BEHOUDWETFORMULERINGS VIR RANDVOORWAARDES

deur

WESSEL JOHANNES ROSSOUW

voorgelê ter vervulling van 'n deel
van die vereistes vir die graad

DSc

IN DIE FAKULTEIT WIS- EN NATUURKUNDE

VAN DIE

UNIVERSITEIT VAN PRETORIA

PRETORIA

1983

OPGEDRA AAN IDA,
ANDRIES, HILDEGARD EN JACOBA.

DANKBETUIGINGS

Ek spreek my opregte dank uit teenoor die volgende persone:

1. My kollegas aan die Departement Toegepaste Wiskunde, familie en vriende vir hulle volgehoue belangstelling en ondersteuning tydens die studie;
2. Mev A Barkhuizen vir die tik van die manuskrip en mev MR Hattingh vir die keurige versorging van die diagramme;
3. My wiskunde-onderwyser op hoërskool, mnr JL van der Walt, wat by my 'n liefde vir wiskunde gekweek het;
4. Prof WF Beezhold, voormalige departementshoof van die Departement Toegepaste Wiskunde aan die Universiteit van Pretoria, wat my entoesiasme vir Toegepaste Wiskunde gegee het;
5. My promotor, prof N Sauer, wat die studie-onderwerp voorgestel het en aan die studie rigting gegee het met waardevolle idees, wenke en aanmoediging.
6. My gesin vir hulle begrip, en in die besonder my vrou, Ida, vir haar volgehoue ondersteuning asook haar hulp met die proefleeswerk.

SOLI DEO GLORIA.

BEHOUDWETFORMULERINGS VIR RANDVOORWAARDES

deur

WESSEL JOHANNES ROSSOUW

Promotor : Prof N Sauer
Departement : Toegepaste Wiskunde
Graad : DSc

SAMEVATTING

In die studie van veldteoretiese probleme word baie aandag gegee aan die formulering van die beherende vergelykings. Benewens die beherende vergelykings van 'n fisiese proses, word ook newevoorwaardes, waaronder randvoorwaardes, benodig ten einde te verseker dat die besondere probleem goedgeformuleer is.

Die presiese formulering van randvoorwaardes vir veldteoretiese probleme in terme van fisiese interpretasies het in die verlede min aandag geniet. Dikwels word randvoorwaardes soos die klassieke Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes met weinig motivering ten opsigte van hulle realiseerbaarheid aanvaar. Soms word voorwaardes wat nie randvoorwaardes is nie, as randvoorwaardes geklassifiseer. Ten opsigte van die korrekte formulering en fisiese betekenis van randvoorwaardes bestaan daar dus groot leemtes in die literatuur. In weerwil van goeie formulerings van randvoorwaardes vir spesifieke probleme, bestaan daar nie 'n algemene teorie vir die sinvolle formulering van randvoorwaardes nie.

In hierdie proefskrif word 'n algemene teorie vir die formulering van randvoorwaardes ontwikkel. Die hoofpostulaat waaruit hierdie teorie ontwikkel word, veronderstel dat voorwaardes wat op die rand van 'n gebied geld, die gevolg is van kontak tussen die gebied en 'n randmedium. Randvoorwaardes moet dus die wiskundige formulering wees van die wisselwerking tussen die gebied en die rand. Hierdie formulering behels die implementering van behoudwette en samestellingsvergelykings vir die randmedium.

In Hoofstuk 1 word agtergrond geskets en terminologie toegelig.

In Hoofstuk 2 word die basiese randvoorwaardepostulaat gebruik om randvoor=waardes te formuleer vir gebiede met 'n stasionêre rand. Die formulering geskied met behulp van wiskundige modelle vir dik en dun randmedia en vir een, twee en drie ruimtelike dimensies. Die algemene teorie word telkens toegelig met spesifieke voorbeelde.

In Hoofstuk 3 word die resultate van Hoofstuk 2 uitgebrei om ook probleme wat geformuleer word op gebiede met 'n bewegende rand, in te sluit.

In Hoofstuk 4 word kriteria ontwikkel wat gebruik kan word om te besluit of 'n randmedium as dik gemodelleer moét word, en of dit moontlik as dun gemodelleer mag word. Ook hier is voorbeelde ter toeligting.

Ten slotte word in Hoofstuk 5 'n waardebepaling van die werk en 'n voor=uitblik gegee.

CONSERVATION LAW FORMULATIONS OF BOUNDARY CONDITIONS

by

WESSEL JOHANNES ROSSOUW

Promoter : Prof N Sauer
Department : Applied Mathematics
Degree : DSc

SYNOPSIS

In the study of field-theoretical problems a good deal of effort is devoted to the formulation of the governing equations. In addition to these equations, subsidiary conditions, such as boundary conditions, are required to make the problem well-posed.

The precise formulation of boundary conditions for field-theoretical problems in terms of physical interpretations has been largely neglected in the past. Conditions such as the classical Dirichlet and Neumann boundary conditions are often assumed with little motivation as regards their realisability. In addition certain conditions which strictly do not qualify as boundary conditions, are often classified as such. Thus there are large gaps in the literature concerning the formulation and physical meaning of boundary conditions. Despite the existence of proper formulations in certain ad hoc cases, there is no general theory for the meaningful formulation of boundary conditions.

In this dissertation a general theory for the formulation of boundary conditions is presented. The main premise from which the theory is developed, is the fact that conditions which hold at the boundary of a domain result from contact between the domain and a boundary medium. Boundary conditions must be a mathematical description of the interaction between a domain and its boundary medium. The formulation employs also conservation laws and constitutive equations as applied to the boundary medium.

The first chapter gives a background to the present study and introduces terminology to be used.

In Chapter 2 boundary conditions at stationary boundaries are obtained by the application of the main assumption. One, two and three dimensional models are developed for thick and thin boundary media respectively. The general theory is illustrated by applying it to specific problems.

In Chapter 3 the above results are extended to problems in domains with moving boundaries.

In Chapter 4 criteria for the applicability of thick or thin boundary models are developed. Again examples are used to illustrate the theory.

In the final chapter an evaluation of the thesis is given together with an indication of the prospects for further research.

INHOUDSOPGAWE

HOOFSTUK 1

INLEIDING

1.1 AGTERGROND EN DOELSTELLINGS

In die matematiese fisika word probleme bestudeer uit 'n wye verskeidenheid studiegebiede, byvoorbeeld elektromagnetisme, kontinuummeganika (gas- en vloeistofmeganika en die meganika van elastiese materiale) en warmteleer. Hierdie studies word ook veldteoretiese studies genoem.

Die doel van die matematiese fisika is om wiskundige modelle te formuleer wat in kombinasie met enkele waarnemings gebruik kan word om die verloop van 'n spesifieke dinamiese proses en ander soortgelyke prosesse met 'n mate van akkuraatheid te kan voorspel [Truesdell en Noll, 1965, bl 2]. Die aspekte wat ter sprake is by die formulering van so 'n wiskundige model word in Figuur 1.1 met behulp van 'n driehoek ABC voorgestel. Ten einde 'n *goedgeformuleerde probleem* te verkry, word naamlik benewens die *beherende vergelykings* ook voldoende *newevoorwaardes* benodig.

Die *beherende vergelykings* van al die wiskundige modelle word uit twee soorte vergelykings herlei, naamlik behoudwette en samestellingsverge=lykings. Die dinamika van die proses wat gemodelleer word, word vasgelê in 'n algemene behoudwet of balanswet wat geld vir die een of ander entiteit. Hierdie behoudwette kan geformuleer word as integraalvergelykings of as parsiële differensiaalvergelykings [Truesdell en Noll, 1965, bl 1].

Samestellingsvergelykings (Engels: 'Constitutive equation' of 'equation of state'; Duits: 'Materialgleichung') is volgens die literatuur vergelykings wat poog om 'n materiaal se unieke fisiese eienskappe wiskundig te modelleer en is altyd idealiserings van werklike materiale [Truesdell en Noll, 1965, bl 2]. In hierdie teks sal die begrip 'same=stellingsvergelyking' uitgebrei word om ook die vergelykings vir die vorme van die verskillende digtheidsfunksies in te sluit. Tipiese same=stellingsvergelykings is byvoorbeeld Hooke se wet wat 'n materiaaleienskap beskryf, en die vergelyking vir warmte-energiedigtheid wat die vorm van 'n digtheidsfunksie beskryf.

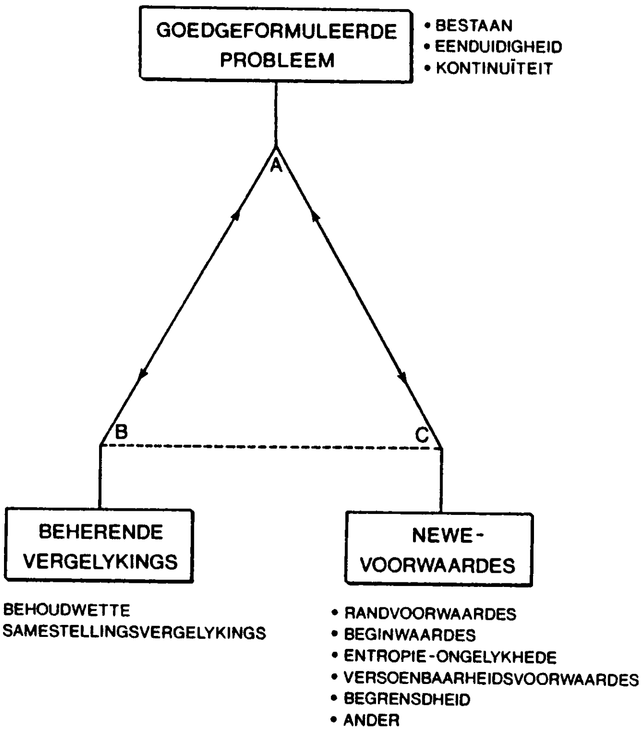

Fig. 1·1

Waar die behoudwette vir alle fisiese prosesse dieselfde vorm het, word die verskillende prosesse van mekaar onderskei deur die samestellings=vergelykings van die verskillende materiale by elke proses betrokke. Elke proses se beherende vergelykings word verkry deur die besondere samestellingsvergelykings te kombineer met die algemene behoudwette.

Met die konsepte van behoudwette en samestellingsvergelykings het die matematiese fisika daarin geslaag om 'n duidelike raamwerk daar te stel waarvolgens die beherende vergelykings van fisiese prosesse geformuleer kan word [Truesdell en Noll, 1965, bl 1-2].

In die matematiese fisika is die konsep van 'n *goedgeformuleerde probleem* te danke aan Hadamard [Mizohata, 1973, bl 259]. 'n Goedgeformuleerde probleem het die volgende drie eienskappe [Weinberger, 1965, bl 6]:

(i) vir geskikte data bestaan 'n oplossing;
(ii) die oplossing van die probleem is eenduidig vir die geskikte data;
(iii) die oplossing van die probleem is kontinu met betrekking tot die geskikte data.

Ten einde die goedgeformuleerdheid van 'n probleem te ondersoek, word die beherende vergelykings van die probleem altyd ten volle betrek by die analise van die probleem ten opsigte van al drie die eienskappe wat hierbo genoem is. (Kyk na die verwysings wat net hierna ten opsigte van die verskillende ondersoektegnieke genoem word). Die wisselwerking tussen punte A en B van die driehoek in Figuur 1.1 is dus duidelik aangetoon.

Ook met die analise van 'n probleem ten opsigte van die eienskappe van goedgeformuleerdheid bestaan daar vandag 'n duidelike raamwerk waarbinne die analise gedoen word. Hierdie raamwerk behels byvoorbeeld energieteg= nieke [Weinberger, 1965, bl 36-39], maksimumbeginsels [Weinberger, 1965, bl 55-61], die gebruik van lineariteit [Weinberger, 1965, bl 34-35], tegnieke van herhaalde benadering [Weinberger, 1965, bl 384-387], spektraalteorie [Mizohata, 1973, bl 357-361] en semi-groepteorie [Mizohata, 1973, bl 298-300].

Wanneer die goedgeformuleerdheid van probleme ondersoek word, is dit duidelik dat die beherende vergelykings alleen nie 'n goedgeformuleerde probleem verseker nie. By al drie eienskappe van 'n goedgeformuleerde probleem soos hierbo genoem is daar sprake van 'geskikte data'. Hierdie geskikte data hou verband met die *newevoorwaardes* van die probleem. 'n Ondersoek na die goedgeformuleerdheid van probleme impliseer dus ook die wisselwerking tussen punte A en C van die driehoek in Figuur 1.1.

Newevoorwaardes behels byvoorbeeld randvoorwaardes en beginvoorwaardes (wat in die literatuur as die 'geskikte data' geneem word) asook entropie-onge= lykhede [Truesdell en Noll, 1965, bl 2], versoenbaarheidsvoorwaardes [Malvern, 1969, bl 183-190] en voorwaardes van begrensdheid [Weinberger, 1965, bl 355]. Waar die raamwerke waarbinne die beherende vergelykings en goedgeformuleerd=

heidsbewyse beweeg reeds duidelik omlyn is, kan dieselfde nie van die newevoorwaardes gesê word nie. Die bepaling van geskikte newevoorwaardes vir 'n goedgeformuleerde probleem berus soms op fisiese intuïsie [Stinson, 1976, bl 64-65], terwyl hulle soms deur die bewyse van goedgeformuleerdheid gesuggereer word [Jaunzemis, 1967, bl 348-350].

Die vraag ontstaan of dit nie moontlik is om vir die formulering van geskikte newevoorwaardes ook 'n bepaalde struktuur daar te stel soos wat reeds vir die formulering van die beherende vergelykings van 'n proses bestaan nie. *Die eerste doel van hierdie studie is om aan te toon dat vir een soort newevoorwaarde, naamlik randvoorwaardes, daar wel 'n struktuur bestaan waarbinne die newevoorwaardes geformuleer kan word.* Die daarstel= ling van die struktuur berus op 'n postulaat wat vir alle randvoorwaarde= probleme 'n wisselwerking veronderstel tussen die punte A en C van die driehoek in Figuur 1.1, dit wil sê 'n wisselwerking tussen die formulering van die beherende vergelykings en die formulering van die randvoorwaardes van die probleem.

Die motivering vir die postulaat moet gesoek word in die vraag 'Hoe kan randvoorwaardes fisies gerealiseer word?' In die praktyk is randeffekte die gevolg van 'n gebied se kontak met sy 'buitewêreld'. Die randvoor= waardepostulaat is dus die logiese gevolgtrekking dat die formulering van randvoorwaardes die wiskundige modellering van hierdie kontakeffekte sal behels. In die teks word dan ook aangetoon hoe randvoorwaardes gefor= muleer kan word deur 'n randmedium met sy eie fisiese eienskappe te postuleer en die wisselwerking tussen hierdie randmedium en die interne gebied wiskun= dig te beskryf. Dit sal dus blyk dat die formulering van randvoorwaardes wesenlik die beskrywing is van 'n dinamiese proses met behulp van behoud= wette en samestellingsvergelykings.

Dat sommige randvoorwaardes wel met behulp van behoudwette en samestellings= vergelykings geformuleer kan word, is nie heeltemal vreemd in die literatuur nie. [Slattery, 1967] lei randvoorwaardes by fase-tussenvlakke af deur gebruik te maak van behoudwette. [Whitaker, 1977] formuleer ook behoud= wette by skeidingsvlakke in sy teorie om die uitdroging van 'n poreuse medium te verklaar. [Batra, 1972] formuleer randvoorwaardes by die opper= vlakte van 'n elastiese medium deur gebruik te maak van die behoudwette en samestellingsvergelykings van 'n randmedium. Op die gebied van die elektro= magnetisme is die gebruik van Gauss-silinders en Gauss-krommes [Corson en

Lorrain, 1962, bl 130-131, 285-287] die standaardtegniek wat gebruik word vir die formulering van randvoorwaardes. Hierdie tegniek is niks anders as die toepassing van behoudwette en samestellingsvergelykings wat geld in die teorie van elektromagnetisme nie.

Daar is egter ook 'n klas van randvoorwaardes in die literatuur wat nie binne die raamwerk van behoudwette en samestellingsvergelykings geformuleer word nie, byvoorbeeld Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 18], kinematiese randvoorwaardes [Milne-Thomson, 1968, bl 74] en die geen-glipvoorwaarde ('no-slip condition') [Fung, 1969, bl 216-218]. In hierdie werk word ook hiérdie randvoorwaardes in verband gebring met behoudwette en samestellingsvergelykings.

Histories is dit ongelukkig so dat die studie van randvoorwaardeprobleme in 'n groot mate randvoorwaardes van hierdie laasgenoemde klas behels; gevolglik het die korrekte formulering van randvoorwaardes (korrek in die sin van die basiese randvoorwaardepostulaat) ook agterweë gebly. Gepaard=gaande hiermee het by baie navorsers die onvermoë ontstaan om behoorlik-geformuleerde randvoorwaardes te interpreteer. *'n Tweede doelstelling van hierdie werk is gevolglik om 'n grondslag te lê waarvolgens randvoorwaardes nie net sinvol geformuleer kan word nie, maar ook sinvol geïnterpreteer kan word.*

Met die bereiking van die doelstellings van die studie kan die diagram van Figuur 1.1 herkonstrueer word tot die diagram van Figuur 1.2 hieronder.

Wat randvoorwaardes betref was daar in Figuur 1.1 slegs die wisselwerking AC wat die wisselwerking tussen randvoorwaardes as newevoorwaardes en die goedgeformuleerdheid van probleme illustreer. Dié wisselwerking is ekwi=valent met die wisselwerking DCA in Figuur 1.2. Die bykomende wissel=werking DBA in Figuur 1.2 illustreer die resultaat van hierdie studie, naamlik dat randvoorwaardes, soos beherende vergelykings, geformuleer kan word met behulp van behoudwette en samestellingsvergelykings.

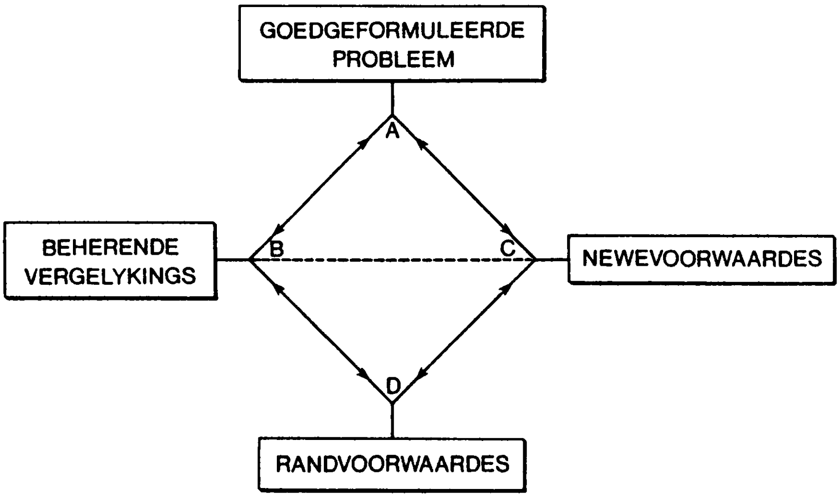

Fig. 1·2

1.2 UITEENSETTING

In Hoofstuk 2 word die basiese randvoorwaardepostulaat waarop die formulering van randvoorwaardes berus, gegee. Met die oog op die toepassing van hierdie postulaat word die nodige behoudwette wiskundig geformuleer, die nodige digtheidsfunksies gedefinieer en meer gesê oor samestellingsvergelykings. 'n Nuwe begrip, naamlik dié van 'n 'samestellingsvergelyking van kontak', word ook gedefinieer. Randvoorwaardes vir kontrolegebiede en materiële gebiede word dan geformuleer met behulp van twee tipes randmodelle, te wete dik-randmodelle en dun-randmodelle. Dit sal blyk dat die ruimte=like dimensies van 'n gebied (een-, twee- of driedimensionaal) 'n bepalende rol speel by die vorm wat die randvoorwaardes kan aanneem; daarom word die modelle telkens geformuleer vir gebiede met een, twee en drie ruimtelike dimensies. Die voorbeelde wat telkens ontleed word, speel 'n belangrike rol om die gebruik van die randmodelle vir die formulering van die verskil=lende moontlike randvoorwaardes te illustreer.

In Hoofstuk 3 word die werk van Hoofstuk 2 uitgebrei om ook die formulering van randvoorwaardes vir gebiede met 'n bewegende rand te dek. Die feit dat 'n rand beweeg veroorsaak oor die algemeen dat ekstra terme tot die randvoorwaardes toetree. Voorbeelde word weer eens gebruik om as illu= strasie te dien vir die toepassing van die randmodelle.

In Hoofstuk 2 en 3 is dik- en dun-randmodelle geformuleer wat onderskeidelik gebruik kan word vir die formulering van randvoorwaardes vir die gevalle van 'n 'dik' en 'n 'dun' randmedium. Die vraag ontstaan watter randmodel (dik of dun) gebruik moet word om randvoorwaardes vir 'n spesifieke probleem te formuleer. In Hoofstuk 4 word eers die begrippe 'parameterlimiet' en 'dun-randmodelleerbaarheid' gedefinieer. Met behulp van hierdie begrippe word dan kriteria ontwikkel wat gebruik kan word om te besluit of 'n dik-randmodel gebruik moët word en of 'n dun-randmodel moontlik gebruik mag word vir die formulering van randvoorwaardes vir 'n spesifieke probleem.

In Hoofstuk 5, die slothoofstuk, is daar benewens 'n samevatting van resul= tate en 'n vooruitblik ook 'n bespreking van sommige kwasi-randvoorwaardes wat soms as newevoorwaardes gebruik word wanneer die goedgeformuleerdheid van probleme bespreek word.

1.3 TERMINOLOGIE EN NOTASIE

1.3.1 Ruimtes, gebiede en punte

Die objekte wat met behulp van die matematiese fisika bestudeer word, is enersyds materiale wat 'n ruimtelike gebied beslaan en waarvan materiaal= eienskappe soos digtheid, temperatuur en snelheid waargeneem kan word, of andersyds verskynsels wat moontlik materiaalvry kan voorkom, soos elek= tromagnetiese velde en stralingsenergie, en wat by plekke in die ruimte gemeet kan word. In hierdie studie word deurgaans aanvaar dat daar 'n een-eenduidige afbeelding bestaan tussen ruimtelike punte en elemente x van die Euklidiese ruimte R^p $(p = 1,2,3)$. Daar bestaan dus ook 'n een-eenduidige afbeelding tussen 'n gebied in die ruimte en 'n versameling $G \subset R^p$. Die afspraak word gemaak dat daar na punte in die ruimte verwys sal word as punte $x \in R^p$ en na gebiede in die ruimte as gebiede $G \subset R^p$. Tensy anders vermeld, is alle deelversamelings van R^p oop. Die versameling ∂G is die rand van die versameling G.

By randvoorwaardeprobleme is daar altyd sprake van 'n ruimtelike gebied G_1 waarop die probleem geformuleer is. In hierdie teks sal na G_1 verwys word as die *interne gebied*. Randvoorwaardes word geformuleer op ∂G_1. Volgens die basiese randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 word 'n randmedium aanliggend aan die interne gebied benodig om randvoorwaardes te realiseer. Die gebied G_2 beslaan deur hierdie randmedium word die *eksterne gebied* of *randgebied* genoem.

In hierdie werk sal onderskrifte $_i$ $(i = 1,2)$ normaalweg dui op funksies gedefinieer op $G_i x (0,T)$ waar $(0,T)$ die interval is van reële getalle wat met die veranderlike tyd (t) geassosieer word. Dit sal uit die teks duidelik wees wanneer 'n onderskrif 'n ander betekenis het, byvoorbeeld wanneer dit gebruik word om komponente te nommer.

1.3.2 Produkte

Daar word nie in hierdie werkstuk verskillende simbole gebruik om te onderskei tussen skalaar-, vektor- en matrikswaardige funksies nie.

Laat λ 'n skalaar- en f 'n vektor- of matrikswaardige funksie wees. Die produk van λ met f word aangedui deur

$$\lambda f \, .$$

Die notasie vir die skalaar- en vektorproduk tussen twee vektore f en g is respektiewelik

$$f \cdot g \text{ en } f \times g \, .$$

Hierdie skalaarproduk induseer die norm

$$\| f \| = (f \cdot f)^{\frac{1}{2}} \, .$$

Die produk tussen 'n matriks A en 'n vektor f word aangedui met

$$A \cdot f \, .$$

Die tensorproduk van twee vektore f en g is die matriks

$$A = f \otimes g$$

met elemente

$$a_{ij} = f_i g_j \, .$$

1.3.3 <u>Differensiasie en integrasie</u>

In hierdie studie word behoudwette telkens in integraalvorm gegee. Die integrasie ter sprake is volgens afspraak Lebesgue-integrasie. Die rede hiervoor is dat die verwisseling van differensiasie en integrasie wat dikwels in hierdie werk gebruik word, by Lebesgue-integrasie 'n direkte gevolg is van Lebesgue se gedomineerde konvergensiestelling [Temple, 1971, bl 135]. Hierdie verwisselingsvoorwaarde is minder streng as die ooreenstemmende voorwaarde van gelykmatige konvergensie by Riemann-integra= sie. Dit sal deurgaans aanvaar word dat die versamelings waaroor geïntegreer word Lebesgue-meetbaar is en dat die integrande Lebesgue-integreerbare funksies is.

Die volgende is die notasie wat ten opsigte van integrasie gebruik word:

Die (volume)integraal van f oor 'n gebied $G \subset R^p$ $(p = 2,3)$ word aangedui deur

$$\int_G f dx \, .$$

Die (oppervlak)integraal van f oor die gebied $S \subset \partial G$ met $G \subset R^3$, word aangedui deur

$$\int_S f dS \, .$$

Die (lyn)integraal van f langs die kromme $C \subset \partial S$ met die oppervlakte $S \subset R^p$ $(p = 2,3)$, word aangedui deur

$$\int_C f d\ell \, .$$

Indien C 'n geslote kromme is, is die notasie

$$\oint_C f d\ell \, .$$

Die notasie vir die integraal van f oor die interval (a,b) is

$$\int_a^b f dx \ .$$

By die differensiasie van 'n funksie van een veranderlike ($f = f(t)$) word òf Leibnitz se notasie ($\frac{d}{dt}$), òf Newton se notasie ($\dot{}$) gebruik, naamlik

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \ .$$

By funksies van meer as een veranderlike word die parsiële afgeleides aangedui deur

$$\partial_\alpha$$

waar α die koördinaat is ten opsigte waarvan gedifferensieer word, byvoorbeeld

$$\partial_x f(x,t) \quad \text{of} \quad \partial_t f(x,t) \ .$$

Ander differensiaaloperatore wat dikwels voorkom, is die gradiënt-, divergensie- en curl-operatore soos gedefinieer in byvoorbeeld [Apostol, 1969, bl 259, 441]. Die notasie vir hierdie operatore is respektiewelik

grad (of ∇),
div (of $\nabla\cdot$), en
curl (of $\nabla\times$) .

Differensiaaloperatore wat in die teks self gedefinieer word is

div' (bl 47)
die kovariante afgeleide $|_\alpha$ (bl 46),
DIV en GRAD (bl 118).

Die notasie wat gebruik word vir die rigtingsafgeleide van 'n funksie f in die rigting van die eenheidsvektor n [Apostol, 1969, bl 252-254] is

$$\frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{of} \quad \partial_n f \quad \text{of} \quad \text{grad} f\cdot n \ .$$

1.3.4 Limiete

By die formulering van randvoorwaardes word daar in hierdie werk telkens gebruik gemaak van limietprosesse. Die volgende afspraak word ten opsigte van hierdie limietprosesse gemaak:

Laat u 'n funksie wees gedefinieer in $G \times (0,T)$. Die oop gebied $G \subset R^p$ $(p = 1,2,3)$ het ∂G as rand. Laat $x \in G$ en $x_o \in \partial G$. In die teks word deurgaans aanvaar dat

$$\lim_{x \to x_o} u(x,t)$$

bestaan en word geskryf

$$\lim_{x \to x_o} u(x,t) = u(x_o,t) .$$

Op soortgelyke wyse is

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = u(x,0) .$$

1.3.5 Stellings wat dikwels gebruik word

Die stellings wat hier gelys word, is sommige van die stellings wat die meeste voorkom in die werk.

Divergensiestelling [Apostol, 1969, bl 457]

Laat n die uitwaartse eenheidsnormaalvektor wees op die geslote rand ∂G van 'n gebied $G \subset R^p$ $(p = 2,3)$. Dan is

$$\int_G \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial G} f \cdot n \, dS$$

mits f kontinu-differensieerbaar is in G.

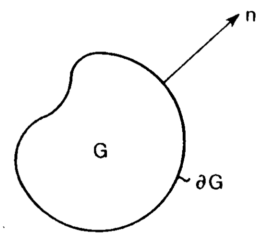

Fig. 1·3

Stokes se stelling [Apostol, 1969, bl 441]

Laat $S \subset R^p$ $(p = 2,3)$ 'n enkelvoudige oppervlakte wees met eenheidsnormaalvektor n en die enkelvoudige geslote kromme $C = \partial S$. ω is die eenheidsraaklynvektor aan C. Dan is

$$\oint_C f\cdot\omega d\ell = \int_S \mathrm{curl} f\cdot n dS,$$

mits f kontinu-differensieerbaar is op S.

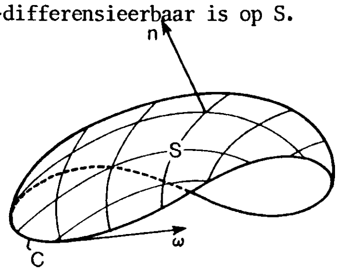

Fig. 1·4

Die hoofstelling vir lynintegrale [Apostol, 1969, bl 338]

Indien die vektorveld gradf kontinu is op 'n oop samehangende versameling $G \subset R^n$ en die lynintegraal van gradf is onafhanklik van die baan in G, dan is vir enige twee punte $a, x \in G$

$$f(x) - f(a) = \int_C \mathrm{grad} f\cdot\omega d\ell$$

waar C 'n baan tussen die twee punte is met eenheidsraaklynvektor ω.

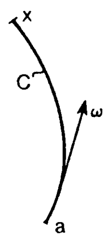

Fig. 1·5

1.4 SIMBOLELYS

In hierdie werk is daar sommige simbole wat een keer gedefinieer en dan deurgaans gebruik word. Sulke simbole word in die lys hieronder aangegee met 'n kort beskrywing van die betekenis van die simbool en die bladsy=nommer waar die simbool gedefinieer word.

Simbole wat eenmalig gedefinieer en gebruik word, is nie in hierdie lys opgeneem nie.

In Hoofstuk 4 word hoofletters gebruik om die getransformeerdes aan te dui van funksies waarvoor in die oorspronklike definisie klein letters gebruik is.

Die aandag word verder gevestig op die afspraak in verband met onderskrifte soos uiteengesit in Paragraaf 1.3.1.

Simbool		Betekenis	Bladsy
a		lengte	105, 117
b		bronterm	18, 40, 42, 45
$\bar{b}$		gemiddelde brondigtheid	31, 32
B		bronterm	23, 25
e		eenheidvektor	44
F		deel van kovariante afgeleide	47
G		gebied in Euklidiese ruimte	7
H		operator in samestellings=vergelyking van kontak	31
n		eenheidsvektor	17
p		verskil tussen twee funksies	106, 117
R^p		Euklidiese ruimte	7
t		tyd	8
T		tyd	8
$\mathcal{T}$		tyd (dimensieloos)	106
u		digtheidsfunksie	18, 40, 41, 44
w	(i)	digtheidsfunksie (Hoofstuk 3)	84, 87
	(ii)	verskil tussen twee funksies Hoofstuk 4)	106, 117
x		posisie	7
X		posisie (dimensieloos)	106, 117

Simbool		Betekenis	Bladsy
α		transformasieparameter	106,117
β		bronterm	19,42,45
γ		verskil tussen twee funksies	19,43,46
τ	(i)	kontakbronmatriks	19
	(ii)	tyd (dimensieloos)(Hoofstuk 4)	106,117
ϕ		vloeddigtheidsfunksie	18,40,41,44
ψ		vloeddigtheidsfunksie	42,45
ω		eenheidsvektor	41,44
Ω		deelversameling van G	17
∂G		rand van G	7
$\partial\Omega$		rand van Ω	17
$(\cdot)$		skalaarproduk	8
$(\dot{})$		afgeleide	10
x		kruisproduk	8
$\otimes$		tensorproduk	9
[ ]		eenhede	18
$\int$		integraalteken vir Lebesgue-integrasie	9
∂_α	(i)	parsiële afgeleide	10
	(ii)	rigtingsafgeleide	10
$\vert_\alpha$		kovariante afgeleide	46
∇ of grad		gradiëntoperator	10
$\nabla\cdot$ of div		divergensie-operator	10
$\nabla\times$ of curl		curl-operator	10
∇' of grad'		beperking van die gradiëntoperator	47
$\nabla'\cdot$ of div'		beperking van die divergensie-operator	47
GRAD		gradiëntoperator in dimensielose koördinate	118
DIV		divergensie-operator in dimensielose koördinate	118

HOOFSTUK 2

RANDMODELLE VIR KONTROLEGEBIEDE EN MATERIËLE GEBIEDE

2.1 INLEIDING

In die studie van randvoorwaardeprobleme word randvoorwaardes soms aanvaar sonder om te besef wat die fisiese implikasies van sulke aannames is. Wanneer 'n praktiese situasie ontleed word, is dit duidelik dat daar wisselwerkings is tussen 'n gebied of medium wat bestudeer word en sy naasliggende gebied of medium. Die voorwaardes wat geld op die rand van die gebied wat bestudeer word, kan slegs korrek geformuleer word indien hierdie wisselwerkings behoorlik wiskundig gemodelleer word.

Heel dikwels word hierdie wisselwerkings wel in ag geneem. Voorbeel= de hiervan kan gevind word in die modellering van probleme uit 'n wyd uit= eenlopende reeks vakgebiede. [Dussan, 1975] neem byvoorbeeld 'n probleem van vloeistofstelsels in kontak met mekaar, in oënskou. [Geymonat en Sanchez-Palencia, 1981] ontleed 'n akoestiese probleem waarvoor die rand= voorwaardes die fisiese eienskappe van die rand (muur) in ag neem. Uit die gebied van warmtegeleiding gebruik [Jaeger, 1950] ook die eienskappe van die wande van oonde, kamers en koelkamers wanneer hy die probleem wiskundig modelleer. [Batra, 1974] formuleer en bespreek 'n probleem waarin vloeistofbeweging en die beweging van 'n elastiese membraan gekoppeld voorkom. Op die gebied van grondwater beskou [Caffarelli en Friedman, 1978] syfering van water deur 'n gronddamwal wat uit verskillende media bestaan. Uit die chemiegebied word 'n probleem van 'n vinnige chemiese reaksie tussen twee media bespreek deur [Cannon en Fasano, 1973]. Uit die gebied van elektromagnetisme neem [Wait, 1966] die wisselwerkings tussen lug en ver= skeie aardkorslae behoorlik in ag wanneer hy sy probleem wiskundig formuleer.

2.2 DIE BASIESE RANDVOORWAARDEPOSTULAAT

In die lig van die opmerkings en voorbeelde in die vorige paragraaf word die *basiese randvoorwaardepostulaat* nou geformuleer:

Die randvoorwaardes vir 'n probleem is goedgeformuleer indien hierdie randvoorwaardes die wiskundige modellering van die wissel=werkings tussen die interne gebied en die randmedium, as medium met sy eie besondere eienskappe, in ag neem.

Wiskundige modellering van die wisselwerkings beteken dat die randmedium werklik as medium erken moet word. Vir die randmedium geld dus wette soortgelyk aan dié vir die gebied wat bestudeer moet word. Hierdie wette is naamlik behoudwette en samestellingsvergelykings. In Paragraaf 2.3 word die vorm wat behoudwette kan aanneem, aangetoon. In Paragraaf 2.4 word meer oor samestellingsvergelykings gesê. Die resultate van dié twee paragrawe word in die res van die proefskrif gebruik om randvoorwaardes sinvol te formuleer.

2.3 BEHOUDWETTE

Die basis waarop die afleiding van die differensiaalvergelykings van die matematiese fisika berus, is die aanname dat balansvergelykings vir meet=bare entiteite, byvoorbeeld massa, momentum, energie en elektriese lading moet geld [Truesdell en Noll, 1965, bl 1,2]. Hierdie balanswette (of behoudwette) kan almal woordeliks soos volg geformuleer word [Aris, 1978, Hoofstuk 3]:

(die tempo waarteen die totale hoeveelheid van 'n entiteit in 'n gebied verander) = (die vloeitempo van die entiteit oor die rand van die gebied) + (die tempo waarteen bronne die entiteit in die gebied vrystel).* (2.1)

Hierdie woordelikse formulering kan in wiskundige vorm gegiet word deur die nodige digtheidsfunksies te definieer en die fisiese eienskappe van die kontinuum in die gebied wiskundig te formuleer.

2.3.1 Gebiede en verwysingstelsels

In hierdie hoofstuk word deurgaans aanvaar dat $G \subset R^p$ $(p = 1,2,3)$ oop en samehangend is. Verder kan G begrens of onbegrens wees. In ooreenstemming

* Putte word as negatiewe bronne beskou

met [Truesdell en Noll, 1965, bl 37] word aanvaar dat daar 'n een-eenduidige relasie bestaan tussen deeltjies van die medium wat bestudeer word en punte $x \in G$.

Ω is 'n willekeurige, begrensde, oop, enkelvoudig-samehangende deelversameling van G. Ω is sodanig dat sy rand $\partial\Omega$ stuksgewys glad is vir $p = 2$ en 3. Dit word aanvaar dat die divergensiestelling vir Ω geld. Die uitwaartse eenheids=normaalvektor op $\partial\Omega$ is $n(x)$. Vir $p = 1$ is $\Omega = (c,d)$ en $\partial\Omega = \{c,d\}$. Dan is $n(c) = -e$ en $n(d) = e$, waar e die eenheidsvektor in die positiewe rigting van die koördinaatas is.
Enigeen van twee standaard formuleringswyses kan aan G en Ω gekoppel wees.

(a) G en Ω is staties ten opsigte van 'n vaste kartesiese koördinaatstel=sel waarin alle waarnemings gemaak word. Ω is dus 'n kontrolegebied in die sin van kontinuummeganika. Volgens [Malvern, 1969, bl 67-68] is dit die standaardprosedure in vloeimeganika om behoudwette vir kontrolegebiede te formuleer.

(b) Sommige probleme (byvoorbeeld uit die meganika van elastiese liggame) word meer natuurlik geformuleer in terme van materiële gebiede. Vir sulke probleme sal G en Ω die verwysingsgebiede wees van die gepaard=gaande materiële gebiede [Truesdell en Noll, 1965, bl 37-39].

Behoudwette kan nou geformuleer word vir G en Ω as kontrolegebiede, soos in (a), of vir materiële gebiede waarvoor G en Ω verwysingsgebiede is, soos in (b). Behoudwette vir materiële gebiede kan getransformeer word na soortgelyke wette vir die verwysingsgebiede G en Ω. Behoudwette wat natuur=likerwyse vir materiële gebiede geformuleer word, kan in elk geval ook met behulp van kontrolegebiede geformuleer word [Malvern, 1969, bl 67-68]. Hoewel die behoudwette in hierdie hoofstuk slegs afgelei word vir kontrole=gebiede G en Ω, sal die resultate dus ook gebruik word vir toepassings waar materiële gebiede gebruik word.

