises réponses dans ce cas, mais on peut se demander, par exemple, si les élèves qui ont tracé un triangle équilatéral font vraiment la différence entre les termes «équilatéral» et «isocèle».

Le manque de précision dans les figures et l'utilisation de cas particuliers sont sources de confusion dans la communication de l'information. Les élèves se créent souvent eux-mêmes des pièges en dessinant des figures imprécises ou trop particulières. En se fiant à de telles figures, dans la résolution de problèmes ou dans des démonstrations, ils risquent d'arriver à des réponses ou à des conclusions erronées. Il serait donc important de les inciter à éviter les cas particuliers et à être plus précis dans le tracé des figures et des graphiques.

Quadrilatère: Résultats

À la sous-question suivante, demandant de tracer un *quadrilatère*, deux élèves sur 125 n'ont pas donné de réponse et un seul a donné une mauvaise réponse (un triangle au lieu d'un quadrilatère). Nous considérons donc que le terme «quadrilatère» n'a pas posé de problème.

La prochaine question porte également sur le langage naturel, en particulier sur la syntaxe, mais aussi sur le décodage d'informations données sous forme de tableaux.

3.2.3 Résultats de la question 17

Question 17

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe fictif de personnes:

	Fume	Ne fume pas	**Total**
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

a) Dans ce groupe, quelle proportion des personnes fument?

b) Dans ce groupe, combien de personnes ne fument pas et n'ont pas eu d'accident cardiaque?

c) Quelle proportion des fumeurs ont eu un accident cardiaque?

d) Dans ce groupe, combien de personnes fument ou ont eu un accident cardiaque?

Par cette question, nous voulions voir comment les élèves décodent les informations données sous forme de tableaux. Nous voulions également tester leur maîtrise de la syntaxe dans des types de phrases assez courantes en mathématiques. Les phrases se voulaient simples car nous voulions mettre l'accent sur la lecture du tableau. Les résultats des 125 élèves à cette question apparaissent dans le tableau suivant.

TABLEAU 3.10
Résultats de 125 élèves à la question 17

Question posée	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
a) Dans ce groupe, quelle proportion des personnes fument?	28	0	22%
b) Dans ce groupe, combien de personnes ne fument pas et n'ont pas eu d'accident cardiaque?	28	0	22%
c) Quelle proportion des fumeurs ont eu un accident cardiaque?	35	1	29%
d) Dans ce groupe, combien de personnes fument ou ont eu un accident cardiaque?	73	1	59%

Un seul élève sur les 125 n'a pas répondu aux sous-questions c) et d), disant avoir été embarrassé, et deux autres seulement ont dit l'avoir été par la sous-question d). On peut donc penser que la plupart des élèves ont trouvé cette question facile.

Mais ils ne réussissent pas nécessairement ce qu'ils trouvent facile. Ainsi, les deux premières sous-questions ont été ratées par plus d'un élève sur cinq, la troisième par environ un élève sur trois, et la dernière par plus de la moitié des élèves.

Le nombre de mauvaises réponses est étonnant, mais leur variété l'est encore plus. La liste des erreurs étant longue, nous traitons les sous-questions séparément, en donnant l'énoncé et la réponse à chaque fois pour faciliter l'analyse des erreurs.

Question 17 a)

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe fictif de personnes:

	Fume	Ne fume pas	**Total**
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

a) Dans ce groupe, quelle proportion des personnes fument?

La réponse à cette question est 144/400 ou, après simplification, 9/25. Certains élèves ont donné la réponse en pourcentage, soit 36%, ou partiellement simplifiée, soit 72/200, 36/100 ou 18/50.

Question 17 a): Liste des réponses erronées

Le tableau suivant donne la liste des mauvaises réponses obtenues à cette question, par type de réponses et par fréquence décroissante, ainsi qu'un bref commentaire sur la nature possible des erreurs. Il est intéressant, à l'occasion, de se référer à l'énoncé pour tenter de découvrir le cheminement des élèves qui ont obtenu une mauvaise réponse.

TABLEAU 3.11
Liste des réponses erronées à la question 17 a), pour 125 élèves

Type de réponses	Nombre d'élèves	Commentaires
144	10	Le nombre 144 répond à la question: «**Combien** de personnes fument?» et non à la question «**Quelle proportion** des personnes fument?»
$\frac{144}{256}$	3	Ces réponses résultent probablement d'un mauvais décodage du tableau; cependant, des erreurs de syntaxe sont aussi possibles.
$\frac{53}{400}$; $\frac{256}{400}$	2 ch.	Les réponses $\frac{144}{256}$ et $\frac{144}{112}$ sont assez surprenantes...
$\frac{144}{112}$	1	
$\frac{77}{200}$	2	Ces mauvaises réponses sont peut-être attribuables à une erreur de simplification (voir les formes simplifiées de la bonne réponse).
$\frac{6}{25}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$	1 ch.	Mais, sans le détail des calculs, il est difficile de préciser la nature des erreurs.
61%; 38%; 2,7%	1 ch.	Sans le détail des calculs, il est difficile de préciser la nature de ces erreurs. La réponse 38% (proche de la bonne réponse: 36%) résulte peut-être d'une erreur de simplification.
91	1	Pour arriver à cette réponse, il faut faire au moins deux erreurs dont une mauvaise lecture du tableau.

On peut penser que la plupart de ces élèves ont fait une erreur d'inattention, en lisant ou en répondant trop rapidement à la question. Cependant, on a pu constater, en entrevue, que certains élèves faisaient réellement des erreurs syntaxiques ou un mauvais décodage du tableau. Des exemples sont donnés aux sous-questions suivantes.

Question 17 b)

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe fictif de personnes:

	Fume	Ne fume pas	**Total**
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

b) Dans ce groupe, combien de personnes ne fument pas et n'ont pas eu d'accident cardiaque?

La réponse à cette question est 197. Le tableau suivant donne la liste des mauvaises réponses obtenues, par type de réponses et par fréquence décroissante, ainsi qu'un bref commentaire sur la nature possible des erreurs. Il est intéressant, à l'occasion, de se référer à l'énoncé pour tenter de découvrir le cheminement qui a mené des élèves à une mauvaise réponse.

Question 17 b): Liste des réponses erronées

TABLEAU 3.12
Liste des réponses erronées à la question 17 b), pour 125 élèves

Type de réponses	**Nombre d'élèves**	**Commentaires**
$\frac{197}{400}$	17	Cette réponse correspond à la question: «**Quelle proportion...?**» et non à la question: «**Combien...?**».
$\frac{197}{256}$	3	**Même erreur** que la précédente plus, fort probablement, une erreur syntaxique ou une erreur dans le décodage du tableau (voir les explications qui suivent ce tableau).
$\frac{197}{288}$; $\frac{7}{25}$	2 ch.	
$\frac{256}{400}$; $\frac{156}{400}$	1 ch.	
91; 59	1 ch.	Erreur probable de syntaxe ou dans le décodage du tableau.

Nous pensons que plusieurs de ces réponses erronées pourraient être attribuables à des erreurs de syntaxe, car elles correspondent à des questions en apparence proches de la question posée. Dans les exemples suivants, les caractères gras indiquent les modifications à la question initiale:

91: *«Combien de personnes **fument** et n'ont pas eu d'accident cardiaque?»*

59: *«Combien de personnes ne fument pas et **ont eu** un accident cardiaque?»*

$\frac{197}{256}$: *«**Quelle proportion** des personnes **qui** ne fument pas n'ont pas eu d'accident cardiaque?»*

$\frac{197}{288}$: *«**Quelle proportion** des personnes **qui** n'ont pas eu d'accident cardiaque ne fument pas?»*

$\frac{256}{400}$: *«**Quelle proportion** de ces personnes ne fument pas?»* Le reste de la question a été oublié...

La sous-question suivante est un type de phrases très courant, pas uniquement en mathématiques.

Question 17 c)

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe fictif de personnes:

	Fume	Ne fume pas	**Total**
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

c) Quelle proportion des fumeurs ont eu un accident cardiaque?

La réponse à cette question est 53/144 ou environ 37%. Le tableau suivant donne la liste des mauvaises réponses obtenues, par type de réponses et par fréquence décroissante, ainsi qu'un bref commentaire sur la nature possible des erreurs. Il est intéressant, à l'occasion, de se référer à l'énoncé pour tenter de suivre le cheminement des élèves qui ont obtenu une mauvaise réponse.

Question 17 c): Liste des réponses erronées

TABLEAU 3.13

Liste des réponses erronées à la question 17 c), pour 125 élèves

Type de réponses	**Nombre d'élèves**	**Commentaires**
53	8	Cette réponse correspond à la question: «**Combien...?**» et non à la question: «**Quelle proportion...?**».
$\frac{53}{400}$ ou ~13%	9	Ces réponses résultent fort probablement d'une erreur de syntaxe (voir les explications qui suivent ce tableau).
$\frac{53}{112}$	7	

TABLEAU 3.13 *(Suite)*

Liste des réponses erronées à la question 17 c), pour 125 élèves

Type de réponses	Nombre d'élèves	Commentaires
$\frac{53}{91}$	3	Distraction ou excès de rapidité? Les élèves ont-ils lu 91 au lieu de 144 comme total?
$\frac{91}{144}$	2	Erreur similaire ou erreur syntaxique.
$\frac{53}{114}$	1	Erreur d'inattention? L'élève a écrit 114 au lieu de 144?
$\frac{1}{4}$; ~50% ; 14,75% ; 2,7%	1 ch.	Sans le détail des calculs, il est difficile de déterminer la nature de ces erreurs.
91	1	Au moins deux erreurs dont: «**Combien...?**» au lieu de «**Quelle proportion...?**»

Nous pensons que les réponses erronées du deuxième groupe sont attribuables à des erreurs de syntaxe, car elles correspondent à des questions en apparence proches de la question posée. Ainsi,

$\frac{53}{400}$: *«Quelle proportion* ***de ces personnes sont*** *des fumeurs* ***et*** *ont eu un accident cardiaque?»*

Si on enlève les mots en caractères gras dans cette phrase, on retrouve la question initiale.

$\frac{53}{112}$: *«Quelle proportion des personnes qui ont eu un accident cardiaque sont des fumeurs?»*

Cette question résulte d'une inversion des deux propositions de la phrase initiale.

En entrevue, un élève a confirmé cette hypothèse en nous expliquant comment il était arrivé à la réponse 53/112. Il a d'abord lu la question à haute voix, d'un seul trait, puis il a consulté le tableau et a pointé le nombre 112 en disant: *«Il y a au total cent douze personnes qui ont eu un accident cardiaque»*. Il a alors dessiné une barre de fraction et écrit 112 au dénominateur. Puis il est retourné au tableau, a pointé le nombre 53 en disant: *«De ceux-là, il y en a cinquante-trois qui fument»* et a ensuite écrit 53 au numérateur de la fraction. Cette explication correspond à la question: *«Quelle proportion des personnes qui ont eu un accident cardiaque sont des fumeurs?»* et non à la question initiale: *«Quelle proportion des fumeurs ont eu un accident cardiaque?»*

La dernière sous-question avait pour but de tester la compréhension d'une phrase composée de deux propositions reliées par la conjonction *«ou»*.

Question 17 d)

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe fictif de personnes:

	Fume	Ne fume pas	**Total**
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

d) Dans ce groupe, combien de personnes fument ou ont eu un accident cardiaque?

La réponse à cette question est 203, soit $144 + 59$, ou $112 + 91$, ou encore, $53 + 91 + 59$. Seulement 41% des élèves ont donné la bonne réponse. La variété des mauvaises réponses dans ce cas est étonnante. On retrouve non seulement les mêmes types d'erreurs qu'aux autres sous-questions (erreurs de syntaxe, mauvais décodage du tableau, erreurs de simplification,...), mais aussi beaucoup d'erreurs particulières liées à la conjonction *«ou»*. La liste des différentes erreurs étant très longue, nous ne commentons que les plus fréquentes. Le tableau suivant donne la liste des réponses erronées à la question 17 d), par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

Question 17 d): Liste des réponses erronées

TABLEAU 3.14

Liste des réponses erronées à la question 17 d), pour 125 élèves

Type de réponses	**Nombre d'élèves**	**Commentaires**
53	11	Cette réponse correspond à la question: «*Dans ce groupe, combien de personnes fument **et** ont eu un accident cardiaque?*» Erreur due à une **confusion entre** les conjonctions «**et**» et «**ou**».
256	11	256 vient de 144 + 112, donc **le nombre 53 est compté deux fois**. On a ici une mauvaise analyse des données du tableau.
$\frac{203}{400}$	10	Cette réponse correspond à la question: «***Quelle proportion***...?» et non à la question «***Combien***...?»
114 ; 112	7 ch.	Ces réponses correspondent toutes à une question «Combien...?», mais combien **de quoi?** La réponse «432» est plutôt surprenante...
341	3	
150	2	
91 ; 165 ; 199 ; 356 ; 400 ; 432	1 ch.	

TABLEAU 3.14 *(Suite)*
Liste des réponses erronées à la question 17 d), pour 125 élèves

Type de réponses	Nombre d'élèves	Commentaires
$\frac{112}{400}$	4	
$\frac{53}{112}$	2	Ces réponses comportent toutes **au moins deux erreurs** dont le remplacement de «**combien**» par «**quelle proportion**».
$\frac{53}{400}$; $\frac{113}{400}$; $\frac{256}{400}$ $\frac{341}{400}$; $\frac{144}{53}$; 36%	1 ch.	$\frac{144}{53}$ est une autre réponse surprenante.
144,53 ; 13,25 $\frac{3}{5}$ v $\frac{14}{50}$ 144 f 112 acc	1 ch.	Formulation boiteuse des réponses ... en plus d'autres erreurs.

En résumé, 73 élèves sur 125, soit presque 60%, ont donné une mauvaise réponse à la question 17 d). Parmi ces mauvaises réponses, on en compte 25 différentes dont plusieurs résultent d'erreurs langagières. On peut donc conclure que l'énoncé de cette question a posé des difficultés de nature langagière aux élèves, même si trois seulement d'entre eux ont dit que la question les avait embarrassés.

Nous savions, en posant cette question, que des élèves buteraient sur la conjonction *«ou»*, car nous avions observé ce genre d'erreurs auparavant. Mais nous ne nous attendions pas à un si grand nombre d'erreurs ni à une si grande variété dans les réponses.

Question 17: Résumé

Les résultats de ces quatre sous-questions nous révèlent différentes choses. Premièrement, la facilité et la réussite ne vont pas nécessairement de pair. L'impression de facilité qu'ont les élèves dans certains cas ne garantit pas nécessairement leur succès.

Deuxièmement, les tableaux de données ne sont pas des outils de communication aussi limpides que l'on pourrait le croire. Ils sont pourtant utilisés fréquemment dans les quotidiens et dans les revues non spécialisées pour transmettre des informations sur les sujets les plus divers. Si tant d'élèves ont fait des erreurs en utilisant un tableau, on peut supposer que le lecteur moyen de ces quotidiens ou de ces revues en fait lui aussi...

Les élèves devraient donc améliorer leur lecture des tableaux de données afin de mieux saisir l'information communiquée sous cette forme. De leur côté, les professeurs devraient s'assurer que les élèves comprennent bien un tableau avant de leur demander de l'utiliser.

Ne soupçonnant pas l'ampleur des difficultés liées à la lecture d'un tableau, nous ne sommes pas revenus sur le sujet dans le test. Il serait pourtant intéressant d'étudier ce mode de communication, car il existe différents types de tableaux qui comportent possiblement d'autres difficultés.

À titre d'exemple, une personne a émis l'hypothèse que des erreurs de lecture de tableaux pouvaient être occasionnées par des automatismes de lecture. Ainsi, à la question 17 c), la mauvaise réponse 53/112 pourrait s'expliquer par «le réflexe gauche-droite». L'élève, ayant identifié le numérateur, 53, serait allé vers la droite, sans réfléchir, pour chercher le dénominateur et aurait écrit 112 au lieu de 144. Un autre réflexe de lecture serait le «la disposition en haut et en bas» pour les fractions. Un élève, habitué de voir le numérateur écrit au-dessus du dénominateur, pourrait chercher les éléments d'une fraction dans une colonne d'un tableau alors qu'ils sont présentés dans une ligne.

La question suivante est la dernière de cette section et porte sur le sens du verbe «comparer». Ce terme usuel fait partie d'un ensemble de «directives» que l'on rencontre souvent en mathématiques, comme «calculer», «effectuer», «définir», «évaluer», «justifier»,...

3.2.4 Résultats de la question 13

Question 13

Comparez les nombres $\frac{6}{25}$ et $\frac{6}{37}$.

Parmi les réponses possibles à cette question, on a:

- $\frac{6}{25} > \frac{6}{37}$
- *Ces deux nombres sont rationnels.*
- *Ces fractions ont le même numérateur.*
- *Ces fractions n'ont pas le même dénominateur.*
- *Ces fractions ont un numérateur pair et un dénominateur impair.*
- ...

La première réponse suggérée est celle que nous pensions rencontrer le plus souvent. C'est effectivement ce qui s'est produit. Nous pensions aussi que certains élèves seraient déconcertés par cette question. C'est ce que nous avons observé, comme en témoignent les résultats suivants.

Question 13: Résultats

- 26 élèves sur 125 n'ont pas répondu à la question, soit un élève sur cinq.
- 9 élèves ont donné une mauvaise réponse; par exemple, certains ont effectué l'addition ou la soustraction des fractions.
- Le taux de non-réussite à cette question est de 28%.

• 26 élèves ont indiqué que cette question les avaient embarrassés, majoritairement ceux qui n'ont pas répondu.

Question 13: Commentaire

Plus d'un élève sur quatre n'a pas su répondre correctement à cette question. Pourtant, les élèves comparent souvent des nombres dans leurs cours de mathématiques, de même qu'ils comparent des ensembles, des droites, des triangles ou d'autres éléments mathématiques. Par exemple, ils effectuent une comparaison chaque fois qu'ils formulent des propositions du genre suivant:

«Deux est plus petit que trois.»

«La pente de la droites D_2 est trois fois plus grande que celle de la droite D_1.»

«Les ensembles $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$ sont disjoints.»

«Les triangles ABC et ADE sont semblables.»

«Les couples (1, 2) et (2, 1) sont différents.»

Cependant, **beaucoup d'élèves ne sont pas conscients d'effectuer une comparaison** entre des objets mathématiques lorsqu'ils formulent de telles propositions. De même qu'ils ne sont pas conscients des opérations qu'ils effectuent lorsqu'ils résolvent des équations.

Des élèves qui n'avaient pas répondu à la question 13 nous ont dit, en entrevue, qu'ils ne comprenaient pas la question et qu'ils n'avaient aucune idée de ce qu'il fallait répondre. Après avoir pris connaissance des réponses possibles, leur réaction a été: *«Ah! c'est ça que vous vouliez!»*

Nous poursuivrons les commentaires sur cette question après l'analyse des résultats de la question 8, la prochaine sur notre liste. Il est intéressant en effet de comparer les résultats de ces deux questions, car elles portent toutes les deux sur la **comparaison de nombres**, mais elles sont formulées de façons différentes.

Ceci termine l'analyse des questions de la partie A portant sur le langage naturel. Nous poursuivons avec l'analyse des questions portant sur le langage symbolique.

3.3 Questions portant sur le langage symbolique

Nous avons regroupé dans cette section les questions de la partie A qui portent surtout sur le langage symbolique. Si l'énoncé de ces questions comporte toujours une partie en langage naturel, la réponse demandée aux élèves est soit un symbole, soit une expression symbolique. Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont, dans l'ordre: 8, 4, 11 et 12.

3.3.1 Résultats de la question 8

Question 8

Complétez à l'aide d'un des symboles: =, > ou < , afin d'obtenir un énoncé vrai.

a) 0,125 0,25

b) 125% 1,25

c) 30%....... $\frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ .... $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Cette question est très précise; la directive demande de choisir le bon symbole parmi trois symboles proposés. Cependant, pour répondre, les élèves doivent comparer l'ordre de grandeur des nombres proposés.

Les résultats de cette question se distinguent nettement de ceux de la précédente. D'une part, il n'y a eu aucune absence de réponse, contrairement à la question 13 où on en a dénombré 26 sur 125. Tous les élèves, ici, ont répondu à chacune des sous-questions. D'autre part, aucun élève n'a mentionné avoir été embarrassé par la question, alors que 26 sur 125 l'avaient indiqué pour la question 13.

Question 8: Résultats

Les résultats de la question 8 ainsi que les types d'erreurs apparaissent dans le tableau suivant.

TABLEAU 3.15
Résultats de 125 élèves et types d'erreurs à la question 8

Question posée	Nombre de réponses erronées	Type d'erreur	Taux de non-réussite
Complétez à l'aide d'un des symboles: =, > ou < , afin d'obtenir un énoncé vrai. a) 0,125 0,25	1	>	1%
b) 125%....... 1,25	4	< (3 él.) > (1 él.)	3%
c) 30%....... $\frac{1}{3}$	17	= (9 él.) > (8 él.)	14%
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ .... $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	20	< (20 él.)	16%

Les sous-questions a) et b) sont très bien réussies. Pour c), on peut supposer que l'habitude d'arrondir 1/3 à environ 30% aura incité quelques élèves à penser que ces nombres sont égaux. Quant à la sous-question d), nous savions que les élèves la trouveraient plus difficile, car, sans calculatrice, elle exige une réflexion sur les puissances d'une fraction.

Question 8: Commentaires

Les résultats des questions 8 et 13 nous montrent que les élèves sont plus à l'aise avec des questions aux directives précises qu'avec des questions dont la formulation est plus générale. Les directives précises déclenchent chez eux des **automatismes** qui les amènent à répondre rapidement, alors que des questions plus générales leur demandent de réfléchir.

L'habileté à effectuer des calculs ou à résoudre des équations est certes nécessaire, mais il est dommage qu'elle se fasse parfois **au détriment de la compréhension**. Certains élèves, très habiles dans les calculs algébriques, sont souvent incapables d'expliquer leur démarche ou simplement de mentionner les opérations qu'ils effectuent. Devant de nouveaux problèmes, ou devant une formulation différente d'un même problème, ils sont généralement désemparés, car ils sont incapables de transposer leurs connaissances ou leurs habiletés.

Met-on trop d'insistance sur «*la mécanique*» et pas assez sur la compréhension dans l'enseignement des mathématiques? Abuse-t-on de questions stéréotypées qui agissent sur les élèves comme des déclencheurs d'automatismes? Nous ne pouvons pas répondre à ces questions faute de les avoir étudiées, mais nous pensons qu'elles méritent réflexion.

La question suivante avait pour but d'explorer les réflexes conditionnés des élèves dans le cas d'expressions algébriques élémentaires.

3.3.2 Résultats de la question 4

Question 4

Dans chaque cas, complétez de telle sorte que l'équation obtenue soit toujours vraie.

a) $x^2 =$ ______________

b) $(a-b)^2 =$ ______________

Cette question nous a été inspirée par un élève qui, en entrevue, nous a fait prendre conscience que sa **difficulté à factoriser des expressions algébriques** tenait au fait qu'il développait systématiquement les puissances de binômes au lieu de rechercher les facteurs communs. Devant une expression comme $(a+b)^2$, par exemple, il avait automatiquement le réflexe d'écrire $a^2+2ab+b^2$, sans se demander si c'était la chose à faire. En le questionnant, nous avons constaté qu'il n'avait pas du tout l'idée **d'un carré** en voyant $(a+b)^2$. Nous lui avons demandé s'il pensait que $(a+b)^2$ était égal à $(a+b)(a+b)$. Il a répondu: «*Non!*» d'un ton très assuré. Pour lui, $(a+b)^2$ était égal à $a^2+2ab+b^2$, résultat qu'il avait appris par coeur et qu'il récitait comme **un slogan**.

Nous nous sommes donc demandé si d'autres élèves avaient le même problème. Conscients qu'il n'était pas possible d'explorer à fond le thème de la factorisation dans ce test, nous n'avons retenu que quelques aspects qui pouvaient être vérifiés rapidement. Avec la présente question, nous voulions savoir ce à quoi les élèves pensent, en premier lieu, lorsqu'ils voient des expressions comme x^2 ou $(a-b)^2$. Voient-ils **un carré** dans chaque cas ou ne le voit-il que dans la première expression?

Question 4: Résultats

Nous donnons d'abord les résultats globaux à la question 4, puis les résultats détaillés pour chacune des sous-questions, en tentant de trouver des éléments de réponse à notre questionnement.

TABLEAU 3.16
Résultats de 125 élèves à la question 4

Question posée	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Dans chaque cas, complétez de telle sorte que l'équation obtenue soit toujours vraie.			
a) $x^2 =$ ______	18	5	18%
b) $(a-b)^2 =$ ______	23	5	22%

Parmi les 125 élèves, huit ont indiqué qu'ils avaient été embarrassés par la question, cinq autres par la sous-question a) et un autre par b). La première sous-question était tellement simple, voire évidente, qu'elle aura peut-être laissé des élèves perplexes. On peut se demander s'ils auraient été aussi embarrassés si les sous-questions a) et b) avaient été inversées.

Le taux de non-réussite à cette question nous paraît élevé, étant donné la simplicité des expressions algébriques visées. Mais observons plutôt les réponses fournies, les bonnes comme les mauvaises, puisque notre intérêt dans cette question était de découvrir ce que les élèves pensaient lorsqu'ils voyaient de telles expressions.

Question 4: Réponses fournies

Tous les élèves qui ont eu une bonne réponse à la première sous-question ont donné: «$x \cdot x$». Cette réponse correspond à la **définition** même de x^2, c'est-à-dire *«le produit de x par lui-même»*. Il y avait beaucoup d'autres bonnes réponses possibles, par exemple: $3x^2 - 2x^2$, $5x^2/5$, ..., mais aucune d'elle n'a été observée.

Parmi les mauvaises réponses, douze élèves ont donné le carré d'un nombre naturel, par exemple 4, 9, ..., et six autres ont donné respectivement chacune des réponses suivantes: R^+, y, N, $4ay$, $x^2 \geq x$, $\sqrt{x^2} = x$.

Les réponses fournies à la sous-question b) sont un peu plus variées; nous les présentons donc dans le tableau suivant pour plus de clarté. Nous donnons d'abord les bonnes réponses, car ce sont celles qui nous intéressaient surtout, ensuite les mauvaises réponses, par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

TABLEAU 3.17
Liste des réponses fournies à la question 4 b), pour 125 élèves

Type de réponses	Nombre d'élèves
Bonnes réponses:	
$a^2 - 2ab + b^2$	69
$(a-b)\,(a-b)$	28
Mauvaises réponses:	
$(a-b)\,(a+b)$	9
$a^2 - b^2$	5
4 ; 9 ; ...	4
$a^2 + 2ab - b^2$; $a^2 - 2ab + b$; $a - 2ab + b$ $(a+b)^2(a-b)^2$; $\sqrt{(2-b)^2} = 2-b$	1 ch.

Question 4: Commentaires

Si on observe les **bonnes réponses** données par les élèves à la sous-question b), on constate que, contrairement à la sous-question précédente, **ce n'est pas la définition de (a - b)^2 qui domine, mais bien un résultat découlant de cette définition.** En effet, 29% seulement des bonnes réponses correspondent à la définition de (a - b)^2, *soit «le produit de (a - b) par lui-même»*, et 71% au résultat «a^2 - 2ab + b^2» découlant de cette définition.

Devant une telle disproportion dans la fréquence des bonnes réponses, on est justifié de penser que plusieurs élèves, voire même beaucoup, ont peut-être oublié *le sens premier* des expressions de la forme (a - b)^2, (x + y)^2,... Peut-être ne l'ont-ils pas oublié, mais leur premier réflexe est de penser à la forme développée du produit.

Dans l'un ou l'autre cas, on a sûrement une **piste intéressante** qui nous permettrait d'expliquer les difficultés qu'éprouvent certains élèves à factoriser des expressions algébriques. Par exemple, comment peut-on *voir* un facteur commun dans une expression comme:

$$(a-b)^2 + a - b$$

si on ne voit pas $(a-b)^2$ comme le produit de $(a-b)$ par $(a-b)$? L'élève qui pense automatiquement à $a^2 - 2ab + b^2$ lorsqu'il voit $(a-b)^2$ aura probablement le réflexe de faire cette substitution. Il obtiendra alors:

$$a^2 - 2ab + b^2 + a - b\,,$$

résultat avec lequel il ne saura pas quoi faire.

L'examen des **mauvaises réponses** données à la sous-question b) illustre aussi l'oubli de la définition de $(a-b)^2$ comme le produit de $(a-b)$ *par lui-même*. Les élèves qui ont donné ces réponses ont, en plus, des **problèmes de syntaxe symbolique**. En effet, plusieurs confondent les écritures symboliques « $(a-b)^2$ » et «a^2-b^2», ou la forme factorisée de cette dernière: $(a-b)\ (a+b)$. Transposée en langage naturel, cette erreur équivaut à confondre les expressions *«le carré d'une différence»* et *«une différence de carrés»*. Il est intéressant de consulter les résultats de la question 2 de la Partie B (à la section 4.3), car ils confirment ce que nous avons observé ici.

En conclusion, la mémorisation des *cas de facteurs* est certainement utile, mais elle ne devrait pas se substituer aux définitions ni devenir prépondérante. Les professeurs devraient donc s'assurer que les élèves *décodent* correctement les expressions algébriques et qu'ils ne perdent pas de vue que des expressions de la forme $(a+b)^2$, $(x-y)^2$ ou $(a-b)^3$ sont avant tout des **puissances**, c'est-à-dire des produits de facteurs identiques.

La question suivante porte sur la sémantique et la syntaxe symboliques, plus particulièrement sur le sens des symboles: $=$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

3.3.3 Résultats de la question 11

Question 11

Complétez à l'aide d'un des symboles: $=$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$, afin d'obtenir un énoncé vrai quelles que soient les valeurs de x, y et z.

a) $x = y$ .... $x^2 = y^2$

b) $(x+y)\ (x-y)$ .... x^2-y^2

c) $xy = 0$ .... $x = 0$ ou $y = 0$

d) $x+z = y+z$ .... $x = y$

En analysant des copies d'examen, dans la première étape de cette recherche, nous avons remarqué une certaine confusion dans l'utilisation des symboles $=$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Par cette question, nous voulions vérifier si elle était répandue chez les élèves ou plutôt restreinte. Le tableau suivant donne les résultats à cette question.

Question 11: Résultats

TABLEAU 3.18
Résultats de 125 élèves à la question 11

Question posée	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Complétez à l'aide d'un des symboles: $=$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$, afin d'obtenir un énoncé vrai quelles que soient les valeurs de x, y et z.			
a) $x = y$ .... $x^2 = y^2$	66	3	55%
b) $(x+y)(x-y)$ .... x^2-y^2	27	6	26%
c) $xy = 0$ .... $x = 0$ ou $y = 0$	15	4	15%
d) $x+z = y+z$ .... $x = y$	18	4	18%

Plus de la moitié des élèves ont mis un symbole inapproprié en a) et un peu plus du quart en b). Les sous-questions c) et d) ont été mieux réussies, mais on peut se demander si cela est dû au fait qu'il y avait deux bonnes réponses dans chaque cas, c'est-à-dire deux symboles possibles ($\Leftrightarrow$ ou $\Rightarrow$) parmi les trois proposés. En répondant au hasard, les élèves n'avaient, dans ces cas, qu'une chance sur trois de se tromper.

De plus, le symbole «$\Leftrightarrow$» constituait un meilleur choix en c) et d) que le symbole «$\Rightarrow$», puisque l'énoncé obtenu avec le premier symbole englobe l'énoncé obtenu avec le second. Or presque la moitié des élèves qui ont eu une bonne réponse à ces sous-questions ont choisi le symbole «$\Rightarrow$», obtenant ainsi une affirmation *partielle*.

Les résultats à cette question sont donc loin d'être satisfaisants. L'explication de cette faible réussite tient peut-être au fait que les symboles «$\Leftrightarrow$» et «$\Rightarrow$» sont peu utilisés au niveau secondaire. D'ailleurs, trente-trois élèves ont indiqué que cette question les avait embarrassés et certains ont précisé, en entrevue, qu'ils n'avaient «jamais» vu ces symboles auparavant.

En admettant que les symboles «$\Leftrightarrow$» et «$\Rightarrow$» soient effectivement peu connus, certaines réponses demeurent malgré tout inquiétantes au niveau collégial. Le tableau suivant donne la liste des mauvaises réponses à cette question, par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

Question 11: Liste des réponses erronées

TABLEAU 3.19

Liste des réponses erronées à la question 11, pour 125 élèves

Type de réponses	Nombre d'élèves	Commentaires
a) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$	48	Beaucoup d'élèves pensent que les équations $x = y$ et $x^2 = y^2$ sont équivalentes.
$x = y \quad = \quad x^2 = y^2$	15	Cette erreur est plus grave, car, de toute évidence, x n'est pas égal à x^2, quel que soit x.
Autre signe non offert	3	Consigne non respectée; les élèves n'ont pas répondu à la question posée.
b) $(x+y)\,(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2$	13	Les élèves auraient dû mettre le signe «=» ici, car il s'agit d'un *cas de facteurs* connu. Ces deux erreurs ne sont pas excusables.
$(x+y)\,(x-y) \quad \Rightarrow \quad x^2-y^2$	11	
Autre signe non offert	3	Consigne non respectée; les élèves n'ont pas répondu à la question posée.
c) $xy = 0 \quad = \quad x = 0$ ou $y = 0$	13	Cette erreur n'est pas excusable car la phrase symbolique résultante n'a pas de sens.
Autre signe non offert	2	Consigne non respectée; les élèves n'ont pas répondu à la question posée.
d) $x+z = y+z \quad = \quad x = y$	15	Cette erreur n'est pas excusable car le résultat ne peut pas être vrai quels que soient x, y et z.
Autre signe non offert	3	Consigne non respectée; les élèves n'ont pas répondu à la question posée.

Les erreurs rencontrées dans cette question témoignent, chez certains élèves, de graves lacunes dans l'utilisation du langage symbolique. On en a un meilleur aperçu dans la partie B, notamment avec les questions 2, 3, 10 et 15 (voir le chapitre 4).

La question suivante porte sur les langages naturel et symbolique ou, plus précisément, sur la **traduction** du langage naturel au langage symbolique.

3.3.4 Résultats de la question 12

Question 12

Dans une école, il y a douze fois plus d'élèves que de professeurs.

Traduisez cet énoncé en équation, en désignant par *E* le nombre d'élèves et par *P* le nombre de professeurs.

Équation: ______________________

Cette question célèbre, connue sous le nom de «Students-Professors Problem», a été étudiée par de nombreux chercheurs (Clement, Lochhead & Monk,1981; Rosnick & Clement, 1980; Kaput & Sims-Knight, 1983; Wollman,1983). Elle met en lumière une erreur typique de traduction, du langage naturel au langage symbolique, appelée par ces chercheurs «the reversal error».

Nous avons légèrement adapté l'énoncé initial, d'une part en le présentant en français, et d'autre part en remplaçant le «six» de la version originale par «douze», pour nous rapprocher un peu de la réalité de l'ordre collégial...

Les résultats des élèves à cette question sont les suivants:

Question 12
Résultats

- 41 élèves sur 125 ont donné une mauvaise réponse.
- Un élève n'a pas répondu à la question.
- Le taux de non-réussite est de 34%.
- Six élèves ont indiqué que la question les avait embarrassés.

Il peut sembler étonnant que tant d'élèves aient manqué une question en apparence aussi simple. De leur avis même, elle était facile. D'ailleurs, six élèves seulement sur 125 ont dit avoir été embarrassés, et un seul n'a pas répondu.

Ces résultats sont pratiquement identiques à ceux d'une recherche citée, où, dans un groupe de 150 étudiants de première année en *génie*, 37% n'ont pas répondu correctement à la question. Dans cette même recherche, on mentionne que les résultats des étudiants en sciences sociales qui avaient participé aux tests préliminaires étaient nettement inférieurs, 57% d'entre eux n'ayant pas pu répondre correctement à la question.

Question 12
Réponses erronées

Pour comprendre le problème, examinons les réponses données par les élèves à cette question. Le tableau suivant présente l'ensemble des mauvaises réponses du groupe de 125 élèves, par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

TABLEAU 3.20
Réponses erronées à la question 12, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Nombre d'élèves	Commentaires
Équation inversée: $12E = P$ ou $P = 12E$	26	Cette équation est la **forme inversée** de la bonne réponse: $E = 12P$. L'expression *«douze fois plus d'élèves»* a été **traduite** par «$12E$». Quinze élèves ont écrit l'équation dans le sens $12E = P$ et les onze autres dans le sens $P = 12E$.
Autres équations: $12 + P = E$ $E = P^{12}$ $f(E) = 12P$ $f(P) = 12E$ $y = 12E - P$ ...	9 (1 ch.)	Ces équations n'ont été observées qu'une fois chacune. Dans les deux premières, l'expression *«douze fois plus»* a été traduite respectivement par «12 + » et «$(\ )^{12}$». La troisième équation aurait été correcte sans la notation de fonction: $f(\ )$. Les six autres équations comportent plusieurs erreurs et sont plus ou moins confuses.
Pas une équation: $12P > E$ $12E$ $12E + P$ ...	6 (1 ch.)	Six élèves ont donné une réponse qui n'est pas une équation ... Il est intéressant de revoir le résultat du numéro 1 g).

Question 12: Commentaires

Ces résultats correspondent à ceux des recherches citées précédemment. En effet, l'erreur la plus fréquente, «the reversal error», consiste à donner la forme inversée de l'équation attendue. Cette erreur représente ici les deux tiers des mauvaises réponses, ce qui correspond aux observations des autres chercheurs.

On pourrait penser que cette erreur est due à une **faute d'inattention** résultant d'une lecture trop rapide de la question ou d'un trop grand empressement à répondre, mais cette explication ne vaut que pour quelques élèves. Plusieurs autres ont fait une **traduction *«mot à mot»*** de l'énoncé, «calquant» l'écriture symbolique sur la syntaxe française. La même observation a été faite dans une autre recherche (Clement, Lochhead & Monk,1981) où l'énoncé, en anglais, se lisait comme suit:

> *Write an equation using the variables S and P to represent the following statement: "There are six times as many students as professors at this university." Use S for the number of students and P for the number of professors.*

L'erreur la plus fréquente des étudiants américains a été d'écrire: $6S = P$, erreur identique à celle des élèves francophones dans la présente recherche. Par contre, des étudiants hispanophones, dans la recherche américaine ont traduit cet énoncé par: $6S = 6P$, calquant littéralement leur interprétation de la formule anglaise «*six times as many as*».

La traduction littérale est un problème bien connu, notamment des professeurs de langues. Mais il y a d'autres explications à «*l'erreur d'inversion*». Par exemple, Rosnick et Clement (1980) ont observé que certains étudiants **ne saisissaient pas le *concept de variable*.** Ils ne considèrent pas les lettres dans une équation comme représentant des *nombres*, mais plutôt comme des *initiales* ou des *signes* prenant la place de *mots*. Dans leur lecture de l'énoncé précédent, par exemple, la lettre S ne représente pas pour eux *le nombre* d'étudiants, mais désigne plutôt *le mot* «students» (étudiants).

Nous n'avons pas observé ce problème personnellement. Cependant, il faut préciser que nous n'avons pas interviewé tous les élèves qui ont fait une erreur à cette question. Le test portant sur un grand nombre de difficultés de nature langagière, nous ne pouvions interviewer que quelques élèves par type de difficultés.

Quoi qu'il en soit, le nombre élevé d'erreurs à cette question suffit à nous sensibiliser aux difficultés que peuvent éprouver les élèves dans les activités de «traduction mathématique» ou de modélisation. Si un élève sur trois n'a pas pu traduire correctement un énoncé aussi simple, on peut comprendre qu'ils aient de la difficulté à résoudre des problèmes à contexte. En effet, l'étape initiale de «mise en équation(s)» exige non seulement qu'ils fassent une bonne lecture du problème, mais surtout qu'ils traduisent fidèlement l'énoncé, du langage naturel au langage symbolique. Or une traduction fidèle exige une grande maîtrise de la sémantique et de la syntaxe des langages impliqués, surtout dans une discipline comme les mathématiques où la précision est importante. Les élèves qui n'ont pas cette maîtrise des langages, naturel, symbolique et graphique, ont donc de sérieux handicaps en mathématiques.

Cette question termine la section portant sur le langage symbolique. Nous poursuivons l'analyse des résultats de la partie A avec les questions portant sur le langage graphique.

3.4 Questions portant sur le langage graphique

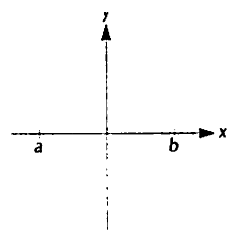
Cette section regroupe les questions de la partie A qui portent sur les graphiques cartésiens, en combinaison avec le langage naturel ou le langage symbolique. Dans ces questions, on demande à l'élève de tracer un graphique à partir d'informations données en langage naturel ou en langage symbolique, ou de tirer des informations à partir d'un graphique donné. Cette section porte donc essentiellement sur la **traduction**, du langage graphique (cartésien) au langage naturel ou au langage symbolique, ou l'inverse. Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont, dans l'ordre: 5 a) c) d), 6 a) b) et 7 a) b) d).

3.4.1 Résultats de la question 5

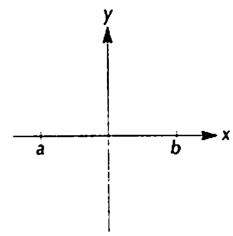
Question 5

Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant la condition donnée[1].

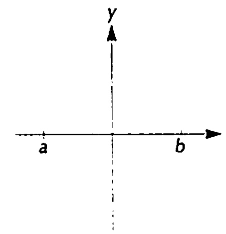
a) La fonction est positive.



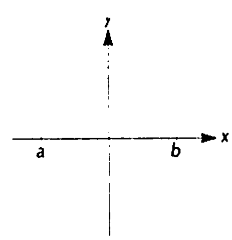
b) La fonction a exactement trois zéros.



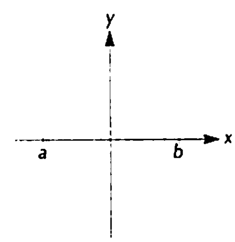
c) La fonction est constante.



d) La fonction augmente de moins en moins vite.



e) La fonction est strictement décroissante.



Cette question porte sur la **traduction du langage naturel au langage graphique**. Dans chaque cas, on demande aux élèves de tracer le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant une condition donnée. Par cette question, nous voulions explorer les représentations visuelles (cartésiennes) des élèves concernant les caractéristiques d'une fonction. Quelles *images* (cartésiennes) associent-ils, par exemple, à une fonction positive ou à une fonction constante?

L'emplacement des nombres *a* et *b* sur l'axe des *x* était voulu pour obliger les élèves à *sortir* du premier quadrant. Nous avions en effet constaté, lors du prétest, que beaucoup d'élèves ne prenaient pas de risques et se limitaient au premier quadrant lorsqu'ils avaient à tracer un graphique cartésien. Questionnés sur les raisons qui les amenaient à ces graphiques *partiels*, certains avaient dit, en entrevue, ne pas savoir s'ils avaient *le droit* de prolonger le graphique dans un autre quadrant. En dépit de la précision concernant l'intervalle $[a, b]$, dans la présente question, un grand nombre d'élèves s'en sont encore tenus au premier quadrant comme nous le verrons un peu plus loin. Cette constatation est surtout frappante dans le cas de la représentation d'une *fonction positive*.

