

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**EFEECTO CASIMIR ESTÁTICO Y DINÁMICO EN
ESPEJOS IMPERFECTOS**

María Laura Remaggi
Doctorando

Dr. César Daniel Fosco
Director

Dr. Enrique Néstor Miranda
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Daniel Domínguez (Instituto Balseiro) - presidente del jurado

Dr. Horacio Casini (Instituto Balseiro)

Dr. Roberto Trincherro (Instituto Balseiro)

Dr. Luis Oxman (Universidad Federal Fluminense)

Dr. Luis Fernando Urrutia (Universidad Nacional Autónoma de México)

2 de Marzo de 2022

Grupo de Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov -CAB)

A mi papá,
que cuando me enseñó a andar en bici,
me decía que no me iba a caer porque él me estaba agarrando,
pero en verdad me soltaba.

A mi mamá,
que es capaz de curar hasta el dolor más intenso con un tecito.

A mi hermano,
que sabe acompañar con la risa y con el silencio.

A mis estudiantes y a mi hije,
que son la motivación para seguir creciendo día a día.

A todos aquellos colegas, compañeros y amigos,
que no me dejaron bajar los brazos.

Gracias por darme la confianza en que podría,
y por sostenerme cuando no pude.

Este logro no sería posible sin ustedes.

Tarda en llegar, y al final, al final... hay recompensa.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1. Introducción	1
2. Nociones preliminares	11
2.1. Formalismo de integrales funcionales	11
2.2. Fórmula de Lifshitz	14
2.3. Espejos imperfectos en el campo escalar	16
2.3.1. Efecto Casimir estático	16
2.3.2. Efecto Casimir dinámico	19
I ECE para espejos imperfectos en campo EM	23
3. Fórmula de Lifshitz para espejos delgados	25
3.1. Modelo	27
3.2. Reducción a sistemas unidimensionales	29
3.3. Fórmula de Lifshitz	32
3.4. Espejos de ancho cero	33
4. Espejos delgados con ruptura de paridad	37
4.1. Modelo	38
4.2. Energía de interacción	41
4.3. Relación entre condiciones de contorno y acción de borde	42
4.4. Comportamiento de la energía para espejos de C-S	44

II	ECD para espejos imperfectos en campo EM	47
5.	Espejos imperfectos en 3+1 dimensiones	49
5.1.	Modelo	49
5.1.1.	Campos auxiliares	52
5.1.2.	Desarrollo perturbativo a segundo orden	53
5.2.	Espejo delgado conductor perfecto	56
5.3.	Un medio con funciones $g_{t,l}$ constantes	57
5.4.	Evaluación de $\tilde{f}(p_{\parallel})$ para el grafeno	59
6.	Espejos semitransparentes en 2 + 1 dimensiones	63
6.1.	Modelo	64
6.2.	Cálculo perturbativo	66
6.3.	Pequeños apartamientos del equilibrio	70
6.3.1.	Un solo espejo	70
6.3.2.	Dos espejos	72
6.4.	Ondas estacionarias de amplitud arbitraria	73
III	Conclusiones y bibliografía	75
7.	Conclusiones	77
	Bibliografía	81
	Publicaciones asociadas	89
	Agradecimientos	91

Resumen

El efecto Casimir es una de las más importantes consecuencias macroscópicas de las fluctuaciones del vacío cuántico. Su formulación original o efecto Casimir estático, consiste de dos placas paralelas infinitas, perfectamente conductoras y eléctricamente neutras, entre las cuales surge una fuerza atractiva, no predicha clásicamente, como consecuencia de las condiciones de contorno que imponen sobre el vacío. En la versión dinámica del efecto, estas condiciones varían con el tiempo y pueden inducir una transferencia de energía tal que dé lugar a la creación de partículas reales (fotones).

En esta Tesis, exponemos resultados acerca de la investigación realizada sobre diferentes modelos en los que se manifiestan el efecto Casimir estático y el dinámico, empleando descripciones que tengan en cuenta los grados de libertad microscópicos o “materiales” de las placas, con el objetivo de representar situaciones más realistas. Representamos la interacción entre el campo electromagnético de vacío y estos “espejos imperfectos” a través de la acción efectiva, en lugar de suponer condiciones de contorno ideales. Obtenemos expresiones generales de las cantidades físicas relevantes para casos con diferentes geometrías, considerando medios conductores y dieléctricos, y con especial énfasis en la aplicación de las mismas a ejemplos que involucran materiales planares, incluyendo efectos como ruptura de paridad.

Palabras clave: EFECTO CASIMIR ESTÁTICO, EFECTO CASIMIR DINÁMICO, ESPEJOS IMPERFECTOS

Abstract

Static and dynamic Casimir effect on imperfect mirrors.

The Casimir effect is one of the most relevant macroscopic consequences of the quantum vacuum fluctuations. Its original formulation or static Casimir effect, consists of two infinite parallel plates, perfectly conductive and electrically neutral, between which an attractive not classically predicted force arises, as a consequence of the boundary conditions imposed by the plates on the vacuum. In the dynamic version of the effect, these conditions vary over time and may induce such a transfer of energy that it gives rise to the creation of real particles (photons).

In this Thesis, we present results about our research on different models in which the Casimir effect is manifested, both in its static and dynamic versions, using descriptions that take into account the microscopic or “material” degrees of freedom, with the aim of represent more realistic situations. We represent the interaction between the vacuum electromagnetic field and these “imperfect mirrors” through the effective action, rather than assuming ideal boundary conditions. We obtain general expressions for the relevant physical quantities in cases with different geometries, considering conductive and dielectric media, and specially emphasizing on their application to examples involving planar materials including, among others, parity breaking effects.

Keywords: STATIC CASIMIR EFFECT, DYNAMIC CASIMIR EFFECT, IMPERFECT MIRRORS

Capítulo 1

Introducción

“Cuando te busco no hay sitio en donde no estés.”

— Cactus, Gustavo Cerati.

Aristóteles negaba la existencia del vacío, argumentando que el vacío era la nada misma, y la nada, por definición, no existe. El vacío, concebido en este sentido, resulta lógicamente imposible. Los aristotélicos sostenían, consecuentemente, que la naturaleza aborrecía el vacío. Este concepto, conocido como *horror vacui*, tuvo gran influencia a lo largo de la historia, al punto que una y otra vez, y en diferentes contextos, surgió la idea de que todo el espacio debía estar lleno con una desconocida sustancia sutil y misteriosa a la que se denominó éter. [1]

En el siglo XVII varios científicos impulsaban la hipótesis del éter. Entre ellos Christiaan Huygens, motivado por la idea de que toda onda necesitaba un medio en el cual propagarse, conjeturó que el éter era el medio a través del cual se propagaba la luz. Así como el sonido se transmite mediante vibraciones del aire, Huygens interpretó que la luz era una onda que se transmitía mediante vibraciones del éter. Sin embargo el concepto del éter presentaba numerosos conflictos, ya que a medida que se lo incorporaba en las teorías parecía necesario que cumpliera cada vez más propiedades. Todas estas propiedades resultaban bastante inusuales e incluso difícilmente compatibles entre sí. El éter debía ser un medio extremadamente elástico, completamente transparente, totalmente libre de fricción, y debía permear todos los cuerpos y el espacio sin materia, constituyendo así un sistema de referencia inmóvil para todos los movimientos. Incluso se daba la contradicción de suponer que debía ser similar a un gas pero que simultáneamente fuese capaz de propagar ondas transversales, siendo que los gases solo transmiten ondas longitudinales. Debía además ser muy rígido para que se pudieran propagar ondas de tan gran velocidad como las de la luz, lo que nuevamente resultaba inconsistente.

Durante el siglo XIX, apoyándose en lo antes propuesto por Huygens, James Clerk Maxwell consideró necesaria la existencia de un “éter luminífero” que servía como medio

para la propagación de las ondas electromagnéticas. Cabe destacar que su teoría del electromagnetismo no requería en modo alguno tal hipótesis. Posteriormente Michelson y Morley diseñaron el reconocido experimento que lleva sus nombres con el fin de detectar el efecto de este éter en la velocidad de la luz. Su objetivo final era descubrir si el movimiento relativo (en el sentido de las transformaciones de Galileo) de la Tierra con respecto al éter podía ser detectado. Construyeron para ello un interferómetro capaz de detectar mínimas diferencias que pudiesen existir entre la velocidad de la luz a favor y en contra del movimiento de la Tierra. Pero como es sabido, no hallaron diferencia alguna. Lo que encontraron en cambio fue que la velocidad de la luz es constante independientemente del marco de referencia. Los numerosos experimentos realizados por ellos con la esperanza de hallar el famoso éter, no dieron evidencia alguna de la existencia del mismo. En su lugar, estos experimentos sirvieron como base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein, quién así como Maxwell tampoco precisó en el desarrollo matemático de la misma hacer referencia alguna al éter. Dado que ningún experimento daba cuenta de la existencia de tal sustancia, y de que resultaba además innecesaria para explicar los fenómenos naturales observables, tanto el éter como las preguntas acerca del vacío fueron perdiendo interés. En los años posteriores el vacío pasó a considerarse como un espacio desprovisto de materia, sin otorgarle ninguna propiedad o característica particular.

Sin embargo, a partir del desarrollo de la mecánica cuántica, el interés sobre el vacío resurgió, y en este contexto, de ninguna manera se lo considera simplemente como un espacio desprovisto de propiedades. El vacío, tal como lo comprendemos hoy, no es la nada misma, sino el estado de menor energía de un sistema. Es importante notar que esta energía no es nula, y de hecho, en la teoría cuántica de campos, cuando consideramos el campo electromagnético en el espacio de Minkowski, esta energía es infinita. Más aún, el hecho de que sea infinita no se debe solamente a que el espacio sea infinito, sino a que la densidad de energía es infinita.

En mecánica cuántica, los niveles de energía de un oscilador armónico simple de frecuencia ω pueden expresarse como:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1.1)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ y $\hbar = \frac{h}{4\pi}$ siendo h la constante de Planck. Con lo cual la energía del estado fundamental ($n = 0$) resulta $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Esta energía de punto cero, surge en el contexto de la cuantización canónica y guarda relación con la arbitrariedad del orden de los operadores al definir el operador hamiltoniano H sustituyendo las variables dinámicas del hamiltoniano clásico por sus correspondientes operadores.

En la Electrodinámica Cuántica, la energía del estado fundamental del campo electromagnético es la suma de las energías de los estados fundamentales de cada modo de

este campo, es decir:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_j \omega_j, \quad (1.2)$$

donde el índice j indica los números cuánticos de los modos del campo. Para el caso del campo electromagnético en el espacio de Minkowski, los modos espaciales tendrán como índice un vector \mathbf{k} de tres componentes, además de las dos polarizaciones posibles, por lo que esta suma es claramente infinita.

La presencia de esta energía de punto cero no será detectable si es posible redefinir *de manera global* el nivel cero para las energías. Esto se logra matemáticamente mediante el procedimiento de ordenamiento normal. Correspondientemente, cuando no es posible emplear este procedimiento, la existencia de tales energías podría ser detectable. Como veremos más adelante, Casimir encontró una forma de hacerlo, mediante la presencia de ciertas condiciones de contorno.

El estado fundamental carece partículas cuya existencia estable permita detectar como tales, pero por otro lado no puede decirse que esté realmente vacío. La razón es que contiene partículas que momentáneamente aparecen y desaparecen, a las que conocemos como partículas virtuales. Según la Teoría Cuántica de Campos, las partículas y antipartículas pueden aparecer (crearse) y desaparecer (aniquilarse) luego de pequeños períodos de tiempo, mientras que los mismos sean consistentes con los límites impuestos por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Este principio afirma que no se puede determinar, simultáneamente y con precisión arbitraria, ciertos pares de variables físicas que constituyan operadores que no conmuten, como son por ejemplo, la posición y el momento lineal de un objeto dado. En particular, la energía y el tiempo satisfacen este principio, que puede expresarse mediante la siguiente relación:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.3)$$

donde ΔE es la incerteza sobre la energía y Δt es la incerteza sobre el tiempo. Esto significa que dentro de un intervalo de tiempo Δt , no es posible medir la energía con total precisión, sino que la misma tendrá una incerteza no nula ΔE . Para medir la energía con mayor precisión (hacer ΔE más pequeño), se debe incrementar Δt . Este intervalo de tiempo puede ser la cantidad de tiempo que toma realizar la medición, o el tiempo que existe un estado particular. Por lo tanto, las partículas virtuales pueden aparecer en el espacio libre por breves períodos de tiempo (Δt) que dependen de su contenido energético (ΔE) y posteriormente desaparecer. Por lo tanto, el estado de vacío, al igual que cualquier otro estado cuántico, tiene una energía variable como consecuencia del principio de incerteza de Heisenberg. Nos referimos a este fenómeno como fluctuaciones del vacío cuántico.

Puede decirse entonces que el vacío cuántico es una colección permanentemente

cambiante de partículas virtuales que nacen y mueren para luego ser reemplazadas por otras que sufrirán el mismo destino [2]. Esto implica que esas partículas cobran existencia por breves períodos de tiempo aún cuando la energía no es suficiente para crearlas realmente, de alguna forma “tomando prestada” la energía y devolviéndola un breve tiempo después. Es importante aclarar que estas partículas virtuales no son un mero artificio matemático. A pesar de la imposibilidad de observarlas en forma directa, los efectos debidos a estas partículas pueden ser detectados, y las predicciones en las que deriva la suposición de su existencia, han sido ampliamente confirmadas.

Salvo por sus posibles efectos como fuente del campo gravitatorio en Relatividad General, las manifestaciones macroscópicas del vacío cuántico no fueron predichas en las primeras décadas de la mecánica cuántica. El experimento propuesto en 1948 por Hendrik Casimir consiste de un sistema capaz de interactuar con el vacío y generar un efecto macroscópico tal que estas fluctuaciones puedan ser detectadas [3]. Este sistema consiste de dos placas metálicas infinitas, perfectamente conductoras y eléctricamente neutras, dispuestas paralelamente entre sí, a las que de ahora en adelante llamamos “espejos”, y entre las cuales surge sorprendentemente una fuerza atractiva no predicha clásicamente. Esta fuerza es consecuencia de las condiciones de contorno impuestas por las placas sobre el vacío cuántico circundante, es decir sobre el estado fundamental del campo electromagnético.