2.3.2 Digtheidsfunksies

Met die reële veranderlike t (tyd) altyd 'n element van $(0,T)$, word die nodige velde hieronder gedefinieer op $G \times (0,T)$ vir $G \subset R^p$ $(p = 1,2,3)$.

Die volgende word aanvaar ten opsigte van die eienskappe van die digtheids=velde:

(a) Die digtheidsvelde bestaan en is eenduidig. (In die literatuur word aandag gegee aan die voorwaardes vir die bestaan en eenduidigheid van sulke funksies, byvoorbeeld [Oliver, 1972].)

(b) Die digtheidsfunksies is voldoende differensieerbaar.

(c) Die digtheidsfunksies en die nodige afgeleides daarvan is lokaal-integreerbaar.

(Aannames (b) en (c) is nodig ten einde te verseker dat die behoudwette, soos later geformuleer, wel bestaan.)

$u = u(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie vir die entiteit waarvoor die stelsel van k behoudwette geld. u kan 'n skalaar wees ($k=1$), byvoor=beeld massakonsentrasie in 'n diffusieproses, of 'n vektor ($k \geq 2$), byvoorbeeld momentum in 'n massa-oordragproses. Indien [E] die eenheid is van die entiteit waarvoor u die digtheids=funksie is, is die eenheid van u, [u] = [E]/eenheidsmaat van R^p.

$\phi = \phi(x,t)$ is vir $p = 2,3$ 'n $k \times p$ matrikswaardige funksie waarvan die rye die vloeddigtheidsvektore is van die k komponente van die fisiese entiteit ter sprake. Vir die geval van 'n enkele behoudwet ($k=1$) is $\phi(x,t)$ 'n vektor in R^p. (In Voor=beeld 2 van Paragraaf 2.7.2 is $k = 1$ en is sprake van 'n hittevloedvektor. In Voorbeeld 2 van Paragraaf 3.3 is $k = 3$ en is die vloeddigtheidsfunksie 'n momentumvloedmatriks.)

In R^3 vind die vloed plaas oor 'n oppervlak en is die eenheid van ϕ, $[\phi]$ = [E]/(tydseenheid)(oppervlakte-eenheid). In R^2 vind die vloed plaas oor 'n lyn en is die eenheid van ϕ, $[\phi]$ = [E]/(tydseenheid)(lengte-eenheid).

Vir eendimensionale gebiede is ϕ nie 'n *vloeddigtheidsfunksie* nie, maar 'n funksie vir die *totale* vloed van die fisiese entiteit ter sprake. Vir sulke gevalle is die eenheid van ϕ, $[\phi]$ = [E]/tydseenheid.

$b = b(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne in $G \subset R^p$ die entiteit vrystel per eenheidmaat van R^p. Gravitasiekrag ('n liggaamskrag) is byvoorbeeld 'n bron van momentum in G, terwyl 'n elektriese stroom sal dien as 'n bron van warmte-energie in G. Die eenheid van b is [b] = [E]/(tydseenheid)(eenheidmaat van R^p).

$\beta = \beta(x,t) \in R^k$ is 'n kontakbronfunksie wat die tempo beskryf waarteen kontakbronne in $\partial\Omega$ vir 'n willekeurige $\Omega \subset G$ die entiteit ter sprake in Ω vrystel. In kontinuummeganika, byvoorbeeld, is kragte wat op die oppervlak $\partial\Omega$ inwerk, bronne van momentum vir die medium in Ω. Die aard van β is sodanig dat indien $\beta(x,t)$ 'n kontakbron is vir Ω op $\partial\Omega$, dan is $-\beta(x,t)$ die kontakbron op $\partial\Omega$ vir $G\setminus\Omega$. Dit is in ooreen= stemming met Cauchy se lemma [Williams, 1973].

Vir die gevalle p = 2,3 word aanvaar dat daar altyd 'n $k \times p$ matriks $\tau = \tau(x,t)$ bestaan wat sodanig is dat $\beta = \tau \cdot n$ [Gurtin en Martins, 1976].

Vir die geval p = 2 is β 'n lyndigtheidsfunksie met die eenheid van β, $[\beta]$ = [E]/(tydseenheid)(lengte-eenheid).

Vir die geval p = 3 is β 'n oppervlaktedigtheidsfunksie met die eenheid van β, $[\beta]$ = [E]/(tydseenheid)(oppervlakte-eenheid).

Vir die geval p = 1 is β 'n funksie wat die totale tempo van vrystelling van die entiteit ter sprake by 'n punt beskryf en is die eenheid van β, $[\beta]$ = [E]/tydseenheid.

$\gamma = \gamma(x,t)$ is 'n digtheidsfunksie wat gerieflikheidshalwe later gebruik sal word. Vir p = 2,3 is $\gamma = \phi - \tau$, en vir p = 1 is $\gamma = \phi - \beta$.

2.3.3 Behoudwette vir eendimensionale gebiede

Die Behoudwet (2.1) word geformuleer vir 'n willekeurige $(c,d) \subset G$ in terme van die digtheidsfunksies van die vorige paragraaf.

$$\frac{d}{dt}\int_c^d u\,dx = (\phi(c,t) - \phi(d,t)) + (\int_c^d b(x,t)dx + \beta(d,t) - \beta(c,t))$$
$$= -\int_c^d [\partial_x\phi(x,t) - \partial_x\beta(x,t)]\,dx + \int_c^d b(x,t)dx. \qquad (2.2)$$

Met behulp van die definisie van γ in die vorige paragraaf reduseer (2.2) tot

$$\frac{d}{dt}\int_c^d u\,dx = -\int_c^d \partial_x\gamma\,dx + \int_c^d b\,dx.$$

Indien differensiasie en integrasie aan die linkerkant verwissel mag word, volg dat

$$\int_c^d [\partial_t u + \partial_x \gamma - b]\,dx = 0.$$

Aangesien $\partial_t u + \partial_x \gamma - b$ volgens aanname lokaal-integreerbaar is, volg uit die willekeurigheid van (c,d) die verdere vorm van die behoudwet

$$\partial_t u + \partial_x \gamma = b \quad \text{in } G \times (0,T). \tag{2.3}$$

2.3.4 Behoudwette vir twee- en driedimensionale gebiede

In terme van die digtheidsfunksies soos gedefinieer in Paragraaf 2.3.2 word die Behoudwet (2.1) vir $p = 2$ en 3 geformuleer vir 'n willekeurige $\Omega \subset G$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u\,dx &= \left(-\int_{\partial\Omega} \phi\cdot n\,dS\right) + \left(\int_\Omega b\,dx + \int_{\partial\Omega} \beta\,dS\right) \\ &= -\int_{\partial\Omega} (\phi-\tau)\cdot n\,dS + \int_\Omega b\,dx \\ &= -\int_\Omega \mathrm{div}\gamma\,dx + \int_\Omega b\,dx, \end{aligned} \tag{2.4}$$

met behulp van die divergensiestelling in Paragraaf 1.3.5 en die definisie van γ in Paragraaf 2.3.2. Aanvaar weer dat differensiasie en integrasie aan die linkerkant verwissel mag word. (2.4) reduseer dan tot

$$\int_\Omega [\partial_t u + \mathrm{div}\gamma - b]\,dx = 0.$$

Indien die integrand lokaal-integreerbaar is, volg uit die willekeurigheid van Ω dat

$$\partial_t u + \mathrm{div}\gamma = b \quad \text{in } G \times (0,T). \tag{2.5}$$

(2.4) en (2.5) is twee vorme van dieselfde behoudwet.

2.4 SAMESTELLINGSVERGELYKINGS

In Paragraaf 2.3 is die algemene vorms wat behoudwette kan aanneem, gefor= muleer. Hierdie vergelykings is geldig vir 'n breë spektrum van prosesse waarvan voorbeelde gegee is in Paragraaf 2.1. By hierdie prosesse is telkens verskillende materiale, elk met sy eie eienskappe, teenwoordig.

Die behoudwette alleen is onvoldoende om die oplossings van probleme een= duidig te bepaal [Truesdell en Toupin, 1960, bl 233]. Die wiskundige modelle vir prosesse in verskillende materiale word van mekaar onderskei deur elke materiaal se unieke fisiese eienskappe met die algemene behoudwette van die vorige paragraaf te kombineer. Die vergelykings wat poog om hierdie fisiese eienskappe wiskundig te beskryf, word samestellingsvergelykings genoem (Eng : 'constitutive equations' of 'equations of state'; Duits : 'Material= gleichungen'). Ten einde die reeds-genoemde behoudwette vir 'n spesifieke proses te gebruik, sal dit dus altyd nodig wees om samestellingsvergelykings te gee vir die digtheidsfunksie u, die vloedfunksie ϕ en die bronfunksies b en β. So byvoorbeeld volg die beheervergelyking vir warmtegeleiding in 'n eendimensionale homogene isotropiese medium sonder hittebronne, $c\rho\partial_t v - K\partial_{xx} v = 0$, deur te aanvaar dat die warmte-energiedigtheid $u = c\rho v$, die warmtevloed $\phi = -K\partial_x v$ en die bronne $b = 0$ en $\beta = 0$.

Die sukses al-dan-nie van 'n wiskundige model vir 'n fisiese proses is in 'n groot mate afhanklik van hoe goed hierdie samestellingsvergelykings die eienskappe van die proses wiskundig beskryf. Volgens [Truesdell en Toupin, 1960, bl 228] is logiese denke wat gelei word deur eksperimentele werk die skepper van samestellingsvergelykings. Die vorm van die samestel= lingsvergelykings word dus ondersteun deur akkurate eksperimentele werk. Samestellingsvergelykings wat byvoorbeeld 'n sterk eksperimentele grondslag het, is Fourier se wet vir die warmtevloed ϕ soos hierbo gegee, en Hooke se wet vir die krag in 'n ligte veer wanneer dit uitgerek word. Logiese redenasie speel weer die oorheersende rol in die formulering van die algemene samestellingsvergelyking vir kontinue media [Truesdell en Noll, 1965, bl 56-58]. Dit mag nie uit die oog verloor word dat samestellings= vergelykings altyd idealiserings (wiskundige modelle) is nie. 'n Beduidende deel van navorsingstyd word hedendaags spandeer aan die onderwerp 'samestellingsvergelykings'. Dit word onderstreep deur die aard van artikels wat verskyn in tydskrifte.

Uit verdere werk sal blyk dat die persoon wat die herkoms van randvoorwaardes wil bestudeer en randvoorwaardes (fisies) wil manipuleer, hom deeglik moet vergewis van die behoudwette wat geld in die randmedium en in die besonder kennis moet hê van die samestellingsvergelykings van die randmateriaal. Dit sal blyk dat manipulasie van die fisiese eienskappe van die randmedium (wat neerkom op die manipulasie van die samestellingsvergelykings) nodig is vir die daarstelling van verskillende soorte randvoorwaardes.

2.5 RANDMODELLE

Volgens die basiese aanname oor randvoorwaardes in Paragraaf 2.2 moet die eienskappe van die randmedium deeglik in ag geneem word by die formulering van randvoorwaardes. Een van hierdie eienskappe is die afmetings van die randmedium.

In praktiese probleme is dit soms só dat die afmetings van die randmedium van dieselfde orde is as die afmetings van die gebied wat bestudeer word. In sulke gevalle sal die randmedium 'dik' genoem word, en word daar 'n '*dik-randmodel*' geformuleer. In probleme van elektromagnetisme word feitlik deurgaans gebruik gemaak van die dik-randmodel om randvoorwaardes te for= muleer [Reitz en Milford, 1962, bl 82-83, 199-200, 321-323]. Ook probleme van warmtegeleiding gebruik soms die dik-randmodel [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 319-320].

Soms is die afmetings van die randmedium klein in vergelyking met die af= metings van die medium wat bestudeer word. Vir sulke gevalle word die rand= medium 'dun' genoem en word 'n '*dun-randmodel*' geformuleer. 'n Dun-randmodel kan soms ook geformuleer word indien die randmedium oor besondere fisiese eienskappe beskik. In dié verband word verwys na Hoofstuk 4. Probleme waar sprake is van 'n dun rand word aangetref in warmtegeleiding [Jaeger, 1955] en in elastisiteit [Batra, 1974].

In Hoofstuk 4 word uitspraak gegee oor wanneer 'n dun-randmodel aanvaarbaar is en wanneer nie. In toepassings het elke model sy eie meriete.

Vir die dik-randmodel word die randvoorwaardes afsonderlik geformuleer vir eendimensionale gebiede en vir twee- en driedimensionale gebiede. Vir die dun-randmodel word die randvoorwaardes afsonderlik geformuleer vir een-, twee- en driedimensionale gebiede. Die rede waarom daar nie net een formulering elk vir die dik-randmodel en die dun-randmodel bestaan nie, het te doen met die meetkunde van die randmedium, soos dit aanstons sal blyk.

Die afspraak in Paragraaf 1.3.1 word weer hier genoem. Daarvolgens is G_1 die gebied wat bestudeer word (interne gebied) en G_2 die randgebied. Onderskrifte i sal dui op funksies gedefinieer in $G_i \times (0,T)$ of in G_i $(i=1,2)$.

2.6 DIE DIK-RANDMODEL

2.6.1 Eendimensionaal

In hierdie paragraaf word die medium wat bestudeer word, sowel as sy randmedium gemodelleer as eendimensionale kontinue media.

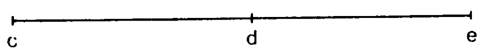

Fig. 2·1

Die interne gebied is $G_1 = (c,d)$. Die eksterne gebied is $G_2 = (d,e)$. Die rand van G_1 is $\partial G_1 = \{c,d\}$. Hier word slegs die randvoorwaarde by d gefor= muleer. Die randvoorwaarde by c volg soortgelyk.

Voordat die randvoorwaarde by d vir die dik-randmodel geformuleer word, word 'n addisionele digtheidsfunksie gedefinieer. Wat die fisiese parameters van die probleem betref, is punt d 'n singuliere punt, want by d het twee verskillende materiale kontak met mekaar. Die bestaan van 'n bron by so 'n kontakpunt moet dus in ag geneem word. Indien d byvoorbeeld 'n punt is waar water besig is om te vries (water links en ys regs van d), word latente warmte by d vrygestel [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 282-284].

$B = B(d,t) \in R^k$ is die funksie wat die tempo beskryf waarteen die bron by d die entiteit ter sprake vrystel. Soos in Paragraaf 2.3.2 is die eenheid van B, $[B] = [E]$/tydseenheid.

Die Behoudwet (2.3) (met onderskrifte 2) wat vir die gebied $G_2 \times (0,T)$ geld, is nog nie 'n randvoorwaarde vir G_1 by d nie, aangesien koppeling tussen G_1 en sy randgebied G_2 nog nie bewerkstellig is nie. Hierdie koppeling volg deur 'n behoudwet vir $(d-\varepsilon_1, d+\varepsilon_2) \times (0,T)$ te formuleer. Soos in (2.2) is hierdie behoudwet

$$\frac{d}{dt}[\int_{d-\varepsilon_1}^{d} u_1(x,t)dx + \int_{d}^{d+\varepsilon_2} u_2(x,t)dx]$$

$$= (\phi_1(d-\varepsilon_1,t) - \phi_2(d+\varepsilon_2,t)) + (\int_{d-\varepsilon_1}^{d} b_1(x,t)dx$$

$$+ \int_{d}^{d+\varepsilon_2} b_2(x,t)dx - \beta_1(d-\varepsilon_1,t) + \beta_2(d+\varepsilon_2,t) + B(d,t)). \quad (2.6)$$

Laat ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$. Die koppelvergelyking (2.6) word dan vir lokaal-integreerbare u_1, u_2, b_1 en b_2

$$\gamma_1(d,t) - \gamma_2(d,t) + B(d,t) = 0,$$

mits die limiete van γ_1 en γ_2 bestaan, soos uiteengesit in Paragraaf 1.3.4.

Na aanleiding van die randvoorwaardepostulaat in Paragraaf 2.2, is die veralgemeende randvoorwaarde by d die behoudwet-cum-koppelvergelyking

$$\partial_t u_2 + \partial_x \gamma_2 = b_2 \quad \text{in } G_2 \times (0,T) \qquad (2.7a)$$

$$\gamma_1(d,t) = \gamma_2(d,t) - B(d,t), \; t \in (0,T) \qquad (2.7b)$$

Vergelyking (2.7b) is die bekende sprongvoorwaarde [Truesdell en Toupin, 1960, bl 492].

Die veralgemeende randvoorwaarde kan ook as 'n enkele vergelyking geskryf word wat soms geriefliker hanteer as die twee Vergelykings (2.7). Deur in (2.6) te stel dat $\varepsilon_1 \to 0$ en $\varepsilon_2 \to e-d$, volg die randvoorwaarde by d as die enkele vergelyking

$$\gamma_1(d,t) = \gamma_2(e,t) - B(d,t) - \int_d^e b_2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_d^e u_2(x,t)dx. \qquad (2.8)$$

Randvoorwaardes by d kan vir 'n spesifieke probleem gegee word deur die besondere samestellingsvergelykings vir die randmedium in die veralgemeende randvoorwaarde (2.7) of (2.8) te substitueer. Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.7.2 dien as illustrasie hiervan.

2.6.2 Twee- en driedimensionaal

Die medium in die interne gebied G_1 en die medium in die eksterne gebied G_2 word gemodelleer as twee- of driedimensionale kontinua. Die rand van G_1 is $\partial G_1 = \overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$. Ω_1 en Ω_2 is twee aanliggende gebiede, d.w.s. $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ is enkelvoudig-samehangend en $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = S \subset \partial G_1$. Laat $\partial\Omega_1 = S \cup S_1$ en $\partial\Omega_2 = S \cup S_2$. Die eienskappe van $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ en ∂G_1 is sodanig dat die volgende vektore goed gedefinieer is:

$n_1(x)$ is die uitwaartse eenheidsnormaalvektor op S_1;

$n_2(x)$ is die uitwaartse eenheidsnormaalvektor op S_2;

$n(x)$ is die uitwaartse eenheidsnormaalvektor op ∂G_1.

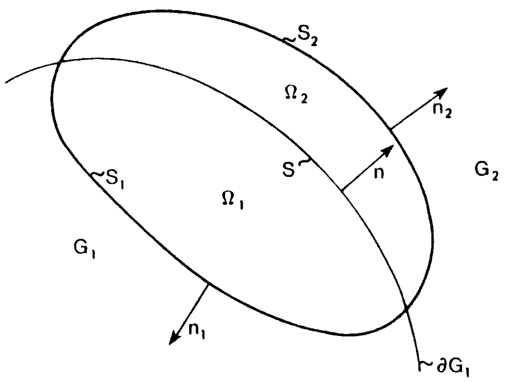

Fig. 2·2

Soos in Paragraaf 2.6.1 word 'n addisionele bronfunksie weer op die singuliere hipervlak ∂G_1 gedefinieer. Dit hou verband met fisiese verskyn=sels soos latente warmte, oppervlaktespanning [Dussan, 1975] en moontlik ander ekstern-aangewende bronne.

$B = B(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne in ∂G_1 die entiteit ter sprake vrystel. In die lig van Paragraaf 2.3.2 is die eenheid van B, [B] = [E]/(tyds=eenheid)(lengte-eenheid) vir tweedimensionale probleme, terwyl [B] = [E]/(tydseenheid)(oppervlakte-eenheid) vir driedimensionale probleme.

Die integraalvorm van die koppeling tussen G_1 en G_2 is die behoudwet vir $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ met rand $S_1 \cup S_2$. Soos die Behoudwet (2.4) is dit

$$\frac{d}{dt}[\int_{\Omega_1} u_1 dx + \int_{\Omega_2} u_2 dx] = (-\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 dS - \int_{S_2} \phi_2 \cdot n_2 dS)$$

$$+ (\int_{S_1} \tau_1 \cdot n_1 dS + \int_{S_2} \tau_2 \cdot n_2 dS + \int_S B dS + \int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{\Omega_2} b_2 dx). \qquad (2.9)$$

Laat nou $S_1 \to S$ en $S_2 \to S$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$ en $n_2 \to n$ respektiewelik. Dan sal maat $(\Omega_1) \to 0$ en maat $(\Omega_2) \to 0$. Indien u_1, u_2, b_1 en b_2 lokaal-integreerbaar is, reduseer (2.9) tot

$$\int_S [(\phi_1 - \tau_1)\cdot n - (\phi_2 - \tau_2)\cdot n + B] dS = 0,$$

mits die limiete bestaan soos uiteengesit in Paragraaf 1.3.4.

Omdat S willekeurig is, volg vir die lokaal-integreerbare integrand dat

$$\gamma_1 \cdot n - \gamma_2 \cdot n + B = 0 \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T)$$

wat, soos vir die eendimensionale geval in Paragraaf 2.6.1 'n sprongvoor=waarde is.

Hierdie koppelvergelyking vorm saam met die Behoudwet (2.5) (met onder=skrifte 2) die veralgemeende randvoorwaarde op ∂G_1. Dit is in ooreenstem=ming met die randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2. Die veralgemeende randvoorwaarde is dus

$$\partial_t u_2 + \operatorname{div}\gamma_2 = b_2 \quad \text{in } G_2 \times (0,T) \qquad (2.10a)$$

$$\gamma_1 \cdot n = \gamma_2 \cdot n - B \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T) \qquad (2.10b)$$

Die koppelvergelyking tesame met die behoudwet vir G_2 kan ook hier as 'n enkele vergelyking geskryf word. Laat naamlik in Vergelyking (2.9) soos tevore $S_1 \to S$ en $n_1 \to -n$. 'n Vorm van die veralgemeende randvoorwaarde op ∂G_1 lui dan soos volg:

Vir 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ en vir $t \in (0,T)$ is

$$\int_S \gamma_1 \cdot n dS = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dx + \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS, \qquad (2.11)$$

onder die gebruiklike voorwaardes van lokaal-integreerbaarheid en die bestaan van die nodige limiete.

Afhangend van die aard van die randmedium ter sprake, kan òf (2.10), òf (2.11) gebruik word om spesifieke randvoorwaardes af te lei.

2.7 RANDVOORWAARDES VOORTVLOEIEND UIT DIE DIK-RANDMODELLE

In Paragraaf 2.6.1 en 2.6.2 is die mees algemene vorms van randvoorwaardes as behoudwette geformuleer vir die geval van dik-randmodelle. Meer spesi= fieke randvoorwaardes volg deur die samestellingsvergelykings vir die rand= medium met die behoudwette te kombineer. Die begrip 'samestellingsverge= lyking' word hier in 'n breër verband gebruik as wat normaalweg die geval is. Soos in Paragraaf 2.4 genoem, word gewoonlik onder die begrip 'same= stellingsvergelyking' verstaan dat dit 'n vergelyking is wat poog om wiskundig uitdrukking te gee aan materiaaleienskappe soos digtheid, vloed- en bronterme. Vir verdere toepassing van die werk is dit nodig om die begrip 'samestellingsvergelyking van kontak' te definieer.

2.7.1 Samestellingsvergelykings van kontak

In voorafgaande werk is funksies gedefinieer vir $G_1 \times (0,T)$ en $G_2 \times (0,T)$. Vir die twee aanliggende gebiede G_1 en G_2 kan limietwaardes vir funksies bepaal word vir enige limietpunt $x \in \overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$, d.i. vir enige x op die skeidingspunt, -lyn of -vlak tussen G_1 en G_2. In dié verband word weer verwys na Paragraaf 1.3.4. Die volgende definisie word nou gegee:

> *'n Samestellingsvergelyking van kontak is enige vergelyking wat nie alreeds 'n behoudwet is nie en wat verbande gee tussen die limietwaardes van funksies gedefinieer in* $G_1 \times (0,T)$ *en* $G_2 \times (0,T)$ *by alle limietpunte* $x \in \overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$.

Voorbeelde van sulke vergelykings is die vergelykings van swak of perfekte termiese kontak [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 18 en 23] en die vergelykings van kontinuïteit van verplasing, snelheid en versnelling op $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$ vir die geval van twee elastiese media wat op $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$ aanmekaar geheg is. (Die laaste voorbeeld vereis dat die materiale op die lasplek nie van mekaar mag lostrek nie. In voorbeelde wat later ontleed word, word aangetoon dat die vergelykings van kontinuïteit wat hier as samestellingsvergelykings van kontak geklassifiseer word, wel ook 'n behoudwetkomponent mag bevat.)

Samestellingsvergelykings van kontak word soms as sprongvoorwaardes geformuleer.

Indien $[g](x) = \lim\limits_{\substack{y_1 \to x \\ y_1 \in G_1}} g_1(y_1) - \lim\limits_{\substack{y_2 \to x \\ y_2 \in G_2}} g_2(y_2)$ vir alle $x \in \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$, definieer

[Batra, 1972] byvoorbeeld vir 'n spesifieke probleem die begrip 'intieme kontak' deur

$$\left.\begin{aligned} [\alpha] &= 0 \\ [f] &= 0 \\ [\theta] &= 0 \\ [q] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{op } \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \times (0,T).$$

Hierin is α = posisie, f = kragte op ∂G_1, θ = temperatuur en q = hittevloed. Die eerste en derde sprongvoorwaarde is samestellingsvergelykings van kontak (perfekte meganiese en termiese kontak), terwyl die tweede en vierde sprongvoorwaarde behoudwette is (momentumbehoud en die behoud van warmte-energie). Batra onderskei nie tussen die twee soorte sprongvoorwaardes nie. Ook 'n klassieke werk soos [Truesdell en Toupin, 1960, bl 491-529] beskryf breedvoerig die herkoms van sprongvoorwaardes as behoudwette en die wiskundige eienskappe van die sprongvoorwaardes, maar onderskei nie tussen die twee soorte sprongvoorwaardes nie.

2.7.2 Moontlike randvoorwaardes

Vir die eendimensionale geval was die veralgemeende randvoorwaardes (2.7) en (2.8) respektiewelik

$$\begin{aligned} \partial_t u_2 + \partial_x \gamma_2 &= b_2 \quad \text{in } G_2 \times (0,T) \\ \gamma_1(d,t) &= \gamma_2(d,t) - B(d,t), \; t \in (0,T) \end{aligned} \qquad (2.7^1)$$

en

$$\gamma_1(d,t) = \gamma_2(e,t) - B(d,t) - \int_d^e b_2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_d^e u_2(x,t)dx. \qquad (2.8^1)$$

Vir die twee- en driedimensionale gevalle was die veralgemeende randvoor=waardes (2.10) en (2.11) respektiewelik

met
$$\begin{aligned} &\partial_t u_2 + \mathrm{div}\gamma_2 = b_2 \quad \text{in } G_2 \times (0,T) \\ &\gamma_1 \cdot n = \gamma_2 \cdot n - B \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T) \end{aligned} \qquad (2.10^1)$$

en

$$\int_S \gamma_1 \cdot n dS = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dx + \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS \qquad (2.11^1)$$

vir 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ en vir $t \in (0,T)$.

Sommige moontlike randvoorwaardes word nou uit hierdie veralgemeende randvoorwaardes gevind.

(a) Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes

Dit is randvoorwaardes waarvoor $\gamma_1(d,t)$ en $\gamma_1 \cdot n$ vir die een- en meerdimen=sionale gevalle respektiewelik gespesifiseer word deur in (2.7^1) en (2.10^1) te stel dat

$$\gamma_2(d,t) = 0 \text{ en } \gamma_2 \cdot n = 0. \qquad (2.12)$$

Daardeur is

$$\begin{aligned} &\gamma_1(d,t) = -B(d,t) \text{ vir } t \in (0,T) \\ \text{en} \quad &\gamma_1 \cdot n = -B \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T). \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Vergelykings (2.12) impliseer dat die interne en eksterne gebiede wesenlik ontkoppel is, wat neerkom op die miskenning van die randmedium as medium met sy eie fisiese eienskappe. Verder impliseer Vergelykings (2.13) dat veralgemeende Neumann-randvoorwaardes geassosieer kan word met bronne aanwesig op die rand ∂G_1. Hierdie bronne moet egter 'mediumvry' wees, anders sal so 'n medium kan optree as randmedium in G_2. Behalwe vir gevalle waar $B = 0$, lyk dit asof veralgemeende Neumann-randvoorwaardes in die lig van die randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 nie baie waarskynlike randvoorwaardes is vir dik randmedia nie.

(b) Dinamiese randvoorwaardes

In die breë sin van die woord is die veralgemeende randvoorwaardes (2.7), (2.8), (2.10) en (2.11) dinamies, aangesien hulle die dinamika van die randmedium in ag neem. Die benaming 'dinamiese randvoorwaarde' [Sauer, 1982.1] het egter hier 'n enger betekenis en word soos volg gedefinieer:

> *'n Dinamiese randvoorwaarde is 'n randvoorwaarde waarin tyd- en ruimtelike afgeleides van die afhanklike veranderlikes gedefinieer in* $G_1 \times (0,T)$ *gelyktydig voorkom.*

'n Wyse waarop 'n dinamiese randvoorwaarde fisies gerealiseer kan word, is deur aan die randmedium fisiese eienskappe toe te ken wat sodanig is dat

$$u_2(x,t) = U_2(t) \text{ vir alle } x \in G_2. \qquad (2.14)$$

Hierdie eienskappe mag verband hou met limietwaardes van fisiese konstantes, soos sal blyk uit die voorbeelde. Vir sulke limietprosesse is dit moontlik dat die Behoudwette (2.7) en (2.10) verval. Die integraalvorme (2.8) en (2.11) van die behoudwette bly egter steeds van krag, en word gebruik om die algemene vorm van die dinamiese randvoorwaarde af te lei.

Met behulp van die eienskap (2.14) word die veralgemeende randvoorwaardes (2.8) en (2.11)

$$\gamma_1(d,t) = \gamma_2(e,t) - B(d,t) - \int_d^e b_2(x,t)dx + (e-d)\dot{U}_2(t) \qquad (2.15)$$

vir die eendimensionale geval, en

$$\int_S \gamma_1 \cdot n dS = V_2\dot{U}_2 + \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S BdS \qquad (2.16)$$

vir die meerdimensionale geval.

Hierin is $V_2 = \int_{\Omega_2} dx$. Stel $V_2 = A\ell$ waar $A = \int_S dS$ en ℓ 'n tipiese lengte geassosieer met Ω_2 en gedefinieer deur die vergelyking $V_2 = A\ell$. Vir die eendimensionale geval is $\ell = e - d$.

Aanvaar verder 'n samestellingsvergelyking van kontak van die vorm

$$u_2 = H(u_1) \quad \text{op} \quad \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \times (0,T),$$

waar H 'n operator is wat sodanig is dat $\partial_t H(u_1)$ bestaan. (Die limiet=aannames en notasie van Paragraaf 1.3.4 moet in gedagte gehou word.) Let op dat

$$U_2(t) = H(u_1)(x,t) \text{ vir alle } x \in \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 .$$

Met behulp van die voorafgaande reduseer (2.15) en (2.16) tot die volgende randvoorwaardes vir die een- en meerdimensionale gevalle respektiewelik:

$$\gamma_1(d,t) - \ell\partial_t H(u_1)(d,t) = \gamma_2(e,t) - B(d,t) - \int_d^e b_2(x,t)dx \text{ vir } t \in (0,T) \quad (2.17)$$

en

$$\int_S [\gamma_1 \cdot n - \ell\partial_t H(u_1)]\, dS = \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S BdS \quad (2.18)$$

vir 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ en vir $t \in (0,T)$.

Indien γ_1 ruimtelike afgeleides bevat, is (2.17) en (2.18) dinamiese randvoorwaardes.

(c) Dirichlet-randvoorwaardes

Dirichlet-randvoorwaardes kan volg uit (2.17) en (2.18) deur aan die rand=medium verdere spesiale eienskappe toe te ken. Beskou eers die eendimen=sionale geval. Stel in (2.17) volgens die middelwaardestelling

$$\int_d^e b_2(x,t)dx = \ell\bar{b}_2(t)$$

($\bar{b}_2(t)$ is die gemiddelde tempo waarteen bronne die entiteit met die digt=heid $u_2(x,t) = U_2(t)$ in (d,e) vrystel per eenheidlengte en op tydstip t.) Deur in (2.17) met ℓ te deel en die limiet te neem wanneer $\ell \to \infty$, volg

$$\partial_t H(u_1)(d,t) = \bar{b}_2(t)$$

mits γ_1, γ_2 en B begrens is. (Die fisiese implikasies hiervan word hier=onder bespreek.) Integrasie hiervan lewer

$$H(u_1)(d,t) = \int_0^t \bar{b}_2(\tau)d\tau + U_2(0) \quad \text{vir } t \in (0,T). \quad (2.19)$$

(2.19) is 'n Dirichlet-randvoorwaarde.

Kies vir die meerdimensionale geval in (2.18) $S = \partial G_1$ en $\Omega_2 = G_2$. $S_2 \subset \partial G_2$ is G_2 se kontakgrens 'na buite'. Stel ook

$$\int_{\Omega_2} b_2(x,t)dx = \bar{b}_2(t)V_2 = \bar{b}_2(t)A\ell.$$

($\bar{b}_2(t)$ is die gemiddelde tempo waarteen bronne die entiteit met digtheid $u_2(x,t) = U_2(t)$ in Ω_2 vrystel per eenheidmaat van Ω_2 op tydstip t.)

Met behulp van die laaste vergelyking volg uit (2.18) dat

$$\int_{\partial G_1} \gamma_1 \cdot n dS - \ell A \partial_t H(u_1) = \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \bar{b}_2 A\ell - \int_{\partial G_1} B dS.$$

Aanvaar hierin dat die drie terme wat ℓ nie bevat nie, begrens is. (Soos vir die eendimensionale geval word die fisiese implikasies van die aan= name hieronder bespreek.) Deur te deel met ℓ en die limiet te neem wan= neer $\ell \to \infty$, volg

$$\partial_t H(u_1) = \bar{b}_2.$$

Soos vir die eendimensionale geval lewer integrasie hiervan die Dirichlet-randvoorwaarde

$$H(u_1) = \int_0^t \bar{b}_2 d\tau + U_2(0) \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.20)$$

In die afleiding van (2.20) is aanvaar dat $\Omega_2 = G_2$ en dat sekere integrale begrens is. Dit mag gebeur dat G_1 en ∂G_1 self onbegrens is. Vir sulke gevalle kan gepoog word om met 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ op 'n natuurlike wyse 'n $\Omega_2 \subset G_2$ te assosieer (soos in Hoofstuk 4 byvoorbeeld) en uit die Behoudwet (2.18) die Dirichlet-randvoorwaarde hierbo te reduseer.

Volgens die voorafgaande bespreking kan Dirichlet-randvoorwaardes volg uit die behoudwette vir 'n randmedium met spesiale fisiese eienskappe ($u_2(x,t) = U_2(t)$) en meetkundig 'enorm' ($\ell \to \infty$). Volgens (2.20) lewer die dik-randmodel dan vir die geval van meerdimensionale probleme 'n Dirichlet-randvoorwaarde wat slegs tydafhanklik is. Dirichlet-randvoorwaar= des kan volgens (2.19) en (2.20) fisies gerealiseer word deur die mani= pulasie van bronne in die randmedium op só 'n wyse dat $\partial_t H(u_1) = \bar{b}_2$. Vir die dik-randmodel speel oppervlaktebronne B, interessant genoeg, geen rol in die realisering van Dirichlet-randvoorwaardes nie.

Die aanname

$$\gamma_1,\ \gamma_2 \text{ en } B \text{ begrens}$$

vir die eendimensionale geval en

$$\int_{\partial G_1}\gamma_1\cdot n dS,\ \int_{S_2}\gamma_2\cdot n_2 dS \text{ en } \int_{\partial G_1} B dS \text{ begrens}$$

vir die meerdimensionale geval het 'n fisiese sowel as wiskundige motivering.

Brönne wat 'n fisiese entiteit vrystel teen 'n onbegrensde tempo is fisies onaanvaarbaar; gevolglik moet B en die bronkomponent van γ (dit is β en τ) begrens wees. Soortgelyk is 'n onbegrensde vloeitempo fisies onaanvaar=baar. Dit beteken dat die vloedkomponent ϕ van γ begrens moet wees.

Wiskundig gesproke is die begrensdheid van die terme 'n nodige en voldoende voorwaarde vir die formulering van Dirichlet-randvoorwaardes wanneer die basiese randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 aanvaar word. Die rede hiervoor is die volgende: Alle randvoorwaardes wat met behulp van die dik-randmodelle geformuleer kan word, bevat die terme γ en B. Die ruimtelike afgeleides van die digtheidsfunksies van 'n probleem is in γ bevat, terwyl B soms ook afhanklik is van die digtheidsfunksies. Dirichlet-randvoor=waardes bevat nie ruimtelike afgeleides van die digtheidsfunksies nie, en ook nie gelyktydig die digtheidsfunksies en hulle tydafgeleides nie, soos byvoorbeeld in Vergelykings (2.17) en (2.18) hierbo. Ten einde Dirichlet-randvoorwaardes te verkry uit die behoudwetbenadering moet die terme wat γ en B bevat dus uit die meer algemene vorms van die randvoorwaardes geëlimineer word. Die enigste sinvolle wyse waarop dit kan geskied, is deur middel van die limietproses soos hierbo uiteengesit en waarin die begrensdheid van die genoemde terme vereis is.

<u>Voorbeeld 1 - eendimensionaal</u>

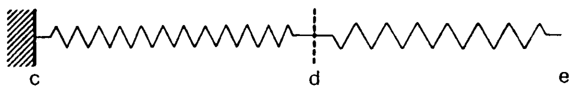

Fig. 2·3

As eerste voorbeeld word die probleem beskou van 'n veer met lengte (d-c) wat op 'n gladde horisontale tafel vibrasies kan uitvoer. Aan die linker=

kant is die veer vas en aan die regterkant is dit gekoppel aan 'n soort=gelyke veer met lengte ℓ = e-d. Die probleem word geformuleer as 'n stelsel van twee behoudwette. Die digtheidsfunksies gedefinieer op $G_i \times (0,T)$ (i=1,2) is die volgende:

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i v_i \\ q_i \end{bmatrix};\ \gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_i \partial_x q_i \\ 0 \end{bmatrix};\ b_i = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ v_i \end{bmatrix}$$

Hierin is ρ_i = massadigtheid, v_i = snelheid, q_i = verplasing, λ_i = elas=tisiteitsmodulus en b_{i1} = kragdigtheid van ekstern-aangewende kragte.

Die mees *algemene randvoorwaardes* by d wat volg uit die dik-randmodel is dan volgens (2.7) of (2.8)

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 \partial_x q_1(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \partial_x q_2(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vir } t \in (0,T) \tag{2.21a}$$

$$\text{met } \partial_t \begin{bmatrix} \rho_2 v_2 \\ q_2 \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} -\lambda_2 \partial_x q_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ vir } (d,e) \times (0,T) \tag{2.21b}$$

of

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 \partial_x q_1(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{21}(e,t) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} - \int_d^e \begin{bmatrix} b_{21}(x,t) \\ v_2(x,t) \end{bmatrix} dx + \frac{d}{dt}\int_d^e \begin{bmatrix} \rho_2 v_2(x,t) \\ q_2(x,t) \end{bmatrix} dx \tag{2.22}$$

Die samestellingsvergelyking van kontak wat saam met (2.21) of (2.22) gebruik word, is die vergelyking van perfekte meganiese kontak (of kontinuïteit van verplasing en snelheid by d).

$$u_2(d,t) = \begin{bmatrix} \rho_2 v_2(d,t) \\ q_2(d,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_1 v_1(d,t)) \\ q_1(d,t) \end{bmatrix} = H(u_1)(d,t) \tag{2.23}$$

Neumann-randvoorwaardes volg deur in (2.21a) te aanvaar dat die randmedium die eienskap $\lambda_2 = 0$ het. Die aard van die randmedium is sodanig dat dit geen kontakkrag kan oordra nie. Die voorwaarde kan fisies bevredig word deur geen randmedium met die interne medium te verbind nie. Uit (2.21a) is

$$\partial_x q_1(d,t) = \frac{B(d,t)}{\lambda_1} = f(t).$$

Die krag $B(d,t) = \lambda_1 f(t)$, waar $f(t)$ die voorgeskrewe Neumann-randvoorwaarde is, moet by d aangewend word sonder dat enige medium by die aanwending betrokke is.