1. Se référer à l'annexe 8 pour voir la disposition réelle présentée aux élèves.

Question 5: Résultats

Le tableau suivant donne les résultats des 125 élèves à cette question. Dans chaque cas, nous indiquons, dans la colonne des réponses erronées, le nombre d'élèves qui n'ont pas respecté les deux conditions données et, entre parenthèses, le nombre de ceux qui n'ont pas rempli la deuxième condition.

TABLEAU 3.21
Résultats de 125 élèves à la question 5

Question posée	Nombre de réponses erronées (*)	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant la condition donnée.			
a) La fonction est positive.	49 (18)	3	42%
b) La fonction a exactement trois zéros.	19 (14)	3	18%
c) La fonction est constante.	28 (24)	3	25%
d) La fonction augmente de moins en moins vite.	57 (33)	7	51%
e) La fonction est strictement décroissante.	29 (14)	2	25%

* Nombre d'élèves qui n'ont pas respecté la deuxième condition.

Le nombre élevé de mauvaises réponses, particulièrement dans le cas d'une *fonction positive*, témoigne d'un flou chez les élèves dans la compréhension de la notion de fonction et de la correspondance entre une fonction et son graphique cartésien. D'ailleurs, 29 élèves sur les 125, soit 23%, ont indiqué que cette question les avait embarrassés.

La variété des réponses erronées des élèves met en évidence différents types de confusion autour de la notion de fonction et de son graphique cartésien. Pour plus de clarté dans l'analyse des réponses, les sous-questions sont traitées séparément.

Question 5 a): Réponses erronées

Dans la question 5 a), on demandait aux élèves de tracer le graphique cartésien *d'une fonction*

- *définie dans l'intervalle [a, b] et*
- *positive.*

Les mauvaises réponses à cette question peuvent se regrouper en trois catégories. Dans le premier cas, les élèves ont tracé des **fonctions positives mais non définies dans tout l'intervalle [*a*, *b*]**. La presque totalité de ces graphiques sont limités au premier quadrant. Dans la deuxième catégorie, on trouve **des droites de pente positive**. Ces graphiques représentent bien des fonctions définies dans l'intervalle [*a*, *b*], mais **non des fonctions positives**. La dernière catégorie regroupe d'autres erreurs, observées une seule fois chacune.

Le tableau suivant résume l'ensemble des réponses erronées à cette question, par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

TABLEAU 3.22

Réponses erronées à la question 5 a), pour 125 élèves

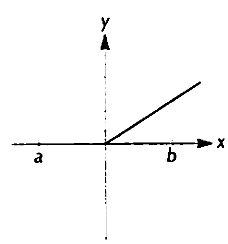
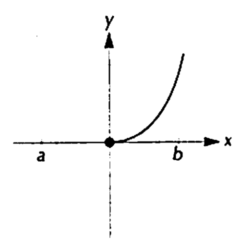
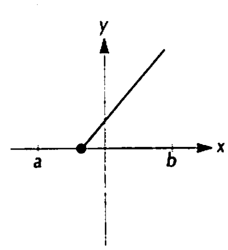
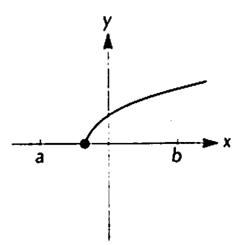
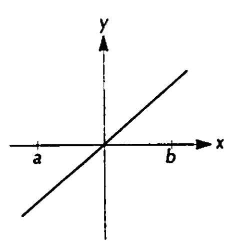
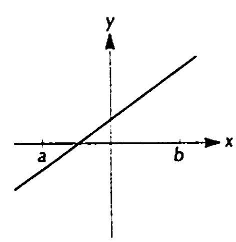
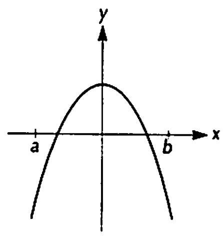
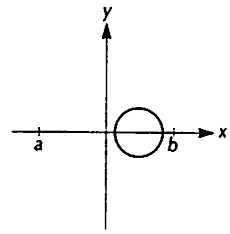
Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
La fonction est positive, mais n'est **pas définie dans tout l'intervalle [*a*, *b*]**:		**31**
• graphique limité au premier quadrant,	  . . .	(29)
• graphique non limité au premier quadrant.	 	(2)
Confusion entre fonction et pente: le graphique représente une droite de pente positive. **La fonction n'est pas positive**].	  . . .	14

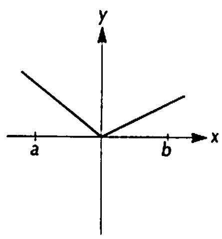
TABLEAU 3.22 *(Suite)*

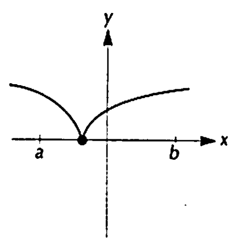
Réponses erronées à la question 5 a), pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Autres erreurs: Le graphique ne représente pas une fonction, ou représente une fonction qui n'est pas positive.	  …	4

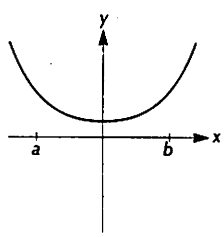
Question 5 a): Commentaires

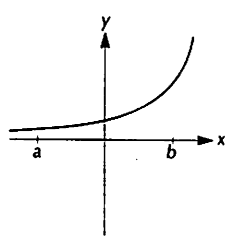
Parmi les élèves que nous avons rencontrés en entrevue et qui avaient fait une erreur du premier type dans le tableau, un très petit nombre étaient conscients de ne pas avoir satisfait aux deux conditions posées. Ces élèves voyaient bien que leur fonction n'était pas définie dans tout l'intervalle [a, b], mais ils ne savaient pas comment prolonger la courbe sans rendre la fonction négative. Ils n'ont pas eu le réflexe de «remonter» vers la gauche comme dans les exemples suivants:





Lorsque nous leur avons demandé si de tels graphiques remplissaient les deux conditions, leur réaction a été: *«Ah! bien oui...»*. Ces élèves n'ont pas eu non plus le réflexe d'effacer la partie de courbe qu'ils avaient tracée et d'en dessiner une autre, comme les suivantes par exemple:





À part ces quelques élèves, tous les autres que nous avons interviewés, parmi ceux qui avaient fait une erreur à cette sous-question, ont fait preuve d'une **confusion** plus ou moins grande au sujet du graphique cartésien d'une fonction. **Beaucoup**

confondaient fonction et abscisse, mais surtout fonction et coordonnées. La plupart de ces élèves ont traduit la condition «fonction positive» en «coordonnées positives» et ont par conséquent tracé une courbe où l'abscisse et l'ordonnée des points étaient positives. Ceci explique le grand nombre de graphiques limités au premier quadrant, dans les réponses observées ici, mais également dans d'autres questions impliquant des graphiques cartésiens, en particulier à la question 6 a) (voir 3.4.2).

D'autres élèves ont confondu fonction et pente. En traçant une droite de «pente positive», ils étaient persuadés avoir donné un exemple de «fonction positive». On retrouve la même confusion dans d'autres questions, notamment en 5 c) où les élèves ont confondu «fonction constante» et «pente constante».

Parmi les élèves interviewés, il y en avait aussi qui mêlaient tous les termes: fonction, abscisse, ordonnée, pente,... Au cours des entrevues, nous leur avons présenté différents graphiques en leur demandant d'identifier ceux qui représentaient une fonction positive. Tous ces graphiques illustraient «quelque chose de positif», mais pas nécessairement une «fonction positive». Or, pour ces élèves, tous ces graphiques représentaient des fonctions positives. Le terme *«fonction»* était donc parfois synonyme d'abscisse, parfois synonyme d'ordonnée, parfois synonyme de pente, ... Bref, synonyme de bien des choses.

La confusion de termes est omniprésente dans l'ensemble des questions impliquant des graphiques cartésiens. La question 5 c), que nous analysons maintenant, met en évidence la confusion entre «fonction» et «pente».

Question 5 c): Réponses erronées

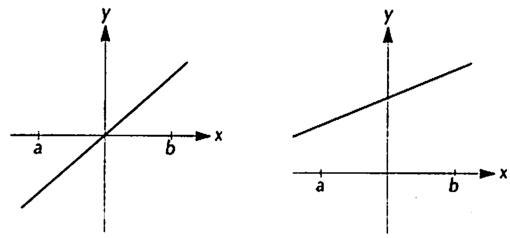
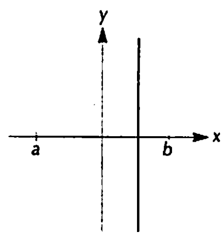
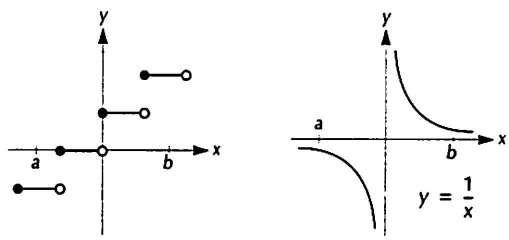
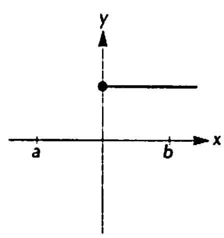
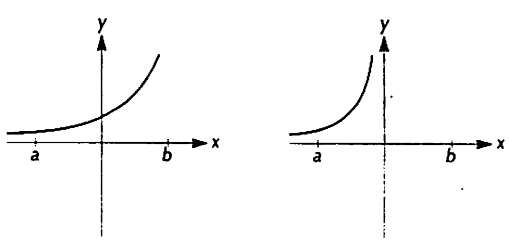
Dans cette question, on demandait aux élèves de tracer le graphique cartésien *d'une fonction*

- *définie dans l'intervalle [a, b] et*
- *constante.*

Parmi les 28 graphiques erronés, 21 **ne représentent pas une fonction constante**, mais mettent en évidence **quelque chose** de constant: une pente constante, une abscisse constante, des sauts «constants» ou un produit de coordonnées constant (l'élève a écrit à côté de son graphique: $y = 1/x$).

Quatre autres graphiques représentent une fonction constante, mais sont limités au premier quadrant et ne respectent donc pas la première condition. Les trois autres graphiques comportent d'autres types d'erreurs. Le tableau suivant résume l'ensemble des réponses erronées à cette question.

TABLEAU 3.23
Réponses erronées à la question 5 c), pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Le graphique ne représente **pas une fonction constante**; mais quelque chose d'autre est constant:		**21**
• pente constante,	 . . .	(15)
• abscisse constante,	 . . .	(4)
• sauts constants ou produit de coordonnées constant.		(1 ch.)
La fonction est constante, mais n'est **pas définie dans tout l'intervalle [*a*, *b*]**. Le graphique est limité au premier quadrant.	 . . .	4
Autres erreurs	 . . .	3

Les erreurs illustrées dans ce tableau mettent en évidence les mêmes confusions de termes que celles discutées à la sous-question a): confusion entre *fonction* et *pente* surtout, mais aussi entre *fonction* et *abscisse*, entre *fonction* et *coordonnées*, etc. Les mêmes commentaires s'appliquent donc dans ce cas. La sous-question suivante a donné lieu a une plus grande variété d'erreurs que les précédentes.

Question 5 d): Réponses erronées

Dans la question 5 d), on demandait de tracer le graphique cartésien *d'une fonction*

- *définie dans l'intervalle [a, b] et*
- *qui augmente de moins en moins vite.*

La question était inspirée de situations de la vie courante que les élèves rencontrent dans certains de leurs cours. La *loi des rendements décroissants* en économique, les *modèles d'apprentissage* en psychologie, la distance parcourue par un mobile qui *décélère*, etc. sont autant d'exemples que l'on peut illustrer par une courbe qui «augmente de moins en moins vite». Nous voulions voir comment les élèves visualisaient une telle croissance.

Cette sous-question a été la moins réussie de la question 5. En plus des confusions de termes rencontrées en a) et c), nous avons aussi relevé des erreurs attribuables à une mauvaise compréhension de l'expression «*augmenter de moins en moins vite*». Ainsi, parmi les 57 graphiques erronés observés, 33 illustrent des fonctions qui **augmentent de plus en plus vite, ou des fonctions qui augmentent de façon constante,** des fonctions qui **diminuent** ou des fonctions **quelconques**. Le tableau suivant résume l'ensemble des mauvaises réponses à cette question

TABLEAU 3.24

Réponses erronées à la question 5 d), pour 125 élèves

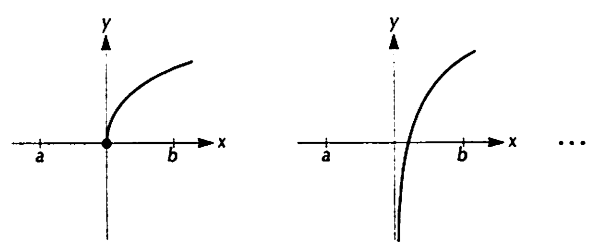
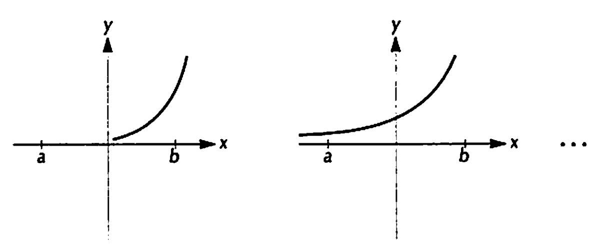
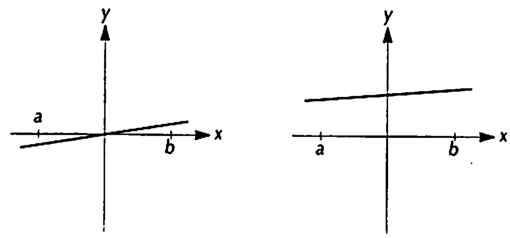
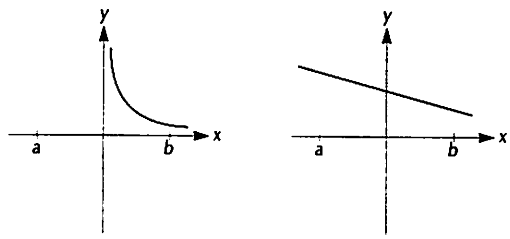
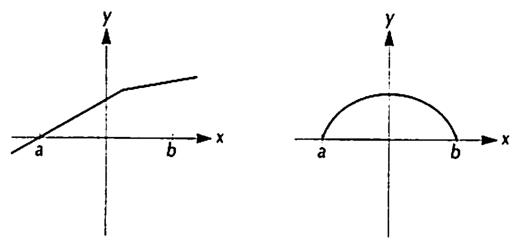
Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
La fonction augmente de moins en moins vite, mais **n'est pas définie dans tout l'intervalle [*a*, *b*]**. Dans la majorité des cas, le graphique est limité au premier quadrant.		24
La fonction augmente, mais **de plus en plus vite**. Dans la majorité des cas, la fonction n'est pas définie dans tout l'intervalle [*a*, *b*].		10

TABLEAU 3.24 *(Suite)*
Réponses erronées à la question 5 d), pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
La fonction augmente, mais **de façon constante**. La pente est faible dans tous les cas.	 . . .	7
La fonction illustrée **diminue**, de moins en moins vite ou de façon constante. Dans la moitié des cas, la fonction n'est pas définie dans tout l'intervalle [*a*, *b*].	 . . .	10
Autres erreurs	 . . .	6

Question 5 d): Commentaires

Si on tient compte du nombre et de la variété des erreurs observées ici, on peut conclure que cette question présentait un **niveau de difficulté élevé** pour les élèves. En effet, la moitié d'entre eux n'ont pas donné de réponse ou ont donné une réponse erronée.

Nous étions conscients que l'énoncé de cette sous-question était un peu plus complexe que les autres et qu'il exigerait, par conséquent, un peu plus de réflexion de la part des élèves. Malgré cela, nous ne nous attendions pas à un si faible taux de réussite. Sachant maintenant qu'il existe beaucoup de confusion autour de la notion de fonction, nous réalisons mieux la difficulté occasionnée par cet énoncé un peu plus complexe. En réalité, la question comporte une **double difficulté**: la transposition (ou «traduction») de la notion de fonction en graphique cartésien et l'analyse de la phrase *«la fonction augmente de plus en plus vite»*.

Les réponses données à la sous-question suivante, 5 e), n'ont pas fait apparaître d'autres difficultés ou d'autres types d'erreurs que ceux déjà mentionnés; nous ne discutons donc pas de cette question ici.

Question 5: Résumé

En résumé, la remarque la plus importante à signaler au sujet de la question 5 est sans aucun doute la **confusion terminologique** qui existe chez beaucoup d'élèves **autour de la notion de fonction** et de sa représentation graphique. Cette confusion explique beaucoup d'erreurs dans les questions graphiques de ce test, mais elle explique aussi, d'après nous, beaucoup de difficultés des élèves en mathématiques. En effet, comment un élève peut-il suivre le discours de son professeur de mathématiques qui explique une notion à l'aide d'un graphique, s'il associe aux termes utilisés par le professeur des éléments non équivalents du graphique? Par exemple, comment peut-il **comprendre** l'interprétation de la «dérivée d'une fonction» comme «pente de tangente à la courbe», s'il confond les termes «fonction» et «pente»? Plus généralement, que peut-il comprendre en mathématiques, et que peut-il retenir, si la plus grande confusion règne dans son vocabulaire mathématique?

On peut peut-être penser que ce problème n'est pas très grave, *qu'il ne s'agit que d'une question terminologique*. Cependant, la confusion terminologique a des conséquences très importantes, car elle compromet sérieusement la compréhension des notions, en mathématiques comme dans toute autre discipline.

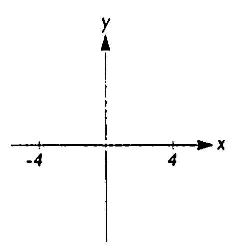
Les questions suivantes mettent également en lumière un problème de confusion dans des situations de traduction, mais, cette fois, du langage symbolique au langage graphique.

3.4.2 Résultats de la question 6

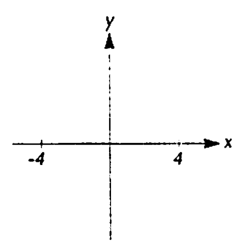
Question 6

Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[-4, 4]$ et vérifiant la condition donnée.

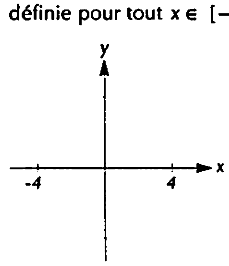
a) $f(x) \geq 0$.



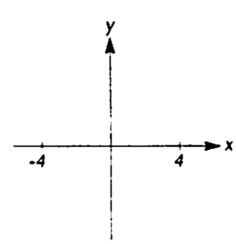
b) $f(x) = mx$ où $m < 0$.



c) $f(x) = 1$ si $x < 2$ et f est définie pour tout $x \in [-4, 4]$.



d) $f(x) = f(-x)$.



Le but de cette question était de **mesurer la capacité des élèves à décoder des énoncés exprimés en langage symbolique** et **à les traduire en langage graphique**. La condition relative à l'intervalle $[-4, 4]$ était motivée par la même raison que celle expliquée à la question 5.

Les quatre énoncés proposés dans cette question portent sur des caractéristiques de fonctions et sont relativement simples à décoder si on connaît la **signification de l'expression** «$f(x)$». Ils sont également faciles à traduire graphiquement si on sait à quoi x et $f(x)$ correspondent sur un graphique cartésien. Or il ne semble pas que les élèves que nous avons examinés avaient les habiletés requises, car la question a été plutôt mal réussie dans l'ensemble.

Question 6: Résultats

Le tableau suivant donne les résultats des 125 élèves à cette question.

TABLEAU 3.25
Résultats de 125 élèves à la question 6

Question posée	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[-4, 4]$ et vérifiant la condition donnée.			
a) $f(x) \geq 0$	38	8	37%
b) $f(x) = mx$ où $m < 0$	63	9	58%
c) $f(x) = 1$ si $x < 2$, et f est définie pour tout $x \in [-4, 4]$.	78	20	78%
e) $f(x) = f(-x)$.	63	32	76%

Comme on peut le constater, plus du tiers des élèves n'ont pas répondu correctement en a), plus de la moitié en b) et plus des trois quarts en c) et d). On peut donc considérer que cette question comportait beaucoup de difficultés pour les élèves. D'ailleurs, la moitié d'entre eux ont indiqué que cette question ou une des sous-questions les avait embarrassés, et un grand nombre n'a pas donné de réponse en c) et d).

L'examen des mauvaises réponses permet d'identifier certains aspects de cette question qui ont pu causer des difficultés aux élèves. Analysons pour commencer les résultats de la première sous-question.

Question 6 a): Réponses erronées

Dans la question 6 a), on demandait de tracer le graphique cartésien *d'une fonction*

- *définie dans l'intervalle* $[-4, 4]$ *et*
- *vérifiant la condition* $f(x) \geq 0$.

En fait, cette question est quasi identique à 5 a) sauf qu'ici la deuxième condition est formulée en langage symbolique: «$f(x) \geq 0$», tandis que, dans la question précédente, elle était formulée en langage naturel: «la fonction est positive». Il est donc intéressant de comparer les résultats de ces deux questions, car on ne retrouve pas nécessairement les mêmes erreurs dans les deux cas.

Le tableau suivant résume l'ensemble des réponses erronées à la question 6 a), par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

TABLEAU 3.26
Réponses erronées à la question 6 a), pour 125 élèves

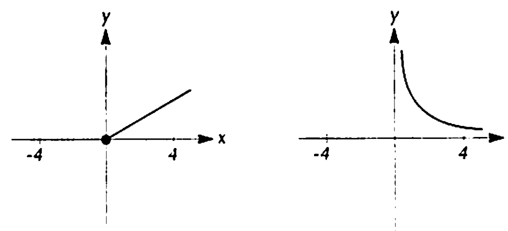
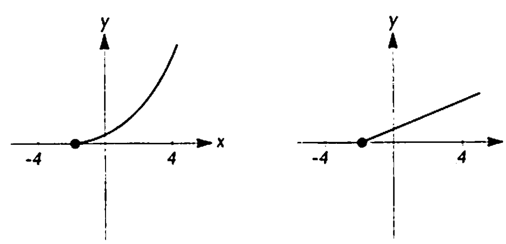
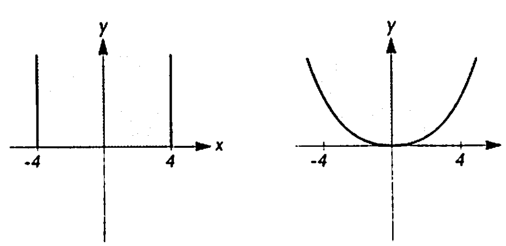
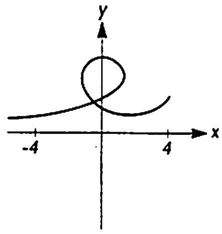
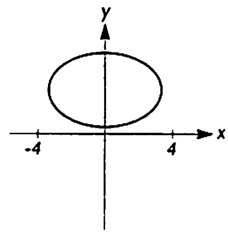
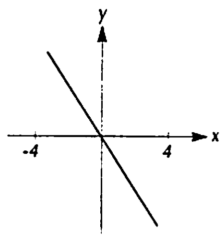
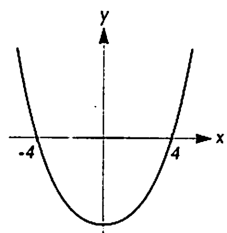
Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
La condition «$f(x) \geq 0$» est respectée, mais **la fonction n'est pas définie dans tout l'intervalle** $[-4, 4]$:		**24**
• graphique limité au premier quadrant,	 …	(22)
• graphique non limité au premier quadrant.		(2)
Le graphique ne représente **pas une fonction**; il a la forme d'une		**10**
• région,	 …	(8)

TABLEAU 3.26 *(Suite)*
Réponses erronées à la question 6 a), pour 125 élèves

Type d'erreurs	**Exemples**	**Nombre d'élèves**
• courbe.	 	(2)
La condition «$f(x) \geq 0$» **n'est pas respectée**, la fonction n'est pas positive dans l'intervalle $[-4, 4]$.	  ...	4

Question 6 a): Commentaires

Comme à la question 5 a), l'erreur la plus fréquente a été de limiter le graphique au premier quadrant, contrairement à la directive relative à l'intervalle $[-4, 4]$. Cette erreur, ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, est due à une **confusion** entre *fonction* et *coordonnées* ou, dans le cas présent, à une confusion **entre les expressions symboliques** $f(x)$ **et** (x, y). Les élèves ont interprété la condition «$f(x) \geq 0$» comme voulant dire: «$x \geq 0$ et $y \geq 0$».

Curieusement, il y a eu moins d'erreurs de cette nature avec la formulation symbolique «$f(x) \geq 0$» qu'avec la phrase «*la fonction est positive*». Vingt-deux élèves ont fait cette erreur ici, contre vingt-neuf à la question précédente. Nous ne savons pas si le terme «*fonction*» porte plus à confusion chez les élèves que l'expression symbolique «$f(x)$», mais il serait intéressant de le vérifier.

Autre fait intéressant à signaler: **nous n'avons observé aucune erreur liée à «la confusion entre fonction et pente» dans à cette question**, alors qu'il y en avait quatorze à la question précédente (formulée en langage naturel). Là encore, il semble que la confusion soit liée aux termes, «*fonction*» et «*pente*», plutôt qu'aux concepts ou aux symboles utilisés pour les représenter. D'ailleurs, les élèves sont habitués à utiliser le symbole «*m*» pour désigner la pente d'une droite. Il aurait été étonnant qu'ils associent le symbole «$f(x)$» à la «*pente*». (Ces élèves ne pouvaient pas avoir confondu $f(x)$ et $f'(x)$, par exemple, puisqu'ils arrivaient au collégial et n'avaient pas encore fait de calcul différentiel.)

Comment expliquer le fait que tant d'élèves confondent les termes «*fonction*» et «*pente*» mais ne confondent pas les symboles qui les représentent? Pourquoi cette confusion se produit-elle surtout lorsque le mot «*fonction*» est associé aux adjectifs «*positif*» ou «*constant*»? Se pourrait-il que l'on s'intéresse plus au signe de la pente qu'à celui de la fonction? Ou que l'on parle plus de «*pente constante*» que de «*fonction constante*»? C'est le cas dans l'étude de la droite. Mais est-ce le cas en général? Si oui, il ne faudrait pas s'étonner que des élèves aient le réflexe d'associer les adjectifs «*positif*» et «*constant*» au terme «*pente*» plutôt qu'au terme «*fonction*». En lisant une phrase comme: «*la fonction est positive*», par exemple, ces élèves croient avoir lu: «*la pente est positive*». Ceci n'est qu'une hypothèse bien sûr, mais elle mérite réflexion.

Il y a une dernière différence à souligner entre les résultats des questions 5 a) et 6 a): nous avons observé ici dix graphiques qui **ne représentent pas une fonction** contre un seul à la question précédente. Ce qui est étonnant, c'est que sept de ces graphiques sont identiques. Dans chaque cas, les élèves ont hachuré la région au-dessus de l'axe des x, entre $x = -4$ et $x = 4$ (voir le tableau 3.26). Or aucun graphique illustrant une région n'a été observé à la question 5 a) où l'énoncé était formulé en langage naturel.

L'explication d'un élève qui avait dessiné cette région a été la suivante: «$f(x)$ *est plus grand ou égal à zéro, alors y est plus grand ou égal à zéro*». Puis il a hachuré la région au-dessus de l'axe des x. Dans son passage de $f(x)$ à y, il avait oublié que $f(x)$ référait à une **fonction**; il n'avait retenu que l'idée d'ordonnée. C'est pourquoi il avait désigné tous les points où l'ordonnée est positive et l'abscisse comprise entre -4 et 4.

Comme on peut le constater, une même question peut donner lieu à des erreurs de natures différentes selon qu'elle est formulée en langage naturel ou en langage symbolique. Un simple mot ou un symbole peuvent causer des difficultés aux élèves, et le remplacement de l'un par l'autre peut parfois simplifier un énoncé, parfois le compliquer.

À la question suivante, on a un exemple d'une situation où l'utilisation du symbole $f(x)$, à la place de y, a pu causer des difficultés à certains élèves.

Question 6 b): Réponses erronées

En 6 b), on demandait aux élèves de tracer le graphique cartésien *d'une fonction*

- *définie dans l'intervalle* $[-4, 4]$ *et*
- *vérifiant la condition* $f(x) = mx$, $m < 0$.

En d'autres mots, on leur demandait de tracer **une droite** (ou au moins un segment de droite allant de $x = -4$ à $x = 4$) **de pente négative et passant par l'origine.**

Plus de la moitié des élèves (58%) n'ont pas donné une bonne réponse à cette question. Le tableau suivant résume l'ensemble des réponses erronées, par type d'erreurs et par fréquence décroissante.

TABLEAU 3.27

Réponses erronées à la question 6 b), pour 125 élèves

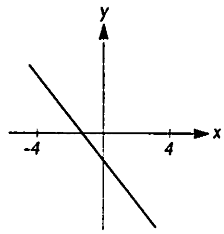
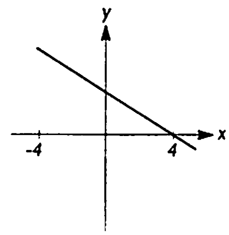
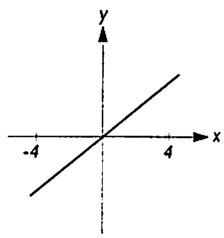
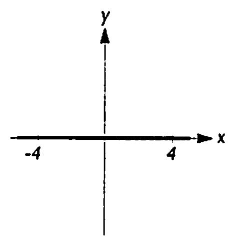
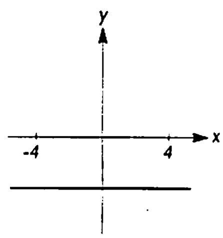
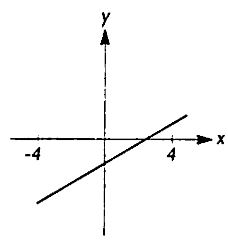
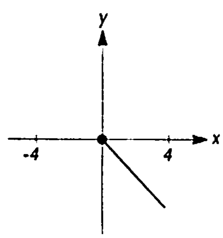
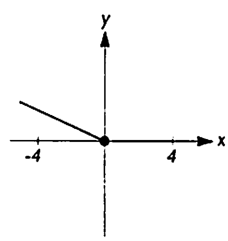
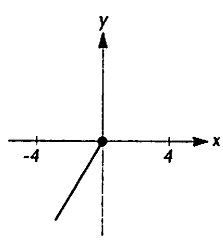
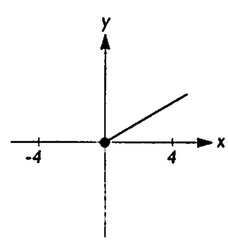
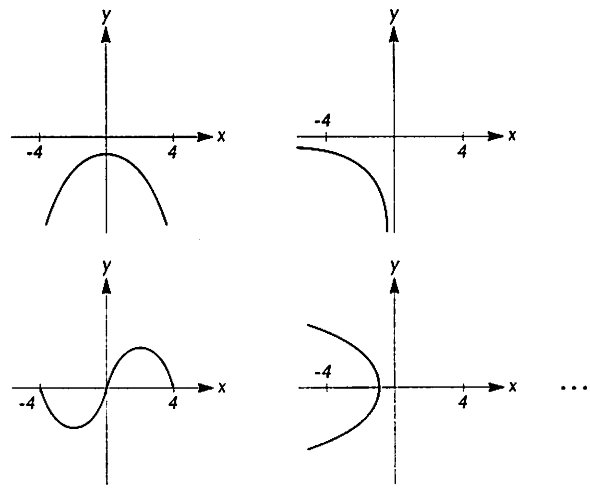
Type d'erreurs	Exemples			Nombre d'élèves
La droite a une pente négative, mais **ne passe pas par l'origine**.			...	16
La droite passe par l'origine, mais **n'a pas une pente négative**.			...	11
La droite **ne passe par l'origine et n'a pas une pente négative** (2 erreurs).			...	9
Demi-droite de pente négative passant par l'origine, **mais *f* n'est pas définie dans tout l'intervalle** [–4, 4].			...	4
Demi-droite de **pente positive** passant par l'origine; ***f* n'est pas définie dans tout l'intervalle** [–4, 4] (2 erreurs).			...	8

TABLEAU 3.27 *(Suite)*
Réponses erronées à la question 6 b), pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Pas une droite. Courbes très variées dont deux ne représentent pas une fonction.		15

Question 6 b): Commentaires

Si on observe le dernier type d'erreurs dans le tableau, on constate que quinze élèves **n'ont pas reconnu l'équation d'une droite** dans l'écriture «$f(x) = mx$», sans compter les neuf élèves qui n'ont pas répondu à la question. Au total, cela donne presque un élève sur cinq. Le résultat aurait-il été différent si on avait écrit «y» à la place de «$f(x)$»? Ces élèves auraient-ils plus facilement associé une droite à l'équation «$y = mx$» qu'à l'équation «$f(x) = mx$»? Nous ne pouvons pas répondre à la question faute de vérification. Cependant, nous avons constaté (au numéro 4 de la partie B) que l'équation «$y = mx + b$» était bien connue, puisque 94% des élèves l'ont associée au graphique d'une droite.

Les autres élèves qui n'ont pas donné une bonne réponse à cette question ont reconnu l'équation d'une droite dans l'écriture «$f(x) = mx$», mais ils ont fait des erreurs **sur la pente, sur l'ordonnée à l'origine ou sur la condition relative à l'intervalle** $[-4, 4]$. Dix-sept de ces quarante-huit élèves ont même fait une double erreur. Donc, si l'équation «$y = mx + b$» est bien connue, on ne peut pas en dire autant du rôle qu'y ont les paramètres «m» et «b».

Par exemple, si on observe les 36 droites correspondant aux trois premiers types d'erreurs dans le tableau, on peut supposer que **des élèves ont confondu la pente et l'ordonnée à l'origine en confondant les paramètres «*m*» et «*b*»**. En effet, la majorité des 25 droites qui ne passent pas par l'origine ont une *ordonnée à l'origine négative*, c'est-à-dire vérifient la condition «$b < 0$», mais ne vérifient pas nécessairement la condition donnée: «$m < 0$». De même, sept droites sont horizontales, c'est-à-dire vérifient la condition «$m = 0$», alors qu'elles devraient plutôt vérifier la condition «$b = 0$».

L'absence du terme «b» dans l'équation donnée explique-t-elle certaines de ces erreurs? La réponse des élèves aurait-elle été différente si, à la place de l'équation «$f(x) = mx$ où $m < 0$», on avait spécifié: «$y = mx + b$, où $m < 0$ et $b = 0$»? Il serait intéressant de comparer les résultats à ces deux formulations de la question.

Par ailleurs, si on observe les demi-droites (correspondant aux quatrième et cinquième types d'erreurs dans le tableau), on peut aussi supposer que **d'autres élèves ont confondu la condition «$m < 0$» avec «$x < 0$ et $y < 0$» ou avec «$y < 0$»**. En effet, six des douze demi-droites sont dans le troisième quadrant, là où «$x < 0$ et $y < 0$» et trois sont dans le quatrième. Or ces demi-droites ne vérifient pas nécessairement la condition «$m < 0$». Il y aurait donc des élèves qui confondent plusieurs symboles, tout comme il y a des élèves qui confondent plusieurs termes (cf. question 5).

Question 6: Résumé

En résumé, les questions 6 a) et b) ont permis d'illustrer quelques difficultés causées par la présence du symbole «$f(x)$» dans des expressions relativement connues des élèves, comme $f(x) \geq 0$ et $f(x) = mx$. En observant les résultats de la question 6 d) cependant, on réalise à quel point un énoncé, tout aussi simple mais moins familier, peut devenir incompréhensible si on ne saisit pas le sens de ce symbole. En effet, les trois-quarts des élèves n'ont pas pu associer un graphique correct à l'équation «$f(x) = f(-x)$».

Pourtant, lorsqu'on sait que «$f(x)$» désigne «*la valeur associée à x par la fonction f*», il est facile de déduire que si $f(x) = f(-x)$, alors *la fonction f associe à x la même valeur qu'à* $-x$. Ainsi, $f(2) = f(-2)$, $f(3) = f(-3)$, etc. De plus, si on sait transposer les symboles «x» et «$f(x)$» en graphique cartésien, il est également facile de déduire que la courbe de la fonction f est telle que *l'ordonnée du point d'abscisse x est égale à l'ordonnée du point d'abscisse* $-x$. En d'autres termes, *la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical* (ou à l'axe des y).

Devant le nombre élevé de réponses erronées et d'absences de réponse à cette question, on peut conclure **qu'un grand nombre d'élèves ne saisissent pas** (ou pas suffisamment) ***le sens* du symbole «$f(x)$»**. Ils sont donc incapables de décoder des énoncés en langage symbolique du type de la question 6 d) et ne peuvent donc pas les traduire en langage graphique.

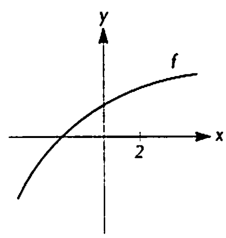
La prochaine question que nous analysons traite aussi des difficultés liées à la notation «$f(x)$», mais plus sous l'angle graphique et en cernant davantage le problème.

3.4.3 Résultats de la question 7

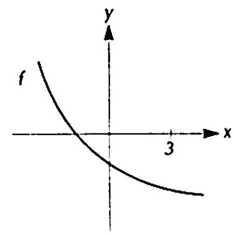
Question 7

Dans chaque cas, représentez clairement l'expression donnée et écrivez-la à l'endroit qui convient sur le graphique[1].

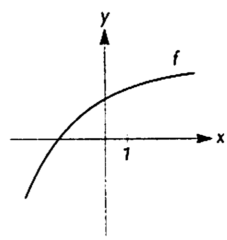
a) $(2, f(2))$



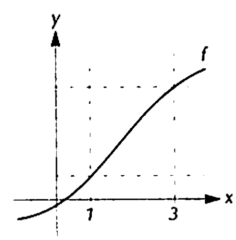
b) $f(3)$



c) $(1 + \Delta x)$ pour un $\Delta x > 0$



d) $f(3) - f(1)$



Cette question résulte d'observations faites en entrevue avec des élèves d'un cours de calcul différentiel et intégral I (Mat. 103). Ils avaient raté, dans leur premier examen, des questions mesurant leur habileté à décoder et à interpréter graphiquement des expressions symboliques de la forme suivante:

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}, \qquad \ldots$$

Ces expressions avaient été traitées en classe et les élèves avaient eu l'occasion de les travailler en exercice. En dépit de cela, et même après la correction en classe de l'examen, ils n'étaient toujours pas capables de les décoder.

Dans une démarche visant à découvrir pourquoi ces élèves avaient cette difficulté, nous avons fractionné de plus en plus les expressions, pour finalement nous rendre compte **qu'ils ne saisissaient pas le sens des symboles élémentaires en cause**: x, $f(x)$, $f(5)$, Δx ...

1. Se référer à l'annexe 8 pour voir la disposition réelle présentée aux élèves.

Pensant les aider à s'exprimer, nous leur avons donné un graphique illustrant une fonction et leur avons demandé de situer quelques-uns des symboles élémentaires en cause: $f(1)$, $f(5)$... En observant leur démarche, nous nous sommes rendu compte que plusieurs d'entre eux confondaient, graphiquement, les expressions $f(a)$ et $(a, f(a))$. En d'autres termes, **ils confondaient *l'ordonnée d'un point* et le point lui-même**. Les expressions initiales, ou même de plus simples, telles $f(5) - f(1)$, étaient donc pour eux dénuées de sens, ou en prenaient un tout autre. En posant une telle question dans le test, nous voulions vérifier si beaucoup d'élèves avaient ce type de problèmes à leur arrivée au collégial.

Question 7: Résultats

Le tableau suivant donne les résultats des 125 élèves à cette question.

TABLEAU 3.28
Résultats de 125 élèves à la question 7

Question posée	Nombre de réponses erronées	Absence de réponse	Taux de non-réussite
Dans chaque cas, représentez clairement l'expression donnée et écrivez-la à l'endroit qui convient sur le graphique.			
a) $(2, f(2))$	12	16	22%
b) $f(3)$	73	22	76%
c) $(1 + \Delta x)$ pour $\Delta x > 0$	presque toutes	61	–
e) $f(3) - f(1)$	68	36	83%

Une première remarque que l'on peut faire à propos de ces résultats concerne le **nombre élevé d'absences de réponse**. D'ailleurs, plus de la moitié des élèves ont indiqué que cette question les avait embarrassés, vingt-six autres ont pointé la sous-question c) et douze la sous-question d). Au total, **83% des élèves ont indiqué que cette question ou une des sous-questions les avaient embarrassés**. C'est la question de la partie A qui a été jugée la plus difficile par les élèves, suivie de la question 6.

La question 7 c) peut expliquer une partie de cette perception négative, car beaucoup d'élèves ont indiqué qu'ils n'avaient jamais vu le symbole «Δ»; et ceux qui ont répondu ont presque tous donné une mauvaise réponse. En fait, nous aurions dû éliminer cette sous-question à l'étape de validation du test, car un professeur de mathématiques de Sec. V nous avait signalé que le symbole «Δ» n'était pas utilisé au secondaire, sauf peut-être pour désigner le discriminant de l'équation du second degré: $b^2 - 4ac$.

Mais la question 7 c) n'explique pas tout. En effet, on peut voir que les questions 7 b) et d) ont aussi été très mal réussies. Pourtant, les expressions visées dans ces cas sont utilisées au secondaire. Examinons les mauvaises réponses données à chacune de ces questions pour comprendre les difficultés rencontrées par les élèves.

Question 7 a): Exemples d'erreurs

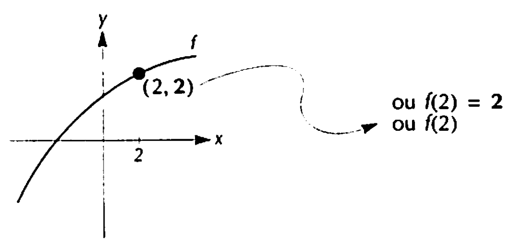
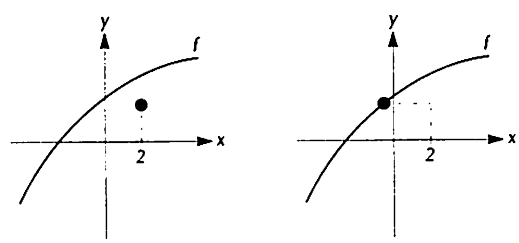
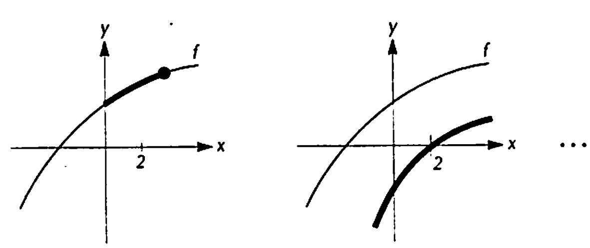
À la question 7 a), on demandait aux élèves

- *de représenter clairement l'expression* $(2, f(2))$ *sur le graphique donné et*
- *d'écrire cette expression à l'endroit qui convenait sur le graphique.*

Un très grand nombre d'élèves n'ont pas rempli la deuxième condition. Ils ont mis en évidence un élément graphique, mais ils n'ont rien écrit à côté. La formulation générale qui apparaissait sur le questionnaire n'était peut-être pas assez spécifique. C'est pourquoi nous avons convenu de ne pas en tenir compte dans la correction.