En la formulación cuántica de este sistema, debido a las condiciones de contorno impuestas por las placas conductoras sobre el campo electromagnético, las longitudes de onda de los modos estacionarios se ven forzadas a “encajar” en el contorno que las contiene. Esto implica, para los modos entre las placas, que la distancia entre ellas sea un múltiplo entero de la longitud de onda correspondiente, mientras que los modos externos (a pesar de anularse sobre las placas) siguen admitiendo un continuo de valores posibles para la longitud de onda. Esta diferencia de energía es la que causa la fuerza atractiva entre los espejos.

Dado que en esta situación, la Electrodinámica Clásica predice una fuerza nula, la interacción debida al efecto Casimir constituye un efecto debido al vacío cuántico. El cálculo original de Casimir predice que, si los espejos están a una distancia a , la fuerza (atractiva) por unidad de área $P(a)$ que actúa sobre cada uno de los planos, está dada por:

$$P(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}. \quad (1.4)$$

donde c denota la velocidad de la luz en el vacío.

A modo de ejemplo para tomar noción de la magnitud de esta fuerza, apliquemos la ecuación anterior al caso de dos planos separados por una distancia relativamente grande (a escala atómica): $a = 1\mu m$. En este caso la presión de Casimir resulta de aproximadamente $1,3mPa$, un valor macroscópico.

El Efecto Casimir Estático (ECE) o simplemente Efecto Casimir ([4],[5],[6]) es considerado como una de las manifestaciones macroscópicas más notables de las fluctuaciones (ya sea cuánticas o térmicas) de un campo, cuando está sujeto a la influencia no trivial de agentes externos. Esto último usualmente se manifiesta a través de condiciones de contorno, o de ‘términos de borde’ en la acción para el campo. Estos términos son, por definición, contribuciones dependientes únicamente del campo y sus derivadas en el borde. Por lo tanto, puede interpretarse que estas contribuciones son generadas por términos singulares en el lagrangiano (involucrando distribuciones). El efecto entonces, resulta de la interacción entre esos agentes externos y las fluctuaciones del campo. En la versión estática del efecto, se consideran condiciones de contorno independientes del tiempo, o de forma equivalente, términos de borde que no dependen explícitamente del tiempo.

Si bien el efecto Casimir es mencionado usualmente como la prueba de la existencia del campo de vacío cuántico, es importante destacar que no es la única, aunque sí es una de las pocas en dar lugar a un efecto macroscópico. Actualmente se conocen numerosas consecuencias observables del campo de vacío, entre las cuales podemos mencionar el efecto Lamb, el momento magnético anómalo y las fuerzas de Van der Waals, entre otras, todas las cuales pueden atribuirse, al menos parcialmente, a las fluctuaciones del vacío. Es interesante además notar que el trabajo de Casimir se originó a partir del estudio de un problema de química: la estabilidad de ciertos coloides. Los coloides son mezclas que se dan a escala microscópica, en donde las partículas de una o más sustancias se dispersan en otra sustancia llamada medio dispersor. Los coloides se caracterizan por el tamaño de estas partículas llamadas fase dispersante, que tienen un diámetro de entre un nanómetro y un micrómetro. La estabilidad de estas sustancias depende de la relación entre las fuerzas atractivas y repulsivas que actúan sobre estas partículas. En una suspensión de partículas en solución de electrolitos, las fuerzas repulsivas surgen como consecuencia de que cada partícula cargada está rodeada de iones de carga opuesta ya que la mezcla es neutra. Por otro lado, el efecto colectivo de las fuerzas interatómicas de Van der Waals originadas por los billones de átomos que componen cada partícula, dan lugar a fuerzas atractivas entre ellas. Un modelo cuantitativo para estudiar estas últimas consiste de considerar dos placas paralelas a una distancia d con interacciones de London - Van der Waals entre pares de átomos. Overbeek infirió a partir de experimentos que estas fuerzas entre partículas grandes de un coloide debían decaer más rápido que r^{-3} , y conjeturó que el factor r^{-6} de la energía interatómica calculado por London podría decaer más rápidamente si se tuviera en cuenta el retardo asociado al valor finito de la velocidad de la luz. En 1948 Casimir y Polder calcularon esta energía de interacción “retardada” de Van der Waals [7] encontrando que para separaciones interatómicas grandes decae como r^{-7} . Una derivación de la misma puede hallarse en [4]. Según el propio Casimir, él le comentó

estos resultados a Niels Bohr durante una caminata [5], mostrándose asombrado por la simpleza de la dependencia de las expresiones para la interacción de Van der Waals para distancias grandes, y Bohr murmuró algo sobre la energía de punto cero, que reencaminó su trabajo. Casimir no tenía de hecho conocimientos previos sobre la energía de punto cero y se abrió camino por su cuenta en el tema.

“[Bohr] mumbled something about zero-point energy. That was all, but it put me on a new track. I found that calculating changes of zero-point energy really leads to the same results as the calculations of Polder and myself.” -
Comunicación privada, 12 de marzo de 1992.

Finalmente, en búsqueda de profundizar su comprensión sobre aquellos resultados, Casimir halló que la interacción de Van der Waals podía ser atribuida al cambio en la energía de punto cero del campo debida a la presencia de dos átomos, y luego consideró los mismos argumentos para el ejemplo sencillo de las dos placas paralelas que derivó en la predicción de la fuerza atractiva entre ellas que hemos descripto previamente.

La atracción entre placas metálicas eléctricamente neutras en vacío fue observada por primera vez por Marcus Spaarnay en 1958 [8] mediante una técnica con balanza de resorte. Estas mediciones no tenían suficiente precisión y tenían errores, pero sirvieron para establecer un punto de referencia para las mediciones que le siguieron, y para clarificar las fuentes más importantes de error y los problemas a superar para lograr mediciones de gran sensibilidad y reproducibilidad. Entre estos problemas se pueden mencionar: la necesidad de contar con superficies limpias completamente libres de impurezas químicas y polvo, la dificultad de medir en forma precisa la distancia entre placas, y el error sistemático introducido por la presencia de cargas electrostáticas residuales en las placas. Posteriormente hubo otras mediciones importantes, como las realizadas por P. van Blokland y J. Overbeek [9] sobre superficies metálicas, y las realizadas por B. Derjaguin et al. ([10], [11], [12]) sobre superficies metálicas y dieléctricas. Los experimentos de Derjaguin fueron muy importantes, ya que fueron los primeros en los que se utilizaron superficies curvas, evitando así la necesidad de contar con superficies perfectamente planas precisamente alineadas. Finalmente el efecto Casimir estático fue medido de forma más precisa por Steve K. Lamoreaux del Laboratorio Nacional Los Álamos en 1997 [13] utilizando un péndulo de torsión, y por Umar Mohideen et al. de la Universidad de California en Riverside utilizando un microscopio de fuerza atómica ([14], [15], [16]). En ambos casos utilizaron una placa plana y otra esférica con radio de curvatura grande. Actualmente las mediciones del efecto tienen muy buena precisión y acuerdo con la teoría. En el capítulo 6 del libro de Bordag et al. [17] se puede profundizar acerca de los resultados experimentales y su comparación con las predicciones teóricas. Cabe mencionar por último que la fuerza de Casimir entre placas paralelas fue medida en el 2001 por un grupo de la Universidad de Padua [18] usando

micro resonadores, con considerable precisión teniendo en cuenta las dificultades que presenta la configuración de placas paralelas.

Aunque esta fuerza puede parecer pequeña, a distancias por debajo de un micrómetro, la fuerza de Casimir se convierte en la fuerza más fuerte entre dos objetos neutros. De hecho, a separaciones de 10 nm, unas cien veces el tamaño típico de un átomo, el efecto Casimir produce el equivalente a 1 atmósfera de presión [19]. Si bien estas distancias tan pequeñas no parecieran tener relevancia en nuestra vida cotidiana, son importantes en estructuras a escala nanométrica y sistemas microelectromecánicos (MEMS). Los MEMS son dispositivos “inteligentes” del tamaño de una micra en los que los elementos mecánicos y las partes móviles están tallados en un sustrato de silicio. Luego, los componentes electrónicos se conectan al dispositivo para procesar la información que detecta o para impulsar el movimiento de sus partes mecánicas. Los MEMS tienen muchas aplicaciones posibles en ciencia e ingeniería. El efecto Casimir tiene una cualidad que lo convierte en un buen candidato para aplicaciones en dispositivos nanotecnológicos, a saber: su fuerte dependencia con la forma, la cual se puede observar en la presencia de cambios de la fuerza atractiva a repulsiva como función de la geometría y también de la topología [20]. La fuerza de Casimir puede hacer por ejemplo, que los elementos de un dispositivo nanométrico se peguen [21], pero también puede aprovecharse. Federico Capasso y su grupo en Lucent Technologies mostraron cómo se puede usar la fuerza para controlar el movimiento mecánico dependiendo de si su frecuencia corresponde a una resonancia de la cavidad o no [22]. A una frecuencia de resonancia de la cavidad, la presión de radiación dentro de la cavidad es más fuerte que en el exterior y, por lo tanto, los espejos se separan. Por el contrario, cuando la presión de radiación dentro de la cavidad es menor que en el exterior los espejos se acercan entre sí. A fin de cuentas, para dos espejos perfectos, planos y paralelos, los componentes atractivos tienen un impacto ligeramente más fuerte que los repulsivos, y por lo tanto la fuerza de Casimir es atractiva y los espejos se juntan.

El efecto Casimir presenta múltiples desafíos, tanto por las refinadas técnicas experimentales necesarias para observarlo, como por la complejidad que demanda su adecuada descripción teórica. Con respecto a la relevancia actual del estudio de este problema, se pueden mencionar un par de aspectos. Por un lado, es muy importante lograr la introducción de propiedades correspondientes a materiales reales en la descripción de las placas. Llamamos espejos imperfectos a aquellos que no necesariamente imponen condiciones de contorno perfectas. Por otro lado, existen al menos dos manifestaciones dinámicas del efecto Casimir y surgen de considerar condiciones de contorno que dependen del tiempo. Una es la aparición de una fuerza que actúa sobre el contorno y la otra es la creación de partículas (fotones) que emergen del vacío, debido a la transferencia de energía que induce ese movimiento. La energía es transferida desde el campo externo a las partículas virtuales (oscilaciones de vacío) transformándolas, en condi-

ciones de resonancia, en partículas reales. También en este caso, resulta fundamental para entender el fenómeno, estudiar esos efectos disipativos.

Se pueden explorar una gran variedad de situaciones donde este efecto se torna relevante; una forma natural de agotar todas esas posibilidades, es considerar campos fluctuantes de distinta naturaleza para cada condición de contorno, o de forma equivalente estudiar las consecuencias de imponer diferentes condiciones de contorno sobre cada campo dado. En principio, tanto la geometría de los espejos como sus propiedades intrínsecas, son relevantes para el efecto. La ecuación 1.4, ha sido derivada mediante la aplicación de diversas estrategias y ha sido generalizada en diferentes direcciones. A modo de enumeración no exhaustiva de tales direcciones, mencionamos las siguientes:

1. Materiales reales: entendemos por esto, una descripción más realista de los medios materiales que constituyen los espejos [23]. Típicamente, esto se corresponde con la introducción de las correspondientes permitividades y permeabilidades.
2. Generalización a otras geometrías: la geometría de dos planos paralelos infinitos, ciertamente constituye la más sencilla desde el punto de vista del cálculo de la fuerza de Casimir. Sin embargo, la situación es diferente desde el punto de vista experimental, donde suele preferirse la geometría esfera-plano [24]. Avances recientes han abierto además la posibilidad de controlar la fuerza de Casimir en geometrías más complejas [25].
3. Temperatura finita: Cuando los efectos térmicos no son despreciables, ellos contribuyen adicionando fluctuaciones térmicas a las cuánticas [26]. En particular, cuando a temperaturas altas, los efectos cuánticos resultan despreciables frente a los térmicos, se tiene el efecto Casimir clásico. Una medida de cuándo los efectos térmicos son relevantes, a una temperatura T , está dada por el $k_B T \gg 1/a$, donde hemos usado unidades naturales, y k_B denota la constante de Boltzmann.
4. Espejos en movimiento: la situación originalmente considerada por Casimir es la que actualmente se denomina “efecto Casimir estático”, por oposición a la generalización correspondiente a estudiar efectos debidos al movimiento de los espejos: “efecto Casimir dinámico”. Estas manifestaciones dinámicas del efecto Casimir, surgen al considerar condiciones de contorno dependientes del tiempo. [27]

En forma general, el Efecto Casimir Dinámico (ECD) abarca un conjunto de fenómenos donde se crean partículas reales a partir del vacío cuántico ante la presencia de condiciones externas dependientes del tiempo. El interés en este tema se inició en el trabajo pionero de Moore [28] y subsecuentemente en el de Fulling y Davies [29], donde se estudia la creación de partículas en una cavidad unidimensional que contiene un espejo perfecto en movimiento. En los últimos años, el ECD ha ganado nueva

atención, convirtiéndose en un tópico relevante para diferentes fenómenos relacionados, tales como la electrodinámica cuántica de cavidades, las guías de ondas superconductoras sujetas a condiciones de contorno dependientes del tiempo, la fricción cuántica, etc., y se han obtenido predicciones sobre manifestaciones potencialmente observables del ECD para una gran variedad de geometrías y sistemas diferentes, por medio de herramientas teóricas muy diversas ([30],[31],[32],[33],[34]).