Dinamiese randvoorwaardes volg deur vir die randmedium te aanvaar dat $\lambda_2 \to \infty$. Indien die kontakkrag $-\lambda_2 \partial_x q_2$ begrens moet bly, is $\partial_x q_2 = 0$. Dus is

$$q_2(x,t) = Q_2(t)$$

$$\text{en} \quad v_2(x,t) = \dot{Q}_2(t) = V_2(t) \quad \text{vir alle } x \in (d,e).$$

Die randmedium tree in dié geval op as 'n starre voorwerp. Die Behoudwet (2.22) lewer dan die randvoorwaarde

$$-\lambda_1 \partial_x q_1(d,t) = \gamma_{21}(e,t) - B(d,t) - \int_d^e b_{21}(x,t)dx + \rho_2 \ell \dot{V}_2(t).$$

Met behulp van die samestellingsvergelyking van kontak, (2.23), volg hieruit

$$\rho_2 \ell \partial_t v_1(d,t) + \lambda_1 \partial_x q_1(d,t) = \ell \bar{b}_{21}(t) + B(d,t) - \gamma_{21}(e,t) \tag{2.24}$$

of, met behulp van

$$v_1(x,t) = \partial_t q_1(x,t)$$

wat die tweede komponent van die behoudwet vir $G_1 \times (0,T)$ is,

$$\rho_2 \ell \partial_{tt} q_1(d,t) + \lambda_1 \partial_x q_1(d,t) = \ell \bar{b}_{21}(t) + B(d,t) - \gamma_{21}(e,t). \tag{2.25}$$

Die vorme (2.24) of (2.25) is die mees algemene vorm wat die dinamiese randvoorwaarde kan aanneem vir die geval van die dik-randmodel. Fisies gesproke is dit 'n baie sinvolle randvoorwaarde, want die kragterme aan die regterkante van (2.24) en (2.25) is bloot die resulterende eksterne krag wat op 'n starre randmedium met massa $M = \rho_2 \ell$ uitgeoefen word. Indien hierdie resulterende krag nul is, is (2.25) die dinamiese rand=voorwaarde van die bekende veer-massaprobleem wat bespreek word in onder andere [Timoshenko, 1955, bl 313].

Dirichlet-randvoorwaardes volg deur in (2.25) die limiet te neem as $\ell \to \infty$, nadat met ℓ gedeel is. Dit lewer

$$\partial_{tt} q_1(d,t) = \bar{b}_{21}(t)/\rho_2$$

mits $B(d,t)$ en $\lim\limits_{e\to\infty} \gamma_{21}(e,t)$ begrens is. Twee integrasies van die laaste vergelyking lewer die Dirichlet-randvoorwaarde

$$q_1(d,t) = \int_0^t [\int_0^{\bar{t}} \bar{b}_{21}(\tau)/\rho_2 d\tau + v_1(d,0)]\, d\bar{t} + q_1(d,0).$$

Die voorwaarde $\ell \to \infty$ beteken dat die randmedium wat alreeds 'n starre liggaam is, se massa baie groot word. Op hierdie massa moet 'n krag $\bar{b}_{21}(t)$ per eenheidlengte toegepas word ten einde die Dirichlet-randvoor=waarde fisies te realiseer. Die ander kragte wat die randmedium onder=vind — $B(d,t)$, $\gamma_2(e,t)$ en $\lambda_1 \partial_x q_1(d,t)$ — is begrens en kan geen invloed uitoefen op die versnelling van die randmedium met oneindige massa nie. Die enigste werklik sinvolle Dirichlet-randvoorwaarde is die geval waar $\bar{b}_{21}(t) = 0$, $q_1(d,0) = 0$ en $v_1(d,0) = 0$. Dan is $q_1(d,t) = 0$ die Dirichlet-randvoorwaarde wat geld vir 'n massiewe, starre statiese randmedium.

Voorbeeld 2 - driedimensionaal

In die tweede voorbeeld word die probleem van warmtegeleiding in die begrensde interne gebied $G_1 \subset R^3$ ontleed. Die digtheids=funksies gedefinieer op $G_i \times (0,T)$ $(i = 1,2)$ is die volgende [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 8] : warmte-energiedigtheid $u_i = c_i \rho_i v_i$;

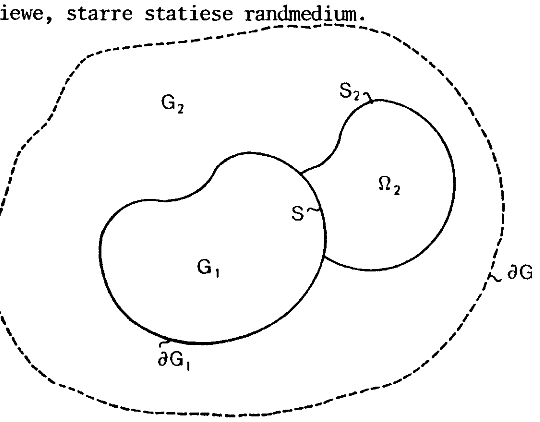

Fig. 2·4

warmte-energievloed $\gamma_i = -K_i \text{grad} v_i$. Hierin is c_i = soortlike warmte, ρ_i = massadigtheid, v_i = temperatuur en K_i = warmtegeleidingsvermoë.

Die mees algemene randvoorwaardes op $\partial G_1 \times (0,T)$ is die Behoudwette (2.10) of (2.11), dit wil sê

$$-K_1 \text{grad} v_1 \cdot n = -K_2 \text{grad} v_2 \cdot n - B \text{ op } \partial G_1 \times (0,T) \tag{2.26a}$$

$$\text{met } c_2 \rho_2 \partial_t v_2 - K_2 \nabla^2 v_2 = b_2 \text{ in } G_2 \times (0,T) \tag{2.26b}$$

of

$$-\int_S K_1 \text{grad} v_1 \cdot n dS = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} c_2 \rho_2 v_2 dx + \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS \tag{2.27}$$

vir 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ en vir $t \in (0,T)$.

Behalwe waar anders vermeld, is die samestellingsvergelyking van kontak op ∂G_1 die vergelyking van perfekte termiese kontak, dit wil sê op $\partial G_1 \times (0,T)$ is

$$v_2 = H(v_1) = v_1. \tag{2.28}$$

Enkele randvoorwaardes wat kan voortvloei uit die Behoudwette (2.26) en (2.27), in kombinasie met die samestellingsvergelyking van kontak, word nou afgelei.

Neumann-randvoorwaardes word eerste geformuleer met behulp van (2.26). Aanvaar die randmedium is 'n volkome isolator, dit wil sê $K_2 = 0$. Uit (2.26a) volg die *Neumann-randvoorwaarde*

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{B}{K_1} = f \text{ op } \partial G_1 \times (0,T).$$

Die fisiese implikasie van 'n Neumann-randvoorwaarde is dus hier dat 'n oppervlaktebron met oppervlaktedigtheid $B = K_1 f$, hitte vrystel aan die oppervlakte van ∂G_1 wat volkome termies geïsoleer is van die eksterne gebied.

Dinamiese randvoorwaardes soos vroeër gedefinieer word ook hier verkry. Aanvaar dat die randmedium 'n supergeleier is, dit wil sê $K_2 \to \infty$. Indien die vloed $\gamma_2 = -K_2 \mathrm{grad} v_2$ begrens is, moet $\mathrm{grad} v_2 = 0$.

Dus is

$$v_2(x,t) = U_2(t) \text{ in } G_2 \times (0,T). \tag{2.29}$$

Soos in Paragraaf 2.7.2b kan die dinamiese randvoorwaarde geformuleer word in terme van 'n tipiese lengte ℓ geassosieer met Ω_2. Ons volg egter hier die formuleringswyse van Paragraaf 2.7.2c en stel $\Omega_2 = G_2$, $S = \partial G_1$ en $S_2 = \partial G_2$. Indien V_2 = volume van G_2 reduseer (2.27) met behulp van (2.29) tot

$$c_2\rho_2 V_2 \dot{U}_2(t) + \int_{\partial G_1} K_1 \mathrm{grad} v_1 \cdot n dS = V_2 \bar{b}_2 + \int_{\partial G_1} B dS - \int_{\partial G_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS.$$

Met die samestellingsvergelyking van kontak (2.28) volg hieruit

$$c_2\rho_2 \partial_t v_1(x,t) + \frac{1}{V_2}\int_{\partial G_1} K_1 \mathrm{grad} v_1 \cdot n dS = \bar{b}_2 + \frac{1}{V_2}\int_{\partial G_1} B dS$$
$$- \frac{1}{V_2}\int_{\partial G_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \tag{2.30}$$

Aangesien die Behoudwet (2.30) tyd- en ruimtelike afgeleides van die afhanklike veranderlike v_1 bevat, is dit 'n dinamiese randvoorwaarde soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2b. [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 22] formuleer ook hierdie randvoorwaarde vir supergeleiers en vloeistowwe wat goed geroer word.

Dirichlet-randvoorwaardes volg weer uit die dinamiese randvoorwaardes. Laat in (2.30) $V_2 \to \infty$ en aanvaar $\int_{\partial G_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS$ is begrens. Dan is

$$c_2\rho_2 \partial_t v_1(x,t) = \bar{b}_2(t) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T).$$

Integrasie hiervan lewer die tydafhanklike Dirichlet-randvoorwaarde

$$v_1(x,t) = \frac{1}{c_2\rho_2}\int_0^t \bar{b}_2(\tau) d\tau + U_2(0).$$

Dirichlet-randvoorwaardes behels dus die 'geskiedenis' van alle rand= mediumbronne van 'n massiewe supergeleidende rand. Die voorwaardes word soos gebruiklik gevind uit 'n behoudwet.

Ander samestellingsvergelykings van kontak lewer *ander randvoorwaardes*. Die vorm van die samestellingsvergelyking van kontak

$$v_2 = H(v_1)$$

kan vir probleme van warmtegeleiding heelwat varieer. 'n Paar vorme het spesifieke name gekry. Die volgende word hier genoem [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 18 en 21] :

(i) Lineêre hitte-oordrag by die oppervlakte:

$$-K_i \text{grad} v_i \cdot n = \alpha(v_1 - v_2) \quad (i=1,2) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T)$$

$$\text{of } v_2 = v_1 + \frac{K_1}{\alpha} \text{grad} v_1 \cdot n \, .$$

(ii) Swart-liggaamstraling:

$$-K_i \text{grad} v_i \cdot n = \sigma E(v_1^4 - v_2^4) \quad (i=1,2) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T)$$

$$\text{of } v_2 = [v_1^4 + \frac{K_1}{\sigma E} \text{grad} v_1 \cdot n]^{\frac{1}{4}} .$$

(iii) Natuurlike konveksie:

$$-K_i \text{grad} v_i \cdot n = \alpha(v_1 - v_2)^{\frac{5}{4}} \quad (i=1,2) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T)$$

$$\text{of } v_2 = v_1 + [\frac{K_1}{\alpha} \text{grad} v_1 \cdot n]^{\frac{4}{5}} \, .$$

Normaalweg word vir hierdie probleme aanvaar dat die randmedium 'n massiewe supergeleier is sonder enige bronne. Die behoudwet vir die randmedium lei dan tot $v_2(x,t) = U_2(0)$, terwyl die eerste vergelykings in (i), (ii) en (iii) hierbo wesenlik die Behoudwet (2.26a) is wat ge= kombineer word met 'n samestellingsvergelyking van kontak.

2.8 DIE DUN-RANDMODEL

2.8.1 Eendimensionaal

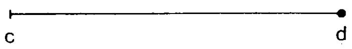

Fig. 2·5

Vir hierdie probleme wat geformuleer word op $(c,d) \times (0,T)$, is die rand=medium nuldimensionaal. Die randmedium is dus 'n partikel by d. Vir die partikel geld dieselfde behoudwet as vir $G_1 = (c,d)$. Ten einde hierdie behoudwet te formuleer, word funksies wat fisies verwant is aan die funksies van Paragraaf 2.3.2, gedefinieer vir die randgebied $G_2 = \{d\}$.

$u_2 = u_2(t) \in R^k$ is die funksie vir die totale hoeveelheid van die fisiese entiteit in die randpartikel. Vir hierdie entiteit geld die stelsel van k behoudwette. Indien $[E]$ die eenheid is van die fisiese entiteit, is die eenheid van u_2, $[u_2] = [E]$.

$\phi_2 = \phi_2(t) \in R^k$ is die vloedfunksie wat die tempo beskryf waarteen die fisiese entiteit die partikel verlaat. Hierdie vloed=funksie sluit die vloed as gevolg van kontak met G_1 uit. Die eenheid van ϕ_2 is $[\phi_2] = [E]/\text{tydseenheid}$.

$b_2 = b_2(t) \in R^k$ is die bronfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne die entiteit in die partikel vrystel. Die eenheid van b_2 is $[b_2] = [E]/\text{tydseenheid}$.

Die behoudwet vir $(d-\varepsilon,d) \cup G_2$ word geformuleer op 'n wyse soortgelyk aan dié in Vergelyking (2.2).

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{d-\varepsilon}^{d} u_1(x,t)dx + u_2(t)\right] = (\phi_1(d-\varepsilon,t) - \phi_2(t))$$
$$+ \left(\int_{d-\varepsilon}^{d} b_1(x,t)dx - \beta_1(d-\varepsilon,t) + b_2(t)\right) \text{ met } t \in (0,T)$$

Laat $\varepsilon \to 0$. In die lig van die randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 volg dan die veralgemeende randvoorwaarde by d:

$$\gamma_1(d,t) = \dot{u}_2(t) + \phi_2(t) - b_2(t) \text{ met } t \in (0,T). \qquad (2.31)$$

2.8.2 Tweedimensionaal

Die tweedimensionale gebied G_1 se rand is die kromme ∂G_1. In die rand=voorwaardeprobleme dikteer die vorm van die rand gewoonlik die koördinaat=stelsel wat gebruik moet word. Laat $q = q(x) = (q_1(x), q_2(x))$ 'n transfor=masie wees van cartesiese na veralge=meende ortogonale kromlynige koördi=nate wat sodanig is dat $q_1 = a$ = konstant die vergelyking is van ∂G_1. $x = x(q_2)$ is dan 'n parametrisering van ∂G_1. Soos tevore is n die eenheidnormaalvektor op ∂G_1, terwyl $\omega = \omega(x(q_2))$ die een=heidraaklynvektor aan ∂G_1 is.

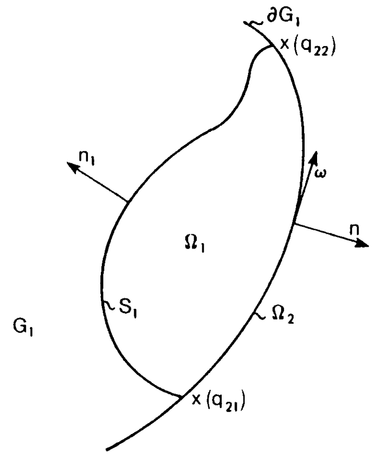

Fig. 2·6

Die randmedium vir G_1 is eendimensionaal. Vir die eendimensionale randgebied $G_2 = \partial G_1$ moet weer funksies, verwant aan die funksies van Paragraaf 2.3.2, gedefinieer word. Die funksies word gedefinieer vir $G_2 \times (0,T)$. Die aannames ten opsigte van die bestaan, eenduidigheid, differensieerbaarheid en integreerbaarheid van digtheidsfunksies soos geformuleer in Paragraaf 2.3.2, is ook hier van toepassing.

$u_2 = u_2(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie vir die fisiese entiteit waarvoor die stelsel van k behoudwette geld. Indien [E] die eenheid is van die entiteit, is die eenheid van u_2 $[u_2]$ = [E]/lengte-eenheid.

$\phi_2 = \phi_2(x,t)$ is die $k \times 2$ matriks waarvan die rye die vloeddigtheids=vektore is wat die tempo beskryf waarteen die entiteit die randmedium verlaat. Hierdie vloedfunksie sluit die vloed as gevolg van kontak met G_1 uit. Die eenheid van ϕ_2 is $[\phi_2]$ = [E]/(tydseenheid)(lengte-eenheid).

Die ryvektore van ϕ_2 moet loodreg op ∂G_1 wees; gevolglik is $\phi_{2i} = \pm|\phi_{2i}|n$, $i=1,2,\dots,k$.

$\psi_2 = \psi_2(x,t)$ is die $k \times 2$ matriks waarvan die rye die vloedvektore is wat die vloeitempo van die entiteit in die randmedium beskryf. Die eenheid van ψ_2 is $[\psi_2] = [E]/(\text{tydseenheid})$.

Die ryvektore van ψ_2 is raaklynig aan ∂G_1; gevolglik is $\psi_{2i} = \pm|\psi_{2i}|\omega$, $i=1,2,\ldots,k$.

$b_2 = b_2(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne in G_2 die entiteit vrystel per eenheidlengte van G_2. Die eenheid van b_2 is $[b_2] = [E]/(\text{tydseenheid})(\text{lengte-eenheid})$.

$\beta_2 = \beta_2(x,t) \in R^k$ is die funksie wat die tempo beskryf waarteen kontakbronne by die randpunte van 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ die entiteit ter sprake vrystel in Ω_2. Soos by die ooreenstemmende kontakbronfunksies in Paragraaf 2.3.2, bevredig β_2 Cauchy se lemma in dié sin dat indien β_2 die kontakbronfunksie is vir Ω_2 by 'n randpunt van Ω_2, dan is $-\beta_2$ die kontak=bronfunksie by dieselfde randpunt vir $G_2 \setminus \Omega_2$. Die eenheid van β_2 is $[\beta_2] = [E]/(\text{tydseenheid})$.

Die behoudwet vir die fisiese entiteit soos geformuleer vir die enkel=voudig-samehangende gebied $\Omega_1 \cup \Omega_2$ is nou net soos in (2.4) die volgende (verwys na Fig 2.6 op bl 41):

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1} u_1 dS + \int_{\Omega_2} u_2 d\ell\right]$$

$$= \left(-\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 d\ell - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n d\ell + \psi_2(x(q_{21}),t) - \psi_2(x(q_{22}),t)\right)$$

$$+ \left(\int_{\Omega_1} b_1 dS + \int_{S_1} \beta_1 d\ell + \int_{\Omega_2} b_2 d\ell + \beta_2(x(q_{22}),t) - \beta_2(x(q_{21}),t)\right).$$

Laat nou $S_1 \to \Omega_2$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$ en maat $(\Omega_1) \to 0$. Die behoud=wet vir $\Omega_1 \cup \Omega_2$ word dan

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = \int_{\Omega_2} \phi_1 \cdot n d\ell - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n d\ell - \int_{\Omega_2} \text{grad}\,\psi_2 \cdot \omega d\ell$$

$$- \int_{\Omega_2} \tau_1 \cdot n d\ell + \int_{\Omega_2} b_2 d\ell + \int_{\Omega_2} \text{grad}\,\beta_2 \cdot \omega d\ell \text{ vir } t \in (0,T). \quad (2.32)$$

In (2.32) is gebruik gemaak van die hoofstelling van lynintegrale (Paragraaf 1.3.5) en die aannames in verband met limiete (Paragraaf 1.3.4).

Volgens Paragraaf 1.3.3 mag die differensiasie en integrasie in (2.32) verwissel word. Aanvaar soos in Paragraaf 2.3.2 dat

$$\gamma_2 = \psi_2 - \beta_2 \ .$$

Vergelyking (2.32) word dan

$$\int_{\Omega_2} [\partial_t u_2 - \gamma_1 \cdot n + \phi_2 \cdot n + \mathrm{grad}\gamma_2 \cdot \omega - b_2] \, d\ell = 0 \ .$$

Hierdie vergelyking geld vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en aangesien die integrand lokaal-integreerbaar is, volg hieruit dat

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n + \mathrm{grad}\gamma_2 \cdot \omega - b_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.33)$$

In die lig van die randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 is Vergelyking (2.32) of (2.33) die veralgemeende randvoorwaarde op $\partial G_1 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dun randmedium wat in kontak is met 'n tweedimensionale medium.

2.8.3 Driedimensionaal

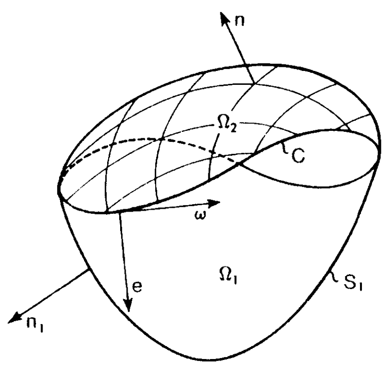

Fig. 2·7

Die driedimensionale gebied G_1 se rand ∂G_1 is 'n hiperoppervlak in R^3
Die hiperoppervlak is 'n Cosserat-oppervlak [Naghdi, 1972, bl 445 en 446]. Soos vir die geval van die tweedimensionale probleem in die vorige paragraaf, induseer die vorm van ∂G_1 'n veralgemeende ortogonale kromlynige koör= dinaatstelsel. $q = q(x) = (q_1(x),\ q_2(x),\ q_3(x))$ is die koördinaattrans= formasie wat sodanig is dat $q_1 = a =$ konstant die vergelyking is van ∂G_1.

Laat $\Omega_2 \subset \partial G_1$ sodanig wees dat die enkelvoudige geslote kromme C die rand van Ω_2 in ∂G_1 is.

Laat Ω_2^* 'n oop enkelvoudig-samehangende deelversameling in R^2 wees en x 'n reguliere afbeelding van Ω_2^* na $\Omega_2 \subset \partial G_1 \subset R^3$.

$$x : (q_2,q_3) \to x(q_2,q_3) \in \Omega_2$$

Die kromme $C^* = \partial\Omega_2^*$ en
$x(C^*) = C$.

Die volgende eenheidsvektore is volgens aanname goed gedefinieer vir Ω_2 en C :

$n = n(x(q_2,q_3)) \in R^3$ is die uitwaartse normaalvektor op Ω_2.

$\omega = \omega(x(q_2,q_3)) \in R^3$ is die raaklynvektor aan C en is sodanig dat

$e = \omega \times n \in R^3$ 'n normaalvektor op C, uitwaarts ten opsigte van Ω_2, is.

Die randmedium vir G_1 is 'n oppervlak $\partial G_1 = G_2$. Vir die randgebied word weer funksies, verwant aan die digtheidsfunksies van Paragraaf 2.3.2, gedefinieer op $G_2 \times (0,T)$.

$u_2 = u_2(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie vir die fisiese entiteit waarvoor die stelsel van k behoudwette geld. Indien [E] die eenheid is van die entiteit, is die eenheid van u_2 $[u_2]$ = [E]/oppervlakte-eenheid.

$\phi_2 = \phi_2(x,t)$ is die $k \times 3$ matriks waarvan die rye die vloeddigtheids= vektore is wat die tempo beskryf waarteen die entiteit die randmedium verlaat. Dié vloeddigtheidsfunksie sluit

die gevolg van kontak met G_1 uit. Die eenheid van ϕ_2 is $[\phi_2] = [E]/(\text{tydseenheid})(\text{Oppervlakte-eenheid})$.
Die ryvektore van ϕ_2 moet loodreg op ∂G_1 wees; dus is $\phi_{2i} = \pm|\phi_{2i}|n$, $i=1,2,\ldots,k$.

$\psi_2 = \psi_2(x,t)$ is die $k \times 3$ vloedmatriks waarvan die rye die vloeddigtheidsvektore is wat die vloed van die entiteit in die randmedium beskryf. Hierdie vloeddigtheidsvektore is dus loodreg op n, dit wil sê $\psi_{2i} \cdot n = 0$, $i=1,2,\ldots,k$.
Die eenheid van ψ_2 is
$[\psi_2] = [E]/(\text{tydseenheid})(\text{lengte-eenheid})$.

$b_2 = b_2(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne in die randmedium die entiteit vrystel per eenheidoppervlakte van G_2. Die eenheid van b_2 is
$[b_2] = [E]/(\text{tydseenheid})(\text{oppervlakte-eenheid})$.

$\beta_2 = \beta_2(x,t) \in R^k$ is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen kontakbronne op C die entiteit ter sprake vrystel in Ω_2 vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$. In ooreenstemming met [Naghdi, 1972, bl 494] word aanvaar dat daar altyd 'n $k \times 3$ matriks $\tau_2 = \tau_2(x,t)$ bestaan wat sodanig is dat $\beta_2 = \tau_2 \cdot e$.
Verder bevredig β_2 Cauchy se lemma soos in Paragraaf 2.3.2 geformuleer.
Die eenheid van β_2 is
$[\beta_2] = [E]/(\text{tydseenheid})(\text{lengte-eenheid})$.

Vir die enkelvoudig-samehangende gebied $\Omega_1 \cup \Omega_2$ kan die behoudwet vir die fisiese entiteit ter sprake neergeskryf word net soos in Vergelyking (2.4).

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1} u_1 dx + \int_{\Omega_2} u_2 dS\right] = \left(-\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 dS - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n dS - \oint_C \psi_2 \cdot e d\ell\right)$$

$$+ \left(\int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{S_1} \beta_1 dS + \int_{\Omega_2} b_2 dS + \oint_C \beta_2 d\ell\right) \qquad (2.34)$$

Laat $S_1 \to \Omega_2$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$ en $\text{maat}(\Omega_1) \to 0$. Die aannames in verband met limiete soos uiteengesit in Paragraaf 1.3.4 geld hier. Differensiasie en integrasie mag ook volgens Paragraaf 1.3.3 verwissel word. Deur gebruik te maak van

$$\beta_1 = \tau_1 \cdot n \text{ en } \beta_2 = \tau_2 \cdot e$$

reduseer (2.34) dus tot

$$\int_{\Omega_2} \partial_t u_2 dS = \int_{\Omega_2} (\phi_1 \cdot n - \tau_1 \cdot n) dS - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n dS + \int_{\Omega_2} b_2 dS$$

$$- \oint_C (\psi_2 \cdot e - \tau_2 \cdot e) d\ell$$

$$= \int_{\Omega_2} \gamma_1 \cdot n dS - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n dS + \int_{\Omega_2} b_2 dS - \oint_C \gamma_2 \cdot e d\ell, \qquad (2.35)$$

waar $\gamma_2 = \psi_2 - \tau_2$.

Aangesien $e = \omega \times n$, is $\gamma_2 \cdot e = \gamma_2 \cdot \omega \times n = \omega \cdot n \times \gamma_2$. Die laaste integraal word dus

$$\oint_C \gamma_2 \cdot e d\ell = \oint_C n \times \gamma_2 \cdot \omega d\ell = \int_{\Omega_2} \mathrm{curl}(n \times \gamma_2) \cdot n dS$$

met behulp van Stokes se stelling (Paragraaf 1.3.5).

Hierdie resultaat reduseer (2.35) tot

$$\int_{\Omega_2} [\partial_t u_2 - \gamma_1 \cdot n + \phi_2 \cdot n - b_2 + \mathrm{curl}(n \times \gamma_2) \cdot n] dS = 0.$$

Dit geld vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en aangesien die integrand lokaal-integreerbaar is, is

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n - b_2 + \mathrm{curl}(n \times \gamma_2) \cdot n \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.36)$$

Indien al die digtheidsfunksies in (2.36) getransformeer word na digtheidsfunksies van die veralgemeende ortogonale kromlynige koördinate (q_1, q_2, q_3), kan 'n ander vorm van Stokes se stelling gebruik word [Naghdi, 1972, bl 488, 494], naamlik

$$\oint_C \gamma_2 \cdot e d\ell = \int_{\Omega_2} \gamma_2^\alpha|_\alpha dS \quad \text{(sommasie oor } \alpha = 2,3 \text{ geïmpliseer)} \qquad (2.37)$$

Hierin is [Naghdi, 1972, bl 625] die kovariante afgeleide

$$\gamma_2^\alpha|_\alpha = \mathrm{div}'\gamma_2 + a_2(q)\gamma_{22} + a_3(q)\gamma_{23},$$

met div' die beperking van die divergensie-operator tot die kromlynige koördinate (q_2, q_3) en $a_i(q)$ funksies verwant aan die Christoffel-simbole van die transformasie (dit wil sê verwant aan ruimtelike afgeleides van x met betrekking tot q_i). Met behulp van (2.37) is 'n ander vorm vir (2.36) dus

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n - b_2 + \text{div}'\gamma_2 + F(\gamma_2) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T), \qquad (2.38)$$

met F 'n lineêre operator.

2.9 RANDVOORWAARDES VOORTVLOEIEND UIT DUN-RANDMODELLE

In Paragraaf 2.8.1, 2.8.2 en 2.8.3 is die mees algemene vorms van rand= voorwaardes as behoudwette geformuleer vir die geval van dun-randmodelle. Soos vir die geval van dik-randmodelle in Paragraaf 2.7.2 volg meer spesifieke randvoorwaardes hier deur die behoudwette van Paragraaf 2.8.1, 2.8.2 en 2.8.3 te kombineer met samestellingsvergelykings vir die randmedium en samestellingsvergelykings van kontak tussen G_1 en G_2.

2.9.1 Moontlike randvoorwaardes

Die mees algemene randvoorwaarde vir die eendimensionale geval is Verge= lyking (2.31).

$$\gamma_1(d,t) = \dot{u}_2(t) + \phi_2(t) - b_2(t) \text{ met } t \in (0,T). \qquad (2.31^1)$$

Vir die tweedimensionale probleem is dit Vergelykings (2.32) of (2.33), dit wil sê

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = \int_{\Omega_2} \gamma_1 \cdot n d\ell - \int_{\Omega_2} \text{grad}\gamma_2 \cdot \omega d\ell - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n d\ell + \int_{\Omega_2} b_2 d\ell \qquad (2.32^1)$$

vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en vir $t \in (0,T)$, of

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n + \text{grad}\gamma_2 \cdot \omega - b_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.33^1)$$

Vir die driedimensionale probleem is die behoudwette wat optree as die mees algemene randvoorwaarde, Vergelykings (2.35) en (2.36) met al die betrokke funksies gedefinieer in terme van kartesiese koördinate. Dit is

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = \int_{\Omega_2} \gamma_1 \cdot n dS - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n dS + \int_{\Omega_2} b_2 dS - \oint_C \gamma_2 \cdot e d\ell \qquad (2.35^1)$$

vir $\Omega_2 \subset \partial G_1$ en vir $t \in (0,T)$, en

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n - b_2 + \mathrm{curl}(n \times \gamma_2) \cdot n \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.36^1)$$

Indien al die funksies getransformeer word na funksies van die veralgemeende ortogonale kromlynige koördinate geïnduseer deur die vorm van ∂G_1, is (2.38) 'n alternatiewe vorm vir (2.36)

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n - b_2 + \mathrm{div}' \gamma_2 + F(\gamma_2) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.38^1)$$

Sommige van die spesifieke randvoorwaardes wat uit hierdie veralgemeende randvoorwaardes volg, word nou uitgelig.

(a) Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes

Aanvaar dat die randmedium onaktief is ten opsigte van die entiteit waarvoor die behoudwet geld. Dit beteken dat in (2.31), (2.33) en (2.36) of (2.38) die digtheidsfunksie van die entiteit, u_2, as tydonafhanklik geneem word, terwyl vir die funksies ϕ_2 en γ_2 geld dat

$$\phi_2 = 0 \text{ en } \gamma_2 = 0.$$

Uit (2.31) volg dan die veralgemeende Neumann-randvoorwaarde

$$\gamma_1(d,t) = -b_2(t) \text{ vir } t \in (0,T) \qquad (2.39)$$

vir die eendimensionale probleem, terwyl (2.33) en (2.36) of (2.38) respektiewelik die soortgelyke voorwaarde

$$\gamma_1 \cdot n = -b_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T) \qquad (2.40)$$

oplewer vir die twee- en driedimensionale probleme.

(b) Dinamiese randvoorwaardes

Vir die geval van die dik-randmodelle in Paragraaf 2.7.2 het dinamiese randvoorwaardes gevolg deur aan die randmedium een of ander 'supereienskap' toe te ken wat sodanig is dat $u_2(x,t) = U_2(t)$. Dit blyk dat vir dun-randmodelle die dinamiese randvoorwaarde eintlik die natuurlikste rand=

voorwaarde is. Die 'supereienskap' wat hier vereis word, is daarin geleë dat die randmedium as 'dun' gemodelleer word.

Soos tevore word 'n samestellingsvergelyking van kontak met die vorm

$$u_2 = H(u_1) \tag{2.41}$$

aanvaar. Met behulp van (2.41) volg die randvoorwaarde uit (2.31) vir die eendimensionale geval in die vorm

$$\partial_t H(u_1)(d,t) - \gamma_1(d,t) = b_2(t) - \phi_2(t),\ t \in (0,T). \tag{2.42}$$

Vergelyking (2.41) lewer saam met (2.33) en (2.38) respektiewelik die randvoorwaardes vir die twee- en driedimensionale probleme. Aanvaar hierin dat

$$\gamma_2 = \gamma_2(L(u_2)) = \gamma_2(L\circ H(u_1)).$$

Vir die tweedimensionale geval reduseer (2.33) dan tot

$$\partial_t H(u_1) - \gamma_1\cdot n + \partial_\omega \gamma_2(L\circ H(u_1)) = b_2 - \phi_2\cdot n \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \tag{2.43}$$

Vir die driedimensionale geval reduseer (2.38) tot

$$\partial_t H(u_1) - \gamma_1\cdot n + \mathrm{div}'\gamma_2(L\circ H(u_1)) + F(\gamma_2(L\circ H(u_1)))$$

$$= b_2 - \phi_2\cdot n \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \tag{2.44}$$

Indien γ_1 vir die eendimensionale geval ruimtelike afgeleides bevat, is (2.42) 'n dinamiese randvoorwaarde.

Vergelykings (2.43) en (2.44) bevat ruimtelike afgeleides van u_1 eksplisiet deur die operatore ∂_ω en div'. Vir twee- en driedimensionale gevalle lewer die dun-randmodel dus direk dinamiese randvoorwaardes. Wat verder van belang is, is dat hierdie ruimtelike afgeleides van u_1 op $\partial G_1 \times (0,T)$ raaklynige afgeleides is. Sulke terme kom nie eksplisiet voor in die dinamiese randvoorwaardes van die dik-randmodel soos bespreek in Paragraaf 2.7.2 nie. Normaalafgeleides kan ook toetree tot (2.43) en (2.44) indien $\gamma_1\cdot n$ sulke terme bevat.

(c) Dirichlet-randvoorwaardes

In Paragraaf 2.7.2 het Dirichlet-randvoorwaardes gevolg uit die dinamiese randvoorwaardes deur te aanvaar dat 'n tipiese lengte (wesenlik dikte) van die randmedium $\ell \to \infty$. Vir die dun-randmodel bestaan daar nie so 'n tipiese lengte nie. Om in die algemeen aan te toon dat die dun-randmodel wel Dirichlet-randvoorwaardes kan oplewer vir alle veldteoretiese modelle, is dus nie moontlik nie. Daar moet aanvaar word dat die samestellings=vergelykings vir die randmedium sodanig gekies kan word, dat (2.42) reduseer tot

$$\partial_t h(u_1)(d,t) = f(t) \text{ vir } t \in (0,T), \tag{2.45}$$

en (2.43) en (2.44) tot

$$\partial_t h(u_1) = g \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \tag{2.46}$$

Hierin moet f en g onafhanklik wees van u_1. f en g is dus funksies afhanklik van b_2. Integrasie van die Behoudwette (2.45) en (2.46) lewer dan die Dirichlet-randvoorwaardes

$$h(u_1)(d,t) = \int_0^t f(\tau)d\tau + h(u_1)(d,0),\ t \in (0,T)$$

$$\text{en } h(u_1)(x,t) = \int_0^t g(x,\tau)d\tau + h(u_1)(x,0) \text{ in } \partial G_1 \times (0,T).$$

Indien die dun-randmodel dus Dirichlet-randvoorwaardes oplewer, is hierdie randvoorwaardes moontlik tyd- én ruimte-afhanklik. Dit is in teëstel=ling met die resultate van die dik-randmodelle in Paragraaf 2.7.2 waar die Dirichlet-randvoorwaardes slegs tyd-afhanklik kan wees.

<u>Voorbeeld 1 - eendimensionaal</u>

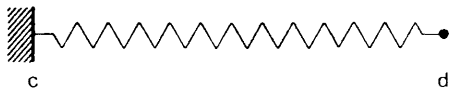

Fig. 2·8

Beskou die probleem van 'n puntmassa wat bevestig is aan die eindpunt van 'n veer wat op 'n gladde horisontale tafel longitudinale vibrasies kan uitvoer. Soos in Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.7.2 is

$$\gamma_1(x,t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \partial_x q_1(x,t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } u_1(x,t) = \begin{bmatrix} \rho_1 v_1(x,t) \\ q_1(x,t) \end{bmatrix}.$$

Die entiteit waarvoor die behoudwet in die randpartikel met massa M geld, is

$$u_2(t) = \begin{bmatrix} Mv_2(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

met $Mv_2(t)$ = momentum van randpartikel en $q_2(t)$ = posisie van die randpartikel. Stel in (2.31) $\phi_2 = 0$ en $b_2 = \begin{bmatrix} b_{21} \\ v_2 \end{bmatrix}$, waar b_{21} die ekstern-aangewende krag op die randpartikel is. In die lig hiervan word die *veralgemeende randvoorwaarde* (2.31)

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 \partial_x q_1(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Mv_2(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{21}(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}. \qquad (2.47)$$

Die samestellingsvergelyking van kontak is die vergelyking van perfekte meganiese kontak

$$u_2(t) = \begin{bmatrix} Mv_2(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M}{\rho_I}(\rho_1 v_1(d,t)) \\ q_1(d,t) \end{bmatrix} = H(u_1)(d,t) \qquad . \qquad (2.48)$$

Deur die Behoudwet (2.47) en die samestellingsvergelyking van kontak (2.48) te kombineer volg direk die *dinamiese randvoorwaarde*

$$\partial_t \begin{bmatrix} Mv_1(d,t) \\ q_1(d,t) \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1(d,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21}(t) \\ v_1(d,t) \end{bmatrix}.$$

Deur die twee komponente van hierdie randvoorwaarde te kombineer, volg weer, soos in Paragraaf 2.7.2, die randvoorwaarde van [Timoshenko, 1955, bl 313]

$$M\partial_{tt} q_1(d,t) + \lambda_1 \partial_x q_1(d,t) = b_{21}(t). \qquad (2.49)$$

Neumann-randvoorwaardes volg uit (2.49) deur te stel M = 0. Dan is

$$\partial_x q_1(d,t) = \frac{b_{21}(t)}{\lambda_1} = f(t). \qquad (2.50)$$

Soos in Paragraaf 2.7.2 behels algemene Neumann-randvoorwaardes (2.50) die aanwending van 'n krag $b_{21}(t)$ by d sodanig dat $b_{21}(t) = \lambda_1 f(t)$ en sonder dat enige randmedium betrokke is by die aanwending van die krag.