D'autres élèves ont illustré le bon point sur la courbe donnée, mais ils ont écrit quelque chose d'incorrect à côté. Nous avons comptabilisé ces cas dans les erreurs, même si nous avons donné *le bénéfice du doute* à ceux qui n'avaient rien écrit, car nous avons jugé intéressant d'illustrer tous les types d'erreurs observés à cette question. Le tableau suivant résume ces erreurs.

TABLEAU 3.29
Exemples d'erreurs dans la représentation de $(2, f(2))$, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
On a mis en évidence le point de coordonnées $(2, f(2))$, **mais ce qui est écrit à côté est incorrect.**		6
Le point illustré **n'a pas pour coordonnées $(2, f(2))$.**		2
Ce qui est illustré n'est pas un point.		4

Question 7 a): Commentaires

Le premier type d'erreurs illustré dans le tableau est, bien sûr, moins grave que les deux autres. Dans ce cas, les élèves ont au moins associé le bon élément graphique à l'expression donnée. Cependant, ce qu'ils ont écrit à côté du point laisse penser qu'ils confondent des expressions symboliques de base telles: a et $f(a)$, ou $f(a)$ et $(a, f(a))$. Nous reviendrons plus loin sur la confusion entre *«point»* et *«ordonnée»*.

Les autres erreurs illustrées dans ce tableau laissent entrevoir des lacunes beaucoup plus importantes chez les élèves qui les ont commises. Mais, n'ayant pas eu l'occasion de les documenter, nous ne sommes pas en mesure de les expliquer.

Nous n'avons observé que six erreurs importantes ici; cependant, il ne faut pas oublier que **seize élèves n'ont pas répondu à la question**. On ne peut donc pas parler de réussite dans ce cas.

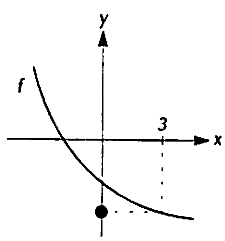
La question suivante a permis de mettre en lumière une confusion importante dans le cas du graphique cartésien d'une fonction et des symboles utilisés pour désigner des éléments de ce graphique.

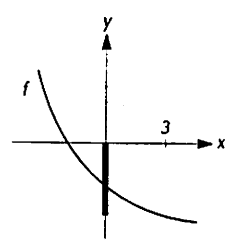
Question 7 b): exemples d'erreurs

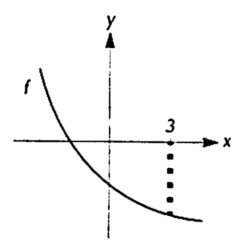
Dans cette question, on demandait aux élèves

- *de représenter clairement l'expression* $f(3)$ *sur le graphique donné et*
- *d'écrire cette expression à l'endroit qui convenait sur le graphique.*

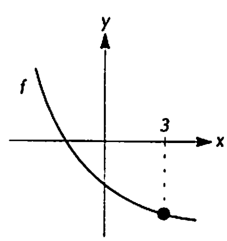
Comme en 7 a), un très grand nombre d'élèves n'a pas rempli la deuxième condition. Pour la même raison que celle donnée précédemment, nous n'en avons pas tenu compte, dans la mesure où l'illustration correspondait à $f(3)$ et ne portait pas à confusion. Ainsi, nous avons considéré comme bonnes les réponses suivantes:

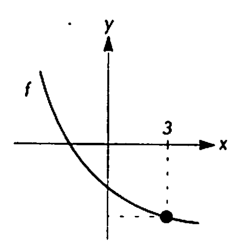


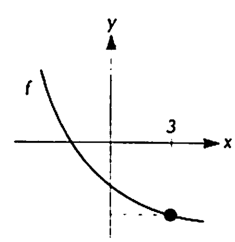




Mais nous avons considéré fausses les réponses qui mettaient plus en évidence le point de coordonnées $(3, f(3))$ que l'ordonnée elle-même, comme dans les exemples suivants:



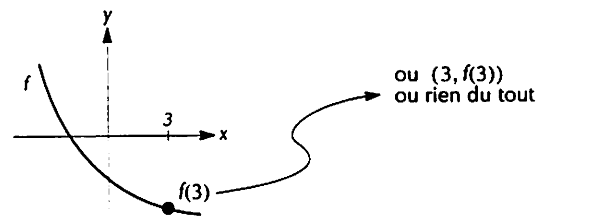
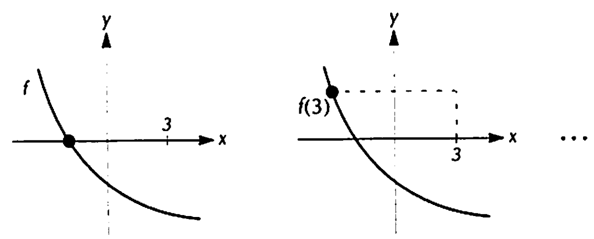
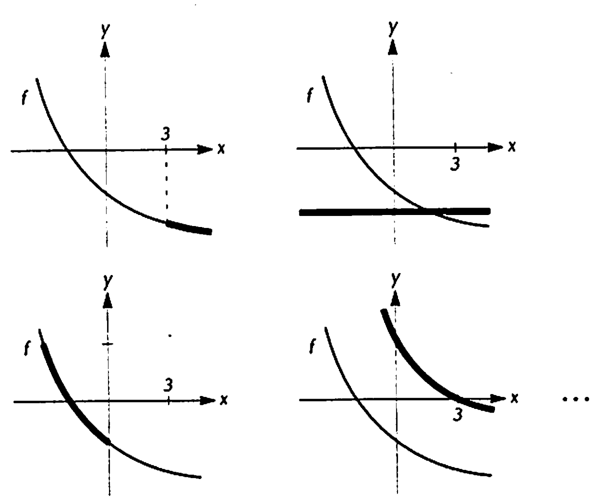




D'ailleurs, **l'erreur la plus fréquente à cette question a été d'illustrer le point de coordonnées** $(3, f(3))$. Dans la quasi-totalité de ces cas, **les élèves ont donné une représentation identique à celle donnée en a)**. Ceux (plutôt rares) qui avaient tracé un pointillé en a) ont tracé le même pointillé en b). Les élèves qui avaient écrit $(2, f(2))$ à côté du point illustré en a) ont pour la plupart écrit $f(3)$ ou $(3, f(3))$ à côté du point illustré en b).

Le tableau suivant résume les erreurs observées à cette question.

TABLEAU 3.30
Exemples d'erreurs dans la représentation de $f(3)$, pour 125 élèves

Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
Le point de coordonnées $(3, f(3))$. La représentation est identique à celle donnée en 7 a), avec ou sans pointillé: **aucun signe graphique ne distingue *ordonnée* et *point*.**		61
Un autre point.		5
Autres erreurs.		7

Question 7 b): Commentaires

Comme on peut le constater, **la moitié des élèves ont confondu «*point*» et «*ordonnée*»**. Ceci correspond au résultat de la question 16 de la partie B où on demandait «*à quoi correspond le nombre* $f(5)$ *sur le graphique cartésien d'une fonc-*

tion f?». 55% des élèves ont coché la réponse: *«à un point de la courbe de f»*. On verra en 7 d) des conséquences d'une telle confusion.

On remarque aussi que douze élèves ont commis des erreurs importantes (contre six à la question précédente). Nous n'avons pas eu l'occasion de les interviewer, mais l'examen de leurs réponses, presque toutes différentes les unes des autres, laisse penser que la plupart d'entre eux avaient une totale incompréhension du symbole $f(3)$.

Si, en plus des réponses erronées, on considère les 22 absences de réponse, on obtient un taux de non-réussite de 76% pour cette question. C'est-à-dire que **trois élèves sur quatre n'ont pas représenté correctement $f(3)$ sur le graphique donné**. Au moment où ils ont passé le test, ces élèves ne faisaient donc pas le lien entre le graphique cartésien d'une fonction et les symboles utilisés pour désigner des éléments de ce graphique.

L'analyse des réponses erronées données en 7 d) permet de voir des conséquences importantes de cette incapacité à associer les éléments du graphique cartésien aux symboles correspondants.

Question 7 d): Exemples d'erreurs

Dans cette question, on demandait

- *de représenter clairement l'expression $f(3)-f(1)$ sur le graphique donné et*
- *d'écrire cette expression à l'endroit qui convenait sur le graphique.*

Environ 30% des élèves n'ont pas répondu à la question et plus de la moitié ont donné une mauvaise réponse. Donc 17% seulement ont donné une bonne réponse.

Parmi ceux qui ont répondu, environ la moitié n'ont pas respecté la deuxième condition. Comme précédemment, nous n'en avons pas tenu compte dans la mesure où l'illustration était claire. Cinq cas seulement ont été classés dans les réponses erronées parce que l'illustration était ambiguë ou incomplète.

Les erreurs sont très variées, mais deux prédominent. Dans le premier cas, les élèves ont illustré **l'arc de la courbe de f entre les points d'abscisses $x = 1$ et $x = 3$**. Dans le second, ils ont mis en évidence **le point de coordonnées $(2, f(2))$**.

Le tableau suivant résume les erreurs observées à cette question.

TABLEAU 3.31

Exemples d'erreurs dans la représentation de $f(3) - f(1)$, pour 125 élèves

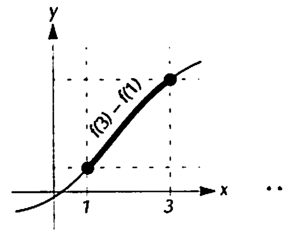
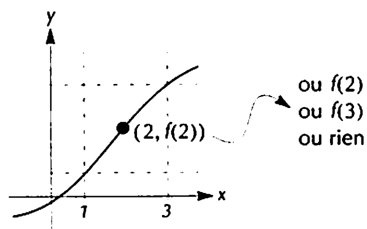
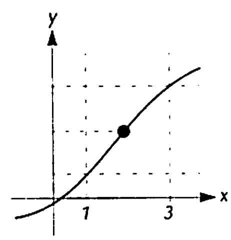
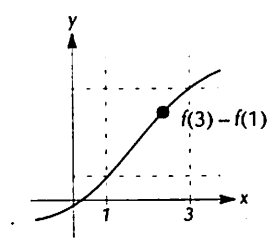
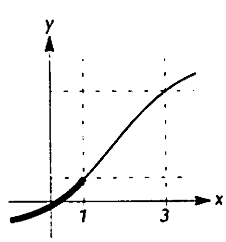
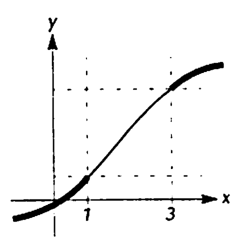
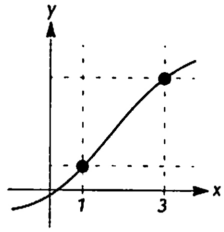
Type d'erreurs	Exemples	Nombre d'élèves
L'arc de la courbe de f entre les points $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$. Les points extrémités ne sont pas nécessairement inclus ou mis en évidence.	 ...	17
Le point de coordonnées $(2, f(2))$. À côté du point, il est écrit: $(2, f(2))$, $f(2)$, $f(3) - f(1)$, ou rien du tout.		16
Le point de la courbe de f pour lequel $f(x)$ est le milieu de $f(1)$ et $f(3)$. Le point est mis en évidence ou non par un pointillé.		6
Le point de la courbe de f pour lequel $f(x) = f(3) - f(1)$.		6
Une portion de la courbe de f autre que l'arc compris entre les points de coordonnées $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$.	  ...	6

TABLEAU 3.31 *(Suite)*

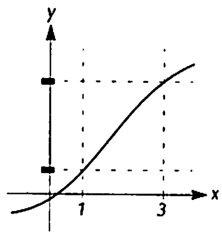
Exemples d'erreurs dans la représentation de $f(3) - f(1)$, pour 125 élèves

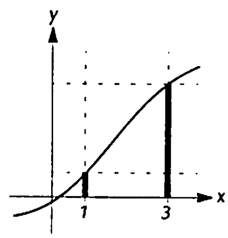
<table>
<tr><th>Type d'erreurs</th><th>Exemples</th><th>Nombre d'élèves</th></tr>
<tr><td>Les points de coordonnées $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$, sans légende ni rien d'autre.</td><td>



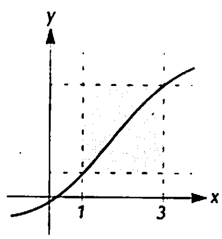
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Réponses ambiguës ou incomplètes: les ordonnées $f(1)$ et $f(3)$, sans légende ni rien d'autre.

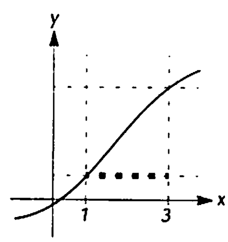
Les ordonnées sont illustrées comme position sur l'axe vertical ou comme longueurs de segments verticaux.</td><td>





</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Autres erreurs.</td><td>





...</td><td>7</td></tr>
</table>

Question 7 c): Commentaires

Compte tenu du nombre élevé d'erreurs observées dans la représentation de $f(3)$, on ne s'étonnera pas que tant d'élèves n'aient pas su représenter correctement l'expression $f(3) - f(1)$. Si on ne connaît pas la correspondance entre les éléments de base du graphique cartésien d'une fonction et les symboles utilisés pour les désigner, on peut difficilement faire le lien entre des combinaisons de ces éléments et les symboles correspondants.

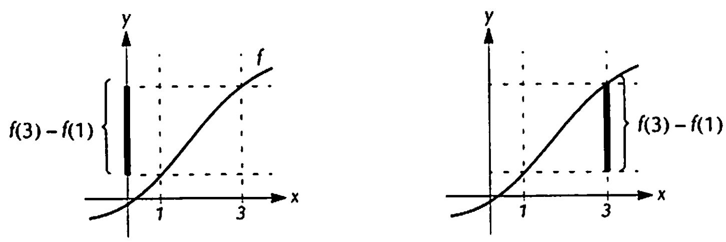
Il est cependant inquiétant de constater à quel point la **confusion entre un point d'une courbe et l'ordonnée de ce point** peut entraîner les élèves sur de mauvaises pistes. Si on analyse les types d'erreurs qui apparaissent dans le tableau précédent, on voit que le fait d'avoir associé $f(1)$ et $f(3)$ aux points de coordonnées $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$ sur la courbe de f a amené les élèves à toutes sortes d'interprétations erronées pour la différence $f(3) - f(1)$.

Ainsi, dix-sept élèves ont associé $f(3) - f(1)$ à l'arc de la courbe de f compris entre les points de coordonnées $(1, f(1))$ et $(3, f(3))$. Suivant leur logique, «*la différence entre* $f(3)$ *et* $f(1)$» devenait graphiquement: «*la partie de la courbe comprise entre les deux points*».

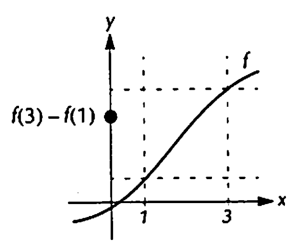
Suivant une autre logique, vingt-huit élèves ont associé $f(3)-f(1)$ à un point de la courbe de f: «$f(3)$ *et* $f(1)$ *sont des points de la courbe, alors* $f(3)-f(1)$ *est aussi un point de la courbe...*» Pour la majorité d'entre eux, ce point avait pour coordonnées $(2, f(2))$. Peut-être parce que $3-1 = 2$ ...

Mais on conviendra que, quelle que soit la logique suivie, les élèves qui ont commis ces erreurs ont un sérieux handicap dans les cours de mathématiques où on utilise beaucoup la notation $f(x)$, notamment dans les cours où une partie importante de la compréhension repose sur **l'habileté à visualiser** ou, plus précisément, sur l'habileté à passer du langage symbolique au langage graphique.

Il n'y a pas que les mauvaises réponses qui nous ont étonnés dans cette question, mais aussi une partie des bonnes réponses. Nous nous attendions en effet à ce que les élèves associent $f(3)-f(1)$ à **la longueur d'un segment vertical**, comme sur l'un ou l'autre des graphiques suivants:



Or huit élèves (sur les 21 qui ont donné une bonne réponse) ont plutôt illustré une **position sur l'axe des *y***, comme sur le graphique suivant:



Cette réponse est bonne, c'est bien sûr, mais la seule vision des nombres comme une position sur les axes n'est pas commode pour interpréter ou visualiser des expressions de la forme:

$$f(b)-f(a)\ ;\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si on se fie aux résultats de la question 16 de la partie B, il semble que **peu d'élèves associent les nombres à des longueurs**. En effet, à la question:

«Sur le graphique cartésien d'une fonction f, le nombre f(5) est représenté par

a) un point sur la courbe de f

b) une abscisse

c) une ordonnée

d) une longueur sur l'axe horizontal

e) une longueur sur l'axe vertical»,

38% seulement des élèves ont coché «une longueur sur l'axe vertical», alors que **55% ont coché *«un point sur la courbe de f»***. Il est malheureux de constater que la confusion entre *un point* et *l'ordonnée de ce point* surpasse la vision correcte de $f(5)$ comme une longueur sur l'axe vertical.

Pour plus d'informations sur le thème de la notation *f*(*x*), en liaison avec la représentation graphique, on peut consulter les résultats des questions 16 et 20 de la partie B, à la section 4.5.

Question 7: Résumé

En résumé, nous croyons avoir identifié, avec la question 7, **une cause importante des difficultés des élèves dans les cours de calcul différentiel et intégral**. En effet, beaucoup de concepts y sont traités aussi bien en langage naturel qu'en langage symbolique ou en langage graphique. Il suffit de penser, par exemple, aux concepts de *limite*, de *variation* de fonction, de *taux de variation moyen* ou de *taux de variation instantané (dérivée)*. Dans chacun de ces cas, le concept peut être expliqué ou défini en langage naturel, illustré graphiquement, ou associé à une expression symbolique. Pour qu'un élève **comprenne vraiment**, dans un tel cours, il est donc essentiel qu'il sache **traduire correctement d'un langage à un autre**, du langage naturel au langage graphique ou au langage symbolique, et inversement. Or, comme on a pu le constater dans cette question (et dans les précédentes), un grand nombre d'élèves font des **erreurs de traduction dans les situations les plus élémentaires**, surtout lorsque la traduction met en cause les langages graphique et symbolique.

De plus, les expressions symboliques que l'on rencontre dans les cours de calcul différentiel et intégral utilisent abondamment **la notation *f*(*x*)**. Pensons par exemple à la définition de la dérivée ou aux théorèmes qui en découlent. Or on a vu qu'il y avait **beaucoup de confusion chez les élèves avec cette notation**, notamment la confusion *«point–ordonnée»*. S'ils ne saisissent pas le sens du symbole $f(x)$, comment peuvent-ils déchiffrer des expressions, telles que:

$$\lim_{x \to a} f(x)\ , \quad f(b) - f(a)\ , \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\ ?$$

Comment peuvent-ils visualiser ou représenter graphiquement de telles expressions s'ils ne voient pas les nombres comme des longueurs, mais uniquement comme des positions sur les axes? Comment peuvent-ils interpréter de telles expressions s'ils associent le symbole *f*(*a*) à un point de la courbe de *f* plutôt qu'à l'ordonnée de ce point? On a vu, à la question 7 d), l'importance des erreurs occasionnées par cette confusion dans le cas d'une expression pourtant assez simple: $f(3) - f(1)$.

Si les élèves ne sont pas capables de déchiffrer ni de visualiser de telles expressions symboliques, ils risquent fort de les manipuler sans comprendre et de faire des erreurs de calcul ou d'interprétation. Certains parviennent à fonctionner en *photographiant* chacune de ces expressions symboliques et en les mémorisant comme autant de *pictogrammes* différents. Mais, pour d'autres, le cours devient rapidement incompréhensible, et c'est alors leur réussite qui est en jeu.

Une grande partie du problème réside dans le fait que **les élèves qui ont ces lacunes l'ignorent, ainsi que leurs professeurs**. À leur arrivée au collégial, ils croient généralement comprendre, surtout s'ils ont eu de bons résultats au niveau secondaire. Les professeurs, de leur côté, ignorent souvent l'existence de lacunes ou de confusions chez leurs élèves; ils ne sont donc pas en mesure de les aider comme ils le pourraient.

Même lorsque les élèves et les professeurs en sont informés, comme ce fut le cas avec les groupes qui ont passé le test à l'automne 1995, **il n'est pas facile de corriger en quelques heures des lacunes ou des mauvaises habitudes ancrées** depuis plusieurs mois ou depuis plusieurs années. Nous avons pu le constater en interviewant des élèves environ deux mois après le test. Certains d'entre eux avaient toujours les mêmes lacunes et faisaient encore des erreurs similaires à celles qu'ils avaient faites dans le test. Les professeurs avaient pourtant corrigé le test en classe et étaient revenus sur des points importants à plusieurs reprises.

À cet égard, il est intéressant de souligner que, parmi les élèves interviewés deux mois après le test, ceux qui faisaient encore des erreurs similaires à celles relevées dans les questions 5 à 7 de la partie A du test ont avoué ne rien comprendre dans leur cours de mathématiques. À l'opposé, ceux qui ne faisaient pas ou ne faisaient plus ces erreurs étaient capables de parler de façon organisée de la matière traitée au cours et semblaient satisfaits de leurs résultats.

Ceci termine l'analyse des résultats de la partie A du *test faisant ressortir des difficultés langagières en mathématiques*. La section suivante résume les aspects importants soulevés dans l'analyse de cette partie.

3.5 Synthèse de l'analyse des résultats de la partie A du test

Plusieurs points importants sont à retenir à la suite de l'analyse des résultats de la partie A du test.

- Le recours à des questions ouvertes a permis de découvrir l'éventail des erreurs langagières et des conceptions erronées des élèves sur plusieurs notions mathématiques.
- Parmi les erreurs identifiées dans cette partie, les plus importantes concernent le langage graphique, et plus particulièrement la traduction du langage naturel ou du langage symbolique au langage graphique.
- Beaucoup d'élèves confondent un point d'une courbe et l'ordonnée de ce point.
- Un grand nombre d'élèves ont une idée confuse de la notion de fonction. Dans l'interprétation graphique de cette notion, certains confondent fonction et pente, d'autres confondent fonction et abscisse, ou encore fonction et coordonnées.
- Beaucoup d'erreurs relevées concernent la notation f(x).
- De nombreuses erreurs de sens des termes ou des symboles mathématiques ont été relevées.
- Beaucoup d'erreurs syntaxiques ont été relevées, même dans le cas d'énoncés très simples.
- En traduisant du langage naturel au langage symbolique, beaucoup d'élèves calquent l'écriture symbolique sur la syntaxe française.

En résumé, la partie A du test a été un instrument extrêmement important dans l'identification des erreurs de nature langagière en mathématiques (premier objectif de la recherche). Aussi, constitue-t-elle un outil intéressant pour les professeurs qui désirent explorer les forces et les faiblesses langagières des élèves qui entrent au collégial.

Le chapitre suivant porte sur la partie B du test. Constituée de questions à choix multiple, elle revient sur certains aspects langagiers déjà traités, mais elle en couvre aussi beaucoup d'autres, notamment en ce qui concerne le langage symbolique.

Chapitre 4

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques.

PARTIE B:
Questions à choix multiples

L'objectif visé dans la Partie B du test est de vérifier dans quelle mesure certaines erreurs langagières en mathématiques, décelées dans la première partie de cette recherche, sont répandues chez les élèves de collège I. Pour ce faire, nous avons fait passer le test aux 625 élèves du collège Jean-de-Brébeuf inscrits dans un premier cours de mathématiques à l'automne 1995; de ce nombre, 7 ont quitté les cours de mathématiques la première semaine. Les résultats discutés dans ce chapitre sont ceux de la population testée.

4.1 Schéma d'analyse des résultats de la Partie B

Les questions de la Partie B ne seront pas toutes scrutées et analysées. Le lecteur trouvera, en annexe 8, l'énoncé de chacune de ces questions.

Pour chacune des questions de la partie objective, on proposait aux élèves un choix de cinq réponses. Il pouvait y avoir aucune, une, deux, trois, quatre ou cinq bonne(s) réponse(s) par question. On demandait à l'élève de noircir, sur la feuille de réponses, tous les cercles correspondant à de bonnes réponses. Ainsi, pour chacune d'elles, nous obtenons 2^5 combinaisons de réponses possibles. L'annexe 11 donne la répartition des 625 élèves, selon la combinaison de réponses, pour chacune des questions de la partie B du test. Bien entendu, pour chacune de ces questions, le lecteur s'il fait le décompte, peut obtenir à l'occasion, un nombre légèrement inférieur à 625, ce qui signale le rejet pour cette question de quelques réponses d'élèves.

Pour les questions analysées, on donne d'abord l'énoncé de la question, puis les pourcentages que nous expliquerons dans la présentation de la première question analysée. L'annexe 10 informe de la répartition des élèves, selon le programme et selon le choix de réponses, pour chacune des questions analysées.

4.2 Questions portant sur la langue naturelle en mathématiques

Dans cette section sont regroupées quelques questions de la partie B qui portent essentiellement sur la langue naturelle. Certaines commandent une réponse en langage graphique ou symbolique; cependant, chacune d'elles est formulée en langage naturel et fait ressortir des aspects langagiers de nature sémantiques ou syntaxiques, susceptibles de causer des difficultés aux élèves.

Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont: 13,19 et 41.

4.2.1 Résultats de la question 13

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Question 13 Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	91%	1)	Si un nombre est entier, alors il est réel.	●	●	●	●
24%		2)	Si un nombre est réel, alors il est rationnel.	○	○	●	●
	78%	3)	Un nombre réel est irrationnel s'il n'est pas rationnel.	●	●	●	●
	89%	4)	Un nombre entier est pair si et seulement si ce nombre est divisible par 2.	●	●	●	●
47%		5)	Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est limité.	○	●	○	●
			65% des élèves	28%	25%	7%	5%

Afin de rendre plus compréhensible la lecture de ce tableau, nous détaillons chacun des résultats.

Dans la partie de gauche du tableau:

91% des élèves ont indiqué que la première réponse est vraie.

24% des élèves ont indiqué que la deuxième réponse est vraie alors qu'elle est fausse. Nous avons mis en retrait ce résultat.

78% des élèves ont indiqué que la troisième réponse est vraie.

89% des élèves ont indiqué que la quatrième réponse est vraie.

47% des élèves ont indiqué que la cinquième réponse est vraie alors qu'elle est fausse. Nous avons mis en retrait ce résultat.

Les énoncés 1, 3 et 4 sont vrais. Dans la partie droite du tableau, nous l'avons indiqué en noircissant les cercles appropriés. De plus, nous avons donné le pourcentage des élèves ayant fait ce choix. Ainsi:

28% des élèves ont indiqué que les énoncés 1, 3 et 4 sont vrais.
25% des élèves ont indiqué que les énoncés 1, 3, 4 et 5 sont vrais.
7% des élèves ont indiqué que les énoncés 1, 2, 3 et 4 sont vrais.
5% des élèves ont indiqué que les énoncés 1, 2, 3, 4 et 5 sont vrais.

65% des élèves ont choisi, soit la bonne combinaison, soit l'une des mauvaises combinaisons les plus fréquentes.

Cette question porte sur le langage naturel et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était de connaître l'aisance avec laquelle l'élève pouvait vérifier la relation entre deux formes propositionnelles (conditionnelle ou biconditionnelle). Un résultat marquant est celui obtenu au cinquième énoncé où

47% des élèves sont d'avis qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est limité.

4.2.2 Résultats de là question 19

Question 19

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

La ***définition*** du nombre π est:

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	60%	1)	le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle.	●	○	○	●
16%		2)	l'aire d'un disque circulaire de diamètre 1.	○	○	○	○
58%		3)	3,1416	○	●	●	●
36%		4)	180°	○	○	●	○
9%		5)	*sin* (1)	○	○	○	○
			58% des élèves	24%	13%	11%	10%

Cette question porte sur le langage naturel et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique. Par cette question, nous voulions vérifier si le sens accordé au mot «définition» était connu des élèves. C'est-à-dire s'ils savaient, entre autres choses, que, pour définir π, on doit utiliser des termes connus. Les réponses obtenues nous portent à croire qu'ils ne savent pas ce que signifie «définir». Ceux qui ont donné 3,1416 comme définition ont confondu définition et approximation. De même, ceux qui allèguent que 180° est la définition de π ont des difficultés avec le concept d'égalité. Ainsi,

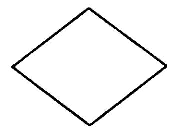
> *«avant toute chose, pour que le signe "=" ait un sens, il ne peut être utilisé qu'entre des objets de même nature: nombre-de = nombre-de»* (Baruk 1992:389).

Ici, à un angle de π radians correspond un angle de 180 degrés.

Même si 60% des élèves ont choisi correctement l'énoncé 1 pour définir π dans leur combinaison de réponses, seulement 24% ont su donnés la réponse exacte. Les quatre combinaisons les plus fréquentes que nous avons exposées nous permettent de connaître les réponses de 58% des élèves. Les combinaisons les plus fréquentes qui viennent après celles-ci, et qui comportent au <u>moins</u> les énoncés 1, 3, et 4, correspondent à 11% de l'ensemble des réponses. De même près de 10% des élèves ont donné dans leur combinaison de réponses au <u>moins</u> les énoncés 1 et 2. Curieusement, près d'un élève sur 10 donne sin(1) comme étant une définition de π.

4.2.3 Résultats de la question 41

Question 41



Cette figure est

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse	Pour chacune des figures proposées aux questions 40 à 46, noircissez le ou les cercles correspondant à de bonnes réponses.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	91%	1) un quadrilatère	●	●	●	●
	76%	2) un parallélogramme	●	●	○	○
	71%	3) un polygone	●	○	●	○
7%		4) un polyèdre	○	○	○	○
1%		5) aucun de ces cas	○	○	○	○
		83% des élèves	52%	11%	11%	10%

Cette question porte sur les langages naturel et graphique et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique. Par cette question, nous voulions vérifier si le sens accordé au mot définissant les figures géométriques était connu des élèves.

Nous connaissons le choix de 83% des élèves, c'est-à-dire 52% pour la première combinaison, 11% pour la seconde, 11% pour la suivante et 10%pour la dernière. Ainsi, nous pouvons déduire que:

11% des élèves reconnaissent qu'un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.

11% des élèves reconnaissent qu'un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux est un parallélogramme.

52% des élèves reconnaissent qu'un quadrilatère est un polygone à quatre côtés et que, si ces côtés sont parallèles deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.

Même si 91% des élèves semblent reconnaître que la figure proposée est un quadrilatère, à peine un peu plus de 63% sauraient donner correctement sa définition.

Pour au moins 20% des élèves, la définition de «polygone» ne semble pas indispensable pour définir un quadrilatère.

4.3 Questions portant sur le langage symbolique

Nous avons regroupé dans cette section les questions de la partie B du test qui portent principalement sur le langage symbolique. Si l'énoncé de ces questions comporte toujours une partie en langage naturel, la réponse demandée aux élèves est soit un symbole, soit une expression symbolique. Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont, dans l'ordre 2, 3, 10, 17 et 15.

4.3.1 Résultats de la question 2

Question 2

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Parmi les égalités suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies quelles que soient les valeurs de a et b ? Noircissez le ou les cercles correspondants.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
8%		1)	$(a-b)^2 = a^2 - b^2$	○	○	○	○
	79%	2)	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$	●	●	○	●
35%		3)	$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$	○	●	○	○
	96%	4)	$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$	●	●	●	●
28%		5)	$(a-b)^2 = (a-b)(a+b)$	○	○	●	●
			77% des élèves	43%	19%	8%	7%

Cette question porte sur le langage symbolique et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était de vérifier si l'élève sait ce que signifie $(a - b)^2$ ou $(a+b)^2$ et s'il sait développer ces expressions ou les retrouver par factorisation.

Nous connaissons le choix des combinaisons de 77% des élèves. Le taux de réussite de 43% est relativement faible puisque cette question comporte des énoncés qui sont normalement vus et revus au cours secondaire. Il est surprenant de constater que l'énoncé 3: $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ ait causé des difficultés à 35% des élèves. Ce type d'erreurs est commenté par Assude (1989:24) lorsqu'elle mentionne que cette difficulté langagière provient d'un transfert de connaissance du domaine de la linéarité des fonctions $f(x+y) = f(x) + f(y)$ à celui des racines.

Il est réjouissant de voir que seulement 8% des élèves affirment que la proposition suivante $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ est vraie. Cela explique le score peu élevé (79%) attribué à l'énoncé $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$, alors que l'énoncé 4 a obtenu 96% de réussite.

Que 28% des élèves croient que l'énoncé: $(a-b)^2 = (a-b)(a+b)$ est juste, nous laisse perplexes. Il est difficile d'imaginer que plus d'un élève sur cinq ne possède pas cette identité.

4.3.2 Résultats de la question 3

Question 3

Quelle est ou quelles sont les expressions qui sont égales à $1 - 3x^{-2}$ quelle que soit la valeur de x, $x \neq 0$?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Expression	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
9%		1)	$-\frac{1}{3x^2}$	○	○	○	●
11%		2)	$\frac{1}{-3x^2}$	○	○	○	●
5%		3)	$\frac{-2}{x^2}$	○	○	○	○
47%		4)	$1-\frac{1}{3x^2}$	○	●	●	○
	48%	5)	$1-\frac{3}{x^2}$	●	○	●	○
			81% des élèves	36%	35%	6%	4%

Cette question porte sur le langage symbolique et les aspects langagiers visés sont d'ordre syntaxique. Le but était de tester l'habileté de l'élève à manipuler des exposants négatifs.

Ici, nous connaissons les choix de combinaisons de réponses de 81% des élèves. Les énoncés 1et 2 piègent un élève sur cinq. Dans l'énoncé 3, on peut voir plus facilement l'erreur de syntaxe commise. La question $1-3x^{-2}$ a été modifiée par l'élève pour la suivante $(1-3)x^{-2}$. Le plus étonnant est de constater la forte proportion d'élèves qui ont opté pour l'énoncé 4. Ceci dénote, qu'à la lecture, ils ont introduit mentalement des parenthèses et imaginé la question suivante $1 - (3x)^{-2}$ au lieu de répondre à la question posée $1 - 3x^{-2}$.

De plus, on constate que le même pourcentage d'élèves croient que le seul énoncé vrai parmi les cinq est l'énoncé 5 ou l'énoncé 4.

4.3.3 Résultats de la question 10

Question 10

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse	Parmi les énoncés suivants, lequel ou lesquels sont vrais quelles que soient les valeurs de a et b ? Noircissez le ou les cercles correspondants.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	66%	1) $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$	●	●	○	●
48%		2) $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$	○	●	○	●
54%		3) $a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$	○	●	●	○
	61%	4) $a = b \Longrightarrow 2a = 2b$	●	●	○	●
	69%	5) $2a = 2b \Longleftrightarrow a = b$	●	●	●	○
		56% des élèves	10%	20%	16%	10%

Cette question porte sur le langage symbolique et les aspects langagiers visés sont d'ordre syntaxique. Le but était de vérifier l'habileté des élèves à utiliser le signe " $\Rightarrow$ "d'implication logique et le signe " $\Leftrightarrow$ "d'équivalence logique.

Nous connaissons seulement 56% des choix de combinaisons de réponses des élèves. Cela signifie que, pour cette question, on a obtenu un grand éventail de combinaisons. À cet effet, il suffit de consulter l'annexe 11, qui donne la répartition des élèves, selon la combinaison de réponses, pour chacune des questions de la partie B du test. On constate qu'au moins un élève a opté pour chacune des 32 combinaisons possibles.

Le plus étonnant est de constater la forte proportion d'élèves qui ont jugé vrais les énoncés 1 et 2. Si nous observons à nouveau les résultats mentionnés à l'annexe 11, nous réalisons que 264 élèves ont choisi au moins ces deux énoncés et que, parmi eux, 107 ont refusé de considérer l'énoncé 3 comme étant vrai. La maîtrise de la substitution, comme le signale Reynes (1994:69), est essentielle pour que l'élève puisse reconnaître que, lorsqu'une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas nécessairement.

De même, 236 élèves ont mentionné que l'énoncé 5 était vrai et n'ont pas reconnu spontanément que l'énoncé 4 l'était aussi. De toute évidence, un étudiant sur six ignore le sens de l'implication logique.

4.3.4 Résultats de la question 17

Question 17

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

Le nombre $10^{3/2}$ est égal à:

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
5%		1) $\frac{10^3}{2}$	○	○	○	○
4%		2) $10 \times \frac{3}{2}$	○	○	○	○
	59%	3) $\sqrt{10^3}$	●	●	○	○
20%		4) $\sqrt[3]{10^2}$	○	○	●	○
	30%	5) $(\sqrt{10})^3$	●	○	○	●
		85% des élèves	20%	37%	18%	10%

Cette question porte sur le langage symbolique et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était de vérifier, entre autres choses, le sens que les élèves attribuent à l'expression $10^{3/2}$.

Les résultats obtenus montrent que les élèves éprouvent des difficultés avec l'écriture fractionnaire des nombres rationnels. En effet, seulement 59% ont su exprimer $10^{3/2}$ comme étant équivalent à $\sqrt{10^3}$, c'est-à-dire qu'ils ont su se servir de l'égalité suivante: $\frac{3}{2} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)$ pour établir l'équivalence. De même, 30% des élèves ont su exprimer $10^{3/2}$ comme étant équivalent à $(\sqrt{10})^3$, c'est-à-dire qu'ils ont su se servir de l'égalité suivante: $\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \times 3$ pour établir l'équivalence. L'égalité suivante: $3 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \times 3$ est nécessaire pour établir $(10^3)^{1/2} = (10^{1/2})^3$, de même que l'égalité: $(10^3)^{1/2} = (10^{1/2})^3$ est nécessaire pour établir $\sqrt{10^3} = (\sqrt{10})^3$. Que 20% des élèves optent pour l'énoncé 4 indique $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ ne savent pas écrire différemment une forme exponentielle en utilisant le symbole « $\sqrt{}$ ».

4.3.5 Résultats de la question 15

Question 15

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.
Si x est un nombre réel strictement positif et n est un entier strictement positif, alors:

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
14%		1)	$x^0 = 0$	○	○	○	○
4%		2)	$x^{-n} = -nx$	○	○	○	○
17%		3)	$x^{-n} = \frac{-1}{x^n}$	○	○	○	○
26%		4)	$x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^n}$	○	○	●	●
55%		5)	$x^n + x^n = x^{2n}$	○	●	●	○
			68% des élèves	23%	27%	10%	8%

Cette question porte sur le langage symbolique et les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était de vérifier, entre autres choses, le sens que les élèves attribuent aux expressions: x^0,........

Que 14% des élèves déclarent que $x^0 = 0$ n'est pas justifié, n'est pas surprenant. En effet, lorsque l'on dit que $x^0 = 1$, on ne fait aucun calcul, car comme le rappelle Baruk c'est

> «*un simple transfert d'élément neutre de la société des puissances à celle des nombres ordinaires* et la chose n'est pas évidente pour ceux qui appliquent des recettes» (1992:944).

Étonnant aussi de constater que 55% des élèves ont jugé vrai l'énoncé 5. Peut-être étaient-ils à la recherche d'un énoncé vrai? De plus, il est difficile d'affirmer que 23% des élèves ont donné la bonne combinaison, puisqu'un certain nombre d'entre eux n'a pas répondu à la question et ils sont inclus dans ce décompte. La lecture des résultats obtenus à l'annexe 11, question 15, nous permet de déduire que plus de 80% des élèves ont choisi, dans leur combinaison de réponses, les énoncés 3, 4 et 5.

4.4 Questions portant sur le langage naturel et le langage symbolique

Les questions retenues sont: 7,8, 9 et 24

4.4.1 Résultats de la question 7

Question 7

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse	Parmi les expressions suivantes, laquelle ou lesquelles sont des polynômes en *x*? Noircissez le ou les cercles correspondants.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	81%	1) $2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 10$	●	●	●	○
54%		2) $4x^{-2} + 3x^{-1} - 5$	○	●	●	○
39%		3) $5^x - 4x + 3$	○	●	○	○
55%		4) $x + 2x^{1/2} + 1$	○	●	●	○
	71%	5) $x^5 + 3x^4 - \sqrt{2}\,x - 1$	●	●	●	○
		65% des élèves	14%	25%	19%	7%

Les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique pour le langage naturel et syntaxique pour le langage symbolique. Par cette question, nous voulions vérifier si la définition de polynôme était bien connue des élèves.

La grande surprise est que 25% d'entre eux croient que les cinq énoncés représentent des polynômes en x. De plus, un élève sur deux ne sait pas que l'exposant affecté à la variable doit être un entier positif ou nul. De plus, 39% des élèves confondent fonction exponentielle et fonction polynomiale. Ces difficultés trouvent peut-être leur explication dans le fait que mentionne Baruk

> *«ces fonctions polynômes, alors qu'elles sont des objets, proposés au collège à des fins de calcul, de factorisation ou de résolution d'équations, ne le sont qu'implicitement; ceci fait que les notions essentielles de degré et de forme ne sont jamais abordées de front»* (1992:887).

Cela explique-t-il le fait que seulement 14% des élèves ont obtenu la bonne réponse?

4.4.2 Résultats de la question 8

Question 8

Soit le polynôme: $2x^3 + x^2 - 2x - 1$. Ce polynôme peut également s'écrire sous la forme suivante: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)\ (x - 1)$.

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	83%	1)	Ce polynôme est de degré 3.	●	●	●	●
19%		2)	Ce polynôme comporte 3 termes.	○	○	○	●
8%		3)	Ce polynôme a 4 zéros réels distincts.	○	○	○	○
	61%	4)	Ce polynôme a 3 zéros réels distincts.	●	●	○	●
	30%	5)	Ce polynôme a 3 facteurs du premier degré.	●	○	○	○
			66% des élèves	14%	32%	15%	5%

Cette question porte sur le langage naturel et le langage symbolique, les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique pour le langage naturel et syntaxique pour le langage symbolique. Par cette question, nous voulions vérifier si les définitions de degré, de terme, de zéro et de facteur d'un polynôme étaient bien connues des élèves.

En classant par ordre de compréhension chacune de ces définitons, nous observons que:

> Degré d'un polynône est la définition la mieux comprise puisqu'elle a obtenu un taux de réussite de 83%.
>
> Zéros réels et distincts d'un polynône est la définition qui vient en deuxième avec 61% de réussite.
>
> Facteurs du premier degré d'un polynône vient en troisième et obtient 30% de réussite.

Cependant, lorsque l'on prend la question dans son ensemble, on constate qu'à peine 14% des élèves donnent correctement la bonne combinaison. Cela signifie que l'ensemble des élèves connaît la signification de certains mots du langage naturel associés à la notion de polynôme, mais que ce vocabulaire n'est pas suffisamment intégré pour qu'ils puissent donner correctement la définition d'un polynôme.

4.4.3 Résultats de la question 9

Question 9

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Parmi les énoncés suivants, lequel ou lesquels sont équivalents à: $4 < x < 7$? Noircissez le ou les cercles correspondant.	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
1%		1)	x est plus petit que 4 et plus petit que 7.	○	○	○	○
17%		2)	x est plus grand que 4 ou plus petit que 7.	○	○	●	○
50%		3)	x est différent de 4 et de 7.	○	●	●	○
	85%	4)	x est compris entre 4 et 7 exclusivement.	●	●	●	○
	95%	5)	x est plus grand que 4 et plus petit que 7.	●	●	●	●
			85% des élèves	36%	32%	9%	8%

Cette question porte sur une traduction du langage symbolique au langage naturel. Les aspects langagiers visés sont surtout d'ordre syntaxique. Par cette question, nous voulions vérifier si la disjonction logique "ou" et la conjonction logique "et" étaient maîtrisées.

