Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Université d'Artois, I.U.F.M. Arras
et équipe DIDIREM, Université Paris 7[1].

Introduction

Le terme grandeur, couramment utilisé autrefois dans l'enseignement, a pratiquement disparu du vocabulaire utilisé dans le secondaire lors de la réforme des mathématiques modernes et n'a pas reparu depuis[2]. Il est difficile de le définir proprement de manière un tant soit peu générale. On peut se reporter pour des tentatives dans ce sens à Bourbaki, à la brochure "Grandeur mesure" de l'A.P.M.E.P. (1982) et à un article de Nicolas Rouche dans Repères-IREM (1994)[3]. En ce qui nous concerne, nous nous limiterons aux grandeurs géométriques, longueurs, aires, volumes[4], enseignées dans le cours de mathématiques dans le secondaire, les autres étant plutôt du ressort d'un cours de physique. Nous ne nous interdirons pas pour autant de référer à des grandeurs physiques comme la masse qui est qui est abordée en primaire avant l'aire ou le volume. Nous tentons dans cet article à la fois d'élucider un certain nombre de points théoriques concernant la mesure de ces grandeurs et de proposer quelques réflexions didactiques aussi bien sur les difficultés que doivent surmonter les élèves que sur les problèmes qu'on veut les amener à pouvoir résoudre. Nous avons plus particulièrement étudié le problème de la mesure des aires, c'est pourquoi notre réflexion sera un peu plus approfondie dans ce cas que dans celui des volumes.

1. Les objets en présence, les cadres en jeu.

Dans un problème concernant la mesure, on a *a priori* au moins trois types d'objets en jeu, référant à trois cadres ou domaines d'activités différents : un objet matériel qui renvoie à la réalité physique, par exemple un cube de bois, une grandeur physique ou géométrique renvoyant à la physique ou aux mathématiques, par exemple la masse de ce cube ou son volume ou la longueur de son arête et un nombre qui rendra compte de la mesure de la grandeur considérée une fois qu'on a choisi une unité. Avant de s'intéresser aux unités, remarquons que dans le cas des grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes), il faut distinguer un quatrième objet qui est l'objet géométrique cube, comme partie de l'espace $\mathbf{R}^3$ (à isométrie près ou non suivant le cas), distinct de l'objet matériel et de la grandeur. Comme nous nous intéressons ici aux grandeurs géométriques, nous considérerons des objets géométriques, c'est-à-dire que nous négligerons, en la considérant comme transparente, la relation entre l'objet matériel et l'objet géométrique qui le modélise, ce qui, comme chacun sait est une hypothèse hardie quand on s'intéresse à l'enseignement au collège. Nous ferons une petite parenthèse à ce sujet pour distinguer mesure et mesurage au moment où nous parlerons d'approximations. Nous identifierons donc le plus souvent l'objet géométrique et l'objet matériel ou sa représentation sur une feuille de papier, ce qui nous donne le schéma suivant :

[1] Cet article a été écrit aux alentours de 1999 et quelques notes ont été ajoutées en 2016.
[2] Depuis les programmes ont réintroduit la notion de grandeur en 2005.
[3] Voir aussi Perrin (2011).
[4] Nous n'abordons pas le cas des angles.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[rr, "m_A"] \arrow[dr] & & \mathbb{R}^+ \\ & \mathcal{G} \arrow[ur, "\mu_a"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}$ objets géométriques ou matériels

$\mathcal{G}$ grandeurs

R^+ nombres réels positifs

Une unité a été choisie.
Elle est représentée par l'objet géométrique A et la grandeur a correspondante.

Précisons le vocabulaire que nous utilisons pour cet article puisqu'il a beaucoup varié (Perrin-Glorian, 1990) et qu'il n'est pas sûr qu'il soit entièrement fixé. Pour les longueurs, nous parlerons de segment pour l'objet géométrique et de longueur pour la grandeur ; en dimension 2, nous parlerons de surface pour l'objet géométrique et d'aire pour la grandeur ; en dimension 3, nous essaierons de réserver le mot volume à la grandeur et de parler de solide pour l'objet géométrique. Dans le cadre des grandeurs, nous ne distinguons pas la grandeur comme "caractéristique-à-quantifier" (sans mesure) et la grandeur mesurée, "caractéristique quantifiée" quand une unité a été fixée (3 cm par exemple) comme le fait C. Janvier (1996), puisque nous cherchons à caractériser ici la nature des objets et des domaines étudiés. En revanche, cette distinction est pour nous très importante au niveau des tâches. Nous considérons en effet qu'il faut travailler sur la grandeur sans mesure avant d'introduire la notion d'unité et la mesure. Nous nous expliquerons plus bas sur ce point. Il nous faut d'abord préciser quel sens nous donnons à la notion de grandeur. Signalons d'emblée que, dans cet article, le mot grandeur aura nécessairement deux sens que seul le contexte permettra de distinguer : d'une part c'est un terme général qui sert à opposer les points de vue comme ci-dessus pour distinguer la grandeur de l'objet ou du nombre, d'autre part il désigne chacune des grandeurs particulières comme aire ou volume.

2. La notion de grandeur. Intérêt de l'exemple des aires.

L'intérêt de la mesure est de traduire en problèmes sur les nombres des problèmes portant sur des objets matériels (comparaison, réunion …). La grandeur permet de dire de quel point de vue on considère l'objet : longueur de l'arête, aire latérale, volume, masse. Mais, comme le dit Lebesgue (1931-1935, rééd.1975, p.56), en mathématiques, on peut se passer de la notion de grandeur : *"l'emploi du mot mesure dans la dénomination "mesure des aires" a la même signification que pour la "mesure des longueurs" : il rappelle qu'on doit avoir choisi une unité pour parler de l'aire ou de la longueur, lesquelles sont des nombres. Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement"*. Rappelons qu'il s'agit d'enseignement dans les classes terminales.

Cependant, à l'issue de nos recherches sur l'enseignement des aires (Douady et Perrin-Glorian, 1989), il nous semble que l'identification dès le début de l'apprentissage de la grandeur et du nombre amène des confusions chez les élèves, comme nous le montrerons ultérieurement, c'est pourquoi les distinctions entre ces trois pôles nous paraissent essentielles dans l'enseignement élémentaire et au début du collège au moins, non pour que l'on demande à l'élève de les distinguer mais pour que l'enseignant soit bien au clair sur ces distinctions et soit toujours conscient du niveau où il se place pour analyser correctement son enseignement et les difficultés que peuvent rencontrer les élèves. Comment par exemple comprendre la notion d'unité et les changements d'unité si l'on identifie grandeur et nombre ? Le mathématicien peut fixer une fois pour toutes l'unité, pas le physicien ni le professeur de collège.

