Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques

Frederic Brechenmacher

Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques[1]

Cette enquête pose comme problème historique l' « universalité » prêtée à la terminologie « matrice » au XXe siècle, envisagée dans ses différents aspects conceptuels et ses diverses matérialités. La prétention à l'universalité est l'un des aspects les plus spécifiques des savoirs mathématiques, spécificité que ne peuvent saisir les études locales sur des temporalités courtes souvent privilégiées par des approches culturelles ou sociales des sciences. La méthodologie que nous mettons en action est basée sur l'association de méthodes quantitatives et d'études qualitatives pour aborder des phénomènes collectifs de réception ou de transmission et leurs dynamiques[2].

Dans un premier temps, une étude bibliométrique sera mise en œuvre de manière opératoire pour dégager un corpus et ancrer une période de référence, 1920-1938, dont l'étude permettra de distinguer différents caractères d'universalité. Nous verrons ainsi que l'identité d'une méthode matricielle universelle se tisse de pratiques différentes élaborées au sein de réseaux distincts, engageant à la fois les mathématiques et des écritures de leur histoire.

Nous mettrons ensuite en œuvre un double jeu d'échelles[3], entre le local et le global, mais aussi entre le temps court et le temps long, afin d'interroger les modalités par lesquelles les textes de notre corpus initial parviennent à transcender leurs conditions historiques de production, en réalisant l'extension de pratiques locales plus anciennes. Une attention à la technicité même de ces pratiques donnera accès à des aspects culturels et sociaux propres à des communautés dont nous interrogerons les identités à l'aide de méthodes d'analyses des réseaux. L'étude de l'appropriation de pratiques algébriques sera ainsi l'occasion de questionner la validité des cadres nationaux, institutionnels ou scientifiques via une étude des réseaux dans lesquels les textes circulent et sont lus à des niveaux différents.

Nous nous interrogerons enfin sur la nature de la culture commune que manifeste la constitution de la théorie des matrices à l'échelle internationale. Dans le cadre de ces problématiques, l'histoire de l'enseignement ne peut être dissociée de l'histoire des sciences et nous verrons notamment que, entre 1900 et 1930, des valeurs pédagogiques prêtées à la représentation matricielle sont à l'origine de nouvelles questions pour la recherche mathématique.

I. Universalité, périodisation et choix d'un corpus.

Des publications relatives à l'histoire des matrices ont accompagné la parution de premières revues spécialisées d'histoire des mathématiques dans les années 1970. Elles distinguent trois périodes : à l'origine, dans la « théorie des matrices » d'Arthur Cayley d'une « algèbre symbolique » des matrices en 1858, suit une deuxième étape, considérée comme fondatrice de la « substance » des théorèmes de réductions canoniques des matrices (comme le théorème des diviseurs élémentaires de Karl Weierstrass (1868) et la synthèse de Ferdinand Frobenius (1878)), puis une troisième étape de « développements » ou « diffusions »[4]. Notre objectif ne saurait être ici de remettre en cause le bien fondé de ce type d'histoire récurrente, mais plutôt de la considérer comme une source parmi d'autres pour notre propre enquête historique. S'il nous faudra préciser plus avant la manière dont les résultats de cette histoire s'articulent avec notre propre problématique[5], nous nous contenterons, dans un

[1] L'auteur remercie C. Ehrhardt pour ses relectures et conseils.
[2] Au sujet des méthodes quantitatives, voir Goldstein, 1999.
[3] Revel, 1996.
[4] Hawkins, 1977.
[5] Notre enquête ne saurait se satisfaire d'une dichotomie séparant approches « externes » et « internes ». Les travaux d'Hawkins ne sont pas exempts de résultats d'histoire sociale comme la constitution locale d'un idéal de généralité propre à un réseau berlinois vers 1870.

premier temps, de remarquer qu'une question comme celle de la prétention à l'universalité des mathématiques ne peut être développée par les approches conceptuelles qui se focalisent sur les innovations de quelques individus de premier plan. L'universalité y tient en effet un statut d'hypothèse qui justifie de voir rétrospectivement des matrices jusque dans des travaux de mécanique du siècle des Lumières ou même dans des textes japonais et chinois d'époques plus anciennes.

1. Période de référence

Afin de préciser les critères à partir desquels sélectionner un corpus et une périodisation pertinents pour questionner une universalisation d'usage de la terminologie « matrice », nous avons mis en œuvre une méthode quantitative s'appuyant sur la base de données *Zentralblatt Math*[6]. Une étude sur le temps long, proposée en annexe, a attiré notre attention sur la période de l'entre deux guerres. En effet, la quantité d'entrées référencées s'y avère plus importante - en proportion comme en nombre absolu - que dans les périodes précédente et suivante. Elle ne sera dépassée qu'à partir du milieu des années 1970, époque où l'on voit apparaître de premiers travaux historiques sur la « théorie des matrices », ce qui montre que celle-ci est alors passé dans la culture commune des mathématiciens et employée relativement à des sujets mathématiques variés. La période 1946-1975, se distingue quant à elle par une adéquation presque parfaite entre les occurrences de la terminologie « matrice » dans les recensions et dans les titres, ce qui semble indiquer que les matrices sont alors reconnus comme un sujet faisant l'objet de publications spécifiques. Nous aimerions donc questionner le rôle spécifique que semble jouer la période de l'entre deux guerres dans l'histoire de l'usage de cette terminologie. L'ancrage dans les années 1920-1938 permettra ainsi de distinguer empiriquement différents caractères d'universalité afin de structurer notre enquête.

Le choix de ce moment de référence permet également d'affiner notre méthodologie en adoptant comme source un journal de comptes rendus, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, publié de 1868 à 1942, dont l'objectif était de dresser un « annuaire des progrès des mathématiques » en proposant un référencement des publications accompagné de recensions et d'une inscription dans une classification des sujets mathématiques. En étudiant les catégories selon lesquelles ce journal est organisé durant la période 1920-1938, on observe ce que nous désignerons comme une dynamique d'universalité dans les usages de la terminologie « matrice », à savoir, à partir de 1926, une internationalisation et un envahissement progressif par la terminologie « matrice » de toutes les rubriques de classification des mathématiques pures et appliquées et qui sont corrélés, en particulier, avec la diffusion des théories quantiques et des méthodes de la « mécanique des matrices ».

De plus, un examen des lieux de production met en évidence un rôle spécifique joué par des entrées publiées aux Etats-Unis, dont les évolutions devancent de plusieurs années la dynamique générale. Le sujet d'étude que constituent les matrices y est notamment mis en relation avec la rubrique « algèbre abstraite, groupes, anneaux, corps ». Cet usage, qui reste quasiment limité aux Etats-Unis jusqu'en 1935, avant de se répandre, notamment chez des auteurs publiant en Allemagne, sera entériné par une nouvelle classification adoptée en 1939 dans laquelle la sous section « matrices » sera insérée dans le nouveau chapitre « algèbre linéaire » et distinguée des sujets « déterminants » et « combinatoire » avec lesquels elle était mêlée depuis 1924.

Afin d'identifier les usages correspondants à ces catégories, il nous faut à présent mener un analyse plus fine à l'aide d'un corpus restreint aux entrées de type « livres » (manuels, traités, monographies) et en distinguant deux périodes délimitées par la diffusion des théories quantiques à

[6] http://www.zentralblatt-math.org

partir de 1926. Le fait que les « livres » référencés sur la période 1920-1926 soient en majorité publiées en Allemagne et l'évolution spécifique des entrées publiées aux Etats-Unis dans la seconde période nous conduiront en particulier à questionner la pertinence des cadres nationaux.

2. Un usage classique des matrices

L'examen des traités des années 1920 permet d'identifier un usage dominant du terme « matrice ». Il correspond à l'inscription des matrices dans la rubrique « théorie des formes, des déterminants et des invariants », dont les résultats principaux sont attribués à des auteurs comme Frobenius ou Weierstrass. On peut qualifier cet usage, qui s'est répandu en Allemagne à partir de la fin du XIX^e siècle, de « classique », au sens où il se manifeste dans toutes les langues de publications, et où la théorie des formes représente à cette époque l'un des principaux sujets des traités d'algèbre. Plus encore, en raison des nombreuses « applications » de la théorie des formes, cet usage de terme « matrice » se manifeste également dans des traités de mathématiques élémentaires, sur les méthodes mathématiques de la physique, les équations différentielles, la géométrie, les équations intégrales, l'usage du calcul des vecteurs dans la théorie des invariants ou encore en relativité.

La « notion » de matrice joue ici un rôle secondaire. Elle est employée pour manifester une identité revêtue par les notions différentes sur lesquelles porte la théorie des formes, en attribuant à ces objets un même calcul symbolique d'une part, et une même représentation tabulaire d'autre part. En ce sens, les matrices sont qualifiées d'« abstraites » par opposition aux « significations » dont les notions principales de la théorie, comme les formes bilinéaires, quadratiques et les substitutions linéaires, sont porteuses[7]. Dans ce contexte, le « calcul des matrices », conçu comme un calcul symbolique sur des objets qui ne sont pas des nombres au sens classique mais sur lesquels on peut définir des opérations analogues à celles de l'arithmétique élémentaire, est distingué des méthodes principales de la théorie qui relèvent de calculs d'invariants numériques ou polynomiaux[8].