Ten einde *Dirichlet-randvoorwaardes* uit (2.49) af te lei, word aanvaar dat

$$b_{21}(t) = Mf(t)$$

waar f(t) die krag is wat per eenheidmassa op die randpartikel aangewend word. Uit (2.49) volg dan

$$\partial_{tt} q_1(d,t) + \frac{\lambda_1}{M} \partial_x q_1(d,t) = f(t).$$

Indien $M \to \infty$, lewer dit

$$\partial_{tt} q_1(d,t) = f(t).$$

Na twee integrasies lewer hierdie behoudwet die Dirichlet-randvoorwaarde

$$q_1(d,t) = g(t) = \int_0^t [\int_0^{\bar{t}} f(\tau)d\tau + v_1(d,0)]\, d\bar{t} + q_1(d,0). \qquad (2.51)$$

In die lig van die dun-randmodel impliseer Dirichlet-randvoorwaardes (2.51) dus die aanwending van 'n krag f(t) per eenheidmassa op 'n massiewe randpartikel. f(t) is sodanig dat

$$f(t) = \ddot{g}(t).$$

Soos in Paragraaf 2.7.2 is die enigste sinvolle Dirichlet-randvoorwaarde dié van 'n massiewe statiese randmedium wat lei tot

$$q_1(d,t) = 0 \text{ vir } t \in (0,T).$$

Voorbeeld 2 - tweedimensionaal

Beskou die probleem van warmte wat gelei word in 'n plat medium G_1.

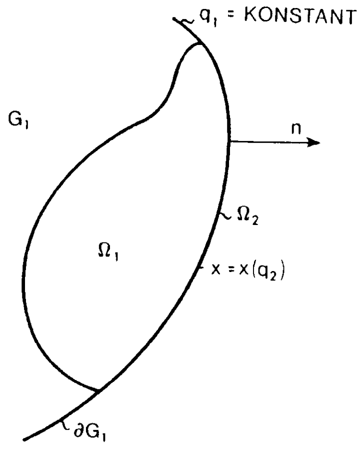

Fig. 2·9

Op die rand ∂G_1 is die tweedimensionale gebied G_1 in kontak met 'n eendimensionale randmedium met sy eie fisiese eienskappe. Vir die probleem is die volgende samestellingsvergelykings vir die materiaal=eienskappe van krag:

$$\gamma_1 = -K_1 \operatorname{grad} v_1$$

$$u_2 = c_2 \rho_2 v_2$$

$$\gamma_2 = -K_2 \partial_\omega v_2 = \psi_2.$$

Hierin is K_i = warmtegeleidingsvermoë en v_i = temperatuur $(i=1,2)$. Verder is c_2 = soortlike warmte van die randmateriaal, terwyl ρ_2 = lyndigtheid van massa van die randmateriaal. Aanvaar verder dat $\phi_2 \cdot n = 0$ (die rand=medium is geïsoleerd van die buitewêreld). Dan word die *veralgemeende randvoorwaarde* (2.33)

$$-K_1 \operatorname{grad} v_1 \cdot n = c_2 \rho_2 \partial_t v_2 - K_2 \partial_{\omega\omega} v_2 - b_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.52)$$

Vir perfekte termiese kontak is die samestellingsvergelyking van kontak

$$u_2 = c_2 \rho_2 v_2 = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}(c_1 \rho_1 v_1) = H(u_1). \qquad (2.53)$$

Die kombinasie van die behoudwet (2.52) en die samestellingsvergelyking van kontak (2.53) lewer direk die *dinamiese randvoorwaarde*

$$c_2\rho_2\partial_t v_1 + K_1\partial_n v_1 - K_2\partial_{\omega\omega} v_1 = b_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.54)$$

Soos vroeër vermeld bevat dié dinamiese randvoorwaarde normaalafgeleides én raaklynige afgeleides op $\partial G_1 \times (0,T)$.

Neumann-randvoorwaardes volg weer deur die randmedium termies onaktief te maak. Kies naamlik vir die randmedium die samestellingsvergelykings

$$K_2 = 0$$

$$\text{en } c_2\rho_2 = 0.$$

Fisies het die randmedium dan geen warmtegeleidingsvermoë en geen warmte=kapasiteit nie, wat moontlik is in die afwesigheid van 'n randmedium. Vergelyking (2.52) lewer dan die Neumann-randvoorwaarde

$$\partial_n v_1 = \frac{b_2}{K_1} = f \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (2.55)$$

Die Neumann-randvoorwaarde (2.55) behels dus die mediumvrye aanwending van hittebronne $b_2 = K_1 f$ op ∂G_1.

Dirichlet-randvoorwaardes volg uit (2.54) wanneer die randmedium as 'termies massief' aanvaar word. Stel naamlik in (2.54)

$$b_2 = c_2\rho_2 f$$

waar f die brondigtheid per eenheidwarmtekapasiteit van die randmedium is. Deur in (2.54) te deel met $c_2\rho_2$ en die limiet te neem as $c_2\rho_2 \to \infty$ (definisie van 'termies massief'), volg

$$\partial_t v_1 = f \text{ op } \partial G_1 \times (0,T), \text{ of}$$

$$v_1 = g \text{ op } \partial G_1 \times (0,T), \qquad (2.56)$$

waar die bron $b_2 = c_2\rho_2 f$ sodanig moet wees dat

$$\partial_t g(x,t) = f(x,t).$$

Anders as in die geval van die dik-randmodel (Vergelyking (2.20)) waar die Dirichlet-randvoorwaardes slegs tyd-afhanklik is, lewer die dun-rand=model volgens (2.56) Dirichlet-randvoorwaardes wat tyd- en ruimte-afhanklik is.

Voorbeeld 3 - driedimensionaal

Beskou die probleem van 'n onsaamdrukbare Newton-vloeistof met digtheid ρ_1 en viskositeitskoëffisiënt μ_1 wat in 'n geslote houer G_1 kan beweeg. Die vloeistof vul die houer volkome. Die wand ∂G_1 van die houer bestaan uit 'n dun elastiese membraan $G_2 \subset \partial G_1$ en 'n starre gedeelte $\partial G_1 \setminus G_2$. Die membraan waarvan die vergelyking in die verwysingskonfigurasie q_1 = konstant is, se elastiese eienskappe ewewydig aan die membraan is isotropies en lineêr. Die membraan kan geen kontakkragte op homself in die normale rigting uitoefen nie, sodat slegs spanningskomponente ewewydig aan die membraan ongelyk is aan nul [Kraus, 1967, bl 30-33]. Dit word aanvaar dat die beweging van die sisteem isotermies plaasvind. [Batra, 1974] ondersoek vir die probleem die stabiliteit van die rusposisie. Hier word verskillende randvoorwaardes geformuleer deur die samestellings= vergelykings van die randmedium te manipuleer.

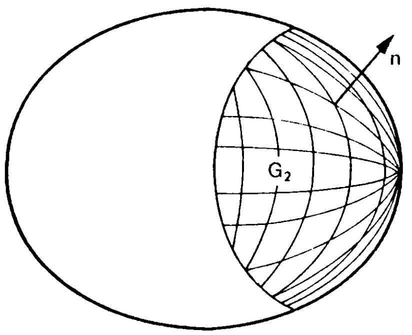

Fig. 2·10

Die veralgemeende randvoorwaarde (2.38) is

$$\gamma_1 \cdot n = \partial_t u_2 + \phi_2 \cdot n - b_2 + \mathrm{div}'\gamma_2 + F(\gamma_2) \text{ op } G_2 \times (0,T). \qquad (2.38^1)$$

Die ruimtelike koördinate van die definisiegebiede van die funksies in (2.38) is die veralgemeende ortogonale kromlynige koördinate (q, q_2, q_3).

Volgens [Malvern, 1969, bl 425, 635] geld vir 'n onsaamdrukbare Newton-vloeistof dat

$$\gamma_1 = -\tau_1 = p_1 I - \mu_1 [(\nabla v_1)^T + \nabla v_1] .$$

Die simbole hierin het die volgende betekenis: p_1 = termodinamiese druk; I = identiteitsmatriks; μ_1 = viskositeitskoëffisiënt; v_1 = snelheidsveld; $(\ )^T$ = getransponeerde matriks.
Vir die membraan is die momentumdigtheid

$$u_2 = \rho_2 v_2,$$

met ρ_2 = oppervlaktedigtheid van die membraan in die verwysingskonfigurasie en die snelheidsfunksie

$$v_2 = \partial_t w_2,$$

waar w_2 die verplasingsfunksie is van 'n punt op die membraan.

ϕ_2 is die kontakfunksie van die membraan met die 'buitewêreld', lug, wat as 'n ideale vloeistof beskou word. Indien p_o = atmosferiese druk, is

$$\phi_2 = -\tau_{lug} = p_o I,$$

volgens [Malvern, 1969, bl 297].

As gevolg van die feit dat die membraan slegs kontakkragte ewewydig met homself kan uitoefen, is die vorm van die kontakfunksie

$$\gamma_2 = -\tau^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^2_{22} & -\tau^2_{23} \\ 0 & -\tau^2_{32} & -\tau^2_{33} \end{bmatrix} .$$

Volgens [Malvern, 1969, bl 635, 640] geld vir die elastiese membraan wat homogeen en isotropies is in rigtings ewewydig aan die membraanvlak, dat

$$\tau^2 = \lambda_1 \mathrm{div}' w_2 I + \lambda_2 [(\nabla' w_2)^T + \nabla' w_2] . \qquad (2.57)$$

Hierin is λ_1 en λ_2, Lamé se konstantes, sodanig dat [Malvern, 1969, bl 280]

$$\lambda_\ell = \begin{Bmatrix} k_\ell E_2 & \text{vir } \tau^2_{ij} \text{ met } i,j \neq 1 \\ 0 & \text{vir } \tau^2_{ij} \text{ met } i \text{ of } j=1 \end{Bmatrix} \ell = 1,2.$$

Die konstantes k_ℓ is afhanklik van Poisson se verhouding en E_2 is Young se modulus vir die membraanmateriaal.

Die *veralgemeende randvoorwaarde* (2.38) word met behulp van die same= stellingsvergelykings hierbo

$$p_1 I\cdot n - \mu_1[(\nabla v_1)^T + \nabla v_1]\cdot n = \rho_2\partial_t v_2 + p_o I\cdot n - b_2$$
$$- \operatorname{div}'\{k_1E_2\operatorname{div}'w_2 I + k_2E_2[(\nabla' w_2)^T + \nabla' w_2]\}$$
$$+ F(-\tau^2) \text{ op } G_2 \times (0,T). \tag{2.58}$$

Die samestellingsvergelyking van kontak is die geen-glipvoorwaarde

$$u_2 = \rho_2 v_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_1 v_1) = \frac{\rho_2}{\rho_1}u_1 = H(u_1) \text{ op } G_2 \times (0,T)$$

$$\text{of } \partial_t w_2 = v_2 = v_1 \text{ op } G_2 \times (0,T).$$

Hieruit volg dat

$$w_2(x,t) = \int_0^t v_1(x,\tau)d\tau + w_2(x,0),\ x \in G_2.$$

Hierdie samestellingsvergelyking van kontak, tesame met die Behoudwet (2.58) lewer die *dinamiese randvoorwaarde*

$$p_1 I\cdot n - \mu_1[(\nabla v_1)^T + \nabla v_1]\cdot n = \rho_2\partial_t v_1 + p_o I\cdot n - b_2$$
$$- \operatorname{div}'\{k_1E_2\operatorname{div}'(\int_0^t v_1(x,\tau)d\tau + w_2(x,0))I$$
$$+ k_2E_2[(\nabla'(\int_0^t v_1(x,\tau)d\tau + w_2(x,0)))^T$$
$$+ \nabla'(\int_0^t v_1(x,\tau)d\tau + w_2(x,0))]\} + F(-\tau^2) \text{ op } G_2 \times (0,T). \tag{2.59}$$

Randvoorwaarde (2.59) bevat normaalafgeleides van v_1(byvoorbeeld in $\nabla v_1\cdot n$), tydafgeleides van v_1(in $\rho_2\partial_t v_1$), asook die geskiedenis van die raaklynige afgeleides van v_1 (byvoorbeeld in $\int_0^t\nabla' v_1(x,\tau)d\tau$). Die laasgenoemde interessante eienskap is die direkte gevolg van die wesenlike verskille tussen die spanningsmatrikse τ_1 en τ^2 van die interne en eksterne gebiede respektiewelik, naamlik

$$\tau_1 = \tau_1 \text{ (afgeleides van snelhede)}$$

$$\text{en } \tau^2 = \tau^2 \text{ (afgeleides van posisies).}$$

'n *Eenvoudiger* vorm van die *dinamiese randvoorwaarde* volg deur die membraan elasties onaktief te maak in dié sin dat dit geen weerstand bied teen afskuiwing of lineêre deformasie nie. Uit (2.59) met $E_2 = 0$ volg dan die dinamiese randvoorwaarde

$$\rho_2 \partial_t v_1 + \mu_1 [(\nabla v_1)^T + \nabla v_1] \cdot n = (p_1 - p_o) I \cdot n + b_2 \text{ op } G_2 \times (0,T). \qquad (2.60)$$

In (2.60) moet die ekstern-aangewende krag b_2 verhoed dat die slap membraan heeltemal padgee.

Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes volg uit (2.59) deur verder te aanvaar dat $\rho_2 \to 0$. 'n Slap, massalose membraan (wat fisies seker moeilik gerealiseer kan word) lewer dus die randvoorwaarde van traksie [Truesdell en Noll, 1965, bl 126]

$$-p_1 I \cdot n + \mu_1 [(\nabla v_1)^T + \nabla v_1] \cdot n = -p_o I \cdot n + b_2 \text{ op } G_2 \times (0,T). \qquad (2.61)$$

Dirichlet-randvoorwaardes volg deur in (2.59) te aanvaar dat die membraan massief is ($\rho_2 \to \infty$), maar nie star nie (E_2 begrens). Aanvaar verder dat

$$b_2 = \rho_2 f$$

waar f die krag per eenheidmassa is wat ekstern aangewend word op die membraan. Deur in (2.59) met ρ_2 te deel, volg dan die behoudwet

$$\partial_t v_1 = f_2 \text{ op } G_2 \times (0,T), \text{ of}$$

$$v_1 = g \text{ op } G_2 \times (0,T). \qquad (2.62)$$

Vergelyking (2.62) is die bekende randvoorwaarde van posisie [Truesdell en Noll, 1965, bl 126].

Indien geen eksterne membraankragte aangewend word nie, volg uit (2.62)

$$v_1 = 0.$$

Hierdie laaste Dirichlet-randvoorwaarde kan ook op 'n ander wyse verkry word. Stel naamlik in die Samestellingsvergelyking (2.57) $E_2 \to \infty$ (dit wil sê $\lambda_1 \to \infty$ en $\lambda_2 \to \infty$). Indien τ^2 begrens is, moet $\mathrm{div}' w_2 = 0$ en $\nabla' w_2 = 0$. Dus is

$$w_2(x,t) = W_2(t) \text{ op } G_2 \times (0,T).$$

Indien die geheel onelastiese (starre) membraan in kontak is met die starre statiese $\partial G_1 \setminus G_2$, is

$$w_2(x,t) = 0 \text{ op } G_2 \times (0,T),$$

sodat uit die samestellingsvergelyking van kontak

$$v_1 = v_2 \text{ op } G_2 \times (0,T)$$

volg dat

$$v_1 = 0 \text{ op } G_2 \times (0,T).$$

HOOFSTUK 3

RANDMODELLE VIR GEBIEDE MET 'N BEWEGENDE RAND

3.1 INLEIDING

In Hoofstuk 2 is aanvaar dat die rand ∂G_1 van die gebied G_1 staties is. Randmodelle is vir sulke statiese gebiede geformuleer en toegepas om sin=volle randvoorwaardes vir verskeie probleemvoorbeelde af te lei.

Daar bestaan in die literatuur probleme waarvoor ∂G_1 nie stasionêr is nie. Vir sulke probleme is die posisie van die rand $\partial G_1(t)$ 'n deel van die oplossing van die probleem.

Die klassieke voorbeeld van 'n probleem waar sprake is van 'n bewegende rand, is die probleem van ysvorming of -smelting. Hierdie probleem is skynbaar vir die eerste keer gedokumenteer deur [Stefan, 1891] in 'n poging om die dikte van die Noordpool se yskap met behulp van 'n wiskun=dige model te ontleed. Sedertdien staan fase-oorgangsprobleme bekend as Stefan-probleme.

Hoewel spesifieke fase-oorgangsprobleme in baie tydskrifartikels bespreek is, het die eerste omvattende werk oor Stefan-probleme eers in 1971 verskyn [Rubinstein, 1971]. Daarna was [Ockendon en Hodgkins, 1975] die redakteurs van 'n volgende werk, die verrigtinge van 'n konferensie oor bewegende-randprobleme. Laasgenoemde werk bevat voorbeelde van bewegende-randprobleme uit die staalsmelt- en glasindustrie, asook sweis-, chemiese, biologiese en astrofisiese probleme en 'n magmaprobleem uit die geofisika. Ander werke in verband met fase-oorgange en die gepaardgaande bewegende rande is byvoorbeeld dié van [Hill en Kotlow, 1972.1 en 1972.2] en [Friedman, 1976]. Normaalweg word die wisselwerkings tussen die interne en eksterne gebiede op die bewegende rand $\partial G_1(t)$ vir fase-oorgangsprobleme deeglik in ag geneem. [Slattery, 1967] bespreek byvoorbeeld die formulering van algemene behoudwette by tussenvlakke tussen verskillende fases van dieselfde materiaal, terwyl [Whitaker, 1977] behoudwette formuleer vir die fase-tussenvlakke in 'n drogingsprobleem.

Bewegende-randprobleme wat nie met fase-oorgange te doen het nie, kom ook voor. [Alt, 1977] bestudeer so 'n grondwaterprobleem, [Friedman en Jensen, 1977] doen werk in verband met die nat gebied in 'n grond=dammwal, terwyl [Kim en Baird, 1976] 'n probleem analiseer waarin die posisie van chemiese reaksiefronte bepaal moet word.

By vloeistofbeweging waar sprake is van 'n vrye oppervlak kan die probleme ook as bewegende-randprobleme beskou word [John, 1949].

In Hoofstuk 2 is probleme waar sprake is van bewegende (materiële) gebiede geformuleer in terme van vaste verwysingsgebiede en is randvoorwaardes gegee op die vaste rand van die verwysingsgebied. Sulke probleme kan ook geformuleer word as bewegende-randprobleme deur die digtheidsfunksies te definieer in terme van ruimtelike koördinate en nie in terme van verwysings=koördinate nie. Dit kom neer op 'n werklik suiwer veldteoretiese model=lering van sulke probleme. 'n Komplikasie van só 'n formulering is egter dat parameters van die probleem tyd- en ruimtelikafhanklik word, anders as wat die geval is met 'n formulering in terme van verwysingskoördinate.

In hierdie hoofstuk word die wisselwerkings tussen 'n interne en eksterne gebied wat deur 'n bewegende rand geskei word, gebruik om randvoorwaardes op die bewegende rand te formuleer. Dit is steeds in ooreenstemming met die basiese randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2. Soos in Hoofstuk 2 word aanvaar dat 'n dik- en dun-randmodel gebruik kan word ten einde veralgemeende randvoorwaardes te formuleer. Spesifieke randvoorwaardes volg weer deur die basiese behoudwette op die bewegende rand te kombineer met spesifieke samestellingsvergelykings vir die randmedium en sy kontak met die interne gebied.

Die notasies, afsprake en definisies ten opsigte van gebiede, onderskrifte en digtheidsfunksies is steeds in hierdie hoofstuk van krag. Die wesenlike verskil is dat $G_i = G_i(t)$ (vir i=1,2) en $\partial G_1 = \partial G_1(t)$.

3.2 DIE DIK-RANDMODEL

3.2.1 Eendimensionaal

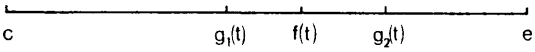

Fig. 3·1

Die interne gebied is $G_1(t) = (c,f(t))$ en die eksterne gebied is $G_2(t) = (f(t),e)$ vir die geval van 'n kontinue medium wat saam met sy randmedium as eendimensionaal gemodelleer word. Die gebruiklike behoud=wette van Paragraaf 2.3.3 geld vir $G_i \times (0,T)$, $i=1,2$.

Die moontlike randvoorwaardes by f(t) volg deur die behoudwet vir

$$(f(t) - \varepsilon_1(t),\ f(t) + \varepsilon_2(t)) = (g_1(t),\ g_2(t))$$

te formuleer. Met behulp van die digtheidsfunksies gedefinieer in Paragraaf 2.3.2 en 2.6.1 is dié behoudwet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\int_{g_1(t)}^{f(t)} u_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} u_2(x,t)dx] &= (\phi_1(g_1(t),t) - \phi_2(g_2(t),t)) \\ &+ (\int_{g_1(t)}^{f(t)} b_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} b_2(x,t)dx - \beta_1(g_1(t),t) + \beta_2(g_2(t),t) \\ &+ B(f(t),t)) + (u_2(g_2(t),t)\dot{g}_2(t) - u_1(g_1(t),t)\dot{g}_1(t)). \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Die laaste twee terme verteenwoordig konveksieterme as gevolg waarvan die entiteite in $(g_1(t),f(t))$ en $(f(t),g_2(t))$ verander. Die konveksie=terme is die direkte gevolg van die feit dat die punte $g_1(t)$ en $g_2(t)$ bewegende randpunte is van die gebied $(g_1(t),g_2(t))$ waarvoor die gekom=bineerde Behoudwet (3.1) geld. Dit is welbekend [Courant en John, 1974, bl 77] dat die linkerkant van (3.1)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[\int_{g_1(t)}^{f(t)} u_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} u_2(x,t)dx] \\ &= \int_{g_1(t)}^{f(t)} \partial_t u_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} \partial_t u_2(x,t)dx \\ &\quad + u_1(f(t),t)\dot{f}(t) - u_1(g_1(t),t)\dot{g}_1(t) \\ &\quad + u_2(g_2(t),t)\dot{g}_2(t) - u_2(f(t),t)\dot{f}(t), \qquad (3.2)\end{aligned}$$

mits u_i en $\partial_t u_i$ kontinu is in oop intervalle wat $(g_1(t),f(t))$ en $(f(t),g_2(t))$ bevat en f en g_i differensieerbaar is.

Kombinasie van (3.1) en (3.2) lewer

$$\int_{g_1(t)}^{f(t)} \partial_t u_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} \partial_t u_2(x,t)dx = \gamma_1(g_1(t),t) - \gamma_2(g_2(t),t)$$
$$+ \int_{g_1(t)}^{f(t)} b_1(x,t)dx + \int_{f(t)}^{g_2(t)} b_2(x,t)dx + B(f(t),t)$$
$$- u_1(f(t),t)\dot{f}(t) + u_2(f(t),t)\dot{f}(t)). \qquad (3.3)$$

Laat in (3.3) $g_i(t) \to f(t)$ vir i=1,2. Indien $\partial_t u_i$ en b_i lokaal-integreer= baar is, lewer (3.3) die koppelvoorwaarde

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t) = \gamma_2(f(t),t) - u_2(f(t),t)\dot{f}(t) - B(f(t),t).$$

(Die afspraak in verband met limiete in Paragraaf 1.3.4 moet in gedagte gehou word.)

Volgens die basiese randvoorwaardepostulaat in Paragraaf 2.2 en die Behoudwet (2.3) vir eendimensionale gebiede is die mees algemene vorm van die randvoorwaarde by f(t)

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t)$$
$$= \gamma_2(f(t),t) - u_2(f(t),t)\dot{f}(t) - B(f(t),t), \ t \in (0,T) \qquad (3.4a)$$

$$\text{met} \quad \partial_t u_2 + \partial_x \gamma_2 = b_2 \text{ in } G_2 \times (0,T). \qquad (3.4b)$$

Die randvoorwaarde kan ook as 'n enkele vergelyking geskryf word. Neem naamlik in (3.3) die limiet as $g_1(t) \to f(t)$ en laat $g_2(t) = e(t)$. Dan is

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t)$$
$$= \gamma_2(e(t),t) - u_2(f(t),t)\dot{f}(t) - B(f(t),t)$$
$$+ \int_{f(t)}^{e(t)} \partial_t u_2(x,t)dx - \int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx, \ t \in (0,T). \qquad (3.5)$$

'n Alternatiewe vorm wat die konveksieterm by e(t) eksplisiet bevat, volg deur die gedeelte van (3.2) wat op $(f(t),g_2(t))$ betrekking het, met (3.5) te kombineer. Die randvoorwaarde is dan

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t)$$

$$= \gamma_2(e(t),t) - u_2(e(t),t)\dot{e}(t) - B(f(t),t)$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{e(t)} u_2(x,t)dx - \int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx, \quad t \in (0,T). \qquad (3.6)$$

Randvoorwaardes by f(t) kan vir elke fisiese situasie meer eksplisiet volg uit (3.4), (3.5) of (3.6) deur hierdie algemene behoudwette met die spesifieke samestellingsvergelykings te kombineer.

3.2.2 Twee- en driedimensionaal

Laat $G_1 \subset R^k$ en $G_2 \subset R^k$ vir k = 2 of 3 die interne en eksterne gebiede respektiewelik wees. Die bewegende rand van die interne gebied is $\partial G_1(t)$.

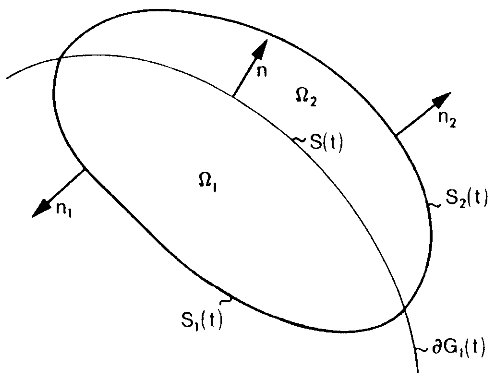

Fig. 3·2

In ooreenstemming met [Truesdell en Toupin, 1960, bl 498] is

$$\partial G_1(t) = \{x | x = f(q,t)\}$$

q is vir tweedimensionale gebiede ($\partial G_1(t)$ 'n lyn) 'n lynparameter wat punte op $\partial G_1(t)$ identifiseer. Vir driedimensionale gebiede ($\partial G_1(t)$ 'n oppervlak) is q 'n paar oppervlakparameters wat punte op $\partial G_1(t)$

identifiseer. q hoef nie geassosieer te wees met materiële deeltjies op $\partial G_1(t)$ nie.

Aanvaar dat die uitwaartse eenheidsnormaalvektor n op $\partial G_1(t)$ oral goed gedefinieer is. Indien $\partial_t f$ die snelheid is van 'n punt $f \in \partial G_1(t)$, is volgens [Truesdell en Toupin, 1960, bl 499] die normaalkomponent van die snelheid

$$\partial_t f \cdot n$$

van alle punte op $\partial G_1(t)$ dieselfde vir alle moontlike parametriserings f van $\partial G_1(t)$.

Laat $\Omega_1 \subset G_1$ en $\Omega_2 \subset G_2$ twee aanliggende gebiede wees, soos gedefinieer in Paragraaf 2.6.2. Dan is $\partial\Omega_1(t) = S_1(t) \cup S(t)$ en $\partial\Omega_2(t) = S_2(t) \cup S(t)$ waar $S(t) \subset \partial G_1(t)$. Vir i=1,2 is

$$S_i(t) = \{x | x = f_i(q_i, t)\}$$

met f_i 'n parametrisering van $S_i(t)$.

Die normaalkomponent van die snelheid $\partial_t f_i$ van 'n punt $f_i \in S_i(t)$ is

$$\partial_t f_i \cdot n_i$$

waar aanvaar word dat die uitwaartse eenheidsnormaalvektor n_i op S_i oral goed gedefinieer is. Soos vir die geval van $\partial G_1(t)$, geld ook vir $S_i(t)$ dat $\partial_t f_i \cdot n_i$ dieselfde is vir alle moontlike parametriserings f_i van $S_i(t)$.

Digtheidsfunksies is gedefinieer in $G_i \times (0,T)$ en op $\partial G_1 \times (0,T)$ soos in Paragraaf 2.3.2 en Paragraaf 2.6.2 respektiewelik. Met behulp van die digtheidsfunksies kan die behoudwet vir $\Omega_1 \cup S \cup \Omega_2$ nou neergeskryf word. Dit lui

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\textstyle\int_{\Omega_1} u_1 dx + \int_{\Omega_2} u_2 dx] &= (-\textstyle\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 dS - \int_{S_2} \phi_2 \cdot n_2 dS) \\ &+ (\textstyle\int_{S_1} \tau_1 \cdot n_1 dS + \int_{S_2} \tau_2 \cdot n_2 dS + \int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{\Omega_2} b_2 dx + \int_S B dS) \\ &+ (\textstyle\int_{S_1} u_1 \partial_t f_1 \cdot n_1 dS + \int_{S_2} u_2 \partial_t f_2 \cdot n_2 dS).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Die verskil tussen die Behoudwet (3.7) vir bewegende gebiede en die Behoudwet (2.9) vir stasionêre gebiede is tweërlei. Eerstens is die integrasiegebiede in (3.7) tydafhanklik en tweedens bevat (3.7) ook die laaste groep van twee konveksieterme wat die vloed oor S_1 en S_2 as gevolg van hulle beweging beskryf.

Volgens die transportstelling vir die bewegende gebied $\Omega_1 \cup S \cup \Omega_2$ [Slattery, 1972, bl 22-23] is die linkerkant van (3.7)

$$\frac{d}{dt}[\int_{\Omega_1} u_1 dx + \int_{\Omega_2} u_2 dx] = \int_{\Omega_1} \partial_t u_1 dx + \int_{\Omega_2} \partial_t u_2 dx$$

$$+ \int_{S_1} u_1 \partial_t f_1 \cdot n_1 dS + \int_S u_1 \partial_t f \cdot n dS - \int_S u_2 \partial_t f \cdot n dS + \int_{S_2} u_2 \partial_t f_2 \cdot n_2 dS. \quad (3.8)$$

Deur die Transportstelling (3.8) met die Behoudwet (3.7) te kombineer, volg 'n alternatiewe vorm van die behoudwet, naamlik

$$\int_{\Omega_1} \partial_t u_1 dx + \int_{\Omega_2} \partial_t u_2 dx = - \int_{S_1} \gamma_1 \cdot n_1 dS - \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS$$

$$- \int_S u_1 \partial_t f \cdot n dS + \int_S u_2 \partial_t f \cdot n dS + \int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{\Omega_2} b_2 dx + \int_S B dS. \quad (3.9)$$

Aanvaar in (3.9) dat $S_1, S_2 \to S$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$ en $n_2 \to n$. Dan is

$$\int_S [\gamma_1 \cdot n - \gamma_2 \cdot n - u_1 \partial_t f \cdot n + u_2 \partial_t f \cdot n + B] dS = 0,$$

mits $\partial_t u_i$ en b_i lokaal-integreerbaar is. (Die afspraak in verband met limiete in Paragraaf 1.3.4 is hier van toepassing.) S is willekeurig en indien die integrand lokaal-integreerbaar is, lewer hierdie laaste vergelyking die bekende sprongvoorwaarde [Truesdell en Toupin, 1960, bl 527]

$$\gamma_1 \cdot n - u_1 \partial_t f \cdot n = \gamma_2 \cdot n - u_2 \partial_t f \cdot n - B \text{ op } \partial G_1 \times (0,T).$$

Met die dik-randmodel is die veralgemeende randvoorwaarde dus met in= agneming van (2.5)

$$\gamma_1 \cdot n - u_1 \partial_t f \cdot n = \gamma_2 \cdot n - u_2 \partial_t f \cdot n - B \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \quad (3.10a)$$

$$\text{met } \partial_t u_2 + \text{div}\gamma_2 = b_2 \text{ in } G_2(t) \times (0,T). \quad (3.10b)$$

In plaas van die twee Behoudwette (3.10), kan die veralgemeende rand= voorwaarde ook as 'n enkele vergelyking geskryf word. Neem weer die limiet as $S_1 \to S$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$. Uit die Behoudwet (3.9) volg dan die veralgemeende randvoorwaarde vir 'n willekeurige $S \subset \partial G_1(t)$ in die vorm

$$\int_S \gamma_1 \cdot n dS - \int_S u_1 \partial_t f \cdot n dS = \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_S u_2 \partial_t f \cdot n dS$$
$$+ \int_{\Omega_2} \partial_t u_2 dx - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS \text{ vir } t \in (0,T). \tag{3.11}$$

'n Alternatiewe vorm vir (3.11) wat die konveksieterm by S_2 eksplisiet bevat, volg deur die gedeelte van (3.8) wat op Ω_2 betrekking het te kombineer met (3.11). Dan is

$$\int_S \gamma_1 \cdot n dS - \int_S u_1 \partial_t f \cdot n dS = \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{S_2} u_2 \partial_t f_2 \cdot n_2 dS$$
$$+ \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dx - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS \text{ vir } t \in (0,T)$$
$$\text{en 'n willekeurige } S \subset \partial G_1(t). \tag{3.12}$$

Soos in vorige gevalle kan spesifieke randvoorwaardes volg uit (3.10), (3.11) of (3.12) deur spesifieke samestellingsvergelykings aan die rand= medium toe te sê.

3.3 MOONTLIKE RANDVOORWAARDES VOORTVLOEIEND UIT DIE DIK-RANDMODELLE

Vir die eendimensionale probleem is die veralgemeende randvoorwaardes wat volg uit die dik-randmodel, die Voorwaardes (3.4), (3.5) of (3.6). Vir die twee- en driedimensionale probleme is die veralgemeende randvoorwaardes die Behoudwette (3.10), (3.11) of (3.12). Soos in Paragraaf 2.7.2 genoem, is hierdie veralgemeende randvoorwaardes dinamiese randvoorwaardes in die breë sin van die woord, aangesien hulle die dinamika van die randmedium en sy wisselwerkings met die interne gebied ten volle in ag neem. Probleme van hierdie soort word bespreek deur [Kim en Baird, 1976], [Hill en Kotlow, 1972.1 en 1972.2] en [Whitaker, 1977].

Uit hierdie veralgemeende randvoorwaardes word sommige meer spesifieke randvoorwaardes nou afgelei. Dit sal blyk dat die effek van die bewegende rand sodanig is dat klassieke randvoorwaardes (soos byvoorbeeld Neumann- en Dirichlet-randvoorwaardes) moeilik realiseerbaar is. Hierdie feit word verder onderstreep in die voorbeelde.

(a) Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes

Vir hierdie randvoorwaardes word aanvaar dat die randmedium onaktief is ten opsigte van die digtheidsfunksies γ_2 en u_2. Vir die eendimensionale geval beteken dit dat

$$\gamma_2(f(t),t) = 0 \text{ en } u_2(f(t),t) = 0 \text{ vir } t \in (0,T). \tag{3.13}$$

Vir die meerdimensionale geval is

$$\gamma_2 = 0 \text{ en } u_2 = 0 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.14}$$

Met behulp van (3.13) en (3.14) volg uit (3.4a) en (3.10a) die veralge= meende Neumann-randvoorwaardes vir die een- en meerdimensionale gevalle respektiewelik. Hulle lui

$$\gamma_1(f(t),t) = u_1(f(t),t)\dot{f}(t) - B(f(t),t), \; t \in (0,T) \tag{3.15}$$

vir die eendimensionale geval, en

$$\gamma_1 \cdot n = u_1 \partial_t f \cdot n - B \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \tag{3.16}$$

vir die meerdimensionale geval.

Probleme van hierdie aard word bespreek deur [Hill en Kotlow, 1972.1] en deur [Friedman, 1976].

Klassieke Neumann-randvoorwaardes, soos in (2.13) vir die geval van 'n stasionêre randmedium, sal uit (3.15) en (3.16) volg indien die randbronne respektiewelik die vorms

$$B(f(t),t) = u_1(f(t),t)\dot{f}(t) - h(t) \text{ vir } t \in (0,T) \tag{3.17}$$

$$\text{en } \; B = u_1 \partial_t f \cdot n - h \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \tag{3.18}$$

het. Dit beteken dat 'n sensor op die rand $\partial G_1(t)$ wat die digtheids= funksie u_1 en die spoed van die rand waarneem, gekoppel moet wees aan die beheersentrum van die randbronmeganisme.

(b) Dinamiese randvoorwaardes

Soos in Paragraaf 2.7.2 word hier ook 'n fisiese eienskap aan die rand=

medium toegeken wat sodanig is, dat

$$u_2(x,t) = U_2(t) \text{ vir alle } x \in G_2. \tag{3.19}$$

Verder word 'n samestellingsvergelyking van kontak

$$u_2 = H(u_1) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \tag{3.20}$$

aanvaar. Indien

$$\ell(t) = e(t) - f(t)$$

reduseer die Behoudwet (3.5) vir die eendimensionale probleem tot

$$\begin{aligned} &\gamma_1(f(t),t) - \ell(t)\partial_t H(u_1)(f(t),t) \\ &+ [H(u_1)(f(t),t) - u_1(f(t),t)]\dot{f}(t) \\ &= \gamma_2(e(t),t) - B(f(t),t) - \int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx, \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Vir die meerdimensionale geval word aanvaar dat

$$\int_{\Omega_2} dx = V_2(t) = A\ell(t) \text{ waar } A = \int_S dS \tag{3.22}$$

en $\ell(t)$, soos in Paragraaf 2.7.2, die tipiese lengte van Ω_2 is. In die lig van (3.19), (3.20) en (3.22) word die Behoudwet (3.11), soortgelyk aan (2.18) in Paragraaf 2.7.2,

$$\begin{aligned} &\int_S [\gamma_1 \cdot n - \ell(t)\partial_t H(u_1) + (H(u_1) - u_1)\partial_t f \cdot n]\, dS \\ &= \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS \text{ vir } t \in (0,T) \\ &\text{en 'n willekeurige } S \subset \partial G_1(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Indien γ_1 ruimtelike afgeleides van u_1 bevat, is (3.21) en (3.23) dinamiese randvoorwaardes soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2. Alterna=tiewe vorme vir (3.21) en (3.23) kan uit (3.6) en (3.12) afgelei word.

(c) Dirichlet-randvoorwaardes

Stel in (3.21)

$$\int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx = \ell(t)\bar{b}_2(t)$$

en in (3.23)

$$\int_{\Omega_2} b_2(x,t)dx = V_2(t)\bar{b}_2(t) = A\ell(t)\bar{b}_2(t).$$

Aanvaar in (3.21) en (3.23) dat terme wat $\ell(t)$ nie bevat nie, begrens is. Deel (3.21) en (3.23) met $\ell(t)$ en laat $\ell(t) \to \infty$. Met behulp van die uitdrukkings hierbo reduseer (3.21) en (3.23) albei tot die behoudwet

$$\partial_t H(u_1) = \bar{b}_2 \text{ op } \partial G_1 \times (0,T).$$

Die impuls van hierdie behoudwet lewer, soos in Paragraaf 2.7.2, die Dirichlet-randvoorwaarde

$$H(u_1) = \int_0^t \bar{b}_2 d\tau + U_2(0) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T). \qquad (3.24)$$

Soos vir die geval van 'n stasionêre rand in Paragraaf 2.7.2 kan Dirichlet-randvoorwaardes dus herlei word uit die behoudwet vir 'n 'enorme' randmedium ($\ell(t) \to \infty$) met die een of ander 'supereienskap' (Vergelyking (3.19)). Die funksie H (Vergelyking (3.20)) moet egter sodanig wees dat alle bewerkings om (3.24) af te lei, wel uitvoerbaar is. In Voorbeeld 1 word aangetoon dat dit vir fase-oorgangsprobleme onmoontlik is om Dirichlet-randvoorwaardes te vind op die wyse soos hierbo aangedui is.