La detección de fotones creados a partir del ECD sería de gran importancia porque constituiría una medición menos indirecta que el ECE de las partículas virtuales que constituyen el vacío cuántico. Las grandes dificultades en la verificación experimental de este fenómeno en su versión original se deben a la imposibilidad práctica de generar y mantener las oscilaciones en los espejos a muy alta frecuencia, con gran amplitud y por suficiente tiempo, lo cual resulta necesario para la creación de los fotones y su posterior detección. Sin embargo, en 2011 Wilson et al. [35] reportaron la observación de fotones de microondas generados a partir del vacío en un resonador de microondas superconductor. En este experimento se busca imitar la oscilación del espejo a la velocidad relativista requerida cambiando la longitud efectiva del resonador en función del tiempo. La razón de cambio de la misma puede hacerse muy rápida modulando la inductancia de un dispositivo superconductor de interferencia cuántica (SQUID) a altas frecuencias (>10 gigahertz). Otras observaciones de análogos del ECD han sido reportadas posteriormente ([36], [37]).

En esta Tesis, exponemos la investigación realizada sobre diferentes modelos teóricos en los que se manifiesta el efecto Casimir, tanto en su versión estática como dinámica, empleando descripciones que tengan en cuenta los grados de libertad microscópicos o “materiales”, cuyo principal rol es el de imponer condiciones de contorno. Para ello se consideran modelos en donde la interacción entre el campo de vacío y los espejos se representa a través de la acción efectiva, en lugar de considerar el vacío sujeto a condiciones de contorno ideales. Se describen aquí casos con diferentes geometrías, considerando medios conductores y dieléctricos, y con especial énfasis en la aplicación a sistemas planares, en particular aquellos que involucran materiales tipo grafeno. Nuestra motivación para estudiar ejemplos con grafeno radica en que es un material muy investigado actualmente por sus potenciales aplicaciones nanotecnológicas, que a su vez tiene numerosas propiedades que lo hacen especialmente interesante para el estudio del efecto Casimir ([38], [39], [40],[41]). El grafeno conduce la electricidad y posee una estructura bidimensional (comúnmente en forma de láminas del grosor de un átomo de carbono) que permite que los electrones se comporten como cuasipartículas sin masa (fermiones de Dirac) capaces de viajar a muy alta velocidad (aproximadamente $0,003c$). Además se lo puede dopar para modificar su conductividad. Adicionalmente, las láminas de grafeno pueden apilarse a distancias interplanares nanométricas sin que las mismas tengan enlaces covalentes o iónicos entre sí, de forma

tal que las interacciones entre ellas son puramente debidas al efecto Casimir.

La Tesis se organiza de la siguiente forma: En el capítulo 2 introducimos algunas nociones preliminares relevantes para comprender los modelos y desarrollos expuestos en los siguientes capítulos (en los cuales se presentan los resultados originales), que están divididos en tres partes.

La parte 1, contiene los capítulos 3 y 4, y se ocupa del estudio del efecto Casimir estático en modelos con espejos imperfectos que interactúan con el campo electromagnético.

En el capítulo 3, partimos de un abordaje recientemente propuesto de la fórmula de Lifshitz mediante Teoría Cuántica de Campos, implementado originalmente para un campo escalar real, y lo extendemos al caso de un campo fluctuante de vacío electromagnético (EM), acoplado a dos espejos planos paralelos. Se presenta el resultado general en términos de los invariantes del Tensor Polarización del Vacío (TPV) debido al material de cada espejo. Consideramos espejos de ancho pequeño, con el límite de ancho cero como caso particular, y analizamos como ejemplos modelos que involucran láminas de grafeno. Por ancho cero, queremos decir que los grados de libertad microscópicos de cada espejo están confinados al mismo, como ocurre en el plasma o en una lámina de grafeno.

En el capítulo 4 estudiamos la energía de interacción de Casimir debida a las fluctuaciones del campo de vacío electromagnético (EM) en presencia de dos espejos, descritos por acciones en general no locales, en $2 + 1$ dimensiones, que pueden contener tanto términos que conserven paridad como términos que rompan paridad. Comparamos los resultados con aquellos correspondientes a condiciones de contorno de Chern-Simons, y evaluamos la energía de interacción para varias situaciones particulares.

La parte 2, contiene los capítulos 5 y 6, y se ocupa del estudio del efecto Casimir dinámico en modelos con espejos imperfectos que interactúan con el campo electromagnético.

En el capítulo 5 examinamos los efectos disipativos cuánticos debidos al movimiento acelerado de un único espejo imperfecto de ancho cero en un campo EM.

En el capítulo 6 analizamos el Efecto Casimir Dinámico generado por un campo de gauge abeliano en $2 + 1$ dimensiones ante la presencia de uno o dos espejos semitransparentes de ancho cero, que pueden moverse y/o deformarse de forma no trivial en función del tiempo. Obtenemos expresiones generales para la probabilidad de creación de pares inducida por el movimiento de los espejos, y expresamos las mismas de manera más explícita para algunos casos de interés.

Por último, la parte 3, contiene al capítulo 7, donde presentamos nuestras conclusiones, y finalmente la bibliografía de referencia.

Capítulo 2

Nociones preliminares

“Todo camino puede andar... todo puede andar.”

— Cantata de puentes amarillos, Luis Alberto Spinetta.

2.1. Formalismo de integrales funcionales

Existen otras formulaciones de la mecánica cuántica además de la ondulatoria de Schrödinger y la matricial de Heisenberg. Una de ellas es la formulación mediante integrales de camino de Richard Feynman. Las dos primeras están basadas en un enfoque hamiltoniano mientras que la última toma como base el lagrangiano del sistema.

En una integral de camino, se suelen sumar los valores que toma una función cuyo dominio es toda una clase de trayectorias, clase que normalmente es determinada mediante condiciones de contorno en un intervalo temporal común a todas ellas. Si las trayectorias fuesen discretas, por ejemplo mediante el reemplazo del intervalo temporal continuo que las parametriza por un conjunto discreto de tiempos, la integral de camino sería una integral múltiple, en un número posiblemente grande, aunque finito, de dimensiones. Por ello es que, pensando a cada trayectoria continua como límite de una aproximación discreta a la misma, una integral de camino resulta una generalización de las integrales multidimensionales usuales, a un número infinito de variables de integración.

En mecánica cuántica, las cantidades físicas pueden expresarse mediante promedios sobre todos los caminos posibles, cada uno con un peso dado por la exponencial de un término proporcional a la acción asociada a cada camino e inversamente proporcional a la constante de Planck, a saber $e^{-iS/\hbar}$, donde S es la acción del sistema a estudiar. A diferencia del formalismo de Schrödinger, la formulación de la mecánica cuántica mediante integrales de camino constituye una robusta herramienta para estudiar sistemas con muchos grados de libertad. Asimismo, permite introducir con mayor naturalidad

conceptos y herramientas tales como las simetrías, y diferentes esquemas de desarrollos perturbativos.

Todo el trabajo expuesto en esta Tesis, ha sido realizado utilizando el formalismo de integrales funcionales, que surge al extender a las teorías de campos el desarrollo de integrales de camino aplicado a la mecánica cuántica. En la Teoría Cuántica de Campos los caminos o historias no representan la trayectoria de una partícula individual, sino todas las posibles evoluciones temporales de un campo sobre todo el espacio. En este caso la acción es un funcional del campo, que es a su vez función de las coordenadas espaciotemporales. En el capítulo 7 del libro de Zinn-Justin y Jean [42] se detalla el uso de métodos funcionales y teoría de perturbaciones en la Teoría Cuántica de Campos.

Dada su gran similitud con la función de partición definida en la mecánica estadística, se suele llamar función de partición a la integral funcional. Matemáticamente la única diferencia entre las mismas es un factor i en el exponente de $e^{-\beta\mathcal{H}}$, donde $\beta = 1/T$, siendo T la temperatura. Por ello, para aprovechar aún más esa similitud se trabaja con una formulación euclídea que se obtiene realizando una rotación de Wick, es decir una continuación analítica a tiempo imaginario, que torna la integral funcional a un formato equivalente al de la función de partición estadística. Esta forma de trabajo contribuye adicionalmente a reducir las dificultades matemáticas en los cálculos, lo que convierte a este método en una de las herramientas más poderosas de la física teórica actual. Luego podremos obtener expresiones explícitas realizando la continuación analítica $\beta \rightarrow it/\hbar$ de vuelta al tiempo real. En la sección 2.3 de este capítulo mostraremos el uso de este método para estudiar el ECE y el ECD en modelos sencillos de espejos imperfectos interactuando con un campo escalar de vacío.

La función de partición cuántica se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (2.1)$$

y a partir de ella, podemos obtener la energía libre de Casimir por unidad de área, $\Gamma_C(\beta)$:

$$\Gamma_C(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L^2} \log \frac{\mathcal{Z}(\beta)}{\mathcal{Z}_0(\beta)} \right], \quad (2.2)$$

donde L es la longitud que caracteriza el tamaño de las placas. Se puede escribir $\mathcal{Z}(\beta)$ como una integral funcional euclídea:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{S}(A)}, \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{S}(A)$ es la acción euclídea para el campo de gauge, incluyendo su acoplamiento a los espejos. Suponemos que la integral sobre la coordenada euclídea tipo tiempo x_0 debe tomarse sobre un intervalo finito de longitud β , con condiciones periódicas de contorno para el campo. Se supone también que las coordenadas espaciales están confinadas a

una caja de longitud L , con condiciones de contorno de Dirichlet. El resultado final, para $L \rightarrow \infty$, no deberá ser afectado por la elección particular de condiciones de contorno en la caja.

En el estudio del ECE, estamos interesados en la fuerza de Casimir, por lo que descartamos factores independientes de l , que es la distancia entre los espejos. Esto puede hacerse como en (2.2) dividiendo por \mathcal{Z}_0 , que denota la función de partición cuando los espejos están infinitamente separados. Los observables físicos relevantes en este caso son la energía de vacío por unidad de área $\mathcal{E}_{vac} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Gamma_C(\beta)$, la fuerza de Casimir por unidad de área, $\mathcal{F}_C(\beta)$:

$$\mathcal{F}_C(\beta) = -\frac{\partial \Gamma_C(\beta)}{\partial l}, \quad (2.4)$$

y su límite a temperatura cero $\mathcal{F}_C \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{F}_C(\beta)$.

En el caso de espejos en movimiento, estaremos interesados en los efectos disipativos debidos a la aceleración de los mismos. Estos efectos se caracterizan por generar una probabilidad no nula de producir pares a partir del vacío. La probabilidad total \mathcal{P} de producir un par de fotones teniendo en cuenta toda la historia del sistema puede obtenerse a partir de la acción efectiva Γ . Esta acción efectiva puede hallarse a su vez integrando sobre las fluctuaciones del vacío de A en presencia del o los espejos:

$$e^{-\Gamma} = \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A e^{-S(A)}. \quad (2.5)$$

La acción efectiva Γ está definida como un funcional de la geometría de los espejos, y como una función de las constantes que controlan la fuerza del acoplamiento entre ellos y el campo. Podemos ver a partir de (2.5), que la misma puede escribirse como sigue:

$$e^{-\Gamma} = e^{-\Gamma_0} e^{-\Gamma_I}, \quad (2.6)$$

donde

$$e^{-\Gamma_0} \equiv \mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}A e^{-S_0(A)}, \quad (2.7)$$

es la acción efectiva en ausencia de espejos, y:

$$e^{-\Gamma_I} \equiv \langle e^{-S_I} \rangle, \quad (2.8)$$

donde hemos introducido el símbolo $\langle \cdot \rangle$ para denotar el promedio funcional, con un peso gaussiano determinado por la acción libre, es decir:

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}A \dots e^{-S_0(A)}}{\int \mathcal{D}A e^{-S_0(A)}}. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, dado que solo el término de interacción puede producir una parte imagi-

naria distinta de cero, se puede escribir la probabilidad P de la siguiente manera:

$$P = 2 \operatorname{Im}[\Gamma^{io}], \quad (2.10)$$

donde Γ^{io} es la acción efectiva 'in-out' a tiempo real que se obtiene realizando la rotación de Wick inversa sobre la acción efectiva euclídea Γ_I de vuelta a tiempo real.

2.2. Fórmula de Lifshitz

El trabajo de Casimir y Polder sobre coloides [7] que hemos mencionado previamente en la introducción, donde se obtiene la fuerza entre moléculas polarizables, fue extendido posteriormente por E.M. Lifshitz [43] al caso de cuerpos dieléctricos macroscópicos caracterizados por su constante dieléctrica ϵ_0 . En la versión original de este trabajo, se considera un sistema formado por dos semiespacios disjuntos, con distancia a entre sí, compuestos de algún medio material, que tienen bordes planos y paralelos. Adicionalmente el cálculo se realiza a temperatura finita T , y el resultado final para la fuerza de interacción se presenta en términos de las funciones dieléctricas que describen macroscópicamente las propiedades electromagnéticas de cada medio. La fuerza puede escribirse de la siguiente forma:

$$F(a) = -\frac{k_B T}{\pi c^3} \sum_{l=0}' \xi_l^3 \int_1^\infty p^2 dp^2 \left\{ \left[\left(\frac{K(i\xi_l) + \epsilon(i\xi_l)p}{K(i\xi_l) - \epsilon(i\xi_l)p} \right)^2 e^{2a\frac{\xi_l}{c}p} - 1 \right]^{-1} + \left[\left(\frac{K(i\xi_l) + p}{K(i\xi_l) - p} \right)^2 e^{2a\frac{\xi_l}{c}p} - 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (2.11)$$

donde $K(i\xi_l) \equiv [p^2 - 1 + \epsilon(i\xi_l)]^{1/2}$, $\xi_l = 2\pi l/\beta$, ϵ es la permitividad de medio (que es función de la frecuencia ω), y donde la notación primada significa que el término con $l = 0$ de la suma se toma con coeficiente $1/2$. La misma puede ser escrita en forma más conveniente como:

$$F(a) = -\frac{k_B T}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp q_l \{ [r_1^{-2}(\xi_l, k_\perp) e^{2aq_l} - 1]^{-1} + [r_2^{-2}(\xi_l, k_\perp) e^{2aq_l} - 1]^{-1} \}, \quad (2.12)$$

donde $r_{1,2}$ son los coeficientes de reflexión con polarización paralela y perpendicular respectivamente.