Notons dès maintenant que le problème du choix d'une unité se pose à deux niveaux pour les grandeurs géométriques "produit" comme les aires et les volumes. Il se pose de manière directe comme pour toutes les grandeurs : mesurer une surface à l'aide une surface unité quelconque, en reportant ou en la découpant, c'est ce que nous appellerons l'aspect unidimensionnel de la mesure des aires. Mais il se pose tout autrement quand on choisit une unité d'aire définie à partir d'une unité de longueur : les mesures d'aires vont alors se déduire de mesures de longueurs par un calcul et l'établissement de formules, c'est ce que nous appellerons l'aspect bidimensionnel de la mesure des aires. Pour les volumes, nous aurons aussi un aspect unidimensionnel (mesurer des volumes avec des volumes) qui prévaut dans le cas des capacités où nous avons d'ailleurs un système d'unités en base 10, un aspect tridimensionnel visible dans le système d'unités usuel où les unités de volume sont dérivées des unités de longueur, et qui se complique ici par le fait qu'un volume peut aussi être vu comme le produit d'une aire par une longueur.

Reste à savoir comment on peut définir une grandeur et si on peut donner un fondement mathématique à cette notion. On peut définir la grandeur comme une classe d'équivalence d'objets, comme le font les auteurs de la brochure "Grandeur mesure" de l'A.P.M.E.P. ou Rouche (1994) dans son axiomatique et c'est aussi le point de vue que nous prendrons. Cependant, suivant le cas, on peut ou non définir cette relation d'équivalence directement sur les objets. Dans la brochure de l'A.P.M.E.P., le cas des segments est traité en détail : dans ce cas on dispose d'un instrument qui permet de reporter les longueurs, le compas ; de plus deux segments de même longueur sont superposables. Le cas des aires est un peu différent et c'est en cela qu'il est intéressant : nous ne disposons pas d'instrument qui permette de comparer directement les aires ; si l'on veut définir la grandeur en ne se limitant pas aux polygones, on est obligé de passer par la mesure ou par une autre grandeur pour laquelle la comparaison directe est possible (masse ou volume de peinture par exemple) en réalisant un objet matériel qui respecte certaines conditions (matériau homogène dans un cas, bien lisse et non poreux dans l'autre). Le volume est en fait moins difficile de ce point de vue puisqu'on peut comparer directement les volumes creux par transvasement et les volumes pleins par immersion. Pour donner un fondement mathématique à la notion de grandeur, en l'absence de moyen de comparaison directe, on peut toujours passer par la mesure définie sur les objets.

Sur un plan théorique, on ne peut donc guère définir la grandeur aire sans passer par la mesure définie sur les objets géométriques : l'aire d'une surface sera la classe d'équivalence de cette surface pour la relation "avoir même mesure". Cependant on peut donner un sens à l'expression "deux surfaces ont même aire" sans passer par la mesure dans des contextes, limités certes, mais suffisamment significatifs, comme le découpage et recollement sans chevauchement[5]. Nous allons maintenant examiner les définitions possibles de la mesure des aires d'un pur point de vue mathématique.

3. Des définitions possibles de la mesure des aires.

Le plus souvent, dans l'enseignement on admet, à partir du choix d'une unité, l'existence d'une fonction qui, à une surface pas trop excentrique, associe sa mesure et on se contente de trouver des moyens de calculer ses valeurs à partir de certaines mesures de longueur. En fait il n'est pas nécessaire de supposer l'existence et on peut définir la fonction mesure en même temps que l'ensemble des surfaces sur lequel elle est définie. Nous esquissons ici les grandes lignes de deux exposés, celui de Lebesgue (1931/1975) parce qu'il est le plus économique sur le plan

[5] Ainsi, le théorème de Bolyai assure que si deux polygones ont même aire, on peut passer de l'un à l'autre par découpage et recollement.

théorique et celui d'Hadamard (1900) parce qu'il est proche de la démarche qu'on adopte en général dans l'enseignement élémentaire.

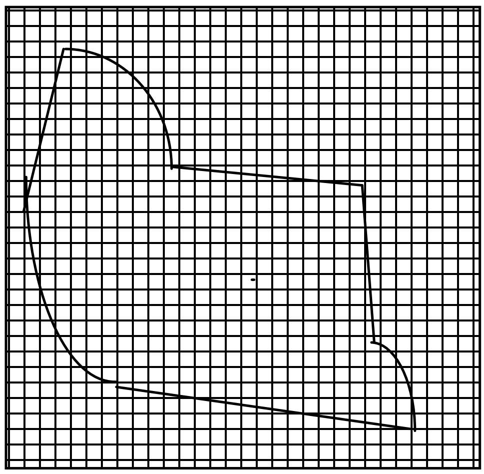
Dans les deux cas, on peut dire, en termes modernes, qu'on cherche à définir une application μ définie sur une partie $\mathbb{S}$ de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$, $\mu : \mathbb{S} \longrightarrow R^+$ qui vérifie les propriétés :

- μ est positive : $(\forall S\in \mathbb{S})\ \mu(S) \geq 0$
- μ est additive : $(\forall S_1\in \mathbb{S})\ (\forall S_2\in \mathbb{S})\ [S_1\cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(S_1\cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)]$
- F est invariante par isométrie : pour toute isométrie f de $\mathbf{R}^2$ on a $(\forall S\in \mathbb{S})\ \mu(f(S)) = \mu(S)$

Une telle mesure est appelée mesure simplement additive ou étendue. Remarquons que nous ne demandons pas l'additivité pour un ensemble dénombrable de surfaces : cette demande pourrait donner une autre famille de surfaces, les surfaces Lebesgue-intégrables. On peut montrer que les conditions ci-dessus entraînent que si on choisit un carré C, qu'on appellera carré unité, pour lequel on décide que $\mu(C) = 1$, μ est déterminée de manière unique sur un certain ensemble $\mathbb{S}$ de surfaces (une surface est une partie de $\mathbf{R}^2$) qui contient les polygones, est contenu dans l'ensemble des parties bornées, et qu'on appelle l'ensemble des surfaces quarrables. On peut de plus montrer que μ est définie à un coefficient de proportionnalité près sur $\mathbb{S}$: en effet, si on change de carré unité, toutes les mesures sont multipliées par k, où k est la nouvelle mesure de l'ancienne unité, c'est-à-dire si on choisit C' et qu'on définit γ telle que $\gamma(C') = 1$, pour tout $A\in \mathbb{S}$, on a $\gamma(A) = \gamma(C)\mu(A)$ [ou $\mu(A) = \mu(C')\gamma(A)$ puisque $\mu(C')\gamma(C) = 1$]. L'ensemble $\mathbb{S}$ a une structure d'anneau de Boole ou clan, c'est-à-dire qu'il est stable par union, intersection, différence et différence symétrique. Mais cet anneau n'est pas unitaire puisque $\mathbf{R}^2$ tout entier n'est pas quarrable et il n'est pas non plus stable par complémentaire : les parties quarrables sont bornées.