Voorbeeld 1 - eendimensionaal

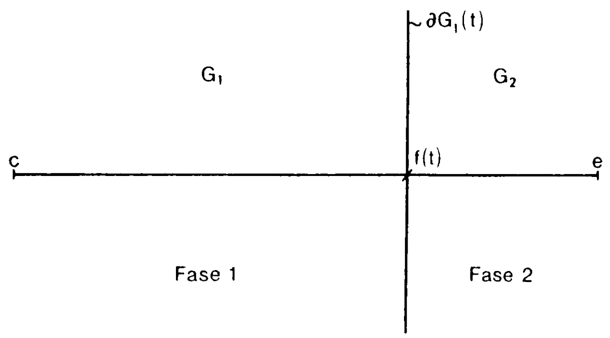

Fig. 3·3

Beskou die probleem van 'n stof wat 'n faseverandering ondergaan. Fase 1 is bevat in die interne gebied $(c,f(t))$ en fase 2 is bevat in die eksterne gebied $(f(t), e(t))$. Daar word aanvaar dat die faseverandering plaasvind sonder volumeverandering. Aanvaar dat latente warmte vrygestel word wan=neer die materiaal oorgaan vanaf fase 2 na fase 1.

Die proses wat gemodelleer moet word is 'n proses van warmtegeleiding in drie dimensies. Daar word egter aanvaar dat die proses sodanig simme=tries is, dat alle velde slegs van een ruimtelike koördinaat, x, en tyd t afhanklik is.

Vir i=1,2 is die volgende samestellingsvergelykings van krag:

$$u_i = c_i\rho v_i;\ \gamma_i = -K_i\partial_x v_i;\ B = L\rho\dot{f}(t) + \mathcal{B}.$$

Hierin is c_i = soortlike warmte; ρ = massadigtheid van albei fases; v_i = temperatuur; K_i = warmtegeleidingsvermoë; L = latente warmte van smelting of verdamping; $\mathcal{B}$ = ekstern-aangewende bron op $\partial G_1(t)$.

Die mees *algemene randvoorwaarde* vir die probleem volg uit (3.4) as

$$\begin{aligned} &K_1\partial_x v_1(f(t),t) + c_1\rho v_1(f(t),t)\dot{f}(t) \\ &= K_2\partial_x v_2(f(t),t) + c_2\rho v_2(f(t),t)\dot{f}(t) \\ &+ L\rho\dot{f}(t) + \mathcal{B},\ t \in (0,T) \end{aligned} \tag{3.25a}$$

$$\text{met}\quad c_2\rho\partial_t v_2 - K_2\partial_{xx}v_2 = b_2 \text{ in } G_2 \times (0,T). \tag{3.25b}$$

Die voorwaardes in (3.25) word nie altyd so gebruik as behoudwetformu=lering vir die randvoorwaardes by fase-oorgangsprobleme nie. So byvoor=beeld aanvaar [Whitaker, 1977] dat die term van latente warmte, $L\rho\dot{f}(t)$, weglaatbaar klein is in sy model vir die uitdroging van 'n poreuse medium. Deur hierdie term by hulle model vir 'n oseaanrif in berekening te bring, kon [Parker en Oldenburg, 1973] sekere natuurverskynsels beskryf waar ander modelle vir die proses misluk het. Laasgenoemde outeurs laat egter, soos [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 284], die terme $c_i\rho v_i(f(t),t)\dot{f}(t)$ in (3.25a) buite rekening. Met die samestellingsvergelyking van kontak

$$v_i(f(t),t) = V_o = \text{konstante temperatuur van die faseverandering} \tag{3.26}$$

sou (3.25a) wel in die vorm

$$K_1\partial_x v_1(f(t),t) - K_2\partial_x v_2(f(t),t) = L'\rho\dot{f}(t) + B, \tag{3.27}$$

$$\text{met } L' = L + (c_2 - c_1)V_o$$

geskryf kan word. L' kan beskou word as 'n aangepaste konstante van latente warmte. Vergelyking (3.27) is die vorm van die Stefan-randvoorwaarde soos gegee deur [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 284].

'n *Veralgemeende Neumann-randvoorwaarde* volg uit (3.25a) deur te aanvaar dat die randmedium nie warmte gelei nie. Dit is die geval indien

$$K_2 = 0 \text{ of } \partial_x v_2 = 0.$$

In só 'n geval volg uit (3.25a) met die Voorwaarde (3.26) dat

$$K_1\partial_x v_1(f(t),t) = L'\rho\dot{f}(t) + B. \tag{3.28}$$

Vergelyking (3.28) is nie die klassieke Neumann-randvoorwaarde nie. Soos vroeër in die paragraaf beskryf, kan die klassieke Neumann-randvoorwaardes slegs verkry word deur die aanwending van 'n randbron

$$B = h - L'\rho\dot{f}(t).$$

Voorbeelde van (3.28) is die werk van [Parker en Oldenburg, 1973] en van [Oldenburg, 1975]. Hulle aanvaar in hulle wiskundige model dat die astenosfeer (magma-gedeelte van die aardbol) 'n isotermiese vloeistof is waarvan die temperatuur gelyk is aan die temperatuur van stolling.

Dinamiese randvoorwaardes vir die fase-oorgangsprobleem volg deur te aanvaar dat die randmedium 'n supergeleier is, dit wil sê

$$K_2 \to \infty.$$

Indien die vloed in die randmedium

$$-K_2\partial_x v_2(x,t)$$

begrens is, moet

$$\partial_x v_2(x,t) = 0,$$

dit wil sê

$$v_2(x,t) = V_2(t) \text{ in } (f(t),e(t)) \times (0,T).$$

Volgens (3.21) is die dinamiese randvoorwaarde in dié geval

$$\begin{aligned}&-K_1\partial_x v_1(f(t),t) - \ell(t)\partial_t H(u_1)(f(t),t)\\ &+ [H(u_1)(f(t),t) - c_1\rho v_1(f(t),t)]\dot{f}(t)\\ &= \gamma_2(e(t),t) - B(f(t),t) - L\rho\dot{f}(t)\\ &- \int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx \text{ vir } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Aangesien $u_1 = c_1\rho v_1$, bevat (3.29) oënskynlik tyd- en ruimtelike afge=leides van v_1. Die vorm van die samestellingsvergelyking van kontak

$$c_2\rho v_2 = H(c_1\rho v_1) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T)$$

moet egter eers van naderby beskou word. In fase-oorgangsprobleme word hiervoor gewoonlik die vergelyking van perfekte termiese kontak (3.26) aanvaar. In daardie geval is

$$\partial_t H(u_1)(f(t),t) = \partial_t(c_2\rho V_2(t)) = \partial_t(c_2\rho V_o) = 0,$$

sodat die verwagte dinamiese randvoorwaarde (3.29) ekwivalent is aan die veralgemeende Neumann-randvoorwaarde (3.28).

Vir nie-perfekte termiese kontak kan wel 'n dinamiese randvoorwaarde verkry word. Laat byvoorbeeld

$$V_2(t) \neq V_o,$$

en aanvaar die vergelyking van lineêre hitteoordrag by die oppervlakte $\partial G(t)$ as samestellingsvergelyking van kontak [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 18]. Vir dié geval is

$$v_2(f(t),t) = V_2(t) = v_1(f(t),t) + \frac{K_1}{\alpha}\partial_x v_1(f(t),t)$$

op $\partial G_1(t) \times (0,T)$, met $v_1(f(t),t) = V_o$.

Substitusie hiervan in (3.29) lewer die dinamiese randvoorwaarde

$$\begin{aligned}
&- K_1\partial_x v_1(f(t),t) - c_2\rho\ell(t)\frac{K_1}{\alpha}\partial_t(\partial_x v_1(f(t),t)) \\
&+ [c_2\rho(V_o + \frac{K_1}{\alpha}\partial_x v_1(f(t),t)) - c_1\rho V_o]\dot{f}(t) \\
&= -L\rho\dot{f}(t) - B(f(t),t) + \gamma_2(e(t),t) \\
&- \int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx \text{ vir } t \in (0,T).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(Let op dat die operatore ∂_t en ∂_x in die tweede term nie verwisselbaar is nie, aangesien $v_1(f(t),t) = V_o$.)

Dirichlet-randvoorwaardes kan nie vir die fase-oorgangsprobleem onder bespreking gerealiseer word nie. Die rede hiervoor lê enersyds by die aanname dat die fase-oorgang plaasvind by 'n konstante temperatuur en andersyds in die vorm van die samestellingsvergelyking van kontak.

Vir die geval van perfekte termiese kontak tussen die supergeleidende rand is reeds aangetoon dat (3.29) reduseer tot 'n veralgemeende Neumann-randvoorwaarde, aangesien die fase-oorgang plaasvind by 'n konstante temperatuur V_o. Dirichlet-randvoorwaardes kan dus nie soos gebruiklik uit die dinamiese randvoorwaardes (3.29) afgelei word nie. Die same=stellingsvergelyking van kontak

$$v_1(f(t),t) = V_o \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T)$$

wat in so 'n geval saam met die Behoudwet (3.29) (sonder die tweede term) as randvoorwaarde optree, kan beskou word as 'n Dirichlet-komponent van die randvoorwaarde.

Vir die geval van nie-perfekte termiese kontak word in (3.29) aanvaar dat

$$\int_{f(t)}^{e(t)} b_2(x,t)dx = \ell(t)\bar{b}_2(t).$$

Vir só 'n geval is

$$v_2(x,t) = V_2(t) \neq V_o.$$

Deur in (3.29) te deel met $\ell(t)$ en aan te neem dat die terme van (3.29) wat $\ell(t)$ nie eksplisiet bevat nie, begrens is indien $\ell(t) \to \infty$, word die asimptotiese vorm van die Behoudwet (3.29)

$$c_2 \rho \dot{V}_2(t) = \bar{b}_2(t), \ t \in (0,T)$$

gevind. Die impuls van hierdie behoudwet lewer

$$V_2(t) = h(t), \ t \in (0,T). \tag{3.31}$$

Vir nie-perfekte termiese kontak het die samestellingsvergelyking van kontak gewoonlik die vorm

$$V_2(t) = v_2(f(t),t) = H(v_1, \partial_x v_1)(f(t),t) = h(t). \tag{3.32}$$

(Kyk na Voorbeeld 2 van Paragraaf 2.7.2 vir moontlike vorme van H.)

Waar (3.31) oënskynlik 'n Dirichlet-randvoorwaarde is, is dit duidelik uit (3.32) dat dit in werklikheid weer 'n veralgemeende Neumann-randvoor= waarde is.

<u>Voorbeeld 2 - driedimensionaal</u>

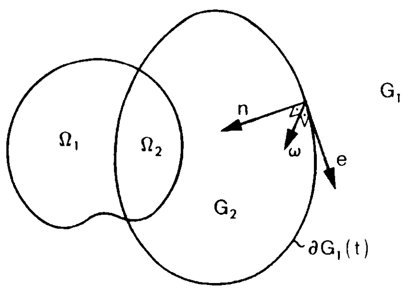

Fig. 3·4

In hierdie voorbeeld word die beweging van 'n geslote hoeveelheid van 'n vervormbare kontinue medium deur 'n vloeistof gemodelleer. $G_1(t)$ is die onbegrensde gebied ingeneem deur die vloeistof, terwyl die enkelvoudig-samehangende gebied $G_2(t)$ ingeneem word deur die vervormbare medium. Die twee media vermeng nie op die rand $\partial G_1(t)$ nie. Eenvoudigheidshalwe word aanvaar dat die bewegings van die twee media sodanig simmetries is, dat die draaimomentumvergelyking oorbodig is. (Al is dit so dat die simmetrie van die spanningsmatriks vir elke kontinuum afsonderlik ekwivalent is aan die draaimomentumvergelyking vir elkeen afsonderlik, word die draaimomentumvergelyking oor die algemeen vir die gekoppelde beweging benodig. Die rede daarvoor is die diskontinuïteit van die spanningsmatriks op $\partial G_1(t)$.) Verder word aanvaar dat die proses van beweging isotermies en barotropies plaasvind. Die behoudwette wat nodig is om so 'n beweging te beskryf is slegs die wette van massa- en momentumbalans [Malvern, 1969, bl 427]. Volgens die randvoorwaardepostulaat in Paragraaf 2.2 is dit ook die behoud=wette wat by die formulering van die randvoorwaardes in ag geneem moet word.

Vir die massabehoudwet is die tersaaklike digtheidsfunksies soos gedefi=nieer in Paragraaf 2.3.2 en 2.6.2 vir i=1,2 die volgende:

$$u_i = \rho_i;\ \gamma_i = \phi_i = \rho_i v_i;\ b_i = 0;\ B = 0. \qquad (3.33)$$

Vir die momentumbehoudwet is die digtheidsfunksies

$$u_i = \rho_i v_i;\ \gamma_i = \phi_i - \tau_i = \rho_i v_i \otimes v_i - \tau_i. \qquad (3.34)$$

In (3.33) en (3.34) is ρ_i = massadigtheid, v_i = snelheid en τ_i = span=ningsmatriks. Die tensorproduk $v_i \otimes v_i$ is sodanig dat

$$v_i \otimes v_i \cdot n = v_i(v_i \cdot n).$$

Volgens (3.10) is die massabehoudwette wat deel uitmaak van die *veralge=meende randvoorwaarde*

$$\rho_1(v_1 - \partial_t f)\cdot n = \rho_2(v_2 - \partial_t f)\cdot n \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \qquad (3.35a)$$

$$\text{met } \partial_t \rho_2 + \operatorname{div}(\rho_2 v_2) = 0 \text{ in } G_2(t) \times (0,T). \qquad (3.35b)$$

Die momentumbehoudwette is ook volgens (3.10)

$$\rho_1 v_1(v_1 - \partial_t f)\cdot n - \tau_1\cdot n = \rho_2 v_2(v_2 - \partial_t f)\cdot n - \tau_2\cdot n - B \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \qquad (3.36a)$$

$$\text{met } \partial_t(\rho_2 v_2) + \operatorname{div}(\rho_2 v_2 \otimes v_2 - \tau_2) = b_2 \text{ in } G_2(t) \times (0,T). \qquad (3.36b)$$

In (3.36a) sluit B onder andere oppervlaktespanning in.

Saam met die Behoudwette (3.35a) en (3.36a) word die samestellingsverge=lykings van kontak gebruik. Die eerste voorwaarde wat in dié verband gebruik word, is dat die twee media nie op $\partial G_1(t)$ vermeng nie. Die twee terme in (3.35a) dui die tempo aan waarteen die twee media oor $\partial G_1(t)$ beweeg; volgens die geen-vermengingsvoorwaarde geld dus dat

$$\rho_1(v_1 - \partial_t f)\cdot n = 0 = \rho_2(v_2 - \partial_t f)\cdot n \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.37}$$

Die geen-vermengingsvoorwaardes (3.37) wat berus op oorwegings van massa-oordrag, maak die massabehoudwet (3.35a) triviaal. Vergelykings (3.37) is ekwivalent aan die voorwaarde wat [Truesdell en Toupin, 1960, bl 329-330] by 'n ondeurdringbare rand formuleer deur gebruik te maak van kinematiese oorwegings.

'n Direkte gevolg van (3.37) is dat in (3.36a)

$$\rho_1 v_1(v_1 - \partial_t f)\cdot n = 0 = \rho_2 v_2(v_2 - \partial_t f)\cdot n, \tag{3.38}$$

wat beteken dat daar ook nie momentumoordrag op $\partial G_1(t)$ plaasvind nie.

Met behulp van (3.38) word (3.36a) dan

$$\tau_1\cdot n = \tau_2\cdot n + B \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.39}$$

'n Tweede voorwaarde wat as samestellingsvergelyking van kontak gebruik kan word op $\partial G_1(t) \times (0,T)$, is die 'geen-glipvoorwaarde' [Milne-Thomson, 1968, bl 635] waarvolgens die raaklynige snelheidskomponente van die twee media op $\partial G_1(t)$ ook dieselfde is. Laat ω en e 'n paar ortogonale raak=lynvektore aan $\partial G_1(t)$, geassosieer met die parametrisering van $\partial G_1(t)$, wees. Die geen-glipvoorwaarde impliseer dan dat

$$v_1\cdot\omega = v_2\cdot\omega \text{ en } v_1\cdot e = v_2\cdot e \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.40}$$

Vergelykings (3.37) en (3.40) kan saamgevat word in die enkele vergelyking

$$v_1 = \partial_t f = v_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.41}$$

[Truesdell en Toupin, 1960, bl 330] onderskei nie tussen die behoudwet=gedeelte (3.37) en die geen-glipgedeelte (3.40) van (3.41) nie, maar noem

(3.41) direk die adhesierandvoorwaarde wat geld indien die snelheid op $\partial G_1(t)$ voorgeskryf word.

In die lig van die voorafgaande is(3.37) tot (3.40) saam met (3.35b) en (3.36b) die veralgemeende randvoorwaardes op $\partial G_1(t) \times (0,T)$.

Soos voorgestel vroeër in die paragraaf volg *veralgemeende Neumann-rand=voorwaardes* deur te aanvaar dat die gebied G_2 deur 'n vakuum in beslag geneem word, dit wil sê

$$\rho_2 = 0 \text{ en } \tau_2 = 0.$$

Uit (3.37) tot (3.39) is die randvoorwaardes dan

$$(v_1 - \partial_t f)\cdot n = 0 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T), \tag{3.42a}$$

en

$$\tau_1\cdot n = B \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.42b}$$

Indien die oppervlaktekrag B slegs uit die oppervlaktespanningterm bestaan, sal die gebied G_2 in duie stort. Die beweging is dan nie-topologies van aard, soos beskryf deur [Truesdell en Toupin, 1960, bl 510]. Om dit te verhoed moet eksterne kragte B op $\partial G_1(t) \times (0,T)$ voorgeskryf word, wat (3.42b) 'n randvoorwaarde van traksie maak [Truesdell en Noll, 1965, bl 126]. Vir die geval onder bespreking verval die adhesievoorwaarde (3.40) as randvoorwaarde.

Dinamiese randvoorwaardes vir die probleem volg ook uit die behoudwette op 'n wyse soos vroeër in die paragraaf aangedui. Aanvaar naamlik dat die kontinuum in G_2 'n elastiese medium is waarvoor die Lamé-konstantes λ, $\mu \to \infty$. Volgens [Malvern, 1969, bl 280] moet die deformasie van die medium in G_2 nul wees ten einde te verseker dat die kontakkragte in G_2 begrens is. G_2 bevat dus 'n starre liggaam. In die lig van die vroeëre aanname dat die bewegingsproses plaasvind sonder nodigheid van die draai=momentumvergelyking, is

$$v_2(x,t) = V_2(t) \text{ in } G_2(t) \times (0,T). \tag{3.43}$$

Kies nou die parametrisering van $\partial G_1(t)$ sodanig dat

$$\partial_t f(x,t) = V_2(t) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.44}$$

In die lig van (3.43) verval die Massabehoudwet (3.35b) en die Momentum=behoudwet (3.36b). Die Behoudwet (3.12) word gebruik vir 'n herformulering van die behoudwette vir massa en momentum. Aanvaar in (3.12) dat

$$\Omega_2 = G_2,\ S = \partial G_1(t) \text{ en } S_2 \text{ is leeg.}$$

Die massabehoudwet is dan met behulp van (3.33)

$$\int_{\partial G_1} \rho_1(v_1 - \partial_t f)\cdot n dS = \frac{d}{dt}\int_{G_2} \rho_2 dx \text{ vir } t \in (0,T).$$

Hierdie behoudwet lewer saam met die geen-vermengingsvoorwaarde (3.37) dat

$$M = \int_{G_2} \rho_2 dx = \text{konstant vir } t \in (0,T). \tag{3.45}$$

Uit (3.12), (3.34) en (3.43) is die wet van momentumbehoud

$$\int_{\partial G_1} [\rho_1 v_1(v_1\cdot n - \partial_t f\cdot n) - \tau_1\cdot n]\, dS = \frac{d}{dt}\int_{G_2} \rho_2 V_2(t) dx$$

$$- \int_{G_2} b_2 dx - \int_{\partial G_1} B dS \text{ vir } t \in (0,T). \tag{3.46}$$

Aanvaar nou dat

$$\int_{G_2} b_2 dx = M\bar{b}_2(t) \text{ en } \int_{\partial G_1} B dS = h(t) \text{ vir } t \in (0,T). \tag{3.47}$$

($\bar{b}_2(t)$ = gemiddelde krag per eenheidmassa in G_2.)

In die lig van die geen-vermengingsvoorwaarde (3.38) en deur (3.45) en (3.47) te gebruik, reduseer die momentumbehoudwet (3.46) tot

$$M\dot{V}_2(t) + \int_{\partial G_1} \tau_1\cdot n dS = M\bar{b}_2(t) + h(t) \text{ vir } t \in (0,T).$$

Met behulp van die adhesievoorwaarde (3.41) word die laaste vergelyking

$$M\partial_t v_1(x,t) + \int_{\partial G_1} \tau_1\cdot n dS = M\bar{b}_2(t) + h(t) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.48}$$

Vir 'n viskeuse vloeistof in G_1 is τ_1 'n funksie van die deformasietempo=tensor [Malvern, 1969, bl 298], dit wil sê van v_1 se ruimtelike afgeleides. Vergelyking (3.48) bevat tyd- en ruimtelike afgeleides van v_1 en is dus 'n dinamiese randvoorwaarde.

Dirichlet-randvoorwaardes volg uit (3.48) deur te aanvaar dat $M \to \infty$. Indien die twee terme in (3.48) wat M nie bevat nie, begrens is, lewer hierdie limiet van (3.48) as $M \to \infty$

$$\partial_t v_1(x,t) = \bar{b}_2(t) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T).$$

Die impuls van hierdie asimptotiese vorm van die behoudwet lewer die Dirichlet-randvoorwaarde

$$v_1(x,t) = \int_0^t \bar{b}_2(\tau)d\tau + V_2(0) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.49}$$

Soos in Voorbeeld 3 van Paragraaf 2.9.1 kan Dirichlet-randvoorwaardes fisies gerealiseer word deur 'n 'massiewe' krag $M\bar{b}_2(t)$ toe te pas op 'n massiewe randmedium. Die dik-randmodel lewer, soos vir die stasionêre rand, Dirichlet-randvoorwaardes wat slegs tydafhanklik is.

3.4 DIE DUN-RANDMODEL

3.4.1 Eendimensionaal

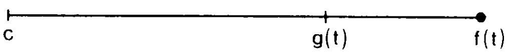

Fig. 3·5

Die interne gebied is $G_1(t) = (c,f(t))$. Die nuldimensionale randmedium is in die gebied $G_2(t) = \{f(t)\}$. Die beherende vergelykings in $(c,f(t))$ is die behoudwette soos geformuleer in Paragraaf 2.3.3. Die digtheids=funksies soos gedefinieer in Paragraaf 2.3.2 en 2.8.1 word gebruik om randvoorwaardes by $f(t)$ te formuleer. Stel

$$f(t) - \varepsilon(t) = g(t).$$

Die randvoorwaardes volg uit die behoudwette vir $(g(t),f(t)) \cup G_2$. Dit is weer in ooreenstemming met die basiese randvoorwaardepostulaat in Paragraaf 2.2.

Die vorm van die behoudwet is

$$\frac{d}{dt}[\int_{g(t)}^{f(t)} u_1(x,t)dx + u_2(t)] = (\phi_1(g(t),t) - \phi_2(t))$$

$$+ (\int_{g(t)}^{f(t)} b_1(x,t)dx - \beta_1(g(t),t) + b_2(t)) - u_1(g(t),t)\dot{g}(t) \quad (3.50)$$

Die verskille tussen hierdie behoudwet en sy eweknie vir die stasionêre geval in Paragraaf 2.8.1 is die tydsafhanklike integrasiegrense en die laaste konveksieterm wat die konveksievloed in $(g(t),f(t))$ in as gevolg van die beweging van $g(t)$ beskryf.

Volgens 'n bekende resultaat [Courant en John, 1974, bl 77] is

$$\frac{d}{dt}\int_{g(t)}^{f(t)} u_1(x,t)dx = \int_{g(t)}^{f(t)} \partial_t u_1(x,t)dx$$

$$+ u_1(f(t),t)\dot{f}(t) - u_1(g(t),t)\dot{g}(t), \quad (3.51)$$

mits u_i en $\partial_t u_i$ kontinu is in oop intervalle wat $(g(t),f(t))$ bevat en mits $g(t)$ en $f(t)$ differensieerbaar is. Uit (3.50) en (3.51) volg die behoudwet in die vorm

$$\int_{g(t)}^{f(t)} \partial_t u_1(x,t)dx + \dot{u}_2(t)$$

$$= \gamma_1(g(t),t) - \phi_2(t) + \int_{g(t)}^{f(t)} b_1(x,t)dx$$

$$+ b_2(t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t). \quad (3.52)$$

Aanvaar nou in (3.52) dat $\partial_t u_1$ en b_1 lokaal-integreerbaar is en neem die limiet as $g(t) \to f(t)$. Dan lewer (3.52) die veralgemeende randvoor= waarde

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t) = \dot{u}_2(t) + \phi_2(t) - b_2(t), \ t \in (0,T) \quad (3.53)$$

vir die geval van 'n eendimensionale probleem met 'n nuldimensionale bewegende rand. (Die afspraak in verband met limiete in Paragraaf 1.3.4 is hier van toepassing.)

3.4.2 Tweedimensionaal

Laat $G_1(t) \subset R^2$ die interne gebied wees met die bewegende kromme $\partial G_1(t) = G_2(t)$ as rand. Die randmedium is dus 'n eendimensionale kontinue medium. Soos in Paragraaf 3.2.2 word aanvaar dat

$$\partial G_1(t) = \{x | x = f(q,t)\}$$

met f 'n parametrisering van $\partial G_1(t)$.

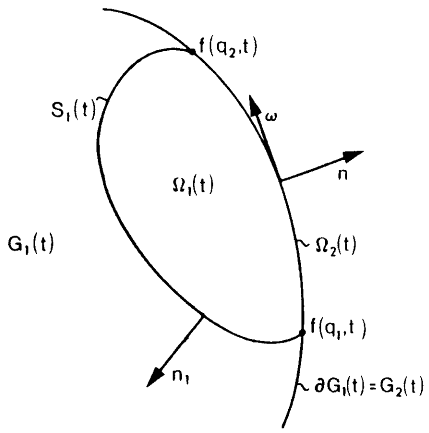

Fig. 3·6

Die digtheidsfunksies wat in die behoudwette gebruik word, is dié soos gedefinieer in Paragraaf 2.3.2 en 2.8.2. Die randvoorwaardes op $\partial G_1(t)$ word geformuleer deur die gebruik van die behoudwette vir die gekoppelde gebied $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$. Die naasliggende gebiede $\Omega_1(t)$ en $\Omega_2(t)$ is sodanig dat

$$\partial\Omega_1(t) = S_1(t) \cup \Omega_2(t) \text{ en } \partial\Omega_2(t) = \{f(q_1,t), f(q_2,t)\}.$$

Die behoudwet vir die gekoppelde gebied is

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[\int_{\Omega_1} u_1 dS + \int_{\Omega_2} u_2 d\ell] \\
&= (-\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 d\ell - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n d\ell + \psi_2(f(q_1,t),t) \\
&- \psi_2(f(q_2,t),t)) + (\int_{S_1} \tau_1 \cdot n_1 d\ell + \int_{\Omega_1} b_1 dS + \int_{\Omega_2} b_2 d\ell \\
&+ \beta_2(f(q_2,t),t) - \beta_2(f(q_1,t),t) + \int_{S_1} u_1 \partial_t f_1 \cdot n_1 d\ell. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Die verskille tussen hierdie behoudwet en die ooreenstemmende behoudwet vir die stasionêre geval in Paragraaf 2.8.2 lê weer in die tydafhanklike gebiede van integrasie en in die laaste konveksieterm as gevolg van die beweging van S_1. In hierdie laaste term is f_1 'n funksie wat sodanig is, dat

$$S_1(t) = \{x | x = f_1(r,t)\}$$

met f_1 'n parametrisering van $S_1(t)$ en r die gepaardgaande lynparameter.

Volgens die transportstelling [Slattery, 1972, bl 22-23] is

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} u_1 dS = \int_{\Omega_1} \partial_t u_1 dS + \int_{S_1} u_1 \partial_t f_1 \cdot n_1 d\ell + \int_{\Omega_2} u_1 \partial_t f \cdot n d\ell. \qquad (3.55)$$

Deur (3.55) met (3.54) te kombineer volg 'n alternatiewe vorm (3.56) van die behoudwet. In (3.56) is ook gebruik gemaak van die hoofstelling van lynintegrale soos gegee in Paragraaf 1.3.5 en van die uitdrukking

$$\gamma_2 = \psi_2 - \beta_2.$$

Dit volg dus dat

$$\int_{\Omega_1} \partial_t u_1 dS + \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = - \int_{S_1} \gamma_1 \cdot n_1 d\ell - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n d\ell$$
$$- \int_{\Omega_2} \operatorname{grad}\gamma_2 \cdot \omega d\ell + \int_{\Omega_1} b_1 dS + \int_{\Omega_2} b_2 d\ell - \int_{\Omega_2} u_1 \partial_t f \cdot n d\ell. \qquad (3.56)$$

Aanvaar dat $\partial_t u_1$ en b_1 lokaal-integreerbaar is en laat $S_1(t) \to \Omega_2(t)$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$. (Kyk na Paragraaf 1.3.4 wat handel oor limiete.) Vergelyking (3.56) reduseer dan tot die behoudwet

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = \int_{\Omega_2} [\gamma_1 \cdot n - \phi_2 \cdot n - \partial_\omega \gamma_2 + b_2 - u_1 \partial_t f \cdot n] d\ell \qquad (3.57)$$

Die term aan die linkerkant van (3.57) kan met behulp van die transport=stelling vir tydafhanklike kontoere [Truesdell en Toupin, 1960, bl 346] herskryf word as

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = \int_{\Omega_2} P(u_2, \partial_t u_2, \partial_{x_i} u_2, \partial_t f, \partial_{tx_i} f) d\ell.$$

Die uitdrukking vir P is vir praktiese probleme egter onhanteerbaar. Die omslagtighede rondom P kan uitgeskakel word deur gebruik te maak van die feit dat G_2 geassosieer word met 'n randmedium waarvoor 'n digtheids=funksie ρ (byvoorbeeld massadigtheid of ladingsdigtheid) bestaan, en deur die parametrisering van G_2 te koppel aan die verwysingskonfigurasie vir die randmedium. 'n Ander vorm vir (3.57) volg dus deur eers die onderstaande teorie te ontwikkel.

Aanvaar dat die digtheid

$$u_2(f(q,t),t) = \rho_2(f(q,t),t)w_2(f(q,t),t),$$

waar ρ_2 'n lyndigtheid (van byvoorbeeld massa of lading) is van die konfigurasie op tydstip t.

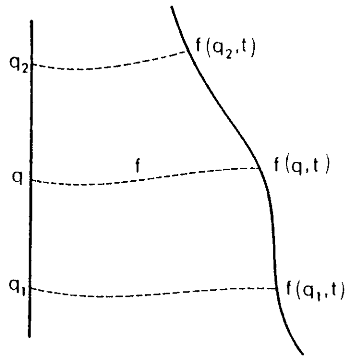

Fig. 3·7

Indien $\sigma_2(q)$ die lyndigtheid is in die verwysingskonfigurasie, lui die integraalvorm van die kontinuïteitsvergelyking (massabehoud of ladingbehoud)

$$\begin{aligned}\int_{q_1}^{q_2}\sigma_2(q)dq &= \int_{\Omega_2}\rho_2(f(q,t),t)d\ell\\ &= \int_{q_1}^{q_2}\rho_2(f(q,t),t)\|\partial_q f\|dq.\end{aligned}$$

Hierdie vergelyking geld vir 'n willekeurige (q_1,q_2) en indien die integrande lokaal-integreerbaar is, is

$$\sigma_2(q) = \rho_2(f(q,t),t)\|\partial_q f\|.$$

Met behulp van hierdie vergelyking is

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}u_2 d\ell &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}\rho_2 w_2 d\ell\\ &= \frac{d}{dt}\int_{q_1}^{q_2}\rho_2(f(q,t),t)w_2(f(q,t),t)\|\partial_q f\|dq\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{q_1}^{q_2} \sigma_2(q) w_2(f(q,t),t) dq$$

$$= \int_{q_1}^{q_2} \sigma_2(q)(\partial_t w_2 + \partial_t f \cdot \mathrm{grad} w_2) dq$$

$$= \int_{q_1}^{q_2} \rho_2(f(q,t),t)(\partial_t w_2 + \partial_t f \cdot \mathrm{grad} w_2) \| \partial_q f \| dq$$

Dit volg dus dat

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 d\ell = \int_{\Omega_2} \rho_2(\partial_t w_2 + \mathrm{grad} w_2 \cdot \partial_t f) d\ell \qquad (3.58)$$

Vervanging van (3.58) in (3.57) lewer die behoudwet

$$\int_{\Omega_2} [\rho_2(\partial_t w_2 + \mathrm{grad} w_2 \cdot \partial_t f) - \gamma_1 \cdot n$$
$$+ \phi_2 \cdot n + \partial_\omega \gamma_2 - b_2 + u_1 \partial_t f \cdot n] d\ell = 0.$$

Dit geld vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en indien die integrand lokaal-inte= greerbaar is, volg die veralgemeende randvoorwaarde

$$\gamma_1 \cdot n - u_1 \partial_t f \cdot n = \rho_2(\partial_t w_2 + \mathrm{grad} w_2 \cdot \partial_t f)$$
$$+ \phi_2 \cdot n + \partial_\omega \gamma_2 - b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \qquad (3.59)$$

In plaas van (3.59) is (3.57) ook 'n vorm van die veralgemeende randvoorwaarde. Uit hierdie vergelykings en spesifieke samestellings= vergelykings vir die randmedium kan soos gebruiklik meer spesifieke randvoorwaardes volg.

3.4.3 Driedimensionaal

Die interne gebied is $G_1(t) \subset R^3$. Die randmedium is 'n kontinue medium wat as 'n oppervlak gemodelleer word. Die eksterne gebied $G_2(t)$ is dus 'n hiperoppervlak in R^3. Laat

$$G_2(t) = \{x | x = f(q,t)\}$$

met f 'n parametrisering van $G_2(t)$, soos uiteengesit in Paragraaf 3.2.2.

Dit word aanvaar dat die uitwaartse eenheidsnormaalvektor n op $G_2(t)$ oral goed gedefinieer is.

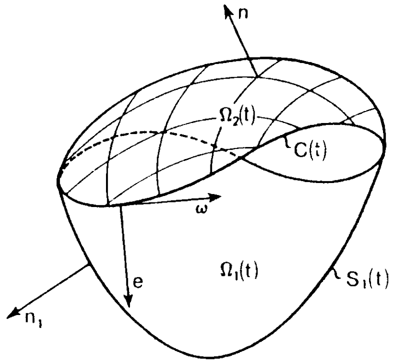

Fig. 3·8

Laat $\Omega_2(t)$ 'n willekeurige enkelvoudig-samehangende deelversameling van $G_2(t)$ wees, met dié voorwaarde dat vir die enkelvoudige kromme $C(t) = \partial\Omega_2(t)$ die ortonormale stel vektore n, e en ω oral gedefinieer is soos in Paragraaf 2.8.3.

Laat $\Omega_1(t)$ en $\Omega_2(t)$ twee aanliggende gebiede wees. Dan is

$$\partial\Omega_1(t) = S_1(t) \cup \Omega_2(t) \text{ met } S_1(t) = \{x | x = f_1(r,t)\}$$

f_1 is 'n parametrisering van $S_1(t)$ en r is die gepaardgaande paar oppervlakteparameters wat punte op $S_1(t)$ identifiseer.

Die randvoorwaardes op $\partial G_1(t)$ word nou in ooreenstemming met die rand=voorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2, afgelei uit die behoudwette vir $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$. Die digtheidsfunksies benodig vir hierdie behoud=wette is dié soos gedefinieer in Paragraaf 2.3.2 en Paragraaf 2.8.3. Met behulp daarvan is die behoudwette vir $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$

$$\frac{d}{dt}[\int_{\Omega_1} u_1 dx + \int_{\Omega_2} u_2 dS] = (-\int_{S_1} \phi_1 \cdot n_1 dS - \int_{\Omega_2} \phi_2 \cdot n dS - \oint_C \psi_2 \cdot e d\ell)$$
$$+ (\int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{\Omega_2} b_2 dS + \int_{S_1} \beta_1 dS + \oint_C \beta_2 d\ell) + \int_{S_1} u_1 \partial_t f_1 \cdot n_1 dS. \qquad (3.60)$$

Met behulp van 'n transportstelling soortgelyk aan (3.55) [Slattery, 1972, bl 22-23] en vereenvoudigings soos in Paragraaf 2.8.3, word (3.60)

$$\int_{\Omega_1}\partial_t u_1 dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = -\int_{S_1}\gamma_1\cdot n_1 dS - \int_{\Omega_2}\phi_2\cdot n dS - \oint_C \gamma_2\cdot e d\ell$$

$$+ \int_{\Omega_1} b_1 dx + \int_{\Omega_2} b_2 dS - \int_{\Omega_2} u_1\partial_t f\cdot n dS. \qquad (3.61)$$

Aanvaar nou dat $\partial_t u_1$ en b_1 lokaal-integreerbaar is en laat $S_1 \to \Omega_2$ op só 'n wyse dat $n_1 \to -n$. (Paragraaf 1.3.4 in verband met limiete is hier van toepassing.) Na verdere vereenvoudigings soos in Paragraaf 2.8.3 volg uit (3.61) dat

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = \int_{\Omega_2}[\gamma_1\cdot n - \phi_2\cdot n - \mathrm{curl}(n\times\gamma_2)\cdot n + b_2 - u_1\partial_t f\cdot n]\, dS. \qquad (3.62)$$

Soos vir die tweedimensionale geval in Paragraaf 3.4.2 kan die term aan die linkerkant van (3.62) met behulp van die transportstelling vir tydaf= hanklike oppervlaktes [Truesdell en Toupin, 1960, bl 346] herskryf word as

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = \int_{\Omega_2} P(u_2,\partial_t u_2,\partial_{x_i} u_2,\partial_{tx_i} f) dS,$$

met P 'n moeilik hanteerbare funksie.

Ook vir die driedimensionale geval word die probleem in 'n hanteerbare vorm geformuleer deur die parametrisering van G_2 te koppel aan die ver= wysingskonfigurasie van die randmedium waarvoor 'n entiteit met digtheid ρ_2 onveranderd bly vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$.