Or, notre étude quantitative permet d'observer la coïncidence après 1926 d'un effondrement du statut de la théorie des formes comme sujet principal des traités d'algèbre, et de la dynamique d'universalité des « matrices » par l'envahissement de toutes les catégories de la classification, décrite précédemment. Les entrées publiées aux Etats-Unis permettent ici d'illustrer ce double phénomène. Avant 1930, l'usage principal du terme matrice dans ces publications se situe dans le cadre classique précédemment défini, mais un usage différent se manifeste déjà dans les travaux de certains auteurs proches de l' « école de Chicago », comme ceux de Leonard Dickson et Joseph Wedderburn sur les algèbres associatives ou ceux *d'analysis situs* d'Oswald Veblen[9]. On pourrait qualifier cet usage de « total » pour faire allusion à la notion de « total matrix algebra » employée par Wedderburn, en référence au rôle essentiel joué par les matrices dans ses travaux visant l'étude de la « structure » des différents types d'objets sur lesquels on peut définir des opérations d'addition et de multiplication.

3. Nouveaux usages

[7] Une forme quadratique peut s'interpréter comme l'équation d'une conique en géométrie analytique, une forme prise par des nombres en arithmétique etc.
[8] On distingue en particulier les invariants d'une forme, comme ses déterminants et sous-déterminants, de la matrice dont sont extraits ces déterminants.
[9] Parshall, 2004.

La communication faite en 1924 par Dickson au congrès de Toronto permet de caractériser cet usage « total ». Le mathématicien américain choisit en effet le cadre du premier congrès international d'après guerre auquel participent des mathématiciens allemands pour remettre en cause la structure de la théorie des formes. Sans aller jusqu'à rebaptiser cette théorie sous le nom de « théorie des matrices », comme le feront des auteurs proches de l'école de Chicago dans les années 1930, Dickson propose « une nouvelle théorie des transformations linéaires et des paires de formes bilinéaires ». En partant du problème de la « similitude des matrices » et en présentant comme corollaire la classification des « paires de matrices et donc des paires de formes bilinéaires », Dickson renverse ainsi l'usage classique. La « nouvelle théorie » implique de rabattre au second plan les notions de formes ou de substitutions ainsi que les méthodes de calculs d'invariants, pour placer au cœur de l'étude la notion de matrice et les méthodes spécifiques d'un calcul matriciel visant l'obtention de « matrices canoniques »[10].

Il faut noter, toutefois, que ce renversement ne procède pas d'une innovation au sens habituellement attribué à ce terme. En effet, une structuration théorique identique avait déjà été proposée par Camille Jordan en 1874, mais la vive querelle avec Leopold Kronecker que cette ambition avait provoquée avait enterré ce projet jusqu'à ce qu'à ce que de nouveaux travaux s'en revendiquent, comme ceux de Dickson à partir de 1900 ou de Séguier à partir de 1907[11]. Si la communication de Dickson passerait ainsi volontiers inaperçue dans l'optique d'une histoire conceptuelle cherchant à dresser des étapes des progrès des mathématiques, elle s'avère particulièrement intéressante ici. En effet, cette intervention vise explicitement à donner un caractère global à un usage local du terme « matrice », jusqu'alors propre à une petite communauté que Karen Parshall a qualifiée d' « école de recherche mathématique de Chicago » .

Au début des années 1930, comme Dickson, de nombreux auteurs abandonnent la structuration théorique classique pour développer de nouvelles problématiques de réductions canoniques des matrices. C'est le cas, par exemple, du britannique Herbert Turnbull, qui avait publié en 1928 un traité sur la théorie des déterminants et des invariants, et qui s'associe en 1932 à Alec Aitken pour publier l'emblématique *Introduction to the Theory of Canonical Matrices*. La principale différence entre ce nouvel usage de la terminologie « matrice » et l'usage classique dans le cadre de la théorie des formes saute littéralement aux yeux : alors que les représentations imagées étaient peu employées par la théorie classique, celles-ci envahissent la théorie des matrices des années 1930.

Dans le sillage des ambitions formulées par Dickson en 1924, l'introduction du traité de Turnbull et Aiken présente ainsi l'utilisation des « propriétés » de l' « idiome matriciel » comme une rupture par rapport à l'usage « classique » de la notation des formes bilinéaires.

Notation matricielle : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Notation des formes bilinéaires : $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$

Des valeurs pédagogiques associées à une représentation présentée comme « simple » ne peuvent être dissociées de l'objet même de la nouvelle organisation théorique à savoir « l'investigation systématique des types de transformations qui réduisent les matrices à leur forme la plus simple et la

[10] Dickson, 1924, p. 361.
[11] Brechenmacher, 2006a.

plus pratique » ou « forme canonique »[12]. Les démonstrations des théorèmes de réductions canoniques, les applications à différents problèmes comme la recherche des matrices commutant avec une matrice donnée sont autant d'exemples de l'efficacité de pratiques algébriques recourant à des formes imagées qui, dans les années 1930, envahissent progressivement les textes mathématiques.

4. Modernité de l'algèbre et pratiques opératoires

Ces publications sur les matrices interviennent dans une période où d'autres traités abordent la question de la « structure abstraite » des objets algébriques. Ainsi, les théories quantiques impliquent des bouleversements profonds des conceptions de la nature de la physique, mais aussi du statut de l'algèbre et de ce que l'on désigne comme « abstrait »[13]. En outre (mais non indépendamment), le célèbre traité *Modern Algebra* de Bartel Van der Waerden publié en 1930 a pour vocation de rendre globales des conceptions élaborées localement, notamment à Göttingen, tout en prônant la mise en place d'une algèbre de type structurel. Or, si ce traité participe lui aussi de l'effondrement du statut de la théorie des formes, il n'accorde aux matrices qu'un rôle secondaire : l'abstraction que Van der Waerden accorde aux matrices tient en fait à leur statut d'objet élémentaire des structures abstraites à l'étude desquelles est consacré le traité, comme les « modules sur un anneau » ou les « systèmes hypercomplexes ».

Les historiens des sciences ont beaucoup insisté sur la modernité de l'algèbre des années 1930 comme passage au global de la notion de structures abstraites, à travers la diffusion du point de vue de Van der Waerden. Deux traités publiés par l'un des doctorants de Dickson, Cyrus Colton Mac Duffee, en 1933 puis 1941, permettent toutefois de nuancer ce propos. Le premier, intitulé *The theory of Matrices*, est marqué par les principales caractéristiques de l'école de Chicago, et en particulier par le regard porté sur la théorie des algèbres. Le rôle qu'y joue l'abstraction de l'algèbre en référence à Van der Waerden, la place importante donnée aux calculs d'invariants, et notamment de déterminants, rendent cet ouvrage proche des traités de langue allemande[14]. Dans un second traité, publié en 1941, Mac Duffee abandonnera finalement cette approche abstraite pour adopter des pratiques opératoires fondées sur des formes imagées et sur leurs significations, notamment géométriques en termes d'espaces vectoriels. La modernisation de l'algèbre, on le voit, ne se réduit pas à l'introduction de structures abstraites, elle se manifeste aussi une universalisation de procédés imagés de réductions canoniques.

De plus, ces formes canoniques sont obtenues par des « transformations », normées par des critères de simplicité, s'appuyant sur un caractère opératoire conféré à la forme matricielle. L'utilisation de formes imagées permet que l'on « décompose » en « sous matrices ». On peut pour cela cultiver l'analogie avec les figures de la géométrie (on parle ainsi de rectangle, triangle, diagonale) et articuler, sur ce seul objet, des procédures combinatoires, des décompositions polynomiales, un « calcul symbolique » des puissances de matrices, une arithmétique des lignes et des colonnes et un point de vue vectoriel de décomposition d'un espace en sous espaces stables par l'action d'une transformation linéaire (annexe 3). La diversité de ces procédés nous amène ainsi à envisager une histoire complexe se tissant de fils multiples, dépassant le cadre du passage au global d'idéaux d'universalités propres à l'école de Chicago.

[12] Turnbull et Aitken, 1932, p. 2, trad. F.B.
[13] Scholz, 2006.
[14] Voir Schreiber et Sperner, 1932.

En particulier, préoccupations pédagogiques et de recherche s'avèrent indissociables du rôle essentiel accordé à des procédures opératoires imagées. Or, l'interaction entre mathématiques « élémentaires » et « modernes » se manifeste notamment en amont de notre période de référence, au sein de traités publiés dans différentes langues. Ces constatations nous conduisent à envisager l'universalité prêtée à la théorie matrices comme une tresse qu'il nous faudra démêler en questionnant les identités différentes revêtues par des pratiques opératoires et les modalités par lesquelles ces pratiques s'entremêlent en une unique méthode de décomposition matricielle.

Avant 1930, les adeptes de ces pratiques de décompositions imagées forment des réseaux complexes qui ne s'identifient ni à une communauté nationale, ni à une unique théorie. Par exemple, en Allemagne, les usages du terme matrice dans l'« algèbre moderne » développée par des auteurs du centre de Göttingen comme Emmy Noether s'avèrent distincts de ceux d'auteurs comme Alfred Loewy, Wolfgang Krull ou encore Issai Schur. Certaines pratiques des matrices sont proches de l'usage classique ; on peut citer ici celles mise en œuvre par Van der Waerden comme outil de représentation des groupes et des systèmes hypercomplexes[15], théorie dont l'un des acteurs, Frobenius, est également celui qui a structuré la théorie des formes. Plus encore, dans d'autres traités, comme celui d'Hermann Weyl ou de nombreuses publications concernant le problème de la détermination de l'ensemble des matrices commutant avec une matrice donnée[16], les matrices ne sont pas uniquement employées pour représenter des objets mais aussi comme une pratique de décomposition d'un problème complexe en une suite de problèmes simples. Le problème de la commutativité, central en théorie des représentations, joue ainsi un rôle important dans les premiers travaux des théories quantiques et la pratique de décomposition matricielle se manifeste dans la constitution des méthodes de la « mécanique des matrices ». Nous n'avons donc pas affaire là à un phénomène unique mais à plusieurs et, comme l'a montré Catherine Goldstein dans le cas de la théorie des nombres, la coordination de ces phénomènes « n'est en rien évidente et constitue en elle-même un problème historique important »[17]. Questionner le statut d' « universalité » que des auteurs des années 1930 associent aux matrices sera donc l'occasion de présenter une histoire de l'algèbre linéaire qui ne se réduit pas à l'émergence de structures abstraites et permettra d'obtenir des résultats nouveaux quant aux rôles joués par des pratiques, savoirs, idéaux ou philosophies internes propres à des communautés.