Para el caso de dos superficies dieléctricas planas paralelas de área S , separadas entre sí por una distancia a , y caracterizadas por una misma constante dieléctrica ϵ_0 ,

la fórmula se reduce a:

$$F(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2 \psi(\epsilon_0) S, \quad (2.13)$$

donde $\psi(\epsilon_0)$ es una función cuyos valores pueden obtenerse numéricamente [43]. En esta descripción, el caso de conductor ideal se obtiene en el límite $\epsilon_0 \rightarrow \infty$, donde surge nuevamente la fuerza de Casimir 1.4 tal como en el enfoque de la energía de punto cero. Esto es porque en el límite de conductor ideal, solo la capa superficial de átomos interactúa con el campo electromagnético, de forma que las condiciones de contorno proporcionan una descripción equivalente. La fórmula de Lifshitz, por lo tanto, provee una herramienta muy útil para la evaluación de la fuerza de Casimir entre cuerpos con interfaces planas paralelas, compuestos por materiales cuyas funciones dieléctricas dependen de la frecuencia y son, por lo demás, arbitrarias.

El enfoque microscópico de las teorías de ambas fuerzas, de Van der Waals y de Casimir, puede formularse de manera unificada. Por un lado la interacción de Van der Waals aparece entre átomos neutros de cuerpos separados por distancias que son mucho mayores que las dimensiones atómicas. La fuerza generada por esta interacción puede obtenerse de forma no relativista a partir de la energía de interacción dipolo-dipolo, mediante teoría de perturbaciones a segundo orden. Dado que los valores de expectativa de los operadores de momento dipolar son cero, la interacción de Van der Waals se debe a sus dispersiones, es decir, a fluctuaciones cuánticas. Usando la terminología de la teoría cuántica de campos, podemos decir que para cuerpos macroscópicos separados por una distancia pequeña, el fotón virtual emitido por un átomo de uno de los cuerpos logra alcanzar un átomo del segundo cuerpo durante su vida, y así las oscilaciones correlacionadas de los momentos dipolares inducidos instantáneamente de esos átomos dan lugar a la fuerza de Van der Waals no retardada. Por otro lado, si aumentamos ahora la distancia entre los dos cuerpos macroscópicos de forma tal que sea tan grande que el fotón virtual emitido por un átomo de un cuerpo no pueda alcanzar el segundo cuerpo a lo largo de su tiempo de vida, la fuerza habitual de Van der Waals no estará presente. Sin embargo, el correlador del campo electromagnético cuantizado en el estado de vacío no es igual a cero en los dos puntos donde se encuentran los átomos pertenecientes a los diferentes cuerpos. Por lo tanto, el efecto no nulo de los momentos dipolares atómicos inducidos surge una vez más, dando como resultado la fuerza de Casimir, que en este enfoque teórico, también se denomina fuerza de Van der Waals retardada. Es importante notar que si bien en el caso de metal perfecto, la presencia de los cuerpos puede reducirse a condiciones de contorno, en el caso general es necesario calcular la energía de interacción en términos de la permitividad dieléctrica, dependiente de la frecuencia del medio, y en general también de su permeabilidad magnética. La relación entre los enfoques de Lifshitz y de Casimir, y su correlación,

puede estudiarse con mayor detalle en el libro de Milonni [4].

2.3. Espejos imperfectos en el campo escalar

2.3.1. Efecto Casimir estático

Un paso muy importante para refinar los cálculos de la energía de Casimir es el uso de modelos sensibles a la descripción de los medios que constituyen los espejos. Resumiremos aquí algunos resultados obtenidos por Fosco et al. [44] en esa dirección, ya que constituyen la base para comprender los fundamentos de los modelos más complejos que abordaremos en los capítulos posteriores. En ese trabajo se consideran espejos descritos por películas delgadas, provistos de campos de materia confinados a ellos. Estos campos localizados inducen una acción eficaz para el acoplamiento de los campos de vacío a los espejos [45] a partir de la cual se obtiene la energía de Casimir para varios modelos. Nos concentraremos aquí únicamente en el caso de un campo escalar sin masa (real), a modo de primer acercamiento al tema.

Partamos entonces de considerar la acción efectiva, $S_{eff}^{(I)}$, para un campo escalar real φ , que resulta de su interacción con la materia confinada a dos espejos planos, paralelos, de ancho cero en d dimensiones espaciales, definidos por las ecuaciones $x_d = 0$ y $x_d = a$. La acción euclídea total S para φ será de la forma:

$$S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_{eff}^{(I)}(\varphi), \quad (2.14)$$

donde $S_0 \equiv \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi$, define la teoría libre.

Es importante notar que $S_{eff}^{(I)}$ depende de la naturaleza de los campos confinados a los espejos y de la estructura de su interacción con φ , y su forma funcional se supone cuadrática en φ . Esta aproximación se basa en lo siguiente: dado que el medio material debe imponer de forma aproximada condiciones de contorno de Dirichlet, las configuraciones relevantes corresponden a valores pequeños de los campos en los espejos. Por lo tanto resulta razonable suponer que los términos de orden superior en esos campos están fuertemente suprimidos en comparación con el menor orden no trivial. Considerando esa aproximación, teniendo en cuenta que los campos de materia están confinados a los espejos, y suponiendo que la interacción es local, tenemos que:

$$S_{eff}^{(I)}(\varphi) = S_{eff}^{(1)}(\varphi) + S_{eff}^{(2)}(\varphi) \quad (2.15)$$

donde:

$$S_{eff}^{(\alpha)}(\varphi) = \frac{1}{2} \int dx_0 \int dx'_0 \int d^{d-1}x_{\parallel} \int d^{d-1}x'_{\parallel} \int dx_d \int dx'_d \\ \times \varphi(x_0, \mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \lambda(x_0 - x'_0; \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}) \delta(x_d - a_\alpha) \delta(x'_d - a_\alpha) \varphi(x'_0, \mathbf{x}'_{\parallel}, x_d), \quad (2.16)$$

con $a_1 \equiv 0$ y $a_2 \equiv a$, y donde \mathbf{x}_{\parallel} denota la coordenada paralela $d - 1$ del espejo: x_1, x_2, \dots, x_{d-1} .

El término de interacción se obtiene como una acción efectiva proveniente de la integración de los grados de libertad confinados a las paredes que interactúan localmente con el campo escalar $\varphi(x)$ en $x_d = 0$ y $x_d = a$.

Aplicando una transformación de Fourier con respecto a las coordenadas espacio-temporales x_a con $a = 0, 1, \dots, d - 1$, se obtiene:

$$S_{eff}^{(\alpha)}(\varphi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}^*(k, a_\alpha) \tilde{\lambda}(k) \tilde{\varphi}(k, a_\alpha), \quad (2.17)$$

donde $k \equiv (k_a)_{a=0}^{d-1}$, son las variables espaciales de Fourier asociadas a las coordenadas espaciotemporales del espejo. De esta forma, el efecto de los modos de materia queda codificado en una única función $\tilde{\lambda}(k)$, que según si la dinámica de los campos de materia se considera relativista, o no relativista, dependerá de $\kappa \equiv \sqrt{k_a k_a}$, o de k_0 y $|\mathbf{k}_{\parallel}|$, respectivamente.

Consideremos que $S_{eff}^{(1)} \equiv S_{eff}$ se debe al acoplamiento lineal de φ a un campo escalar real microscópico $\xi(y)$, en d dimensiones espaciotemporales, provisto de una acción $S_m(\xi)$:

$$e^{-S_{eff}(\varphi)} = \frac{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_m(\xi) + ig \int d^d y \xi(y) \varphi(y,0)}}{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_m(\xi)}}, \quad (2.18)$$

donde g es una constante de acoplamiento. El campo de materia ξ puede tener una autointeracción, controlada por una constante de acoplamiento independiente, implícita en S_m .

Llamaremos $W(J)$ a la funcional generatriz de funciones de correlación conectadas de ξ , relacionado con $\mathcal{Z}(J)$, que es la funcional generatriz para las funciones de correlación completas:

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}\xi e^{-S_m(\xi) + \int d^d y J(y) \xi(y)}, \quad (2.19)$$

por $W = \log \mathcal{Z}$. Tenemos entonces que $S_{eff}(\varphi) = -W[ig \varphi(y, 0)]$. Por otro lado, dado que solo retendremos la parte cuadrática,

$$\begin{aligned} S_{eff}(\varphi) &= -W[ig \varphi(y, 0)] \\ &\simeq \frac{1}{2} g^2 \int d^d y \int d^d y' \varphi(y, 0) W^{(2)}(y, y') \varphi(y', 0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $W^{(2)}$ es la función conectada de 2 puntos. Por último, dado que consideramos invariancia traslacional a lo largo de las superficies de los espejos, concluimos que:

$$\tilde{\lambda}(\kappa) = g^2 \tilde{W}^{(2)}(\kappa). \quad (2.21)$$

Entonces, para este ejemplo, $\tilde{\lambda}$ puede leerse a partir del propagador completo para el campo material en el espejo. En el caso relativista, sabemos que:

$$\widetilde{W}^{(2)}(\kappa) = \frac{z(\kappa)}{\kappa^2 + \Pi(\kappa)} \quad (2.22)$$

donde z y Π denotan la función de renormalización de la función de onda y la autoenergía completa, respectivamente. Suponemos que la función de 2 puntos ha sido renormalizada, de forma tal que no quede ambigüedad en ninguna de estas funciones, que solo dependen de κ . Dado que el propagador completo puede relacionarse a las funciones de respuesta para el campo, debidas a los grados microscópicos de libertad en los espejos, para este ejemplo particular podemos esperar una buena descripción utilizando directamente el propagador libre:

$$\tilde{\lambda}(\kappa) \sim \frac{g^2}{\kappa^2 + m^2}, \quad (2.23)$$

Consideremos ahora la densidad de energía involucrada al distorsionar el vacío cuando introducimos los espejos. Teniendo presente la ecuación 2.2 y recordando que estamos trabajando en una formulación euclídea, podemos definir esta cantidad como

$$\mathcal{E}_0 \equiv - \lim_{T, L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{d-1} T} \log \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} \right), \quad (2.24)$$

donde T es la extensión del intervalo temporal (imaginario). Además, en el caso de dos espejos, estamos particularmente interesados en la cantidad sustraída

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 \equiv \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0(\infty), \quad (2.25)$$

donde $\mathcal{E}_0(\infty)$ es la densidad de energía cuando los espejos se hallan infinitamente separados. Valiéndonos de todo lo anterior podemos escribir una expresión general para $\tilde{\mathcal{E}}_0$ como sigue:

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(a) = \frac{1}{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{d-1} \log \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2\kappa}{\tilde{\lambda}(\kappa)} \right]^{-2} e^{-2\kappa a} \right\}. \quad (2.26)$$

El comportamiento estándar de $\tilde{\lambda}(\kappa)$ es $\sim \kappa^{-2}$ para valores grandes de κ ; esto implica que el comportamiento UV debería suavizarse con respecto al caso de un espejo perfecto, y por otro lado, la región IR del integrando está fuertemente afectada por la inclusión de la función de 2 puntos.

2.3.2. Efecto Casimir dinámico

En el trabajo de Fosco et al. [46] se utiliza el enfoque funcional para estudiar varios aspectos la dinámica cuántica efectiva de espejos planos en movimiento, acoplados a campos escalares y a campos de Dirac en diferentes números de dimensiones. Ese trabajo constituye una base fundamental para comprender los procedimientos que aplicaremos más adelante a diferentes modelos donde se manifiesta el efecto Casimir dinámico producido por la interacción del campo electromagnético con los grados internos de libertad de uno o dos espejos con ciertas características particulares respecto a su geometría y composición. Resumimos aquí los puntos más importantes del desarrollo mediante el cual se generaliza el enfoque funcional de Golestanian y Kardar [47], para calcular la acción efectiva euclídea de espejos dispersivos en movimiento acoplados a campos escalares reales y cómo se la utiliza posteriormente para obtener la parte imaginaria de la acción efectiva ‘in-out’, y para obtener finalmente la probabilidad de producción de pares a partir del vacío. El punto principal del enfoque de [47], consiste en la introducción de campos auxiliares en la integral funcional para imponer condiciones de contorno a los campos cuánticos. En [46] se incluye además una parte extra en la acción, para incorporar la naturaleza dispersiva del espejo. Después de la integración de los campos cuánticos originales, el problema se reduce al cálculo de una integral funcional sobre los campos auxiliares. Este es un tipo de teoría (no local) reducida dimensionalmente, ya que el campo auxiliar vive en el contorno.

Consideremos un campo escalar real masivo φ acoplado a un espejo imperfecto, cuya posición está descrita por una función $q(t)$, de forma tal que la densidad lagrangiana a tiempo real, \mathcal{L} es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}V(x^0, x^1)\varphi^2, \quad (2.27)$$

donde V es una función tipo δ determinada por la posición del espejo:

$$V(x^0, x^1) = \lambda\delta(x^1 - q(x^0)), \quad (2.28)$$

donde λ es una constante de acoplamiento positiva. El acoplamiento al campo equivale a introducir un espejo perfecto en $x^1 = q(x^0)$ cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, o uno imperfecto cuando $0 < \lambda < \infty$. El uso de potenciales tipo δ para los campos cuánticos sirve como modelo de juguete para describir la interacción del campo electromagnético con una fina lámina de plasma [48], y da lugar a coeficientes de reflexión y transmisión con una dependencia particular en frecuencia. Luego, puede generalizarse este desarrollo a situaciones más realistas incluyendo coeficientes de transmisión y reflexión arbitrarios, realizando extensiones no locales de los potenciales aquí considerados, tal como lo haremos en la segunda parte de esta Tesis.