Aanvaar dat

$$u_2(f(q,t),t) = \rho_2(f(q,t),t)w_2(f(q,t),t),$$

met ρ_2 die oppervlaktedigtheid van die entiteit in die konfigurasie $G_2(t)$. In die verwysingskonfigurasie is die oppervlaktedigtheid $\sigma(q)$. (ρ_2 en σ kan byvoorbeeld massa- of ladingsdigthede wees.)
Die integraalvorm van die behoudwet vir die entiteit vir 'n willekeurige Ω_2^* in die verwysingskonfigurasie met beeld Ω_2 in $G_2(t)$ lui

$$\int_{\Omega_2^*}\sigma(q)dS^* = \int_{\Omega_2}\rho_2(f(q,t),t)dS$$
$$= \int_{\Omega_2^*}\rho_2(f(q,t),t)\|J\| dS^*$$

waar J die Jacobiaan van die transformasie is. Indien Ω_2^* willekeurig is en die integrande lokaal-integreerbaar, is

$$\sigma(q) = \rho_2(f(q,t),t)\|J\|. \tag{3.63}$$

(Kyk ook na [Naghdi, 1972, bl 447].) Met behulp hiervan is

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} \rho_2 w_2 dS \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2^*} \rho_2(f(q,t),t) w_2(f(q,t),t)\|J\| dS^* \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2^*} \sigma(q) w_2(f(q,t),t) dS^* \\
&= \int_{\Omega_2^*} \sigma(q)(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2) dS^* \\
&= \int_{\Omega_2^*} \rho_2(f(q,t),t)(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2)\|J\| dS^*.
\end{aligned}$$

Dus is

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = \int_{\Omega_2} \rho_2(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2) dS. \tag{3.64}$$

Deur (3.64) in (3.62) te vervang, volg die behoudwet

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2} [\rho_2(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2) - \gamma_1\cdot n + \phi_2\cdot n \\
&+ \mathrm{curl}(n \times \gamma_2)\cdot n - b_2 + u_1\partial_t f\cdot n] dS = 0.
\end{aligned}$$

Hierdie vergelyking geld vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en indien die integrand lokaal-integreerbaar is, is

$$\begin{aligned}
\gamma_1\cdot n - u_1\partial_t f\cdot n &= \rho_2(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2) + \phi_2\cdot n \\
&+ \mathrm{curl}(n \times \gamma_2)\cdot n - b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T).
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Vergelykings (3.62) (moontlik aangepas deur (3.64) te gebruik) en (3.65) is twee vorme van die veralgemeende randvoorwaarde waaruit meer spesifieke randvoorwaardes op die gebruiklike wyse afgelei kan word.

Alternatiewe vorms vir (3.62) en (3.65) is, soos in Paragraaf 2.8.3, respektiewelik

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dS = \int_{\Omega_2} [\gamma_1\cdot n - \phi_2\cdot n - \mathrm{div}'\gamma_2$$

$$- F(\gamma_2) + b_2 - u_1\partial_t f\cdot n]\, dS \text{ vir } t \in (0,T) \tag{3.66}$$

en

$$\gamma_1\cdot n - u_1\partial_t f\cdot n = \rho_2(\partial_t w_2 + \partial_t f\cdot \mathrm{grad} w_2)$$

$$+ \phi_2\cdot n + \mathrm{div}'\gamma_2 + F(\gamma_2) - b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.67}$$

3.5 MOONTLIKE RANDVOORWAARDES VOORTVLOEIEND UIT DIE DUN-RANDMODELLE

Die mees algemene randvoorwaardes wat die dun-randmodel lewer vir die een=dimensionale geval, is Vergelyking (3.53)

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t) = \dot{u}_2(t) + \phi_2(t) - b_2(t),\ t \in (0,T). \tag{3.53^1}$$

Vir die tweedimensionale geval is die veralgemeende randvoorwaardes (3.57) of (3.59). Dit is

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} \rho_2 w_2 d\ell = \int_{\Omega_2} [\gamma_1\cdot n - \phi_2\cdot n - \partial_\omega\gamma_2 + b_2 - u_1\partial_t f\cdot n]\, d\ell \tag{3.57^1}$$

vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en vir $t \in (0,T)$, of

$$\gamma_1\cdot n - u_1\partial_t f\cdot n = \rho_2(\partial_t w_2 + \mathrm{grad} w_2\cdot\partial_t f) + \phi_2\cdot n + \partial_\omega\gamma_2 - b_2$$

$$\text{op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.59^1}$$

Vir die driedimensionale geval is die veralgemeende randvoorwaardes (3.62) of (3.65). Dit is

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} \rho_2 w_2 dS = \int_{\Omega_2} [\gamma_1\cdot n - \phi_2\cdot n - \mathrm{curl}(n \times \gamma_2)\cdot n + b_2 - u_1\partial_t f\cdot n]\, dS \tag{3.62^1}$$

vir 'n willekeurige $\Omega_2 \subset G_2$ en vir $t \in (0,T)$, of

$$\gamma_1\cdot n - u_1\partial_t f\cdot n = \rho_2(\partial_t w_2 + \mathrm{grad} w_2\cdot\partial_t f)$$

$$+ \phi_2\cdot n + \mathrm{curl}(n \times \gamma_2)\cdot n - b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.65^1}$$

Alternatiewe vorme vir (3.62) en (3.65) respektiewelik is (3.66) en (3.67), mits die digtheidsfunksies gedefinieer is as funksies van die veralgemeende kromlynige koördinate.

Saam met die veralgemeende randvoorwaardes hierbo word weer die gebruik= like samestellingsvergelyking van kontak gebruik, naamlik

$$u_2 = H(u_1). \tag{3.68}$$

(a) *Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes* volg deur die randmedium as onaktief ten opsigte van die entiteit met digtheid u_2 te neem, dit wil sê

$$\phi_2 = 0,\ \gamma_2 = 0 \text{ en } u_2(\text{of } w_2) = 0.$$

Vir die eendimensionale geval word die randvoorwaarde (3.53)

$$\gamma_1(f(t),t) - u_1(f(t),t)\dot{f}(t) = -b_2(t),\ t \in (0,T). \tag{3.69}$$

Vir die twee- en driedimensionale geval word die randvoorwaardes (3.59) en (3.65)

$$\gamma_1 \cdot n - u_1 \partial_t f \cdot n = -b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \tag{3.70}$$

Vergelykings (3.69) en (3.70) is, behalwe vir die konveksieterme op die rand, dieselfde as die ooreenstemmende randvoorwaardes (2.39) en (2.40) vir die statiese randmedium in Hoofstuk 2. Indien γ_1 in (3.69) en (3.70) ruimtelike afgeleides van u_1 bevat, is laasgenoemde twee vergelykings van die vorm

$$F(u_1, \partial_{x_i} u_1) = g(t) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T).$$

Die feit dat die rand beweeg beteken dat u_1, en nie net sy ruimtelike afgeleides nie, nou ook voorkom in die veralgemeende Neumann-randvoorwaarde.

(b) *Dinamiese randvoorwaardes* volg deur die veralgemeende randvoorwaardes te kombineer met die samestellingsvergelyking van kontak (3.68). Vir die eendimensionale geval word die randvoorwaarde (3.53) dan

$$\partial_t H(u_1)(f(t),t) - \gamma_1(f(t),t) + u_1(f(t),t)\dot{f}(t)$$

$$= b_2(t) - \phi_2(t),\ t \in (0,T). \tag{3.71}$$

Indien $\gamma_1 = \gamma_1(\partial_x u_1)$, bevat (3.71) tyd- en ruimtelike afgeleides van u_1 op die rand en is dit 'n dinamiese randvoorwaarde soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2.

Vir die twee- en driedimensionale geval word aanvaar dat

$$\gamma_2 = \gamma_2(L(u_2)) = \gamma_2(LoH(u_1)).$$

Die randvoorwaarde (3.59) vir die tweedimensionale geval word dan

$$\rho_2[\partial_t(\frac{1}{\rho_2}H(u_1)) + \mathrm{grad}(\frac{1}{\rho_2}H(u_1))\cdot\partial_t f] - \gamma_1\cdot n + u_1\partial_t f\cdot n$$

$$+ \partial_\omega\gamma_2(LoH(u_1)) = b_2 - \phi_2\cdot n \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \qquad (3.72)$$

Vir die driedimensionale geval word die Voorwaarde (3.65)

$$\rho_2[\partial_t(\frac{1}{\rho_2}H(u_1)) + \mathrm{grad}(\frac{1}{\rho_2}H(u_1))\cdot\partial_t f] - \gamma_1\cdot n + u_1\partial_t f\cdot n$$

$$+ \mathrm{curl}(n \times \gamma_2(LoH(u_1)))\cdot n = b_2 - \phi_2\cdot n \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \qquad (3.73)$$

Die term $\mathrm{curl}(n \times \gamma_2)\cdot n$ kan ook vervang word met

$$\mathrm{div}'\gamma_2(LoH(u_1)) + F(\gamma_2(LoH(u_1))),$$

volgens (3.67).

Die operator div' impliseer hier, soos in Paragraaf 2.8.3 differensiasie met betrekking tot die kromlynige koördinate q_2 en q_3, dit wil sê differensiasie raaklynig aan $\partial G_1(t)$. Vergelykings (3.72) en (3.73) bevat tydafgeleides asook raaklynige ruimtelike afgeleides van u_1 op $\partial G_1(t) \times (0,T)$, met die moontlikheid van normale afgeleides bevat in die term $\gamma_1\cdot n$ nie uitgesluit nie. Die randvoorwaardes is dus ook dinamiese randvoorwaardes soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2.

(c) Om aan te toon dat *Dirichlet-randvoorwaardes* uit die behoudwette hierbo afgelei kan word, is vir die bewegende rand, soos vir die statiese rand in Paragraaf 2.9.1, ook nie in die algemeen moontlik nie. 'n Moontlikheid wat wel ondersoek kan word, is 'n asimptotiese proses wat verband hou met die digtheidsfunksie ρ_2. Aanvaar vir die twee- en driedimensionale gevalle met veralgemeende randvoorwaardes (3.59) en (3.65) respektiewelik dat

$$b_2 = \rho_2\bar{b}_2.$$

Deur die vergelykings met ρ_2 te deel en die limiet te neem as $\rho_2 \to \infty$, volg vir beide gevalle dat

$$\partial_t w_2 + \text{grad} w_2 \cdot \partial_t f = \bar{\bar{b}}_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \qquad (3.74)$$

mits die terme in (3.59) en (3.65) wat ρ_2 nie bevat nie, begrens is.

Indien die randmedium se samestelling sodanig is dat

$$w_2(x,t) = W_2(t) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T),$$

en die samestellingsvergelyking van kontak

$$w_2 = h(u_1) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T) \qquad (3.75)$$

geld, volg uit (3.74) dat

$$W_2 = h(u_1) = \int_0^t \bar{\bar{b}}_2 d\tau + W_2(0) \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T).$$

Hierdie Dirichlet-randvoorwaarde is slegs tydafhanklik.

Vir die eendimensionale geval word na aanleiding van die bespreking hierbo aanvaar dat die randmedium 'n eienskap besit waarmee die hoeveel=heid M (byvoorbeeld massa of lading) geassosieer kan word. Aanvaar in (3.53) dat

$$u_2 = MW_2 \text{ en } b_2 = M\bar{\bar{b}}_2.$$

Deur in (3.53) met M te deel en te aanvaar $M \to \infty$, volg

$$\dot{W}_2(t) = \bar{\bar{b}}_2(t) \text{ vir } t \in (0,T),$$

mits die terme in (3.53) wat M nie bevat nie, begrens is. Hierdie vergelyking saam met die samestellingsvergelyking van kontak (3.75) lewer die Dirichlet-randvoorwaarde

$$W_2(t) = h(u_1)(f(t),t) = \int_0^t \bar{\bar{b}}_2(\tau) d\tau + W_2(0) \text{ vir } t \in (0,T). \qquad (3.76)$$

Voorbeeld 1 - eendimensionaal

Fig. 3·9

In hierdie voorbeeld word die beweging van 'n gas in 'n buis gemodelleer. Die buis word aan die linkerkant solied afgesluit en aan die regterkant word die gas ingesluit deur 'n voorwerp wat in die buis kan beweeg, byvoorbeeld 'n suier of 'n koeëlpunt. Die gaskolom word beskou as 'n eendimensionale kontinue medium en die afsluiter aan die regterkant as 'n partikel. Verder word aanvaar dat die gas 'n ideale gas is [Malvern, 1969, bl 230, 251, 466].

Vir die gaskolom word die behoudwette van massa, momentum en energie geformuleer. Soortgelyke behoudwette vir die randpartikel lewer die veralgemeende randvoorwaardes van die vorm (3.53) by f(t). Die digtheidsfunksies ter sprake is die volgende:

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1 T_1 \end{bmatrix}; \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Mv_2 \\ \frac{1}{2}Mv_2^2 + Mc_2T_2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 v_1^2 - p_1 \\ (\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1 T_1)v_1 - K_1\partial_x T_1 - p_1 v_1 \end{bmatrix}$$

Hierin is ρ_1 = massa per eenheidlengte van die gas; v_i = snelheid; c_i = 'n soortlike warmte; T_i = temperatuur; M = massa van die randpartikel; p_1 = drukkrag in die gas; K_1 = geleidingsvermoë van die gas.

Deur hierdie samestellingsvergelykings vir die digtheidsfunksies te kombineer met (3.53), volg die mees algemene vorm van die randvoorwaarde

$$\begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 v_1^2 - p_1 \\ (\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1 T_1)v_1 - K_1\partial_x T_1 - p_1 v_1 \end{bmatrix} - \dot{f}(t) \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1 T_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} M \\ Mv_2 \\ \tfrac{1}{2}Mv_2^2 + Mc_2T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_{22} \\ -b_{22}v_2 + \phi_{23} - b_{23} \end{bmatrix} \text{ by } f(t) \text{ vir } t \in (0,T). \qquad (3.77)$$

Die vorm van ϕ_2 en b_2 vir die randpartikel is sodanig dat

(i) die partikel nie massa afstaan aan sy omgewing nie ($\phi_{21} = 0$) of 'n interne bron van massa besit nie ($b_{21} = 0$);

(ii) die partikel nie momentum aan sy omgewing afstaan nie ($\phi_{22} = 0$), maar eksterne kragte as bronne van momentum ondervind ($b_{22} \neq 0$);

(iii) die partikel se energie verander as gevolg van die eksterne kragte wat arbeid verrig ($b_{22}v_2 \neq 0$), asook as gevolg van hitte-energie afgestaan aan sy omgewing (uitgesluit die gaskolom) ($\phi_{23} \neq 0$) en bronne van warmte-energie in die partikel ($b_{23} \neq 0$).

Aanvaar nou perfekte termiese kontak tussen die gas en die partikel by $f(t)$. Die samestellingsvergelyking van kontak wat op die temperatuur betrekking het, is dus

$$T_2(t) = T_1(f(t),t) \text{ vir } t \in (0,T). \qquad (3.78)$$

Deur (3.78) te vervang in (3.77) volg die randvoorwaarde hieronder as die mees natuurlike randvoorwaarde vir die probleem, naamlik

$$\begin{bmatrix} \partial_t M \\ \partial_t(Mv_2) \\ \partial_t(\tfrac{1}{2}Mv_2^2) + \partial_t(Mc_2T_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1\dot{f}(t) \\ \rho_1 v_1\dot{f}(t) \\ (\tfrac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1T_1)\dot{f}(t) \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 v_1^2 - p_1 \\ (\tfrac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + c_1\rho_1 T_1)v_1 - K_1\partial_x T_1 - p_1 v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ b_{22} \\ b_{22}v_2 + b_{23} - \phi_{23} \end{bmatrix} \text{ by } f(t) \text{ vir } t \in (0,T). \qquad (3.79)$$

Indien die partikel ondeurdringbaar is vir die gas, is (3.80) 'n verdere samestellingsvergelyking van kontak. Dan is

$$\partial_t M = 0 \tag{3.80}$$

in die eerste komponent van die Behoudwet (3.79) en lewer dit as die wet van massabehoud

$$v_1(f(t),t) = \dot{f}(t) \;\; (= v_2(t)). \tag{3.81}$$

Die massabehoudwet (3.81) word normaalweg gegee as kinematiese randvoor= waarde [Milne-Thomson, 1968, bl 74].

Met behulp van (3.81) kan die tweede komponent van (3.79) vereenvoudig word, terwyl hierdie vereenvoudigde vorm weer op sy beurt saam met (3.81) lei tot die vereenvoudiging van die derde komponent. Die finale vorm van (3.79) is dan, met in agneming van (3.80),

$$\begin{bmatrix} \partial_t M \\ M\partial_t v_1 \\ Mc_2\partial_t T_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1(\dot{f}(t) - v_1) \\ p_1 \\ K_1\partial_x T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{22} \\ b_{23} - \phi_{23} \end{bmatrix} \text{ by } f(t) \text{ vir } t \in (0,T). \tag{3.82}$$

Vergelyking (3.82) is die mees algemene randvoorwaarde vir die probleem soos in die voorbeeld geformuleer. Al drie komponente van (3.82) bevat tydafgeleides. Die eerste komponent is die triviale voorwaarde (3.80). Die tweede komponent bevat slegs 'n tydafgeleide, terwyl die derde komponent tyd-en ruimtelike afgeleides bevat. Voorwaarde (3.82) is 'n *dinamiese randvoorwaarde* soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2.

Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes volg deur in (3.82) te aanvaar $M \to 0$. Die eerste komponent van (3.82) geld steeds in die vorm (3.81). Die tweede komponent van (3.82) lewer die 'randvoorwaarde van traksie' [Truesdell en Noll, 1965, bl 126]

$$p_1(f(t),t) = b_{22}(t).$$

Die derde komponent lewer die klassieke Neumann-randvoorwaarde

$$K_1\partial_x T_1(f(t),t) = b_{23}(t) - \phi_{23}(t).$$

Dirichlet-randvoorwaardes kan ook uit (3.82) afgelei word. Aanvaar naamlik dat

$$b_{22}(t) = M\bar{b}_{22}(t)$$

$$\text{en } b_{23}(t) - \phi_{23}(t) = M(\bar{\bar{b}}_{23}(t) - \bar{\bar{\phi}}_{23}(t)),$$

en neem die limiet as $M \to \infty$ in (3.82). Randvoorwaarde (3.82) reduseer dan tot

$$\begin{bmatrix} \rho_1(\dot{f}(t) - v_1) \\ \partial_t v_1 \\ c_2 \partial_t T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_{22} \\ \bar{\bar{b}}_{23} - \bar{\bar{\phi}}_{23} \end{bmatrix}.$$

Integrasie van die laaste twee komponente lewer

$$\begin{bmatrix} \rho_1(\dot{f}(t) - v_1(f(t),t)) \\ v_1(f(t),t) \\ c_2 T_1(f(t),t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}. \qquad (3.83)$$

Die eerste komponent van hierdie impuls van die Behoudwet (3.82) is soos in (3.81), terwyl die tweede en derde komponente Dirichlet-randvoorwaardes is vir die snelheid en temperatuur respektiewelik by $f(t)$. Soos tevore volg Dirichlet-randvoorwaardes weer indien die randmedium 'enorm' is in die een of ander sin - in hierdie geval enorm in massa. [Friedrichs, 1948] bespreek die probleem van 'n suier wat in 'n silinder beweeg op 'n voor=geskrewe wyse (konstante snelheid of konstante versnelling). Die proses wat hy ontleed, vind isotermies plaas, sodat die eerste twee komponente van (3.83) die voorwaardes is wat geld by die bewegende rand.

Ander interessante randvoorwaardes volg ook uit (3.82) deur asimptotiese gedrag vir c_2, die soortlike warmte van die randmedium, te beskou. In elke geval bevat die randvoorwaarde se tweede komponent 'n tydaf=geleide van v_1. Hiermee saam is die derde komponent van (3.82) 'n Neumann-randvoorwaarde indien $c_2 \to 0$ en 'n Dirichlet-tipe indien $c_2 \to \infty$.

Hierdie voorbeeld illustreer duidelik dat hoewel die randvoorwaardes vir die geval van 'n enkele behoudwet duidelik klassifiseerbaar is, so 'n klassifikasie vir die geval van 'n stelsel behoudwette soms nie moontlik kan wees nie.

Voorbeeld 2 - driedimensionaal

In hierdie voorbeeld word die randvoorwaardes by die oppervlak van 'n vloeistof wiskundig gemodelleer. Op die oppervlak van die vloeistof is dit in kontak met 'n dun lagie van 'n ander kontinue medium. Die dun randmedium kan byvoorbeeld 'n elastiese membraan wees [Landau en Lifshitz, 1953, bl 762, 763], 'n dun lagie van 'n ander vloeistof, byvoorbeeld olie [Landau en Lifshitz, 1959, bl 241, 242] of verbrokkelde pakys [Peters, 1950].

Eenvoudigheidshalwe word die wette van massa- en momentumbehoud by die oppervlak afsonderlik geformuleer. Dit word aanvaar dat die vloeistof=beweging isotermies en onsaamdrukbaar is. Die randmedium mag wel elastiese of vervormingseienskappe besit.

Vir die geval van massabehoud geld in (3.65) dat

$u_1 = \rho_1$; $u_2 = \rho_2$, dit wil sê $w_2 = 1$; $\gamma_1 = \rho_1 v_1$; $v_2 = \partial_t f$; $\phi_2 \cdot n = 0$ (die dun lagie ruil nie massa uit met die buitewêreld nie); $\gamma_2 = 0$ (in die materiële beskrywing is daar geen massavloed oor C nie - sien Figuur 3.8 op bl 86); $b_2 = 0$. Hierin is $\rho_i \equiv$ massadigtheid en $v_i \equiv$ snel=heid.

Vir massabehoud lewer (3.65) dus

$$\rho_1 v_1 \cdot n - \rho_1 \partial_t f \cdot n = 0, \text{ dit wil sê}$$

$$v_1 \cdot n = \partial_t f \cdot n = v_2 \cdot n \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \qquad (3.84)$$

Die massabehoudwet (3.84) word, soos vir die eendimensionale geval in Voorbeeld 1, gewoonlik gegee as kinematiese randvoorwaarde [Milne-Thomson, 1965, bl 74]. Vergelyking (3.84) moet nie losstaande van (3.63) gesien word nie. Laasgenoemde massabehoudwet neem die feit in ag dat daar nie massa-oordrag tussen die randmedium en die interne medium plaasvind nie en is ingebou in (3.65) waaruit (3.84) afgelei is. [Landau en Lifshitz, 1959, bl 242] gee die massabehoudwet (3.63) as randvoorwaarde wat moet geld vir 'n dun lagie.

Vir die geval van momentumbehoud geld in (3.65) die volgende:

$u_1 = \rho_1 v_1$; $u_2 = \rho_2 v_2$, dit wil sê $w_2 = v_2$; $\gamma_1 = \rho_1 v_1 \otimes v_1 - \tau_1$ met die momentumvloedmatriks sodanig dat $\rho_1 v_1 \otimes v_1 \cdot n = \rho_1 v_1 (v_1 \cdot n)$; $\phi_2 = -\tau_3 = p_o I$ (die kontak van die dun randmedium met die 'buitewêreld' behels slegs atmosferiese druk p_o); $\gamma_2 = -\tau_2$(in die materiële beskrywing is $\psi_2 = 0$, aangesien daar geen momentumvloed oor C is nie - sien Figuur 3.8).

Die vorm van (3.65) as momentumbehoudwet is dus

$$\rho_1 v_1 (v_1 \cdot n) - \tau_1 \cdot n - \rho_1 v_1 (\partial_t f \cdot n) = \rho_2 (\partial_t v_2 + \operatorname{grad} v_2 \cdot \partial_t f)$$

$$+ p_o I \cdot n - \operatorname{curl}(n \times \tau_2) \cdot n - b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T).$$

Deur (3.84) in hierdie laaste vergelyking te vervang volg die mees *algemene randvoorwaarde* as die momentumbehoudwet

$$\rho_2 (\partial_t v_2 + \operatorname{grad} v_2 \cdot v_2) = -\tau_1 \cdot n - p_o I \cdot n + \operatorname{curl}(n \times \tau_2) \cdot n$$

$$+ b_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T). \qquad (3.85)$$

Deur spesifieke samestellingsvergelykings met hierdie algemene randvoorwaarde te kombineer, volg op die gebruiklike wyse meer spesifieke randvoorwaardes.

Vir die geval van perfekte meganiese kontak op die rand ('geen-glipvoorwaarde') geld nie net (3.84) nie, maar wel die samestellingsvergelyking van kontak

$$v_1 = v_2 \text{ op } \partial G_1(t) \times (0,T).$$

(Kyk in dié verband na Voorbeeld 2 van Paragraaf 3.3 waar die geen-glipvoorwaarde bespreek is.) In só 'n geval bevat (3.85) tydafgeleides van v_1, raaklynige afgeleides van v_1 (in die term $\operatorname{grad} v_1$) asook moontlike normaalafgeleides van v_1 (in die term $\tau_1 \cdot n$). Afhangend van die materiaaleienskappe van die randmedium kan verdere ruimtelike afgeleides van v_1 ook deur die term $\operatorname{curl}(n \times \tau_2) \cdot n$ tot (3.85) toetree. Vergelyking (3.85) is dus in die lig hiervan direk 'n *dinamiese randvoorwaarde* soos gedefinieer in Paragraaf 2.7.2.

Verskeie spesiale gevalle van (3.85) word in die literatuur aangetref. [Peters, 1950] aanvaar in sy probleem van die beweging van verbrokkelde pakys op die oppervlak van die water (i) dat die beweging 'klein' is ($\text{grad}v_2 \cdot v_2 = 0$), (ii) die water is 'n ideale vloeistof ($\tau_1 = -p_1 I$), (iii) perfekte meganiese kontak ten spyte van die ideale-vloeistof-aanname ($v_2 = v_1$), (iv) geen onderlinge kragte tussen die afsonderlike pakysdeeltjies nie ($\tau_2 = 0$), (v) die afwesigheid van oppervlaktespanning ($b_2 = -\rho_2 g$ met $g \equiv$ swaartekragsversnelling). Vergelyking (3.85) is vir sy probleem

$$\rho_2 \partial_t v_1 = (p_1 - p_o)n - \rho_2 g.$$

Geskryf in terme van 'n potensiaalfunksie vir die snelheid bevat hierdie randvoorwaarde tyd- en ruimtelike afgeleides.

Randvoorwaardes van traksie volg uit (3.85) deur te aanvaar dat die rand=medium afwesig is, dit wil sê $\rho_2 = 0$ en $\tau_2 = 0$. Dan is

$$\tau_1 \cdot n = -p_o I \cdot n + b_2. \tag{3.86}$$

Dir bronterm b_2 bevat terme van oppervlaktespanning en ekstern aangewende kragte. Normaalweg word geen eksterne kragte op die oppervlak aangewend nie en bestaan b_2 slegs uit oppervlaktespanning. Volgens [Wehausen en Laitone, 1960, bl 452, 462] is die samestellingsvergelyking vir die oppervlaktespanning

$$b_2 = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n$$

waar T die koëffisiënt van oppervlaktespanning is, en R_1 en R_2 die hoofkromingstrale van die vloeistofoppervlak (dit wil sê funksies van die meetkunde van die oppervlak). Uit (3.86) volg dan die rand=voorwaarde

$$\tau_1 \cdot n + p_o n = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n. \tag{3.87}$$

Vergelyking (3.87) wat hier volg uit 'n momentumbehoudwet, is die sprong=voorwaarde wat [Wehausen en Laitone, 1960, bl 451, 453] gee as 'n aanname wat moet geld vir die normaalkomponente van die spanning by die vloeistof=oppervlak.

'n *Vrye-oppervlak-probleem* ('Sloshing problem') word bespreek deur [Stoker, 1957, bl 15,16]. Hy verwaarloos in (3.86) sowel p_o as die oppervlaktespanning b_2, en aanvaar dat die vloeistof ideaal is. In terme van die formulering van die probleem soos in hierdie hoofstuk is die randvoorwaarde wat volg uit die momentumbehoudwet

$$\tau_1 \cdot n = 0. \tag{3.88}$$

Vergelyking (3.88) en (3.86) kan beskou word as *veralgemeende Neumann-randvoorwaardes.*

Dirichlet-randvoorwaardes kan ook uit (3.85) afgelei word. Indien die randmedium star is, kan

$$v_2(x,t) = V_2(t).$$

Stel verder

$$b_2(x,t) = \rho_2 \bar{b}_2(t).$$

Neem aan dat die terme in (3.85) wat ρ_2 nie eksplisiet bevat nie, begrens is. Deel (3.85) met ρ_2 en neem die limiet as $\rho_2 \to \infty$. Vergelyking (3.85) reduseer in dié geval tot

$$\partial_t V_2 = \bar{b}_2(t).$$

Die impuls van hierdie behoudwet lewer

$$v_2(x,t) = V_2(t) = \int_0^t \bar{b}_2(\tau)d\tau + V_2(0), \tag{3.89}$$

wat 'n Dirichlet-randvoorwaarde is.

Soos tevore volg Dirichlet-randvoorwaardes dus deur 'n 'massiewe' krag aan te wend op 'n 'massiewe' randmedium.

[Stoker, 1957, bl 9,12] formuleer die vrye-rand-probleem in terme van 'n potensiaalfunksie vir die snelheidsveld en maak die interessante opmerking dat twee randvoorwaardes, naamlik 'n kinematiese en dinamiese voorwaarde, op die vrye rand geld, terwyl slegs een randvoorwaarde geld op die vaste rand. In die lig van die werk in hierdie hoofstuk geld by albei rande twee randvoorwaardes, naamlik die momentum- en massabehoudwet. Dit kan aangetoon word dat vir die geval van die vrye rand [Stoker, 1957, bl 16] se dinamiese randvoorwaarde vir die snelheidspotensiaal ekwivalent is aan die momentumbehoudwet (3.88), terwyl die kinematiese randvoorwaarde ekwivalent is aan die massabehoudwet (3.84). Vir die geval van die vaste rand lewer die momentumbehoudwet die Voorwaarde (3.89), naamlik

$$v_2(x,t) = 0.$$

Uit die massabehoudwet (3.84) volg dan die addisionele randvoorwaarde vir die vaste rand

$$v_1 \cdot n = 0.$$

Laasgenoemde is ekwivalent met die enkele randvoorwaarde wat volgens [Stoker, 1957, bl 16] geld op die vaste rand.

HOOFSTUK 4

DUN-RANDMODELLEERBAARHEID

4.1 INLEIDING

In Hoofstuk 2 en Hoofstuk 3 is randvoorwaardes geformuleer deur gebruik te maak van die dinamika van die randmedium en sy wisselwerking met die interne gebied. In beide hoofstukke is randvoorwaardes geformuleer met behulp van die twee soorte randmodelle, naamlik dik-randmodelle en dun-randmodelle. Die toepasbaarheid van 'n spesifieke model het afgehang van die praktiese situasie waarvoor randvoorwaardes geformuleer moes word.

Fisies bestaan daar nie iets soos 'n nul-, een- of tweedimensionale medium nie. In die praktyk beslaan alle media, hoe dun ookal, 'n driedimensionale gebied. Die vraag ontstaan dus hoe sinvol dit is om dun-randmodelle te gebruik indien daar nie so iets soos 'n dun medium is nie. In die litera=tuur word baie min aandag hieraan gewy. [Batra, 1972] doen werk in hierdie rigting wanneer hy 'n randmedium ('loading device') se fisiese eienskappe manipuleer, terwyl [Geymonat en Sanchez-Palencia, 1981] ook ontleed wat die effek is van variërende randmediumparameters op die oplos=sings en spektraaleienskappe van die akoestiese probleem wat hulle ontleed.

In hierdie hoofstuk word riglyne neergelê wat gebruik kan word om te besluit of 'n dik-randmodel gebruik moét word en of 'n dun-randmodel dalk gebruik mag word om die randvoorwaardes vir 'n spesifieke probleem te formuleer. Die werk word deurgevoer vir een- en driedimensionale probleme vir die geval van 'n stasionêre rand. In die proses word die resultate van Hoofstuk 2 gebruik. Dieselfde analise kan deurgevoer word vir die tweedimensionale probleem met 'n stasionêre rand en vir probleme met 'n bewegende rand.

4.2 BASIESE AANNAMES EN DEFINISIES RONDOM DIE BEGRIP 'DUN-RANDMODELLEERBAARHEID'

4.2.1 Notasie

In Hoofstuk 2 is aanvaar dat die randvoorwaardes op die rand ∂G_1 van 'n gebied G_1 (en gevolglik ook die oplossing van die probleem in $G_1 \times (0,T)$) afhanklik is van die behoudwette en samestellingsvergelykings van die rand=medium in G_2. Die veralgemeende randvoorwaardes wat met behulp van die verskillende randmodelle geformuleer is, het telkens hierdie afhanklikheid onderstreep. Vir 'n probleem geformuleer op $G_1 \times (0,T)$ het die randvoor=waardes geformuleer met behulp van die dik- en dun-randmodelle van mekaar verskil. (Vergelyk byvoorbeeld (2.8) met (2.31) en (2.10) met (2.36).) Die verskillende soorte randmodelle (dik of dun) sal dus ook verskillende oplossings in $G_1 \times (0,T)$ tot gevolg hê. Daar moet dus 'n onderskeid getref word tussen funksies gedefinieer vir die probleem met 'n dik-randmodel en dié gedefinieer vir die probleem met die dun-randmodel. Die volgende afspraak word gemaak:

> Geaksentueerde funksies sal gedefinieer wees in $G_1 \times (0,T)$ of $G_2 \times (0,T)$ vir die geval waar G_2 'n dun rand is. Ongeaksentueerde funksies is gedefinieer in $G_1 \times (0,T)$ of $G_2 \times (0,T)$ vir die geval waar G_2 'n dik rand is. Die afspraak van Paragraaf 1.3.1 in verband met die onder=skrifte 1 en 2 wat dui op funksies gedefinieer vir $G_1 \times (0,T)$ en $G_2 \times (0,T)$ respektiewelik, bly van krag.

In die lig van die afspraak is byvoorbeeld ϕ_1' die vloedfunksie gedefinieer in $G_1 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dun rand G_2, terwyl b_2 'n bronfunksie is gedefinieer in $G_2 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dik rand G_2.

4.2.2 Basiese aannames in verband met bronne, beginwaardes en die vloed oor die rand van die randgebied.

Die dik-randmodel en die dun-randmodel is albei pogings om dieselfde fisiese proses wiskundig te beskryf. In die lig hiervan word die volgende vier aannames gemaak:

A1 Vir die entiteit waarvoor die behoudwet geld, is die vloed oor die rand van die randgebied G_2, uitgesluit die vloed oor ∂G_1, vir beide randmodelle dieselfde.

A2 Die tempo waarteen bronne die entiteit in die volle randgebied G_2 vrystel, uitgesluit kontakbronne op ∂G_1, is dieselfde vir albei modelle.

A3 Die brondigtheidsfunksies b_1 en b_1' wat die tempo beskryf waarteen bronne in G_1 die entiteit vir die dik- en dun-randmodel respektiewelik vrystel, is gelyk aan mekaar.

A4 Die begintoestand in G_1 is vir die probleme met die dik- en dun-randmodelle respektiewelik dieselfde.

4.2.3 Die begrip 'parameterlimiet'

Met die randgebied G_2 kan verskeie parameters geassosieer word. Sulke parameters sluit byvoorbeeld in die vorm en afmetings van G_2, fisiese konstantes geassosieer met die funksies gedefinieer in $G_2 \times (0,T)$ asook funksiewaardes. Met die interne gebied G_1 word soortgelyke parameters geassosieer.

Onder die begrip 'parameterlimiet' word verstaan 'n proses waar een of meer van die parameters geassosieer met G_1 of G_2, neig na die een of ander limietwaarde.

4.2.4 Die begrip 'dun-randmodelleerbaarheid'

Laat u_1 en γ_1 digtheidsfunksies wees gedefinieer in $G_1 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dik-randmodel. Die ooreenstemmende funksies gedefinieer in $G_1 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dun-randmodel is u_1' en γ_1'. (Kyk weer na Paragraaf 4.2.1). Die volgende definisie word gegee:

> Die probleem geformuleer in $G_1 \times (0,T)$ is dun-randmodelleerbaar indien
>
> $$u_1 \to u_1' \quad \text{en} \quad \gamma_1 \to \gamma_1' \quad \text{vir elke } (x,t) \text{ in } G_1 \times (0,T)$$
>
> vir die een of ander parameterlimiet.

Hierdie definisie lei tot kriteria op grond waarvan besluit kan word of die dik-randmodel gebruik moét word en of die dun-randmodel dalk gebruik mag word.

In die voorbeelde wat later bespreek word sal blyk dat die parameterlimiet waarvan in die definisie sprake is, normaalweg limietwaardes is van parameters geassosieer met G_2. Die moontlikheid dat parameters geasso= sieer met G_1 'n rol speel, is egter nie uitgesluit nie.

4.3 DUN-RANDMODELLEERBAARHEID - EENDIMENSIONAAL

Die probleem wat ontleed word, is dié van 'n behoudwet wat geld in 'n eendimensionale gebied G_1 met die randgebied G_2 òf eendimensionaal (dik), òf nuldimensionaal (dun).

Vir beide gevalle geld die Behoudwet (2.3) van Hoofstuk 2 met $G_1 = (-a,0)$.

Vir die dik rand geld die Randvoorwaarde (2.8) van Hoofstuk 2 met $G_2 = (0,L)$.

Vir die dun rand geld die Randvoorwaarde (2.31) van Hoofstuk 2 met $G_2 = \{0\}$.

Die dik-randmodel lewer dus die probleem

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + \partial_x \gamma_1 &= b_1 \text{ in } G_1 \times (0,T) \\ u_1(x,0) &= f_1(x), \; -a < x < 0 \\ \gamma_1(0,t) &= \gamma_2(L,t) - B(0,t) - \int_0^L b_2(x,t)dx \\ &\quad + \frac{d}{dt}\int_0^L u_2(x,t)dx, \; t \in (0,T). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vir die dun-randmodel volg die aanverwante probleem

$$\begin{aligned} \partial_t u_1' + \partial_x \gamma_1' &= b_1' \text{ in } G_1 \times (0,T) \\ u_1'(x,0) &= f_1'(x), \; -a < x < 0 \\ \gamma_1'(0,t) &= \dot{u}_2'(t) + \phi_2'(t) - b_2'(t), \; t \in (0,T). \end{aligned} \tag{4.2}$$

In (4.1) en (4.2) is $b_1 = b_1'$ (Aanname A3), $f_1 = f_1'$ (Aanname A4) en

$$\gamma_2(L,t) - B(0,t) - \int_0^L b_2(x,t)dx = \phi_2'(t) - b_2'(t)$$

(Aanname A1 en A2).

Stel nou

$$w = u_1 - u_1' \quad \text{en} \quad p = \gamma_1 - \gamma_1'. \tag{4.3}$$

Uit (4.1) en (4.2) volg dan

$$\partial_t w + \partial_x p = 0 \text{ in } G_1 \times (0,T)$$

$$w(x,0) = 0, \ -a < x < 0$$

$$p(0,t) = \frac{d}{dt}\int_0^L u_2(x,t)dx - \dot{u}_2'(t), \ t \in (0,T). \tag{4.4}$$

In die verdere analise van die probleem is dit gerieflik om te werk met dimensielose veranderlikes. Die volgende transformasie na dimensielose veranderlikes X en τ word gebruik:

$$x = aX \quad \text{en} \quad t = \alpha(a,K_i)\tau. \tag{4.5}$$

Hierin is $\alpha > 0$ vir elke spesifieke probleem 'n parameter wat afhanklik is van a en parameters K_i geassosieer met die probleem.

Die intervalle (0,T) en (-a,0) transformeer na $(0,\bar{T})$ en (-1,0) respektie=welik, terwyl

$$\partial_t = \frac{1}{\alpha}\partial_\tau \quad \text{en} \quad \partial_x = \frac{1}{a}\partial_X.$$

Die getransformeerdes van alle funksies in (4.4) word aangedui met hoofletters, byvoorbeeld

$$Q(X,\tau) = q(x,t).$$

Probleem (4.4) reduseer dan tot

$$\partial_\tau W + \frac{\alpha}{a}\partial_X P = 0, \ -1 < X < 0, \ \tau \in (0,\bar{T}) \tag{4.6a}$$

$$W(X,0) = 0, \ -1 < x < 0 \tag{4.6b}$$

$$P(0,\tau) = \frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\frac{L}{a}} U_2(X,\tau)dX - \frac{1}{\alpha}\dot{U}_2'(\tau), \ \tau \in (0,\bar{T}). \tag{4.6c}$$

Die energietegniek word nou toegepas op hierdie probleem. Dit lei tot 'n nodige voorwaarde vir die dun-randmodelleerbaarheid van die probleem.