II. Généalogies sur la période 1850-1930.

Si des différences se manifestent aux niveaux des structurations théoriques adoptées, des méthodes employées ou même des définitions données au terme « matrice », les traités publiés dans les années 1930 présentent néanmoins un point commun : la place accordée à l'histoire. Ces références historiques s'avèrent indissociables des différentes organisations mathématiques développées dans ces traités, dans la mesure où elles permettent d'en manifester la nouveauté et d'en assurer la légitimité par une inscription dans une histoire peuplée d'auteurs respectés. Ainsi Turnbull et Aitken illustrent les « nombreuses applications » des procédés de réduction canonique en produisant des exemples contemporains mais aussi une relecture rétrospective manifestant des appropriations d'une histoire longue. De même, les *Lectures on matrices* publiées par Wedderburn en 1932 insistent sur le calcul sur des éléments de plusieurs dimensions en référence à une longue série de publications britanniques

[15] Van der Waerden conserve la structuration classique de la théorie des formes bien qu'il la traduise dans le cadre des modules.
[16] Weyl, 1923, p. 90. Voir aussi Krull, 1921.
[17] Goldstein, 1999, p. 192.

consacrées aux quaternions et à leurs applications en physique. Mac Duffee, quant à lui, met en perspective le caractère abstrait des matrices qui confère à celles-ci une priorité conceptuelle sur la notion de déterminant.

Si ces écritures de l'histoire comportent des variations relatives aux différents statuts attribués au terme matrice, les ressemblances indiquent, réciproquement, des éléments d'une culture mathématique commune. Un premier point commun est la référence systématique à une histoire longue qui plonge au cœur du XIX^{e} siècle -voir même jusqu'aux travaux de mécanique de Lagrange ou jusqu'au livre VII des éléments d'Euclide -, et mêle des auteurs d'époques diverses, publiant dans différents lieux et sur des sujets variés. Un second point commun est la reconnaissance d'un père fondateur en la personne de Cayley (1858), lui-même devancé par un précurseur, William Hamilton et ses quaternions (1853), et suivi de « redécouvertes » multiples comme chez Edmond Laguerre (1867) ou Frobenius (1878). Ces découvertes multiples permettent alors une transition logique entre le caractère fondateur attribué à Cayley pour la définition d'une structure d'algèbre et les auteurs considérés comme à l'origine du contenu des mathématiques exposées comme Weierstrass (1868) ou Jordan (1870) et dont aucun, à l'exception de Henry Smith (1861), n'employait le terme matrice.

1. **Universalité et histoire des mathématiques**

Ce second point commun de l'histoire écrite par des mathématiciens s'avère essentiel pour notre enquête. En effet, la structure en trois étapes de cette histoire se présente systématiquement dans les publications, quels que soient le genre (historien/ mathématicien), la langue, le lieu et, surtout, l'époque de publication. On retrouve ainsi cette structuration aussi bien dans des ouvrages d'avant guerre, comme l'Encyclopédie franco allemande des sciences mathématiques[18], que dans les travaux menés par l'historien Hawkins des années 1970. Cette structuration de l'histoire des matrices présente donc un caractère universel, au sens où elle nous est contemporaine comme elle l'était déjà de Mac Duffee (1933) ou Georg Scheffers (1891). Si, comme nous l'avons déjà évoqué, l'histoire écrite par les mathématiciens s'avère indissociable des mathématiques qu'ils développent, la mise en évidence du caractère universel de cette structuration historique pourrait ainsi indiquer la présence d'une universalité prêtée à une certaine organisation mathématique.

Or, l'« histoire de Cayley comme fondateur » a elle même une histoire. On en trouve les premières traces dans les années 1880-1890, lorsque se constitue la théorie des « systèmes hypercomplexes » ou « algèbres linéaires associatives » chez des auteurs anglo-américains et continentaux. Ce phénomène nous amène à observer la constitution, à la fin du XIXe siècle, d'un schéma structurant l'organisation des mathématiques, qui nous est d'ailleurs indiqué par les histoires écrites par les acteurs. Il s'agit des fameuses « redécouvertes multiples » évoquées plus haut, qui manifestent la reconnaissance rétrospective d'une même théorie dans ce qui était auparavant perçu comme des théories distinctes, toutes susceptibles de généraliser des opérations sur les nombres, réels, complexes ou quaternions. A travers l'écriture de cette histoire, les matrices se voient ainsi attribuer un statut de notion « élémentaire » qui se rapporte, d'une part, à une qualification de simplicité - les matrices comme exemple le plus simple d'algèbre associative – et, d'autre part, à un caractère d'essentialité -, l'algèbre des matrices jouant un rôle essentiel dans les premiers résultats de classification des algèbres associatives et des algèbres de Lie[19]. Ce caractère élémentaire va se

[18] Cartan, 1908.
[19] Hawkins, 2000.

perpétuer jusqu'à nos jours malgré tous les développements ultérieurs des mathématiques et de l'histoire des mathématiques.

Il nous faut donc, pour comprendre la manière dont des textes mathématiques de notre corpus ont été fabriqués pour transcender leurs conditions historiques de production, interroger les reconstructions rétrospectives qui permettent de mêler des pratiques auparavant hétérogènes, en remontant jusqu'à l'introduction du terme matrice en mathématiques. Cette approche nous permettra de porter de nouveaux regards sur des questions de postérité en termes de processus collectifs de fabrications et d'appropriations de savoirs. La postérité du mémoire de 1858 de Cayley, en particulier, se limite-t-elle à un caractère de précurseur de structures algébriques, « pas supplémentaire vers l'abstraction », ou première définition de l' « addition des matrices » ?

2. **Questions d'identités.**

Une première étape consiste ici à questionner les différentes identités revêtues par des notions comme celle de formes bilinéaires, avant qu'elles ne soient mathématiquement incorporées à la théorie des matrices. L'analyse quantitative portée sur les occurrences d'une terminologie n'étant pas d'un grand secours pour cette question, nous adopterons une autre méthode, fondée sur l'étude systématique des indications bibliographiques de notre corpus de référence : il s'agit d'étudier la manière dont les textes référencés se citent les uns les autres afin de distinguer des réseaux cohérents. Des graphes permettent alors de représenter les liens entretenus par les différents textes d'un même réseau, et manifestent notamment l'existence de nœuds dans l'entremêlement des références bibliographiques.

Le graphe porté en annexe donne ainsi la représentation simplifiée du réseau qui réunit, pour la première fois, des références aux matrices et aux formes bilinéaires. Il faut cependant remarquer que la *Théorie des matrices* de Cayley n'y apparaît comme un nœud que rétrospectivement, après une éclipse d'une trentaine d'années ; son retour est dû aux références effectuées à partir des années 1880 par des auteurs comme Sylvester ou Scheffers qui écrivent les premières lignes de l' « histoire de Cayley comme fondateur ». Outre ces auteurs, un texte publié par le praguois Eduard Weyr en 1890 et intitulé « Zur Theorie der bilinearen Formen »[20] apparaît parmi les principaux nœuds.

Ce texte est resté presque invisible aux yeux de l'historiographie, qui n'a vu dans son contenu que des « développements techniques » de travaux antérieurs de Sylvester[21]. Pourtant, le nombre des citations dont le mémoire de Weyr fait l'objet de la part de ses contemporains contredit ce jugement rétrospectif. Cette contradiction tient à ce que l'objet principal du mémoire est précisément la constitution d'une identité entre les matrices de Cayley et les formes bilinéaires de Frobenius, identité donnant aux matrices le statut élémentaire au sein de la théorie des formes que nous avons étudié dans I-2, et offrant par conséquent à la structuration de l' « histoire de Cayley comme fondateur » un pilier qui, rétrospectivement, apparaîtra naturel et ne sera pas questionné par l'historiographie.

Weyr est pourtant, entre 1884 et 1889, le premier et le seul mathématicien du continent à faire explicitement référence aux matrices de Cayley. Or la lecture[22] de Cayley par Weyr ne procède pas de la reconnaissance d'une « structure » unificatrice mais vise l'introduction, dans la théorie des formes, d' « un nouveau moyen d'action » basé sur la notion de « single quantity » rebaptisée « scalar matrizen » : une matrice scalaire est à la fois un nombre a (un scalaire), et un système de nombres

[20] Pour des éléments biographiques, Bečvář, 1995.
[21] Parshall, 1985, p. 288.
[22] Sur les appropriations d'un texte dans des contextes multiples, Goldstein, 1995.

réduit à une diagonale composée de la succession d'un même scalaire. La pratique des matrices scalaires s'appuie sur cette dualité afin de factoriser les polynômes de formes de la théorie de Frobenius sur le modèle de polynômes de nombres :

$$a_0x^v+a_1x^{v-1}+\ldots+a_v = a_0(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_v),$$
$$a_0A^v+a_1A^{v-1}+\ldots+a_v = a_0\,(A-\rho_1)\ldots(A-\rho_v),$$

La première des équations ci-dessus donne ainsi la factorisation du polynôme caractéristique de la matrice A, un invariant obtenu par un calcul de déterminant. La seconde équation porte sur la factorisation d'un « polynôme de matrices », pratique basée sur la possibilité de considérer les racines ρ de l'équation comme des nombres ou des matrices scalaires.