a) exposé de Lebesgue

Pour définir l'aire qu'il identifie à sa mesure, Lebesgue considère un quadrillage à maille carrée (fixé) Q_0 et des raffinements Q_i de ce quadrillage obtenus en coupant les côtés des carrés de Q_0 en 10 (par exemple) à chaque fois.
Si D est une partie du plan, on considère le nombre n_i de carrés du quadrillage Q_i qui sont contenus dans D et le nombre N_i de carrés du quadrillage qui rencontrent D. Si $\dfrac{N_i - n_i}{100^i} \rightarrow 0$ on dit que D est quarrable et on définit $F(D) = \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{Ni}{100^i} = \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{ni}{100^i}$



Il n'est pas évident de voir que l'aire ainsi définie vérifie bien les propriétés qu'on voulait, en particulier l'invariance par isométrie, ni même le fait que les polygones sont quarrables. Lebesgue traite d'abord le cas des polygones qui comporte deux points cruciaux : la démonstration du fait qu'un segment a une aire nulle et l'invariance de l'aire d'un polygone par symétrie orthogonale. L'ensemble de la démonstration passe par les étapes suivantes :
1. - Tout rectangle dont les côtés sont parallèles aux lignes du quadrillage a une aire qui vaut *ab* si *a* et *b* sont les mesures des côtés du rectangle en prenant comme unité la longueur du côté du carré. On a donc aussi l'invariance par translation et l'additivité pour les rectangles dont les côtés sont parallèles aux lignes du quadrillage.

2. - Tout polygone a une aire. Cela repose essentiellement sur le fait que les carrés qui comptent dans les N_i sans compter dans les n_i sont ceux qui rencontrent la frontière du polygone, que le bord d'un polygone est formé d'un nombre fini de segments et qu'un segment a une mesure nulle.
3. - L'aire est invariante par isométrie. Lebesgue traite d'abord le cas des polygones. Il montre en premier lieu l'invariance par translation en considérant la famille de quadrillages (carrés V_i) transformés des quadrillages initiaux (carrés U_i) par la même translation et en se servant du fait que l'aire des rectangles parallèles aux bords du quadrillage est invariante par translation, donc que l'aire des carrés V_i est la même que celles des carrés U_i. Cela lui permet de montrer l'additivité de l'aire des polygones et de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit quarrable : "pour qu'un domaine D ait une aire, il faut qu'il puisse être couvert par un polygone E et qu'il couvre des polygones I extérieurs les uns aux autres de manière que l'aire de E surpasse la somme des aires des I d'aussi peu qu'on le veut. La réciproque est vraie". Il montre ensuite l'invariance par symétrie orthogonale en construisant un nouveau réseau de quadrillages (carrés U'_i) construits sur un carré dont un côté est porté par l'axe (d) de la symétrie.
4. - Grâce à l'encadrement des surfaces quarrables quelconques par des polygones, l'invariance par isométrie de l'aire des polygones entraîne celle de toutes les surfaces quarrables. Ce résultat permet d'affirmer que l'aire ainsi définie ne dépend que du choix de l'unité de longueur (de la taille du carré unité et pas de sa position).
5. - Il reste à voir l'effet d'un changement d'unité de longueur : si c est la nouvelle longueur du carré unité de l'ancien quadrillage, A l'ancienne aire et A' la nouvelle, on a $A' = A\,c^2$. Il faut remarquer que cela donne en même temps l'effet d'une similitude de rapport k sur les aires : elle multiplie les aires par k^2.

b) exposé d'Hadamard

La méthode que propose Hadamard dans son cours de géométrie élémentaire (1898) consiste à traiter d'abord le cas des polygones en se servant de l'additivité et à n'utiliser les encadrements que dans le cas de surfaces plus complexes. Dans sa première édition, il admet l'existence de l'aire et se contente de donner des moyens de la calculer mais dans les éditions suivantes, il ajoute la note D où il montre qu'il est inutile de supposer l'existence de l'aire : on peut la démontrer. Nous retraçons ici les grandes étapes de cette définition.

Il faut remarquer d'abord qu'Hadamard définit l'aire comme une grandeur et qu'il distingue la grandeur de sa mesure qui est un nombre. Il énonce ses résultats en termes de grandeurs en faisant remarquer que tout ceci n'a de sens que modulo la convention formulée au début (n°18, 106). Par exemple, dire que "l'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions" signifie que "le nombre qui mesure l'aire d'un rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent respectivement sa base et sa hauteur". Cela revient à dire qu'il cherche à définir l'aire comme "grandeur-quantifiée" (Janvier, 1996) en prenant pour unité l'aire du carré qui a pour côté l'unité de longueur ou qu'on ne peut définir la grandeur qu'en passant par la mesure. C'est exactement le point de vue que nous avons adopté dans le paragraphe précédent.

Exposons d'abord les grandes lignes de la présentation du corps de l'ouvrage. Il établit en premier lieu que l'aire d'un rectangle est égale au produit des deux dimensions. Il en déduit l'aire d'un parallélogramme par découpage et recollement, puis d'un triangle (demi-parallélogramme), et d'un polygone par découpage en triangles, avec les cas particuliers du trapèze et du polygone régulier.

Pour la définition de la note D, Hadamard montre d'abord que, pour un triangle quelconque, le produit d'un côté par la hauteur correspondante est le même pour les trois côtés (en se servant des triangles semblables). Il appelle aire du triangle ce produit multiplié par un facteur k fixé.

Cette définition assure l'invariance par isométrie. Pour définir l'aire d'un polygone à partir d'une décomposition en triangles, le problème est de montrer que le résultat obtenu ne dépend pas de la décomposition choisie. Pour cela Hadamard procède très astucieusement en montrant l'équivalence de deux définitions de l'aire.
Etant donné un point quelconque O du plan du triangle ABC, il considère les trois triangles ABO, ACO, BCO. Chacun de ces triangles sera dit additif si O est du même côté que ABC par rapport à la base commune, il sera dit soustractif dans le cas contraire. Il montre ensuite, en examinant tous les cas possibles, la propriété suivante pour un triangle ABC et un point quelconque O de son plan : la somme des aires des triangles additifs diminuée de la somme des aires des triangles soustractifs (s'il en existe) est égale à l'aire du triangle ABC.
Il étend cette propriété au polygone en établissant par récurrence sur n la propriété suivante : *"Soit un polygone décomposé d'une façon quelconque en un nombre quelconque n de triangles, et un point quelconque O du plan, que l'on joint à tous les sommets, la différence S entre la somme des aires des triangles additifs et la somme des aires des triangles soustractifs de sommet O est égale à la somme Σ des aires des n triangles en lesquels est décomposé le polygone."* Cette propriété va permettre de montrer d'une part que S ne dépend pas du choix de O et d'autre part que Σ ne dépend pas de la décomposition en triangles et donc de définir l'aire du polygone comme la valeur commune de S et de Σ.
On peut ensuite étendre la définition de l'aire à des surfaces non polygonales en recourant à des encadrements par des polygones et à la notion de limite, comme le fait Lebesgue.