Les élèves qui affirment que:

la proposition **$4 < x < 7$** est équivalente à la proposition **xest plus grand que 4 ou plus petit que 7**, ont connu des difficultés langagières avec la disjonction et la conjonction.
Dix sept pourcent d'entre eux se trouvent dans cette situation.

Les élèves qui affirment que:

la proposition **$4 < x < 7$** est équivalente à la proposition **xest différent de 4 et de 7**, ont sans doute interprété la question de la façon suivante:
si **$4 < x < 7$**, alors **$x \neq 4$ et $x \neq 7$.**
La moitié d'entre eux se trouvent dans cette situation.

Lorsque nous analysons la deuxième combinaison la plus fréquente, c'est-à-dire les énoncés 2, 3, 4 et 5 considérés comme étant vrais, nous croyons que ces élèves ne connaissent pas la signification de **proposition équivalente** et que, pour eux, la difficulté langagière est à ce niveau.

4.4.4 Résultats de la question 24

Question 24

Du haut d'un édifice, on lance un objet vers le bas avec une vitesse initiale v_0. La distance (en mètres) parcourue par cet objet, t secondes après son lancement, est donnée par l'équation $d = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ où g est la force d'attraction terrestre ($g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$).

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.
Dans cette équation,

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	58%	1)	t est la variable indépendante.	●	●	○	○
14%		2)	g est une variable.	○	○	○	○
	45%	3)	v_0 est un paramètre.	●	○	○	●
8%		4)	t est une constante.	○	○	○	○
	76%	5)	d est la variable dépendante.	●	●	●	●
			65% des élèves	23%	23%	12%	7%

Cette question porte sur le langage symbolique et le langage naturel, les aspects langagiers visés sont surtout d'ordre sémantique. Le but était de vérifier le degré de compréhension des notions de «variable indépendante et dépendante», de «paramètre» et de «constante».

On constate que seulement 23% des élèves ont réussi correctement cette question et, pourtant, l'équation traitée fait l'objet d'étude, au secondaire.

Nous connaissons le choix des combinaisons retenu par 65% des élèves. Les autres choix sont distribués parmi les 28 autres combinaisons, cela dénote un flou dans la compréhension de ces notions.

Les deux mauvaises combinaisons faisant suite à celles déjà annoncées sont: aucune réponse (7%) et seulement l'énoncé 3 (6%).

> Le message est clair dans le premier cas: l'élève n'a aucune compréhension des termes, «variable indépendante», «variable dépendante», «paramètre» et «constante».
>
> Dans le cas suivant, il y a confusion entre variable et constante, ceci amène l'élève à choisir uniquement l'énoncé pour lequel il se sent bien à l'aise.

De plus, 14% des élèves sont d'avis que "g est une variable" alors que dans la question, il est dit que la valeur de g est $9{,}8\text{m/s}^2$. La notion de variable n'est vraiment pas acquise pour ce sous-groupe.

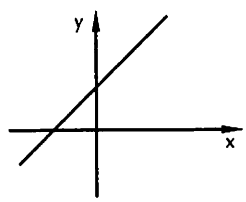
4.5 Questions portant sur le langage graphique

Cette section traite certaines questions de la partie B qui portent sur les graphiques cartésiens. On demande alors à l'élève d'identifier les équations correspondant à un graphique donné, de nommer, de représenter, l'objet graphique qu'on lui décrit ou représente. Les questions retenues pour fins d'analyse dans cette section sont les suivantes: 4, 16, 20 et 47

4.5.1 Résultats de la question 4

Question 4

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse	Noircissez le ou les cercles qui correspondent à une bonne réponse. L'équation de la droite représentée ci-contre est de la forme:	Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
5%		1) $y = mx^2 + b$	○	○	○	●
2%		2) $y = m$	○	○	○	○
	94%	3) $y = mx + b$	●	●	○	○
2%		4) $x = a$	○	○	○	○
	52%	5) $ax + by + c = 0$	●	○	○	○
		93% des élèves	48%	42%	2%	1%



Cette question porte sur le langage symbolique et le langage graphique; les aspects langagiers visés sont d'ordre syntaxique. Le but était d'identifier l'équation ou les équations pouvant décrire la droite représentée.

La question est relativement simple; cependant, un élève sur deux n'a pas reconnu l'énoncé 5 comme pouvant représenter l'équation d'une droite. Cela signifie que la compréhension est superficielle. L'élève s'accroche à un modèle qui lui est familier, qu'il peut reconnaître, sans pour autant posséder la signification des termes «variable», «constante» et «paramètre». Dans l'énoncé 3, 94% des élèves ont reconnu l'équation de la droite indiquée. Nous sommes persuadés que, si nous avions présenté l'équation de la droite en utilisant l'une des formes, $y = ax + b$ ou $f(x) = mx + b$, le pourcentage obtenu pour cet énoncé aurait été inférieur.

4.5.2 Résultats de la question 16

Question 16

Noircissez le ou les cercles qui correspondent à des bonnes réponses.
Sur le graphique cartésien d'une fonction *f*, le nombre *f*(5) est représenté par:

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
55%		1)	un point sur la courbe de *f*.	○	●	●	○
14%		2)	une abscisse.	○	○	○	○
	64%	3)	une ordonnée.	●	●	○	●
11%		4)	une longueur sur l'axe horizontal.	○	○	○	○
	38%	5)	une longueur sur l'axe vertical.	●	●	○	○
			61% des élèves	14%	17%	15%	15%

Cette question porte sur le langage graphique, le langage symbolique et le langage naturel. Les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique. Le but était d'identifier, de reconnaître et de nommer un objet mathématique faisant référence à un graphique.

Nous observons que 55% des élèves identifient f(5) à un point sur la courbe de f; cette erreur provient d'une confusion entre «point» et «ordonnée d'un point».
De même que, 14% des élèves croient que f(5) est une abscisse dénote chez eux une ambiguïté entre «ordonnée» et «abscisse».
De plus, 11% des élèves croient que f(5) est une longueur sur l'axe horizontal; ceci nous incite à consulter l'annexe 11 pour vérifier la cohérence entre les réponses données aux énoncés 2 et 4. Nous constatons qu'un élève sur deux est cohérent, c'est-à-dire que 6% des élèves croient que f(5) est une abscisse et f(5) représente une longueur sur l'axe horizontal.

Que 14% seulement des élèves donnent la réponse exacte montre que le langage mathématique présenté, même sous une forme simple, demeure complexe.

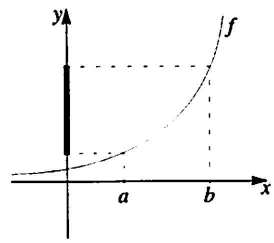
Nous connaissons le choix de 61% des élèves. En consultant la base de données, nous réalisons que la mauvaise combinaison succédant aux trois précédentes obtient l'accord de 13% de ceux-ci. Les élèves non identifiés (26%) font un choix parmi 17 mauvaises combinaisons possibles. Cela montre beaucoup d'incompréhension de la part de l'ensemble des élèves pour une question en apparence simple.

4.5.3 Résultats de la question 20

Question20

Noircissez le ou les cercles qui correspondent à une bonne réponse.
Sur le graphique ci-contre, la longueur du segment représenté en gras est:

% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse			Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
15%		1)	$b-a$	○	○	○	●
18%		2)	$f(b-a)$	○	●	○	○
5%		3)	$f(a)+f(b)$	○	○	○	○
	76%	4)	$f(b)-f(a)$	●	●	○	○
16%		5)	$(b, f(b)) - (a, f(a))$	○	○	○	○
			72% des élèves	51%	9%	6%	6%



Cette question porte sur le langage symbolique et le langage graphique, les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était d'identifier symboliquement l'objet graphique représenté.

Évidemment, après les réponses obtenues à la question 16, on comprend mieux la piètre performace des élèves à cette question. La moitié d'entre eux n'y ont pas répondu correctement .

En consultant la base de données, on constate que 35% des élèves ont répondu:

> à la question 16, que f(5) est une ordonnée,
> à la question 20, que f(b) - f(a) représente la longueur du segment en gras.

De même, 20% des élèves ont répondu :

> à la question 16, que f(5) est une longueur sur l'axe vertical,
> à la question20, que f(b) - f(a) représente la longueur du segment en gras.

Finalement, 17% des élèves ont répondu:

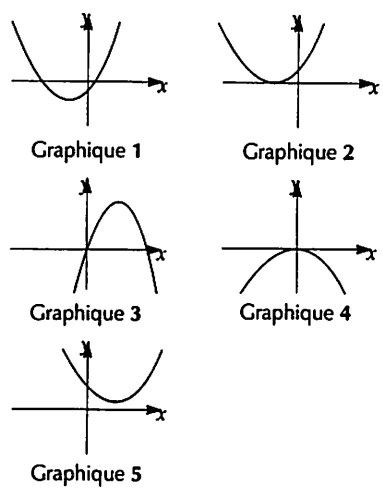
> à la question 16, que f(5) est une ordonnée **et** une longueur sur l'axe vertical,
> à la question 20, que f(b) - f(a) représente la longueur du segment en gras.

Analysée isolément, la question 20 nous laisse sur l'impression qu'un élève sur deux l'a bien comprise . Erreur! il n'a su que répondre correctement. Le croisement des questions 16 et 20 nous confirme que les connaissances acquises sont difficilement transférables.

4.5.4 Résultats de la question 47

Question47

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.
Parmi les graphiques suivants, celui ou ceux pour lesquels $a > 0$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$ sont:



% des élèves mauvaise réponse	% des élèves bonne réponse		Bonne combinaison	Mauvaises combinaisons les plus fréquentes		
	63%	1) Graphique 1	●	○	○	○
	74%	2) Graphique 2	●	○	●	○
13%		3) Graphique 3	○	○	○	○
8%		4) Graphique 4	○	○	○	○
	80%	5) Graphique 5	●	●	●	○
		77% des élèves	55%	9%	8%	5%

Cette question porte sur le langage graphique et le langage symbolique; les aspects langagiers visés sont d'ordre sémantique et syntaxique. Le but était d'identifier le ou les graphiques représentant une équation du second degré et vérifiant une condition donnée.

À en juger par les réponses, la question fut considérée comme étant plutôt difficile et, pourtant, elle vise des connaissances de base. Curieusement, trois graphiques vérifient la condition: a > 0, et la proportion d'élèves qui choisissent un graphique donné augmente au fur et à mesure que l'ordonnée du sommet de la fonction augmente. On voit donc ici la confusion qui existe entre la notion de fonction positive et la notion de courbure.

Chapitre 5

Types d'erreurs de nature langagière en mathématiques

Le premier objectif de cette recherche était de déceler les erreurs langagières (dans les langages naturel, symbolique et graphique) des élèves en mathématiques. Pour atteindre cet objectif, nous avons suivi plusieurs étapes qui ont mené à l'élaboration d'un *test faisant ressortir des difficultés langagières en mathématiques*.

Comme on a pu le voir aux chapitres 3 et 4, ce test fait ressortir un grand nombre et une grande variété de difficultés langagières. Il constitue donc un outil intéressant pour les professeurs de mathématiques qui souhaitent avoir une meilleure connaissance des forces et des faiblesses de leurs élèves.

Le test permet, par exemple, d'identifier rapidement des lacunes langagières communes à de nombreux élèves dans une classe. Avec cette information, les professeurs peuvent ajuster leur enseignement, réduire les problèmes d'incompréhension ou d'ambiguïté chez les élèves, et ainsi faciliter leur apprentissage. Le test permet aussi de dépister les élèves les plus faibles sur le plan du langage mathématique. S'il est passé assez tôt en début de session, il donne aux professeurs la possibilité d'intervenir à temps auprès d'eux.

Le test ne couvre cependant pas tous les types d'erreurs langagières en mathématiques. D'une part, nous ne pouvons pas prétendre avoir déterminé tous les types d'erreurs possibles, même si nous en avons identifié un grand nombre. D'autre part, compte tenu de la forme et de la durée du test, il n'a pas été possible d'y intégrer tous les types de difficultés langagières que nous avons relevées.

Par exemple, certaines difficultés langagières en mathématiques sont causées par la longueur ou par la complexité d'un énoncé. Pour faire une *bonne lecture* de tels énoncés, il faut y mettre le temps nécessaire. Or, pour que le test couvre un maximum de difficultés langagières différentes dans un temps raisonnable, il était difficile d'y inclure de tels énoncés.

Dans ce chapitre, nous voulons donc résumer l'ensemble des erreurs langagières que nous avons décelées tout au long de cette recherche, en les classant par type d'erreurs. Nous ne faisons pas cette synthèse dans un simple but de classification, mais surtout pour avoir une meilleure idée de l'éventail des difficultés langagières des élèves en mathématiques. Mieux nous connaîtrons leurs difficultés, plus nous serons en mesure d'intervenir pour faciliter leur apprentissage.

Dans un premier temps, nous expliquons comment nous avons procédé pour identifier et classer les erreurs, en commentant les limites d'une telle classification. Nous décrivons ensuite les types d'erreurs observés, en les définissant et en donnant des exemples dans chaque cas.

5.1 Processus d'identification et de classement des erreurs langagières

Nous avons amorcé la liste des erreurs langagières en mathématiques en analysant des copies d'examens et de travaux d'élèves à l'aide d'une grille préliminaire de types d'erreurs. Lorsqu'il y avait une erreur sur une copie, il fallait d'abord déterminer s'il s'agissait d'une erreur langagière ou d'une erreur d'un autre type. Chaque erreur langagière relevée était analysée pour déterminer le ou les langage(s) en cause (naturel, symbolique ou graphique) et les aspects langagiers visés: sémantique, syntaxique, de traduction ou autre.

Nous avons ainsi obtenu un début de liste d'erreurs, mais nous avons rapidement été limités dans notre analyse de documents. Lorsqu'il n'y avait pas de réponse à une question, par exemple, nous ne pouvions pas savoir ce qui avait amené l'élève à ne pas répondre. Dans les cas où la solution était erronée, il était souvent difficile de déterminer la nature de l'erreur commise. Même lorsque la solution était détaillée, il n'était pas nécessairement facile d'identifier le ou les mots ou symboles à l'origine de l'erreur.

Il est alors apparu nécessaire de rencontrer des élèves en entrevue pour qu'ils nous éclairent sur leurs erreurs ou leur absence de réponse à des questions. L'élaboration de la liste d'erreurs s'est donc poursuivie en combinant deux approches complémentaires: l'analyse d'examens et de travaux d'élèves et les entrevues individuelles. Cette façon de procéder nous a permis de mieux comprendre les types d'erreurs et de mieux les interpréter.

Nous avons réalisé d'autres entrevues avec des élèves dans les étapes suivantes de la recherche: pour valider et analyser les résultats du prétest et du test, pour évaluer l'importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques et pour établir des profils d'élèves faisant des erreurs de nature langagière en mathématiques. Chacune de ces entrevues a permis d'identifier ou de préciser des erreurs. La grille des types d'erreurs langagières en mathématiques s'est ainsi raffinée tout au long de la recherche.

Mais, même améliorée, cette grille des types d'erreurs ne suffit pas pour analyser les erreurs langagières des élèves à partir de leurs copies d'examens ou de travaux. Les professeurs qui souhaitent aider leurs élèves sur le plan de la langue y trouveront certainement des sources d'inspiration. Mais, pour diagnostiquer correctement les problèmes de chacun des élèves, ils devront aussi recourir à des entrevues individuelles. Pour illustrer ce point, voici quelques cas où une entrevue a permis d'identifier ou de préciser une erreur langagière.

5.2 Exemples d'erreurs langagières identifiées lors d'entrevues

Les premiers exemples présentés ici concernent des questions du test où un aspect langagier bien précis était visé. Sur la simple analyse des copies, beaucoup d'erreurs auraient été classées dans une même catégorie. Or, au cours des entrevues qui ont servi à valider ou à analyser les résultats du test, nous avons constaté qu'une même réponse erronée était parfois le résultat de problèmes langagiers différents. L'exemple suivant concerne le terme «diviseur».

5.2.1 Erreurs concernant le terme «diviseur»

Erreur sémantique

Dans une question portant sur le langage naturel, et plus précisément sur la sémantique, on demandait aux élèves de donner un exemple d'un *diviseur* de 12. Toutes les réponses erronées que nous avons observées à cette question étaient des *multiples* de 12, par exemple: 24, 36,... Il est possible que des élèves aient fait ici une erreur de distraction, en lisant ou en répondant trop rapidement. Mais il est peu probable que tous aient lu distraitement «multiple» au lieu de «diviseur», puisqu'à la question suivante, on leur demandait un exemple d'un *multiple* de 12.

Si on exclut les cas de distraction, on peut penser que les élèves qui ont donné ces réponses confondaient les termes «diviseur» et «multiple» ou, plus généralement, qu'ils ne connaissaient pas le *sens* du terme «diviseur». Dans ce cas, il s'agirait d'une **erreur sémantique**.

Erreur syntaxique

Or un élève qui avait donné 36 comme exemple d'un diviseur de 12 a justifié sa réponse en entrevue en disant: «*trente-six est un diviseur de douze parce que douze divise trente-six*». Si on analyse son explication, on constate qu'il a interverti «douze» et «trente-six» dans la deuxième partie de sa phrase. Il s'agit donc ici d'une **erreur syntaxique** et non d'une erreur sémantique. Une phrase correcte serait, par exemple: «*quatre* est un diviseur de douze parce que douze est divisible par *quatre*».

Les autres élèves qui ont donné une réponse erronée à cette question ont peut-être fait d'autres erreurs langagières. Pour le savoir, il aurait fallu les rencontrer tous afin qu'ils puissent nous expliquer ce qui les avait amenés à une mauvaise réponse. L'exemple rapporté ici suffit cependant à nous sensibiliser au fait qu'on ne peut réduire toutes ces erreurs à une question de sémantique. Se contenter d'insister sur le *sens* du mot «diviseur» ne suffirait sûrement pas dans le cas des élèves qui ont des problèmes de syntaxe. Voici un autre exemple.

5.2.2 Erreurs concernant l'expression «nombre irrationnel»

Erreur sémantique

Dans cette même question, portant sur la sémantique, on demandait aux élèves de donner un exemple d'un *nombre irrationnel*. Un élève qui avait donné comme réponse 1/3 a justifié son choix en entrevue comme ceci: «1/3 *est irrationnel parce qu'il est égal à 0,333...*». Dans l'explication qui a suivi, nous avons compris qu'il associait un nombre irrationnel à un *nombre dont le développement décimal est illimité*.

Dans la suite de l'entrevue, nous lui avons demandé si les nombres π; 1,10100100010000...; $\sqrt{2}$; $1,\bar{5}$ étaient des nombres irrationnels. Il a répondu correctement pour les premiers, puis a hésité. Il est alors revenu à 1/3 et a corrigé sa réponse initiale en disant que ce nombre était rationnel et non irrationnel. Il venait probablement de se souvenir de la caractéristique *périodicité*. Sans parvenir à énoncer clairement la définition d'un nombre rationnel ou d'un nombre irrationnel, il a tout de même pu classer correctement les autres nombres que nous lui avons proposés par la suite.

Dans ce cas, il était visible que l'élève avait oublié une partie de la définition d'un *nombre irrationnel* et qu'il suffisait de la lui rappeler pour qu'il se souvienne du *sens* de l'expression visée. Nous avons donc classé son erreur comme une **erreur sémantique** portant sur l'expression «nombre irrationnel».

Manque de précision ou de rigueur

À la même question, un autre élève a donné 3,1416 comme exemple d'un nombre irrationnel. En entrevue, il a justifié sa réponse ainsi: *«parce que π est irrationnel»*. Nous lui avons demandé s'il pensait que les nombres 3,1416 et π étaient égaux. Il a hésité: *«... Oui... bien presque»*. En lui faisant préciser sa pensée, nous avons réalisé qu'il avait donné 3,1416 comme réponse, croyant écrire π, c'est-à-dire 3,14159... Il pensait d'ailleurs que nous interpréterions sa réponse de la même façon, c'est-à-dire comme voulant dire 3,14159... ou π.

Dans la suite de l'entrevue, nous lui avons proposé d'autres nombres tels: $\sqrt{2}$; 0,333; 1,10100100010000...; $1,\bar{5}$; en lui demandant s'ils étaient rationnels ou irrationnels. Il a classé correctement chacun de ces nombres, mais, pour 0,333, il a expliqué sa réponse comme suit: *«c'est 1/3, alors c'est rationnel»*. Sa réponse était correcte, mais non son raisonnement.

En fait, cet élève savait ce qu'est un nombre rationnel ou un nombre irrationnel. Cependant, un **manque de précision ou de rigueur** l'amenait à ne pas porter attention à la présence ou à l'absence du signe «...» à la suite des nombres. Il confondait ainsi les nombres π et 3,1416, de même que 1/3 et 0,333.

Nous ne classons pas cette erreur de la même façon que la précédente, car ce n'est pas l'expression «nombre irrationnel» qui est en cause ici, mais plutôt le signe «...». En fait, nous avons constaté que cet élève connaissait le sens des trois points écrits à la suite d'un nombre. Son problème n'en était pas un de sémantique, mais plutôt de manque de précision ou de rigueur dans la lecture ou dans l'écriture. Il *voyait* le signe «...» à des endroits où il n'était pas écrit et ne le l'écrivait pas à d'autres endroits où il aurait dû apparaître.

Pour corriger le problème de cet élève, il n'aurait pas suffi de lui préciser le sens des expressions «nombre rationnel» et «nombre irrationnel». Il fallait plutôt le sensibiliser à une plus grande rigueur. Il était pertinent, dans ce cas, de lui faire réaliser qu'un manque de précision dans la lecture ou dans l'écriture pouvait entraîner de la confusion et amener à des erreurs.

Autres types d'erreurs

D'autres réponses erronées ont été observées à cette question, par exemple: 6,7; $3,\bar{5}$; $\sqrt{-2}$; $\sqrt{4}$; 3; 0;... N'ayant pas rencontré les élèves concernés, nous ne savons pas ce qui les a amenés à donner ces réponses.

À défaut de pouvoir préciser la nature de ces erreurs, on pourrait toutes les classer comme des erreurs sémantiques et justifier ce classement en disant que, si un élève ne peut pas donner un exemple correct d'un *nombre irrationnel*, c'est parce qu'il ne saisit pas le *sens* de cette expression. Cette décision peut satisfaire à un objectif de classification, mais elle n'aidera pas à trouver les meilleurs moyens pour corriger les lacunes des élèves concernés.

Par exemple, les élèves qui ont donné la racine carrée d'un nombre négatif ont peut-être confondu les termes «irrationnel» et «non réel». Peut-être ont-ils pensé qu'il suffisait de mettre le symbole «$\sqrt{\ }$ » au-dessus d'un nombre pour que le résultat soit irrationnel. Et que penser de ceux qui ont donné 6,7; $3,\bar{5}$; ou encore 0 ou 3? Il est possible que quelques-uns aient fait une erreur de distraction, mais il est peu probable qu'ils aient tous lu distraitement «rationnel» au lieu d'«irrationnel», puisqu'à la question précédente, on leur demandait un exemple d'un *nombre rationnel*.

Comme on peut le constater, plusieurs types d'erreurs langagières peuvent être produits par une question très simple visant un aspect langagier bien spécifique. Ainsi, la présente question en était une de sémantique et visait l'expression «nombre irrationnel». Mais, comme l'illustrent les exemples précédents, les mauvaises réponses à cette question ne sont pas nécessairement attribuables à des erreurs sémantiques.

En d'autres termes, il est peu probable qu'une même explication convienne à toutes les erreurs des élèves. À beaucoup d'entre eux, il ne suffira pas de rappeler ou de préciser la définition d'un nombre rationnel ou d'un nombre irrationnel pour régler leurs problèmes dans ce cas.

L'exemple suivant concerne le langage symbolique. Il illustre un autre cas où une entrevue avec un élève a permis de déceler une lacune langagière qui n'était pas apparente sur sa copie.

5.2.3 Erreur langagière dans un calcul de dérivée

L'examen concerné ici portait sur la dérivée (Mat. 103). Il y avait des questions de calculs techniques et d'autres questions portant sur des applications de la dérivée. La copie de cet élève nous a intrigués, car certaines questions étaient très bien réussies et d'autres ratées, aussi bien dans la partie technique que dans les applications. Nous avons soupçonné qu'il avait des problèmes au niveau du langage naturel, car les réponses qu'il avait données dans certains problèmes à contexte montraient qu'il avait mal interprété la question posée.

Erreur de dérivée

Mais ses calculs de dérivées surtout étaient étonnants. D'une part, ils étaient très détaillés, laissant deviner un élève soucieux de la rigueur dans les calculs et dans la présentation. D'autre part, ses solutions étaient ou très bien réussies, ou complètement ratées. En observant les questions réussies, nous étions portés à croire que cet élève maîtrisait bien les formules de dérivée. Par contre, les questions ratées nous amenaient plutôt à penser le contraire. Voici, par exemple, le début de son calcul pour la dérivée d'un quotient:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+3t+1}{4\,(t^2-1)}\right) = \frac{d\,(t^2+3t+1)}{dt} - 4\,\frac{d\,(t^2-1)}{dt}$$
$$= \ldots$$

De toute évidence, cet élève n'avait pas *utilisé la bonne formule* et on aurait pu conclure qu'il ne connaissait pas ou ne maîtrisait pas la *dérivée d'un quotient*. On aurait pu dire la même chose au sujet de la *dérivée des fonctions composées*, puisqu'il avait très bien réussi un calcul et s'était trompé dans deux autres.

Sur la foi de ces hypothèses, nous lui avons demandé en entrevue d'effectuer les dérivées suivantes:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{\sin x}\right)\ ,\quad \frac{d}{dx}\,(e^{2x})\quad ,\quad \frac{d}{dt}\,(\cos 4t)\quad ,$$

en expliquant à haute voix ce qu'il faisait. Il a réussi les calculs sans difficulté, en citant les formules qu'il utilisait: «*c'est la dérivée d'un quotient, alors...*» ou bien «*c'est la dérivée d'une fonction exponentielle, alors...*», etc. Il connaissait donc les formules de dérivée d'un quotient et d'une fonction composée.

Nous sommes alors revenus à la question de l'examen (le quotient précédent) et lui avons demandé d'effectuer à nouveau la dérivée demandée, en expliquant à haute voix ce qu'il faisait. Il a hésité, puis nous a dit qu'il ne savait pas quelle formule utiliser dans ce cas.

Erreur de syntaxe symbolique

Par les questions qui ont suivi, nous avons réalisé que l'élève n'était pas capable de décoder l'expression qu'il avait à dériver. Il ne pouvait pas dire s'il s'agissait d'une somme de fonctions, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance ou de tout autre forme d'expression. D'après lui, c'était «*tout ça à la fois*», d'où son incertitude sur la formule de dérivée à utiliser. Cet élève avait donc un **problème de syntaxe symbolique**. Plus précisément, il avait des difficultés avec *l'ordre de priorité des opérations*. Si une expression symbolique était le moindrement complexe ou élaborée, il ne savait pas comment la décoder.

Nous avons revu avec lui les règles de priorité des opérations, en lui faisant évaluer (à l'aide de sa calculatrice) des fonctions composées en une valeur donnée. Puis nous lui avons fait remarquer qu'en dérivant, on suivait l'ordre inverse des opérations suivi lors d'une évaluation. Nous lui avons ensuite demandé de refaire la dérivée du quotient initial. Il a réussi, cette fois, et sans aucune difficulté. Il a également réussi les calculs de dérivée relativement complexes que nous lui avons proposés par la suite.

L'erreur commise par l'élève à l'examen était donc de nature langagière et non de nature «mathématique» comme nous l'avions d'abord supposé en examinant sa copie. Il connaissait les formules de dérivée, mais une **erreur de syntaxe symbolique** l'avait amené à les utiliser de façon incorrecte. Grâce à l'entrevue, nous avons pu poser un diagnostic précis de son problème et, ainsi, l'aider à le régler rapidement.

En nous fiant uniquement à sa copie d'examen, nous aurions probablement suggéré à cet élève d'étudier et de pratiquer les formules de dérivée. Il serait peut-être parvenu à dériver correctement en faisant plusieurs exercices, mais cela aurait pris beaucoup plus de temps. De plus, n'ayant pas réglé son problème de décodage à la base, il l'aurait probablement retrouvé dans d'autres situations, comme dans la résolution d'équations ou dans l'intégration, par exemple. En effet, pour résoudre correctement une équation relativement complexe, il faut pouvoir la décoder et tenir compte de l'ordre de priorité des opérations. Il en va de même pour l'intégration, où la *reconnaissance de formes* est encore plus importante que pour la dérivation.

Problématique de l'identification des erreurs langagières

Les résultats d'entrevues rapportés précédemment illustrent bien la problématique de l'identification des erreurs langagières en mathématiques. Si on veut aider les élèves à corriger leurs erreurs, on ne peut pas se contenter d'analyser leurs copies d'examens et de travaux, il faut aussi les rencontrer individuellement. Cette démarche est complexe et prend du temps, mais elle est très profitable pour les élèves.

Dans ce sens, la grille des types d'erreurs que nous avons élaborée ne peut pas être considérée comme un *instrument* pouvant être utilisé seul pour analyser les erreurs langagières des élèves en mathématiques. La classification obtenue devrait sensibiliser les professeurs à l'étendue et à la variété des difficultés langagières en mathématiques. Elle suggère d'autres explications aux erreurs des élèves que celles auxquelles on pense habituellement et indique des pistes d'investigation, permettant ainsi de poser un meilleur diagnostic et d'intervenir adéquatement auprès des élèves.

À la section suivante, nous présentons la grille des types d'erreurs en expliquant comment les erreurs ont été classées et comment la grille a évolué au cours de la recherche. La grille est ensuite détaillée dans les sections subséquentes.

5.3 Grille des types d'erreurs de nature langagière en mathématiques

Nous avons commencé l'analyse des erreurs langagières en mathématiques à l'aide d'une grille générale, en tentant d'identifier en premier lieu le ou les langages en cause. Ainsi, une erreur langagière dans une partie de solution exprimée uniquement en langage symbolique (calcul algébrique, calcul vectoriel, calcul de dérivée, ...) était classée comme une erreur symbolique. De même, une erreur langagière résultant, par exemple, d'une mauvaise analyse d'une question exprimée en langage naturel était classée comme une erreur de français.

Dans les cas d'erreurs langagières impliquant plus d'un langage: naturel, symbolique et/ou graphique, nous avons essayé de voir si l'erreur était attribuable à un langage en particulier ou à la présence de deux ou des trois langages. Les entrevues ont été particulièrement utiles dans ces cas. Le tableau suivant résume cette classification générale des erreurs langagières en mathématiques.

TABLEAU 5.1

Erreurs langagières en mathématiques, suivant le ou les langages impliqués

Erreurs impliquant un seul langage:

- Erreurs dans l'utilisation du langage naturel
- Erreurs dans l'utilisation du langage symbolique
- Erreurs dans l'utilisation du langage graphique

Erreurs impliquant deux langages ou les trois:

- Erreurs de traduction d'un langage à un autre
- Erreurs dans l'utilisation en parallèle de deux ou trois langage
- Erreurs dans l'utilisation du langage *hybride*

Ce premier classement fait, nous avons ensuite essayé de préciser la nature des erreurs. Par exemple, une mauvaise interprétation d'une question en langage naturel était-elle attribuable à une mauvaise analyse de la question ou à un sens erroné attribué à un terme? Quels mots ou quelles parties de la phrase pouvaient être la source de l'erreur?

L'explication se trouvait parfois dans la copie de l'élève, mais beaucoup d'informations et de précisions ont été obtenues en entrevue. D'ailleurs, comme nous l'avons vu précédemment, il nous est arrivé de changer la classification d'une erreur à la suite des explications d'un élève.

C'est surtout grâce au test que nous avons élaboré (et qui a été analysé aux chapitres 3 et 4) que nous avons pu détailler la grille des types d'erreurs. Comme ce test faisait ressortir un grand nombre de difficultés langagières et qu'il a été administré à un grand nombre d'élèves, il nous a permis de découvrir et de préciser plusieurs types d'erreurs.

Notre classification ne prétend pas couvrir tous les types d'erreurs langagières possibles en mathématiques; elle est plutôt un résumé des différentes erreurs que nous avons observées tout au long de la recherche. Pour chacun des langages (naturel, symbolique et graphique) les erreurs ont été classées en trois sous-catégories: les *erreurs sémantiques*, les *erreurs syntaxiques* et les *erreurs mixtes*. Le tableau suivant résume cette classification.

TABLEAU 5.2
Erreurs dans l'utilisation d'un langage en mathématiques, par type d'erreurs et par langage

	Langages		
Types d'erreurs	**Langage naturel**	**Langage symbolique**	**Langage graphique**
Erreurs sémantiques			
Erreurs syntaxiques			
Erreurs mixtes ou autres erreurs			

Dans les sections suivantes, nous détaillons chacune des sous-catégories, en les définissant et en donnant des exemples. Nous commençons par le langage naturel, continuons par le langage symbolique et le langage graphique. Nous terminons avec les cas d'erreurs attribuables à l'utilisation de plus d'un langage.

5.4 Erreurs dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques

Le langage naturel en mathématiques est composé de mots usuels, que l'on utilise dans la vie de tous les jours, et de termes scientifiques propres à la discipline. Comme le fait remarquer Jacobi (1993), les mots du langage usuel sont polysémiques et leur sens dépend fortement du contexte, alors que les termes scientifiques sont monosémiques ou monoréférentiels, ils ont un seul sens et renvoient à un unique référentiel, à une seule notion ou à un seul concept.

L'agencement des mots, dans le langage naturel en mathématiques comme dans le langage usuel, est soumis aux règles de la grammaire française qui sont très importantes en mathématiques, car le discours y est généralement concis et la rigueur omniprésente.

Nous traitons d'abord les erreurs sémantiques, dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques, ensuite les erreurs syntaxiques, puis les erreurs mixtes.

5.4.1 Erreurs sémantiques

Sémantique: définition

Le Nouveau Petit Robert définit la *sémantique* comme l'étude du langage considéré du point de vue du sens. La sémantique étudie les relations du signifiant au signifié, les changements de sens, la synonymie, la polysémie, la structure du vocabulaire (1993, p. 2068). Dans le Grand Dictionnaire de la langue française de Larousse, on mentionne que «longtemps restreinte à l'étude du sens des mots et à celle des conditions internes et externes de leurs changements, la sémantique s'étend désormais aux règles de représentation et d'interprétation sémantique des phrases» (1971-1978, p. 5444).

Une *erreur sémantique* est donc une *erreur de sens*. Par exemple, on commet une erreur sémantique dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques lorsqu'on attribue un *sens erroné* à un mot ou à une locution, ou lorsqu'on lui attribue un sens qui ne convient pas au contexte mathématique.

Sens erroné attribué à un terme mathématique

De nombreuses erreurs sémantiques observées dans les résultats du test ont été rapportées dans les sections ou chapitres précédents; par exemple: un sens erroné attribué à l'expression *nombre irrationnel*, ou aux termes *binôme* et *équation*, une confusion entre les termes *diviseur* et *multiple* d'un nombre, ou entre *fonction* et *pente*. Beaucoup d'erreurs sémantiques sur d'autres termes mathématiques tels: *dérivée, primitive, taux de variation, vecteur, matrice, médiane, etc.* ont aussi été observées.

Sens erroné attribué à un terme usuel

En fait, tous les termes mathématiques peuvent faire l'objet d'une erreur sémantique si on ne saisit pas leur sens précis. Mais les termes usuels n'échappent pas non plus à ce type d'erreurs. Beaucoup de mots tels: *définition, illustration, démonstration, justification, approximation,...* , ou encore: *et, ou, si ... alors,...* font l'objet d'erreurs sémantiques, même s'ils sont fréquemment utilisés en mathématiques.

Il n'est pas rare en effet que des élèves répètent en d'autres termes un énoncé qu'on leur demande de *justifier* ou donnent un exemple au lieu de *définir*. De même, une *démonstration* se résume souvent à une vérification dans un cas particulier.

On a une illustration de la non-maîtrise du sens du mot *définition* dans la question suivante, tirée de la partie B du test:

Question 19

La ***définition*** du nombre π est:

1) le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle.
2) l'aire d'un disque circulaire de diamètre 1.
3) 3,1416
4) 180 °
5) sin(1)

60% des élèves ont coché la bonne réponse, soit «le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle», mais 58% ont coché «3,1416», 36% ont coché «180 °», 16% ont coché «l'aire d'un disque circulaire de diamètre 1» et 9% ont coché «sin(1)». (Les élèves pouvaient cocher plus d'une réponse par question.) Seulement 24% des élèves ont bien répondu à la question, c'est-à-dire n'ont coché que la bonne réponse. Comme on peut le constater, le sens du mot «définition» n'est pas évident pour tous; ce mot avait pourtant été écrit volontairement en caractères gras dans la question pour attirer l'attention des élèves. L'erreur la plus fréquente ici a été de confondre *définition* et *approximation*.

Sens non approprié au contexte

Les erreurs sémantiques en mathématiques ne sont pas toujours causées par un «sens erroné». Il arrive que des élèves attribuent à un terme usuel un sens correct dans certaines situations, mais différent du sens qu'on lui attribue en mathématiques. L'exemple suivant illustre ce cas.

Un professeur avait donné à ses élèves un problème dont la solution était découpée en plusieurs étapes, la dernière se lisant comme suit:

g) Déduire que $\ln\left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{r}{100}$ si r est petit

Un élève avait très bien répondu aux questions a) à f), mais avait laissé la dernière en blanc alors qu'il avait tous les éléments pour conclure rapidement. En entrevue, il a expliqué qu'il n'avait pas répondu à la dernière question parce qu'il ne savait pas *«comment démontrer l'équation»*. Le sens qu'il attribuait au verbe *déduire* l'avait amené à considérer la question g) comme une nouvelle question, sans aucun lien avec les précédentes. Il avait cherché un point de départ pour sa *démonstration*, mais n'avait rien trouvé.

Invité à consulter un dictionnaire, il a réalisé que «déduire», en mathématiques, était synonyme de «conclure». Revenu à sa question, il est immédiatement allé voir les résultats précédents et a pu constater qu'il avait tout ce qu'il fallait pour terminer son problème. La précision du sens de la question, en l'occurrence celle du mot «déduire», avait déclenché chez lui le réflexe attendu.

On peut penser que l'élève aurait dû avoir le réflexe de consulter les résultats précédents, même avec son interprétation initiale (démontrer...) de la question, car l'enchaînement des questions était évident. Cependant, la question aurait aussi pu être formulée de façon plus spécifique; par exemple: «En utilisant les résultats précédents, déduire que...».

Ignorance d'un mot ou d'une expression

Il arrive aussi que des élèves fassent des erreurs en mathématiques ou ne comprennent pas une question parce qu'ils *ignorent totalement* le sens d'un mot ou d'une expression. En situation d'examen, ils demandent parfois l'aide du professeur, mais il leur arrive aussi de laisser la réponse en blanc parce qu'ils ont l'impression de ne pas comprendre l'ensemble de la question. Nous avons également classé ces cas dans les *erreurs sémantiques*, car il s'agit d'erreurs ou de difficultés en mathématiques causées par l'*ignorance du sens* d'un mot ou d'une locution.

Nous insistons particulièrement sur les erreurs sémantiques, car leurs conséquences sont importantes en mathématiques. En effet, il n'est pas facile de bien comprendre une notion lorsqu'on ne saisit pas le sens des termes utilisés pour la désigner ou pour en parler. Cela est vrai dans toutes les disciplines, mais particulièrement en mathématiques où la précision et la rigueur jouent un rôle important.

Nous passons maintenant à un deuxième type d'erreurs dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques: les erreurs syntaxiques.

5.4.2 Erreurs syntaxiques

Syntaxe: définition

Le Nouveau Petit Robert définit la *syntaxe* comme «l'étude des relations entre les formes élémentaires du discours (mot, syntagme); l'étude des règles qui président à l'ordre des mots et à la construction des phrases, dans une langue» (1993, p. 2193). Dans le Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, on définit la syntaxe comme «la partie de la grammaire décrivant les règles par lesquelles se combinent en phrases les unités significatives» (Dubois et autres, 1994, p. 468)

Erreur syntaxique

On commet donc une *erreur syntaxique* lorsqu'on ne respecte pas ces règles, c'est-à-dire lorsqu'on ne respecte pas la fonction ou la disposition des mots dans une proposition ou des propositions dans une phrase.

Il y a un très grand nombre d'erreurs syntaxiques possibles, car les règles sont nombreuses. En mathématiques, certaines de ces erreurs sont sans conséquences, dans la mesure où le message reste clair et n'est pas dénaturé. Par contre, si le message est modifié, ambigu ou carrément incompréhensible, à la suite d'une infraction à une règle de syntaxe, on dira que l'erreur ou la difficulté mathématique qui en résulte est attribuable à une erreur syntaxique.

De nombreuses erreurs syntaxiques dans l'utilisation du langage naturel ont été observées tout au long de cette recherche. Certaines ont été rapportées précédemment, en particulier dans l'analyse des résultats de la partie A du test. Nous résumons ici quelques exemples afin d'illustrer ce type d'erreurs en mathématiques.

Mauvaise disposition des mots dans une proposition

À la question: «Donnez un exemple d'un diviseur de 12», un élève a répondu: «36» et expliqué sa réponse comme suit:

> «Trente-six est un diviseur de douze parce que douze divise trente-six.»

La réponse erronée de l'élève est attribuable ici à une erreur syntaxique. En effet, en inversant «douze» et «trente-six» dans la deuxième partie de sa phrase, l'élève *a interverti le sujet et le complément* dans la proposition circonstancielle de cause, rendant la phrase fausse.

Mauvaise disposition des propositions dans une phrase

Dans une autre question, on donnait aux élèves les informations suivantes au sujet d'un groupe de personnes:

TABLEAU 5.3
Tableau de la question 17 de la partie A

	Fume	Ne fume pas	Total
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'as pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400

À partir de ces informations, on demandait:

> «Quelle proportion des fumeurs ont eu un accident cardiaque?»

Des élèves ont répondu 53/112 au lieu de 53/144. L'explication donnée en entrevue par l'un d'entre eux a montré qu'il avait interprété la question comme suit:

> «Quelle proportion des personnes qui ont eu un accident cardiaque sont des fumeurs?»

Il a mal analysé la question et *a inversé les éléments dans la phrase*. Cette erreur syntaxique l'a amené à répondre à une autre question que la question posée.

Erreurs logiques

Au sujet du même groupe de personnes, on avait aussi posé la question suivante:

> «Quelle proportion de ces personnes fument ou ont eu un accident cardiaque?»

Des élèves ont répondu 53/400 au lieu de 203/400. L'examen de leur réponse montre qu'ils ont attribué à la conjonction «ou» le rapport logique correspondant à la conjonction «et». Cette erreur syntaxique se traduit ici par une *confusion entre deux connecteurs logiques*.

Une erreur syntaxique similaire concerne l'expression «si..., alors...». Dans des phrases ainsi construites, beaucoup d'élèves intervertissent les deux propositions ou pensent qu'elles sont interchangeables. Dans les deux cas, il en résulte une erreur de logique. En mathématiques, une telle erreur est importante, car beaucoup de résultats sont énoncés de cette façon.