Ce que nous montre le texte de Weyr, c'est que l'objet initial de la théorie de Cayley n'a donc pas toujours été compris comme une tentative de généraliser avant l'heure les opérations de l'arithmétique à des objets de plusieurs dimensions comme les quaternions d'Hamilton. Il s'agissait en fait plutôt, pour Cayley, d'énoncer un « théorème remarquable » selon lequel :

> « […] toute matrice satisfait une équation algébrique de son propre ordre. […] la loi pour la formation de ces équations peut être énoncée sous la forme condensée suivante, qui deviendra intelligible après étude du mémoire : le déterminant formé par une matrice soustraite à la matrice considérée comme une quantité simple associant la matrice unité, est égal à zéro[23] ».

Ce théorème est énoncé pour résoudre un problème précis, auquel est consacré la plus grande partie du mémoire : l'expression de fonctions homographiques de périodicité donnée[24]. Si l'on compose une fonction homographique par elle même, on obtient ce que l'on peut considérer comme une fonction homographique au carré et l'objet de la théorie de 1858 est d'énoncer une méthode de calcul des fonctions, comme par exemple la racine carrée, d'une homographie.

Or, un tel problème s'inscrit pleinement dans le contexte social de la constitution d'une communauté mathématique académique impulsée par la génération d'acteurs qui précède Cayley à Cambridge dans la première moitié du XIXe siècle et à laquelle l'historiographie a attribué le nom d' « école algébrique anglaise »[25]. La traduction du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Sylvestre Lacroix par Charles Babbage est souvent présentée comme exemplaire des efforts d'un groupe d'étudiants de Cambridge pour introduire les méthodes du calcul différentiel développées sur le continent à la suite des travaux de Gottfried Leibniz mais critiquées en Angleterre, depuis l'époque d'Isaac Newton, pour le caractère mécanique de leurs procédures et les paradoxes sur les quantités impossibles qu'elles impliquent. A ces critiques, les membres du « groupe de Cambridge » opposent une philosophie de l'algèbre qui se caractérise par l'importance donnée aux opérations par rapport aux objets. L'« algèbre symbolique » de Georges Peacock (1830) établit ainsi une distinction entre signification et symboles et implique une rupture avec le réalisme mathématique du XVIIIe siècle, selon lequel à tout objet mathématique correspond dans la réalité un élément essentiel qui en constitue la légitimité[26].

De fait, l'importance que prennent, dans le mémoire de Cayley, les questions liées à la réciprocité des opérations (puissances et racines de matrices) ou au caractère non commutatif de la multiplication renvoie à une préoccupation traditionnelle de l'école anglaise depuis les travaux de John

---

[23] Cayley, 1858, p., trad. F.B.
[24] $\varphi(x) = \frac{ax+\alpha}{bx+\beta}$ telle que $\varphi^{\mu}(x) = x$
[25] Novy, 1968, p. 211-222. Sur l'influence de Boole sur Cayley : Crilly, 2006.
[26] Durand-Richard, 1996.

Herschell (1813) sur la notation des opérateurs différentiels[27] et leur généralisation par Babbage à des questions comme l'obtention de racines carrées de fonctions homographiques. En effet, c'est afin d'énoncer son théorème remarquable selon lequel toute fonction rationnelle d'une matrice, en particulier $\sqrt{M}$, peut s'exprimer comme un polynôme de degré inférieur à celui de la matrice elle-même, que Cayley définit, sur le modèle des réflexions sur le « langage » de l'algèbre développées par Augustus de Morgan (1841), des règles d'opérations sur les matrices.

Ainsi, l'identité donnée par Cayley à la notion de matrice n'est pas celle d'un élément d'une algèbre associative et ne correspond d'ailleurs à aucune identité mathématique qui nous serait contemporaine. En revanche, le contexte de l'héritage de l'école algébrique anglaise infuse le texte de Cayley des problèmes posés au choix des termes « théorie », « règles », « loi » etc. Dans ce contexte, la spécificité conceptuelle d'une approche de l'algèbre symbolique s'avère indissociable d'éléments culturels et sociaux qui engagent le statut de l'algèbre, une rupture avec le réalisme du XVIII^e^ siècle et dont l'historienne Marie-Josée Durand Richard a montré les relations avec la philosophie de Locke et le contexte plus général de l'Angleterre de la révolution industrielle. Nous allons à présent interroger la relation entre cette spécificité culturelle et les processus de réappropriation du texte de Cayley.

3. **Circulation des textes et transmission sociale de faits culturels**

Entre la publication du mémoire de 1858 et les années 1880, les quelques références à la « théorie des matrices » s'avèrent toutes le fait des rares auteurs qui, comme Cayley, occupent des positions académiques au Royaume-Unis (Smith, 1861 ; Charles Dogson, 1868 ; William Clifford, 1873) ou aux Etats-Unis (Benjamin Peirce, 1870, Sylvester, 1882). La forte dimension sociale que Cayley a donnée à son mémoire par la référence implicite à ses prédécesseurs n'en favorise certainement pas la circulation sur le continent européen. Il faut aussi remarquer que, du point de vue de ses stratégies de publications, Cayley publie ses travaux sur les « règles » du calcul des matrices en anglais et sur le sol britannique. Les usages des « matrices comme quantités simples » de Cayley par d'autres mathématiciens s'identifient ainsi à des pratiques académiques de Cambridge qui se répandent ensuite à d'autres institutions universitaires britanniques puis américaines dans des contextes de création de communautés mathématiques en Grande Bretagne comme aux Etats-Unis.

Ainsi, à Oxford, Smith ancre ses travaux d'arithmétique et de théorie des nombres dans un réseau d'auteurs continentaux dont il œuvre à la diffusion des problématiques et résultats en Grande Bretagne. L'emploi que fait ce dernier des matrices de Cayley à partir de 1861 manifeste les identités complexes que celui-ci confère à ses travaux : à l'identité d'un réseau dont les grands noms sont Gauss ou Hermite s'ajoute l'inscription dans une tradition académique se reconnaissant des origines dans l' « école algébrique anglaise ».

Un autre exemple est donné par le cas de Sylvester, que nous développerons plus longuement. Sylvester, pourtant proche de Cayley, n'adopte la pratique de ce dernier qu'à partir des années 1880. Cet intérêt tardif est lié, d'une part, à des motifs mathématiques : en 1882 Cayley se sert de ses résultats de 1858 pour révéler le caractère erroné d'un résultat de Sylvester sur le problème de l'expression des racines des « substitutions linéaires ». Il est lié, d'autre part, à la trajectoire institutionnelle et intellectuelle de Sylvester. Après avoir été longtemps en marge des milieux académiques, Sylvester obtient en effet en 1876 une position lors de la fondation de l'université John Hopkins à Baltimore[28], puis, en 1883, la chaire d'Oxford. Il retourne alors, dans les cours qu'il

[27] La propriété $f^n(f(x))=f^{n+1}(x)$

[28] Parshall, 2006.

élabore, à des préoccupations caractéristiques des débuts de sa carrière, lorsqu'il était proche du « réseau de Cambridge », comme la théorie des invariants et la théorie des matrices.

On peut remarquer, tout d'abord, que les nouvelles considérations relatives aux matrices qu'il développe alors produisent un effet rétroactif sur l'histoire des mathématiques. Ainsi, la dénomination de « théorème de Cayley-Hamilton » illustre la façon dont l'adoption par Sylvester d'une conception des matrices comme quantité complexe vérifiant une équation algébrique s'accompagne d'une évolution des rôles historiques de Cayley et Hamilton, désormais associés dans la reconnaissance d'une priorité double sur l'énoncé d'un théorème précurseur de l'« algèbre universelle », conçue comme l'étude de divers systèmes de « formes symboliques » comme les matrices, les quaternions mais aussi les extensions de Grassmann ou la logique de Georges Boole.

Mais le thème de l'universalité manifeste également, ici encore, la dimension sociale de l'héritage du réseau de Cambridge. Il s'agissait en effet de l'un des thèmes principaux développés par des auteurs comme Peacock afin d'articuler l'« algèbre arithmétique », science des nombres, et l'« algèbre symbolique ». Dans cette séparation entre opérations et significations, l'algèbre arithmétique joue un double rôle, à la fois « science de la suggestion » (on en tire les « formes générales ») et lieu des « vérités contingentes » donc subordonnée à l'algèbre symbolique, lieu des « vérités nécessaires ». Il s'agit là du double principe de permanence de Peacock : ce qui a été découvert dans des cas particuliers sera universel.

Plus encore, l'utilisation que fait Sylvester dans les années 1880 des travaux de Cayley ne constitue pas ses premières recherches sur la notion de matrice. En effet, dans des publications de 1850-1851, il introduisait les termes « matrices » et « mineurs » en mathématiques pour proposer une caractérisation des types d'intersections de deux coniques[29]. Traduit dans le « langage des déterminants », le problème conduisait à l'étude d'une équation algébrique dont le type de multiplicité des racines devait caractériser la nature des contacts entre coniques. Les occurrences de racines doubles et triples nécessitaient chacune l'examen de deux sous cas abordés par l'étude des décompositions polynomiales du déterminant et de ses sous déterminants, dénommés « mineurs ». La définition du terme « matrice » pour désigner la mère des mineurs extraits d'un déterminant manifestait ainsi explicitement un idéal d'universalité dont l'introduction du traité sur les déterminants de Dogson (plus connu sous le nom de Lewis Caroll) montre qu'il est moins particulier à Sylvester que caractéristique du réseau de Cambridge :

> Je suis conscient que le terme « Matrice » est déjà employé pour exprimer la signification que j'associe au terme « Bloc » ; ce premier terme signifie cependant davantage le moule ou la forme par laquelle des quantités algébriques peuvent être introduites plutôt qu'un assemblage concret de telles quantités ; par exemple $\frac{(\ )\times(\ )}{(\ )}$ mériterait un tel nom, plutôt que $\frac{(a+b)\times(c+d)}{(e+f)}$[30].