4. Quelques questions théoriques concernant les aires et les volumes résolues au 20ème siècle.

Ce n'est qu'au début de ce siècle qu'ont été résolus quelques problèmes concernant les aires et les volumes, en particulier celui de savoir si la mesure des aires pouvait se prolonger à toutes les parties bornées du plan. Il y a deux réponses possibles suivant que l'on s'intéresse à la mesure de Lebesgue (dénombrablement additive, dont nous n'avons pas parlé ici) ou à l'aire définie sur les surfaces quarrables comme dans l'exposé de Lebesgue pour l'enseignement que nous avons présenté.
1) On ne peut pas prolonger la mesure de Lebesgue à tout le plan en conservant l'additivité dénombrable. Ceci se démontre en utilisant l'axiome du choix. On montre même que "il existe une partie de R non Lebesgue-mesurable" est équivalent à l'axiome du choix (AC). Pour cela, on utilise un énoncé équivalent à AC : il existe une base de R comme espace vectoriel sur Q.
2) Cependant, on peut prolonger la mesure des surfaces quarrables à tout le plan (avec additivité simple) mais on perd l'unicité :
Plus précisément, Banach (1923, 1967)[6] a montré qu'il existe un prolongement H de la mesure des surfaces quarrables défini sur toutes les parties bornées et un ensemble W qui est Lebesgue-mesurable de mesure nulle et tel que H(w) = 1 et il existe un autre prolongement qui coïncide avec la mesure de Lebesgue quand l'ensemble est Lebesgue-mesurable.

En revanche ceci n'est pas vrai dans l'espace : Banach et Tarski[7], s'appuyant de manière essentielle sur un résultat de Hausdorff (1914), ont montré en 1924 qu'étant données deux boules de rayons différents B et B' on peut en trouver une décomposition finie :

---

[6] Voir l'article de Banach "Sur le problème de la mesure" publié en 1923 dans Fundamenta Mathematicae n° 4 [p. 7-33] repris dans les œuvres complètes de Banach (p. 87…)
[7] Ce résultat a été publié dans Fundamenta Mathematicae n° 6. p. 244-277 et repris dans les œuvres complètes de Banach p. 118 à 148.

$$B = \bigcup_{i=1}^{i=n} B_i \quad \text{et} \quad B' = \bigcup_{i=1}^{i=n} B'_i \quad \text{avec } B_i \text{ et } B'_i \text{ isométriques pour tout i.}$$

Evidemment, les morceaux ne peuvent pas être mesurables ni au sens d'une mesure σ-additive, ni au sens d'une mesure simplement additive.
Sur cette question, qu'on appelle le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, on peut trouver des explications élémentaires dans un petit livre de Marc Guinot (1991) aux éditions Aléas.

Un autre problème posé par Hilbert (3ème problème de Hilbert) au congrès des mathématiciens de 1900, que Dehn a résolu par la négative la même année, était de savoir si deux polyèdres de même volume étaient équidécomposables en polyèdres. On savait que cette décomposition était possible pour des polygones de même aire (théorème de Bolyai) mais la question était alors ouverte pour les polyèdres. Hilbert pense qu'on peut *"trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible."*[8]
Le théorème de Dehn a fait l'objet d'un problème à l'agrégation de mathématiques (1985).

5. Les différentes tâches liées à la mesure

Dans ce paragraphe, nous allons caractériser les différents types de problèmes que les élèves de collège peuvent rencontrer dans les problèmes de mesure. Nous avons jusqu'ici examiné des questions théoriques concernant la mesure. Si nous nous intéressons maintenant aux tâches à proposer aux élèves, il nous faut distinguer l'aspect mathématique de la mesure, auquel nous réserverons le mot "mesure" de son aspect physique lié à l'utilisation d'un instrument et à la réalisation effective d'une mesure sur un objet matériel que nous appellerons "mesurage". Comme nous nous intéressons aux mesures géométriques au collège et plus spécialement aux aires, c'est surtout à la mesure que nous pensons, les problèmes de mesurage concernant surtout les longueurs et les grandeurs physiques. Nous y reviendrons dans le paragraphe sur les approximations. Cependant les problèmes de mesurage restent à l'arrière-plan des tâches concernant la mesure répertoriées ici.

Pour caractériser les problèmes de mesure au collège, nous nous inspirerons de la classification que Paula Moreira-Baltar a établie dans sa thèse (1996) pour les aires en s'appuyant sur la théorie des champs conceptuels de G. Vergnaud (1991) et sur les hypothèses didactiques que nous avions formulées en conclusion d'une recherche menée avec R. Douady (1989). Nous reprenons son plan qui distingue les types de questions et les types de procédures en tâchant d'y inclure aussi le volume.

- <u>Situations statiques de comparaison</u> : il s'agit de comparer plusieurs aires ou plusieurs volumes donnés. Les données sont des objets géométriques ou des grandeurs quantifiées ou non, la réponse attendue est une comparaison. Suivant les données plusieurs procédures sont possibles :

    * comparaison directe par inclusion : la procédure la plus élémentaire mais qui ne permet pas toujours de conclure,
    * équidécomposabilité (découpage de chaque surface ou de chaque domaine en parties isométriques) : théoriquement toujours possible pour les polygones de même aire, mais pas toujours facile à mettre en œuvre dans la pratique, pas toujours possible pour les polyèdres (théorème de Dehn),

[8] Traduction de P. Cartier dans son exposé sur le sujet au séminaire Bourbaki en juin 1985.