Mauvaise fonction attribuée à un mot dans une phrase

Lorsque les élèves décodent mal une question, on constate souvent qu'ils ont mal identifié les mots-clés de la phrase. Leur attention est parfois attirée par un mot, ce qui a pour effet de les distraire du reste de la phrase. Par exemple, dans une question d'examen où on demandait de donner l'équation de la tangente à une courbe en un point, quelques élèves ont donné comme réponse un *nombre* au lieu d'une *équation*. L'analyse de leur solution indique qu'ils ont pensé à *la pente* de la tangente et non à *l'équation* de la tangente.

On a demandé en entrevue à un de ces élèves de nous dire ce qui était demandé dans la question. Il a répondu: «*la tangente*». Amené à préciser, il a ajouté «*la pente de la tangente*». Mais, relisant la question, il s'est ravisé: «*ah... c'est l'équation de la tangente*». En arrêtant son attention sur le mot «tangente», dans sa lecture initiale, l'élève avait mal identifié l'objet de la question. En d'autres termes, il avait mal identifié le noyau du complément d'objet direct (donner quoi?).

On a un exemple d'une erreur similaire dans la formulation du critère de croissance d'une fonction par des élèves. Ainsi, au lieu de l'énoncé suivant:

> «Si la dérivée d'une fonction est positive, alors la fonction est croissante»,

un élève disait plutôt ceci:

> «Si *une fonction* est positive, alors *elle* est croissante».

En laissant tomber le mot «dérivée» dans le début de la phrase, l'élève *changeait le sujet de la proposition conditionnelle*. Cette mauvaise identification du noyau du groupe nominal l'amenait à un énoncé mathématiquement faux.

Pronom relié au mauvais nom

La mauvaise détermination de l'antécédent des pronoms *il(s)* ou *elle(s)* entraîne également des erreurs syntaxiques qui se traduisent par des erreurs mathématiques. Par exemple, nous avons aussi noté cette formulation erronée du critère de croissance par des élèves:

> «Si la dérivée d'une fonction est positive, alors *elle* est croissante.»

Certains de ces élèves ont justifié leur formulation en disant que le pronom *elle* «*se rapportait au mot fonction*», car celui-ci était «*le dernier nom précédant le pronom*». Or on sait que, syntaxiquement, le pronom *elle* remplace le mot *dérivée* et non le mot *fonction*. L'énoncé des élèves est donc mathématiquement faux.

Usage d'un pronom à référent non-spécifié

D'autres élèves ont tellement recours aux pronoms *il*, *elle*, *lui*,..., que leurs énoncés sont souvent flous ou imprécis. Par exemple, nous avons noté cette autre formulation erronée du critère de croissance:

> «Si *elle* est positive, alors *elle* est croissante.»

Cette phrase est *imprécise*, car on ne sait pas à quoi réfère le pronom *elle*. Syntaxiquement, il remplace le même mot dans les deux parties de la phrase; en conséquence, l'énoncé est mathématiquement faux.

Il y a beaucoup d'autres cas d'erreurs syntaxiques dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques, dont *le mauvais usage ou l'absence de ponctuation*. Mais les exemples donnés suffisent à illustrer les conséquences de ce type d'erreurs sur la compréhension de la discipline. Nous passons maintenant au dernier type d'erreurs observées dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques: les erreurs mixtes.

5.4.3 Erreurs mixtes

Double erreur

Nous avons classé sous ce vocable les cas d'erreurs en mathématiques où il y avait, à *la fois, des erreurs sémantiques et des erreurs syntaxiques*. Par exemple, des réponses écrites ou des explications verbales d'élèves comportant à la fois des erreurs de sens et des constructions syntaxiques boiteuses.

Omission de connecteurs logiques

Les solutions ou explications mal organisées ou incompréhensibles à cause d'une *omission de connecteurs logiques* (si... alors, donc,...) ont également été classées dans les erreurs mixtes. Par exemple, des successions de phrases sans liens logiques où il faut deviner le raisonnement de l'élève. Cette absence de liens logiques relève parfois d'une négligence dans l'écriture, mais elle dénote très souvent, chez les élèves, à la fois un problème sémantique et un problème syntaxique.

Confusion entre différents niveaux de langage

Nous avons aussi classé ici les erreurs attribuables à une *confusion entre différents niveaux de langage*. Il arrive, par exemple, que des élèves parlent de «droites égales» au lieu de «droites parallèles» ou, inversement, de «pentes parallèles» au lieu de «pentes égales», ou encore, de «droite nulle» au lieu de «droite horizontale» ou «droite de pente nulle». Cette confusion entre les termes désignant des notions abstraites et ceux désignant des objets géométriques se traduit parfois en raisonnements boiteux qui amènent à des réponses erronées.

Erreurs difficiles à préciser

Les erreurs pour lesquelles il n'a pas été possible de préciser s'il s'agissait de cas sémantiques ou syntaxiques ont également été classées dans les erreurs mixtes. De telles erreurs ont été observées, entre autres occurrences, dans des cas d'interprétation. Ce sont en quelque sorte des *erreurs de traduction du langage scientifique au langage usuel*, ou vice versa. Ces erreurs sont très fréquentes car les élèves ont souvent de la difficulté à interpréter des résultats, même les leurs.

Dans une question d'examen, par exemple, on présentait un tableau de données à partir duquel on demandait de calculer «l'âge médian des conducteurs impliqués dans des accidents mortels au Québec en 1988». On demandait également aux élèves d'interpréter leur résultat. Certains ont bien fait le calcul, mais ont mal interprété le résultat. Au lieu de l'interprétation suivante:

> «La moitié des conducteurs impliqués dans des accidents mortels au Québec en 1988 avaient 32 ans ou moins»,

quelques-uns ont écrit:

> «Au Québec en 1988, la moitié des conducteurs de 32 ans étaient impliqués dans des accidents mortels»,

ou encore:

> «En 1988, la moitié des conducteurs impliqués dans des accidents mortels au Québec avaient 32 ans»,

ou d'autres interprétations erronées ou incomplètes.

On peut penser que ces élèves savaient ce qu'est une médiane, puisqu'ils ont fait le calcul correctement, et que leur mauvaise interprétation était attribuable à un problème de syntaxe. Mais on peut aussi penser qu'ils ont réussi le calcul par automatisme et que leur interprétation reflète une incompréhension de la médiane, auquel cas ce serait une erreur sémantique. Nous avons donc classé ces erreurs dans les *erreurs mixtes*.

En fait, l'important ici n'est pas tant de bien classer les erreurs que de bien identifier les difficultés rencontrées par les élèves. L'exemple précédent illustre le constat suivant: pour bien saisir le sens d'une notion, dans ce cas la médiane, il faut être capable d'analyser correctement la définition qui en est donnée. Or un élève qui a de graves difficultés au niveau de la syntaxe n'est pas en mesure de bien saisir le sens des définitions. Ses problèmes syntaxiques entraînent des problèmes sémantiques qui, à leur tour, entraînent d'autres problèmes syntaxiques.

Le tableau suivant résume les types d'erreurs observées dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques.

TABLEAU 5.4
Types d'erreurs dans l'utilisation du langage naturel en mathématiques

Types d'erreurs	Description	Exemples
Erreur sémantique	Erreur de sens	• Attribuer un sens erroné à un terme mathématique: *binôme, dérivée, équation, médiane,...* • Attribuer un sens erroné à un terme usuel: *définir, démontrer, justifier,..* • Attribuer à un terme un sens qui ne convient pas au contexte mathématique • Ignorer totalement le sens d'un mot ou d'une expression
Erreur syntaxique	Non-respect de la fonction ou de la disposition des mots dans une proposition ou des propositions dans une phrase.	• Mauvaise disposition des mots dans une proposition • Mauvaise disposition des propositions dans une phrase • Mauvais usage des connecteurs logiques: *et, ou, si... alors,...* • Mauvaise fonction attribuée à un mot ou à une proposition dans une phrase • Mauvais usage des pronoms: *il, elle,...*
Erreur mixte	Double erreur, ou autre	• Lecture ou écriture comportant à la fois des erreurs sémantiques et syntaxiques • Omission de connecteurs logiques • Confusion entre différents niveaux de langage • Mauvaise «traduction» du langage scientifique au langage usuel

La section suivante porte sur les types d'erreurs dans l'utilisation du langage symbolique en mathématiques.

5.5 Erreurs dans l'utilisation du langage symbolique

Il existe un grand nombre de symboles en mathématiques: symboles représentant des mots, des locutions ou des concepts (x, y, f, $\sum$, ∞, $\varnothing$, Δ, $\forall$, $\exists$, ε,...), symboles d'opération (+, −, x, ÷, $\sqrt{\ }$, $\int$, $\cup$, $\cap$, ...), symboles de relation (=, <, >, $\leq$, $\neq$, $\approx$, $\in$, $\subseteq$, $\perp$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, ...), etc. Chaque symbole a un sens bien précis et l'agencement des symboles entre eux suit des règles bien établies. Cet ensemble de symboles mathématiques est suffisamment riche pour permettre de formuler des définitions ou des solutions de problèmes. On peut donc vraiment parler d'un *langage symbolique* en mathématiques.

Le mauvais usage de ce langage peut entraîner des erreurs en mathématiques. Comme pour le langage naturel, il peut y avoir des erreurs de sens (ou erreurs sémantiques), des erreurs syntaxiques ou des erreurs mixtes. Examinons chacun des ces types d'erreurs.

5.5.1 Erreurs sémantiques

La définition de la sémantique s'applique au langage symbolique comme à toute autre langage. La seule différence, ici, est qu'elle porte sur le *sens des symboles* plutôt que sur le sens des mots. Une erreur sémantique dans l'utilisation du langage symbolique est donc une erreur de sens portant sur un ou plusieurs symboles.

Nous avons observé un grand nombre d'erreurs de sémantique symbolique, comme: *attribuer un sens erroné à un symbole, en ignorer totalement le sens ou lui attribuer un sens qui ne convient pas au contexte*. En voici des exemples.

Sens erroné attribué à un symbole

De nombreux élèves attribuent un *sens erroné* au symbole d'équivalence logique «$\Leftrightarrow$». Certains le confondent avec le symbole d'égalité et écrivent indifféremment l'un ou l'autre symbole entre des expressions égales. D'autres le confondent avec le symbole d'implication. Cette confusion est illustrée au chapitre 3, dans l'analyse des résultats de la partie A du test (section 3.3 3, question 11).

Beaucoup d'autres symboles font l'objet de confusion. Par exemple, $\vec{0}$ et 0, désignant respectivement le vecteur nul et le nombre zéro; ou $\varnothing$, désignant l'ensemble vide, et 0; ou, pour les vecteurs, les symboles «x» et «•» désignant respectivement le produit vectoriel et le produit scalaire. Ces confusions débouchent souvent sur des incompréhensions, des ambiguïtés ou des erreurs.

La notation «$f(x)$», désignant «la valeur d'une fonction f en x», est aussi une source de confusion pour les élèves. Certains l'interprètent comme le produit de f par x, ce qui les amène aux erreurs suivantes lorsqu'ils ont des calculs à effectuer:

$$f(a+h) = f(a)+f(h)\,,\quad \text{ou encore,}\quad V(h+\Delta h)-V(h) = Vh+V\Delta h-Vh = \ldots$$

On voit que les élèves ont appliqué, ici, la règle de la distributivité de la multiplication sur l'addition, comme si les parenthèses étaient un symbole de multiplication.

Des erreurs similaires ont été observées avec d'autres expressions symboliques comme

$$sin x,\ cos x,\ a_n,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots$$

Certains élèves interprètent ces expressions comme des produits: de *sin* par *x*, de *cos* par *x*, ou de a par *n*,... Lorsqu'ils ont à effectuer des calculs impliquant de telles expressions, cette confusion les amène à faire des opérations ou des simplifications qui n'ont souvent aucun sens.

Ignorance d'un symbole

Il arrive aussi que des élèves ne comprennent pas un énoncé parce qu'il contient un symbole *qu'ils ne connaissent pas*. Ainsi, à la suite du test que nous avons fait passer, plusieurs élèves ont mentionné n'avoir jamais vu le symbole «$\Leftrightarrow$». Certains ont quand même tenté de répondre aux questions portant sur ce symbole, mais la plupart ont laissé les réponses en blanc.

Il y a aussi des symboles que les élèves voient ou utilisent très souvent, mais dont ils *n'ont jamais vraiment saisi le sens*. C'est le cas, par exemple, du symbole «$\sqrt{\ }$». En effet, dans une question du prétest administré à 350 élèves de Mat 203 (calcul différentiel et intégral II), on demandait de donner une valeur approximative de $\sqrt{10}$, sans l'aide de la calculatrice. 5% des élèves n'ont pas répondu à la question et 10% ont donné une mauvaise réponse. Ils avaient sûrement une *connaissance visuelle* du symbole $\sqrt{\ }$, mais probablement pas une *connaissance sémantique*, sinon ils n'auraient pas eu besoin d'une calculatrice pour donner une valeur approximative «du nombre dont le carré est 10».

Sens non approprié au contexte

Il arrive aussi que des élèves attribuent à des symboles un sens qui pourrait être correct dans un contexte, mais qui ne l'est pas dans celui où ils travaillent. Par exemple, un élève a écrit ceci concernant l'aire d'un triangle *AOB*:

$$\text{aire} = \frac{AO \bullet OB}{2} = \frac{AO^2B}{2}$$

Bien sûr, il aurait dû écrire $\overline{AO}$ et $\overline{OB}$ pour la longueur des côtés, au lieu de *AO* et *OB*. Mais cela ne suffit pas à expliquer qu'il ait ensuite traité l'expression $AO \bullet OB$ comme un produit de variables. Avec la figure géométrique sous les yeux, il savait que les lettres *A*, *O* et *B* désignaient les sommets du triangle et non des variables. Son écriture AO^2B aurait du sens si *A*, *O* et *B* représentaient des nombres, par exemple, mais non dans ce contexte.

Ces exemples illustrent les erreurs liées au *sens des symboles*. Nous passons maintenant aux erreurs de syntaxe symbolique.

5.5.2 Erreurs syntaxiques

Il existe, dans le langage symbolique, des règles de relations entre les symboles tout comme il y a des règles de construction des phrases dans le langage naturel. On peut donc transposer la définition générale de la syntaxe au langage symbolique et considérer, dans ce cas, la syntaxe comme l'ensemble des règles qui président à l'ordre des symboles et à la construction des phrases (symboliques).

Comme pour le langage naturel, ces règles doivent être connues et appliquées correctement, sinon on risque de dénaturer le message communiqué sous forme symbolique. Ne pas respecter la fonction ou la disposition des symboles dans une expression symbolique ou dans une phrase formulée en langage symbolique constitue donc une *erreur de syntaxe symbolique*. En voici des exemples.

Non-respect des règles de priorité des opérations

Le *non-respect des règles de priorité des opérations* est une erreur de syntaxe symbolique fréquemment observée. Par exemple, dans le calcul numérique suivant: $2 + 3 \times 4$, des élèves ont interverti l'ordre des opérations en effectuant l'addition avant la multiplication. Ceci les a amenés à une mauvaise réponse: 14 au lieu de 20.

Cette erreur est très fréquente dans les calculs algébriques, si on se fie aux résultats des questions du test portant sur la syntaxe symbolique. Par exemple, à la question suivante:

Question 3

Quelle est ou quelles sont les expressions qui sont égales à $1 - 3x^{-2}$ quelle que soit la valeur de x, $x \neq 0$?

1) $-\frac{1}{3x^2}$

2) $\frac{1}{-3x^2}$

3) $-\frac{2}{x^2}$

4) $1 - \frac{1}{3x^2}$

5) $1 - \frac{3}{x^2}$

36% seulement des 625 élèves ont eu la bonne réponse, alors que 47% ont coché la réponse 4.

Dans les calculs comportant plusieurs opérations, beaucoup d'élèves ont de la difficulté à déterminer l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées. Cette difficulté a nécessairement des répercussions dans d'autres situations, par exemple: dans la résolution d'équations, dans la dérivation de fonctions composées, dans le calcul vectoriel ou dans le calcul matriciel.

Mauvais usage des parenthèses

Un autre exemple d'erreur de syntaxe symbolique fréquemment observé consiste en un *mauvais usage des parenthèses*. On observe notamment cette erreur dans la factorisation d'expressions. Beaucoup d'élèves omettent des parenthèses là où il en faudrait, ou en mettent là où il n'en faut pas. Par exemple, au lieu d'écrire le résultat suivant:

$$(x+1)^2\,x^3 + 2\,(x+1)^2 \;=\; (x+1)^2\,(x^3+2)$$

des élèves écrivent plutôt ceci:

$$(x+1)^2\,x^3 + 2\,(x+1)^2 \;=\; (x+1)^2 \bullet x^3+2$$

Or ces deux résultats sont différents, contrairement à ce que ces élèves pensent.

Omission de symboles

D'autre élèves omettent tout simplement d'écrire des parenthèses, comme ils omettent d'écrire d'autres symboles tels: les signes d'égalité, les symboles de limite, les flèches au-dessus des lettres désignant des vecteurs. *L'omission de symboles* relève parfois d'une forme de négligence, mais elle est souvent le reflet d'une non-maîtrise de la syntaxe symbolique.

Erreurs logiques

Parmi les autres erreurs de syntaxe symbolique fréquemment observées, on trouve les erreurs logiques attribuables à un *mauvais usage des symboles (connecteurs)* logiques: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, ... Par exemple, de nombreux élèves écrivent

« $a = 4 \Leftrightarrow a^2 = 16$ » pour signifier « $[a = 4] \Rightarrow [a^2 = 16]$ »,

ou encore,

« $x = 3 \wedge 1$ » pour signifier « $[x = 3] \wedge [x = 1]$ ».

Des erreurs logiques peuvent aussi résulter d'une *mauvaise transformation de l'écriture symbolique*. Par exemple, pour raccourcir l'énoncé « $x < 3$ ou $x > 12$ », certains élèves écrivent: « $12 < x < 3$ ». Ils ne réalisent pas que cette forme d'écriture est la contraction d'une *conjonction* de propositions: $x < 3$ **et** $x > 12$, et non pas d'une *disjonction*.

Mauvaise disposition des symboles

Nous avons aussi observé beaucoup de cas de *mauvaise disposition des symboles*. Par exemple, pour désigner la dérivée d'une fonction, des élèves écrivent indifféremment $f(x)'$ ou $f'(x)$. Ce manque d'attention à l'emplacement du symbole «′» les amène parfois à des erreurs dans les calculs de dérivée. Ainsi, certains interprètent l'expression $(x+1)^2\,(x^3-1)'$ comme voulant dire «la dérivée de ce qui précède», c'est-à-dire $[\,(x+1)^2\,(x^3-1)\,]'$.

Nous avons observé le même problème avec d'autres symboles mathématiques. Ainsi, dans les calculs de limites, le symbole «lim» est souvent placé au mauvais endroit. Cela se produit également avec des symboles aussi usuels que les barres de fractions ou les signes d'égalité.

La mauvaise disposition des symboles est parfois attribuable à un manque d'attention ou à une négligence de la part des élèves, mais elle reflète souvent aussi un problème de sens. En effet, l'élève qui ne saisit pas le sens d'expressions telles:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \lim_{x \to a} f(x),$$

risque de les manipuler incorrectement, sans le savoir, même en étant attentif. On a dans ces cas un exemple d'erreur mixte.

5.5.3 Erreurs mixtes

Comme pour le langage naturel, nous avons classé dans les erreurs mixtes tous les cas de *double erreur*, c'est-à-dire tous les cas d'écritures symboliques où il y avait à la fois des erreurs de sens et de syntaxe.

On trouve notamment ici les *cas exagérés d'omission de symboles, de mauvaise utilisation ou de mauvaise disposition des symboles*. Entre autres cas, il faut signaler les solutions écrites en langage symbolique où l'*absence de connecteurs logiques* fait perdre complètement le sens de ce que l'élève voulait dire. Ou, encore, les résolutions d'équations écrites sur une même ligne en une chaîne incompréhensible de symboles. Le calcul suivant en est un exemple:

$$P(Z > z) = 0{,}05 = z > 1{,}645$$

Dans ce calcul, relatif à la courbe normale, l'élève aurait dû écrire ceci:

$$[P(Z > z) = 0{,}05] \Leftrightarrow [z = 1{,}645]$$

Il aurait pu aussi écrire les équations sur des lignes différentes.

Les erreurs observées dans l'écriture symbolique sont parfois difficiles à classer. Les personnes qui ont validé la grille des types d'erreurs n'ont pas toujours été unanimes. Quelques-unes ont invoqué la possibilité que des erreurs, en apparence syntaxique, puissent cacher aussi un problème sémantique. Il y a donc eu des hésitations à classer ces erreurs dans les erreurs syntaxiques ou dans les erreurs mixtes. La majorité a cependant opté pour les classer dans les erreurs mixtes.

Le tableau suivant résume les types d'erreurs observées dans l'utilisation du langage symbolique en mathématiques.

TABLEAU 5.5
Types d'erreurs dans l'utilisation du langage symbolique en mathématiques

Types d'erreurs	**Description**	**Exemples**
Erreur sémantique	Erreur de sens portant sur un symbole ou une expression symbolique	• Ne pas connaître un symbole ou une expression symbolique ou en ignorer *le sens* • Attribuer un sens erroné à un symbole ou à une expression symbolique **ex.**: confondre $\Leftrightarrow$ et $=$, ou $f(a)$ et $f \bullet a$, ou $\varnothing$ et 0, ... • Attribuer à un symbole ou à une expression symbolique un sens qui ne convient pas au contexte
Erreur syntaxique	Non-respect de la fonction ou de la disposition des symboles dans une expression ou dans une phrase formulée en langage symbolique	• Non-respect des règles de priorité des opérations • Mauvais usage des parenthèses • Omission de symboles • Mauvais usage des symboles logiques: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, ... • Mauvaise disposition des symboles dans une écriture symbolique
Erreur mixte	Double erreur, ou autre	• Écriture symbolique comportant à la fois des erreurs sémantiques et syntaxiques • Omission de connecteurs logiques • Mauvaise utilisation ou disposition de symboles altérant le sens de ce qui est écrit

La section suivante porte sur les types d'erreurs dans l'utilisation du langage graphique en mathématiques.

5.6 Erreurs dans l'utilisation du langage graphique

Il existe divers types d'illustrations en mathématiques: des figures géométriques, des graphiques cartésiens, des diagrammes de Venn, des schémas, etc. Chaque élément de ces illustrations ou graphiques a un sens bien précis et l'agencement des symboles entre eux suit des règles établies. On peut donc transposer les définitions de la sémantique et de la syntaxe dans ces cas et, plus généralement, parler d'un *langage graphique*, même si ce langage n'est pas utilisé de façon autonome en mathématiques.

Diverses erreurs graphiques ont été relevées; elles ont été classées en *erreurs sémantiques*, *erreurs syntaxiques* ou *autres* selon qu'il s'agissait d'une erreur de sens portant sur un ou plusieurs éléments graphiques, d'un non-respect des règles d'agencement de ces éléments ou d'un autre type d'erreurs. Examinons chacun de ces types d'erreurs.

5.6.1 Erreurs sémantiques

Exemple d'erreur dans la représentation cartésienne

L'erreur sémantique la plus importante que nous avons relevée concerne les graphiques cartésiens. Dans ce mode de représentation, nous avons constaté qu'un grand nombre d'élèves confondaient *point* et *ordonnée d'un point*. Cette erreur de sémantique graphique a été mise au jour dans une question du test (voir chapitre 3, section 3.4.3) où on donnait le graphique cartésien d'une fonction f sur lequel on demandait de représenter clairement les expressions $(2, f(2))$ et $f(3)$. Plus de la moitié des élèves ont donné des dessins identiques dans les deux cas, soit un point sur la courbe de f.

Cette erreur a été classée dans les erreurs graphiques plutôt que dans les erreurs symboliques, car nous avons constaté que la majorité des élèves qui l'avaient commise effectuaient correctement les calculs impliquant des symboles de la forme «f(x)», mais faisaient des erreurs dans les situations de représentation ou d'interprétation graphique de ces symboles.

Lacune graphique et compétence langagière

L'analyse des erreurs dans la représentation cartésienne a permis de relever une lacune importante affectant la *compétence langagière* des élèves. En effet, nous avons constaté que *très peu d'élèves associent les coordonnées d'un point à des longueurs orientées sur les axes*. Sauf dans les cas de confusion entre *point* et *ordonnée*, les élèves n'associent généralement les coordonnées d'un point qu'à des positions sur les axes. Or ne pas voir les nombres comme des grandeurs conduit à l'incapacité d'interpréter correctement des expressions comme les suivantes:

$$f(b) - f(a), \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

En effet, si a, b, $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas vus comme des longueurs orientées sur les axes, il est difficile de comprendre que la première expression représente un déplacement vertical et les deux suivantes des pentes.

Manque d'uniformité et de précision dans les conventions graphiques

D'autres erreurs sémantiques ont été observées dans l'utilisation du langage graphique, comme le sens à accorder à un trait, à une flèche ou à tout autre signe. Plusieurs cas mettent en cause le manque de précision et le manque d'uniformité dans les conventions graphiques.

Ainsi, au cours du processus de validation, plusieurs personnes ont soulevé le problème des *conventions tacites* dans la représentation graphique. Elles ont également fait remarquer l'absence d'uniformité de certaines conventions graphiques chez les auteurs de manuels de mathématiques. Par exemple, *un trait* représente une droite pour certains et un segment de droite pour d'autres. De même, *une flèche* à l'extrémité d'un trait sert à indiquer le sens croissant sur un axe pour les premiers, mais un prolongement infini pour les autres.

Ce manque d'uniformité dans les conventions graphiques est malheureux, car il est source d'ambiguïtés et d'erreurs chez les élèves. De plus, il ne contribue pas à les sensibiliser à l'importance de la précision dans leurs illustrations ou représentations graphiques.

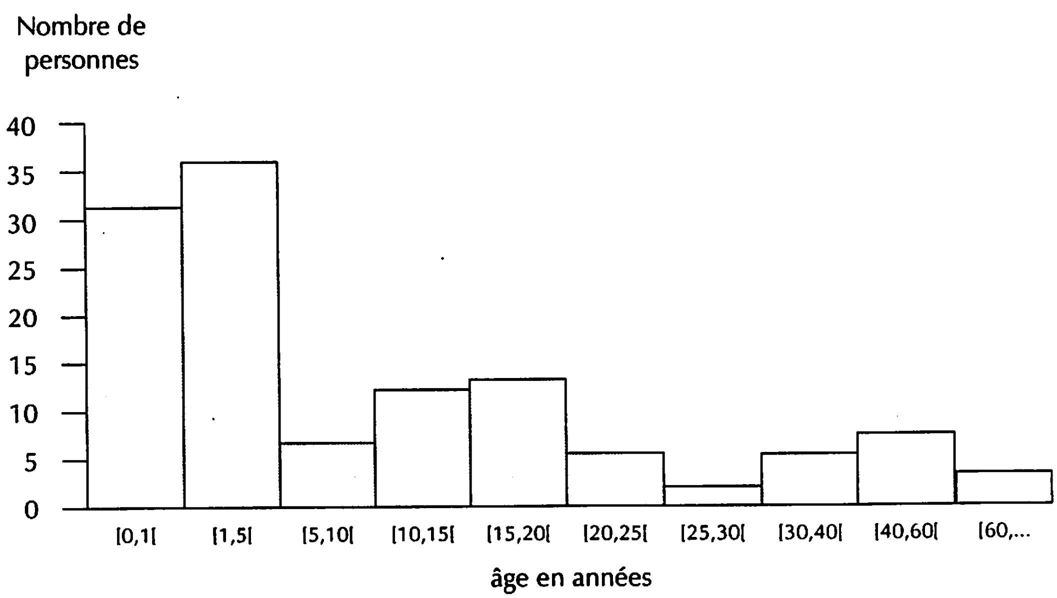
L'absence d'uniformité dans l'interprétation des éléments graphiques affecte nécessairement les règles de leur agencement. Pour les exemples d'erreurs de syntaxe graphique, nous nous limiterons donc aux règles faisant consensus.

5.6.2 Erreurs syntaxiques

De nombreuses erreurs ont été observées dans l'agencement des éléments graphiques, par exemple: le non-respect des proportions dans le tracé de schémas ou de figures géométriques, les erreurs de perspective dans la représentation en trois dimensions, les erreurs d'échelle, les éléments graphiques mal placés, l'omission d'éléments graphiques ou la présence d'éléments qui ne devraient pas apparaître.

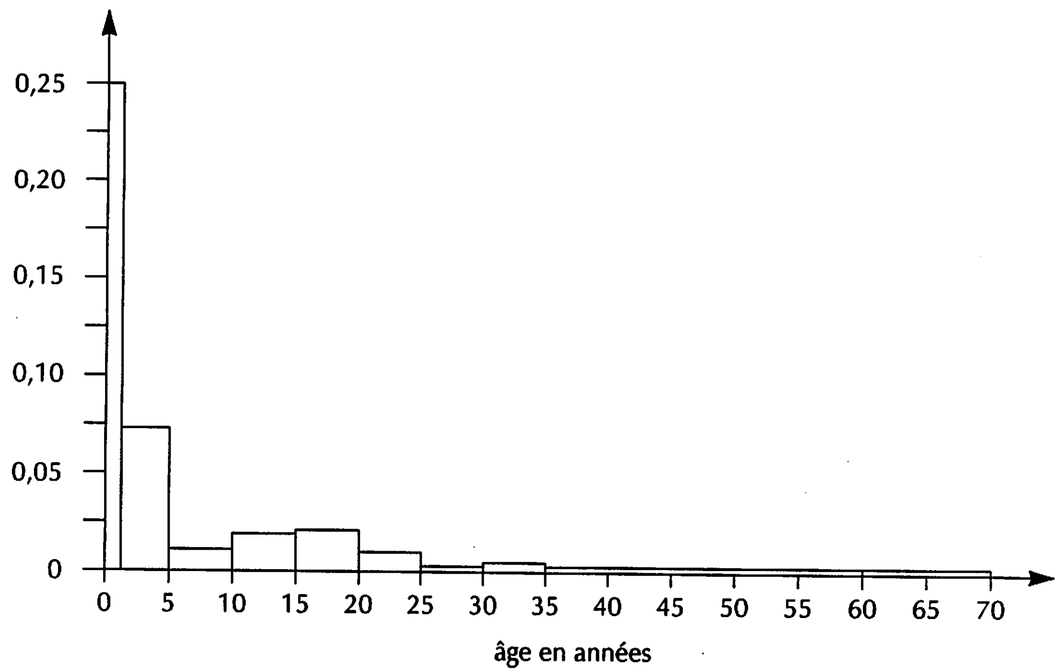
Certaines erreurs ont particulièrement été observées dans la représentation cartésienne. En plus des erreurs d'échelle déjà mentionnées, on peut aussi ajouter les suivantes: relier des points qui ne devraient pas l'être, les relier par des segments de droites au lieu d'une courbe, omettre de prolonger une courbe.

Pour illustrer un exemple d'erreur due au non-respect des normes de représentation, nous avons choisi le graphique suivant, tracé par des élèves à partir d'un tableau de données. Il s'agit de la répartition des cas de méningite dans une région du Québec en 1991, en fonction de l'âge des personnes atteintes.



D'après l'aspect de leur graphique, les élèves ont conclu que le groupe le plus touché par la méningite avait été celui des enfants âgés de 1 an à 4 ans, qu'il y avait eu une «augmentation» chez les jeunes âgés de 10 à 19 ans et une autre chez les adultes de 40 à 59 ans. Or cette déduction est inexacte, la fausse perception étant causée par une erreur dans la construction du graphique.

En effet, si on examine attentivement l'axe horizontal, on constate que les unités ne correspondent pas à des intervalles réguliers. Cette *erreur d'échelle* a déformé l'histogramme et faussé l'information transmise. Ainsi, la base du premier rectangle devrait être quatre fois plus petite que celle du deuxième et vingt fois plus petite que celle de l'avant-dernier. Si on apporte les corrections nécessaires et si on ajuste les hauteurs des rectangles en conséquence, on obtient plutôt l'histogramme suivant:



Comme on peut le constater, ce graphique est bien différent du précédent. Étant construit à l'échelle, il permet d'établir des comparaisons correctes d'incidence de la méningite entre les différents groupes d'âges de la population visée. Ainsi, on peut voir que le groupe le plus touché, proportionnellement, a été celui des enfants de moins d'un an, avec 25% des cas recensés, et non pas celui des enfants de 1 an à 4 ans. De plus, il n'y a pas eu «d'augmentation» chez les personnes de 40 à 59 ans comme le laissait croire le précédent graphique.

En plus des erreurs dans l'agencement des éléments graphiques et des erreurs de sens, nous avons relevé beaucoup d'autres erreurs variées que nous avons regroupées sous l'étiquette «autres erreurs».

5.6.3 Autres erreurs

Voici quelques exemples d'autres erreurs graphiques observées:

- les erreurs doubles, c'est-à-dire les schémas, figures ou graphiques comportant à la fois une erreur de sens et une erreur dans l'agencement des éléments,
- les erreurs de lecture graphique, c'est-à-dire les mauvaises compréhensions de schémas, de figures ou de graphiques,
- les schémas, figures ou graphiques négligés ou trop petits conduisant à une mauvaise interprétation de la situation,
- la représentation d'un cas particulier au lieu du cas général, entraînant une mauvaise déduction par la suite,
- les graphiques non appropriés au contexte, par exemple, un histogramme dans le cas d'une variable qualitative.

Le tableau suivant résume les types d'erreurs observées dans l'utilisation du langage graphique en mathématiques.

TABLEAU 5.6
Types d'erreurs dans l'utilisation du langage graphique en mathématiques

Types d'erreurs	Description	Exemples
Erreur sémantique	Erreur de sens portant sur un élément graphique	• Ne pas connaître le sens d'un élément graphique • Attribuer un sens erroné à un élément graphique **ex.**: confondre *point* et *ordonnée d'un point* • Attribuer à un élément graphique un sens qui ne convient pas au contexte
Erreur syntaxique	Non-respect de l'agencement des éléments graphiques dans un schéma, dans une figure ou dans un graphique	• Non-respect des proportions • Erreur de perspective dans les représentations en trois dimensions • Erreur d'échelle • Omission d'élément graphiques • Éléments graphiques mal placés • Présence d'éléments graphiques qui ne devraient pas apparaître

TABLEAU 5.6 *(Suite)*
Types d'erreurs dans l'utilisation du langage graphique en mathématiques

Types d'erreurs	Description	Exemples
Autre erreur	Double erreur, ou autre	• Erreur de sens portant sur un ou des éléments graphiques et mauvais agencement des éléments • Mauvaise lecture d'un schéma, d'une figure ou d'un graphique • Schémas, figures, graphiques trop petits ou négligés • Représentation d'un cas particulier au lieu du cas général • Schéma ou graphique non approprié au contexte

La dernière section porte sur les erreurs impliquant plus d'un langage.

5.7 Erreurs impliquant deux langages ou les trois.

En mathématiques, au niveau collégial, on utilise presque toujours plus d'un langage dans un même problème ou dans une même explication. Par exemple, les solutions écrites sont souvent exprimées en langage symbolique et accompagnées, *en parallèle*, de notes en langage naturel ou d'illustrations. Beaucoup de questions exigent de faire une *traduction* d'un langage à un autre, par exemple: «Tracez le graphique d'une fonction positive et décroissante» (traduction du langage naturel au langage graphique), ou encore, «Exprimez dans vos mots la formule suivante: $(f+g)' = f' + g'$» (traduction du langage symbolique au langage naturel).

Les langages sont souvent aussi *imbriqués* dans une même phrase. Par exemple:

«Sachant que $f(1) = 3$, $f'(1) = -6$ et $y = x \bullet f(x)$, calculez $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

Cette imbrication de codes différents modifie les règles d'organisation syntaxique (Guillerault et Laborde, 1984; Laborde, 1989). Ainsi, la phrase précédente n'appartient ni au langage naturel ni au langage symbolique, mais à un langage *hybride* résultant de l'imbrication de ces deux langages.

La plupart des erreurs langagières observées au cours de cette recherche sont survenues dans des situations impliquant plus d'un langage. Dans la majorité des cas, il a été possible de déterminer le langage qui en était la cause, grâce, notamment, aux entrevues. C'est pourquoi la quasi-totalité des exemples donnés dans les sections précédentes illustre des erreurs imputables à un seul langage (naturel, symbolique ou graphique), alors que les situations où ces erreurs sont apparues impliquaient plus d'un langage.

Dans certains cas cependant, il n'a pas été possible de préciser si l'erreur était imputable à un langage plutôt qu'à un autre. Un plus grand nombre d'entrevues nous aurait peut-être permis de le faire, mais, à défaut de précision, nous avons classé ces erreurs dans la catégorie «erreurs impliquant plus d'un langage». Nous avons subdivisé cette catégorie selon la forme de la question ou de la solution où les erreurs apparaissaient. Nous obtenons donc les sous-catégories suivantes: «erreurs dans l'utilisation en parallèle de deux ou trois langages», «erreurs de traduction d'un langage à un autre» et «erreurs dans l'utilisation du langage *hybride*». En voici des exemples.

5.7.1 Erreurs dans l'utilisation en parallèle de deux ou trois langages

Dans les situations où deux ou trois langages sont utilisés en parallèle, il arrive que des élèves soient distraits par un élément ou un aspect d'un des langages; les *distracteurs* peuvent être des mots, des symboles ou des éléments graphiques. On en a un exemple dans l'illustration de la tangente à une courbe comme limite de sécantes. Pour expliquer cette définition, on utilise généralement une courbe très simple, avec le résultat que la tangente obtenue et la courbe n'ont aucun autre point en commun que le point de tangence. Certains élèves ne retiennent que cet aspect de l'illustration, ce qui fausse leur compréhension de la définition. Dans des situations où la tangente en un point d'une courbe rencontre celle-ci en un autre point, ils ont tendance à penser que la droite n'est pas une tangente à la courbe.

Dans ce cas, on ne peut pas parler d'une erreur graphique, même si le problème provient de l'illustration. Il s'agit plutôt d'une mauvaise interprétation occasionnée par le choix des courbes utilisées pour illustrer la définition. Ce choix de courbes met en veilleuse, pour certains élèves, l'aspect local du caractère tangentiel; ces élèves retiennent l'idée d'une tangente à une courbe, mais non d'une tangente *en un point* d'une courbe.

5.7.2 Erreurs de traduction d'un langage à un autre

En mathématiques, les élèves doivent très souvent traduire une information d'un langage à un autre, soit parce qu'on le leur demande textuellement, soit parce que la situation les y oblige implicitement.

Les erreurs observées dans les situations de traduction mettent plutôt en évidence une *maîtrise insuffisante* d'un des deux langages impliqués, sinon des deux. En mathématiques comme dans la vie courante, il faut effectivement une certaine maîtrise de deux langues pour être en mesure de traduire correctement de l'une à l'autre.

Plusieurs questions du test demandaient aux élèves de faire une traduction d'un langage à un autre. Au numéro 5 de la partie A, par exemple, on leur demandait de tracer le graphique de fonctions diverses: une fonction positive, une fonction constante, une fonction strictement décroissante... Les élèves devaient donc, ici, faire une traduction du langage naturel au langage graphique.

L'analyse des erreurs relevées à cette question (voir chapitre 3, section 3.4.1) a mis en lumière une certaine confusion autour de la notion de fonction et de la correspondance entre une fonction et son graphique cartésien. Dans ce cas, les erreurs de traduction concernent autant le sens des termes que celui des éléments graphiques; ces erreurs sont donc imputables aussi bien au langage naturel qu'au langage graphique.

De façon générale, l'analyse des résultats des questions de traduction dans le test révèle que les élèves ne transposent pas facilement des informations d'un langage à un autre. Par exemple, ils ont des connaissances sur la droite et sur la fonction du premier degré, ou sur la parabole (verticale) et la fonction du second degré, mais ils ne font pas nécessairement les liens entre ces connaissances, graphiques d'une part et symboliques de l'autre.

Il y a probablement là un problème sémantique, car on peut supposer que, si les élèves saisissaient parfaitement le sens des éléments de base dans chacun des langages, ils transposeraient plus facilement des informations d'un langage à un autre.

5.7.3 Erreurs dans l'utilisation du langage *hybride*

Les erreurs qui mettent en cause le langage *hybride* sont plutôt de nature syntaxique. En effet, l'imbrication d'éléments différents (mots, symboles, éléments graphiques) dans une même phrase entraîne nécessairement une imbrication des codes syntaxiques.

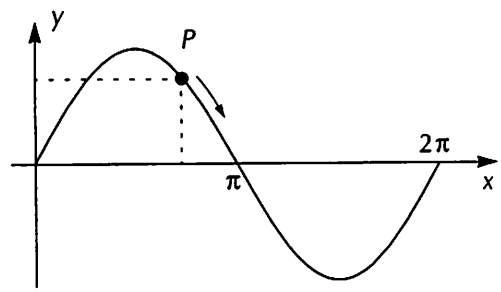
Nous avons constaté que de nombreux élèves éprouvent de la difficulté à décoder des phrases *hybrides*, et même parfois à les lire. Lors d'une entrevue, par exemple, nous avons demandé à un élève de lire à haute voix la question suivante: «Représentez clairement l'expression *f(4)* sur le graphique suivant» (un graphique accompagnait la question). Il l'a observée un instant, puis a fait, péniblement et en hésitant, la lecture suivante: «*Représentez clairement l'expression... fonction de... parenthèse 4 fermer la parenthèse... sur le graphique suivant*». Comme il ne comprenait toujours rien à la question, nous lui avons demandé de la lire à nouveau à haute voix. Sa deuxième lecture n'a pas été meilleure que la première. Un autre élève a fait la lecture suivante de la même question: «*Représentez clairement l'expression... fonction du point 4... sur le graphique suivant*».

Cette difficulté à décoder des phrases *hybrides* amène de nombreux élèves à concentrer leur attention sur un type d'éléments au détriment du reste de la phrase. Certains remarquent les expressions symboliques et ne font pas très attention aux mots; d'autres remarquent plutôt les illustrations ou le texte et négligent les éléments symboliques. On en a un indice dans leur façon de lire à haute voix ce type de phrases. Beaucoup haussent le ton ou ralentissent le débit dans les parties auxquelles ils accordent le plus d'attention; certains oublient même de lire le reste de la phrase.

L'exemple suivant est intéressant, car il concerne la lecture d'une même question par une soixantaine d'élèves. C'était à l'occasion d'un test où ils devaient résoudre le problème suivant, par équipes de deux:

Soit un point P se déplaçant le long de la courbe d'équation $y = \sin x$.

Si la coordonnée y du point P varie à la vitesse constante de 0,2 cm/s vers le bas, à quelle vitesse va alors varier la coordonnée x du point au moment où celle-ci est à la position $3\pi/4$?



Nous avions donné la consigne suivante pour le travail d'équipe: un élève devait lire la question à haute voix pendant que l'autre traduisait mathématiquement le problème; la lecture terminée, ils devaient inverser les rôles pour vérifier la lecture du premier et la transcription de l'autre; ils poursuivaient ensuite la solution du problème à deux.