Un tel usage de de la notation matricielle comme « forme universelle » s'appliquant à des significations diverses est d'ailleurs manifeste dans les premiers écrits de Cayley (1855) appliquant les matrices aux « fonctions linéaires » ou « quadratiques ».

A partir de 1882, Sylvester mêle la pratique spécifique développée par Cayley en 1858 à sa propre pratique de matrice-mère des mineurs et présente une « nouvelle méthode » pour « extraire la racine μ^e d'une substitution donnée » basée sur l'énoncé d'un « théorème général » dont le

[29] Sinaceur, 1991, p. 126. Il s'agit d'un problème classique pour lequel Sylvester souhaitait développer une approche « intrinsèque» par des méthodes de géométrie projective invariantes par transformations homographiques.

[30] Dogson, 1868, traduction de l'auteur.

« rapprochement inattendu » qu'il permet entre les théories des invariants ou des quaternions appuie, là encore, une revendication d'universalité. Les matrices de l' « algèbre universelle » généralisent les quaternions d'Hamilton –quantités d'ordre 4, à des quantités d'ordre 9 comme les nonions et, plus généralement, à des « m^2-ions », non pas basés sur des significations géométriques en termes d' « espaces inconcevables » mais sur une « fondation algébrique ». Sylvester ne renonce pourtant pas aux relations de l'algèbre et du monde réel, dans la tradition de l'école algébrique anglaise, il fait référence à Newton et désigne ses principaux résultats comme des « lois du mouvement dans le monde de l'algèbre universelle ». Une idée de mouvement est associée aux opérations sur les matrices en référence au temps pur de la mécanique, « un mouvement est une opération dans le monde de l'espace pur, une opération est un mouvement dans le monde de l'ordre pur »[31]. Sylvester développe notamment le « parallèle » entre la seconde loi de Newton et la « règle pour combiner ou multiplier les matrices » interprétée comme mouvement d'une ligne (ou colonne) d'une matrice fixe M sous l'action d'itérations de produits par une matrice m - $M, mM, m^2M, \ldots$-, itérations considérées come autant de modifications d' « états » de la matrice initiale et établissant la décomposition du mouvement d'une matrice en un ensemble de « mouvements parallèles ».

4. **Problématiques d'extensions, pratiques culturelles et réseaux**

Nous avons vu que la question du contexte culturel de Cambridge qui intervient dans des textes de Cayley, Sylvester et Dogson des années 1850 est liée à celle des relectures du texte de Cayley par des auteurs comme Smith ou comme Sylvester dans les années 1880. Nous allons à présent approfondir la manière dont l'inscription dans un contexte culturel plus ou moins large conditionne l'échelle de réception d'un texte.

Contrairement aux matrices-quantités simples de Cayley, les matrices mères des mineurs introduites par Sylvester en 1851 vont circuler au sein d'un réseau qui saluera les débuts d'une nouvelle théorie, la théorie des invariants, et se scindera en plusieurs branches après 1860[32]. Mais la rapide et large circulation du terme « mineur » est surtout due à un réseau beaucoup plus large dans lequel Sylvester inscrit ces travaux et qui se présente comme une culture algébrique commune au cours du XIX^e^ siècle. En effet, lors de son introduction des matrices en 1851 comme lors de sa réappropriation de ce terme à partir de 1882, Sylvester relie ses travaux au thème de l'« équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes »[33]. Cette référence s'avère être la manière dont des auteurs du XIX^e^ siècle identifient une pratique algébrique consistant à transformer les « formes » des systèmes linéaires par des décompositions des « formes » polynomiales d'une équation obtenue par des calculs de déterminants.

Ce caractère algébrique ne relève pas d'une identité théorique ou disciplinaire comme en donneront, dans les années 1880, la théorie algébrique de formes puis, dans les années 1930, la théorie des matrices[34]. A la permanence d'une pratique polynomiale dont l'origine est attribuée aux travaux de Lagrange sur les systèmes différentiels, il faut en effet opposer la diversité des méthodes élaborées dans les cadres théoriques distincts – mécanique céleste, géométrie analytique, arithmétique etc. - au travers desquels se déploie ce réseau. Si, parallèlement à cette variabilité des contextes, l'identité

[31] Sylvester, 1884, p. 33.

[32] Des travaux de théorie des formes comme ceux d'Hermite et de géométrie algébrique comme ceux de Clebsch ou Cremona.

[33] Sylvester, 1852 & 1883.

[34] Les références à l' « équation etc. », sont rares pendant la période 1880-1930 de prédominance de la théorie des formes pour reprendre dans les années 1930 au moment de l'effondrement du statut donné à cette théorie.

algébrique d'une pratique se manifeste dans ce réseau, cette identité relève en fait de celle d'une histoire partagée. C'est en effet par des références à des travaux plus anciens que les auteurs du corpus comme Laplace, Cauchy, Sylvester, Hermite ou Weierstrass donnent à leurs travaux une identité dépassant les contextes dans lesquels ceux-ci s'inscrivent. A l'époque de Sylvester, la pratique algébrique qu'identifie la référence à l' « équation à l'aide de laquelle etc. » est associée aux problèmes posés par l'occurrence de racines multiples dans la dite équation, problèmes qui mettent en question la capacité de l'algèbre à donner lieu à des résolutions « générales », c'est-à-dire valables pour tous les cas singuliers, et non uniquement pour le cas générique des racines distinctes.

L'identité algébrique du corpus large auquel se réfère Sylvester est à l'origine de la circulation de ses travaux sur le continent comme le manifestent l'intérêt ponctuel que leur porte Henri Poincaré en 1884 et surtout la série de travaux publiée par Weyr entre 1885 et 1890. La lecture que fait le géomètre de Prague des travaux sur les matrices mêle de nombreux textes de ce réseau large. A la nouvelle identité qui se construit entre matrices de Sylvester, de Cayley et quaternions de Hamilton se mêlent ainsi des travaux de Bernhardt Riemann de 1857 sur la caractérisation des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et qui proposaient une caractérisation des « substitutions linéaires semblables » par la « décomposition » d'une substitution A en un produit de trois substitutions de la forme :

$$(A) = (\alpha)\begin{Bmatrix} \lambda_1, & 0, & .. & 0 \\ 0, & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & .. & \lambda_n \end{Bmatrix}(\alpha)^{-1}$$

Comme le relève Weyr, en cas d'occurrence de racines λ_i multiples, on ne peut pas, en général, caractériser la substitution A par une substitution semblable prenant une forme diagonale comme ci-dessus. Weyr s'appuie sur les récents travaux de Sylvester afin de « rectifier » le résultat de Riemann par une décomposition en « compartiments » de la forme matricielle reflétant la décomposition de la forme polynomiale de l'équation caractéristique[35]. Entre 1885 et 1890, cette pratique de décomposition d'une matrice à sa forme canonique s'enrichit, dans le travail de Weyr, par un tissage complexe que manifeste une multiplicité de références à des travaux contemporains de Kronecker, Jordan, Weierstrass ou Study. La publication de 1890 sur la théorie des formes manifeste la maturité d'une pratique donnant un caractère opératoire à la représentation imagée des matrices et permettant une nouvelle approche du problème central de la théorie de Frobenius, la caractérisation des classes d'équivalence des formes bilinéaires.

Dans le contexte du développement de la théorie des systèmes hypercomplexes, cette identification entre matrices et formes bilinéaires jouera un rôle important dans l'adoption, en Allemagne, de l'usage du terme matrice. Celui-ci se répand notamment dans les recensions du *Jahrbuch* y compris à propos de travaux d'auteurs, comme Kronecker, qui n'emploient pourtant pas ce terme. Dans le cadre du calcul symbolique des formes de Frobenius par lequel, pour reprendre l'expression de Sylvester, « une matrice se fait dérober ses dimensions spatiales et représentée comme une somme linéaire »[36], les matrices sont cependant notées par des symboles alphabétiques. L'usage limité de la représentation matricielle manifeste finalement la faible postérité de la pratique de décomposition de Weyr, qui se heurte à une structuration théorique donnant un caractère primordial

[35] Weyr introduit la suite des dimensions des sous espaces caractéristiques d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie, méthode généralisable aux problèmes d'analyse fonctionnelle (Dieudonné, 1946).
[36] Sylvester, 1884, p. 220.

aux calculs d'invariants et un rôle secondaire aux méthodes de réductions à des formes canoniques[37], structuration rendue classique par des auteurs comme Frobenius ou Alfred Clebsch et popularisée par de nombreux traités publiés au tournant du siècle comme ceux de Louis Sauvage en France ou Maxime Bôcher aux Etats-Unis.