Uit (4.6a) volg

$$W\cdot\partial_\tau W + \frac{\alpha}{a}W\cdot\partial_X P = 0$$

$$\partial_\tau(\tfrac{1}{2}\| W\|^2) + \frac{\alpha}{a}W\cdot\partial_X P = 0.$$

(Die betekenis van $\| W\|^2$ is gedefinieer in Paragraaf 1.3.2.)

Integreer nou met betrekking tot X oor die willekeurige interval (-Y,0), waar $0 < Y < 1$.

$$\int_{-Y}^{0}\partial_\tau(\tfrac{1}{2}\| W\|^2)dX + \int_{-Y}^{0}\frac{\alpha}{a}W\cdot\partial_X P dX$$

$$= \frac{d}{d\tau}\int_{-Y}^{0}\tfrac{1}{2}\| W\|^2 dX + \frac{\alpha}{a}W(0,\tau)\cdot P(0,\tau) - \frac{\alpha}{a}W(-Y,\tau)\cdot P(-Y,\tau)$$

$$- \int_{-Y}^{0}\frac{\alpha}{a}P\cdot\partial_X W dX = 0.$$

Aanvaar nou volgens die definisie van dun-randmodelleerbaarheid (Paragraaf 4.2.4) en uit Vergelyking (4.3) dat

$$W(-Y,\tau)\cdot P(-Y,\tau) \to 0$$

in die laaste vergelyking. Integreer hierdie vergelyking met betrekking tot τ oor die willekeurige interval $(0,T) \subset (0,\overline{T})$.

$$\int_{-Y}^{0}\tfrac{1}{2}\| W(X,T)\|^2 dX - \int_{-Y}^{0}\tfrac{1}{2}\| W(X,0)\|^2 dX$$

$$+ \int_{0}^{T}\frac{\alpha}{a}W(0,\tau)\cdot P(0,\tau)d\tau - \int_{0}^{T}\int_{-Y}^{0}\frac{\alpha}{a}\partial_X W(X,\tau)\cdot P(X,\tau)dX = 0.$$

Met behulp van (4.6b) volg hieruit dat

$$\int_{0}^{T}\frac{\alpha}{a}W(0,\tau)\cdot P(0,\tau)d\tau = \int_{0}^{T}\int_{-Y}^{0}\frac{\alpha}{a}\partial_X W\cdot P dX - \int_{-Y}^{0}\tfrac{1}{2}\| W(X,T)\|^2 dX. \quad (4.7)$$

Volgens die definisie in Paragraaf 4.2.4 en Vergelyking (4.3) sal die oorspronklike probleem geformuleer op $G_1 \times (0,T)$ dun-randmodelleerbaar wees indien

$$W(X,\tau) \to 0 \quad \text{en} \quad P(X,\tau) \to 0$$

vir alle $X \in (-1,0)$ vir alle $\tau \in (0,\bar{T})$ vir die een of ander parameterlimiet. Wanneer hierdie resultaat toegepas word op (4.7) volg dus 'n nodige voorwaarde vir dun-randmodelleerbaarheid met die vorm

$$\int_0^T \frac{\alpha}{a} W(0,\tau) \cdot P(0,\tau)d\tau \to 0 \qquad (4.8)$$

vir die een of ander parameterlimiet. Indien die integrand in (4.8) lokaal-integreerbaar is, volg uit die willekeurigheid van T die volgende nodige voorwaarde vir dun-randmodelleerbaarheid:

$$\frac{\alpha}{a} W(0,\tau)\cdot P(0,\tau) \to 0 \text{ vir alle } \tau \in (0,T) \qquad (4.9)$$

vir die een of ander parameterlimiet.

Vir spesifieke probleme, elk met sy eie stel samestellingsvergelykings sal met behulp van (4.8) en (4.9) uitspraak gegee kan word oor die nodige voorwaardes vir dun-randmodelleerbaarheid. Tog kan reeds nou al hieromtrent uitsprake gemaak word. Die moontlikheid dat

$$\frac{\alpha}{a} \to 0$$

in (4.9) moet buite rekening gelaat word, want dan is die Transformasie (4.5)

$$(x,t) \to (X,\tau)$$

singulier. Die volgende drie hoofmoontlikhede as nodige voorwaardes vir dun-randmodelleerbaarheid van die oorspronklike probleem word onderskei:

(a) Stel $W(0,\tau) = V(0,\tau) + \varepsilon(\tau)$ met $V(0,\tau)$ en $P(0,\tau)$ ortogonaal en ongelyk aan nul en $\varepsilon(\tau) \to 0$ vir die parameterlimiet. Die meer bekende vergelykings van die matematiese fisika soos die golf- en hittevergelyking kan hierdie voorwaarde nie bevredig nie.

Vir die hittevergelyking byvoorbeeld is

$$p(x,t) = -K_1 \partial_x w(x,t)$$

sodat $w(x,t)p(x,t) = -K_1 \partial_x(\frac{1}{2}w^2(x,t)) \nrightarrow 0$ oor die algemeen, en in die besonder by $x = 0$. Soortgelyk is die getransformeerde hiervan

$$-\frac{K_1}{\alpha}\partial_X(\tfrac{1}{2}W^2)(0,\tau) = W(0,\tau)P(0,\tau) \neq 0.$$

Vir die golfvergelyking word verwys na Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.7.2. Daarvolgens is

$$w = \begin{bmatrix}\rho_1 v_1\\ q_1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\rho_1 v_1'\\ q_1'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_1 y\\ z\end{bmatrix}$$

en $p = \begin{bmatrix}-\lambda_1\partial_x q_1\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\lambda_1\partial_x q_1'\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda_1\partial_x z\\ 0\end{bmatrix}.$

Hierin is

$$z = q_1 - q_1' \quad \text{en} \quad y = v_1 - v_1' = \partial_t z.$$

Met behulp hiervan volg vir alle $(x,t) \in G_1 \times (0,T)$ dat

$$\begin{aligned} w\cdot p &= \begin{bmatrix}\rho_1 y\\ z\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-\lambda_1\partial_x z\\ 0\end{bmatrix}\\ &= -\lambda_1 \rho_1 \partial_t z \partial_x z \end{aligned}$$

$\neq 0$ oor die algemeen.

Uit die getransformeerde hiervan volg dat

$$W(0,\tau)\cdot P(0,\tau) = -\frac{\lambda_1\rho_1}{a\alpha}\partial_\tau Z(0,\tau)\partial_X Z(0,\tau)$$

$\neq 0$ oor die algemeen.

(b) Die tweede moontlikheid is dat $W(0,\tau) \to 0$ vir die parameterlimiet. Dit sal die geval wees indien voorgeskryf word dat

$$u_1(0,t) = g(t) \text{ en } u_1'(0,t) = g(t) + \varepsilon(t)$$

terwyl $\varepsilon(t) \to 0$ vir die parameterlimiet. Dié twee randvoorwaardes vir die probleem met dik- en dun-randmodel respektiewelik is Dirichlet-randvoor=waardes. Vroeër is aangetoon dat Dirichlet-randvoorwaardes fisies moeilik realiseerbaar is. Indien dit egter wel voorgeskryf word, toon hierdie analise dat die probleem dun-randmodelleerbaar mag wees.

(c) Die derde moontlikheid is dat $P(0,\tau) \to 0$ vir die parameterlimiet. Hierdie voorwaarde kan in twee gevalle bevredig word.

(i) Laat $\gamma_1(0,t) = g(t)$ en $\gamma_1'(0,t) = g(t) + \varepsilon(t)$ waar $\varepsilon(t) \to 0$ vir die parameterlimiet. Dié twee voorwaardes beteken dat veral= gemeende Neumann-randvoorwaardes voorgeskryf word vir die probleem met die dik- en dun-randmodel respektiewelik. Vroeër is aangetoon dat die voorskryf van veralgemeende Neumann-randvoorwaardes neerkom op die miskenning van 'n randmedium. Indien sulke randvoorwaardes egter wel voorgeskryf word, toon die analise dat die probleem wel dun-randmodelleerbaar mag wees.

(ii) Volgens (4.6c) sal $P(0,\tau) \to 0$ indien

$$\frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_0^{L/a} U_2(X,\tau)dX - \frac{1}{\alpha}\dot{U}_2'(\tau) \to 0 \qquad (4.10)$$

vir die parameterlimiet. Wanneer (4.10) verder ontleed word speel die meetkunde van die randmedium en die samestellings= vergelykings van die probleem 'n belangrike rol. Wanneer 'n probleem ondersoek word ten opsigte van dun-randmodelleerbaarheid, word dus veral gekyk na Vergelyking (4.10).

Voorbeeld

Om aan te toon hoe dun-randmodelleerbaarheid by eendimensionale probleme ondersoek word, word die probleem beskou van 'n homogene veer met lengte a wat op 'n horisontale gladde tafel vibrasies uitvoer. Die linkerkant van die veer is vas. By die regterkant is die veer gekoppel aan óf 'n ander veer met homogene eienskappe en lengte L (dit is die dik-randmodel soos bespreek in Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.7.2), óf 'n puntmassa (dit is die dun-randmodel soos bespreek in Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.9.1). Die beheervergelykings van die probleem word, soos in die genoemde voorbeelde geformuleer as 'n stelsel van twee behoudwette. Die aandag word weer gevestig op die afspraak in verband met notasie in Paragraaf 4.2.1.

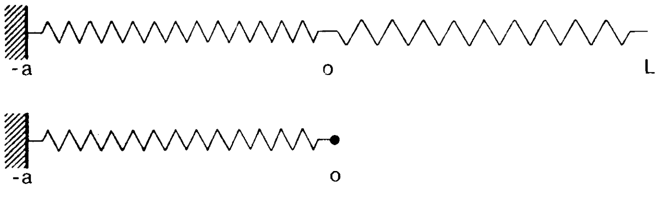

Fig. 4·1

Die beheervergelyking vir (-a,0) x (0,T) vir die geval van die dik-randmodel is

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 q_1 \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} -\lambda_1 \partial_x q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_1 v_1 \end{bmatrix} \text{ in } (-a,0) \times (0,T). \qquad (4.11)$$

Hierin is q_1 = verplasing, ρ_1 = konstante digtheid, v_1 = snelheid en λ_1 = konstante elastisiteitsmodulus.

'n Soortgelyke vergelyking met v_1' en q_1' as afhanklike funksies geld ook in (-a,0) x (0,T) vir die geval van die dun-randmodel.

Die vorm van die beheervergelyking in (0,L) x (0,T) vir die dik randmedium is ook soos dié van (4.11), maar het q_2 en v_2 as afhanklike funksies en ρ_2 en λ_2 as konstantes.

Die beheervergelyking vir die partikel (dun randmedium) is

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Mv_2'(t) \\ Mq_2'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \partial_x q_1'(0,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Mv_2'(t) \end{bmatrix} \text{ vir } t \in (0,T). \qquad (4.12)$$

Hierin is M = die massa van die partikel (= $\rho_2 L$ = die massa van die dik randmedium), $v_2'(t)$=die snelheid van die partikel (= $v_1'(0,t)$ vir perfekte meganiese kontak) en $q_2'(t)$ = die posisie van die partikel (= $q_1'(0,t)$ vir perfekte meganiese kontak).

(Die voorkoms van ρ_1 by die tweede komponent van (4.11) en M by die tweede komponent van (4.12) mag vreemd voorkom, aangesien hulle in die oorspronk= like Vergelykings (2.21b) en (2.47) ontbreek. Die rede vir hierdie toevoegings van ρ_1 en M lê by die verdere analise van die dun-randmodel= leerbaarheid waar dit noodsaaklik is dat eenhede moet balanseer - kyk byvoorbeeld na Vergelykings (4.18) en (4.19) hierna.)

Die Transformasie (4.5)

$$x = aX \quad \text{en} \quad t = \alpha\tau$$

reduseer Vergelykings (4.11) en (4.12) respektiewelik tot

$$\partial_\tau \begin{bmatrix} \rho_1 V_1 \\ \rho_1 Q_1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{a} \partial_X \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1}{a} \partial_X Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_1 V_1 \end{bmatrix} \text{ in } (-1,0) \times (0,\mathcal{T}) \qquad (4.13)$$

en

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} MV_2'(\tau) \\ MQ_2'(\tau) \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{a}\partial_X Q_1'(0,\tau) \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ MV_2'(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{vir } \tau\in(0,T). \qquad (4.14)$$

Beheervergelykings soortgelyk aan (4.13) geld vir $(-1,0) \times (0,T)$ vir die geval van die dun-randmodel en vir $(0,\frac{L}{a}) \times (0,T)$ vir die dik randmedium.

In die lig van die teorie wat vroeër in die paragraaf met behulp van die energie-identiteit ontwikkel is en wat op hierdie voorbeeld toegepas word, volg uit (4.3) dat

$$W(0,\tau) = \begin{bmatrix} \rho_1 V_1(0,\tau) \\ \rho_1 Q_1(0,\tau) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_1 V_1'(0,\tau) \\ \rho_1 Q_1'(0,\tau) \end{bmatrix} \quad . \qquad (4.15)$$

en

$$P(0,\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1}{a}\partial_X Q_1(0,\tau) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1}{a}\partial_X Q_1'(0,\tau) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

Volgens (4.10) is

$$P(0,\tau) = \frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_0^{L/a}\begin{bmatrix} \rho_2 V_2(X,\tau) \\ \rho_2 Q_2(X,\tau) \end{bmatrix} dX - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} MV_2'(\tau) \\ MQ_2'(\tau) \end{bmatrix} \qquad (4.17)$$

Met behulp van (4.15) tot (4.17) kan die drie hoofmoontlikhede (dit wil sê nodige voorwaardes), soos vroeër in hierdie paragraaf genoem, verder ondersoek word vir die vibrasieprobleem van hierdie voorbeeld. Die vroeëre bespreking ten opsigte van ortogonaliteit (Hoofmoontlikheid a), Dirichlet-randvoorwaardes (Hoofmoontlikheid b) en Neumann-randvoorwaardes (Hoofmoontlikheid c(i)) is net so van toepassing op die huidige probleem. Die oorblywende Hoofmoontlikheid c(ii) word nou geanaliseer met behulp van Vergelyking (4.17).

In (4.17) word nou gebruik gemaak van $M = \rho_2 L$ en die feit dat $V_2'(\tau)$ en $Q_2'(\tau)$ onafhanklik is van X. Dan volg

$$P(0,\tau) = \frac{\rho_2 a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_0^{L/a}\begin{bmatrix} V_2(X,\tau) - V_2'(\tau) \\ Q_2(X,\tau) - Q_2'(\tau) \end{bmatrix} dX$$

Hieruit volg dat $P(0,\tau) \to 0$ vir die een of ander parameterlimiet indien

$$\frac{\rho_2 a}{\alpha} \frac{d}{d\tau} \int_0^{L/a} (V_2(X,\tau) - V_2'(\tau))dX \to 0 \tag{4.18}$$

en

$$\frac{\rho_2 a}{\alpha} \frac{d}{d\tau} \int_0^{L/a} (Q_2(X,\tau) - Q_2'(\tau))dX \to 0 \tag{4.19}$$

vir die parameterlimiet. In die lig van (4.18) en (4.19) is die probleem dalk dun-randmodelleerbaar vir die gevalle wat hieronder bespreek word.

(1) Die voorwaardes (4.18) en (4.19) word bevredig indien

$$\frac{\rho_2 a}{\alpha} \to 0.$$

Vir die vibrasieprobleem wat hier bespreek word toon [Weinberger, 1965, bl 90] en [Coulson, 1955, bl 57] dat die transformasiekonstante

$$\alpha = a\sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_1}}$$

Voorwaardes (4.18) en (4.19) word dus bevredig indien

$$\rho_2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho_1}} \to 0$$

en die integrale as begrens aanvaar word. (Let op dat die nie-singulariteit van die Transformasies (4.5) met hierdie limietproses in gedrang kan kom.) Die probleem is dus dalk dun-randmodelleerbaar indien

$$\lambda_1 \to 0 \text{ of } \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}} \to 0.$$

Fisies beteken die voorwaarde $\lambda_1 \to 0$ dat daar vir alle praktiese doeleindes geen kontakkrag in die veer in $(-a,0)$ bestaan nie; die veer 'gee nie om' of daar aan sy regterkant 'n veer of 'n partikel is nie, want daar bestaan nie 'n meganisme om die kontak-effek tussen die randmedium en die interne gebied by $x = 0$ in die gebied $(-a,0)$ in voort te plant nie.

Die voorwaarde

$$\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}} \to 0$$

beteken fisies dat die interne medium in (-a,0) só massief is in vergelyking met die randmedium dat geen eindige kragte op hom uitgeoefen deur die randmedium, hom kan versnel nie.

Vir beide $\lambda_1 \to 0$ en $\rho_1 \to \infty$ sal die voortplantingsnelheid van effekte in die interne gebied

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho_1}} \to 0.$$

Dit onderstreep die voorafgaande fisiese interpretasies.

Die geval $\rho_2 \to 0$ impliseer dat die randmedium massaloos word. Uit (4.12) en sy eweknie vir die dik-randmodel (dit is die vergelyking soortgelyk aan (4.11) maar wat geld vir die dik randmedium) volg dit duidelik dat hierdie parameterlimiet die voorskryf van Neumann-randvoorwaardes behels.

(2) Uit (4.18) en (4.19) is die probleem onder bespreking ook moontlik dun-randmodelleerbaar indien die integrande lokaal integreerbaar is, met

$$\frac{\rho_2 a}{\alpha} = \rho_2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\rho_1}} \text{ begrens en } \frac{L}{a} \to 0.$$

Die parameterlimiet $\frac{L}{a} \to 0$ beteken dat die lengte van die veer wat as randmedium dien in (0,L), klein is in vergelyking met die lengte van die veer in (-a,0). Die kort veer in (0,L) mag as 'n partikel gemodelleer word.

(3) Nog 'n moontlikheid van dun-randmodelleerbaarheid kom voor wanneer (4.18) en (4.19) respektiewelik bevredig word deur die voorwaardes

$$\partial_\tau V_2(X,\tau) \to \partial_\tau V_2'(\tau) \qquad (4.20)$$

$$\text{en } \partial_\tau Q_2(X,\tau) \to \partial_\tau Q_2'(\tau). \qquad (4.21)$$

Aangesien

$$V_2(X,\tau) = \partial_\tau Q_2(X,\tau) \qquad (4.22)$$

$$\text{sal } V_2(X,\tau) \to \partial_\tau Q_2'(\tau) = \phi(\tau).$$

Die gevolg van die limietproses is dus dat alle punte in die rand=gebied dieselfde snelheid op dieselfde tydstip besit. Die randmedium neig dus na 'n starre liggaam. (In Voorbeeld 1 van Paragraaf 2.7.2 is aangetoon hoe hierdie resultaat kan volg deur die parameterlimiet $\lambda_2 \to \infty$.) Vir die starre liggaam is

$$V_2(X,\tau) = V_1(0,\tau) = V_2^{!}(\tau)$$

en word (4.20) bevredig. Uit (4.22) volg dan dat

$$Q_2(X,\tau) = \int_0^{\tau} V_1(0,\bar{\tau})d\bar{\tau} + Q_2(X,0)$$

om sodoende (4.21) te bevredig.

'n Starre randmedium is dus moontlik dun-randmodelleerbaar.

(4) In die vierde plek word (4.18) en (4.19) bevredig indien

$$V_2^{!}(\tau) \to \frac{a}{L}\int_0^{L/a} V_2(X,\tau)dX$$

$$\text{en } Q_2^{!}(\tau) \to \frac{a}{L}\int_0^{L/a} Q_2(X,\tau)dX.$$

$V_2^{!}(\tau)$ neig dus na die gemiddelde snelheid van die randmedium en $Q_2^{!}(\tau)$ na die posisie van die sentroïde van die randmedium.

Indien aanvaar word dat die posisie en snelheid van die randpartikel dieselfde is as dié van die eindpunt van die veer waaraan dit gekoppel is, lewer die twee uitdrukkings hierbo nie nuwe voorwaardes vir dun-randmodelleerbaarheid op nie. Dit reproduseer wel die resultate van (2) (die randmedium se afmetings is sodanig dat $\frac{L}{a} \to 0$) en (3) (die randmedium is 'n starre liggaam).

4.4 DUN-RANDMODELLEERBAARHEID - DRIEDIMENSIONAAL

Die probleem wat hier ontleed word, is dié van 'n behoudwet wat geld in 'n driedimensionale gebied G_1 met die randgebied G_2 òf driedimensionaal (dik), òf tweedimensionaal ('n dun oppervlakte).

Vir albei gevalle geld die Behoudwet (2.5) van Hoofstuk 2. Die randvoor=waardes wat gebruik word, is Vergelyking (2.11) van Hoofstuk 2 vir die geval van die dik-randmodel en Vergelyking (2.35) van Hoofstuk 2 vir die geval van die dun-randmodel.

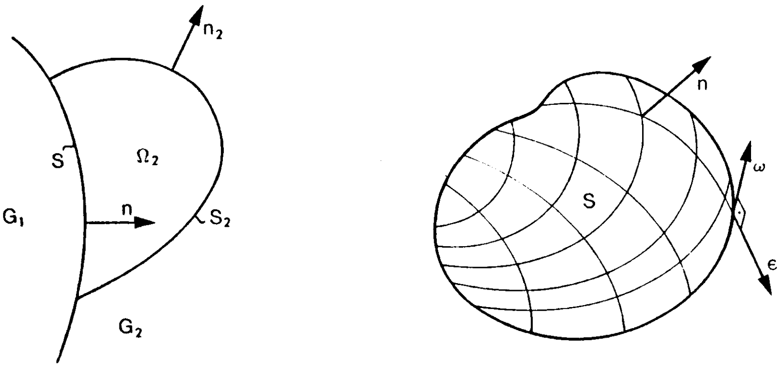

Fig. 4·2

Vir die geval van die dik-randmodel word die volgende probleem dus geformuleer:

$$\partial_t u_1 + \operatorname{div}\gamma_1 = b_1 \text{ in } G_1 \times (0,T)$$

$$u_1(x,0) = f_1(x) \text{ vir } x \in G_1$$

$$\int_S \gamma_1 \cdot n\,dS = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2\,dx + \int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2\,dS - \int_{\Omega_2} b_2\,dx$$

$$- \int_S B\,dS \text{ met } t \in (0,T). \qquad (4.23)$$

Vir die geval van die dun-randmodel geld die probleem

$$\partial_t u_1' + \operatorname{div}\gamma_1' = b_1' \text{ in } G_1 \times (0,T)$$

$$u_1'(x,0) = f_1'(x) \text{ vir } x \in G_1$$

$$\int_S \gamma_1' \cdot n\,dS = \frac{d}{dt}\int_S u_2'\,dS + \int_S \phi_2' \cdot n\,dS - \int_S b_2'\,dS$$

$$+ \oint_C \gamma_2' \cdot e\,d\ell \text{ met } t \in (0,T). \qquad (4.24)$$

Ten einde Aanname A2 sinvol toe te pas, is dit nodig om sekere beperkings op Ω_2 te plaas. Volgens die aanname moet die tempo waarteen die entiteit in S vrygestel word vir die geval van die dun-randmodel dieselfde wees as die vrystellingstempo in Ω_2 vir die geval van die dik-randmodel. Met 'n willekeurige $S \subset \partial G_1 = G_2$ vir die dun-randmodel moet dus op 'n sinvolle wyse 'n $\Omega_2 \subset G_2$ vir die dik-randmodel geassosieer word. Kriteria vir so 'n sinvolle assosiasie sal vir spesifieke probleme neergelê moet word. Die kriterium vir 'n probleem kan byvoorbeeld gekoppel wees aan die koördi= naatstelsel wat gebruik moet word of 'n voorwaarde dat die massa van 'n willekeurige S vir die dun-randmodel dieselfde moet wees as die massa van die geassosieerde Ω_2 vir die dik-randmodel.

Aanvaar nou die bestaan van so 'n assosiasiekriterium vir Ω_2 van Probleem (4.23) en S van Probleem (4.24).

Soos vir die geval van die eendimensionale probleem geld in (4.23) en (4.24) dat $b_1 = b_1'$ (Aanname A3), $f_1 = f_1'$ (Aanname A4) en

$$\int_{S_2} \gamma_2 \cdot n_2 dS - \int_{\Omega_2} b_2 dx - \int_S B dS$$
$$= \int_S \phi_2' \cdot n dS - \int_S b_2' dS + \oint_C \gamma_2' \cdot e d\ell$$

(Aanname A1 en A2).

Stel weer

$$w = u_1 - u_1' \text{ en } p = \gamma_1 - \gamma_1'. \tag{4.25}$$

In die lig van die aannames hierbo lewer (4.23) en (4.24) dan

$$\partial_t w + \operatorname{div} p = 0 \text{ in } G_1 \times (0,T)$$
$$w(x,0) = 0 \text{ vir } x \in G_1$$
$$\int_S p \cdot n dS = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_2} u_2 dx - \frac{d}{dt}\int_S u_2' dS \text{ met } t \in (0,T). \tag{4.26}$$

Laat a 'n tipiese lengte geassosieer met G_1 wees, byvoorbeeld 'n straal of breedte of [volume (G_1)/oppervlakte (∂G_1)]. 'n Transformasie word nou gemaak na die dimensielose veranderlikes X en τ met behulp van die transformasies

$$x = aX \text{ en } t = \alpha(a,K_i)\tau, \tag{4.5'}$$

net soos in die geval van die eendimensionale probleem van Paragraaf 4.3. Vir hierdie transformasie geld dat

$\partial_t = \frac{1}{\alpha}\partial_\tau$,

div $= \frac{1}{a}$DIV en grad $= \frac{1}{a}$GRAD,

$q(x,t) = Q(X,\tau)$ vir alle betrokke funksies,

$\overline{G}$ is die beeld van G,

$\overline{S}$ is die beeld van S,

$\overline{\Omega}_2$ is die beeld van Ω_2,

die eenheidsvektor n se beeld N is weer 'n eenheidsvektor,

$dS = a^2 d\overline{S}$ en $dx = a^3 d\overline{X}$.

Probleem (4.26) reduseer dan tot

$$\partial_\tau W + \frac{\alpha}{a}\mathrm{DIV}P = 0 \text{ in } \overline{G}_1 \times (0,\overline{T}) \qquad (4.27a)$$

$$W(X,0) = 0 \text{ vir } X \in \overline{G}_1 \qquad (4.27b)$$

$$\int_{\overline{S}} P\cdot Nd\overline{S} = \frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\overline{\Omega}_2} U_2 d\overline{X} - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\overline{S}} U_2' d\overline{S} \text{ met } \tau \in (0,\overline{T}). \qquad (4.27c)$$

Soos vir die eendimensionale geval word nou van energietegnieke gebruik gemaak. Uit (4.27a) volg dat

$$W\cdot\partial_\tau W + \frac{\alpha}{a}W\cdot\mathrm{DIV}P = 0$$

Dit word

$$\partial_\tau(\tfrac{1}{2}\|W\|^2) + \frac{\alpha}{a}W\cdot\mathrm{DIV}P = 0. \qquad (4.28)$$

Vir verdere analise word 'n ander vorm van $W\cdot\mathrm{DIV}P$ benodig. Laat P_i die ryvektore van P wees en W_i die komponente van $W(i=1,\ldots,k)$. Dan is volgens 'n bekende identiteit [Spiegel, 1959, bl 58]

$$W \cdot DIVP = W_i DIVP_i$$

$$\text{en } DIV(W_i P_i) = W_i DIVP_i + GRADW_i \cdot P_i.$$

(In hierdie identiteite en die verdere werk wat daaruit voortvloei, is die sommasiekonvensie wat sommasie oor herhaalde indekse impliseer, van krag.)

(4.28) word dus

$$\partial_\tau(\tfrac{1}{2}\|W\|^2) + \frac{\alpha}{a}DIV(W_i P_i) - \frac{\alpha}{a}GRADW_i \cdot P_i = 0.$$

Laat $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{G}_1$ 'n willekeurige enkelvoudig-samehangende gebied wees wat sodanig is dat $\partial\bar{\Omega}_1 = \bar{S}_1 \cup \bar{S}$ en $\bar{S}_1 \cap \partial\bar{G}_1 = \phi$.

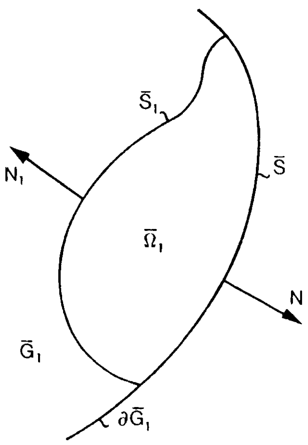

Fig. 4·3

Integreer nou die laaste vergelyking oor $\bar{\Omega}_1$ en met betrekking tot τ tussen 0 en T met $(0,T) \subset (0,\bar{T})$

$$\int_{\bar{\Omega}_1}\int_0^T \partial_\tau(\tfrac{1}{2}\|W\|^2)d\tau d\bar{X}$$
$$+ \frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\bar{\Omega}_1} [DIV(W_i P_i) - GRADW_i \cdot P_i]\, d\bar{X}d\tau = 0$$

Dit word

$$\int_{\bar{\Omega}_1} \tfrac{1}{2}\|W(X,T)\|^2 d\bar{X} - \int_{\bar{\Omega}_1} \tfrac{1}{2}\|W(X,0)\|^2 d\bar{X}$$
$$+ \frac{\alpha}{a}\int_0^T [\int_{\bar{S}_1} W_i P_i \cdot N_1 d\bar{S} + \int_{\bar{S}} W_i P_i \cdot N d\bar{S}]\, d\tau$$
$$- \frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\bar{\Omega}_1} GRADW_i \cdot P_i d\bar{X}d\tau = 0.$$

Met inagneming van (4.27b) word hierdie vergelyking

$$\frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\overline{S}} W_i P_i \cdot N d\overline{S} d\tau = \frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\overline{\Omega}_1} \mathrm{GRAD} W_i \cdot P_i d\overline{X} d\tau$$
$$- \int_{\overline{\Omega}_1} \tfrac{1}{2}\| W(X,T)\|^2 d\overline{X} - \frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\overline{S}_1} W_i P_i \cdot N_1 d\overline{S}. \qquad (4.29)$$

Volgens die definisie in Paragraaf 4.2.4 is die oorspronklike probleem (4.23) dun-randmodelleerbaar indien

$$W(X,\tau) \to 0 \text{ en } P(X,\tau) \to 0 \text{ in } \overline{G}_1 \times (0,\overline{T})$$

vir die een of ander parameterlimiet. Uit (4.29) volg dus die volgende nodige voorwaarde vir die dun-randmodelleerbaarheid van die probleem:

$$\frac{\alpha}{a}\int_0^T\int_{\overline{S}} W_i P_i \cdot N d\overline{S} d\tau \to 0 \qquad (4.30)$$

vir alle $T > 0$ en vir 'n willekeurige $\overline{S} \subset \partial\overline{G}_1$ vir die een of ander parameterlimiet. Indien die integrand lokaal-integreerbaar is, sal dit die geval wees as en slegs as

$$\frac{\alpha}{a} W_i P_i \cdot N \to 0 \text{ vir alle } X \in \partial\overline{G}_1 \text{ en vir alle } \tau > 0 \qquad (4.31)$$

vir die parameterlimiet.

Soos vir die geval van eendimensionale probleme kan met behulp van (4.30) en (4.31) reeds sekere algemene uitsprake gemaak word betreffende moontlike dun-randmodelleerbaarheid van 'n probleem.

Die moontlikheid dat

$$\frac{\alpha}{a} \to 0$$

in (4.30) en (4.31) maak, soos in die eendimensionale geval, die Trans= formasie (4.5)

$$(x,t) \to (X,\tau)$$

singulier en word buite rekening gelaat. Uit (4.31) word drie hoof= moontlikhede vir dun-randmodelleerbaarheid onderskei.

(a) $W_i P_i \cdot N \to 0$ uitsluitlik omdat die vektore W en P·N 'n paar ortogonale vektore is. Vermoedelik sal die vergelykings van die matematiese fisika nie aan hierdie voorwaarde voldoen nie. Vir die hittevergelyking is byvoorbeeld W 'n skalaar en P = -KGRADW 'n vektor, sodat WP·N = -WKGRADW·N 'n skalaar is wat oor die algemeen ongelyk is aan nul. Vir die geval van die momentumbehoudwet van 'n kontinuum in 'n driedimensionale gebied is $W = \rho V$ 'n vektor en $P = -\tau + \rho V \otimes V$ 'n matriks. Hierin is V 'n snelheid, ρ 'n digtheid en τ 'n spanningsmatriks. In Vergelyking (4.31) is dan

$$\begin{aligned} W_i P_i \cdot N &= W\cdot(P\cdot N) \\ &= -W\cdot(\tau\cdot N) + W\cdot(\tfrac{1}{\rho}W \otimes W\cdot N) \\ &= -W\cdot(\tau\cdot N) + W\cdot(\tfrac{1}{\rho}(W\cdot N)W) \\ &= -W\cdot(\tau\cdot N) + \tfrac{1}{\rho}(W\cdot N)\|W\|^2, \end{aligned}$$

'n skalaar wat oor die algemeen ongelyk is aan nul.

(b) Die geval $W(X,\tau) \to 0$ dui, soos vir die soortgelyke geval by die eendimensionale probleem in Paragraaf 4.3, daarop dat Dirichlet-randvoorwaardes voorgeskryf word op $\partial G_1 \times (0,T)$. Indien Dirichlet-randvoorwaardes voorgeskryf word, is die probleem dus dalk dun-randmodelleerbaar. Die parameterlimiet wat nodig is om hierdie dun-randmodelleerbaarheid te verkry, is die parameterlimiet wat nodig is om die Dirichlet-randvoorwaardes te verkry.

(c) Die geval $P_i \cdot N \to 0$ (of $P\cdot N \to 0$) kan, soos vir die eendimensionale geval in Paragraaf 4.3, op twee wyses bevredig word.

(i) Veralgemeende Neumann-randvoorwaardes word voorgeskryf op $\partial G_1 \times (0,T)$ met die gepaardgaande miskenning van die randmedium. Die parameterlimiet wat nodig is om hierdie veralgemeende Neumann-randvoorwaardes fisies te realiseer, is dus ook 'n parameterlimiet wat dun-randmodelleerbaarheid van die probleem tot gevolg kan hê.

(ii) Volgens (4.27c) kom die voorwaarde $P_i \cdot N \to 0$ vir die parameterlimiet daarop neer dat

$$\int_{\bar{S}} P\cdot N d\bar{S} = \frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\Omega}_2} U_2 d\bar{X} - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{S}} U_2' d\bar{S} \to 0 \qquad (4.32)$$

vir die parameterlimiet. In die ondersoek na die dun-randmodelleer=baarheid van probleme is die Hoofmoontlikhede a, b en c(i) hierbo algemeen-geldige moontlikhede. Spesifieke probleme elk met spesifieke samestellingsvergelykings en meetkunde moet dus veral ten opsigte van Voorwaarde (4.32) ontleed word vir verdere moontlikhede van dun-randmodelleerbaarheid.

Voorbeeld

As voorbeeld word die probleem beskou van warmtegeleiding in 'n homogene isotropiese driedimensionale gebied G_1. Die randgebied is ôf 'n drie=dimensionale gebied G_2 aanliggend aan G_1 en begrens (dik randmedium), ôf 'n tweedimensionale gebied $\partial G_1 = G_2$(dun randmedium). Die randmedium is eweneens homogeen en isotropies. Bronne vir warmte-energie mag teen=woordig wees.

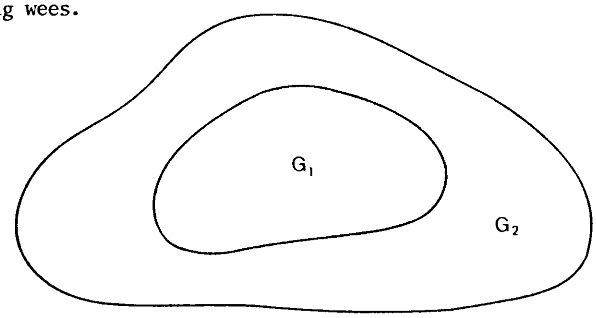

Fig. 4·4

Die beheervergelyking vir $G_1 \times (0,T)$ is die Behoudwet (4.23)

$$\partial_t u_1 + \mathrm{div}\phi_1 = b_1 \tag{4.33}$$

met die samestellingsvergelykings

$$u_1 = c_1\rho_1 v_1 \tag{4.34}$$

en

$$\phi_1 = -K_1 \mathrm{grad} v_1. \tag{4.35}$$

Hierin is $u_1(x,t)$ die warmte-energiedigtheid, c_1 = spesifieke warmte = konstant, ρ_1 = massadigtheid = konstant, $v_1(x,t)$ = temperatuur $\phi_1(x,t)$ = warmte-energievloed en K_1 = geleidingsvermoë = konstant.

Vergelykings soortgelyk aan (4.33)-(4.35) met funksies u_1', ϕ_1', v_1' en b_1' geld in $G_1 \times (0,T)$ vir die geval van 'n dun randmedium. Vir die dik randmedium geld vergelykings soortgelyk aan (4.33)-(4.35) in $G_2 \times (0,T)$. Die tersaaklike funksies is dan u_2, ϕ_2, v_2 en b_2 en die konstantes c_2, ρ_2 en K_2.

Vir die dun-randmodel is die beheervergelyking in $\partial G_1 \times (0,T)$ volgens die Behoudwet (2.38) die vergelyking

$$\partial_t u_2' + \mathrm{div}'\psi_2' + F(\psi_2') = b_2' + \phi_1' \cdot n - \phi_2' \cdot n \tag{4.36}$$

met die samestellingsvergelykings in $\partial G_1 \times (0,T)$

$$u_2' = c_2 \sigma v_2'$$

en

$$\psi_2' = -K_2' \mathrm{grad}' v_2'.$$

Hierin is $u_2'(x,t)$ = oppervlaktedigtheid van warmte-energie, c_2 = spesifieke warmte, σ = oppervlaktedigtheid van massa, $v_2'(x,t)$ = temperatuur, $\psi_2'(x,t)$ = warmte-energievloed in ∂G_1 en K_2' = geleidingsvermoë van die dun rand.

Laat a die tipiese lengte wees geassosieer met G_1, byvoorbeeld 'n straal, of (volume (G_1))/(oppervlakte (∂G_1)). Die transformasievergelykings

$$x = aX \text{ en } t = \alpha\tau \tag{4.37}$$

reduseer (4.33) tot

$$\partial_\tau(c_1\rho_1 V_1) + \frac{\alpha}{a}\mathrm{DIV}(-\frac{K_1}{a}\mathrm{GRAD}V_1) = \alpha B_1 \text{ in } \overline{G}_1 \times (0,\overline{T}). \tag{4.38}$$

'n Soortgelyke vergelyking (aksente) geld in $\overline{G}_1 \times (0,\overline{T})$ vir die dun-randmodel en in $\overline{G}_2 \times (0,\overline{T})$ (onderskrifte 2) vir die dik randmedium. Vergelyking (4.36) transformeer na

$$\partial_\tau(c_2\sigma V_2') + \frac{\alpha}{a}\mathrm{DIV}'(-\frac{K_2'}{a}\mathrm{GRAD}'V_2') + \alpha\mathcal{F}(\Psi_2') = \alpha B_2' + \alpha(\Phi_1' - \Phi_2')\cdot N. \tag{4.39}$$

Ten einde die teorie nou toe te pas word die volgende funksies volgens

(4.25) gedefinieer:

$$W(X,\tau) = c_1\rho_1V_1(X,\tau) - c_1\rho_1V_1'(X,\tau) \quad (4.40)$$

en $$P(X,\tau) = -\frac{K_1}{a}\mathrm{GRADV}_1(X,\tau) + \frac{K_1}{a}\mathrm{GRADV}_1'(X,\tau). \quad (4.41)$$

Vergelyking (4.32) reduseer vir die voorbeeld tot

$$\int_{\bar{S}} P\cdot Nd\bar{S} = \frac{a}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\Omega}_2} c_2\rho_2V_2d\bar{X} - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{S}} c_2\sigma V_2'd\bar{S} \quad (4.42)$$

Vergelyking (4.42) geld vir 'n willekeurige $\bar{S} \subset \partial\bar{G}_1$ met sy geassosieerde $\bar{\Omega}_2$.