Nous avons observé qu'environ 85% des élèves omettaient de lire le segment de phrase «vers le bas» dans le deuxième paragraphe, même lors d'une deuxième lecture. Ils faisaient une pause après 0,2 cm/s, allaient voir ou non le graphique, attendaient que leur coéquipier ait fini d'écrire, puis reprenaient la lecture à la phrase suivante: «à quelle vitesse...». La plupart des équipes ont donc transcrit

$$« \frac{dy}{dt} = 0{,}2 \text{ cm/s} » \quad \text{au lieu de} \quad « \frac{dy}{dt} = -0{,}2 \text{ cm/s} »$$

Le test terminé, nous avons demandé à ces élèves ce qui les avait amenés à omettre le segment de phrase en question. De leurs réponses et des échanges qui ont suivi, il est ressorti que beaucoup accordaient une plus grande attention aux chiffres et aux symboles qu'aux mots dans ce genre d'énoncés. «*C'est normal*, a ajouté l'un d'entre eux, *c'est des mathématiques!*»

Difficulté de lecture des phrases *hybrides*

De façon générale, les phrases *hybrides* sont plus difficiles à lire, et surtout à décoder, que les phrases n'utilisant qu'un seul langage. Les différences dans l'organisation syntaxique des langages naturel et symbolique en sont en grande partie la cause. Ainsi, pour faire une *lecture compréhensive* d'une phrase *hybride*, il faut souvent modifier la façon de lire en passant d'une partie à une autre de la phrase. En effet, le texte français se lit de gauche à droite, mais ce n'est pas nécessairement le cas des expressions symboliques.

Examinons, par exemple, la phrase suivante où f désigne une fonction:

« Calculer $f'(2)$. »

On peut lire rapidement cette phrase ainsi: «*Calculer f prime de 2*», en allant de gauche à droite, mais une meilleure lecture serait: «*Calculer la dérivée de la fonction f en 2.*» Dans cette dernière lecture, on constate que l'ordre des mots ne suit pas l'ordre des symboles.

Si la lecture de gauche à droite est possible dans la phrase précédente, il n'en est pas toujours ainsi. Prenons par exemple cette autre phrase où f et g désignent deux fonctions:

«Calculer $(f+g)'$.»

Une bonne lecture de cette phrase serait: «*Calculer la dérivée de la somme des fonctions f et g*» et une lecture abrégée: «*Calculer la dérivée de f plus g.*» Comme on peut le constater, même la lecture abrégée ne suit pas l'ordre des symboles. Le mot «dérivée» se lit au début de la lecture de l'expression symbolique, alors que le symbole la désignant, «'», est écrit à la toute fin de l'expression.

Dangers de la lecture *minimale*

Si des phrases *hybrides* aussi courtes posent des difficultés de lecture, on peut facilement imaginer l'ampleur du problème de décodage de phrases plus longues. Or ce problème de décodage est amplifié par la propension à la *lecture minimale*. En effet, il est plus fréquent d'entendre les élèves dire «f prime de 2» que «la dérivée de la fonction f en 2», ou encore «f plus g» que «la somme des fonctions f et g». Même si cette lecture rapide est *techniquement* correcte, il n'en demeure pas moins qu'elle *vide les phrases de leur sens*.

Faut-il alors s'étonner que cette tendance à abréger la lecture («*mine*» au lieu de «*minimum*», ou «*p.i.*» au lieu de «*point d'inflexion*») amène des élèves à lire «*lime x tend vers a f x*» au lieu de «*limite de f de x lorsque x tend vers a*»? Faut-il s'étonner alors que les mathématiques soient «du chinois» pour beaucoup? *À la limite*, cette propension à abréger la lecture des mots et des expressions symboliques nuit aux élèves, car elle leur fait perdre le sens de ce qu'ils font.

Ceci termine l'analyse des erreurs de nature langagière en mathématiques. Pour résumer les types d'erreurs observés, on peut retenir deux points importants:

- chaque langage: naturel, symbolique et graphique, pose aux élèves des problèmes sémantiques et syntaxiques;
- la présence simultanée de ces langages de natures différentes provoque d'autres types de problèmes: de traduction d'un langage à un autre, de décodage des phrases *hybrides*, d'attraction de certains éléments au détriment des autres ...

Le chapitre suivant porte sur l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques.

Chapitre 6

Importance des erreurs langagières sur les résultats en mathématiques

Le premier objectif de cette recherche était d'*identifier les erreurs de nature langagière en mathématiques* pour chacun des langages utilisés: naturel, symbolique et graphique. Dans les chapitres 3, 4 et 5, nous avons analysé les erreurs langagières observées au cours de cette recherche et leur fréquence dans la population étudiée.

Le présent chapitre porte sur le deuxième objectif de la recherche, lequel consistait à *évaluer l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques*. En cherchant à évaluer la proportion des points perdus dans les examens pour des erreurs langagières, nous voulions notamment distinguer les difficultés langagières des élèves de leurs véritables problèmes de compréhension mathématique. Une meilleure connaissance des difficultés des élèves permettrait d'intervenir plus adéquatement auprès d'eux.

Pour atteindre ce deuxième objectif, nous avons procédé en parallèle avec la poursuite du premier objectif (l'identification des erreurs langagières). Chaque fois qu'une erreur langagière était décelée dans un examen ou dans un test, nous tentions d'évaluer le nombre de points qu'elle avait fait perdre à l'élève. Cependant, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, l'identification des erreurs langagières à partir des copies seulement s'est avérée extrêmement complexe et il a fallu recourir à des entrevues avec des élèves pour préciser une grande partie de celles que nous avons relevées. Il n'a donc pas été possible d'évaluer, pour une classe entière, la proportion des points perdus dans un examen pour des erreurs langagières.

Nous avons cependant documenté plusieurs cas particuliers avec les élèves que nous avons rencontrés en entrevue. De plus, nous avons établi des barèmes pour le prétest et le test afin d'évaluer l'importance des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats dans chacun de ces cas.

Dans la première section de ce chapitre, nous illustrons quelques cas particuliers. La deuxième section porte sur les scores des élèves au prétest et la dernière sur les scores au test.

6.1 Quelques exemples particuliers

L'analyse des copies d'examens n'a pas permis, seule, d'évaluer l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats en mathématiques. Cependant, certaines questions se prêtent bien à une telle évaluation. En voici quelques exemples.

6.1.1 Exemples d'évaluations faites à partir de copies d'examens

Points perdus pour des erreurs dans l'utilisation du langage symbolique: Premier exemple

Dans une question d'examen, on demandait aux élèves de dériver la fonction définie par l'équation suivante

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^5}$$

Quelques élèves ont commencé leur solution en écrivant ceci:

$$\sqrt[3]{(x-4)^5} = [(x-4)^5]^{3/2} = (x-4)^{15/2}$$

En remplaçant la racine cubique par l'exposant 3/2, au lieu de 1/3, ces élèves ont commis une erreur dans l'utilisation du lagage symbolique, erreur qui leur a fait perdre cinq points sur dix dans cette question. Dans ce cas, il est intéressant de noter que la plupart d'entre eux ont ensuite effectué correctement le calcul de dérivée.

Deuxième exemple

Dans un autre examen, on demandait d'effectuer l'intégrale suivante: $\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

Un élève a commencé son calcul ainsi:

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-9} = \ldots$$

Cette erreur de syntaxe symbolique ou, plus précisément, de factorisation lui a fait perdre cinq points sur quinze dans cette question..

Troisième exemple

Dans un test portant sur les suites, on posait la question suivante:

> *Le premier terme d'une suite est $a_1 = 1$. Les termes suivants sont définis par la formule de récurrence:*
>
> $$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n \quad \textit{(pour les entiers } n \geq 1\textit{)}.$$
>
> *Trouvez le terme général de cette suite sous sa forme la plus simple. Écrivez votre raisonnement.*

Voici le début de solution d'un élève:

$a_n + 1 = (1+n) \bullet a_n$ ... *Je peux dire que* $\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n} + \frac{n}{1}$, *cela donne* $1+n$

On remarque ici deux erreurs, une dans chaque membre de l'équation. L'élève a d'abord confondu les expressions «a_{n+1}» et «$a_n + 1$» et il a ensuite fait une erreur de «simplification de fraction» bien visible dans son explication. Ses deux erreurs de syntaxe symbolique lui ont fait perdre sept points dans cette question. Sans ces erreurs, il aurait eu un résultat de 29 sur 30 pour ce test, au lieu de 22 sur 30 (le test comportait d'autres questions).

Ces exemples d'erreurs ne sont pas des cas isolés; nous pourrions en donner beaucoup d'autres. Cependant, les erreurs langagières ne sont pas toujours aussi faciles à déceler, surtout dans les cas où l'énoncé de la question ou la solution sont plus élaborés. Examinons quelques exemples où l'évaluation des points perdus pour de telles erreurs a pu se faire grâce à une entrevue.

6.1.2 Exemples d'évaluations faites lors d'entrevues

Premier exemple: Points perdus pour des erreurs dans l'utilisation du langage graphique

En examinant la copie d'un élève, dans un premier examen de calcul différentiel et intégral, nous avons été étonnés par la disparité des résultats d'une question à l'autre. Certaines questions étaient parfaitement réussies et d'autres complètement ratées. Cette copie était d'autant plus étonnante que les résultats étaient contraires à ce que l'on voit habituellement chez les élèves. Les questions ratées étaient celles que les élèves réussissent généralement assez bien et vice versa.

En entrevue, nous lui avons demandé, question par question, ce qui l'avait amené à ses réponses. En écoutant ses explications, nous avons constaté qu'il avait une maîtrise parfaite du langage symbolique, y compris la notation des limites habituellement malmenée par les élèves. Par exemple, il a refait la question suivante très rapidement et avec beaucoup d'aisance:

Soit $f(x) = \frac{2}{3x+1}$*, calculez* $f'(a)$ *à l'aide de la définition de la dérivée.*

La manipulation des fractions «à étages» et l'écriture symbolique étaient impeccables du début à la fin, ce qui est plutôt rare chez les élèves en début de cours collégial.

Par contre, l'élève avait de sérieuses lacunes du côté graphique. Il ne savait pas comment tracer le graphique approximatif de la dérivée d'une fonction à partir du graphique de cette dernière, ni transposer graphiquement des informations données en langage naturel ou en langage symbolique. Pourtant, des exercices semblables avaient été travaillés en classe. En fait, toutes les questions impliquant le langage graphique l'avaient embarrassé. Comme il y en avait plusieurs dans l'examen, il avait obtenu un résultat de 54 sur 100.

Après avoir fait le bilan de ses erreurs, il a réalisé qu'il avait perdu *au moins* 32 points (sur 100) pour des erreurs liées au langage graphique. Cela représentait 70% de l'ensemble des points qu'il avait perdus dans cet examen. Ce constat l'a surpris, car il n'était pas conscient de ses difficultés graphiques. Il est cependant reparti encouragé, sachant un peu mieux ce sur quoi il devait travailler pour améliorer ses résultats.

Deuxième exemple: Points perdus pour des erreurs syntaxiques

Avec un autre élève, nous avons analysé un examen portant sur les calculs de dérivée. Son résultat à cet examen était de 50 sur 100.

Quelques erreurs de syntaxe symbolique étaient évidentes sur sa copie; par exemple, un mauvais décodage d'une expression à dériver était mis en évidence par l'ajout de parenthèses placées de la façon suivante:

$$3x^2 - 5\sin x = 3x^2\,(-5\sin x)$$

À un autre endroit, il avait omis de mettre des parenthèses et obtenu le résultat suivant:

$$\cos x \bullet 3x^2 - 5 \quad \text{au lieu de} \quad \cos x\,(3x^2 - 5)$$

Les explications que l'élève a données au cours de l'entrevue ont fait ressortir d'autres erreurs syntaxiques qui n'étaient pas évidentes sur sa copie. Nous avons ainsi réalisé que certaines réponses erronées étaient attribuables à une mauvaise compréhension des questions posées et non à des erreurs conceptuelles.

Après avoir départagé les erreurs langagières des autres erreurs, nous avons constaté que l'élève avait perdu, *au minimum*, 21 points (sur 100) pour des erreurs syntaxiques, huit dans le langage naturel et treize dans le langage symbolique. Autrement dit, presque la moitié des 50 points perdus dans cet examen étaient imputables à des erreurs langagières.

Il est intéressant de signaler que cet élève n'avait fait aucune erreur dans l'application des formules de dérivée. Ses erreurs de syntaxe symbolique portaient uniquement sur des calculs algébriques qui devraient normalement être maîtrisés avant l'entrée au collégial. Ce cas n'est pas unique; plusieurs professeurs l'ont souligné et nous l'avons également observé chez d'autres élèves.

Points perdus pour une difficulté sémantique

Ce dernier exemple illustre une difficulté sémantique que nous n'aurions pas pu déceler sans une entrevue avec l'élève concerné. La difficulté est survenue dans le problème suivant:

> *Un entrepreneur doit effectuer d'importants travaux d'excavation qui nécessitent 1000 voyages de camions. Les camions peuvent emprunter deux routes différentes. Si x voyages se font par la première route, il en coûte $(1 + x^2)\$$ par voyage, alors que x voyages par la deuxième route coûtent $(1 + 20x)\$$ par voyage.*
>
> a) *Si x camions empruntent la première route, combien emprunteront la deuxième?*
>
> b) *Donner le coût total des voyages si x camions empruntent la première route.*
>
> c) *Combien de voyages doivent se faire par chaque route si l'on veut minimiser les coûts des voyages?*

Comme la réponse était restée en blanc sur la copie et que cette question était la dernière de l'examen, on aurait pu penser que l'élève avait manqué de temps. En entrevue, nous lui avons demandé ce qui l'avait amené à ne pas répondre à cette question. Il nous a répondu qu'il ne la comprenait pas. Nous l'avons alors invité à relire l'énoncé à haute voix, puis nous lui avons demandé s'il pouvait répondre à la première sous-question. Voici une partie du dialogue qui a suivi:

– Non, je ne sais pas.
– Qu'est-ce que tu comprends dans la question *a)*?
– Rien! Je ne comprends pas la question.
– Si trois cents camions empruntent la première route, combien emprunteront la deuxième?
– Sept cents, répondit l'élève sans hésitation.
– Si x camions empruntent la première route, combien emprunteront la deuxième?

– Je ne sais pas.
– Si huit cents camions empruntent la première route, combien emprunteront la deuxième?
– Bien deux cents, répondit l'élève, sur un ton impatient.
– Comment es-tu arrivé à deux cents?
– Bien, moins mille.
– Peux-tu préciser un peu plus le calcul que tu as fait?
– Bien, mille moins huit cents.
– Si x camions empruntent la première route, combien emprunteront la deuxième?
L'élève réfléchit un instant, puis demanda d'un ton hésitant:
– Est-ce qu'il fallait que je réponde mille moins *x*?
– Qu'en penses-tu?
– Bien ... je ne sais pas ... combien? ... Il me semble que «mille moins x» ne peut pas être une réponse à «combien» ...

Nous avons réalisé, à cet instant, que l'élève avait éprouvé une difficulté avec le mot «combien». Croyant qu'il fallait répondre à cette question par *un nombre*, il avait griffonné un début de solution sur une feuille. Mais, constatant que cette solution répondait plutôt à la question c), il n'avait pas poursuivi. Ne pouvant répondre à la première question, il avait renoncé à la suite du problème et n'avait rien transcrit sur sa copie.

Cette *difficulté sémantique* lui a valu une note de 0 sur 15 pour cette question. Or, dans la suite de l'entrevue, l'élève a pu continuer la solution du problème. Il n'aurait peut-être pas eu tous ses points à l'examen s'il n'avait pas buté sur la première question, mais il aurait au moins eu dix points de plus, d'après le barème de correction.

Un examen rapide du reste de la copie a révélé d'autres erreurs langagières qui lui avaient aussi fait perdre des points. Cela a eu pour effet de lui redonner le sourire, car, a-t-il dit, «*Je suis plus poche en français que je le pensais, mais moins nul en maths* ».

Comme on peut le voir, les entrevues nous ont amenés à mieux cerner les difficultés des élèves rencontrés. Elles ont permis de distinguer leurs erreurs langagières des autres erreurs (erreurs conceptuelles; erreurs de calcul, ...) et, dans le cas des examens analysés, d'en évaluer l'impact sur les résultats. La majorité des élèves rencontrés ont manifesté leur satisfaction à la suite de cet exercice. Le fait de mieux identifier leurs difficultés les a généralement amenés à se trouver moins «nuls» en mathématiques et leur a redonné confiance.

Mais il n'était pas concevable de faire des entrevues individuelles avec tous les élèves pour évaluer, en général, l'impact des erreurs langagières sur leurs résultats. Nous avons donc décidé d'utiliser les résultats du prétest et du test pour évaluer l'importance des erreurs langagières. Voici le résultat de cette évaluation dans le cas du prétest.

6.2 Scores des élèves au prétest

Ainsi que nous l'avons mentionné dans la méthodologie, le prétest a été administré au début de la session d'hiver 1995 à 348 élèves inscrits en Mat. 203 (calcul différentiel et intégral II). Il comportait une soixantaine de questions ouvertes et très courtes, pour une durée de 45 minutes. Les questions étaient regroupées en 18 thèmes et portaient sur des aspects langagiers importants du premier cours de calcul différentiel et intégral (Mat.103).

Le prétest ne nécessitait aucune étude, mais il permettait de vérifier si les élèves avaient bien saisi le sens des termes, des symboles et des aspects graphiques visés. Il permettait également de voir si les élèves étaient capables d'analyser des expressions symboliques, des graphiques, ou des phrases, et s'ils pouvaient traduire d'un langage à un autre.

Comme les questions étaient d'égale importance et que la plupart étaient formulées de telle sorte que la réponse était soit bonne, soit mauvaise, nous avons établi le barème suivant: deux points pour une bonne réponse, aucun point pour une mauvaise réponse et, occasionellement, un point pour une réponse incomplète ou partiellement bonne.

Pour évaluer les scores par langage, nous avons réparti les questions en fonction du ou des langages visés. Si une question visait plus d'un langage, elle était comptée pour chacun d'eux, car il était difficile de déterminer si les erreurs étaient plus attribuables à un langage qu'à un autre. Nous avons aussi ajouté, dans la catégorie «langage naturel», toutes les questions dont l'énoncé était susceptible de soulever une difficulté langagière pour les élèves, même si ces questions ne visaient pas directement le langage naturel. Une même question pouvait donc se retrouver dans chacune des catégories.

Le tableau de la page suivante donne le score moyen des élèves pour chacun des langages et pour l'ensemble du prétest. Les résultats ont été ventilés par programme afin de tenir compte des disparités entre les différents groupes.

Dans ce tableau, nous avons regroupé les élèves de sciences de la nature du baccalauréat international (B.I.) et du D.E.C., car tous ces élèves avaient suivi le même cours Mat.103 à la session précédente et avaient passé les mêmes examens.

Comme on peut le constater dans ce tableau, les résultats des élèves de sciences de la nature et du programme intégré sont assez semblables, mais ceux des élèves du baccalauréat international, option sciences humaines, sont beaucoup plus faibles. Cette différence s'explique par le fait que les élèves du B.I. Sc.H. avaient terminé le cours Mat. 103 un an auparavant, alors que les autres élèves l'avaient fait à la session précédente. On pourrait en déduire que la maîtrise des aspects langagiers visés a diminué avec le temps.

TABLEAU 6.1
Score moyen (en %) des élèves au prétest, selon le programme d'études et selon le langage visé par les questions

	Langage naturel	Langage symbolique	Langage graphique	Ensemble des questions
Sc. N. (D.E.C. et B.I.) (282 élèves)	67	68	74	72
B.I. Sc. H. (44 élèves)	47	48	58	51
P.I. (22 élèves)	63	65	74	70
Groupe total (348 élèves)	64	65	72	69
Groupe total sans B.I. Sc. H. (304 élèves)	66	67	74	72

Est-il *normal* qu'il en soit ainsi? Est-il normal *d'oublier le sens* d'un mot (ou d'un symbole ou d'un élément graphique) parce qu'on ne l'a pas utilisé pendant un an? Est-ce vraiment de l'oubli ou ne s'agirait-il pas plutôt d'une *maîtrise insuffisante* du sens? Les élèves qui ont oublié des notions les avaient-ils réellement *comprises* ou seulement *apprises*? Ceux qui avaient *réellement compris* ont-ils oublié aussi vite que ceux qui avaient *appris sans comprendre*? Nous n'avons pas de réponse à ces questions, mais il serait sûrement intéressant de les creuser.

Dans l'ensemble, les questions portant sur le langage graphique ont été mieux réussies que celles portant sur le langage naturel ou le langage symbolique. Si on exclut les élèves du B.I. Sc.H. (voir la dernière ligne du tableau), on obtient un score moyen de 72% pour le prétest. En formulant autrement, on peut dire, qu'en moyenne, ces élèves ne maîtrisaient pas 28% des aspects langagiers visés dans le prétest.

Comme le contenu du prétest s'apparentait à un test de révision, donc à un test «mathématique», le score moyen obtenu peut nous donner une bonne idée de l'impact des erreurs langagières de ces élèves sur leurs résultats en mahématiques. D'ailleurs, les professeurs ont estimé que les résultats individuels des élèves au prétest reflétaient assez bien leur niveau de compréhension à la session précédente (en Mat.103).

Nous passons maintenant aux scores obtenus dans le test. Ces résultats apportent un autre éclairage, car le test était plus élaboré et plus raffiné que le prétest, il portait sur des notions plus générales et a été administré à une population plus grande et plus variée.

6.3 Scores des élèves au test

Ainsi que nous l'avons mentionné dans la méthodologie, le test a été administré au début de la session d'automne 1995 à 620 élèves nouvellement inscrits au Collège et suivant un cours de mathématiques. Le test visait divers aspects langagiers relatifs à des notions mathématiques de niveau secondaire et était divisé en deux parties distinctes. La partie A, d'une durée approximative de 35 minutes, était constituée de questions ouvertes et très courtes, dans le style du prétest. La partie B, d'une durée approximative de 45 minutes, était constituée de questions à choix multiples, avec un nombre variable de bonnes réponses par question.

Le test, tout comme le prétest, ne nécessitait aucune étude, mais il permettait de vérifier si les élèves avaient bien saisi le sens des termes, des symboles et des aspects graphiques visés. Il permettait également de voir si les élèves étaient capables d'analyser des expressions symboliques, des graphiques, ou des phrases, et s'ils pouvaient traduire d'un langage à un autre.

La partie A étant longue à corriger, nous avons retenu un échantillon aléatoire de 125 copies pour fin d'analyse, alors que la partie B a été analysée pour l'ensemble du groupe. Comme nous n'avons pas le score de tous les élèves dans chacune des parties, nous analysons celles-ci séparément.

6.3.1 Scores des élèves dans la partie A du test

Étant donné la similitude dans le style des questions du prétest et de la partie A du test, nous avons utilisé ici le même barème que pour le prétest, soit: deux points pour une bonne réponse, aucun point pour une mauvaise réponse et, occasionellement, un point pour une réponse incomplète ou partiellement bonne. Pour évaluer les scores par langage, nous avons aussi procédé de la même façon que pour le prétest.

Le tableau suivant donne le score moyen des 125 élèves pour chacun des langages et pour l'ensemble de la partie A.

TABLEAU 6.2
Score moyen (en%) des 125 élèves dans la partie A du test, selon le langage visé par les questions

Langage naturel	Langage symbolique	Langage graphique	Ensemble des questions
75	68	64	71

Les scores n'ont pas été ventilés par programme, car les nombres d'élèves par sous-groupe étaient disproportionnés et, dans certains cas, beaucoup trop faibles.

Le score moyen des élèves pour l'ensemble des questions de la partie A du test est de 71%. Ce résultat est presque identique à celui obtenu au prétest. On peut donc dire que l'impact des erreurs langagières des élèves sur leurs résultats est le même dans chacun de ces cas.

Les scores moyens par langage sont cependant inversés. Les questions les mieux réussies, ici, sont celles impliquant le langage naturel, ensuite celles portant sur le langage symbolique, puis celles impliquant le langage graphique. Dans le prétest, c'était exactement l'inverse.

On peut probablement expliquer cette différence par le fait que les élèves qui ont passé le test entraient au collégial, alors que ceux qui ont passé le prétest avaient tous réussi le premier cours de calcul différential et intégral (Mat.103). Or, dans ce cours, les élèves travaillent beaucoup les langages graphique et symbolique. Ils ont donc l'occasion de s'améliorer sensiblement dans chacun de ces langages au cours de leur première session au collégial.

Examinons maintenant les scores obtenus par l'ensemble des élèves à la partie B du test.

6.3.2 Scores des élèves dans la partie B du test

Les 56 questions de la partie B du test offraient un choix de cinq réponses, avec un nombre variable de bonnes réponses par question. Chaque question était donc un regroupement de cinq «vrai ou faux» portant sur le même thème, le nombre de «vrais» pouvant varier de 0 à 5.

Pour obtenir les scores des élèves dans cette partie, nous avons examiné trois barèmes différents. Le premier barème accordait un point pour une question si les cinq «vrai ou faux» étaient exacts, et aucun point dans les autres cas. Le score des élèves pouvait donc varier de 0 à 56. Nous n'avons pas retenu ce barème pour deux raisons. D'une part, il était beaucoup trop sévère et donnait des résultats beaucoup trop faibles. D'autre part, il ne faisait pas la différence entre les élèves qui avaient fait une seule erreur dans une question et ceux qui en avaient fait deux, trois, quatre ou même cinq.

Le deuxième barème accordait un point pour chaque «vrai ou faux» réussi, indépendamment du regroupement par question, et aucun point autrement. Le score des élèves, dans ce cas, pouvait donc varier de 0 à 280. Nous n'avons pas retenu ce deuxième barème non plus, car il était trop «large» et ne discriminait pas les élèves selon les thèmes abordés. Par exemple, un élève qui ne maîtrisait aucun thème, mais qui avait quelques bons «vrai ou faux» par question, pouvait obtenir le même score qu'un autre qui maîtrisait très bien certains thèmes, mais pas du tout d'autres.

Le troisième barème, celui que nous avons retenu, accordait deux points pour une question si les cinq «vrai ou faux» étaient exacts, un point s'il y avait une seule erreur, et aucun point autrement. Ce barème n'est pas parfait, mais il donne un tableau assez fidèle des résultats des élèves.

Pour évaluer les scores par langage, nous avons procédé de la même façon que dans le prétest et dans la partie A du test, en regroupant les questions selon le ou les langages impliqués. Le tableau suivant donne le score moyen des 620 élèves pour chacun des langages et pour l'ensemble de la partie B.

TABLEAU 6.3
Score moyen (en %) des 620 élèves dans la partie B du test, selon le langage visé par les questions

Langage naturel	Langage symbolique	Langage graphique	Ensemble des questions
58	49	51	55

Les scores n'ont pas été ventilés par programme, car la comparaison des résultat entre les différents sous-groupes a été réalisée dans le cadre de la recherche de profils, laquelle est traitée au chapitre suivant.

Comme on peut le constater, les scores sont beaucoup plus faibles dans la partie B du test que dans la partie A. Ainsi, le score moyen pour l'ensemble des questions de la partie B est de 55%, alors qu'il était de 71% pour la partie A. Il ne faut cependant pas accorder trop d'importance à cette comparaison, car les deux parties du test étaient très différentes, par le format des questions et par le barème utilisé. De plus, les élèves étaient sûrement plus fatigués et moins concentrés dans la partie B que dans la partie A, car le test durait environ 75 à 90 minutes. On ne peut donc pas vraiment comparer les scores de ces deux parties, chacune d'elles doit être prise séparément.

Si on observe les scores moyens par langage, on constate que les questions les mieux réussies sont celles impliquant le langage naturel, comme dans la partie A. Cependant, les questions les moins réussies sont celles impliquant le langage symbolique, alors que dans la partie A, c'étaient les questions graphiques. Cette différence s'explique du fait que les questions les plus difficiles sur le langage symbolique étaient dans la partie B, alors que les questions les plus difficiles sur le langage graphique étaient dans la partie A. Cela n'a pas été fait intentionnellement, ce sont les réponses des élèves qui ont permis d'identifier les questions les plus difficiles dans chacun des langages.

En résumé, nous retenons les points suivants:

- Il n'est pas facile de déceler les erreurs langagières des élèves en analysant uniquement leurs copies d'examens. On peut cependant y parvenir en les rencontrant individuellement.
- Les élèves apprécient généralement d'apprendre que certaines de leurs erreurs en mathématiques sont de nature langagière et non d'ordre conceptuel. Cela leur donne le sentiment d'être meilleurs en mathématiques qu'ils le pensaient (ou «moins nuls», comme l'expriment certains).

- Les erreurs langagières des élèves ont un impact important sur leurs résultats en mathématiques. Si on se fie aux résultats du prétest, cela vaut aussi pour les élèves «forts» qui ont déjà réussi un premier cours de calcul différentiel et intégral.

Il est donc important d'intervenir pour corriger les faiblesses langagières des élèves en mathématiques ou, à tout le moins, les réduire.

Conclusion

CONCLUSION

Préoccupés par les difficultés qu'éprouvent les élèves dans les cours de mathématiques, nous avons été amenés à réfléchir à la dimension langagière dans l'apprentissage de cette discipline. Les travaux de nombreux chercheurs portant sur la qualité de la langue au collégial ou sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques nous ont encouragés à poursuivre la réflexion dans cette voie. Par cette recherche, nous visions *deux objectifs*: identifier les erreurs langagières (dans les langages naturel, symbolique et graphique) des élèves en mathématiques et évaluer l'impact de ces erreurs sur leurs résultats dans la discipline.

Pour atteindre ces objectifs, nous avons suivi plusieurs étapes et combiné diverses approches. La dynamique de la recherche nous a amenés à réaliser un grand nombre d'entrevues (63) auprès d'élèves et de professeurs et à élaborer plusieurs instruments. Il en a résulté beaucoup de rigueur dans la démarche. Un des instruments élaborés, le *test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques*, a non seulement été extrêmement important dans la réalisation de ce projet, mais il peut de nouveau être utilisé pour d'autres groupes d'élèves (voir l'annexe 8).

La recherche a permis d'identifier *un grand nombre d'erreurs de nature langagière en mathématiques* et de mieux comprendre les difficultés des élèves dans cette discipline. De façon générale, nous constatons que l'utilisation de trois langages en mathématiques ne favorise pas nécessairement la compréhension et la visualisation des notions chez tous les élèves. Pour beaucoup, le recours aux langages symbolique et graphique contribue plutôt à augmenter la complexité de la discipline et devient une source de confusion. De nombreux élèves éprouvent des difficultés de nature sémantique ou syntaxique dans l'un ou l'autre des langages et peuvent donc difficilement passer de l'un à l'autre. De plus, la présence simultanée de ces langages, de natures différentes, provoque d'autres types de problèmes, notamment de décodage des phrases *hybrides* et d'attraction de certains éléments au détriment des autres.

La partie A du test, constituée de questions ouvertes, a notamment permis d'explorer l'éventail des conceptions erronées des élèves au sujet de nombreuses notions mathématiques. D'importantes lacunes langagières ont été mises au jour grâce à cette forme de questions, par exemple: la confusion entre un point et l'ordonnée de ce point, l'absence de vision des nombres comme des longueurs, ainsi que la confusion entourant la notion de fonction, sa représentation graphique et l'expression symbolique «$f(x)$». Nous avons ainsi constaté que beaucoup d'élèves confondent les termes «fonction» et «pente», «fonction» et «abscisse», ou encore, «fonction» et «coordonnées».

La partie B du test a confirmé certaines lacunes mentionnées précédemment; elle a révélé de nombreuses erreurs sémantiques ou syntaxiques des élèves ainsi que beaucoup d'erreurs de traduction d'un langage à un autre. Le recours à des questions à choix multiples dans cette partie a aussi permis d'évaluer la fréquence des erreurs langagières auprès d'une importante population étudiante. Les deux parties du test ont donc été une riche source de données.

Les entrevues individuelles avec des élèves ont été un autre instrument extrêmement utile tout au long de la recherche. Combinées à l'analyse de copies de travaux et d'examens, elles nous ont permis d'identifier beaucoup d'erreurs langagières en mathématiques, de préciser les types d'erreurs et de mieux comprendre les difficultés des élèves dans cette discipline.

Grâce aux entrevues, au prétest et au test, il a aussi été possible d'évaluer *l'impact des erreurs langagières* des élèves sur leurs résultats en mathématiques. Nous avons constaté qu'en moyenne beaucoup de points sont perdus dans les examens pour des erreurs de nature langagière (erreurs de sens ou erreurs syntaxiques dans l'un ou l'autre des langages, erreurs de traduction ou tout autre type d'erreurs). À cette étape, nous nous sommes rendu compte que beaucoup d'élèves apprécient d'apprendre que certaines de leurs erreurs en mathématiques sont de nature langagière et non d'ordre conceptuel. Cela leur donne le sentiment d'être meilleurs qu'ils le pensent dans cette discipline.

Malgré la qualité des instruments utilisés (entrevues, prétest, test, etc.), il n'aurait pas été possible de recueillir autant de données ni d'atteindre les résultats obtenus sans la grande *collaboration des élèves et des professeurs*. Ces personnes ont non seulement accepté généreusement de participer à la recherche chaque fois qu'elles ont été sollicitées, mais elles y ont mis beaucoup d'enthousiasme. Grâce à l'implication des professeurs, il a été possible de faire passer le prétest et le test à de grands groupes d'élèves et de réaliser l'ensemble des activités dans des conditions idéales. De leur côté, les nombreux élèves qui ont participé à la recherche l'ont fait avec beaucoup de sérieux, ce qui donne une grande crédibilité aux résultats obtenus.

En ce qui concerne l'interprétation des résultats, il est important de rappeler que la recherche a été réalisée auprès d'une *clientèle d'élèves du secteur général seulement*. Or ils sont en moyenne plus forts en mathématiques et en français que ceux du secteur professionnel. De plus, cette clientèle, provenant d'un collège privé, est probablement plus forte que dans l'ensemble des collèges, à cause de la sélection des élèves. Les problèmes langagiers identifiés dans cette recherche sont donc à prendre au sérieux, car il y a de fortes chances qu'ils soient aussi graves, sinon pires, dans les autres collèges.

L'ensemble des résultats de cette recherche nous convainc donc de la *nécessité d'intervenir* pour corriger les lacunes langagières des élèves en mathématiques. Il est notamment primordial de dépister rapidement les élèves qui éprouvent des difficultés de nature langagière. À cette fin, le test élaboré dans cette recherche constitue un excellent outil de dépistage. Il est aussi nécessaire de s'assurer régulièrement que les élèves maîtrisent bien le sens des termes, des symboles et des éléments graphiques utilisés et qu'ils peuvent transposer leurs connaissances d'un langage à un autre.

Dans cet esprit, deux recherches en cours poursuivent le travail amorcé dans celle-ci. L'une, intitulée «*Intervenir sur les langages en sciences*», vise la conception, la validation et l'implantation de stratégies d'intervention à l'intention des élèves du programme de sciences de la nature afin de corriger leurs faiblesses langagières en biologie, en chimie, en mathématiques et en physique. L'autre, intitulée «*Approche sémantique et difficultés langagières*», a pour objet la mise au point et l'expérimentation de stratégies d'apprentissage reposant sur une approche sémantique à l'intention des élèves ayant des difficultés langagières en mathématiques et en philosophie.

Pour terminer, et en espérant encourager les professeurs de mathématiques à intervenir sur le plan de la langue, nous citons ce passage d'une lettre écrite par un élève qui a participé à quelques entrevues dans le cadre de cette recherche:

> *«Vous ne m'avez pas uniquement aidé en mathématiques, mais également dans toutes les matières. Je sais à présent qu'il faut toujours être à jour et connaître la matière sous toutes ses formes, car chaque mot, chaque terme compris apporte une signification qui rendra la matière logique, intelligible et, de ce fait, facile.»*

C'est ce que nous souhaitons à tous les élèves.

Bibliographie

ASSUDE, Teresa. «Racines carrées: conceptions et mises en situations d'élèves de quatrième et troisième», *Petit x*, No 20,1989, p. 5-33

BARUK, Stella. *Fabrice, ou l'école des mathématiques*, Seuil,1977, 264 p.

BARUK, Stella. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, 1992.

BEDNARZ, Nadine. «L'enseignement des mathématiques et le Québec de l'an 2000», CIRADE, Agence D'ARC inc., 1990, p. 45-83

BIBEAU, G. *Enquête sur le français écrit dans les cégeps*, Montréal, Cégep de Maisonneuve, 1990.

BIBEAU, Yvan, et COMEAU, Lucie, et RICHARD, Danielle. *Test de dépistage en mathématiques, Arrimage secondaire et collégial*, Cégep de Trois-Rivières, PARÉA, 1992, 62 p.

BIGARD, Alain. *Mathématiques échec et sélection*, Cédic, 1977, 126 p.

BOUCHARD, Lucien, et DAIGLE, Raymonde, et al. *Aide Mathématique Individualisée*, Cégep de Jonquière, PARÉA, P.R.O.S.I.P., 1981, 131 p.

BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Collection Histoire de la pensée, Hermann, 1969, 323 p.

BOURBEAU, Nicole. *La lisibilité des textes didactiques* (Guide pratique), Collège de Sherbrooke, PARÉA, 1988.

BRADLEY, C. A. «The relationship between mathematics language facility and mathemetics achievement among junior high school students», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol 12, Number 2, 1990, p. 14-31.

BRONCKART , J.P., et al. «Vygotsky aujourd'hui», Delachaux et Niestlé, 1985, p. 25-95.

BROUILLET, C., et GAGNON, D. *La maturation syntaxique au collégial et les structures de base de la phrase*, Cégep du Vieux-Montréal, PARÉA, 1990.

BURTON, Martha B. «A linguistic basic for student difficulties with algebra», *For the Learning of Mathematics*, 8, 1, February 1988, p. 2-7.

CLEMENT, J., et LOCKHEAD, J., et MONK, G. «Translation difficulties in learning mathematics», *American Mathematical Monthly*, No 88, 1981, p. 286-290.

CLEMENT, John. «Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions», *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 3, No. 1, 1981, p. 3-27.

CLEMENT, John. «The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol 11, Number 2, 1989, p. 77-87.

DREYFUS, Amos, et MAZOUZ, Yossef. «L'utilisation judicieuse du langage des graphiques par les élèves de second dans le domaine de la biologie», *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle 1-3 / 1993*, 1993, p. 245-266.

DUBOIS, J. et autres. *Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, Larousse*, Paris, 1994.

DUNHAM, PENELOPE H., et OSBORNE, Alan. «Learning how to see: students' graphing difficulties», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol 13, Numbers 4, 1991, p. 35-49..

DUVAL, Raymond. «Graphiques et équations, Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation», *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle 1-3 / 1993*, 1993, p. 57-72.

GLAESER, Georges. *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann, 1971, 202 p.

GUILLERAULT, M., et LABORDE, Colette. «Learning to formulate in mathematics: imitation or creation? », ICME, Adelaïde, 1984.

HOULE, R. *Expérimentation d'un programme d'habilitation a la lecture pour des étudiants du collégial éprouvant des difficultés majeures en lecture*, Collège de la région de l'amiante, PARÉA, 1989, 146 p.

JACOBI, D. «Les terminologies et leur devenir dans les textes de vulgarisation scientifique», *Didaskalia*, No 1, 1993, p. 69-83.

JANVIER, Claude. «Les graphiques cartésiens: des traductions aux chroniques», *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle 1-3 / 1993*, 1993, p. 17-37.

KAPUT, James J., and SIMS-KNIGHT, Judith E. «Errors in translations to algébraic equations: roots and implications», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol 5, No 3 & 4, 1983, p. 63-78.

LABORDE, Colette. «A propos d'une situation d'interaction et de communication en géométrie?» Document de travail pour le colloque "Nouvelles perspectives dans l'étude expérimentale du développement de l'intelligence", *IMAG*, Université Scientifique, BP : 53, 38041 Grenoble, CEDEX 9, 1983, p. 2-17.

LABORDE, Colette. «Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique: Langue naturelle et écriture symbolique», *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol 4:1, 1983, p.199-203.

LABORDE, Colette. *Langue naturelle et écriture symbolique deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Université de Grenoble, 1982, 416 p.

LABORDE, Colette, et GUILLERAULT, M. «*Une situation de communication en géométrie*», Actes de PME, 1981.

LABORDE, Colette, whith the collaboration of CONROY, J.S., DE CORTE, E., and LEE, L., and PIMM, D. «*Language and mathematics*», ICME Study Series, 1989, p. 4-19.

LAFONTAINE,Louise, et LEGROS,Catherine. «Profils linguistiques, cognitifs et motivationnels d'étudiants du postsecondaire faibles en français écrit», *Revue des sciences de l'éducation*, Vol XXI, no 1,1995, p. 121-144.

LAFORTUNE, Louise, et ST-PIERRE, Lise. *Les processus mentaux et les émotions dans l'apprentissage*, Les Éditions Logiques, Montréal, PARÉA, 1994, 396 p.

LAROUSSE. *Grand dictionnaire de la langue française* , Larousse, Paris, Vol. 1-7, 1971-

1978.

LAROUSSE MULTIMÉDIA. *Larousse Multimédia Encyclopédique* (Mathématiques), Larousse. 1995.

LE NOUVEAU PETIT ROBERT. *Dictionnaire de la langue française 1*, nouvelle édition remaniée et amplifiée, Dictionnaires Le Robert, 1993.

LECAVALIER, J., et BRASSARD, A. *L'enseignement stratégique en lecture/écriture*, Collège de Valleyfield, PARÉA, 1993.

LECLERC, Jacques. *Qu'est-ce que la langue?*, Mondia Éditeurs inc., 1993, 458 p.

LEGENDRE, Renald. *Dictionnaire actuel de l'Éducation*, Guérin, 1993, 2ième édition, 1500 p.

LEGROS, C., et ROY, G.-R. «Du discours métalinguistique tenu par des étudiants du postsecondaire relativement aux accords de genre et de nombre.», *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. XXI, No1, 1995, p. 227-257.

LEGROS, Georges. «Maîtriser le français écrit à l'université: un simple problème de langue?», *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. XXI, No1, 1995, p. 59-74.

MOFFET, J-D. *Développer la conscience d'écrire. Accroître la métacognition du scripteur pour améliorer la qualité de l'expression écrite au collégial*, Cégep de Rimouski, PARÉA, 1992.

MOFFET, J-D. et Demalsy, A. *Les compétences et la maîtrise du français au collégial*, Cégep de Rimouski, PARÉA, 1994, 196 p.

MOFFET, J-D. *Développer la conscience d'écrire*, Cégep de Rimouski, PARÉA, 1992, 255 p.

MOFFET, J-D. «Des stratégies pour favoriser le transfert des connaissances en écriture au collégial», *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. XXI, No1,1995, p. 95-120.

NADOT, S. «Les représentations graphiques des fonctions», *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle 1-3 / 1993*, 1993, p. 137-158.

NIMIER, Jacques. *Les modes de relations aux mathématiques*, Méridiens, 1988, 304 p.

NIMIER, Jacques. *Les maths le français, les langues... A quoi ça me sert?*, Cédic/nathan, 1985, 265 p.

PARKER, Monique. «Une approche graphique de la dérivation», *Mathématique et Pédagogie*, No 90, Janvier-Février, 1993, p. 29-32

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. «Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de "classes faibles"», *Petit x*, No 35, 1994, p. 5-40

REYNES, Francis. «Le concept d'égalité: Clef ou verrou», *Petit x*, No 35, 1994, p. 61-73

ROSNICK, Peter, and CLEMENT, John. «Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions», *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 3, No 1, 1980, p. 3-27.