III. Pratiques, réseaux, interconnexions.

Les jeux d' échelles pratiqués dans la partie précédente montrent que l'universalité prêtée à la terminologie « matrice » dans les années 1930 manifeste, en parallèle de l'usage très répandu des matrices dans la théorie des formes, des rencontres d'autres pratiques développées au sein de réseaux plus restreints et qui s'avèrent indissociables d'aspects sociaux et culturels que nous aimerions à présent questionner. La prise en compte de la dimension sociale des travaux de Cayley substitue aux problématiques d'origines et de diffusion des notions et structures de l'algèbre linéaire des questions d'identités permettant d'envisager des circulations complexes, qui ne se réduisent pas à des relations entre individus, aires géographiques ou cadres nationaux. Les approches historiques rétrospectives sont elles mêmes fondées sur un caractère élémentaire conféré aux matrices au sein d'une organisation théorique qui se met en place à partir de 1890 mais qui ne fait l'objet d'une culture commune partagée sur un plan international qu'à partir des années 1930, au moment où l'algèbre linéaire se constitue comme une discipline. L'universalité prêtée à des notions élémentaires de cette discipline comme les matrices leur confère un caractère naturel qui semble dénué d'histoire.

Elémentaire, la représentation matricielle imagée a souvent été utilisée au sein des discours historiques comme une « notation » inoffensive. L'anachronisme terminologique implique cependant des résonnances conceptuelles qui « convoquent aussi implicitement des situations sociales inadéquates » et se double ainsi d'un « anachronisme sociologique »[38] ; les identités de réseaux jouant des rôles essentiels dans l'histoire de l'algèbre comme celui de l' « équation à l'aide de laquelle etc. » sont passées inaperçues et, avec elles, des travaux, comme ceux de Weyr, ont basculé dans l'obscurité.

Des approches d'histoire sociale fournissent des résultats qu'une dichotomie abusive pourrait considérer comme « conceptuels », comme l'identification du temps de la création mathématique individuelle ou collective. Questionner les identités de pratiques qui ne relèvent pas simplement de recherche de nouveaux résultats ou de diffusions permet en effet de problématiser la question de l'innovation mathématique à partir de laquelle est opérée la sélection rétrospective des textes « fondateurs » et qui s'avère indissociable de la dimension sociale des échanges scientifiques et de la valorisation collective des résultats. Envisager les héritages, permanences et évolutions de pratiques en termes de processus collectifs de fabrication et d'assimilation des savoirs amène à problématiser la question de l'identité de l'algèbre elle-même sur une période qui précède l'adoption d'identités théoriques ou structurelles.

[37] Cette tension se manifeste entre les travaux de Boole et de Cayley dès les origines de la théorie des invariants : Wolfson, 2008.
[38] Goldstein, 2004, p 39.

1. Pratiques et aspects culturels.

Au début du XX^e siècle, le développement de pratiques de décompositions de matrices sous formes imagées se fait essentiellement en périphéries d'une théorie prédominante des formes et des invariants. Malgré les similitudes visuelles que ces décompositions peuvent présenter, celles-ci renvoient à une diversité de pratiques qui, le plus souvent ne sont pas identifiées de manière réflexive à des méthodes s'insérant dans des cadres théoriques spécifiques et, pour cette raison, sont indissociables des aspects culturels des réseaux auxquels elles s'identifient. Comme le manifestent les exemples de Smith, Sylvester ou Weyr, chaque auteur est susceptible de présenter des travaux dont les identités complexes reflètent les aspects culturels de réseaux multiples et peuvent d'ailleurs participer d'une stratégie de construction de communautés mathématiques.

Le développement d'une communauté mathématique américaine à la fin du XIX^e siècle donne un exemple de la complexité de processus de transmissions et d' « universalisation » à partir de pratiques propres à des réseaux distincts. Comme nous l'avons vu, depuis les premiers auteurs de l'école algébrique anglaise, des idéaux d'universalité ont été associés à l'algèbre dans le cadre d'entreprises de constitutions de communautés mathématiques et d'appropriations de savoirs développés dans les centres d'Europe continentale. A partir du développement de la théorie des algèbres dans les années 1880, le terme « algèbre universelle » va progressivement renvoyer à l'étude générale des structures algébriques en relation avec l'analyse du langage mathématique proposée par la logique[39].

Néanmoins, aux Etats-Unis, les matrices acquièrent un statut universel qui ne s'identifie cependant pas à l' « algèbre universelle » développée par Sylvester à Hopkins et Oxford ou aux échos suscités par ces publications auprès d'auteurs comme Alfred Whitehead[40]. En effet, les premières entrées publiées sur le territoire américain qui apparaissent dans le *Jahrbuch* à la fin du XIX^e siècle manifestent l'élaboration de pratiques spécifiques permettant l'appropriation de travaux propres à des réseaux variés, envisagés comme participant d'une unique méthode matricielle dont la constitution progressive s'appuie sur la diversité de ces appropriations. Ainsi, Dickson débute sa carrière par une entreprise de généralisation systématique des travaux de Jordan sur les groupes impliquant l'identification d'un objet, le corps fini, et son étude abstraite. Ces généralisations manifestent une appropriation, dans un cadre matriciel, des pratiques de réductions canoniques des substitutions linéaires du géomètre parisien. Un autre exemple est celui de Veblen qui confère aux matrices un statut de notion centrale dans ses travaux de topologie et se réfère notamment aux « matrices de Poincaré » en hommage aux travaux d'un auteur n'employant pourtant pas ce terme[41]. Une importance particulière est donnée à la classification des objets – comme les matrices « symétriques » ou « hermitiennes » - mais aussi à la recherche de théories unificatrices sous jacentes à des « théories parallèles », impliquant un « déplacement du formalisme par la généralisation et l'abstraction »[42]. Après la théorie des groupes, des formes, des algèbres viennent le tour de l'arithmétique, de la théorie des fonctions, des équations intégrales etc., tous sujets dans lesquels l'unique terminologie « matrice » vient désigner des notions comme celles de « forme bilinéaire », « substitution », « système », « tableau », que les publications du continent européen distinguent les unes des autres.

---

[39] Durand-Richard, 2008 ; Sinaceur, 1991.

[40] Sur l' « algèbre universelle » et le projet de Grassmann visant à libérer les fondements de la géométrie de l'intuition, Gandon, 2004.

[41] Veblen 1923, p. iii.

[42] Sur ces orientations « abstraite » et « structurale » et la constitution d'une communauté mathématique américaine, Parshall et Rowe, 1994 ; Fenster, 1998.

Dans d'autres réseaux, la constitution de pratiques sur des formes imagées de matrices se caractérise par un idéal d'effectivité, comme dans un réseau centré sur Kronecker et dont un mémoire d'Hensel est bien représentatif[43]. Ailleurs, ces pratiques s'appuient sur la représentation géométrique de décomposition d'un espace et se revendiquent d'Hermann Grassmann[44]. S'il n'est pas possible de proposer ici une description exhaustive de ces réseaux, il faut remarquer que ceux-ci ne font pas tous usages du terme matrice. Les ramifications d'un corpus centré sur le personnage d'Hermite, dont les entrées sont le plus souvent publiées en France et manifestent une forte proportion de travaux relatifs à la théorie des nombres, présentent ainsi l'élaboration de pratiques de « calculs des tableaux », outil et mode de représentation polysémique, employé au sein de sujets divers, mais qui relève d'une identité culturelle et de l'inscription dans une histoire longue se référant à la « notation des tableaux de Cauchy ». L'usage du terme « tableau » implique un faible écho du terme matrice chez les auteurs de langue française avant les années 1930, au contraire du terme « mineur », d'un emploi fréquent. Pour les auteurs de ce réseau, parmi lesquels Jordan, Poincaré, Hermann Minkowski, ou Albert Châtelet, le calcul des tableaux se rapporte à une démarche très générale de classification et de réduction d'un problème complexe - représenté par un tableau - à une suite de problèmes simples représentée par une décomposition du tableau initial à sa « forme canonique ». Les pratiques spécifiques donnant un caractère opératoire aux tableaux manifestent des aspects culturels propres à ce réseau, comme une philosophie interne de la généralité associée à un idéal de simplicité, mais aussi des savoirs tacites qui ne seront reconnus comme pouvant faire l'objet d'une explicitation théorique que dans la première décennie du XX^e siècle.

2. Unifications de pratiques et construction de cultures communes.

Entre 1900 et 1930, des préoccupations propres à l'enseignement des mathématiques jouent un rôle essentiel dans la rencontre de ces différentes pratiques culturelles. La constitution, à un niveau global, de l'universalité de la représentation matricielle imagée manifeste en effet une dynamique de va-et-vient entre préoccupations de recherche et d'enseignement. On peut illustrer ce phénomène en s'intéressant à l'apparition, en France, de premiers écrits réflexifs sur le calcul des tableaux et aux significations respectives des termes tableaux et matrices.

Léon Autonne, professeur à la faculté des sciences de Lyon, publie, à partir de 1901, une série de traités de géométrie algébrique. Cet auteur s'appuie sur des préliminaires consacrés à des exposés détaillés de la « théorie des matrices » afin de présenter ses recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. En expliquant de manière didactique comment former les « matrices partielles » d'un « tableau », Autonne organise en une synthèse cohérente des notions et méthodes extraites de réseaux distincts comme celui du calcul des tableaux, de la théorie des formes bilinéaires ou de ce qu'il désigne comme les travaux des « géomètres italiens ». Il s'agit en effet d'obtenir une « matrice aussi simple que possible » (référence à Jordan), représentant des « formes types » (référence à Hermite) par des procédés de réduction interprétés dans un cadre géométrique (Poincaré), en relation avec un calcul symbolique (Frobenius) et des décompositions polynomiales d'invariants (Weierstrass). L'idéal de simplicité propre au réseau du calcul des tableaux évolue ; à l'ambition de généralité à laquelle il était classiquement associé s'ajoutent à présent les valeurs pédagogiques d'une représentation « simple », visuelle, « naturelle » permettant de « voir » les étapes d'une méthode de « décomposition ».

[43] Hensel, 1904.
[44] Pincherle, 1899.