Realicemos ahora una rotación de Wick: $x^0 = -i\tau$, y calculemos la acción efectiva euclídea resultante $\Gamma[q(\tau)]$ para el espejo, debida a las fluctuaciones de vacío del campo escalar, en la representación de integrales funcionales:

$$e^{-\Gamma[q(\tau)]} \equiv \mathcal{Z}[q(\tau)] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi;q]}, \quad (2.29)$$

donde $S[\varphi;q]$ es la acción euclídea:

$$S[\varphi;q] = S_0[\varphi] + S_C[\varphi;q] \quad (2.30)$$

y donde S_0 denota la parte libre

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2) \quad (2.31)$$

y S_C el acoplamiento al espejo,

$$S_C[\varphi;q] = \frac{\lambda}{2} \int d^2x \delta(x_1 - q(x_0)) [\varphi(x)]^2 = \frac{\lambda}{2} \int d\tau [\varphi(\tau, q(\tau))]^2. \quad (2.32)$$

Las coordenadas euclídeas se denotan como x_μ , donde $x_0 \equiv \tau$; el tensor métrico es la matriz identidad 2×2 . Para continuar, introducimos un campo auxiliar $\xi(\tau)$, que vive en $0 + 1$ dimensiones, cuya función es linealizar el término S_C , que acopla el campo escalar al espejo. La expresión resultante para $\mathcal{Z}[q(\tau)]$ es:

$$\mathcal{Z}[q(\tau)] = \int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2\lambda} \int d\tau \xi^2(\tau)} \mathcal{Z}_0[J_\xi] \quad (2.33)$$

donde \mathcal{Z}_0 es la funcional generatriz de la parte libre:

$$\mathcal{Z}_0[J] = e^{-W_0[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi) + i \int d^2x J(x)\varphi(x)}, \quad (2.34)$$

y J_ξ es una corriente localizada es una corriente localizada en el defecto y proporcional al campo auxiliar: $J_\xi(x_0, x_1) \equiv \xi(x_0) \delta(x_1 - q(x_0))$. Dado que la integral sobre φ es gaussiana, podemos escribir inmediatamente la forma explícita para W_0 ,

$$W_0[J] = \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2x' J(x) \Delta(x - x') J(x'), \quad (2.35)$$

donde Δ es la función de correlación euclídea libre:

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{k^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por lo tanto, derivamos para $\mathcal{Z}[q(\tau)]$ una integral funcional dimensionalmente reducida

que involucra solo al campo auxiliar ξ ,

$$\mathcal{Z}[q(\tau)] = \int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' \xi(\tau) \mathcal{K}(\tau, \tau') \xi(\tau')}, \quad (2.37)$$

donde hemos introducido el núcleo $K(\tau, \tau')$

$$\mathcal{K}(\tau, \tau') = \frac{1}{\lambda} \delta(\tau - \tau') + \Delta[\tau - \tau', q(\tau) - q(\tau')]. \quad (2.38)$$

Dado que la integral en ξ también es gaussiana, nos permite escribir formalmente $\mathcal{Z}[q(\tau)]$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z}[q(\tau)] = (\det \mathcal{K})^{-\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

de forma que

$$\Gamma[q(\tau)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\log \mathcal{K}]. \quad (2.40)$$

Podemos aproximar (2.40) para pequeños apartamientos con respecto al caso de un espejo estático, desarrollando \mathcal{K} y conservando hasta el término cuadrático. Luego expandiendo la expresión para $\Gamma[q(\tau)]$, hasta el segundo orden en la fluctuación y descartando un término independiente de $q(\tau)$, se obtiene que

$$\Gamma[q(\tau)] = \frac{1}{2} \text{Tr} \log [\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_2] \simeq \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathcal{K}_0^{-1} \mathcal{K}_2] \equiv \Gamma_2[q(\tau)], \quad (2.41)$$

donde $\Gamma_2[q(\tau)]$ puede expresarse finalmente como sigue:

$$\Gamma_2[q(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' (q(\tau) - q(\tau'))^2 F(\tau - \tau'), \quad (2.42)$$

donde

$$F(\tau - \tau') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(\tau - \tau')} \tilde{F}(\omega), \quad (2.43)$$

con

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{4} \int \frac{d\nu}{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\nu + \omega)^2 + m^2}} \right]^{-1} \sqrt{\nu^2 + m^2}. \quad (2.44)$$

Como lo hemos mencionado previamente en la introducción de esta Tesis, una de las señales más distintivas de los efectos dispersivos generados por un espejo acelerado es una probabilidad constante de producir pares de partículas a partir del vacío. Se puede obtener la probabilidad total de producir un par teniendo en cuenta toda la historia del espejo desde $t \rightarrow -\infty$ a $t \rightarrow +\infty$, a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva 'in-out' a tiempo real Γ^{io} mediante la ecuación 2.9:

$$P = 2 \text{Im}[\Gamma^{io}], \quad (2.45)$$

recordando que la acción efectiva a tiempo real puede obtenerse a su vez realizando la rotación de Wick inversa de la acción efectiva euclídea $\Gamma[q(\tau)]$.

La aproximación cuadrática de la acción efectiva a tiempo imaginario $\Gamma_2[q(\tau)]$, cuya forma general en el espacio de Fourier es:

$$\Gamma_2[q] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{F}_s(\omega) |\tilde{q}(\omega)|^2, \quad (2.46)$$

lleva a

$$\Gamma_2^{io}[q] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{F}_s(i\omega) |\tilde{q}(\omega)|^2, \quad (2.47)$$

donde mantuvimos la misma notación para la función rotada q . Por lo tanto,

$$P = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \text{Im}[\tilde{F}_s(i\omega)] |\tilde{q}(\omega)|^2. \quad (2.48)$$

Para el ejemplo más simple de un campo escalar real sin masa en $1 + 1$ dimensiones con condiciones de contorno perfectas, se puede demostrar que

$$P = \frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\omega|^3 |\tilde{q}(\omega)|^2. \quad (2.49)$$

En el caso de $m \neq 0$ y $\lambda \rightarrow \infty$, es interesante señalar que aparece un umbral en la parte imaginaria de la acción efectiva, cuya consecuencia física es la necesidad de tener una mezcla de frecuencias positivas y negativas para poder crear partículas, donde la frecuencia negativa debe ser menor que $-m$.

Parte I

ECE para espejos imperfectos en campo EM

Capítulo 3

Fórmula de Lifshitz para espejos delgados

*“Si ellos de forma quisieran cambiar es muy fácil...
solo en otro espejo tendrán que mirar.”*

— Espejos, Sui Géneris.

La fórmula de Lifshitz 2.11 es una forma muy conveniente de expresar la fuerza de Casimir, tanto a temperatura cero como finita, entre diversos medios materiales, en función de sus propiedades electromagnéticas. Esta formulación permite por lo tanto, apartarnos de las condiciones de contorno ideales de conductor perfecto. la misma es aplicable a una geometría particularmente simple: medios homogéneos, isótropos, y tales que las interfaces entre los mismos sean planos paralelos. Los medios se suponen descritos, en la aproximación de respuesta lineal, mediante las correspondientes permitividades y permeabilidades.

Los sucesivos refinamientos logrados en experimentos de precisión que miden la fuerza de Casimir, han proporcionado un estímulo continuo para generalizar el alcance de la fórmula de Lifshitz, de forma tal de abarcar situaciones nuevas y más realistas del efecto Casimir ([4],[17],[5],[49],[6]). Una de esas generalizaciones ha sido considerar modelos, donde el campo de vacío fluctuante se encuentra ante la presencia de potenciales de fondo, localizados en los espejos ([50],[45]). El objeto de introducir estos potenciales es el de implementar versiones suaves de aquellas condiciones de contorno perfectas que se consideran en la versión original del efecto Casimir, permitiendo una descripción más fiel del problema. Una posible forma de justificar la introducción de estos potenciales de fondo es recurriendo al punto de vista microscópico del problema. De hecho, teniendo en cuenta la interacción del campo fluctuante ([45],[44]) con los grados internos de libertad pertenecientes a los espejos, uno puede obtener una acción efectiva aproximada para el campo de vacío, que contiene potenciales que se sustentan sobre

las posiciones de las placas materiales. Si bien a lo largo de este trabajo asumiremos que estos potenciales tienen propiedades invariantes ante traslaciones e independientes del tiempo sobre las dos direcciones “paralelas”, a saber $\mathbf{x}_{\parallel} \equiv (x_1, x_2)$, serán en general, funciones no locales del tiempo (x_0), así como de \mathbf{x}_{\parallel} y x_3 . Esta no localidad permite la propagación de los grados de libertad internos de los espejos dentro del plano de los mismos. Una no localidad tal aparece naturalmente cuando incluimos la propagación de cuasi partículas dentro del medio material. La no localidad en $x_{\parallel} \equiv (x_0, x_1, x_2)$ se puede tratar mediante una transformación de Fourier en x_{\parallel} , dado que esta transformación produce un potencial que es local tanto en la frecuencia como en las componentes paralelas del momento.

El potencial transformado resultante, seguirá conteniendo una dependencia respecto de la coordenada normal x_3 , que representa la dirección a lo largo de la cual el efecto del potencial en el campo fluctuante es más fuerte. El potencial debe ser, entonces, necesariamente no invariante bajo traslaciones en x_3 . Sin embargo, supondremos que su dependencia con x_3 es local ¹.

En [52], se presenta una derivación de la fórmula de Lifshitz para el caso de un campo escalar real, acoplado a dos placas paralelas; es el objeto de este capítulo extender tal derivación al campo electromagnético, acoplado a espejos de espesor despreciable, y descritos mediante sus respectivos tensores de polarización de vacío. Además, dado que supondremos que tales espejos tienen espesor despreciable, podemos describirlos mediante tensores reducidos dimensionalmente al espacio-tiempo (tridimensional) ocupado por cada uno de ellos.

A los efectos de obtener la fuerza de Casimir en el caso que nos ocupa, recapitu-lemos algunas particularidades de la derivación presentada en [52]: Primero, se define al modelo mediante su acción euclídea, una funcional del campo de vacío (un campo escalar), que consta de tres términos: uno, que describe al campo libre, mientras que los dos restantes dan cuenta del acoplamiento cada uno de los espejos. Éstos se modelan mediante términos en la acción que son locales, concentrados espacialmente sobre la región ocupada por los espejos, y cuadráticos en el campo. Es conveniente notar aquí que precisamente estos términos contienen información acerca de los grados de libertad microscópicos, confinados a cada espejo, ya que se deben interpretar como el resultado de haber integrado funcionalmente tales grados de libertad. Dicho de otro modo: los términos concentrados sobre los espejos, pueden interpretarse como las acciones efectivas *parciales*, que resultan de las fluctuaciones de vacío de tales grados de libertad, con el campo escalar aún considerado como externo.

Luego, la derivación procede expresando la energía del vacío mediante la acción efectiva debida a las fluctuaciones cuánticas del campo escalar. Tal acción efectiva resulta

¹Pueden incorporarse no localidades a lo largo de la coordenada normal, tal como se hace por ejemplo, en el enfoque de [51].

expresada mediante determinantes funcionales, los que, finalmente, pueden evaluarse exactamente. Esto último resulta posible dado a que el sistema considerado presenta dependencia espacial solo respecto de una coordenada: la que corresponde a la dirección normal a las superficies de los espejos (supuestos paralelos). Esto permite evaluar los correspondientes determinantes funcionales mediante la fórmula de Gelfand-Yaglom (G-Y) ([53],[54]), de donde se obtiene la acción efectiva, que por tratarse de un sistema estático, resulta ser proporcional a la energía de vacío. De allí se obtiene finalmente la fuerza entre espejos (ver ecuación (31) de [52]).

Cuando la situación a considerar corresponde a temperatura finita, una modificación bastante directa del procedimiento anterior permite obtener la *energía libre* de Casimir, en lugar de la energía de vacío. Tal modificación corresponde, en el formalismo de Matsubara, a reemplazar el tiempo euclídeo por una coordenada periódica con período β .

En lo que sigue, pasaremos a aplicar el mismo enfoque al modelo que nos ocupa: el campo electromagnético como campo fluctuante, permitiendo además temperatura finita. El objeto a evaluar será la energía libre de Casimir por unidad de área, $\Gamma_C(\beta)$ (dado que los espejos se suponen, por simplicidad, infinitos). La idea es expresar tal resultado en términos de los invariantes en función de los cuales puede escribirse el TPV, para cada espejo. Además, aún dentro de las simplificaciones supuestas para el problema que consideramos, podemos incorporar cierta dependencia en la coordenada normal, que en adelante denotamos como x_3 .

3.1. Modelo

El campo EM está acoplado a dos espejos imperfectos, modelados por ‘potenciales’ que se suponen *locales* en x_3 . Entendemos por esto que la acción correspondiente a cada uno de estos términos, involucra una única integral de una función x_3 . Además, suponemos invariancia ante traslaciones en $x_{\parallel} \equiv (x_0, x_1, x_2)$. Notemos, sin embargo, que esos potenciales también tendrán una estructura tensorial, dado que se acoplan al campo de gauge.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos ser más precisos y definir la acción euclídea \mathcal{S} , funcional del campo de gauge abeliano A , como sigue:

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_0(A) + \mathcal{S}_{int}(A), \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{S}_0(A)$ denota la acción del campo de libre, que en el gauge de Feynman tiene la forma:

$$\mathcal{S}_0(A) = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int d^4x (\partial \cdot A)^2 = \frac{1}{2} \int d^4x A_{\mu}(x) (-\partial^2) A_{\mu}(x), \quad (3.2)$$

y donde $\mathcal{S}_{int}(A) = \mathcal{S}_L + \mathcal{S}_R$ es el término que da cuenta del acoplamiento entre A y cada uno de los espejos, indicados con L y R para distinguirlos y considerar que cada uno de ellos puede tener diferentes propiedades.

Para formular cada uno de estos términos de interacción, recordemos que las propiedades de los espejos son homogéneas, isotrópicas e independientes del tiempo; además, son locales en la dirección x_3 (normal a ambos espejos). Adicionalmente, los términos de interacción entre A y los espejos, preservan la invariancia de gauge, lo cual queda garantizado si se conserva la corriente debida a los grados de libertad microscópicos cargados, que inducen los términos de acoplamiento. Por razones análogas a las invocadas para el campo escalar, las magnitudes relevantes para el campo dentro de los espejos son pequeñas. Por lo tanto, consideraremos que los términos de acoplamiento son cuadráticos en A_μ , lo que corresponde a medios lineales. Para estudiar efectos de medios no lineales ver por ejemplo [55].