* procédure numérique (comparaison de nombres) : si l'on dispose des mesures de ces aires ou volumes, on se ramène alors à la comparaison de nombres. Si l'on dispose de mesures de longueurs on pourra se ramener à cette procédure en effectuant d'abord une tâche de calcul qu'on peut effectuer de diverses manières (pavage ou formules),
* mesure comme grandeur unidimensionnelle : report d'une unité, c'est un cas particulier de l'équidécomposabilité qui permet des encadrements qui peuvent suffire pour conclure ; c'est le pavage pour les aires (qui est une sous-tâche pas forcément évidente), procédure privilégiée sur quadrillage (à maille carrée ou non, que le quadrillage soit fourni ou à construire) ou pour les volumes creux (remplissage de récipients avec des verres),
* recours à des mesures d'autres grandeurs : masses pour les aires ou pour les volumes, volumes pour les aires (pots de peinture),
* utilisation de l'aspect bidimensionnel de l'aire ou tridimensionnel du volume : comparaison de longueurs pour les aires, de longueurs ou d'aires pour les volumes. C'est une procédure utilisable surtout pour les surfaces ou volumes usuels par le biais des formules : par exemple si des parallélogrammes ont un côté de même longueur, les aires sont dans le même ordre que les hauteurs correspondantes, une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire, les volumes de cônes de même hauteur sont dans le même ordre que les aires de leur base… Ces procédures ne sont pas de même nature que les procédures numériques de calcul de l'aire, elles demandent la maîtrise de l'aspect multidimensionnel de la mesure des aires ou volumes alors que le calcul demande seulement l'application d'une formule et la reconnaissance des éléments pertinents de l'objet géométrique.

- <u>Situations dynamiques de comparaison</u> : il s'agit de voir comment l'aire ou le volume varie quand certains éléments de l'objet géométrique varient, le plus souvent dans le cas de surfaces ou volumes usuels, par exemple comment varie l'aire du parallélogramme articulé, comment varie le volume du prisme dans une déformation qui conserve les sections parallèles à une direction de plan et les hauteurs dans la direction perpendiculaire ; mais aussi l'effet des transformations géométriques ou des agrandissements sur les aires et volumes, la relation entre aire et périmètre, surface latérale et volume dans de telles déformations. Ces situations sont en relation étroite avec le point de vue précédent et visent à la maîtrise de l'aspect multidimensionnel des grandeurs en jeu (longueurs, aires, volumes) en même temps qu'à l'articulation de ces différentes grandeurs par les élèves : dissociation mais aussi mise en place des relations qui les lient ; elles peuvent varier de manière différente sans pour autant être totalement indépendantes. Les élèves peuvent faire intervenir le point de vue dynamique même quand la question posée est une comparaison statique de deux aires ou deux volumes.

- <u>Situations de mesure, une unité étant fixée</u> : il s'agit ici de produire un nombre à partir de la donnée d'un objet géométrique, cette tâche peut être décidée par l'élève lui-même pour répondre par exemple à un problème de comparaison. On retrouve ici les aspects unidimensionnels ou multidimensionnels de la mesure suivant que l'unité fournie est une aire ou un volume représentés par un objet géométrique (petit pavé par exemple) ou que c'est une unité dérivée des unités de longueurs. Parmi les procédures, on retrouve celles déjà mentionnées pour la comparaison : mesure directe par report de l'unité, découpage de la surface ou du volume en éléments disjoints (additivité), recours aux formules.
Il faut distinguer les situations où l'on pourra obtenir une mesure exacte (il s'agit d'objets géométriques et non d'objets matériels) des cas où l'on aura seulement un encadrement comme pour les surfaces à bords arrondis pour lesquelles nous ne disposons pas de formules. Nous ne

considérons pas ici les formules approchées comme celles qu'on pouvait trouver dans des manuels anciens pour calculer le volume d'un tonneau. Nous reviendrons dans le dernier paragraphe sur un autre aspect des approximations et encadrements : celui de l'imprécision des mesures due à l'instrument et aux encadrements qui en découlent, en particulier encadrement d'aires ou de volumes à partir de longueurs.

- Situations de changement d'unité : il s'agit ici de passer d'un nombre à un autre nombre par comparaison des unités. Suivant le cas, cela peut consister en un simple calcul numérique si la mesure d'une unité avec l'autre est connue ou cela peut se ramener à une tâche de pavage si les unités sont données dans le cadre géométrique, mais cela peut demander aussi le passage par une troisième unité si le rapport entre les deux unités fournies n'est pas facile à trouver. On va donc trouver des sous-tâches d'ordre géométrique ou numérique qui peuvent constituer à elles seules un véritable problème pour les élèves. Ces tâches auxiliaires devront alors être des outils disponibles pour les élèves. Le changement d'unités dans le système légal d'unités fait intervenir de manière essentielle l'aspect multidimensionnel des grandeurs en jeu et demande la disponibilité des formules d'aire du carré et du volume du cube ainsi que celle du pavage.

- Production de surfaces ou de solides d'aire ou de volume donné, de même aire ou de même volume qu'une surface ou qu'un volume donné, d'aire plus grande ou plus petite qu'une surface donnée, de volume plus grand ou plus petit qu'un volume donné.
Les procédures qu'on peut mettre en œuvre vont dépendre des données et figurent parmi celles que nous avons explicitées dans le cas de la comparaison.

- Rapports d'aires et de volumes. Ces situations peuvent référer à des pavages, à des mesures, à l'usage des formules ou à des agrandissements. Nous retrouverons suivant les cas les procédures déjà évoquées.

Nous avons ici répertorié les situations en fonction de la question qui est posée aux élèves et des procédures qu'ils peuvent mettre en œuvre et pointé au passage un certain nombre de variables de ces situations. Il est clair que beaucoup d'autres variables interviennent pour expliquer les procédures ou les résultats des élèves, notamment le matériel (papier blanc ou quadrillé par exemple), la complexité de la tâche (une situation peut faire intervenir simultanément plusieurs des tâches répertoriées ici, explicitement ou implicitement), l'initiative laissée aux élèves pour mettre en œuvre les outils (ouverture du problème au niveau de la réponse, de la méthode…), les nombres en jeu etc… Pour une analyse précise de situation, il faudrait prendre en compte ces autres variables.

6. Les conceptions des élèves, les difficultés. Des points essentiels pour l'enseignement.

Les problèmes répertoriés ci-dessus font en général interagir les cadres géométrique et numérique, les élèves risquent donc de rencontrer des difficultés spécifiques de chacun de ces cadres en plus des difficultés relevant plus particulièrement de la mesure puisque les tâches que nous avons caractérisées contiennent des sous-tâches géométriques ou numériques. De nombreux travaux existent dans ces domaines, nous ne parlerons pas des difficultés sur les nombres et, dans le domaine géométrique, nous nous limiterons à ce qui est spécifique de la mesure : découpage des surfaces en parties disjointes, pavage, reconnaissance des éléments géométriques pertinents pour utiliser les formules. Nous trouvons là des difficultés cognitives liées à l'utilisation des représentations, notamment du registre des figures géométriques que V. Padilla-Sanchez (1990) a étudiées dans sa thèse (particulièrement la recomposition de figures) et de coordination entre le registre des figures géométriques et celui des formules. Pour notre part, nous nous placerons sur un plan plus proche des mathématiques elles-mêmes en essayant de dégager les conceptions que les élèves mettent en œuvre pour traiter les problèmes d'aire et de pointer des points clé dans l'apprentissage.