L'idée selon laquelle la maîtrise de la représentation matricielle permettrait d'assimiler plus « simplement » des « théorèmes généraux » de différentes théories est également à la base des organisations didactiques de nombreux traités d'algèbre publiés à partir de 1910. Ainsi, dans l'introduction de son traité sur la théorie des groupes publié en 1917, Hans Blichfeldt encourage ses étudiants de Stanford à bénéficier des « avantages » procurés par l' « image mentale » de la « forme matricielle » pour acquérir une « pratique très avantageuse » permettant la « maîtrise rapide » des parties les plus difficiles portant sur la représentation des groupes[45]. Au début du siècle en France, dans un contexte d'accroissement de la population étudiante, du nombre de chaires et de laboratoires, de jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier ou Châtelet prêtent aux matrices des valeurs pédagogiques présentant explicitement des ambitions d'unification du savoir mathématique[46]. Face à une explosion quantitative des publications et des sujets de recherches, l'ambition de reconstitution d'une unité des mathématiques est explicite, aussi bien dans les discours de nombreux savants que dans les actions menées par les sociétés mathématiques nationales et internationales[47]. Si de nouveaux concepts permettent de réorganiser le savoir mathématique en de vastes édifices théoriques dans le cadre de l'essor de l' « algèbre abstraite », du raisonnement axiomatique ou encore des structures, le rôle joué par l'enseignement dans la réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre dans les années 1900 à 1930 mériterait un examen plus approfondi. Ainsi, pour Châtelet, les matrices permettent de mettre en évidence un « rapprochement […] fécond en suggestions », ainsi que « les relations mutuelles des faits et ce qui m'a paru leur véritable raison d'être », « cette notation conduit à des procédés de calcul uniques »[48]. La notation des tableaux permet donc de faire le lien entre des théories distinctes par des méthodes efficaces, simples et qui permettent généralisations et unifications[49].

Comme le manifeste la critique émise par Picard dans son rapport sur la thèse de Châtelet[50], une telle ambition ne semble cependant pas suffire à une époque où l'on attend d'un mathématicien « créateur » qu'il présente des résultats « qui lui sont propres », et l'originalité des procédés de Châtelet, que Picard désigne comme des « dessins montrant l'enchaînement des tableaux réduits dans divers exemples numériques », n'est que progressivement reconnue comme un objet d'étude légitime au sein des mathématiques.

Certaines préoccupations pédagogiques interrogent cependant directement la recherche sur des questions nouvelles. Se pose notamment la question de la possibilité de décomposer des matrices à des formes canoniques par des procédés effectifs, exigence auparavant propre à un réseau centré sur les travaux de Kronecker et qui s'associe désormais à des préoccupations pédagogiques visant l'obtention de procédés pouvant être effectivement – et non seulement théoriquement – mis en œuvre par les étudiants. L'examen des références des entrées publiées entre 1915 et 1935 dans le cadre de l'émergence de la « théorie des matrices canoniques » met ainsi en évidence la reconnaissance commune d'une origine dans un mémoire publié par Lattès en 1914 sur la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, passée dans l'enseignement depuis les années 1880. Ce mémoire propose d' « abandonner » les calculs de déterminants et d'invariants polynomiaux, nécessitant des extractions de racines d'équations algébriques non réalisables en pratique lorsque le degré est supérieur à cinq, au profit de procédures d'itérations permettant la détermination effective d'une « forme canonique rationnelle » et, par conséquent, une

[45] Blichfeldt, 1916, p. vii.
[46] Ces valeurs manifestent des rencontres entre les réseaux de Chicago et du « calcul des tableaux ». Les travaux de Dickson sur les groupes linéaires circulent rapidement auprès de Séguier ou Chatelet.
[47] Dhombres, 2004, p. 92.
[48] Châtelet, 1911, p. 105.
[49] Sur l'analogie, la polysémie et les pratiques d'écriture : Durand-Richard, 2008.
[50] Gispert, 1991, p. 409-410.

procédure d'intégration des systèmes différentiels par des « dérivations successives ». L'ampleur des références au mémoire de Lattès manifeste la dimension culturelle de la réconciliation entre pratiques de réductions canoniques et procédés effectifs de calculs d'invariants, pratiques antagonistes depuis la querelle violente qui avait opposée, en 1874, Jordan à Kronecker et qui avait engagé les statuts respectifs de l'algèbre et de l'arithmétique.

Cette nouvelle articulation entre réductions canoniques et calculs d'invariants est fondatrice de la « théorie des matrices canoniques » qui se développe à partir de 1914 et qui regroupe des travaux élaborant des procédés rationnels de décomposition d'une matrice « en chaînes » de « matrices compagnons » et des procédés non rationnels de réduction à une suite de formes « canoniques classiques » ou « matrices de Jordan ». Au sein de cette « mathématique internationale » au sens donné à ce terme par Jean Dhombres[51], objet d'une coopération sans frontières et thème fréquent de communication dans les congrès, de nouvelles questions se posent et de nouvelles exigences sont formulées. On distingue par exemple entre preuve d'existence et preuve constructive, on cherche à reconnaître par une méthode effective si une chaine de réduction peut être obtenue ou non par une suite finie d'étapes. La théorisation en terme de décomposition d'un espace sous l'action d'un opérateur des méthodes sous jacentes aux travaux de Weyr ou Lattès prend une importance croissante dans les années vingt avec le développement de problématiques liées à la dimension infinie. Si ces problématiques accélèrent la marginalisation d'invariants polynomiaux obtenus par des calculs de déterminants, la théorie des opérateurs annonce aussi la fin d'un âge d'or pour la représentation matricielle. Le caractère unificateur de la théorie des matrices canoniques des années 1930 ne doit pas être perçu comme la manifestation d'un progrès irréversible et il n'est pas intemporel. Dans les années 1940-1950, la tresse est démêlée et certaines notions qui participaient d'une même théorie en 1930 seront à nouveau perçues comme distinctes.

Conclusion.

Dans la période de l'entre-deux guerres, le terme « matrice » investit des titres de travaux publiés dans toutes les langues et toutes les rubriques de classification des journaux de comptes rendus. Cette dynamique d'universalité se nourrit de phénomènes multiples. En effet, la dimension globale qu'acquièrent des méthodes de décompositions de formes imagées de matrices est le résultat de rencontres entre des pratiques diverses élaborées localement et dont les identités relèvent de réseaux complexes mêlant cadres nationaux, aires géographiques, sujets spécifiques, institutions, etc. A la différence de la description comme d'une sorte de marche vers l'abstraction souvent proposée de la réorganisation du savoir mathématique que manifeste l'« algèbre moderne », nous avons vu que la méthode de décomposition matricielle réalise une cristallisation de pratiques opératoires renvoyant à des contextes variés et qui, sur le temps long, forgent le caractère opératoire d'une forme de représentation.

Cette construction d'une culture mathématique commune concerne autant les aspects techniques de ces pratiques que les identités sociales des réseaux qui leurs sont associés. Elle s'accompagne de l'appropriation d'une histoire longue par laquelle des travaux distincts dans le passé sont présentés comme participant d'une même théorie sous jacente prétendant de ce fait à un statut « universel ». Démêler la tresse que forme cette théorie unificatrice permet d'enrichir l'histoire de l'algèbre linéaire en ne se focalisant pas sur la problématique de l'émergence de structures comme les anneaux ou modules mais en posant la question des communications de pratiques culturelles qui

[51] Dhombres, 2004.

accompagnent les restructurations du champ des mathématiques et de l'histoire des mathématiques. En effet, avant qu'un cadre général comme celui de l'algèbre linéaire permette d'envisager des structures sous tendant les pratiques algébriques, les identités de telles pratiques ne portent le plus souvent pas de significations théoriques mais manifestent des aspects culturels comme des idéaux, savoirs tacites et philosophies internes propres à des réseaux. L'étude de la technicité même de ces pratiques permet ainsi d'interroger les modalités d'appropriation et de transmission de faits culturels.

L'adoption à un niveau local d'une même terminologie matricielle pour désigner des notions auparavant distinctes est un premier moteur d'universalité. Ces adoptions s'avèrent la conséquence de différents aspects culturels, comme des idéaux d'universalité ou d'abstraction, mais aussi des valeurs pédagogiques. Mais les rencontres entre pratiques et réseaux impliquent des évolutions du champ des significations : l'idéal de simplicité, indissociable d'une philosophie de généralité, propre aux pratiques de réductions des tableaux s'enrichit alors de valeurs pédagogiques et s'articule avec des objectifs d'unifications par l'abstraction ou avec des idéaux d'universalités prêtées aux matrices par l'école de Chicago.

Ces rencontres manifestent elles mêmes des phénomènes complexes d'universalité. La reconnaissance commune des travaux fondateurs de Jordan sur les groupes s'avère ainsi à l'origine d'une intersection des pratiques du calcul des tableaux et de celles de l'école de Chicago avant la première guerre ; en 1932, les exposés d'Emmy Noether et Helmut Hasse au congrès de Zürich signalent la construction d'une « algèbre moderne » se reconnaissant rétrospectivement des racines aux Etats-Unis et en Allemagne et mettent en évidence une intensification des relations entre auteurs allemands et américains dans l'entre deux guerres[52]. Certains aspects culturels propres à certaines pratiques et certains réseaux, acquièrent une dimension globale tandis que d'autres disparaissent et d'autres encore, à l'origine distincts les uns des autres et, parfois même en opposition, s'entremêlent pour donner naissance à de nouvelles modalités du savoir mathématique. Si la réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre et l'adoption de la représentation matricielle comme universelle manifestent la constitution d'une culture commune à un niveau international, cette unification n'implique pas une uniformisation des usages du terme « matrice ». Au contraire, des différences d'usages prolifèrent à mesure que les anciens édifices comme les théories des formes et des déterminants s'effondrent et permettent l'introduction des matrices dans les différentes strates de l'activité mathématique.