Basados en todas las suposiciones anteriores, notamos que cada término S_I con $I = L, R$ puede expresarse más explícitamente (usando una notación abreviada para las integraciones) de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}_I(A) = \frac{1}{2} \int_{x_\parallel, x'_\parallel, x_3} A_\mu(x_\parallel, x_3) \Pi_{\mu\nu}^{(I)}(x_\parallel, x'_\parallel; x_3 - a_I) A_\nu(x'_\parallel, x_3), \quad (3.3)$$

donde hemos considerado que el espejo I está en $x_3 = a_I$, y donde $\Pi_{\mu\nu}^{(I)} = \langle J_\mu J_\nu \rangle$ es el tensor de polarización del vacío. Este tensor de polarización del vacío puede obtenerse teniendo en cuenta que la contribución al orden más bajo no nulo de la interacción entre el campo externo y el medio material es el correlador entre corrientes, para los campos de materia en el espejo I .

La ecuación (3.3) nos sugiere considerar dos situaciones con respecto a la extensión del espejo a lo largo de la coordenada normal (siendo la segunda un caso particular de la primera): primeramente, un espejo cuyo ancho sea pequeño pero finito, en el sentido de que los portadores de carga presentes en el medio material estén fuertemente concentrados en una región finita. Como no hay corriente a lo largo de la dirección x_3 , el tensor de polarización del vacío será cero cuando uno o dos de sus índices sean iguales 3. En segundo lugar, trataremos el límite de ancho cero del caso anterior. Este enfoque nos permitirá partir de espejos de ancho finito (para los cuales las autoenergías por unidad de área son finitas) y podría entonces utilizarse para tener en cuenta correcciones de orden superior en el ancho de los espejos, que pueden cobrar importancia por ejemplo cuando los mismos están muy próximos. Por otro lado, uno podría considerar modelos donde la dependencia en x_3 se debe a que el medio material de cada espejo es de tipo multicapa (donde por ejemplo cada capa consista de una lámina de grafeno caracterizada por una constante α diferente). Nuestro objetivo final en este capítulo

consiste en aplicar las expresiones generales para espejos delgados a las que arribemos, al tratamiento de casos que involucren láminas de grafeno, que como veremos más adelante pueden considerarse como espejos de ancho cero.

Para comenzar, tengamos presente que para espejos de ancho pequeño las corrientes son esencialmente planas, y por lo tanto podemos despreciar la acción de $\Pi_{\mu\nu}^{(I)}$ sobre la tercera componente del campo de gauge. Por lo tanto tendremos que

$$\mathcal{S}_I(A) = \frac{1}{2} \int_{x_{\parallel}, x'_{\parallel}, x_3} A_{\alpha}(x_{\parallel}, x_3) \Pi_{\alpha\beta}^{(I)}(x_{\parallel} - x'_{\parallel}; x_3 - a_I) A_{\beta}(x'_{\parallel}, x_3) \quad (3.4)$$

donde $\Pi_{\alpha\beta}^{(I)}$ es el TPV para el medio confinado al espejo I . Empleamos la convención de que α y β adoptan valores entre 0 y 2. Esto implica que los espejos solo pueden incluir a las componentes paralelas del campo eléctrico, E_{\parallel} y a la componente normal del campo magnético, B_3 . Consideraremos que $\Pi_{\alpha\beta}^{(I)}(y_0, \mathbf{y}_{\parallel}; x_3)$, ($y \equiv x - x'$), está, como función de x_3 , concentrado en una región centrada alrededor de $x_3 = 0$.

Proseguimos realizando ahora una transformada de Fourier parcial en (3.4), i.e., para el tiempo y las coordenadas paralelas, de lo que resulta:

$$\mathcal{S}_I(A) = \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}(k_{\parallel}, x_3 - a_I) \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, x_3) . \quad (3.5)$$

Aquí, y en lo que sigue, usaremos la notación $k_{\parallel} \equiv (k_0, k_1, k_2) = (k_0, \mathbf{k}_{\parallel})$. Consideraremos implícitamente que la componente k_0 está sumada sobre valores discretos, $k_0 = \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ (las frecuencias de Matsubara) a temperatura finita, e integrada (sobre valores continuos) a temperatura cero.

Veamos a continuación la descomposición del problema de evaluar Γ_C en términos de sistemas unidimensionales independientes.

3.2. Reducción a sistemas unidimensionales

Hasta aquí hemos logrado caracterizar a cada espejo mediante su tensor polarización de vacío $\tilde{\Pi}^{(I)}$. Ahora, veremos que se puede descomponer además cada uno de ellos en términos de funciones escalares; esto último puede lograrse mediante el desarrollo del tensor en términos de un conjunto completo de proyectores ortogonales. Esta descomposición no es una pérdida de generalidad, sino una consecuencia de las suposiciones que hemos realizado hasta el momento.

En primer lugar, notemos que la conservación de carga de los portadores en el medio implica que para cada x_3 , el tensor $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}$ es transversal, es decir:

$$k_{\alpha} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)} = 0 . \quad (3.6)$$

Con respecto a esta condición, podemos encontrar dos soluciones independientes para la condición de transversalidad, de forma que se puede descomponer $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}$ en dos tensores transversales irreducibles (proyectores). La suposición de que el medio es isótropo y homogéneo a lo largo de las direcciones paralelas, significa que podemos construir dos tensores transversales independientes usando como bloques de construcción los siguientes elementos: $\check{k}_\alpha \equiv k_\alpha - k_0 n_\alpha$, y $\check{\delta}_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$, donde $n = (1, 0, 0)$. Notemos que la presencia de n está permitida, dado que no necesariamente se tiene invariancia de Lorentz en el plano $x_3 = 0$, ya que la descripción de los medios no es relativista. Se pueden escribir dos proyectores independientes \mathcal{P}^t y \mathcal{P}^l , que son soluciones de (3.6):

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t \equiv \check{\delta}_{\alpha\beta} - \frac{\check{k}_\alpha \check{k}_\beta}{\check{k}^2} \quad (3.7)$$

y

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \equiv \mathcal{P}_{\alpha\beta}^\perp - \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t, \quad (3.8)$$

donde

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^\perp \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k_\parallel^2} \quad (3.9)$$

es el proyector transversal correspondiente a una teoría covariante de Poincaré en 2 + 1 dimensiones. Introduciremos también, por completitud, un proyector paralelo \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} \equiv \frac{k_\alpha k_\beta}{k_\parallel^2}. \quad (3.10)$$

Se puede demostrar que estos proyectores satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\perp + \mathcal{Q} &= I, \quad \mathcal{P}^t + \mathcal{P}^l = \mathcal{P}^\perp \\ \mathcal{P}^t \mathcal{P}^l &= \mathcal{P}^l \mathcal{P}^t = 0, \quad \mathcal{Q} \mathcal{P}^t = \mathcal{P}^t \mathcal{Q} = 0, \quad \mathcal{Q} \mathcal{P}^l = \mathcal{P}^l \mathcal{Q} = 0 \\ (\mathcal{P}^\perp)^2 &= \mathcal{P}^\perp, \quad (\mathcal{Q})^2 = \mathcal{Q}, \quad (\mathcal{P}^t)^2 = \mathcal{P}^t, \quad (\mathcal{P}^l)^2 = \mathcal{P}^l, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Dado que no hay más que dos soluciones independientes, podemos expresar $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}$ como sigue:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}(k_\parallel, x_3) = f_t^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}_\parallel^2, x_3) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + f_l^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}_\parallel^2, x_3) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l. \quad (3.12)$$

De este modo, la caracterización del espejo I se realiza mediante dos funciones, $f_{t,l}^{(I)}$. Para proceder finalmente a reducir el problema, realizaremos nuevamente la misma transformación de Fourier practicada anteriormente para la acción libre \mathcal{S}_0 , ahora en

los términos de interacción, obteniendo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \left[\tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{A}_{\alpha}(k_{\parallel}, x_3) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}_3^*(k_{\parallel}, x_3) (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{A}_3(k_{\parallel}, x_3) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Luego, la acción completa \mathcal{S} puede separarse en dos términos, uno dependiente de $\tilde{A}_{\parallel} \equiv (\tilde{A}_{\alpha})$ y otro de \tilde{A}_3 :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\parallel}(\tilde{A}_{\parallel}) + \mathcal{S}_3(\tilde{A}_3), \quad (3.14)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\parallel} &= \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \left[(-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \delta_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_I \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{(I)}(k_{\parallel}, x_3 - a_I) \right] \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, x_3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

$$\mathcal{S}_3 = \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \tilde{A}_3^*(k_{\parallel}, x_3) (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{A}_3(k_{\parallel}, x_3). \quad (3.16)$$

Notemos que, a causa de (3.14), y del hecho de que \mathcal{S}_3 no involucra acoplamiento alguno con los espejos, podemos escribir la razón entre $\mathcal{Z}(\beta)$ y $\mathcal{Z}_0(\beta)$ como sigue:

$$\frac{\mathcal{Z}(\beta)}{\mathcal{Z}_0(\beta)} = \frac{\mathcal{Z}_{\parallel}(\beta)}{\mathcal{Z}_{\parallel 0}(\beta)} \quad (3.17)$$

con:

$$\mathcal{Z}_{\parallel}(\beta) = \int \mathcal{D}\tilde{A}_{\parallel} e^{-\mathcal{S}_{\parallel}(\tilde{A}_{\parallel})}. \quad (3.18)$$

Aplicando ahora las propiedades que satisfacen los proyectores, vemos que:

$$\delta_{\alpha\beta} = \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l + \mathcal{Q}_{\alpha\beta}, \quad (3.19)$$

lo que nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\parallel} &= \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \left\{ \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \tilde{V}_t(x_3, k_{\parallel}) \right] \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t \right. \\ &\quad \left. + \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \tilde{V}_l(x_3, k_{\parallel}) \right] \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right\} \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, x_3), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\tilde{V}_{t,l}(x_3, k_{\parallel}) = \sum_I f_{t,l}^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}_{\parallel}^2, x_3 - a_I). \quad (3.21)$$

De este modo concluye la reducción del problema: notemos que la acción se ha redu-

cido a la forma cuadrática de un operador que ha sido descompuesto en proyectores ortogonales.

3.3. Fórmula de Lifshitz

En la integral de camino de \mathcal{Z}_{\parallel} , descomponemos ahora el campo de gauge de la siguiente manera:

$$\tilde{A}_{\parallel} = \tilde{A}^{(t)} + \tilde{A}^{(l)} \quad (3.22)$$

donde $\tilde{A}^{(t,l)} \equiv \mathcal{P}^{(t,l)} \tilde{A}_{\parallel}$, factorizando así la medida de la integral de camino, con un jacobiano que es trivial. En consecuencia,

$$\mathcal{Z}_{\parallel}(\beta) = \mathcal{Z}^{(t)}(\beta) \mathcal{Z}^{(l)}(\beta) \quad (3.23)$$

donde cada factor se obtiene de realizar una integral funcional sobre un grado de libertad escalar, a saber,

$$\mathcal{Z}^{(t,l)}(\beta) = \int \mathcal{D}\tilde{A}^{(t,l)} \exp \left\{ -\mathcal{S}^{(t,l)}(\tilde{A}^{(t,l)}) \right\} \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(t,l)}(\tilde{A}^{(t,l)}) &= \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}, x_3} \tilde{A}_{\alpha}^{*(t,l)}(k_{\parallel}, x_3) \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 \right. \\ &\quad \left. + \tilde{V}_{t,l}(x_3, k_{\parallel}) \right] \tilde{A}_{\alpha}^{(t,l)}(k_{\parallel}, x_3) . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vemos por lo tanto que la energía libre queda expresada como:

$$\Gamma_C(\beta) = \Gamma_t(\beta) + \Gamma_l(\beta) \quad (3.26)$$

donde

$$\Gamma_{t,l}(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L^2} \log \frac{\mathcal{Z}^{(t,l)}(\beta)}{\mathcal{Z}_0^{(t,l)}(\beta)} \right] \quad (3.27)$$

o

$$\Gamma_{t,l}(\beta) = \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}} \log \left[\frac{\det \tilde{T}_{t,l}(k_{\parallel})}{\det \tilde{T}_0(k_{\parallel})} \right] \quad (3.28)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{t,l}(k_{\parallel}) &= -\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \tilde{V}_{t,l}(x_3, k_{\parallel}) \\ \tilde{T}_0(k_{\parallel}) &= -\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 , \end{aligned} \quad (3.29)$$

y donde hemos abreviado la notación de la integral de forma que $f \equiv \int_{k_{\parallel}} \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3}$.

Hasta aquí, hemos reducido el sistema original a dos problemas de Casimir independientes, cada uno de los cuales corresponde a un campo escalar real en presencia de su potencial $\tilde{V}_{t,l}$. Estos potenciales se han construido en términos de las funciones que aparecen al descomponer el TPV en un conjunto de tensores irreducibles. Ahora podemos aplicar la fórmula general derivada en [52], lo que nos permite escribir cada una de las contribuciones anteriores como:

$$\Gamma_{t,l}(\beta) = \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}} \log \left[1 + \frac{T_{12}^{(R)} T_{21}^{(L)}}{T_{11}^{(R)} T_{11}^{(L)}} e^{-2|k_{\parallel}|l} \right]_{t,l}, \quad (3.30)$$

donde $T_{t,l}$ es el resultado de aplicar el siguiente cambio de base a la matriz $A_{t,l}$:

$$T_{t,l} = B^{-1} A_{t,l} B \quad (3.31)$$

con

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

y con $A_{t,l}$ definidos como en [52], y donde cada uno, t o l , se debe a un campo independiente, en su propio potencial de fondo.