Comme nous l'avons analysé dans la partie théorique et comme il ressort de l'inventaire des situations concernant la mesure des aires, les élèves peuvent disposer de procédures relatives au cadre numérique ou au cadre géométrique, la difficulté réside dans les interrelations entre les deux cadres. Dans la recherche que nous avons menée avec R. Douady (1989), nous avons identifié deux conceptions de l'aire, l'une est liée au cadre numérique —l'aire est un nombre qui se calcule—, l'autre est liée au cadre géométrique —c'est un invariant d'une famille de surfaces. Les difficultés des élèves peuvent être analysées à partir de la difficulté à articuler ces deux conceptions. Dans la conception numérique, le risque est de ne pas distinguer les différentes grandeurs en jeu, de confondre les unités et d'étendre l'usage des formules à des cas où elles ne sont pas valables (par exemple faire le produit des longueurs des côtés pour calculer l'aire du parallélogramme). Dans la conception géométrique, le risque est d'être sensible à la forme des surfaces et à différents indices perceptifs (on concevra par exemple difficilement la possibilité d'évaluer l'aire d'un triangle en cm^2) et aussi d'amalgamer les différentes caractéristiques de la surface, ce qui conduit par exemple à penser qu'aire et périmètre varient nécessairement dans le même sens parce que c'est vrai dans le cas des agrandissements ou réductions. A la suite de cette étude, nous avons formulé les hypothèses didactiques suivantes, que la thèse de P. Moreira Baltar (1996)[9] tend à conforter :

- (H1) - Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur aide les élèves à établir les relations nécessaires entre les cadres géométrique et numérique.
- (H2) - Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici aires et longueurs).
- (H3) - Dans le cadre géométrique, une interaction entre les points de vue statique et dynamique est nécessaire dans la conceptualisation de la grandeur aire et dans sa dissociation de la longueur.

L'apprentissage des élèves concernant les mesures s'étale sur une très grande période allant de l'école élémentaire (et même la maternelle si on inclut des expériences sensibles préalables) jusqu'à l'université pour le calcul d'aires et volumes par des intégrales, sans parler des questions théoriques concernant la mesure. Il n'est pas question ici de survoler tous les problèmes de cet enseignement, nous voulons marquer quelques points qui nous paraissent importants pour l'école élémentaire et le collège si l'on veut que les aires soient disponibles ensuite dans des démonstrations ou pour construire de nouveaux concepts comme celui d'intégrale :

- travail sur l'aire sans mesure par découpage-recollement et sur papier non quadrillé pendant une période suffisante avant l'introduction des mesures,
- travail sur papier quadrillé et déplacements : changements de points de vue entre le quadrillage et le papier blanc,
- pavage avec des unités variées, pas seulement des carrés et pas seulement sur papier quadrillé, pour bien installer l'aspect unidimensionnel de la mesure de l'aire avant d'aborder l'aspect bidimensionnel et la coordination avec les longueurs,
- dissociation de l'aire et du périmètre sans mesure de l'aire, avec ou sans mesure du périmètre.

[9] P. Moreira Baltar explicite dans sa thèse un certain nombre de "théorèmes en acte" utilisés par les élèves. (Précisons que le théorème en acte est une construction du chercheur : tout se passe comme si l'élève utilisait ce théorème, même s'il ne le formule pas).

La recherche dont j’ai parlé est déjà assez ancienne (une dizaine d’années) et on trouve maintenant dans beaucoup de manuels des exercices visant à montrer qu’aire et périmètre ne varient pas forcément dans le même sens mais le plus souvent c’est par l’intermédiaire des nombres que l’on établit ce résultat. Il nous semble important que les élèves puissent travailler cette dissociation sur les caractéristiques géométriques des figures, dans le cadre géométrique puisque c’est plutôt à la conception géométrique qu’il faut rattacher cette difficulté.
- établissement des formules en relation avec les invariants géométriques des figures, y compris dans le cas où la hauteur tombe à l’extérieur. Les différents moyens de calculer doivent être considérés et déclarés équivalents. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant,
- changements d’unités non seulement pour les unités légales mais pour des unités variées, appuyés d’abord sur l’aspect unidimensionnel de la mesure des aires.
- utilisation d’encadrements pour des surfaces qu’on ne peut pas mesurer exactement, que ce soit par pavage ou par des formules.

En ce qui concerne le volume, un certain nombre de points étudiés dans le cas des aires peuvent sans doute être transférés. Une étude de l’équipe de Vergnaud (1982), réalisée au début des années 80, analyse un certain nombre de difficultés d’élèves de cinquième ainsi que des séquences didactiques qui leur ont été proposées. Cette étude est surtout centrée sur la mesure (passage au nombre) et le lien entre les aspects unidimensionnels et tridimensionnels de la mesure des volumes qui apparaît notamment dans le problème du "cube du coin" : faut-il ou non le recompter à chaque fois quand on cherche combien on peut mettre de cubes dans la longueur, dans la largeur et dans la hauteur d’une boîte parallélépipédique ?
Dans le cas du volume l’aspect grandeur physique dans son interaction avec d’autres grandeurs physiques comme la masse intervient plus fortement que pour les aires et la manipulation d’objets matériels est sans doute un élément fondamental dans la conceptualisation. De plus, dans ce cas, viennent se greffer les problèmes de représentation plane d’objets de l’espace, ce qui fait que le passage à l’objet géométrique et la reconnaissance des éléments pertinents pour utiliser les formules sont plus difficiles. De même, hormis le cas du prisme et de certaines pyramides, l’établissement des formules est pratiquement impossible avant la classe de Terminale. Il faut espérer que le travail réalisé dans le cas des aires puisse porter ses fruits aussi pour l’utilisation des formules dans le cas des volumes.

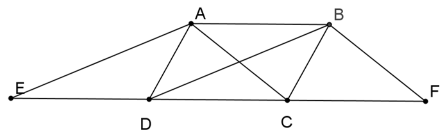
Les problèmes de mesure interfèrent avec beaucoup de domaines mathématiques : nous avons parlé des nombres et de la géométrie bien sûr mais il y a aussi la proportionnalité qui met le plus souvent en relation des grandeurs et leurs mesures, et aussi des rudiments de calcul algébrique par le biais des formules. Notons qu’il s’agit bien d’une interaction : des connaissances sur les nombres et la proportionnalité sont nécessaires pour aborder certains problèmes de mesure mais inversement la résolution de problèmes de mesure intervient fortement dans la conceptualisation des notions de nombre et de proportionnalité.