Tandis que des savants comme Cartan, Poincaré ou Hilbert, qui se situent dans des centres de productions mathématiques à la croisée de différents réseaux, interviennent peu dans le corpus fourni par notre étude quantitative, des acteurs évoluant en périphéries jouent des rôles importants dans l'adoption d'une terminologie prétendant à l'universalité et appuyant des démarches d'appropriations de connaissances mathématiques, de constructions de nouveaux centres, comme celui de Chicago, de nouvelles communautés, comme, en France, celle des enseignants-chercheurs, mais aussi d'institutions internationales. L'adoption d'une terminologie commune doit être rattachée à l'idéal d'internationalisme scientifique du début du XX^e siècle qui porte l'ambition de la constitution d'un langage universel ainsi que d'une standardisation des notations et du vocabulaire mathématiques[53]. Les pratiques locales élaborées en périphéries pour des appropriations de travaux de divers réseaux semblent jouer un rôle particulier dans la constitution d'une communauté mathématique internationale, comme le manifeste l'appropriation rapide de l'usage universel des matrices impulsé par des auteurs américains par des publications de langues japonaise, russe ou des acteurs publiant en langues française et allemande en périphérie des centres de Paris, Berlin ou Göttingen.

[52] Fenster et Schwermer, 2005.
[53] Rasmussen, 1995.

C'est notamment en périphérie d'une théorie prédominante des formes et des invariants que se développent des pratiques opératoires sur des représentations imagées. Dans la théorie des formes bilinéaires, les formes canoniques sont obtenues, non par des pratiques de décompositions mais, *a posteriori,* par la recomposition d'une forme dont on a au préalable calculé les invariants. Au contraire du caractère statique de cette recomposition, la décomposition matricielle est un calcul qui met la représentation imagée en mouvement. Si nous avons vu des origines locales de ce caractère dynamique dans l' « algèbre universelle » de Sylvester, l'histoire de ces phénomènes apparaît particulièrement complexe. Ainsi, une idée de mouvement se manifeste dans les décompositions successives de problèmes complexes en étapes simples, comme autant de modifications d'états de la forme matricielle, à la manière des relations qu'entretiennent les images d'une bande dessinée, les plans d'un film, à un récit complexe, ou les tâches élémentaires d'une chaine de montage à un produit fini. On pourrait encore citer le cubisme et les pratiques de décomposition du mouvement qui accompagnent le développement de la photographie pour évoquer une multitude de phénomènes dont nous n'avons qu'effleuré les dimensions sociales et culturelles et qui forment le contexte historique complexe dans lequel les matrices acquièrent le caractère universel d'une méthode de décomposition imagée.

Bibliographie.

Aitken (Alexander C.) et Turnbull (Herbert W.), 1932, *An introduction to the theory of Canonical Matrices*, Londres, Blame & Son.

Autonne (Léon), 1905, *Sur les formes mixtes*. Paris, Gauthier-Villars.

Bečvář (Jindřich), 1995, *Eduard Weyr 1852--1903*. Prague, Prometheus.

Blichfeldt (Hans), 1917, *Finite collineation groups*, Chicago, Univ. Chicago Press.

Brechenmacher (Frédéric), 2006a, *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930),* Thèse, Paris, EHESS.

2006b, *Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930)*, Paris, Cult. Math. E.N. S.

2007, « L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes », *Sci. tec. persp.,* II (1), p. 5-85.

2008, « La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker ». *Rev. hist. math.*, 13 (2), p. 187-257.

Cartan (Élie), 1908, « Nombres complexes », *Enc. Sci. Math.,* t.1, vol. 1, p . 329-468. Paris, Gauthier-Villars.

Cayley (Arthur), 1858, « A Memoir on the Theory of Matrices », *Phil. Trans.Royal Soc.London,* 148, p. 17-37.

Châtelet (Albert), 1911, « Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres », *Ann. E. N.S.,* 28, p. 105-202.

Crilly (Tony), 2006, *Arthur Cayley: Mathematician Laureate of the Victorian Age,* Baltimore, J. Hopkins Univ. Press.

Dhombres (Jean), 2004, « Vicissitudes in Internationalisation», dans Charle (C.) et al. (ed.), 2004, *Transational Intellectual Networks*. New York, Campus Verlag, p. 81-114.

Dickson (Leonard E), 1924, « A new theory of linear transformations and pairs of bilinear forms », *Proc. Int. Math. Cong.*, Univ. Totonto Press, p. 361-363.

Dieudonné (Jean), 1946, « Sur la réduction canonique des couples de matrices », *Bul. Soc. Math. France,* 74, p. 130-146.

Dogson (Charles), 1867, *An elementary treatise on determinants*, London, Macmillan and Co.
Durand-Richard (Marie-José), 1996, « L'École algébrique anglaise » dans Goldstein (C.) et al. (éd.), 1996, *L'Europe mathématique*, Paris, M.S.H, p. 445-477.
2008 *L'analogie dans la démarche scientifique*. Paris, l'Harmattan.
Fenster (Della D.), 1998, « Leonard Eugene Dickson and his Work in the Arithmetics of Algebras », *Arch. Hist. Exact Sci.,* 52, p. 119-159.
Fenster (Della D.) et Schwermer (Joachim), 2005, « A Delicate Collaboration: Adrian Albert and Helmut Hasse and the Principal Theorem in Division Algebras in the Early 1930's », *Arch. Hist. Exact. Sci.* 59, p. 349-379.
Frobenius (Ferdinand), 1878, « Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen », *Jl. f. Math*, 84, p. 343-405.
Gandon (Sébastien), 2004, « Russel et l'*Universal Algebra* de Whitehead », *Rev. hist. math.*, 10, p. 187-256.
Gispert-Chambaz (Hélène), 1991, *La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914),* Paris, Cahiers hist. phil. sci.
Goldstein (Catherine), 1995, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis , PUV.
1999, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta hist.rer.nat. non tec.*, 3, 28, p. 187—214.
Hawkins (Thomas), 1977, « Weierstrass and the Theory of Matrices », *Arch. Hist. Exact Sci.*, 17, p. 119-163.
2000, *Emergence of the theory of Lie groups an essay in the history of mathematics, 1869-1926.* New York, Springer.
Hensel (Kurt), 1904, « Theorie der Körper von Matrizen », *Jl. f. Math.,* 127, p. 116-166.
Krull (Wolfgang), 1921, *Ueber Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*. Freiburg.
Lattes (S.), 1914, « Sur une forme canonique des substitutions linéaires », *Ann. Toulouse,* (3) 6, p. 1-84.
Mac Duffee (Cyrus C.), 1933, *The Theory of Matrices*, New-York, Chelsea.
1943, *Vectors and Matrices.* Wisconsin, Collegiate Press.
Nový (Lubos), 1968, « L'Ecole Algébrique Anglaise », *Rev.de synt.,* III, 49-52, p. 211-222.
Parshall (Karen H.), 1985, « J. H.M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras », *Arch. Hist. Exact Sci.*, 32, p. 223–349.
2004, « Defining a mathematical research school : the case of algebra at the University of Chicago, 1892-1945 », *Hist. Math.*, 31, p. 263-278.
2006, *James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World*. Baltimore, J. Hopkins Univ. Press.
Parshall (Karen H.) et Rowe (David E.), 1994, *The Emergence of the American Mathematical Research Community (1876–1900).* Providence, Amer. Math. Soc.
Pincherle (Salvatore), 1899, « Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif », *Math. Ann.*, 49, p. 325-383.
Rasmussen (Anne), 1995, *L'internationale scientifique (1890-1914).* Thèse, Paris, EHESS.
Revel (Jacques), éd, 1996, *Jeux d'échelles: La micro-analyse à l'expérience.* Paris, Gallimard.
Scheffers (Georg), 1891, « Zuruckführung complexer Zahlensysteme », *Math. Ann.,* 39, p. 292-390.
Scholz (Ehrard), 2006, « Introducing groups into quantum theory (1926-1930) *», Hist. Math.,* 33, p. 440-490.
Schreier (Otto) et Sperner (Emanuel), 1932, *Vorlesungen über Matrizen.* Leipzig, B. G. Teubner.
Sinaceur (Hourya), 1991, *Corps et modèles,* Paris, Vrin.
Sylvester (James Joseph), 1852, « Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes », *Nouv. Ann. Math.*, p. 438-440.

1883, « On the equation to the Secular Inequalities in the Planetary Theory », *Phil. Mag.,* 16, p. 267-69.
1884, « Lectures on principles of universal algebra », *Amer. J. Math.,* VI, p. 270-286.
Van der Waerden (Bartel L.), 1930 *Moderne Algebra*. Berlin, Springer.
Veblen (Oswald), 1922, « Analysis Situs », *Amer. Math. Soc., Colloquium Lectures,* vol. V, New York.
Wedderburn (Joseph H. M.), 1934, *Lectures on Matrices.* New York, Amer. Math. Soc.
Weyl (Hermann), 1923, *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Berlin, Springer.
Weyr (Eduard), 1890, « Zur Theorie der bilinearen Formen », *Mon. Math.Phys.,* 1*,* p. 161-235.
Wolfson (Paul R.), 2008, « George Boole and the origins of invariant theory », *Hist. Math.*, 35, p. 37-46.

Annexes.

Voir Brechenmacher, Frédéric (2008). Une étude quantitative sur le temps long des occurrences du terme "matrice" en mathématiques. http://hal.archives-ouvertes.fr/aut/Frederic+Brechenmacher/