3.4. Espejos de ancho cero

Aplicaremos lo desarrollado anteriormente para espejos delgados al caso particular de espejos de ancho cero, a los cuales caracterizamos como sistemas donde la interacción entre el campo y los espejos está confinada a planos. Por lo tanto, en este caso,

$$f_{t,l}^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}^2, x_3 - a_I) = \delta(x_3 - a_I) g_{t,l}^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}^2), \quad (3.33)$$

y

$$\tilde{V}_{t,l}(x_3, k_{\parallel}) = \sum_I \delta(x_3 - a_I) g_{t,l}^{(I)}(k_0^2, \mathbf{k}_{\parallel}^2). \quad (3.34)$$

Recordando el resultado conocido de [52] para el caso de un campo escalar real en la presencia de espejos de ancho cero, vemos que:

$$\Gamma_{t,l}(\beta) = \frac{1}{2} \int_{k_{\parallel}} \log \left[1 - r_{t,l}^{(R)} r_{t,l}^{(L)} e^{-2|k_{\parallel}|l} \right], \quad (3.35)$$

Donde:

$$r_{t,l}^{(R)} \equiv \frac{g_{t,l}^{(R)}}{2|k_{\parallel}| + g_{t,l}^{(R)}} , \quad r_{t,l}^{(L)} \equiv \frac{g_{t,l}^{(L)}}{2|k_{\parallel}| + g_{t,l}^{(L)}} . \quad (3.36)$$

Entonces, la fuerza de Casimir por unidad de área es:

$$\mathcal{F}_C(\beta) = \mathcal{F}_C^{(t)}(\beta) + \mathcal{F}_C^{(l)}(\beta) \quad (3.37)$$

con

$$\mathcal{F}_C^{(t,l)}(\beta) = \int_{k_{\parallel}} \frac{|k_{\parallel}| r_{t,l}^{(R)} r_{t,l}^{(L)}}{e^{2|k_{\parallel}|l} - r_{t,l}^{(R)} r_{t,l}^{(L)}} . \quad (3.38)$$

Este resultado puede aplicarse al ejemplo particular de una lámina de grafeno, que puede ser descrita razonablemente por un espejo de ancho cero ([56],[57],[58]). Para este ejemplo, las funciones g correspondientes pueden extraerse mirando su tensor polarización de vacío, obteniendo como resultado:

$$\begin{aligned} g_t(k_0^2, \mathbf{k}_{\parallel}^2) &= \alpha \sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2}, \\ g_l(k_0^2, \mathbf{k}_{\parallel}^2) &= \alpha \frac{k_0^2 + \mathbf{k}^2}{\sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2}}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

con $\alpha = \frac{e^2 N}{16}$, donde N es el número de sabores de los fermiones, e es la constante de acoplamiento, y v_F la velocidad de Fermi.

Utilizando estas expresiones en la fórmula general para espejos delgados, podemos obtener la fuerza de Casimir tanto para casos que involucren dos láminas de grafeno, como para el caso límite de una lámina de grafeno y un espejo conductor. Esto último puede obtenerse a partir del caso del grafeno, considerando la velocidad de Fermi igual a 1 y tomando $\alpha \rightarrow \infty$ en uno de los espejos.

En la figura 3.1 graficamos la fuerza de Casimir por unidad de área sobre cada placa, a temperatura cero, como función de α , multiplicada por l^4 , para el caso de un espejo conductor perfecto frente a una lámina de grafeno, para diferentes valores de la velocidad de Fermi v_F , y luego en la figura 3.2 para el caso de dos láminas de grafeno idénticas. En ambas gráficas la línea sólida corresponde a considerar $v_F = 1$, lo cual representa el caso de ‘materia relativista’, con $f_t^{(I)} = f_l^{(I)}$, considerado en [44].

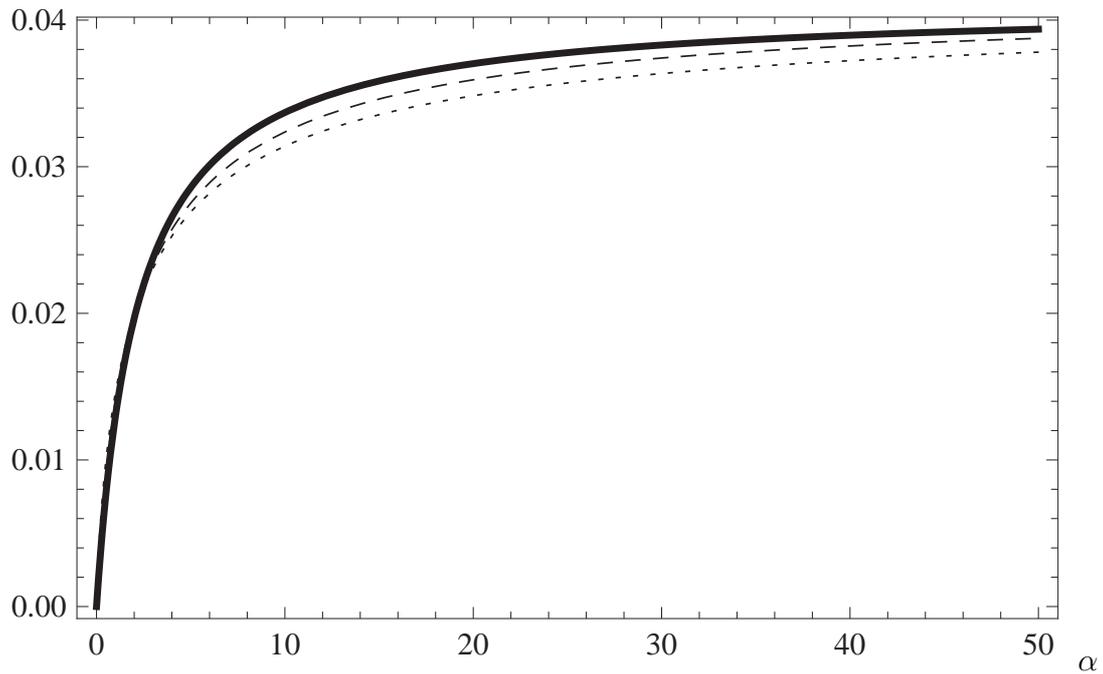
Fl^4 

Figura 3.1: Fuerza de Casimir multiplicada por l^4 como función de α , para un conductor perfecto y una lámina de grafeno con diferentes valores de v_F . La línea sólida corresponde a $v_F = 1$, la línea discontinua a $v_F = 0,2$ y la línea punteada a $v_F = 0$.

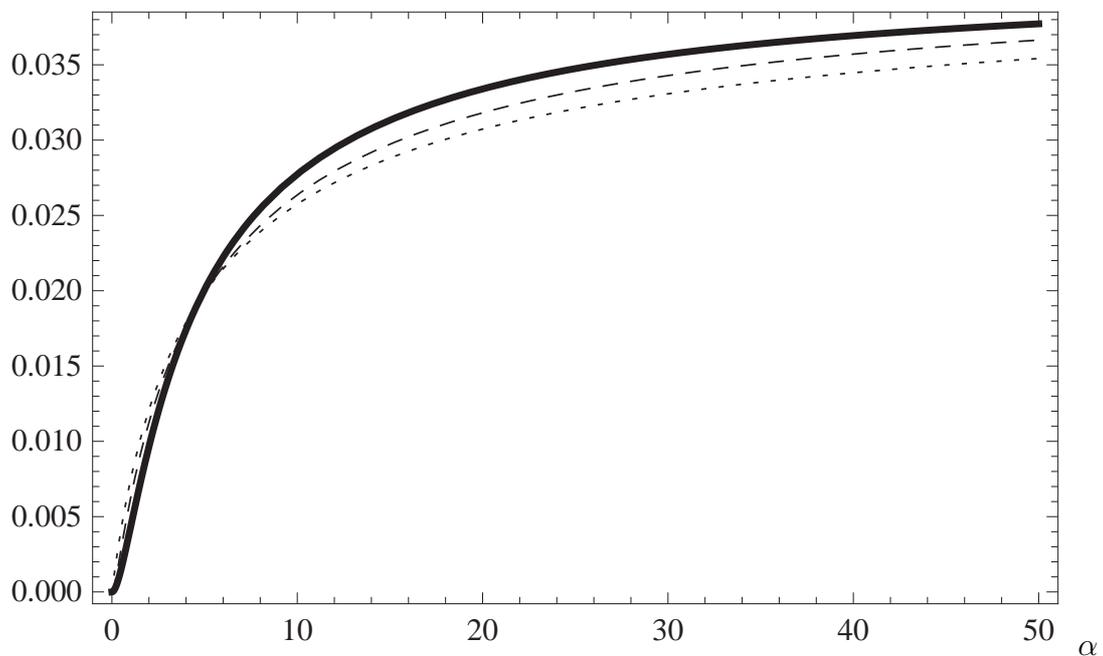
 Fl^4 

Figura 3.2: Fuerza de Casimir multiplicada por l^4 como función de α , para dos espejos de grafeno idénticos caracterizados por su v_F . La línea sólida corresponde a $v_F = 1$, la línea discontinua a $v_F = 0,2$ y la línea punteada a $v_F = 0$.

Capítulo 4

Espejos delgados con ruptura de paridad

“Si algo callé es porque entendí todo menos la distancia. Desordené átomos tuyos para hacerte aparecer.”

— Puente, Gustavo Cerati.

En el ECE, tanto la geometría de los espejos como sus propiedades intrínsecas son relevantes para determinar la fuerza. En este capítulo, abordamos un aspecto correspondiente al segundo ingrediente, ya que consideramos espejos cuyas propiedades electromagnéticas rompen la simetría de paridad. Por esto último, nos referimos a espejos (paralelos y de ancho despreciable) tales que la parte de la acción que los acopla al campo electromagnético, puede contener tanto términos que conserven paridad como otros que rompen tal simetría.

En este caso, cuando nos referimos a ‘paridad’ lo hacemos en el sentido de $2 + 1$ dimensiones: el espacio-tiempo que ocupa cada uno de los espejos. Cuando el número de dimensiones espaciales es par, tal operación de simetría corresponde a la reflexión a lo largo de un número impar de coordenadas espaciotemporales. La inversión usual, donde todas las coordenadas espaciales son reflejadas es, en el caso de un número par de dimensiones, una rotación, ya que el determinante de la matriz que la implementa es igual a 1. Por supuesto, tales términos deben considerarse como el resultado de haber incorporado las fluctuaciones de los grados de libertad microscópicos de cada uno de los espejos. Un ejemplo concreto de un sistema donde surge ese tipo de término, es la acción efectiva en $2 + 1$ dimensiones que representa los efectos cuánticos causados por un campo de Dirac confinado a un espejo, y acoplado de forma mínima a la proyección del campo de gauge sobre el mismo.

El efecto Casimir debido a condiciones de contorno de Chern-Simons (C-S) ha sido estudiado en [59], donde se muestra que la fuerza de Casimir puede tornarse repulsiva

para algunas elecciones particulares de los parámetros involucrados en el problema. Nuestro objetivo aquí es estudiar el problema de incluir términos que rompen paridad en la *acción del contorno*, en contraposición al uso de condiciones de contorno. Si bien están relacionados, ambos enfoques son esencialmente distintos, hecho que ha sido destacado anteriormente en [59].

Existen varios desarrollos interesantes relativos a este tipo de sistema. En primer lugar en [60] se considera el efecto Casimir para una región esférica, con condiciones de contorno de C-S en presencia de un término θ . Luego en [61], una línea de investigación relacionada trata la fuerza de Casimir para dos dieléctricos de C-S, incluyendo la dependencia completa en frecuencia del tensor conductividad. También encontramos resultados interesantes en [62, 63], en el contexto de ‘lattice field theory’ [62, 63], usando un enfoque de cálculo numérico que resulta natural en ese caso. Finalmente, vale la pena mencionar que las consecuencias de tener términos que rompen paridad, se manifiestan incluso para el caso de un solo espejo, y de hecho, este es el caso del interesante ‘efecto Faraday cuántico’ analizado en [64] para el término de borde debido a fermiones de Dirac masivos en $2 + 1$ dimensiones. A pesar del hecho mencionado en [59], de que no hay una equivalencia exacta entre condiciones de contorno y acción de borde, mostraremos cómo los resultados presentados en [59] pueden obtenerse haciendo una elección apropiada de la acción de contorno. Como veremos, la misma debe contener tanto términos que rompen paridad como términos que la conservan. Resulta interesante mencionar que esa es la estructura exacta de los términos principales en un desarrollo para masa pequeña de la acción efectiva debida a un campo de Dirac masivo en $2 + 1$ dimensiones [65].

4.1. Modelo

La estructura de la acción euclídea del sistema, tal como en el capítulo anterior, es la siguiente: $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_0(A) + \mathcal{S}_I(A)$, donde $\mathcal{S}_0(A)$ denota la acción del campo EM libre:

$$\mathcal{S}_0(A) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

y \mathcal{S}_I representa el acoplamiento entre el campo y los espejos.