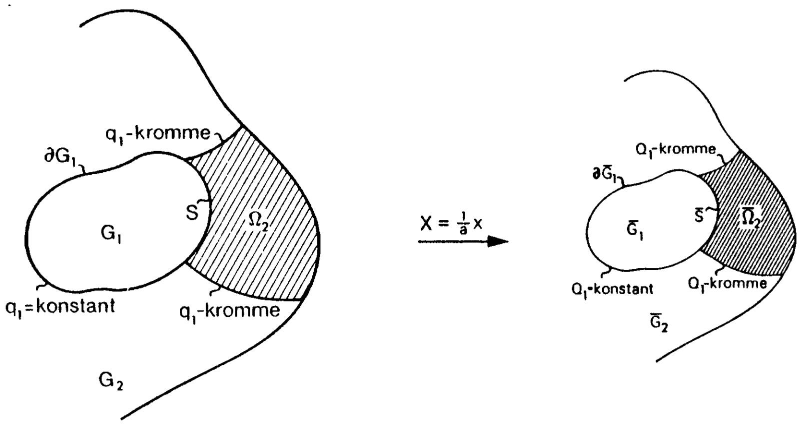

Fig. 4·5

Die Ω_2 geassosieer met S word nou gedefinieer soos volg:
Laat $C = \{x | x \in q_1\text{-kromme deur } S\}$. (Die vergelyking van ∂G_1 is q_1 = konstant).
Dan is

$$\Omega_2 = C \cap G_2.$$

Die massa vir die dik randmedium in Ω_2 is

$$M = \rho_2 V$$

waar V = volume (Ω_2).

Die massa van die dun randmedium in S is

$$\int_S \sigma dS = \bar{\sigma}A$$

waar $\bar{\sigma}$ = gemiddelde waarde van σ oor S en A = oppervlakte (S).

Die dik- en dun-randmodel beskryf dieselfde fisiese situasie; gevolglik is die massa van die dun randmedium in S dieselfde as die massa van die dik randmedium in die gebied Ω_2 geassosieer met S. Dus is

$$\bar{\sigma}A = \rho_2 V.$$

Indien A klein is, word aanvaar dat

$$\sigma \doteqdot \bar{\sigma} = \frac{\rho_2 V}{A} = \rho_2 L \text{ waar } L = \frac{V}{A}$$

gedefinieer word as die 'karakteristieke dikte' van Ω_2 geassosieer met S.

Die transformasiekonstante vir die tydtransformasie in (4.37) is

$$\alpha = \frac{c_1\rho_1 a^2}{K_1} \quad \text{[Carslaw en Jaeger, 1959, bl 121]}$$

In die lig van die voorafgaande word (4.42)

$$\int_{\bar{S}} P\cdot Nd\bar{S} = \frac{K_1 a}{c_1\rho_1 a^2}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\Omega}_2} c_2\rho_2 V_2 d\bar{X} - \frac{K_1}{c_1\rho_1 a^2}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{S}} c_2\sigma V_2' d\bar{S}$$

$$= \frac{K_1 c_2\rho_2}{ac_1\rho_1}\left[\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\Omega}_2} V_2 d\bar{X} - \frac{V}{aA}\frac{d}{d\tau}(\bar{A}V_2'(Z,\tau))\right]$$

met $Z \in \bar{S}$. Hierin is gebruik gemaak van die middelwaardestelling

$$\bar{A}V_2'(Z,\tau) = \int_{\bar{S}} V_2'(X,\tau)d\bar{S}$$

met $\bar{A} = \int_{\bar{S}} d\bar{S}$ en $Z \in \bar{S}$ [Bartle, 1976, bl 429]. Onder die Transformasie (4.37) is

$$A = a^2\bar{A} \text{ en } V = a^3\bar{V} \text{ waar } \bar{V} = \int_{\bar{\Omega}_2} d\bar{X}.$$

Dus volg

$$\int_{\bar{S}} P\cdot NdS = \frac{K_1 c_2\rho_2}{ac_1\rho_1}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\Omega}_2}[V_2(X,\tau) - V_2'(Z,\tau)]\,d\bar{X}. \tag{4.43}$$

Met behulp van Vergelykings (4.40), (4.41) en (4.43) word die Hoofmoont= likhede (a), (b) en (c) van hierdie paragraaf ontleed. Die bespreking vroeër in hierdie paragraaf ten opsigte van ortogonaliteit (Hoofmoontlik= heid a), Dirichlet-randvoorwaardes (Hoofmoontlikheid b) en Neumann-rand= voorwaardes (Hoofmoontlikheid c(i)) as moontlikhede vir die dun-rand= modelleerbaarheid van 'n probleem, is net so van toepassing vir die probleem onder bespreking. Die oorblywende Hoofmoontlikheid c(ii) word nou vir die spesifieke probleem bespreek met behulp van Voorwaarde (4.32) en Vergelyking (4.43). Daarvolgens kan 'n nodige voorwaarde vir die dun-randmodelleerbaarheid van die probleem die volgende wees:

$$\int_{\overline{S}} P \cdot N d\overline{S} = \frac{K_1 c_2 \rho_2}{a c_1 \rho_1} \frac{d}{d\tau} \int_{\overline{\Omega}_2} [V_2(X,\tau) - V_2'(Z,\tau)]\, d\overline{X} \rightarrow 0 \tag{4.44}$$

vir die parameterlimiete. Die verskillende parameterlimiete waarvoor (4.44) bevredig word, word nou bespreek.

(1) Voorwaarde (4.44) word bevredig indien

$$\frac{K_1 c_2 \rho_2}{a c_1 \rho_1} \rightarrow 0$$

vir die parameterlimiet.

Een moontlike parameterlimiet is

$$\frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} \rightarrow 0.$$

Fisies beteken dit dat die probleem dalk dun-randmodelleerbaar is indien $c_2 \rho_2 << c_1 \rho_1$, dit wil sê die warmtekapasiteit per eenheidvolume van die randmedium is baie klein in vergelyking met die warmtekapasiteit per eenheidvolume van die interne medium. Die relatiewe waardes van die spesifieke warmtes c_i of die massadigthede ρ_i kan hierin 'n rol speel.

'n Ander moontlike parameterlimiet is

$$K_1 \rightarrow 0.$$

As $K_1 \rightarrow 0$ is die medium in die interne gebied 'n baie swak geleier van warmte en hierdie interne medium kan as gevolg daarvan nie 'onderskei' of dit op sy rand hitte uitruil met 'n dik of dun rand=medium nie.

Die moontlikheid

$$a \rightarrow \infty$$

word in die volgende geval bespreek.

(2) Die Voorwaarde (4.44) word ook bevredig indien

$$\text{volume }(\bar{\Omega}_2) = \bar{V} = \frac{V}{a^3} = \frac{LA}{a^3} = \frac{L}{a}\bar{A} \to 0$$

terwyl die integrand asook

$$\frac{K_1 c_2 \rho_2}{a c_1 \rho_1}$$

begrens en ongelyk aan nul is. $\bar{S}$, en dus $\bar{A}$ = oppervlakte $(\bar{S})$, is willekeurig; gevolglik is die tersaaklike parameterlimiet

$$\frac{L}{a} \to 0.$$

Dit beteken fisies dat die karakteristieke dikte L van 'n randgebied Ω_2 geassosieer met 'n willekeurige $S \subset \partial G_1$ klein moet wees in verge= lyking met die tipiese lengte a geassosieer met G_1. Dit is die geval indien die randmedium letterlik dun is of indien $a \to \infty$.

(3) In (4.44) kan $V_2(X,\tau) - V_2'(Z,\tau) \to 0$ dit wil sê $V_2(X,\tau) \to g(\tau)$ vir elke geassosieerde $\bar{\Omega}_2$. Vir so 'n geval sal die vloed in die rand= gebied $\Phi_2(X,\tau) \to -\frac{K_2}{a}\text{GRAD}g(\tau)$.

Indien dié vloed $\Phi_2 \nrightarrow 0$ beteken dit dat $K_2 \to \infty$. Die randmedium is dus dalk dun-randmodelleerbaar indien dit 'n supergeleier benader.

(4) In (4.44) kan $\partial_\tau V_2(X,\tau) - \partial_\tau V_2'(Z,\tau) \to 0$. Dit impliseer

$$V_2(X,\tau) = g(\tau) + f(X) + \delta(X,\tau)$$

waar $\delta(X,\tau) \ll$ en so ook sy afgeleides. Substitusie hiervan in die parsiële differensiaalvergelyking (4.38) vir die dik randmedium sonder randprobleme lewer

$$\dot{g}(\tau) - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\text{DIVGRAD}f(X) \to 0, \text{met } \kappa_i = \frac{k_i}{c_i \rho_i}$$

Dus sal $\dot{g}(\tau) \to \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\text{DIVGRAD}f(X) = \theta$ = konstant, dit wil sê

$$g(\tau) \to \theta\tau + \beta.$$

Indien $V_2(X,\tau)$ begrens is vir alle τ, moet $\theta = 0$. In so 'n geval is die oplossing in die randmedium stasionêr. 'n Dik randmedium waarin die temperatuur stasionêr is, is dus moontlik dun-randmodelleerbaar.

(5) In (4.44) kan

$$\int_{\overline{\Omega}_2} [V_2(X,\tau) - V_2'(Z,\tau)]\,d\overline{X} \to 0.$$

Hieruit volg

$$V_2'(Z,\tau) = \frac{1}{\overline{V}}\int_{\overline{\Omega}_2} V_2(X,\tau)d\overline{X} = \frac{a}{\overline{LA}}\int_{\overline{\Omega}_2} V_2(X,\tau)d\overline{X}.$$

Dan geld vir alle $X \in \partial G_1$ dat

$$V_2'(X,\tau) = \lim_{\overline{A}\to 0} \frac{a}{\overline{LA}}\int_{\overline{\Omega}_2} V_2(X,\tau)d\overline{X}.$$

Vir die dun-randmodel kan die temperatuur by enige punt op ∂G_1 vir enige tyd dus geneem word as die gemiddeld van die temperatuur van die dik randmedium oor die q_1-kromme geassosieer met daardie punt. In so 'n geval moet egter afgesien word van die normale aanname van perfekte termiese kontak op ∂G_1. Dit is onwaarskynlik dat die probleem vir dié geval in terme van 'n dun-randmodel gefor= muleer sal word.

HOOFSTUK 5

SLOTSOM

5.1 UITBREIDING VAN RESULTATE

In Hoofstuk 2 en Hoofstuk 3 was daar by al die randmodelle sprake van 'n enkele interne gebied en 'n enkele randmedium. Die resultate wat hierdie randmodelle opgelewer het, kan baie maklik uitgebrei word om probleme waar sprake is van 'n meer komplekse materiaalsamestelling, te dek. Voorbeelde waar dit wel gedoen is, kom taamlik algemeen in die literatuur voor. [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 326] bespreek hittevloei in 'n materiaal wat uit verskeie lae bestaan. [Whitaker, 1977] se analise van gelyktydige hitte-, massa- en momentumoordrag by die droging van 'n poreuse medium behels insgelyks die formulering van randvoorwaardes by skeidingsvlakke in 'n gekompliseerde materiaal. Op die gebied van elektromagnetisme formuleer [Wait, 1966] randvoorwaardes vir die elektromagnetiese velde by die tussenvlakke in 'n gestratifeerde aarde. In 'n model wat poog om sommige geologiese eienskappe van die bosveldstollingskompleks te verklaar, aanvaar [Sharpe en Snyman, 1980] ook 'n gelaagde aardkors en word momentum- en massabalanswette by tussenvlakke geformuleer.

By al die voorbeelde wat hierbo genoem is, is die probleemformulerings uitbreidings van die dik-randmodelle. Dik- en dun-randmodelle kan ook gekombineerd voorkom in uitbreidings. By Voorbeeld 3 van Paragraaf 2.9.1 is sprake van 'n vloeistof-membraan-lugkontak terwyl in Voorbeeld 2 van Paragraaf 3.5 'n probleem is met 'n vloeistof-vloeistoflagie-lugkontak.

5.2 RANDLAAGTEORIE

Wanneer 'n viskeuse vloeistof verby 'n dun plat plaat vloei, word daar in die literatuur onderskei tussen drie gebiede, naamlik die plaat, die randlaag met dikte $\delta(x)$ en die gebied van onversteurde vloei waarvoor $y > \delta(x)$ [Malvern, 1969, bl 481].

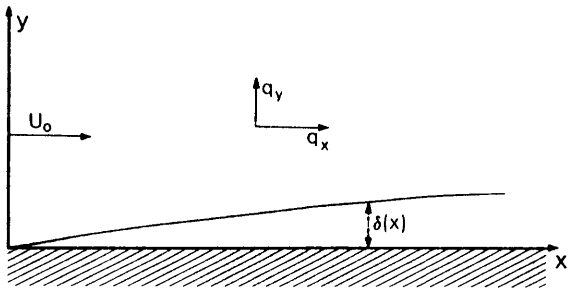

Fig. 5·1

Sedert die werk van [Prandtl, 1904] word die randlaagbenadering soos hierna uiteengesit, nog onveranderd gebruik, soos blyk uit die werk van [Bender et al, 1980].

Met die eerste oogopslag lyk dit of die resultate van Hoofstuk 2 soos in die vorige paragraaf uitgebrei kan word om ook die gebruiklike randlaag= teorie te dek. 'n Ondersoek het getoon dat dit egter nie voor-die-hand-liggend is nie om die redes wat hieronder genoem word.

In wese is daar in hierdie probleem slegs van twee media sprake, naamlik die viskeuse kontinuum en die dun plaat. Die normale randvoorwaardes soos in Hoofstuk 2 afgelei, geld by die skeidingsvlak tussen die twee media. Die beheervergelykings vir 'n viskeuse medium geld vir die volle halfruimte $y > 0$, maar word verskillend benader 'naby' en 'ver' van die plaat. Naby die plaat word aanvaar dat snelheidsgradiënte groot is. Hierdie aanname lei tot die bekende randlaagvergelykings [Prandtl, 1904]. Ver van die plaat word die Navier-Stokesvergelykings benader deur die vergelykings vir 'n ideale vloeistof. Beide die randlaagvergelykings en die ideale vloeistofvergelykings word nou opgelos vir die *volle* half= ruimte $y > 0$. In die ver-gebied toon die oplossings van die randlaagver= gelykings die onaanvaarbare eienskap dat $q_y \nrightarrow 0$ as $y \to \infty$ [Rosenhead, 1963, bl 226], terwyl die ideale vloeistofvergelykings nie die geen-glipvoor= waarde by $y = 0$ bevredig nie. (In Figuur 5.1 beweeg die vloeistof in die gebied $y > 0$ met snelheidskomponente q_x en q_y.) Dit word nou aanvaar dat die oplossing van die randlaagvergelykings geldig is vir $0 < y < \delta(x)$, terwyl die oplossing van die ideale vloeistofvergelykings geldig is vir $y > \delta(x)$. Die waarde van $\delta(x)$ word op verskeie wyses *arbitrêr* vasgestel. 'n Tipiese definisie van $\delta(x)$ is dat dit die loodregte afstand vanaf die plaat is waarby die snelheid soos bereken uit die randlaagvergelykings met een persent verskil van die snelheid soos bereken uit die ideale vloeistof=vergelykings [Rosenhead, 1963, bl 205].

Die arbitrêre bepaling van $\delta(x)$ sonder dat enige onderliggende behoudwet of ander fisiese beginsel betrokke is by die bepaling, suggereer nie die gebruik van behoudwette by $y = \delta(x)$ in die formulering van randlaagteorie nie. Selfs al sou aanvaar word dat die fisiese eienskappe van die vloeistof binne die randlaag verskil van die eienskappe van die vloeistof buite die randlaag, duik daar komplikasies op. 'n Gevolg van die randlaagaannames is naamlik 'n onsimmetriese spanningsmatriks

$$\tau = \begin{bmatrix} -p & \mu\partial_y q_x \\ 0 & -p \end{bmatrix}$$

vir die randlaagvloeistof. Dit impliseer op sy beurt dat 'n draaimomen=tumbehoudwet nodig is vir die randlaagvloeistof. In die stelsel rand=laagvergelykings word so 'n behoudwet egter nie gebruik nie.

Behalwe vir die komplikasies ten opsigte van die fisiese beginsels hierbo genoem, behels die randlaagvergelykings ook wiskundige komplikasies. [Rosenhead, 1963, bl 203-204] meld onder andere dat die randvoorwaardes wat saam met die randlaagvergelykings gebruik word, wel die bestaan van 'n oplossing verseker, maar dat die oplossing nie eenduidig is nie. Verder word van die randvoorwaardes wat nodig is om die Navier-Stokesvergelykings vir $y > 0$ op te los, oorbodig by die randlaagbenadering.

Uit bostaande is dit duidelik dat die randlaagteorie in sy huidige vorm nie voorsiening maak vir die toepassing van behoudwette by die skynbare rand $y = \delta(x)$ nie.

5.3 KWASI-RANDVOORWAARDES

Randvoorwaardes word gebruik in resultate rondom die bestaan en eenduidigheid van die oplossings van probleme. In plaas van randvoorwaardes met 'n grond=slag van behoudwette en samestellingsvergelykings soos in vorige hoofstukke uiteengesit, word soms voorwaardes gebruik wat hier gerieflikheidshalwe *kwasi-randvoorwaardes* genoem word. Kwasi-randvoorwaardes kan (tot dusver) nie afgelei word uit behoudwette nie. Sommige van die kwasi-randvoorwaardes wat in die literatuur aangetref word, word hieronder bespreek. Dit is interessant om daarop te let dat by al die gevalle die kwasi-randvoor= waarde geld by punte wat nie met 'n fisiese rand of skeiding geassosieer kan word nie.

5.3.1 Onbegrensde gebiede

Sommige probleme is op onbegrensde gebiede gedefinieer. Aangesien 'n rand (en gevolglik 'n randvoorwaarde) afwesig is, word soms 'n voor= waarde van begrensde oplossings of funksionale van oplossings gebruik, soos in [Weinberger, 1965, bl 253-256, 318, 322, 327, 329, 355]. Soms word 'n sterker voorwaarde as begrensdheid vereis, byvoorbeeld die wegsterf van oplossings, soos in [Weinberger, 1965, bl 320] of [Knops, 1965].

Sommige redes wat vir die begrensdheid aangevoer word, is wiskundig van aard. So kan begrensdheid byvoorbeeld vereis word vir die bestaan van 'n transform of 'n maksimumbeginsel, of vir die bestaan van 'n eenduidige oplossing. In sulke gevalle het die begrensdheid dus te doen met die goed-geformuleerdheid van probleme soos uiteengesit in Paragraaf 1.1, en is dit deel van die 'data' waarvan daar sprake is.

Begrensdheid kan ook vereis word op grond van fisiese oorwegings. 'n Onbegrensde hoeveelheid hitte-energie in 'n gebied met begrensde energie= bronne is byvoorbeeld fisies onaanvaarbaar, net soos 'n onbegrensde verplasing of snelheid.

5.3.2 Singuliere koördinaattransformasies

Die koördinaattransformasies van kartesiese na silindriese of bolkoördinate is singulier. Uit Figuur 5.2 is dit duidelik dat die aard van die singu= lariteite sodanig is dat enersyds binnepunte van die oorspronklike gebied (byvoorbeeld $x = 0$) afgebeeld kan word op 'n deel van die rand van die getransformeerde gebied (die lyn $r = 0$). Andersyds kan 'n enkele lyn of vlak binne die oorspronklike gebied (byvoorbeeld $\{(x_1,0)\,|\,-1 < x_1 < 0\}$) veelvuldig afgebeeld word op randlyne of -vlakke van die getransformeerde gebied (byvoorbeeld die lyne $\{(r,\pi)$ en $(r,-\pi)\,|\,0 < r < 1\}$). Hierdie tipe singulariteite kom ook voor by ander koördinaatstelsels as silindriese en bolkoördinate.

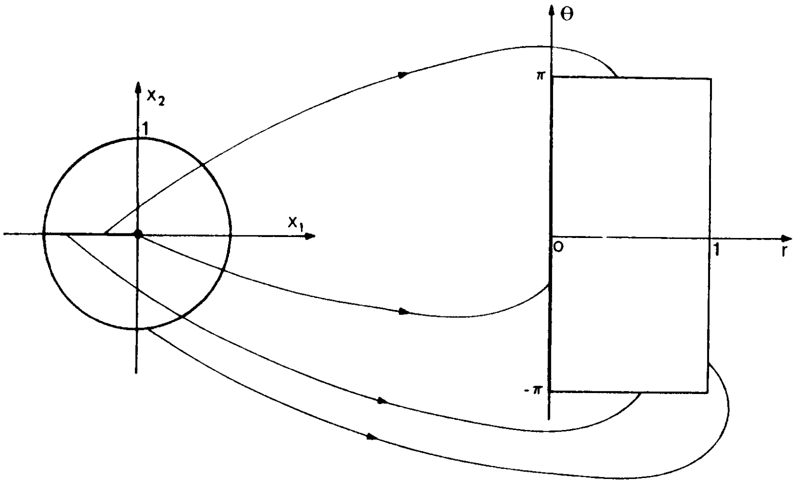

Fig. 5·2

As gevolg van die singuliere transformasies is dus 'n kunsmatige rand geskep waarop kwasi-randvoorwaardes voorgeskryf moet word. Hierdie kwasi-randvoorwaardes kan voorwaardes van begrensdheid wees (by $r = 0$), byvoorbeeld [Weinberger, 1965, bl 100, 176, 189, 192] of voorwaardes van kontinuïteit tesame met periodisiteit (by $\theta = -\pi$ en $\theta = \pi$) soos in [Weinberger, 1965, bl 100, 188]. Hierdie kwasi-randvoorwaardes besit nie 'n grondslag van behoudwette en samestellingsvergelykings nie, maar word gegrond op fisiese oorwegings.

5.3.3 Sommerfeld se stralingsvoorwaarde

Vir sommige golfprobleme is die voorwaarde dat oplossings of funksionale van oplossings wegsterf, soos bespreek in Paragraaf 5.3.1, nie voldoende om eenduidigheid van die oplossings te verseker nie [Sommerfeld, 1949, bl 189]. Die Sommerfeld-stralingsvoorwaarde [Stinson, 1976, bl 61-62] is vir sulke probleme die addisionele kwasi-randvoorwaarde wat benodig word om eenduidigheid te verseker. Die stralingsvoorwaarde het sy oorsprong in 'n fisiese oorweging wat berus op die moontlike voortplantingsrigtings van golfenergie in 'n onbegrensde gebied, terwyl die energiebronne versprei is in 'n gebied wat begrens is. Voorbeelde van die stralingsvoorwaarde word gekry in die studie van die voortplanting van elektromagnetiese golwe [Stratton, 1941, bl 485-486], akoestiese golwe [Werner, 1962] en oppervlaktegolwe op water [Stoker, 1957, bl 58-66].

In al die probleme waar die stralingsvoorwaarde gebruik word, word aanvaar dat die harmoniese golfbron al só lank besig is om golwe op te wek, dat die oorgangsterme wat die beginwaarde van die oplossing bevat, reeds weg=gesterf het. In die plek van die beginwaarde word die stralingsvoorwaarde as kwasi-randvoorwaarde gebruik om die eenduidigheid van oplossings te verseker [Wilcox, 1959].

5.4 SAMEVATTING VAN RESULTATE

Die beheervergelykings van die matematiese fisika bestaan basies uit behoudwette en samestellingsvergelykings. Die doel van hierdie studie was om aan te toon hoe die randvoorwaardes van die matematiese fisika in 'n soortgelyke struktuur geplaas kan word.

Die basiese randvoorwaardepostulaat van Paragraaf 2.2 aanvaar dat die herkoms van randvoorwaardes gesetel is in die wisselwerking tussen 'n gebied en sy randmedium. Met hierdie postulaat as uitgangspunt is in Hoofstuk 2 en 3 aangetoon dat randvoorwaardes, soos die beheervergelykings van die matematiese fisika, ook behoudwette en samestellingsvergelykings as grondslag het. Beide dik- en dun-randmodelle illustreer duidelik hoe die formulering van 'n randvoorwaarde in die algemeen die modellering van 'n dinamiese proses is.

In Hoofstuk 2 en 3 is dik- en dun-randmodelle geformuleer. In Hoofstuk 4 word kriteria ontwikkel wat gebruik kan word om te besluit of 'n dik-rand=model gebruik moét word en of 'n dun-randmodel dalk gebruik mag word ten einde 'n spesifieke randvoorwaarde te formuleer.

In Paragraaf 5.3 is aangetoon dat nie alle voorwaardes wat in die litera=tuur as randvoorwaardes beskou word, in 'n struktuur van behoudwette en samestellingsvergelykings geplaas kan word nie. Sulke voorwaardes geld egter nie by 'n werklike rand van 'n gebied nie en is geklassifiseer as kwasi-randvoorwaardes.

In die geheel gesien is met hierdie studie 'n goeie oorsig en insig verkry van die herkoms van randvoorwaardes.

5.5 ENKELE GEVOLGE

(a) 'n Eerste gevolg van die werk is opvoedkundig van aard. Die tipiese randvoorwaardes waarmee studente op voorgraadse vlak kennis maak, is Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes, en dan ook gewoonlik in die homogene vorm. Indien persone as studente op elementêre wyse kennis maak met die onderliggende filosofie van hierdie studie, behoort dieselfde persone later as navorsers hulle probleme makliker te kan formuleer, en rand= voorwaardes wat hulle in die literatuur teëkom, makliker te kan inter= preteer.

(b) 'n Tweede gevolg van die werk is dat 'n nuwe kriterium vir die klassi= fikasie van randvoorwaardes daaruit voortvloei. In die literatuur word verskeie klassifikasiekriteria aangetref.

Op die gebied van hitte-oordrag onderskei [Zabrodskiy, 1972] tussen die volgende vier soorte randvoorwaardes, maar meld dat die spektrum van moontlike randvoorwaardes nie daarmee uitgeput is nie:

(i) Randvoorwaardes van die eerste soort (Dirichlet-randvoorwaardes):

$$v_1(x,t) = f(x,t) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T);$$

(ii) Randvoorwaardes van die tweede soort (Neumann-randvoorwaardes):

$$\frac{\partial v_1}{\partial n}(x,t) = f(x,t) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T);$$

(iii) Randvoorwaardes van die derde soort:

$$-K_1\frac{\partial v_1}{\partial n}(x,t) = \alpha(v_1(x,t) - v_2(x,t)) \text{ op } \partial G_1 \times (0,T);$$

(iv) Randvoorwaardes van die vierde soort:

$$\left.\begin{array}{l} -K_1\dfrac{\partial v_1}{\partial n}(x,t) = -K_2\dfrac{\partial v_2}{\partial n}(x,t) \\ \text{met } v_1(x,t) = v_2(x,t) \end{array}\right. \quad \text{op } \partial G_1 \times (0,T).$$

In die kontinuummeganika onderskei [Truesdell en Noll, 1965, bl 126-127] tussen drie soorte randvoorwaardes. Hulle is:

(i) Randvoorwaardes van traksie (met randvoorwaardes van druk as spesiale geval) waarin die spanning op die rand van die gebied voorgeskryf word;

(ii) Randvoorwaardes van posisie, waarin die verplasing op die rand van die gebied voorgeskryf word;

(iii) Gemengde randvoorwaardes waarin randvoorwaardes van traksie op sommige en randvoorwaardes van posisie op ander dele van die rand voorgeskryf word.

Tot dusver het die literatuur nog nie 'n klassifikasiekriterium opgelewer waarvolgens alle randvoorwaardes geklassifiseer kan word nie. Met behulp van hierdie proefskrif is die onderliggende gemeenskaplike faktore van alle randvoorwaardes geïdentifiseer en kan randvoorwaardes geklassifiseer word as óf behoudwette, óf samestellingsvergelykings óf (in die meeste gevalle) kombinasies van samestellingsvergelykings en behoudwette. So, byvoorbeeld, is die twee dele van die randvoorwaarde van die vierde soort hierbo onderskeidelik 'n behoudwet (Vergelyking 2.26a) en 'n samestellingsvergelyking van kontak (Vergelyking 2.28). Die randvoor=waarde van die eerste soort hierbo is 'n asimptotiese vorm van 'n behoud=wet gekombineer met die voorwaarde van perfekte termiese kontak wat 'n samestellingsvergelyking van kontak is. (Sien afleiding van Vergelyking 2.56.) Op die gebied van vloeistofmeganika is die geen-glipvoorwaarde (Vergelyking 3.40) 'n samestellingsvergelyking van kontak, terwyl die kinematiese randvoorwaarde (3.84) 'n massabehoudwet is.

(c) 'n Derde gevolg van die werk is die implikasies wat dit inhou vir die navorser in randvoorwaardeprobleme. In eenvoudiger werk word dikwels probleme met Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes bespreek, byvoorbeeld [Mizohata, 1973, bl 147-172 en 195-199], terwyl die ingewikkelder werk randoperatore behels wat (dikwels kunsmatige) veralgemenings is van die Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes [Mizohata, 1973, bl 457-465]. Indien die navorser sou vasstel wat die herkoms van randvoorwaardes behels, kan 'n rykdom van nuwe navorsingsvelde moontlik vir hom oopgaan. In dié verband kan gemeld word dat [Sauer, 1982.2] probleme ontleed waarin die dinamiese karakter van die randoperatore in ag geneem word.

5.6 VOORUITBLIK

In die loop van hierdie ondersoek het verskeie sake opgeduik wat verdere navorsing kan vereis.

In die lig van die derde gevolg van die vorige paragraaf kan 'n baie omvat= tende projek geformuleer word. Dit sou 'n probleem kon behels met algemene randvoorwaardes soos (2.7, 2.8) of (2.10, 2.11) en die analise van die daarmee-gepaardgaande asimptotiese gevalle wat as spesiale randvoor= waardeprobleme daaruit tevoorskyn kom, soos in Paragraaf 2.7.2. Die ondersoek sou ook numeriese berekenings kon behels ten einde verskillende oplossings en asimptotiese gevalle met mekaar te vergelyk.

In die lig van Paragraaf 5.3 kan 'n ondersoek gedoen word na die herkoms van kwasi-randvoorwaardes. Sulke voorwaardes kan moontlik ook in 'n vaste stuktuur geplaas word. Onderwerpe wat moontlik 'n rol kan speel by so 'n ondersoek, is entropie-ongelykhede en versoenbaarheidsvoorwaardes ('compatability conditions').

'n Moontlike ondersoek wat verwant is aan hierdie proefskrif, is 'n ondersoek na die herkoms van beginwaardes. In huidige navorsing word eenvoudig 'n funksie met 'gerieflike' eienskappe as beginwaarde aanvaar. Indien aan= vaar word dat 'n beginwaarde self ook 'n 'geskiedenis' het, kan 'n onder= soek na daardie geskiedenis self ook interessant wees.

In die laaste instansie kan genoem word dat die outeur hiervan self heelwat tyd spandeer het aan die studie van 'n behoudwetgrondslag vir die huidige randlaagteorie. Soos in Paragraaf 5.2 gemeld is dit skynbaar nie moontlik nie. 'n Nuwe formulering van die randlaagteorie in terme van behoudwette bly steeds 'n ideaal.

Bibliografie

Alt HW : A Free Boundary Problem Associated with the Flow of Ground Water, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 64, 1977, bl 111.

Apostol TM : *Calculus, Volume II*, John Wiley and Sons, 1969.

Aris R : *Mathematical Modelling Techniques*, Pitman, 1978.

Bartle RG : *The Elements of Real Analysis*, John Wiley and Sons, 1976.

Batra RC : On Non-Classical Boundary Conditions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 48, 1972, bl 163.

Batra RC : On the Asymptotic Stability of the Rest State of a Viscous Fluid bounded by a Rigid Wall and an Elastic Membrane, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 56, 1974, bl 310.

Bender CM et al : A Novel Approach to the Solution of Boundary-Layer Problems, *Advances in Applied Mathematics*, Vol 1, 1980, bl 22.

Caffarelli LA en Friedman A : The Dam Problem with Two Layers, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 68, 1978, bl 125.

Cannon JR en Fasano A : Boundary Value Multidimensional Problems in Fast Chemical Reactions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 53, 1973, bl 1.

Carslaw HS en Jaeger JC : *Conduction of Heat in Solids*, Tweede uitgawe, Oxford University Press, 1959.

Corson DR en Lorrain P : *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, WH Freeman and Company, 1962.

Coulson CA : *Waves*, Sewende Uitgawe, Interscience Publishers, Inc., 1955.

Courant R en John F : *Introduction to Calculus and Analysis, Volume 2*, John Wiley and Sons, 1974.

Dussan EB : Hydrodynamic Stability and Instability of Fluid Systems with Interfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 57, 1975, bl 363.

Friedman A : Analyticity of the Free Boundary for the Stefan Problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 61, 1976, bl 97.

Friedman A en Jensen R : Convexity of the Free Boundary in the Stefan Problem and in the Dam Problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 67, 1977, bl 7.

Friedrichs KO : Formation and Decay of Shock Waves, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol 1, 1948, bl 211.

Fung YC : *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., 1969.

Geymonat G en Sanchez-Palencia E : On the Vanishing Viscosity Limit for Acoustic Phenomena in a Bounded Region, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol 75, 1981, bl 257.

Gurtin ME en Martins LC : Cauchy's Theorem in Classical Physics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 60, 1976, bl 305.

Hill CD en Kotlow DB : Classical Solutions in the Large of a Two-Phase Free Boundary Problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 45, 1972.1, bl 63.

Hill CD en Kotlow DB : Classical Solutions in the Large of a Two-Phase Free Boundary Problem II, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 47, 1972.2, bl 369.

Jaeger JC : Conduction of Heat in Composite Slabs, *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol 8, 1950, bl 187.

Jaeger JC : Conduction of Heat in a Solid in Contact with a Thin Layer of a Good Conductor, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,* Vol VIII, 1955, bl 101.

Jaunzemis W : *Continuum Mechanics,* MacMillan, 1967.

John F : On the Motion of Floating Bodies, *Communications on Pure and Applied Mathematics,* Vol 2, 1949, bl 13.

Kim SD en Baird MHI : Axial Dispersion in a Reciprocating Plate Extraction Column, *Canadian Journal of Chemical Engineering,* Vol 54, 1976, bl 81.

Knops RJ : Uniqueness of the Displacement Boundary Value Problem for the Classical Elastic Half-Space, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 20, 1965, bl 373.

Kraus H : *Thin Elastic Shells,* Wiley, 1967.

Landau LD en Lifshitz EM : *Meganika van Kontinue Media* (Russies), Moskou, 1953.

Landau LD en Lifshitz EM : *Fluid Mechanics,* Pergamon Press, 1959.

Malvern LE : *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium,* Prentice-Hall, Inc., 1969.

Milne-Thomson LM : *Theoretical Hydrodynamics,* Vyfde Uitgawe, MacMillan, 1968.

Mizohata S : *The Theory of Partial Differential Equations,* Cambridge University Press, 1973.

Naghdi PM : The Theory of Shells and Plates, in *Handbuch der Physik,* Vol VIa/2, S. Flügge, red., Springer-Verlag, Berlyn, 1972.

Ockendon JR en Hodgkins WR (red) : *Moving Boundary Problems, Proceedings of the Conference Held at the University of Oxford 25-27 March 1974,* Clarendon Press, Oxford, 1975.

Oldenburg DW : A Physical Model for the Creation of the Lithosphere, *Geophysical Journal (Royal Astronomical Society),* Vol 43, 1975, bl 425.

Oliver ML : On Balanced Interactions in Mixtures, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 49, 1972, bl 195.

Parker RL en Oldenburg DW : Thermal Model of Ocean Ridges, *Nature Physical Science,* Vol 242, 1973, bl 137.

Peters AS : The Effect of a Floating Mat on Water Waves, *Communications on Pure and Applied Mathematics,* Vol 3 , 1950, bl 319.

Prandtl L : Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Proceedings of the Third International Mathematical Congress,* Heidelberg, 1904.

Reitz JR en Milford FJ : *Foundations of Electromagnetic Theory,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.

Rosenhead L (red) : *Laminar Boundary Layers,* Clarendon Press, Oxford, 1963.

Rubinstein LI : The Stefan Problem, *Translations of Mathematical Monographs 27,* American Mathematical Society, 1971.

Sauer N : Private kommunikasie, 1982.1.

Sauer N : Linear Evolution Equations in Two Banach Spaces, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* Vol 91A, 1982.2, bl 287.

Sharpe MR en Snyman JA : A Model for the Emplacement of the Eastern Compartment of the Bushveld Complex, *Tectonophysics,* Vol 65, 1980, bl 85.

Slattery JC : General Balance Equation for a Phase Interface, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals,* Vol 6, 1967, bl 108.

Slattery JC : *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua,* McGraw-Hill, 1972.

Sommerfeld A : *Partial Differential Equations in Physics,* Academic Press, 1949.

Spiegel MR : *Theory and Problems of Vector Analysis,* Schaum Publishing Co., 1959.

Stefan J : Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung in Polarmeeren, *Annalen der Physik und Chemie,* Vol 42, 1891, bl 269.

Stinson DC : *Intermediate Mathematics of Electromagnetics,* Prentice-Hall Inc., 1976.

Stoker JJ : *Water Waves,* Interscience Publishers Inc., 1957.

Stratton JA : *Electromagnetic Theory,* McGraw-Hill, 1941.

Temple G : *The Structure of Lebesgue Integration Theory,* Clarendon Press, Oxford, 1971.

Timoshenko SP : *Elements of Strength of Materials,* Derde Uitgawe, Van Nostrand, 1955.

Truesdell C en Noll W : The Non-Linear Field Theories of Mechanics, in *Handbuch der Physik,* Vol 3/3, S Flügge, red., Springer-Verlag, Berlyn, 1965.

Truesdell C en Toupin R : The Classical Field Theories, in *Handbuch der Physik,* Vol 3/1, S Flügge, red., Springer-Verlag, Berlyn, 1960.

Wait JR : Fields of a Horizontal Dipole Over a Stratified Anisotropic Half-Space, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* Vol AP-14, 1966, bl 790.

Wehausen JV en Laitone EV : Fluid Dynamics, in *Handbuch der Physik,* Vol IX/III, S Flügge, red., Springer-Verlag, Berlyn, 1960.

Weinberger HF : *A First Course in Partial Differential Equations,* Xerox College Publishing, 1965.

Werner P : Randwertprobleme der matematischen Akustik, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 10, 1962, bl 29.

Whitaker S : Simultaneous Heat, Mass and Momentum Transfer in Porous Media : A Theory of Drying, *Advances in Heat Transfer,* Vol 13, 1977, bl 119.

Wilcox CH : Spherical Means and Radiation Conditions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 3, 1959, bl 133.

Williams WO : Axioms for Work and Energy in General Continua II. Surfaces Of Discontinuïty, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol 49, 1973, bl 225.

Zabrodskiy SS : Several Specific Terms and Concepts in Russian Heat Transfer Notation, *Heat Transfer-Soviet Research,* Vol 4, 1972, bl i.