7. Le rôle des formules. Conditions pour qu’elles puissent jouer ce rôle.

Nous avons déjà évoqué plusieurs fois l’usage des formules au cours des paragraphes précédents. On pense toujours à l’intérêt des formules pour calculer des aires et des volumes et c’est en effet le premier usage qu’on leur donne au moment où on les établit, mais les formules ont bien d’autres rôles à jouer dans la conceptualisation des grandeurs et des mesures, notamment dans leur aspect multidimensionnel (ou produit de mesures), aussi bien pour remettre en cause des conceptions erronées que pour étudier les effets des agrandissements ou réductions sur les aires et les volumes. Elles doivent être disponibles aussi pour leur usage dans les démonstrations : les aires sont notamment un puissant outil de démonstration en géométrie plane qu'on peut utiliser dans de nombreux problèmes au collège. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Relatons un exemple qui nous a été communiqué par Sophie Giron, stagiaire PLC2 à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais.

ABCD est un parallélogramme, E est l'image de A dans la translation de vecteur BD, F est l'image de B dans la translation de vecteur AC. Comparer les aires des triangles ADE et BCF.

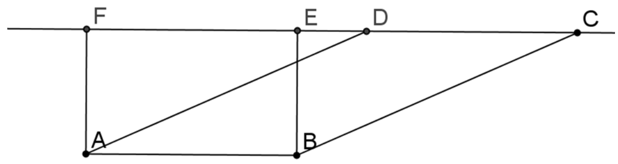


Pour résoudre ce problème, les élèves doivent[10] établir que ED = CF et que les hauteurs relatives à ces côtés dans les deux triangles ont même mesure. Or l'un de ces triangles a nécessairement un angle obtus, donc pour ce triangle la hauteur intéressante tombe à l'extérieur. Mais les élèves calculent les aires à l'aide d'une base telle que la hauteur tombe à l'intérieur. C'est souvent dans ce seul cas que la formule leur a été démontrée et s'il est vrai que ce cas suffit si l'on veut calculer l'aire d'un triangle (ou d'un parallélogramme ou d'un trapèze), cela devient un obstacle dans les démonstrations puisqu'il se peut alors qu'une seule hauteur soit intéressante au regard des hypothèses.

Ce cas est indispensable aussi pour remettre en question des conceptions erronées. Par exemple si l'on veut établir que la déformation du parallélogramme obtenue par glissement d'un côté sur une parallèle au côté opposé et celle obtenue par le parallégramme articulé ne produisent pas les mêmes effets sur les longueurs et les aires et qu'on a conservation de l'aire dans un cas, du périmètre dans l'autre, il est nécessaire que la formule utilisée pour l'aire reste valable quelle que soit l'ampleur de la déformation, y compris donc dans le cas où la hauteur tombe à l'extérieur.

Il est donc très important que les élèves aient établi la formule dans le cas où la hauteur tombe à l'extérieur pour qu'ils soient convaincus de sa validité parce que ce n'est plus le même découpage qui est pertinent.

Il est en effet plus facile dans ce cas, en s'appuyant encore sur l'additivité, de procéder par équi-complémentarité, l'équidécomposa-bilité[11] devenant trop difficile à établir. Sur la figure ci-contre : aire de ABCF = aire de ABCD + aire de ADF = aire de ABEF + aire de BCE.



Mais aire de ADF = aire de BCE donc aire de ABCD = aire de ABEF.

Il faut aussi que les élèves sachent que dans un triangle, on peut se ramener de 3 manières différentes à un rectangle, qu'on a donc trois calculs possibles et que ces calculs donnent le même résultat. La démonstration pourrait aussi se faire avec des triangles semblables.

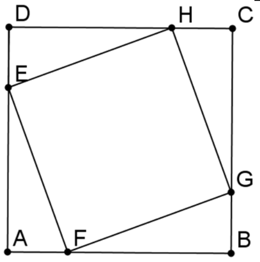
8. Les aires comme outil de démonstration.

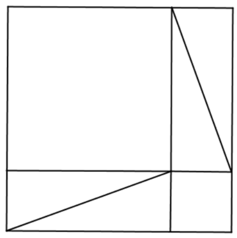
Les aires sont un outil de démonstration puissant au collège : on peut trouver dans les manuels et dans la littérature des IREM beaucoup d'exemples. Certains théorèmes du cours de

[10] Ils pourraient aussi résoudre le problème sans calcul en voyant les triangles comme des demi-parallélogrammes.

[11] Pour les relations entre équicomplémentarité et équidécomposabilité, on peut se reporter à Hilbert (1899/1971). Ces deux notions ne sont équivalentes que si l'on dispose de l'axiome d'Archimède. Sans cet axiome, on peut fabriquer des parallélogrammes équicomplémentaires et non équidécomposables.

collège peuvent être démontrés en utilisant des aires. C'est bien sûr le cas du théorème de Pythagore pour lequel on connaît de nombreuses démonstrations faisant appel aux aires, certaines faisant appel aux mesures, d'autres seulement au découpage et recollement. La démonstration classique et simple faisant appel au découpage et la recomposition du grand carré de côté a+b d'une part en un carré de côté c et 4 triangles rectangles et d'autre part en deux carrés et 4 triangles rectangles, tous les triangles étant superposables pourrait même être tout à fait correcte si nous disposions des cas d'isométrie des triangles rectangles ou du moins du fait qu'un triangle rectangle est déterminé, à isométrie près, par les côtés de l'angle droit, ce qu'il faut admettre au préalable.





On trouve aussi des démonstrations du théorème de Thalès à l'aide des aires[12], par exemple celle de Duperret (1996). Il faut alors être bien conscient qu'il faut dans ce cas admettre un exposé des aires comme celui que fait Lebesgue ou utiliser une définition axiomatique des aires.

9. Les problèmes d'encadrements et d'approximations.

Je voudrais aborder un dernier point dans cette réflexion, celui des encadrements et des mesures approchées. Comme je l'ai déjà dit, il intervient pour deux types de raisons : des raisons théoriques et des raisons physiques liées aux imprécisions des instruments de mesure. Sur le plan théorique cette question est importante puisque c'est ce qui mènera à l'intégrale de Riemann. C'est aussi un exemple qui donne du sens à la notion de limite, par exemple pour calculer l'aire du disque ou du segment de parabole en classe de première.