ROY, G-R., et LAFONTAINE,L., et BOURDEAU, G., et VIAU, R. *Vers un triple regard sur le français écrit des étudiants de collèges et d'universités.*, Sherbrooke: Éditions du CRP, PARÉA, 1992.

SIERPINSKA, Anna. *La compréhension en mathématiques*, Modulo, 1995, 186 p.

T.GIARD, Jacqueline. *Étude exploratoire de la résolution de problèmes par le groupe, sur réseau micro-informatique*, Collège de Sherbrooke, PARÉA, 1991, 165p.

TREMBLAY, R. , et LACROIX, J.G., et LACERTE, L. *Le texte argumentatif et les marqueurs de relation*, Cégep Vieux Montréal, PARÉA, 1994, 283 p.

VERGNAUD, Gérard. «Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la représentation», *Les Sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle 1-3 / 1993*, 1993, p. 9-16

VIENS, Chantal. *Recherche qualitative: Entrevue et analyse des données, Cahier des participants et des participantes*, document préparé dans le cadre d'un séminaire de l'ARC, 1994, 35 p.

WOLLMAN, Warren. «Determining the sources of error in a translation from sentence to equation», *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 14, No 3, 1983, p. 169-181.

Annexes

Liste des annexes

Annexe 1:	Lettre de déontologie	173
Annexe 2:	Protocole pour les entrevues individuelles avec les élèves	175
Annexe 3:	Prétest	179
Annexe 4:	Protocole d'entrevue avec les professeurs à la suite du prétest	189
Annexe 5:	Liste des questions prioritaires du prétest	193
Annexe 6:	Caractéristiques des élèves invités en entrevue à la suite du prétest	195
Annexe 7:	Lettre invitant les élèves à une entrevue	199
Annexe 8:	Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques, Partie A: questions ouvertes	202
	Partie B: questions objectives	211
Annexe 9:	Directives pour l'administration du test	231
Annexe 10:	Répartition des élèves, selon le choix de réponses et le programme, pour chaque question analysée de la partie B du test	233
Annexe 11:	Répartition des élèves, selon la combinaison de réponses, pour chacune des questions de la partie B du test	239

Annexe 1

Lettre de déontologie

Lettre de déontologie

Collège Jean-de-Brébeuf, septembre 1994

Chèr(e) élève,

Nous menons actuellement une recherche sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques. Cette recherche, subventionnée par le Ministère de l'Éducation, poursuit les objectifs suivants:

- Identifier les erreurs de nature langagière en mathématiques, c'est-à-dire identifier les erreurs liées aux langages naturel, symbolique et graphique.

- Évaluer l'importance des erreurs de nature langagière sur les résultats en mathématiques.

Notre recherche est basée sur l'analyse de travaux et de copies d'examens et sur des entrevues avec des élèves. Nous sollicitons votre collaboration en nous permettant d'examiner vos copies et d'enregistrer les conversations lors des entrevues. Nous nous engageons à respecter la confidentialité dans l'usage que nous ferons de ces données.

Nous vous remercions de votre précieuse collaboration. Votre générosité permettra à d'autres élèves, nous l'espérons, de mieux cerner leurs difficultés en mathématiques afin de mieux les contrôler.

Margot De Serres
professeure de mathématiques

Jean-Denis Groleau
professeur de mathématiques

J'ai pris connaissance de la lettre de déontologie. Par la présente, j'autorise Margot De Serres et Jean-Denis Groleau à examiner mes copies de travaux et d'examens et d'enregistrer les entrevues dans le cadre de cette recherche. Il me sera permis, d'ici la fin de leur recherche, de consulter (une fois) sur place le ou les documents émanant des entretiens qui me concerneront.

signature de l'élève

Annexe 2

Protocole pour les entrevues individuelles avec les élèves

Protocole d'entrevue

Rencontre individuelle avec des élèves

Date: Heure: Fiche #
MAT. X( )

Nom de l'élève: Professeur

REMARQUES PARTICULIÈRES

PROBLÈME

ÉTAPE 1.

- Relire le protocole pour l'avoir bien en tête
- Bien connaître le nom de l'élève à interviewer
- Vérifier les aspects qui concernent cet élève
- Avoir le contrôle sur son équipement
- Posséder suffisamment de piles et de cassettes
- Posséder la bonne cassette
- Papier, crayons aiguisés, gomme à effacer, etc

ÉTAPE 2.

- Se présenter, établir une relation chaleureuse
- Présenter l'objet de la recherche et de l'entrevue
- Solliciter la permission de prendre des notes et d'enregistrer
- Expliquer pourquoi: on ne veut rien oublier d'important
- On veut être le plus objectif possible dans ce que l'on va noter
- On prendra quelques notes de temps en temps pour ne pas interrompe la conversation si on pense à quelque chose que l'on ne veut pas oublier.

ÉTAPE 3.
Les faits - le problème

- Peux-tu me dire comment tu as résolu ce problème-là ?

- Comment es-tu arrivé à cette réponse?

- Comment as-tu procédé?
  ....

- Peux-tu m'en dire plus? (s'il y a lieu)

- Ici, il n'y a pas de réponse: peux-tu me dire ce qui t'a amené à ne pas répondre?

- Si réponse partielle, passer à **(a)**.
- Si l'élève répond qu'il ne comprend pas la question, passer à **(b)**

    (a) Peux-tu m'en dire plus ?

    (b) Qu'est-ce-que tu comprends dans la question?

- S'il répond encore la même chose, passer à **(c)**, sinon à **(a) ou ....**

    (c) J'aimerais que tu me lises tout haut la question.

- Lecture fidèle: Y a-t-il quelque chose qui te vient?

ÉTAPE 4.
Faire un retour après l'entrevue

- Qu'est-ce que tu-as aimé, pas aimé?

- Quelle est est ou quelles sont les questions qui t'ont le plus aidé à faire une démarche et à la réaliser?

- Souhaites-tu une autre rencontre du même style?

Annexe 3

Prétest

Prétest janvier 1995

Collège Jean-de-Brébeuf **Nom:** ________________

Directives: L'usage de la calculatrice est interdit. (Aucun calcul n'est nécessaire pour répondre aux questions.) Durée: 45 minutes

1 Donner la valeur approximative de chacun des nombres suivants.

a) $\pi \approx$ __________ b) $e \approx$ __________ c) $\sqrt{10} \approx$ __________

2 Soit f_1, f_2, ..., f_8 des fonctions définies par les équations suivantes:

$f_1(x) = \frac{x}{2}$ $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $f_3(x) = e^x$ $f_4(x) = x^4 + 3x^2 - 9$

$f_5(x) = \ln x$ $f_6(x) = x^e$ $f_7(x) = \sin x$ $f_8(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

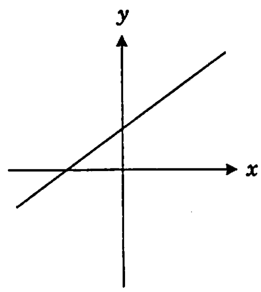
Compléter le tableau suivant en cochant les cases appropriées.

fonction	rationnelle	polynomiale	constante	exponentielle	aucun de ces cas
f_1					
f_2					
f_3					
f_4					
f_5					
f_6					
f_7					
f_8					

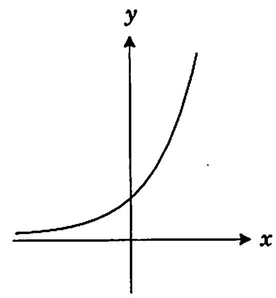
3 Donner un synonyme ou une expression équivalente en mots.

dérivée: ______________________________

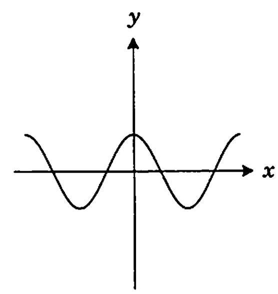
4 Parmi les graphiques suivants,



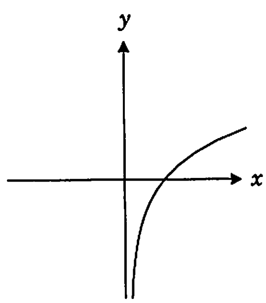
Graphique 1



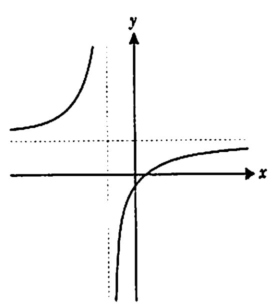
Graphique 2



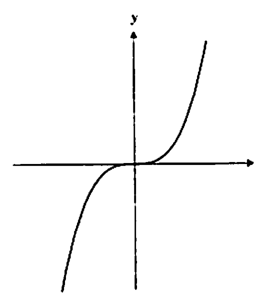
Graphique 3



Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6

lequel ou lesquels pourraient représenter

a)une fonction exponentielle? Graphique(s): ______

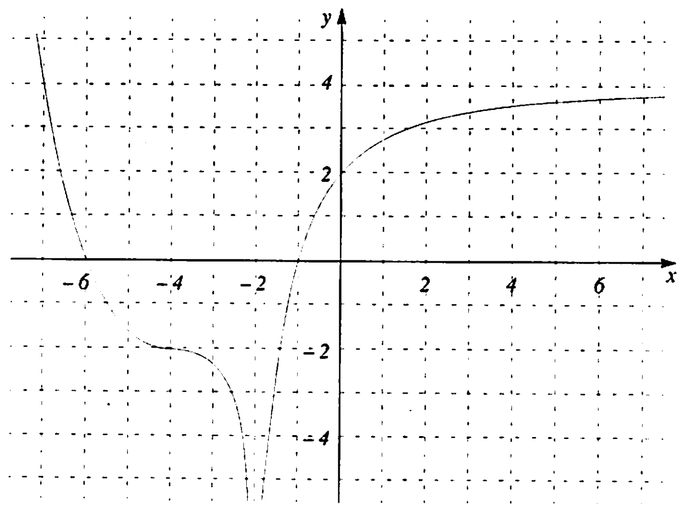
b)une fonction constante? Graphique(s): ______

c)une fonction périodique? Graphique(s): ______

d)une fonction logarithmique? Graphique(s): ______

e)une fonction croissante? Graphique(s): ______

5 Soit f une fonction représentée par le graphique ci-dessous.



Compléter.

a) $\text{dom} f =$

b) $f(0) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

d) $f(x) = 0$ pour $x =$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

f) $f'(x) = 0$ pour $x =$

g) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$

h) $f''(x) > 0$ pour $x \in$

i) L'asymptote horizontale a pour équation: ______________________

j) f a-t-elle des extremums? Oui ☐ Le(s) donner: ____________
Non ☐

k) Comparer $f'(0)$ et $f'(4)$: ______________________________

6 Identifier la variable indépendante dans chacune des expressions suivantes.

a) $f(t) = \dot{x}t^2 - 5$ Réponse: ____________________

b) $\dfrac{dV}{dr}$ Réponse: ____________________

c) $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ Réponse: ____________________

d) $\int e^u du$ Réponse: ____________________

7 Quelle(s) expression(s) parmi les suivantes représente(nt) «*la dérivée de* $y = f(x)$ *en* $x = 5$ » ?

Expression 1: $f'(5)$ **Expression 2**: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=5}$

Expression 3: $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ **Expression 4**: $(f(5))'$

Expression(s): $\boxed{}$

8 Dans chaque cas, écrire une **expression symbolique équivalente** à l'expression donnée.

a) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}\right) =$

b) $\dfrac{dP}{dt} =$

9 Soit $p(t)$ la position d'un mobile au temps t. Dans chaque cas, donnez une expression **symbolique équivalente** en termes de p.

a) Le déplacement du mobile entre les temps $t = 2$ et $t = 10$.
Réponse: ____________________

b) La vitesse moyenne du mobile entre les temps $t = 0$ et $t = 5$.
Réponse: ____________________

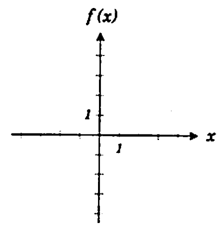
10 Dire ce que représente graphiquement (c'est-à-dire sur le graphique d'une fonction f) chacune des expressions suivantes.

a) $f'(2)$: ____

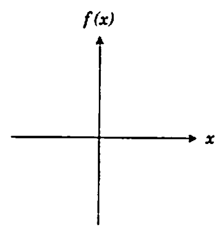
b) $f(2+\Delta x) - f(2)$: ________________________________

11 Dans chaque cas, tracer le graphique d'une fonction (c'est-à-dire donner un exemple par graphique) vérifiant la condition donnée.

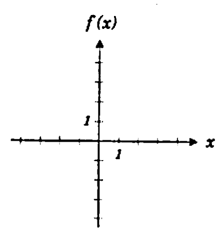
a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$



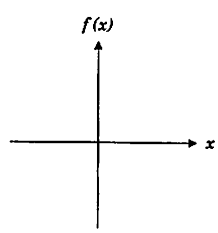
b) $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$



c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$



d) $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$



12 Si on désigne par $V(r)$ le volume d'une sphère en fonction de son rayon (en centimètres), dire ce que représente, dans ce contexte, chacune des expressions suivantes.

a) $V(10) - V(8)$: ____________________

b) $\left.\dfrac{dV}{dr}\right|_{r=4}$: ____________________

13 Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, que peut-on conclure au sujet de $f(a)$?

Réponse: ____________________

14 Compléter (en mots)

a) L'intégrale d'une somme de fonctions est égale à ____________________

____

b) Si la dérivée d'une fonction est positive sur un intervalle, alors la fonction est ____________________ sur cet intervalle.

15 Vrai ou faux ? Si c'est faux, corriger.

a) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ Vrai ☐ Faux ☐ correction: ____________________

b) $4^2 \Leftrightarrow 16$ Vrai ☐ Faux ☐ correction: ____________________

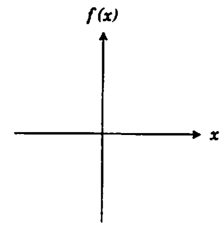
c) Si la dérivée seconde d'une fonction s'annule en un point, celui-ci n'est pas nécessairement un point d'inflexion.

Vrai ☐

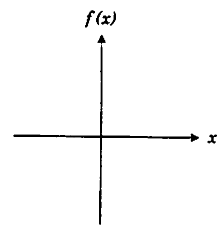
Faux ☐ correction: ____________________

16 Dans chaque cas, tracer le graphique d'une fonction (c'est-à-dire donner un exemple par graphique) vérifiant la condition donnée.

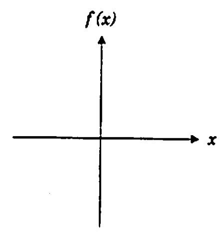
d) La fonction a exactement trois zéros.



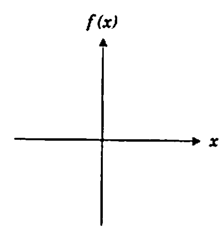
b) La fonction a exactement deux extremums.



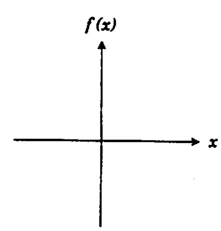
c) La courbe a un seul point d'inflexion.



d) La fonction est positive partout.



e) La fonction augmente de moins en moins vite.



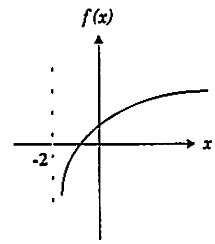
17 Pour chacun des graphiques suivants, choisir dans la liste proposée la <u>seule</u> fonction qui pourrait lui correspondre.

a) 1) $f(x) = e^{-x} - 2$

2) $f(x) = \ln x - 2$

3) $f(x) = \ln(x + 2)$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ sur $]-2, \infty[$

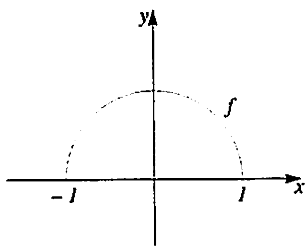


b) 1) $f(r) = \dfrac{2\pi r}{2}$ sur $[-1,1]$

2) $f(r) = \sqrt{1 - r^2}$

3) $f(r) = \dfrac{\pi r^2}{2}$ sur $[-1,1]$

4) $f(r) = \arccos r$



18 Pour chacun des énoncés suivants, donner celui ou ceux des graphiques ci-dessous qui le vérifient.

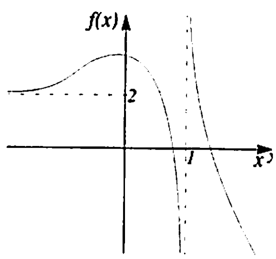
a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$ Graphique(s): ☐

b) La fonction a au moins un extremum. Graphique(s): ☐

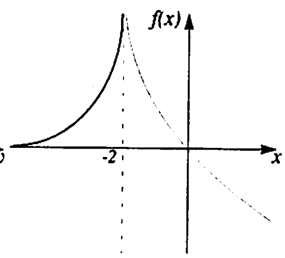
c) La courbe n'a pas de point d'inflexion. Graphique(s): ☐

d) La courbe a pour asymptote $x = 1$. Graphique(s): ☐

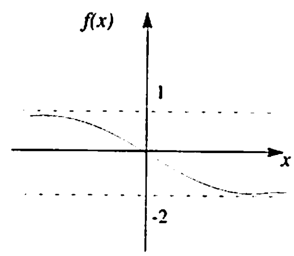
e) $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$ Graphique(s): ☐



graphique 1



graphique 2



graphique 3

Y a-t-il des questions dont la formulation vous a embêté(e) ?

Oui ☐ Lesquels: ______________________

Non ☐

Annexe 4

Protocole d'entrevue avec les professeurs à la suite du prétest

Protocole d'entrevue avec les professeurs à la suite du prétest

Objet: Analyser les résultats du prétest en vue de l'élaboration du test

Type: Entrevues de groupe

Date: Jeudi le 23 mars 1995

Horaire: Premier groupe (3 professeurs): 9h30 à 11h30

Deuxième groupe (2 professeurs): 13h30 à 15h30

RÉSUMÉ DES ÉTAPES:

Étape 1: Accueil

Étape 2: Informations sur l'entrevue

Étape 3: Objet de l'entrevue

a) discussion sur le prétest
b) discussion sur le test
c) suggestions concernant d'autres points non couverts relatifs au prétest ou au test

Étape 4: Retour sur l'entrevue et remerciements

DÉTAIL DES ÉTAPES

Étape 1: ACCUEIL

Étape 2: INFORMATIONS SUR L'ENTREVUE

L'entrevue a pour objet d'analyser des résultats du prétest en vue de l'élaboration d'un test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques.

L'entrevue se fait en groupe afin de permettre une interaction entre les professeurs.

Nous demandons la permission d'enregistrer afin d'être le plus objectifs possible, d'être attentifs à tout ce qui va se dire et de pouvoir réécouter la conversation sans rien perdre des discussions, commentaires ou suggestions.

Étape 3: OBJET DE L'ENTREVUE

a) DISCUSSION SUR LE PRÉTEST

Si vous le voulez bien, nous allons examiner ensemble chacune des questions du prétest et nous demander, dans chaque cas, si

-la question peut être gardée telle quelle pour le test,

-la question peut être gardée en changeant la formulation,

-le style de la question peut être gardé en changeant le contenu.

b) DISCUSSION SUR LE TEST (aspects non couverts au point précédent)

Concernant le langage naturel en mathématiques:

Quels termes mathématiques devraient être testés?

Pouvez-vous les classer par ordre d'importance?

Avez-vous des exemples de questions appropriées pour tester la compréhension de ce(s) terme(s)?

Quels termes usuels devraient être testés?

Pouvez-vous les classer?

Avez-vous des exemples de questions appropriées?

Quelles formulations usuelles de questions devraient être testées?

Pouvez-vous les classer?

Avez-vous des exemples de questions appropriées?

Autres?

Concernant le langage symbolique:

Pouvez-vous donner deux exemples d'utilisation du langage symbolique qui causent des problèmes aux élèves?

Quels symboles devraient être testés?

Pouvez-vous les classer par ordre d'importance?

Avez-vous des exemples de questions appropriées pour tester la compréhension de ce(s) symbole(s)?

Quels aspects de la syntaxe symbolique devraient être testés?

Pouvez-vous les classer?

Avez-vous des exemples de questions ?

Autres?

Concernant le langage graphique:

Quels éléments graphiques devraient être testés?

Pouvez-vous les classer?

Avez-vous des exemples de questions ?

Autres?

Concernant la traduction d'un langage à un autre:

Quels types de traductions devraient être testés?

Pouvez-vous les classer par ordre d'importance?

Avez-vous des exemples de questions appropriées ?

Autres?

Concernant le langage *hybride*:

Avez-vous des exemples typiques où deux ou trois langages sont imbriqués dans une même phrase?

Devrait-on tester ce genre de phrases?

...

Concernant l'ensemble du test:

Quelle importance chacun des langages (naturel, symbolique et graphique) devrait-il avoir dans le test?

Quelle répartition suggérez-vous entre les questions impliquant un seul langage et celles impliquant plus d'un langage?

Que pensez-vous des questions à choix multiples pour tester les aspects langagiers en mathématiques?

...

b) SUGGESTIONS

Avez-vous des suggestions concernant des aspects non couverts précédemment?

Étape 4: RETOUR SUR L'ENTREVUE ET REMERCIEMENTS

Retour sur l'entrevue.

Vous serez consultés sur le choix des élèves à inviter en entrevue, sur la validation du test et la suite du projet.

Remerciements.

Vous êtes invités à un dîner (fixer une date en mai).

Annexe 5

Liste des questions prioritaires du prétest

Liste des questions prioritaires du prétest, à analyser lors des entrevues avec les élèves

Remarque: Dans chacune des catégories suivantes, les numéros des questions sont donnés par ordre d'importance.

- **Questions dont la formulation a été jugée ambiguë:**

  5 k), 6, 7, 8

  10, 9, 13

- **Questions où il y a eu absence de réponse (regroupées par similitude):**

  1 c), 3

  4 et16

  5, 11 et 18

  6, 7, 8 et9

  10, 13, 12

  17 b)

- **Questions où il y des réponses erronées** (regroupées par similitude):

  1 a) et c)

  4 b) et 16 d), 4 e) c)

  2 et 4 a) d), 3

  6, 8 et 9

  7 et13

  5 et 11 et 16

  10 et 12

- **Questions où il y a des réponses bizarres:**

1 c)	Réponse:	3,333...
17 b)	Réponses:	1 ou 3

Annexe 6

Caractéristiques des élèves invités en entrevue à la suite du prétest

Caractéristiques des élèves invités en entrevue à la suite du prétest, selon leurs résultats au prétest

Programme Cours Professeur	Nom	Sexe	Absence de réponse	Mauvaise réponse	Réponse bizarre	Formulation jugée ambiguë
Programme Intégré MAT. 115-01 Prof.: A	A.a#	G	1 b, c; 8 a, 9 10 b, 17	2, 4 a, 6, 7, 10, 15 a	11 b, 16 e	-----
	A.b#	F	8 a, 12 b	1 c, 2, 4 a, b; 5 k, 6, 10 13, 17 b	----	5 j, 6 d, 12 b, 14 a, 18 b
	A.c *	F	10 b, 11, 12 13, 17, 18	2, 4 b, c, e; 5 f, k; 7, 8 9 b	----	-----
	A.d	G	5 k, 8 a, 15 a	1 e, 2, 4 b, e; 5, 11 a, 13 17, 18 b	16 e	4
	A.e	F	16, 17, 18	1 b, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 15 a	10	-----
Bacc. Int. Sc. Hum. MAT. 105-01 Prof.: B	B.a	G	4 b, c; 5 k, 10 b, 13, 14	2, 4, 7, 8 b, 10 a, 11 b, 12, 15	16 d, e	-----
	B.b	F	1b, 5 i, k; 8b 10 b, 12 b	2, 4 a, b; 6 a, 7, 8 a, 10 a 12, 16 e, 17, 18 e	5	-----
	B.c	G	5 k, 15 a	2, 3, 4 b, 6, 7, 8 b, 9 b, 10, 11 a, 13, 14 a, 17, 18	10	8 b, 12 b, 17
	B.d#	F	5 k, 8 b, 9, 10 b	2, 4 a, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 17	1 b	-----
	B.e#	G	4, 12 b, 15 a	2, 4 d, e; 5, 6, 7, 8 b, 9 b, 10, 17 b, 18 b, d	8 b	la plupart
	B.f *	F	12 b, 14 a 15 a	1 a, b; 2, 6, 7, 8 b, 10 13, 17 b	----	8, 9
	B.g	F	1 b, 5 k, 710 b		1 c	-----
	B.h	F	3		1 c, 4 b, 5 k	-----

* Élèves qui n'ont pas répondu à l'invitation.
# Élèves rencontrés en entrevue pour l'analyse des résultats du prétest.
Les autres élèves ont été interviewés pour la validation du test.

Programme Cours Professeur	Nom	Sexe	Absence de réponse	Mauvaise réponse	Réponse bizarre	Formulation jugée ambiguë
Bacc. Int **Sc. Pures** MAT. 203-01 Prof.: C	C.a#	G	5 k, 8 a	1 c, 2, 3, 4, 5 d, f; 7, 10 12 b, 13, 15 a,16 a, d;17	1c, 16 e	5 k
	C.b *	G	14 a	1 e, 2, 4 b, 5 j, 6, 7, 10 12, 13, 17 b,18 d	10	6, 7, 14 a
	C.c	G	14 a	2, 3, 4 b, 6, 7, 8 b, 9 b 10, 12, 13	---	5 k, 8
	C.d#	F	---	2, 4 a, b; 5 a, f; 7, 10 b 11 a, 12 b, 13,	---	7
	C.e	G	3, 13	2, 4 b, e; 6, 7 b, 10, 16 c	---	6, 13
	C.f	F	14 a	2, 6, 7, 8 b, 13, 17 b	---	6, 15 a, extremum
	C.g *	G	15 a	2, 4 a, 5 j, 7, 10, 12b 16 a, 17 a	10, 16 d, e	5 k, 10
Élève fort	C.h#	G	---	1b, 2, 5 i, j;7, 8 a, 18 b,c	16 e	-----
D.E.C. Sc. Pures MAT. 203-03 Prof.: D	D.a#	F	3	1 b, 2, 4, 5, 6 b, 7, 8 b 10,13,17,18 a	1 b, 16 e	-----
	D.b	G	5j, 8, 9, 15 a	1 b, 2, 4 b, e; 6, 10 b, 12, 13, 16 d	1 c, 16 e	8, 9, 15 a
	D.c#	G	1c, 8b, 10b 12b,13, 14a	2, 4, 6, 7, 8 a, 9, 10, 12 15 a,16 d,17 a, 18 b	16 d	-----
	D.d *	F	5 k, 11 d, 13	1 b, 2, 4 b, 5 i, 6, 8, 10	---	8, 13
	D.e	G	5 k	1 a, 2, 3, 4, 5, 10, 13 17a	10	5 j, h, k
	D.f	G	1 c, 17 b 18 d, e	2, 4 a, b; 5, 6, 7, 10 b, 11 a, 13, 15 a	16 d, e	8
D.E.C. Sc. Pures MAT. 203-05 Prof.: E	E.a	F	1 c	1b, 3, 5 g, i; 6, 7, 8 a, 10 11 a, 12, 13, 14 b, 17 b	8 a, 10, 12	7
	E.b	G	---	2, 4 a, b; 5 b, i; 6, 7, 8, 9b, 10 b, 11 a, 12b, 17	1 c	2, 7, 8, 17

* Élèves qui n'ont pas répondu à l'invitation.
\# Élèves rencontrés en entrevue pour l'analyse des résultats du prétest.
Les autres élèves ont été interviewés pour la validation du test.

Programme Cours Professeur	Nom	Sexe	Absence de réponse	Mauvaise réponse	Réponse bizarre	Formulation jugée ambiguë
D.E.C. Sc. Pures MAT. 203-05 Prof.: F	F.a#	F	1 c	2, 4 a, b; 5, 6, 7, 8 b, 9, 10 b, 12, 13, 14 b, 15 a, 16 d, 18 b, c	---	13
	F.b	F	---	2, 4 a,b; 5b,c; 7, 9b, 10b, 11, 13, 15a, 17a, 18 a, e	---	5 k, 11 b, d; 6
	F.c	G	5 k, 14 a	2, 3, 4 b, c; 6, 9 b, 10, 11 b, 12 b, 13,17 b,18 c	---	5 k
	F.d	F	5 k	2, 6, 7, 11 a, c; 13, 15 a, 16,18 a, e	---	5 k
	F.e#	G	1 b, 10 b, 13	2, 3, 4 b, 5 i, 10, 12 b, 17 b, 18 c	---	13
Élèves forts	F.f#	G	---	Était absent au test		
	F.g	G	---	6, 12 b	---	4 e, 15 c

* Élèves qui n'ont pas répondu à l'invitation.
\# Élèves rencontrés en entrevue pour l'analyse des résultats du prétest.
Les autres élèves ont été interviewés pour la validation du test.

Annexe 7

Lettre invitant les élèves à une entrevue

Lettre invitant les élèves à une entrevue

Collège Jean-de-Brébeuf, avril 1995

XXX (Nom de l'élève)
Mat. 203-*YY*
Prof.: *ZZZ*

Objet: Recherche portant sur le sujet «*Mathématiques et langages* »

Bonjour *XXX*,

Au début de la session, nous vous avons fait passer un test qui vous a permis de vérifier vos connaissances sur une partie du cours Mat. 103 - *Calcul différentiel et intégral I*.

Pour nous, ce test avait pour but de préciser des difficultés langagières que rencontrent les élèves dans leurs cours de mathématiques. Les résultats ont été très éclairants; cependant, nous avons des interrogations concernant certaines réponses ou absences de réponse à des questions. Seuls des élèves peuvent nous aider à répondre à nos interrogations et nous croyons que vous êtes une personne en mesure de nous aider. À cet effet, nous aimerions vous rencontrer pour une entrevue[1] d'une durée maximale de deux heures.

Nous savons que votre temps est précieux, mais sachez que les informations que vous pourrez nous fournir sont d'une très grande importance pour nous et aideront d'autres élèves à mieux réussir en mathématiques; c'est pourquoi nous espérons que vous accepterez cette invitation. Nous vous assurons de la plus entière confidentialité sur tout ce que vous direz lors de cette entrevue et nous nous engageons à vous faire connaître les résultats de notre recherche.

Si vous acceptez de nous rencontrer, auriez-vous l'obligeance de remplirla fiche ci-jointe et de la remettre à votre professeur à la fin de la période; nous communiquerons avec vous dans les jours à venir. Si vous avez des questions au sujet de cette entrevue, vous pouvez nous rejoindre au local G3.02 ou nous téléphoner au 342-9342, poste 406.

Nous espérons vous rencontrer et vous remercions pour votre collaboration.

Margot De Serres & Jean-Denis Groleau.

1. Une allocation de 12$ est offerte pour cette entrevue.

Annexe 8

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques

Pour préserver la validité de ce test, nous vous demandons de récupérer tous les documents après leur utilisation.

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques: Partie A

Mathématiques et langages

Nom: ______________________________

Mat – __________ *Groupe:* __________

Ceci n'est pas un examen. Le résultat de ce test n'entrera pas dans le calcul de votre note pour la session. Cependant, il est d'une grande importance pour nous, car il nous permettra de mieux comprendre les difficultés des élèves en mathématiques. En nous aidant à améliorer notre enseignement, vous nous donnez la possibilité d'augmenter votre performance en mathématiques et celle des élèves qui vous suivront. C'est pourquoi nous vous invitons à répondre au questionnaire avec le plus grand sérieux.

Ce test a été élaboré dans le cadre d'une recherche intitulée «*Mathématiques et langages*». Il a pour but de déceler les **difficultés langagières** que rencontrent les élèves dans leurs cours de mathématiques. Ces difficultés peuvent être au niveau de la lecture d'un énoncé, de la compréhension d'une équation, de l'interprétation d'un graphique, etc.

Le test se divise endeux parties: A et B.

- La partie A est composée de questions ouvertes auxquelles on vous demande de répondre par un mot, une phrase, un symbole, une figure ou un graphique. Vous répondez sur le questionnaire pour cette partie.
- La partie B est composée de questions fermées où vous avez à faire, pour chacune d'elles, un choix parmi les cinq réponses proposées. Une feuille réponses est fournie avec cette partie.

On vous demande de faire le test **sans calculatrice.** Vous trouverez certaines questions très faciles; c'est le cas, n'y cherchez pas de pièges. D'autres questions vous paraîtront plus difficiles; essayez d'y répondre au meilleur de vos connaissances et profitez de l'occasion pour noter vos difficultés; vous aurez la possibilité d'en parler avec votre professeur.

Nous vous assurons de la plus entière **confidentialité** sur vos réponses à ce test. Si vous désirez connaître les résultats de notre recherche, nous vous invitons à inscrire votre nom et vos coordonnées sur la feuille prévue à cet effet. Nous donnerons probablement une conférence sur le sujet au cours de l'année 1996, dans le cadre des conférences du club scientifique du Collège . Nous vous remercions sincèrement pour votre collaboration.

Margot De Serres & Jean-Denis Groleau

Question 1

Donnez un exemple

a) d'un nombre rationnel: ____________________

b) d'un nombre irrationnel: ____________________

c) d'un diviseur de 12: ____________________

d) d'un multiple de 12: ____________________

e) d'une puissance de 5: ____________________

f) d'un binôme: ____________________

g) d'une équation: ____________________

Question 2

Donnez un exemple (dessinez)

a) d'un segment de droite: b) d'un triangle isocèle: c) d'un quadrilatère:

Question 3

Complétez.

a) Le résultat d'une division s'appelle ____________________ .

b) Un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux s'appelle un ________ .

Question 4

Dans chaque cas, complétez de telle sorte que l'équation obtenue soit toujours vraie.

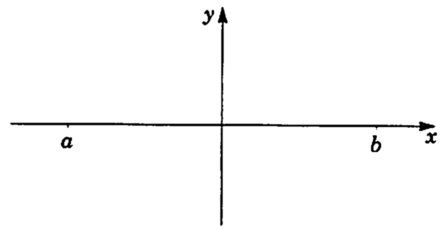
a) $x^2 =$ ____________________

b) $(a-b)^2 =$ ____________________

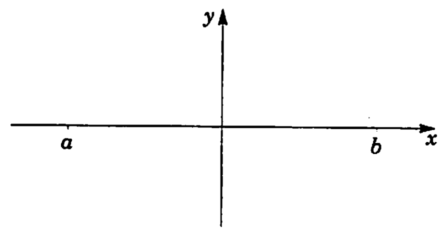
Question 5

Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant la condition donnée.

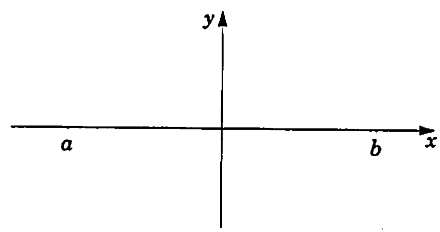
a) La fonction est positive.



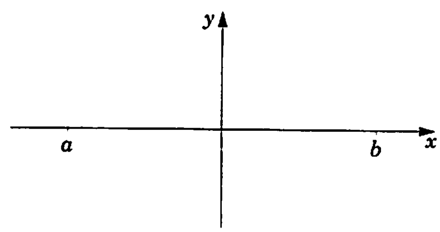
b) La fonction a exactement trois zéros.



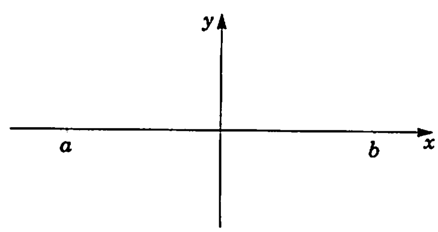
c) La fonction est constante.



d) La fonction augmente de moins en moins vite.



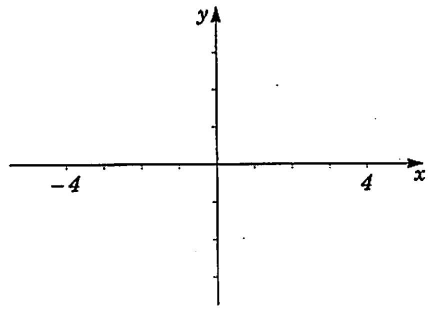
e) La fonction est strictement décroissante.



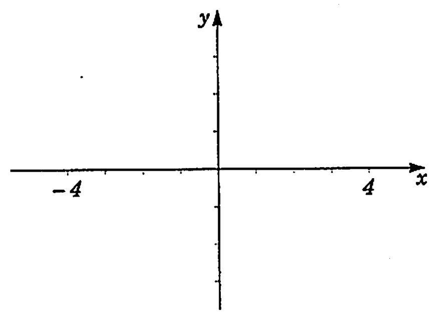
Question 6

Dans chaque cas, tracez le graphique d'une fonction définie dans l'intervalle $[-4, 4]$ et vérifiant la condition donnée.

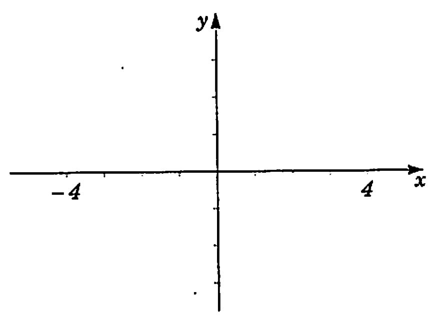
a) $f(x) \geq 0$



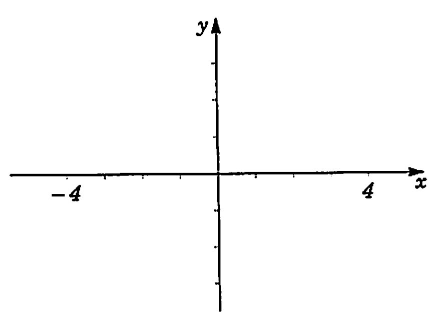
b) $f(x) = mx$ où $m < 0$



c) $f(x) = 1$ si $x < 2$,
et f est définie pour tout $x \in [-4, 4]$



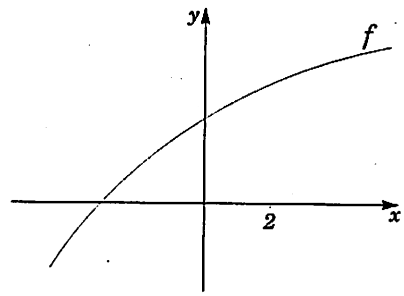
d) $f(x) = f(-x)$



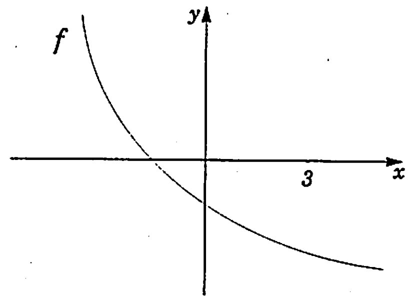
Question 7

Dans chaque cas, représentez clairement l'expression donnée et écrivez-la à l'endroit qui convient sur le graphique.

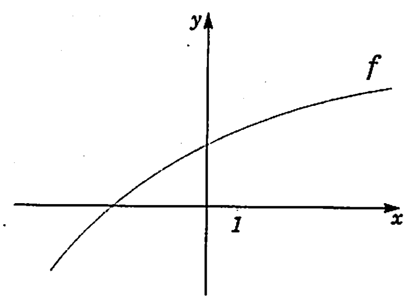
a) $(2, f(2))$



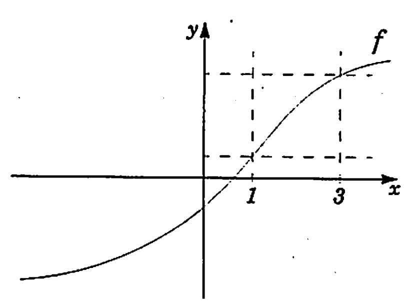
b) $f(3)$



c) $(1 + \Delta x)$ pour un $\Delta x > 0$



d) $f(3) - f(1)$



Question 8

Complétez à l'aide d'un des symboles: $=$, $>$ ou $<$, afin d'obtenir un énoncé vrai.

a) 0,125 0,25

b) 125% 1,25

c) 30% ...... $\frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ...... $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Question 9

Dans chaque cas, donnez l'entier le plus près du nombre indiqué.

a) $\sqrt{18} \approx$ ....

b) $\log_2 10 \approx$ ......

c) $2\pi \approx$ ......

Question 10

Complétez à l'aide d'un des symboles: $\in$, $=$ ou $\subseteq$ afin d'obtenir un énoncé vrai.

a) $\{\ \}$ ...... $\varnothing$

b) $\{1, 3\}$ ..... $\{1, 2, 3, 4\}$

c) $\varnothing$ .... $\{1, 3\}$

d) 2 ...... $\{1, 2, 3, 4\}$

Question 11

Complétez à l'aide d'un des symboles: $=$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ afin d'obtenir un énoncé vrai quelles que soient les valeurs de x, y et z.

a) $x = y$ ...... $x^2 = y^2$

b) $(x+y)(x-y)$ .... $x^2 - y^2$

c) $xy = 0$ .... $x = 0$ ou $y = 0$

d) $x + z = y + z$ ...... $x = y$

Question 12

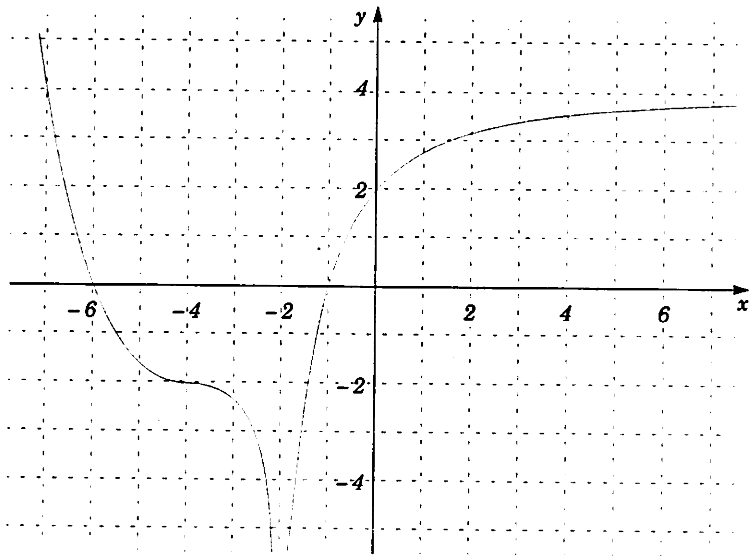
Dans une école, il y a douze fois plus d'élèves que de professeurs.
Traduisez cet énoncé en équation, en désignant par E le nombre d'élèves et par P le nombre de professeurs.
Équation: ______________________

Question 13

Comparez les nombres $\frac{6}{25}$ et $\frac{6}{37}$: ______

Question 14

Soit f une fonction représentée par le graphique suivant:



Complétez:

a) $f(0)$ = ______

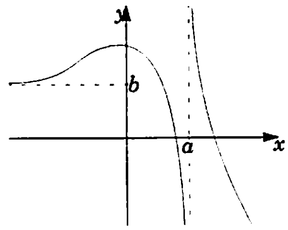
b) L'asymptote verticale a pour équation: ______

c) $f(x) = 0$ pour $x \in$ ______

d) $f(0) - f(-4)$ = ______

Question 15

Soit f une fonction représentée par le graphique suivant:



Complétez:

a) si x devient très grand, alors $f(x)$ tend vers ________ .

b) si x devient «très grand négativement», alors $f(x)$ tend vers ________ .