Mais aborder la question de l'imprécision des mesures dès les premiers niveaux d'enseignement est très important pour donner du sens à la notion de nombre réel et apprendre à raisonner sur des inégalités. Le chapitre sur les valeurs approchées et encadrements donne beaucoup de fil à retordre aux élèves de seconde et ils ont d'autant plus de mal à franchir ces difficultés qu'on les a laissé croire que les mesures obtenues avec les instruments étaient des mesures exactes. Or, on peut aborder ce problème de la précision des mesures avec des enfants très jeunes comme le montrent Guy et Nadine Brousseau (1991-1992) sur l'exemple des masses. Cette question est généralement laissée au physicien mais le cours de mathématiques ne peut pas l'ignorer et dans le cas de la mesure des aires, nous avons l'occasion d'aborder le problème des encadrements de deux façons : encadrement de l'aire de surfaces à bords arrondis ou même de polygones par pavages ou sur papier quadrillé, encadrement de l'aire de rectangles ou autres surfaces usuelles pour lesquelles on dispose de formules si on connaît les dimensions à un millimètre près par exemple.

En conclusion, nous avons d'abord soulevé dans cet article le problème de la définition de la mesure des grandeurs à partir du cas de l'aire qui est représentatif du problème général. Nous avons ensuite tenté de caractériser les types de problèmes concernant les mesures de grandeurs

[12] Voir aussi le concours des médianes, les théorèmes de Ménelaüs et Céva etc. dans Perrin (2011).

et les difficultés spécifiques à la géométrie que rencontrent les élèves dans le cas des aires. En effet, l'aire est à détacher de la forme mais l'utilisation des formules de calcul demande la mise en œuvre de propriétés géométriques et d'une vision géométrique des figures qui conditionne aussi l'usage des aires comme outil de démonstration, peu utilisé dans l'enseignement actuel et pourtant très puissant. Le cas des volumes est à peine mentionné et les angles ne sont pas du tout abordés alors que des travaux de didactique des mathématiques existent dans les deux cas.

Bibliographie.

A.P.M.E.P. (1982) *Grandeur. Mesure.* Brochure n°46 Mots VI

APMEP (1990) *Evaluation du programme de mathématiques, 6ème 1989, 5ème 1990,* brochure 84.

APMEP (1996) Longueur, aire, volume, *Bulletin APMEP n°402,* p.101-111.

BANACH S. (1923) : Sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae 4,* p.7-33 repris dans l'édition des œuvres complètes de Stephan Banach, PWN Editions scientifiques de Pologne, Warszawa, 1967.

BANACH S. et TARSKI A. (1924) : Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae 6,* p.244-277 repris dans l'édition des œuvres complètes de Stephan Banach, opus cité.

BOURBAKI N. *Topologie,* chapitre 5. Hermann, Paris.

BROUSSEAU G. et N. (1991-1992) Le poids d'un récipient. Etude des problèmes de mesurage au CM. Grand N n° 50, p. 65-87.

CATHELINEAU J.L. (1992) Quelques aspects du 3ème problème de Hilbert. *Gazette des mathématiciens* n° 52 suivi de Aspects classiques du 3ème problème de Hilbert par P. Grandemange et P. Schwartz (mémoire de licence, Université de Strasbourg).

CARTIER P. (1985) exposé au séminaire Bourbaki 37ème année, 1984-1985, n° 646

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1983) *Mesure des longueurs et des aires*. Brochure n° 48 IREM Université Paris 7.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie *"Petit x"* n° 6, p.5-33 et *"Petit x"* n° 8, p. 5-30 IREM de Grenoble.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1987) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Cahiers de didactique des mathématiques n° 37* IREM Université Paris 7.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Educational Studies in Mathematics* Vol.20. n°4, p. 387-424

DUPERRET J.C. (1996) Mathématiques et réalité : entre motivation et modélisation in *Mesurer - Compter - Modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique,* Actes du colloque de la Commission inter-IREM 1er cycle, Rouen 1996, Cahiers de la MAFPEN, Rouen.

FOURREY E. (1907, rééd. 1994) *Curiosités géométriques,* Vuibert, Paris.

GUINOT M. (1991) *Le paradoxe de Banach-Tarski.* Aléas Editeur, Lyon.

HADAMARD J. (1928) *Leçons de géométrie élémentaire I géométrie plane.* Armand Colin, Paris.

HAUSDORFF F. (1914) Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen *Mathemetische Annalen,* 75 p. 428-433.

HAUSDORFF F. (1914) *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig, 1914.

HILBERT D. Les fondements de la géométrie (traduction de l'ouvrage de 1899, présentation de P. Rossier, Ed. Dunod 1971). ch. 4 "Des aires planes" p. 98 à 121.

JANVIER C. (1996) Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume in *Mesurer - Compter - Modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique,* Actes du colloque de la Commission inter-IREM 1er cycle, Rouen 1996, Cahiers de la MAFPEN, Rouen.

LEBESGUE H. (1931-1935) Sur la mesure des grandeurs in *l'Enseignement Mathématique.* Blanchard, Paris rééd. 1975

MICHEL A. (1992) *Constitution de la théorie moderne de l'intégration,* Mathesis, Vrin, Paris.

MOREIRA BALTAR P. et COMITI C. (1993) Difficultés rencontrées par des élèves de 5ème en ce qui concerne la dissociation aire-périmètre pour les rectangles, *Petit x n°34,* 5-29, IREM de Grenoble.

MOREIRA BALTAR P. (1996a) *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les aires et les longueurs au collège,* Thèse de Doctorat, Université de Grenoble 1.

MOREIRA BALTAR P. (1996b) A propos de l'apprentissage du concept d'aire *Petit x n°43,* 43-68, IREM de Grenoble.

PADILLA SANCHEZ V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? in Duval R. *Annales de didactique et sciences cognitives, vol.3,* 223-252, IREM de Strasbourg.

PERRIN D. (2011) *Mathématiques d'école.* Cassini, Paris.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1990) L'aire et la mesure *Petit x* n°24 p. 5-36 IREM de Grenoble.

PIAGET J. et INHELDER B. (1948) : *La représentation de l'espace.* Paris, PUF.

PIAGET J., INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948) *La géométrie spontanée de l'enfant,* P.U.F.

REVUZ A. (1959) Théorie de l'intégration *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n°196, 198, 199.

REVUZ A. (1970) Article "Intégration et mesure" dans l'Encyclopaedia Universalis.

ROGALSKI J. (1983) L'acquisition des notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur,surface). *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 3.3, p. 343-396, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROUCHE N. (1991) *Le sens de la mesure.* Ed. Didier-Hatier (Bruxelles).

ROUCHE N. (1994) Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères-IREM* n°15, p. 25-35.

VERGNAUD G. et al. (1982) Didactique et acquisition du concept de volume. *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 4.1 p. 5-131, La Pensée Sauvage, Grenoble.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 10/2.3 p. 5-131, La Pensée Sauvage, Grenoble.