Question 16

Si $a \geq 4$ et $a \leq 4$ que peut-on conclure au sujet de a ? ________

Question 17

On donne les informations suivantes au sujet d'un groupe de personnes:

	Fume	Ne fume pas	Total
A eu un accident cardiaque	53	59	112
N'a pas eu d'accident cardiaque	91	197	288
Total	144	256	400
	Fume	Ne fume pas	Total

a) Dans ce groupe, quelle est la proportion des personnes qui fument? ________

b) Dans ce groupe, combien de personnes ne fument pas et n'ont pas eu d'accident cardiaque? ________

c) Quelle est la proportion des personnes qui fument et qui ont eu un accident cardiaque? ________

d) Dans ce groupe, combien de personnes fument ou ont eu un accident cardiaque?
____

Question 18

Quelle opération faut-il effectuer pour passer

a) **de l'équation:** $3x + 15 = 37$
à l'équation: $3x = 22$?

Réponse: ______________________________.

b) **de l'équation:** $\sqrt[3]{x} = 4$
à l'équation: $x = 64$?

Réponse: ______________________________.

Question 19

Dites dans vos mots ce qu'est un polygone:

____

____

Y a-t-il des questions qui vous ont embêté(e) dans cette partie?

Oui ☐ Lesquelles? ______________________________

Non ☐

Test faisant ressortir des difficultés de nature langagière en mathématiques: Partie B

Partie B: Répondez sur la feuille réponses pour cette partie

Pour chacune des questions suivantes, on vous propose un choix de cinq réponses.

Il peut y avoir aucune, une, deux, trois, quatre ou cinq bonne(s) réponse(s) par question *(voir l'exemple ci-dessous).*

Noircissez, sur la feuille réponses, tous les cercles correspondant à des bonnes réponses. Si vous voulez changer une réponse, prenez soin d'effacer complètement le ou les cercles qui ne correspondent plus à votre nouveau choix

EXEMPLE:

Parmi les égalités suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = A \cup B$

2) $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = A \cap B$

3) $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = A \cup B$

4) $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = A \cap B$

5) $\{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \backslash B$

FEUILLE RÉPONSES: ○ ● ● ○ ●
1 2 3 4 5

Cet exemple illustre qu'il y a trois bonnes réponses parmi les cinq réponses proposées.

Question 1

Parmi les expressions suivantes, laquelle ou lesquelles sont égales à xy^2 quelles que soient les valeurs de x et y ?Noircissez le ou les cercles correspondants sur la feuille réponses.

1) $(xy)^2$

2) xyy

3) $(xy)\,(xy)$

4) $x\,(2y)$

5) $x\,(y^2)$

Question 2

Parmi les égalités suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies quelles que soient les valeurs de a et b ? Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

2) $(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)$

3) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

4) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

5) $(a-b)^2 = (a-b)\,(a+b)$

Question 3

Quelle est ou quelles sont les expressions qui sont égales à $1 - 3x^{-2}$ quelle que soit la valeur de x, $x \neq 0$?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $-\frac{1}{3x^2}$

2) $\frac{1}{-3x^2}$

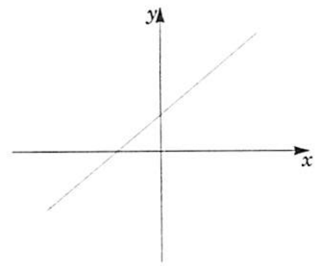
3) $\frac{-2}{x^2}$

4) $1 - \frac{1}{3x^2}$

5) $1 - \frac{3}{x^2}$

Question 4

Noircissez le ou les cercles qui correspondent à une bonne réponse.



1) $y = mx^2 + b$

2) $y = m$

3) $y = mx + b$

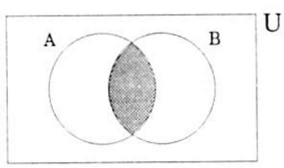
4) $x = a$

5) $ax + by + c = 0$

Question 5

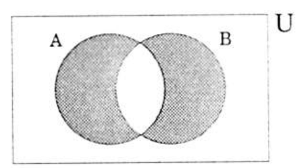
Quel est ou quels sont les ensembles qui sont bien représentés par la région ombrée du diagramme correspondant?Noircissez le ou les cercles appropriés.

1)



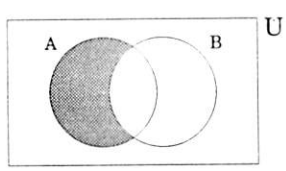
$A \cap B$

2)



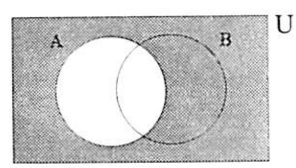
$A \cup B$

3)



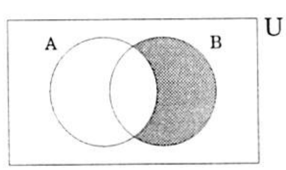
Le complément de ***B***

4)



Le complément de *A*

5)



$B \setminus A$

Question 6

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

1) $3 \in \left]3, 5\right]$

2) $5 \in \left]3, 5\right]$

3) $4 \notin \left]3, 5\right]$

4) $3{,}5 \in \left]3, 5\right]$

5) $35 \notin \left]3, 5\right]$

Question 7

Parmi les expressions suivantes, laquelle ou lesquelles sont des polynômes en x ?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 10$

2) $4x^{-2} + 3x^{-1} - 5$

3) $5^x - 4x + 3$

4) $x + 2x^{1/2} + 1$

5) $x^5 + 3x^4 - \sqrt{2}\,x - 1$

Question 8

Soit le polynôme: $2x^3 + x^2 - 2x - 1$ Ce polynôme peut également s'écrire sous la forme suivante: $2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)\ (x - 1)$

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrai.

1) Ce polynôme est de degré 3.

2) Ce polynôme comporte 3 termes.

3) Ce polynôme a 4 zéros réels distincts.

4) Ce polynôme a 3 zéros réels distincts.

3) Ce polynôme a 3 facteurs du premier degré.

Question 9

Parmi les énoncés suivants, lequel ou lesquels sont équivalents à: $4 < x < 7$?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) x est plus petit que 4 et plus petit que 7.
2) x est plus grand que 4 ou plus petit que 7.
3) x est différent de 4 et de 7.
4) x est compris entre 4 et 7 exclusivement.
5) x est plus grand que 4 et plus petit que 7.

Question 10

Parmi les énoncés suivants, lequel ou lesquels sont vrais quelles que soient les valeurs de a et b ?
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
2) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$
3) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
4) $a = b \Rightarrow 2a = 2b$
5) $2a = 2b \Leftrightarrow a = b$

Question 11

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.
L'ensemble $\{ x \in R \mid x < 0 \text{ ou } x > 1 \}$ est égal à:

1) $\varnothing$
2) $]0, 1[$
3) $R \setminus [0, 1]$
4) $R \setminus \{0, 1\}$
5) $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$

Question 12

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

1) 10^3 représente mille.

2) 10^6 représente un million.

3) 10^9 représente un milliard.

4) 10^{-2} représente un centième.

5) 10^{-5} représente un millionième.

Question 13

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

1) Si un nombre est entier, alors il est réel.
2) Si un nombre est réel, alors il est rationnel.
3) Un nombre réel est irrationnel s'il n'est pas rationnel.
4) Un nombre entier est pair si et seulement si ce nombre est divisible par 2.
5) Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est limité.

Question 14

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

1) Le résultat d'une addition s'appelle la *somme*.
2) Le résultat d'une multiplication s'appelle le *produit* et les éléments que l'on multiplie s'appellent les *facteurs*.
3) Le résultat d'une soustraction s'appelle la *différence*.
4) Dans l'écriture« $a + b - c$ », a, b et c sont appelés des *termes*.
5) Dans l'écriture« $a^b = c$ », c est appelé la *puissance*.

Question 15

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

Si x est un nombre réel strictement positif et n est un entier strictement positif, alors:

1) $x^0 = 0$

2) $x^{-n} = -nx$

3) $x^{-n} = \frac{-1}{x^n}$

4) $x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^n}$

5) $x^n + x^n = x^{2n}$

Question 16

Noircissez le ou les cercles qui correspondent à des bonnes réponses.
Sur le graphique cartésien d'une fonction f, le nombre $f(5)$ est représenté par:

1) un point sur la courbe de f.

2) une abscisse.

3) une ordonnée.

4) une longueur sur l'axe horizontal.

5) une longueur sur l'axe vertical.

Question 17

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

Le nombre $10^{3/2}$ est égal à:

1) $\frac{10^3}{2}$

2) $10 \times \frac{3}{2}$

3) $\sqrt{10^3}$

4) $\sqrt[3]{10^2}$

5) $(\sqrt{10})^3$

Question 18

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

Soit a et b des nombres:

1) L'expression $(a^2 - b^2)$ se lit: *«la différence des carrés de a et b»*.

2) L'expression $(a + b)^2$ se lit: *«le carré de la somme de a et b»*.

3) *«La racine carrée de la somme des nombres a et b»* se traduit littéralement par: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4) *«La différence des nombres a et b élevée au carré»* se traduit littéralement par: $a^2 - b^2$.

5) *«La somme des logarithmes de a et b»* se traduit littéralement par: $\log(a + b)$.

Question 19

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

La ***définition*** du nombre π est:

1) le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle.

2) l'aire d'un disque circulaire de diamètre 1.

3) 3,1416

4) 180°

5) $\sin(1)$

Question 20

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

Sur le graphique ci-contre, la longueur du segment représenté en gras est:

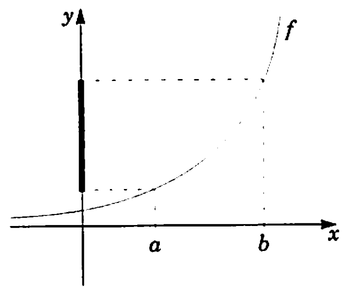
1) $b - a$

2) $f(b - a)$

3) $f(a) + f(b)$

4) $f(b) - f(a)$

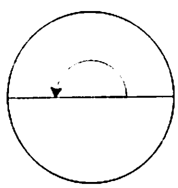
5) $(b, f(b)) - (a, f(a))$

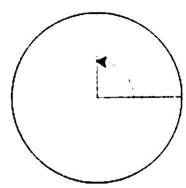


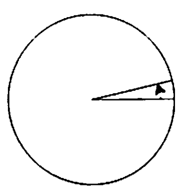
Question 21

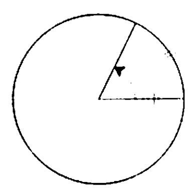
Lequel ou lesquels des angles suivants mesurent un radian?

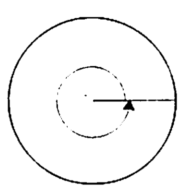
Noircissez le ou les cercles correspondants.

1)


2)


3)


4)


5)


Question 22

Quelle est ou quelles sont les expressions qui sont égales à $(3 sin\,(2x))^2$ quelle que soit la valeur de x ?

Noircissez le ou les cercles correspondants.

1) $3\,sin\,(2x)^2$

2) $3\,sin^2(2x)$

3) $9\,sin(2x)$

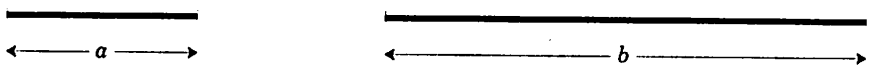
4) $9\,sin^2(2x)$

5) $9 sin^2(4x^2)$

Question 23

Noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

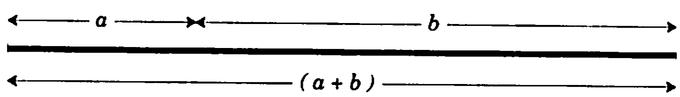
Si les nombres positifs a et b sont représentés par les longueurs suivantes:



alors

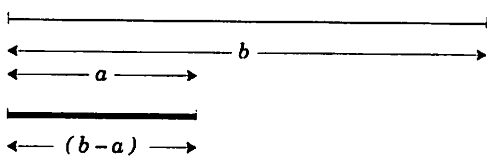
le nombre $(a + b)$ peut être représenté par la longueur du segment suivant

1)

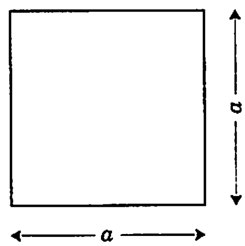


le nombre $(b - a)$ peut être représenté par la longueur du segment dessiné en gras:

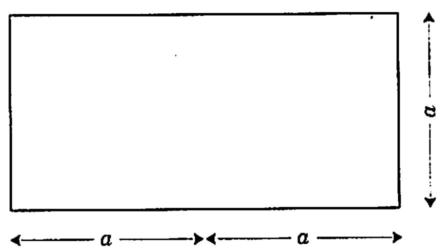
2)



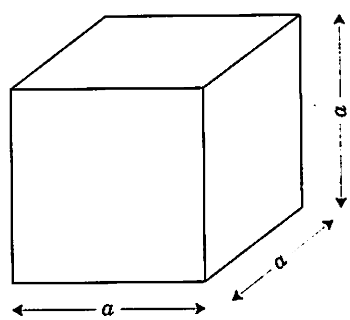
3) le nombre2 a peut être représenté par l'aire de la figure suivante, quelle que soit la valeur de a :



4) le nombre2 a^2 peut être représenté par l'aire de la figure suivante, quelle que soit la valeur de a :



5) le nombre a^3 peut être représenté par le volume de la figure suivante.



Question 24

Du haut d'un édifice, on lance un objet vers le bas avec une vitesse initiale v_0. La distance (en mètres) parcourue par cet objet, t secondes après son lancement, est donnée par l'équation $d = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ où g est la force d'attraction terrestre ($g = 9{,}8$ m/s²).

Noircissez le ou les cercles correspondant à des énoncés vrais.

Dans cette équation,

1) t est la variable indépendante.

2) g est une variable.

3) v_0 est un paramètre.

4) t est une constante.

5) d est la variable dépendante.

Question 25

Noircissez le ou le cercles qui correspondent à des bonnes réponses.

La fonction représentée par le graphique ci-contre peut avoir pour équation:

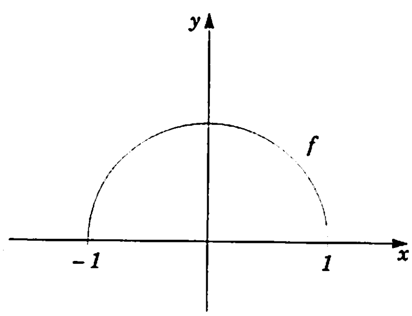
1) $f(x) = 1 + x^2$ pour $x \in [-1, 1]$

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in [-1, 1]$

3) $f(x) = \frac{2\pi r}{2}$ pour $x \in [-1, 1]$

4) $f(x) = \frac{\pi r^2}{2}$ pour $x \in [-1, 1]$

5) $f(x) = \pi$ pour $x \in [-1, 1]$



Pour chacune des questions 26 à 33, noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

Question 27

La fonction représentée par l'équation $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question 28

La fonction représentée par l'équation $f(x) = x^4 - x + 9$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question 29

La fonction représentée par l'équation $f(x) = \frac{x}{2}$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question 30

La fonction représentée par l'équation $f(x) = \log x$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question 31

La fonction représentée par l'équation $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question32

La fonction représentée par l'équation $f(x) = -3$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Question 33

La fonction représentée par l'équation $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est:

1) constante 2) du premier degré 3) quadratique 4) exponentielle 5) aucun de ces cas

Pour chacune des questions 34 à 39, noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

Question 34

Le nombre $\frac{1}{3}$ est:

1) naturel 2) entier 3)rationnel 4)irrationnel 5) aucun de ces cas

Question 35

Le nombre 10^2 est:

1) naturel 2) entier 3)rationnel 4)irrationnel 5) aucun de ces cas

Question 36

Le nombre $\sqrt[3]{-1}$ est:

1) naturel 2) entier 3)rationnel 4)irrationnel 5) aucun de ces cas

Question 37

Le nombre $10,\overline{4}$ est:

1) naturel   2) entier   3)rationnel   4)irrationnel   5) aucun de ces cas

Question 38

Le nombre $\sqrt{-16}$ est:

1) naturel   2) entier   3)rationnel   4)irrationnel   5) aucun de ces cas

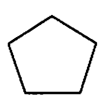
Question 39

Le nombre π est:

1) naturel   2) entier   3)rationnel   4)irrationnel   5) aucun de ces cas

Pour chacune des questions 40 à 46, noircissez le ou les cercles correspondant à des bonnes réponses.

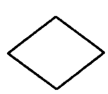
Question 40



cette figure est

1) un quadrilatère   2) un parallélogramme   3) un polygone   4) un polyèdre   5) aucun de ces cas

Question 41



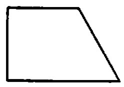
cette figure est

1) un quadrilatère   2) un parallélogramme   3) un polygone   4) un polyèdre   5) aucun de ces cas

Question 42

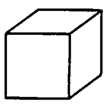
cette figure est	1) un quadrilatère	2) un parallélogramme	3) un polygone	4) un polyèdre	5) aucun de ces cas

Question 43



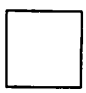
cette figure est	1) un quadrilatère	2) un parallélogramme	3) un polygone	4) un polyèdre	5) aucun de ces cas

Question 44



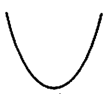
cette figure est	1) un quadrilatère	2) un parallélogramme	3) un polygone	4) un polyèdre	5) aucun de ces cas

Question45



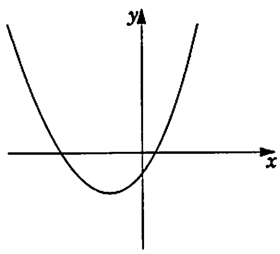
cette figure est	55 1) un quadrilatère	2) un parallélogramme	3) un polygone	4) un polyèdre	5) aucun de ces cas

Question 46

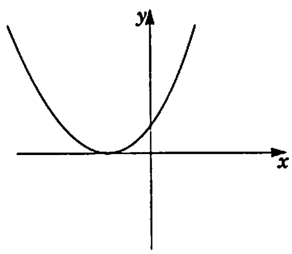


cette figure est	1) un quadrilatère	2) un parallélogramme	3) un polygone	4) un polyèdre	5) aucun de ces cas

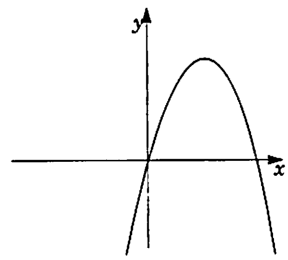
Les questions 47 à 51 se rapportent aux graphiques suivants, qui représentent des équations de la forme $y = ax^2 + bx + c$ ***où*** $a \neq 0$.



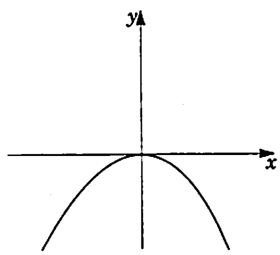
Graphique 1



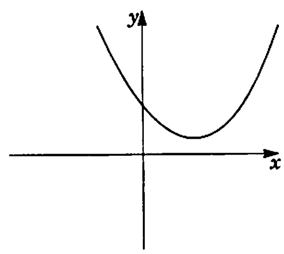
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



Graphique 5

Question 47

Parmi ces graphiques, celui ou ceux pour lesquels $a > 0$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$ sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 48

Parmi ces graphiques, celui ou ceux pour lesquels $c = 0$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$ sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 49

Parmi ces graphiques, celui ou ceux pour lesquels $b^2 - 4ac < 0$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$ sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 50

Parmi ces graphiques, celui ou ceux dontl'équation peut s'écrire sous la forme $y = a(x-r)^2$ sont:

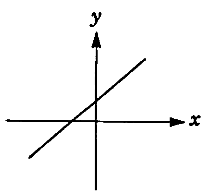
1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 51

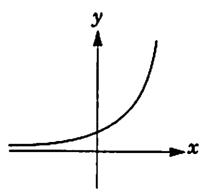
Parmi ces graphiques, celui ou ceux dontl'équation peut s'écrire sous la forme $y = a(x-r_1)(x-r_2)$ où $r_1 \neq r_2$ sont

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

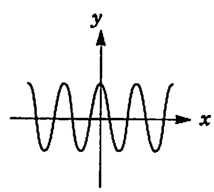
Les questions 52 à 56 se rapportent aux graphiques suivants.



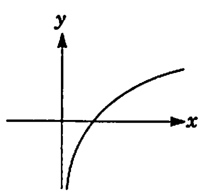
Graphique 1



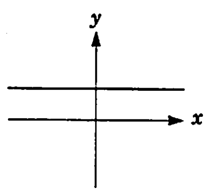
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



Graphique 5

Question 52

Parmi ces graphiques, celui ou ceux qui représentent une fonction positive sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 53

Parmi ces graphiques, celui ou ceux qui représentent une fonction strictement croissante sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 54

Parmi ces graphiques, celui ou ceux qui représentent une fonction constante sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 55

Parmi ces graphiques, celui ou ceux qui représentent une fonction exponentielle sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Question 56

Parmi ces graphiques, celui ou ceux qui représentent une fonction périodique sont:

1) Graphique 1 2) Graphique 2 3) Graphique 3 4) Graphique 4 5) Graphique 5

Annexe 9

Directives pour l'administration du test

Directives pour l'administration du test

Ne pas prévenir les élèves qu'il y aura ce test, car ils risquent de ne pas venir le vendredi après-midi ou le lundi matin à 8h30.

Directives au début du test:

- Demander aux élèves d'attendre les directives avant de commencer à répondre au test.
- Distribuer en premier les feuilles de réponses et les crayons à mine aux élèves qui n'en n'ont pas (on peut utiliser tous les types de crayons à mines, distribuer ensuite les parties A et B du test.
- Lire le début des directives ou le résumer dans vos mots.
- Bien expliquer les deux parties du test:

Partie A: Questions ouvertes, on répond sur le questionnaire.

Partie B: Questions objectives, on répond sur la feuille réponses.
Expliquer qu'il peut y avoir 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 bonnes réponses à chaque question. Voir avec eux l'exemple de la première page de cette partie.

Les deux parties du test doivent être faites dans l'ordre (A, ensuite B).

- Demander aux élèves d'inscrire leur nom (en lettres majuscules) et leur numéro d'admission sur la première page du test et sur la feuille réponses, ainsi que le numéro du groupe cours.
- Durée: la partie A devrait prendre environ 35 minutes,
  la partie B devrait prendre environ 45 minutes,
- Lire la fin des directives ou la résumer dans vos mots.
- Leur demander s'ils ont des questions, après quoi le test peut commencer.
- Pour la partie A, demander aux élèves d'encercler les numéros des questions qui les embêtent.
- Ramasser la partie A dès que les élèves l'auront terminée; vous aurez ainsi la possibilité de la consulter pendant que les élèves feront les parties B.

  En ramassant les copies A, vérifier que les élèves ont bien indiqué leur numéro d'admission sur la feuille réponses.
- À la fin du test, s'assurer de ramasser tout le matériel: copies A et B, feuilles réponses et crayons.

Annexe 10

Répartition des élèves, selon le programme et le choix de réponses, pour chaque question analysée de la partie B du test

Répartition des élèves, selon le programme et selon le choix de réponses, pour chacune des questions analysées de la partie B du test[1]

Résultats de la question 2:

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
44%	2) 4)	32%	23%	50%	84%	47%	56%
19%	2) 3) 4)	22%	19%	20%	14%	17%	20%
9%	4) 5)	8%	8%	10%	10%	8%	6%
7%	2) 4) 5)	8%	0%	7%	6%	5%	8%
21%	autres choix	30%	50%	13%	24%	23%	10%

Résultats de la question 3

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
36%	5)	26%	19%	38%	29%	50%	52%
35%	4)	43%	35%	34%	41%	17%	34%
6%	4) 5)	5%	12%	7%	4%	5%	0%
4%	1) 2)	3%	4%	4%	6%	3%	0%
19%	autres choix	23%	31%	17%	20%	25%	14%

Résultats de la question 4

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
48%	3) 5)	47%	23%	51%	41%	52%	54%
42%	3)	42%	50%	41%	47%	42%	42%
2%	aucune rép.	1%	4%	1%	4%	2%	2%
1%	5)	1%	8%	1%	4%	0%	0%
7%	autres choix	10%	15%	5%	4%	5%	2%

1 Voir à la fin de cette annexe les seuils d'admissibilité des élèves à chacun de ces programmes au collège Jean-de-Brébeuf

Résultats de la question 7

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
14%	1) 5)	19%	4%	13%	6%	18%	14%
25%	1) 2) 3) 4) 5)	18%	19%	30%	31%	18%	18%
19%	1) 2) 4) 5)	15%	8%	19%	29%	25%	22%
7%	aucune rép.	9%	23%	5%	6%	8%	10%
35%	autres choix	39%	46%	32%	29%	30%	36%

Résultats de la question 8

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
14%	1) 4) 5)	19%	4%	13%	6%	18%	14%
32%	1) 4)	18%	19%	30%	31%	18%	18%
15%	1)	15%	8%	19%	29%	25%	22%
5%	1) 2) 4)	9%	23%	5%	6%	8%	10%
34%	autres choix	39%	46%	32%	29%	30%	36%

Résultats de la question 9

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
36%	4) 5)	30%	12%	41%	31%	43%	44%
32%	3) 4) 5)	32%	42%	28%	43%	38%	34%
9%	2) 3) 4) 5)	11%	19%	9%	4%	5%	6%
8%	5)	9%	12%	8%	10%	2%	6%
15%	autres choix	19%	15%	14%	12%	12%	10%

Résultats de la question 10

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
36%	1) 4) 5)	7%	4%	9%	12%	17%	20%
35%	1) 2) 3) 4) 5)	19%	12%	25%	14%	8%	24%
6%	3) 5)	18%	19%	16%	18%	8%	16%
4%	1) 2) 4)	9%	12%	10%	14%	7%	8%
19%	autres choix	47%	46%	41%	41%	60%	32%

Résultats de la question 13

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
28%	1) 3) 4)	13%	8%	36%	14%	37%	48%
25%	1) 3) 4) 5)	25%	27%	24%	35%	28%	22%
7%	1) 2) 3) 4)	5%	19%	6%	4%	13%	10%
5%	1) 2) 3) 4) 5)	8%	0%	4%	14%	0%	0%
35%	autres choix	50%	46%	30%	33%	22%	20%

Résultats de la question 15

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
23%	aucune rép.	18%	12%	21%	22%	35%	40%
27%	5)	19%	27%	33%	35%	20%	22%
10%	4) 5)	13%	8%	11%	16%	5%	6%
8%	4)	6%	0%	10%	10%	10%	8%
32%	autres choix	45%	54%	26%	16%	30%	24%

Résultats de la question 16

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
14%	3) 5)	7%	8%	16%	16%	13%	20%
17%	1) 3) 5)	19%	15%	17%	24%	8%	12%
15%	1)	13%	19%	15%	8%	27%	16%
12%	1) 3)	11%	8%	14%	8%	13%	20%
32%	autres choix	50%	50%	39%	43%	38%	32%

Résultats de la question 17

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
20%	3) 5)	18%	0%	21%	18%	25%	26%
37%	3)	32%	31%	40%	45%	33%	40%
18%	4)	22%	23%	17%	16%	13%	16%
10%	5)	7%	12%	10%	14%	10%	12%
15%	autres choix	22%	35%	12%	6%	18%	6%

Résultats de la question 19

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
24%	1)	14%	12%	27%	20%	38%	38%
13%	3)	19%	46%	9%	12%	8%	8%
11%	3) 4)	13%	4%	13%	8%	3%	12%
10%	1) 3)	12%	15%	10%	8%	15%	6%
42%	autres choix	42%	23%	41%	51%	35%	36%

Résultats de la question 20

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
51%	4)	41%	27%	57%	35%	68%	60%
9%	2) 4)	7%	12%	8%	16%	12%	14%
6%	aucune rép.	7%	19%	3%	12%	2%	6%
5%	1)	7%	0%	1%	29%	5%	6%
29%	autres choix	38%	42%	30%	8%	13%	14%

Résultats de la question 24

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
23%	1) 3) 5)	15%	4%	26%	16%	42%	22%
23%	1) 5)	18%	14%	23%	24%	15%	34%
12%	5)	11%	8%	14%	10%	10%	12%
7%	aucune rép.	9%	8%	5%	12%	3%	6%
17%	autres choix	47%	66%	32%	38%	30%	26%

Résultats de la question 41

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	**Choix de réponses**	**D.E.C. régulier**	**Cours d'appoint**	**Cours régulier**	**Sc. H**	**Sc. N**	
52%	1) 2) 3)	42%	31%	53%	53%	62%	50%
11%	1) 2)	15%	8%	10%	12%	12%	10%
11%	1) 3)	10%	12%	11%	16%	12%	6%
10%	1) 3)	13%	23%	11%	6%	2%	6%
16%	autres choix	20%	27%	15%	12%	13%	28%

Résultats de la question 47

		Sc. H.		Sc. N	B.I.		P.I.
% de répondants	Choix de réponses	D.E.C. régulier	Cours d'appoint	Cours régulier	Sc. H	Sc. N	
55%	1) 2) 5)	44%	23%	63%	76%	60%	46%
9%	5)	9%	15%	8%	8%	10%	10%
8%	2) 5)	13%	19%	5%	6%	5%	10%
5%	aucune rép.	4%	15%	4%	6%	10%	4%
23%	autres choix	30%	27%	21%	4%	15%	30%

Seuil d'admissibilité des élèves au collège Jean-de-Brébeuf, selon le programme

Programmes		Moyenne générale (1)	Moyenne en sciences et en mathématiques (2)	Moyenne en math 536
200.01	Sciences de la nature (3)	72%	72%	--
200.10	B.I. Sciences de la nature (3)	75%	75%	--
300.01	Sciences humaines (4)	70%	--	--
300.10	B.I. Sciences humaines --	75%	--	75%
700.01	Programme intégré (3)	80%	75%	--

B.I. Baccalauréat internationnal

P.I. Programme intégré en Sciences, Lettres et Arts

(1) La moyenne générale est la moyenne pondérée de quatrième secondaire et du dernier bulletin disponible en cinquième secondaire. Les pourcentages exigés peuvent être légèrement inférieurs pour les candidats provenant de groupes spéciaux de certains collèges ou écoles secondaires.

(2) La moyenne en sciences et en mathématiques est la moyenne des cours suivants: sciences physiques 436, mathématiques 436 et 536, chimie 534 et physique 534.

(3) Les préalables pour ces programmes sont chimie 534, mathématiques 536 et physique 534.

(4) Le cours mathématiques 536 est préalable au cheminement 1 (MAT 105, 103, 203 et 307) et au cheminement 2 (MAT 105, 103 et 307) en mathématiques pour le programme de Sciences humaines. Les étudiants qui n'ont pas réussi le cours MAT 536 peuvent suivre un cours d'appoint au collège.

Annexe 11

Répartition des élèves, selon la combinaison de réponses, pour chacune des questions de la partie B du test

Combinaisons possibles de «vrais - faux»

c_1 à c_{16}

Questions	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
Q_1	0	12	0	0	7	0	0	0	3	**532**	0	16	0	4	0	0
Q_2	0	1	8	54	2	2	8	28	4	1	**275**	43	5	2	121	2
Q_3	37	**224**	217	36	6	18	1	2	3	5	11	5	1	1	0	0
Q_4	11	7	2	0	264	**301**	2	0	1	1	2	0	1	1	0	3
Q_5	5	11	5	17	2	6	0	5	2	0	1	3	0	0	0	0
Q_6	3	2	0	0	0	0	0	1	22	77	36	**392**	14	24	3	6
Q_7	46	4	1	2	37	1	14	0	2	1	4	1	1	1	1	1
Q_8	24	8	21	15	4	1	0	1	9	8	6	6	0	2	0	1
Q_9	1	49	4	**227**	0	27	2	203	2	1	2	22	4	8	12	54
Q_{10}	39	6	1	7	4	100	12	5	3	6	1	5	2	11	2	6
Q_{11}	13	108	9	38	39	**257**	2	21	18	15	1	8	11	24	1	7
Q_{12}	4	1	5	2	1	1	1	0	2	0	0	0	1	0	1	0
Q_{13}	4	0	6	8	0	1	15	11	1	2	2	1	0	2	4	2
Q_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0
Q_{15}	**141**	171	51	67	30	42	6	8	3	8	3	3	1	0	1	0
Q_{16}	15	12	4	0	94	**87**	16	0	23	5	21	0	1	1	0	1
Q_{17}	45	62	110	2	232	**123**	1	4	8	0	3	0	4	1	0	0
Q_{18}	2	1	1	0	3	0	0	3	7	9	1	1	2	0	0	0
Q_{19}	13	2	13	3	83	7	71	13	16	3	5	0	9	2	5	2
Q_{20}	35	30	**319**	38	20	0	2	2	13	1	58	12	2	0	1	0
Q_{21}	31	33	**388**	4	22	0	7	0	13	1	6	0	2	0	3	1
Q_{22}	48	355	**123**	5	22	4	1	1	27	3	4	1	3	0	1	0
Q_{23}	3	3	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0
Q_{24}	41	75	7	8	34	43	4	6	4	15	4	3	7	10	3	0
Q_{25}	80	51	51	13	150	53	14	11	**118**	4	7	4	14	4	2	2
Q_{26}	18	154	94	6	**243**	7	20	1	44	0	6	0	4	0	1	0
Q_{27}	23	**159**	17	1	37	1	2	0	315	3	4	0	9	0	1	0
Q_{28}	19	**263**	90	7	190	4	15	1	16	1	0	0	3	0	2	0

Combinaisons possibles de «vrais - faux»
c_{17} à c_{32}

Questions	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	C_{28}	C_{29}	C_{30}	C_{31}	C_{32}
	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
	0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
Q_1	2	2	0	0	25	4	0	0	0	13	0	0	1	1	0	0
Q_2	0	4	2	6	3	2	3	8	1	0	6	1	0	0	11	2
Q_3	8	0	3	1	0	0	0	0	22	4	14	5	0	1	0	0
Q_4	8	4	1	0	8	6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Q_5	7	59	22	**353**	10	41	5	26	4	12	6	15	2	2	1	3
Q_6	1	2	0	2	0	0	0	0	0	4	3	11	4	10	2	6
Q_7	30	**90**	3	29	14	9	1	4	13	24	5	121	3	3	1	154
Q_8	94	27	198	**86**	20	8	2	0	23	6	29	17	5	3	1	0
Q_9	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{10}	5	20	26	**62**	2	9	9	18	11	7	60	29	9	11	10	127
Q_{11}	31	6	1	0	4	8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Q_{12}	5	1	5	6	1	0	2	0	1	0	23	3	66	20	**378**	94
Q_{13}	6	1	31	21	16	22	**176**	158	3	4	19	29	1	3	45	31
Q_{14}	3	0	0	0	8	6	59	18	0	0	3	0	39	13	347	**124**
Q_{15}	24	20	9	14	6	10	3	0	1	2	0	0	0	0	0	0
Q_{16}	94	11	6	2	80	107	7	1	15	7	11	1	1	0	0	1
Q_{17}	15	0	2	0	3	1	0	0	6	0	0	0	1	0	1	0
Q_{18}	15	9	9	3	8	3	3	1	**307**	126	63	24	9	2	7	6
Q_{19}	**151**	6	22	1	67	5	68	3	19	2	7	2	13	1	8	3
Q_{20}	34	3	22	5	0	1	2	0	5	1	13	2	1	0	0	2
Q_{21}	59	7	3	1	1	0	0	0	1	7	0	2	2	3	1	27
Q_{22}	9	9	1	1	0	2	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0
Q_{23}	10	125	2	**282**	5	67	0	36	4	21	1	38	0	12	0	11
Q_{24}	14	136	2	6	18	**141**	2	1	8	15	1	2	3	8	1	3
Q_{25}	22	3	5	0	5	2	2	0	4	1	0	0	0	1	0	2
Q_{26}	12	3	4	0	3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
Q_{27}	27	0	2	0	2	0	0	0	17	0	0	0	1	0	0	0
Q_{28}	6	1	1	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0

Combinaisons possibles de «vrais - faux»

c_1 à c_{16}

Questions	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Q_{29}	15	57	14	3	13	0	0	0	**384**	3	7	0	4	0	0	0
Q_{30}	26	**272**	191	14	24	2	3	0	38	2	16	1	1	1	0	0
Q_{31}	18	29	**475**	2	9	1	5	0	28	0	22	0	1	0	0	0
Q_{32}	11	12	3	1	1	0	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_{33}	20	**312**	67	0	130	3	7	0	52	2	7	0	2	0	1	0
Q_{34}	2	6	74	0	**419**	0	6	0	5	0	2	0	11	0	0	0
Q_{35}	2	6	7	0	11	0	0	0	30	0	1	0	23	0	0	0
Q_{36}	8	214	206	15	26	5	2	0	21	0	4	0	**74**	0	2	0
Q_{37}	8	14	149	4	**368**	1	6	0	5	0	1	0	5	0	0	0
Q_{38}	9	**433**	123	11	8	1	0	0	7	2	2	1	6	0	0	0
Q_{39}	3	14	**469**	4	71	0	5	0	1	1	3	0	2	0	0	0
Q_{40}	6	19	17	4	**507**	2	44	1	1	0	2	0	4	1	0	0
Q_{41}	2	4	0	0	2	0	1	0	28	0	1	0	14	1	0	0
Q_{42}	10	**195**	316	17	46	3	18	1	0	0	2	0	0	0	0	0
Q_{43}	2	4	10	1	26	0	2	0	12	0	1	0	4	0	0	0
Q_{44}	11	122	**305**	6	42	3	12	0	6	0	8	0	10	0	0	2
Q_{45}	1	7	3	0	2	1	0	0	8	0	0	0	1	0	0	0
Q_{46}	5	**593**	9	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Q_{47}	31	59	5	1	13	12	22	0	22	50	5	1	1	5	0	0
Q_{48}	50	33	201	5	32	10	**59**	2	24	5	156	1	3	0	6	0
Q_{49}	68	**263**	45	0	20	11	50	1	22	8	22	3	2	0	1	0
Q_{50}	184	22	85	0	32	6	11	0	43	12	**79**	3	5	1	2	0
Q_{51}	211	24	31	4	34	7	8	0	35	13	15	3	6	2	2	0
Q_{52}	18	19	14	1	3	0	1	0	27	**295**	3	10	2	1	0	0
Q_{53}	9	3	7	2	2	0	0	0	27	1	19	0	0	0	0	2
Q_{54}	11	**480**	2	6	7	28	0	0	4	2	2	0	1	0	0	0
Q_{55}	25	3	37	4	67	0	3	0	**142**	2	283	0	2	0	31	0
Q_{56}	28	18	11	1	512	13	3	0	6	0	8	0	0	0	2	0

Combinaisons possibles de «vrais - faux»
c_{17} à c_{32}

Questions	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	C_{28}	C_{29}	C_{30}	C_{31}	C_{32}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Q_{29}	60	1	1	0	2	0	0	0	60	1	0	0	0	0	0	0
Q_{30}	15	2	2	0	1	0	0	0	10	0	3	0	1	0	0	0
Q_{31}	14	1	10	0	2	0	0	0	4	0	3	0	0	0	1	0
Q_{32}	**498**	3	1	0	3	0	0	0	73	1	1	0	2	0	0	0
Q_{33}	7	3	2	0	2	0	0	0	5	1	0	0	1	0	0	0
Q_{34}	8	0	20	0	54	1	2	0	1	0	0	0	13	0	0	0
Q_{35}	41	0	0	0	2	0	0	0	93	0	1	0	**402**	1	5	0
Q_{36}	3	0	8	0	2	0	0	0	5	0	1	0	25	0	0	0
Q_{37}	6	1	19	0	27	0	1	0	0	0	2	0	7	0	0	0
Q_{38}	5	0	1	1	1	0	0	0	1	0	3	0	6	0	0	0
Q_{39}	5	0	30	0	8	0	1	0	2	0	2	0	3	0	0	0
Q_{40}	5	0	0	1	7	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0
Q_{41}	64	0	1	0	68	0	8	0	70	0	8	0	**323**	1	28	0
Q_{42}	0	2	2	0	3	0	3	0	2	1	0	1	2	0	1	0
Q_{43}	146	2	8	1	**331**	3	24	0	12	0	0	0	32	0	4	0
Q_{44}	13	3	10	1	13	0	8	0	6	1	13	0	11	0	18	0
Q_{45}	91	3	3	0	82	1	3	0	60	1	5	0	**325**	2	26	0
Q_{46}	1	3	0	0	1	0	0	0	2	1	0	0	0	0	1	0
Q_{47}	9	3	1	0	4	1	0	0	7	**345**	0	3	1	8	1	14
Q_{48}	5	2	2	0	2	6	0	0	2	4	1	0	3	2	2	7
Q_{49}	43	6	13	0	15	1	6	0	10	3	1	0	1	1	3	5
Q_{50}	22	6	3	0	19	4	1	3	12	13	3	2	3	7	11	31
Q_{51}	23	4	4	0	**92**	15	3	0	7	10	6	2	4	26	3	31
Q_{52}	11	3	5	1	2	1	0	2	26	36	65	49	1	2	3	23
Q_{53}	30	3	14	1	0	0	0	0	53	1	**432**	11	6	0	2	0
Q_{54}	5	47	1	0	1	18	0	1	1	1	2	1	1	0	1	1
Q_{55}	17	0	0	0	3	0	0	0	1	0	1	1	0	0	3	0
Q_{56}	9	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	2	0	3

Pour chacune des questions, le tableau donne le nombre total d'élèves ayant choisi l'indicateur "1" vrai.

Questions	1	1	1	1	1
1	48	570	42	16	584
2	49	494	219	598	176
3	58	72	30	295	302
4	28	10	586	11	323
5	568	51	103	462	553
6	45	614	70	462	537
7	504	336	245	342	445
8	519	116	48	383	189
9	5	105	312	529	593
10	415	300	337	380	429
11	53	88	375	89	494
12	605	589	566	520	128
13	566	149	487	559	296
14	620	531	617	555	161
15	89	22	107	165	345
16	344	88	397	71	236
17	29	24	371	123	193
18	595	564	47	122	188
19	378	97	360	226	55
20	91	111	33	478	97
21	114	69	69	443	86
22	26	43	36	139	381
23	614	90	132	373	596
24	361	87	284	53	472
25	47	163	262	113	151
26	26	58	282	134	171
27	49	350	53	27	164
28	13	24	218	116	277
29	125	459	19	25	65
30	34	73	33	230	294
31	35	59	19	518	33
32	582	88	10	7	18
33	21	71	146	84	321
34	99	32	506	104	7
35	545	556	444	14	7
36	44	132	136	238	234
37	63	20	415	182	20
38	18	28	22	142	449
39	51	14	90	514	19
40	16	11	568	69	30
41	571	474	446	47	6
42	17	9	77	361	220
43	563	65	426	51	11
44	97	75	119	383	136
45	602	428	443	40	15
46	9	5	4	12	597
47	397	463	82	53	502
48	38	216	134	442	77
49	108	82	117	150	302
50	140	227	136	234	110
51	230	165	233	112	141
52	230	543	41	177	443
53	553	554	12	490	22
54	81	17	59	17	585
55	26	466	109	363	10
56	19	22	538	29	40

ISBN 2-9805181-0-7

Collège Jean-de-Brébeuf