Los dos espejos ocupan planos infinitos, a los que denotamos L y R , y que están localizados en $x_3 = 0$ y $x_3 = a$, respectivamente. En este caso, dado que la región espacial ocupada por cada espejo es un plano, uno puede interpretar a \mathcal{S}_I definiendo dos teorías de campos en $2 + 1$ dimensiones, que involucran las componentes del campo de gauge proyectadas sobre el espacio-tiempo reducido correspondiente a cada uno. Recordemos que, en el caso de *espejos conductores perfectos*, el rol de estas teorías $2 + 1$ dimensionales es equivalente a imponer que se anulen las componentes del campo eléctrico

que sean paralelas a los espejos, y también la componente normal a ellos del campo magnético. Esto puede alcanzarse, por ejemplo, introduciendo campos auxiliares apropiados que implementen esas condiciones, o tomando el límite apropiado para ciertas acciones correspondientes a espejos imperfectos [66]. Estudiaremos un caso bastante general, que se obtiene considerando que las acciones localizadas correspondientes son cuadráticas e invariantes de gauge, pero permitiendo la existencia tanto de términos que conserven paridad como de términos que no. Más explícitamente, la forma de \mathcal{S}_I es:

$$\mathcal{S}_I = \mathcal{S}^{(L)} + \mathcal{S}^{(R)}, \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{S}^{(L,R)}$ denota la acción concentrada en el espejo correspondiente. Cada una de esas acciones puede contener términos de paridad par (que denotaremos con e) o de paridad impar (que denotaremos con o). Es conveniente introducir una notación especial para las coordenadas paralelas (incluyendo a la coordenada temporal x_0): $x_{\parallel} = (x_{\alpha})$, donde asumiremos que los índices del principio del alfabeto griego corren sobre los valores 0, 1, 2. De esta forma, podemos escribir formalmente $\mathcal{S}^{(L)}$, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(L)} &= \mathcal{S}_e^{(L)} + \mathcal{S}_o^{(L)} \\ \mathcal{S}_e^{(L)} &= \int d^4x \delta(x_3) \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} f_e^{(L)} (-\partial_{\parallel}^2) F_{\alpha\beta} \\ \mathcal{S}_o^{(L)} &= \int d^4x \delta(x_3) \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha} f_o^{(L)} (-\partial_{\parallel}^2) \partial_{\beta} A_{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ denota el símbolo de Levi-Civita en $2 + 1$ dimensiones, y $f_{e,o}^{(L)}$ se escriben como funciones de $-\partial_{\parallel}^2$ para indicar que en general serán núcleos no locales en el espacio de coordenadas. Para el espejo R , la estructura es muy similar; los cambios relevantes son que la función δ debe ser trasladada: $\delta(x_3) \rightarrow \delta(x_3 - a)$ y, que además, dado que los espejos no serán considerados necesariamente idénticos en sus propiedades, los núcleos podrán ser diferentes entre sí. Por lo tanto, en $\mathcal{S}^{(R)}$ uno también puede hacer el reemplazo: $f_{e,o}^{(L)} \rightarrow f_{e,o}^{(R)}$. Notemos que los núcleos tendrán dimensiones de masa: $[f_e^{(L,R)}] = -1$ y $[f_o^{(L,R)}] = 0$. Considerando que las propiedades de los espejos son invariantes ante traslaciones e independientes del tiempo (es decir, invariantes ante traslaciones en las coordenadas paralelas x_{\parallel}), serán locales en el espacio de momentos. Notemos que los casos de espejos perfectos, o espejos descritos enteramente por un término de C-S pueden ser obtenidos tomando los límites particulares apropiados de los núcleos. Introduciendo las transformadas de Fourier con respecto a las coordenadas paralelas:

$$\tilde{A}_{\alpha}(k_{\parallel}, x_3) = \int d^3x_{\parallel} e^{-ik_{\parallel} \cdot x_{\parallel}} A_{\alpha}(x_{\parallel}, x_3), \quad (4.4)$$

notamos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_e^{(L)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, 0) \alpha_P^{(L)}(k_{\parallel}) P_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, 0) \\ \mathcal{S}_o^{(L)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, 0) \alpha_Q^{(L)}(k_{\parallel}) Q_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, 0)\end{aligned}\quad (4.5)$$

donde

$$\alpha_P^{(L)}(k_{\parallel}) \equiv k_{\parallel}^2 f_e^{(L)}(k_{\parallel}^2), \quad \alpha_Q^{(L)}(k_{\parallel}) \equiv -|k_{\parallel}| f_o^{(L)}(k_{\parallel}^2), \quad (4.6)$$

y donde hemos definido de los siguientes tensores:

$$P_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k_{\parallel}^2}, \quad Q_{\alpha\beta}(k_{\parallel}) = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \frac{k_{\gamma}}{|k_{\parallel}|}, \quad (4.7)$$

que satisfacen algunas relaciones algebraicas que hemos expresado aquí utilizando notación matricial:

$$P^2 = P, \quad Q^2 = -P, \quad PQ = QP = Q. \quad (4.8)$$

Para simplificar nuestros posteriores desarrollos, y en forma análoga al procedimiento realizado en el capítulo anterior, resulta conveniente contar con un conjunto completo de proyectores ortogonales para el espacio de matrices hermíticas de 3×3 , que surge naturalmente en la representación de Fourier. La propiedad de ortogonalidad nos permite tratar con cada subespacio invariante separadamente, descomponiendo naturalmente el problema original en un conjunto de problemas unidimensionales desacoplados. Esos proyectores pueden escribirse por inspección, teniendo en cuenta las relaciones anteriores. De hecho, definiendo $P^{\pm} \equiv \frac{P \pm iQ}{2}$ y $P' \equiv I - P$ (donde I denota la matriz identidad), vemos que:

$$\begin{aligned}P^+ + P^- + P' &= I, \quad (P^{\pm})^2 = P^{\pm}, \quad P'^2 = P', \\ P^+ P^- &= P^- P^+ = P^{\pm} P' = P' P^{\pm} = 0.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Finalmente, usando la representación de Fourier anterior, obtenemos la siguiente expresión para la acción completa \mathcal{S} (en el gauge de Feynman):

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \int dx_3 \left\{ \tilde{A}_3^*(k_{\parallel}, x_3) (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{A}_3(k_{\parallel}, x_3) \right. \\ &+ \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) \tilde{A}_{\alpha}(k_{\parallel}, x_3) \\ &+ \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \delta(x_3) \left[\alpha_-^{(L)}(k_{\parallel}) P_{\alpha\beta}^+(k_{\parallel}) + \alpha_+^{(L)}(k_{\parallel}) P_{\alpha\beta}^-(k_{\parallel}) \right] \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, x_3) \\ &+ \left. \tilde{A}_{\alpha}^*(k_{\parallel}, x_3) \delta(x_3 - a) \left[\alpha_-^{(R)}(k_{\parallel}) P_{\alpha\beta}^+(k_{\parallel}) + \alpha_+^{(R)}(k_{\parallel}) P_{\alpha\beta}^-(k_{\parallel}) \right] \tilde{A}_{\beta}(k_{\parallel}, x_3) \right\}, \quad (4.10)\end{aligned}$$

con

$$\alpha_{\pm}^{(L,R)} = \alpha_P^{(L,R)} \pm i\alpha_Q^{(L,R)}. \quad (4.11)$$

4.2. Energía de interacción

Escribiremos ahora la energía del vacío E del campo EM en presencia de los espejos. La invariancia traslacional existente a lo largo de las coordenadas paralelas, sugiere el uso de la transformación de Fourier implementada en (4.10) para evaluar la integral funcional. Además, el campo de gauge transformado de esa forma puede descomponerse, para cada conjunto de valores de x_3 y k_{\parallel} en términos de cuatro vectores unitarios ortonormales, a los cuales denotaremos como: $\hat{e}^{(+)}$, $\hat{e}^{(-)}$, $\hat{e}^{(k)}$, y $\hat{e}^{(3)}$. El vector $\hat{e}^{(3)}$ es paralelo al eje x_3 , es decir, su componente μ es $\hat{e}_{\mu}^{(3)} = \delta_{\mu}^3$. Los restantes tres vectores se encuentran en el subespacio ortogonal al espacio generado por $\hat{e}^{(3)}$; uno de ellos, $\hat{e}^{(k)}$, apunta a lo largo de k_{\parallel} , mientras que $\hat{e}^{(\pm)} \equiv \frac{\hat{e}^{(1)} \pm i\hat{e}^{(2)}}{\sqrt{2}}$, con $\hat{e}^{(1)}$ y $\hat{e}^{(2)}$, ortogonales a k_{\parallel} , son tales que $\hat{e}^{(1)}$, $\hat{e}^{(2)}$ y $\hat{e}^{(k)}$ forman un triplete ortogonal que sigue la regla de la mano derecha. Entonces, podemos descomponer $\tilde{A}_{\mu}(k_{\parallel}, x_3)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\mu}(k_{\parallel}, x_3) &= C_+(k_{\parallel}, x_3)\hat{e}_{\mu}^{(+)} + C_-(k_{\parallel}, x_3)\hat{e}_{\mu}^{(-)} \\ &\quad + C_k(k_{\parallel}, x_3)\hat{e}_{\mu}^{(k)} + C_3(x_{\parallel}, x_3)\hat{e}_{\mu}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La acción transformada de Fourier queda expresada entonces como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \int dx_3 \left\{ C_+^* \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \delta(x_3) \alpha_-^{(L)}(k_{\parallel}) + \delta(x_3 - a) \alpha_-^{(R)}(k_{\parallel}) \right] C_+ \right. \\ &\quad + C_-^* \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \delta(x_3) \alpha_+^{(L)}(k_{\parallel}) + \delta(x_3 - a) \alpha_+^{(R)}(k_{\parallel}) \right] C_- \\ &\quad \left. + C_k^* (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) C_k + C_3^* (-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2) C_3 \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde por claridad hemos omitido los argumentos de los coeficientes C . Por lo tanto la acción se vuelve una suma, para cada k_{\parallel} , de cuatro acciones independientes, cada una de las cuales corresponde a un único grado de libertad representado por el correspondiente coeficiente C . La medida de la integral funcional se factoriza con respecto a k_{\parallel} (cada valor puede tratarse separadamente) y además, para cada k_{\parallel} , se factoriza a su vez en el producto de medidas para cada coeficiente.

Dado que C_k y C_3 no ‘ven’ a los espejos, pueden descartarse al evaluar el efecto de los espejos en la energía del vacío. Tomando en cuenta también que el logaritmo natural de \mathcal{Z} depende de T y del área L^2 de los espejos, calculamos la energía por unidad de área, \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = - \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \log[\mathcal{Z}_{k_{\parallel}}], \quad (4.14)$$

con

$$\mathcal{Z}_{k_{\parallel}} = \mathcal{Z}_{k_{\parallel}}^{(+)} \mathcal{Z}_{k_{\parallel}}^{(-)}, \quad (4.15)$$

donde cada uno de los factores anteriores corresponde a la integral funcional sobre el respectivo coeficiente, y por lo tanto puede expresarse formalmente como el determinante funcional siguiente:

$$\mathcal{Z}_{k_{\parallel}}^{(\pm)} = \left(\det \left[-\partial_3^2 + k_{\parallel}^2 + \delta(x_3) \alpha_{\mp}^{(L)}(k_{\parallel}) + \delta(x_3 - a) \alpha_{\mp}^{(R)}(k_{\parallel}) \right] \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Finalmente, valiéndonos de los resultados conocidos sobre los determinantes funcionales, tales como los que surgen en la ecuación anterior [52], vemos que la energía por unidad de área se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \log \left[\left(1 - r_{-}^{(L)} r_{-}^{(R)} e^{-2|k_{\parallel}|a} \right) \left(1 - r_{+}^{(L)} r_{+}^{(R)} e^{-2|k_{\parallel}|a} \right) \right], \quad (4.17)$$

donde hemos introducido

$$r_{\pm}^{(L,R)} = \frac{\alpha_{\pm}^{(L,R)}}{\alpha_{\pm}^{(L,R)} + 2|k_{\parallel}|}, \quad (4.18)$$

que juega el rol de los coeficientes de reflexión euclídeos. Es interesante notar que la energía del sistema puede pensarse como desacoplada entre dos contribuciones, cada una correspondiente a un modo de polarización circular, ya sea izquierdo o derecho. Basándonos en estos modos de polarización, resulta útil realizar la siguiente parametrización de los coeficientes de reflexión (inspirada en [59]):

$$r_{+}^{(L)} = -|r^{(L)}| e^{2i\delta_L}, \quad r_{+}^{(R)} = -|r^{(R)}| e^{-2i\delta_R} \quad (4.19)$$

(el signo menos da cuenta de una convención de fase para $\delta_{L,R}$). Esto nos permite escribir la energía como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \log \left(1 - 2|r^{(L)}||r^{(R)}| \cos(2\delta) e^{-2|k_{\parallel}|a} + |r^{(L)}|^2 |r^{(R)}|^2 e^{-4|k_{\parallel}|a} \right), \quad (4.20)$$

donde $\delta = \delta_L - \delta_R$.

4.3. Relación entre condiciones de contorno y acción de borde

En primer lugar vamos a mostrar cómo se pueden recuperar los resultados de imponer condiciones de contorno de C-S, tal como se ha considerado en [59]. Esa situación involucra tanto términos que rompen paridad como términos que la conservan, dado

que las condiciones de contorno mezclan las componentes paralelas del campo eléctrico con las componentes paralelas de campo magnético, y la componente normal del campo magnético con la componente normal del campo eléctrico. Por inspección de las condiciones de contorno debidas a la acción de contorno, y recordando (4.6) y (4.11), hemos considerado elegir:

$$\begin{aligned} f_e^{(L)} &= f_e^{(R)} = -\frac{1}{|k_{\parallel}|} \\ f_o^{(L)} &= \theta(0), \quad f_o^{(R)} = -\theta(a), \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde el signo menos en la última ecuación se coloca únicamente para ser consistentes con la elección hecha en [59] para introducir las condiciones de contorno (esto es, las normales correspondientes a las dos superficies son opuestas). Entonces,

$$r_L = -\frac{1 + i\theta(0)}{1 - i\theta(0)}, \quad r_R = -\frac{1 - i\theta(a)}{1 + i\theta(a)}. \quad (4.22)$$

Ambas expresiones tienen módulo uno, y por lo tanto son fases puras. Definiendo:

$$r_L = -e^{2i\delta_0}, \quad r_R = -e^{-2i\delta_a} \quad (4.23)$$

con $\delta_{0,a} \equiv \arctan \theta(0,a)$, vemos que la expresión (4.17) queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\varphi_b(\delta)}{a^3} \\ \varphi_b(\delta) &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left(1 - 2 \cos(2\delta) e^{-k} + e^{-2k} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

con $\delta = \delta_0 - \delta_a = \arctan \left(\frac{\theta(0) - \theta(a)}{1 + \theta(0)\theta(a)} \right)$, lo cual coincide con el resultado de [59]. Es importante notar que esta elección para el término de borde puede entenderse también como la más general posible donde no haya constantes dimensionales en los núcleos. De hecho, volviendo a la forma de la acción de borde, vemos que puede escribirse (por ejemplo para el espejo L) como sigue:

$$S^{(L)} = \int d^4x \delta(x_3) \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} (-\partial_{\parallel}^2)^{-1/2} F_{\alpha\beta} + \frac{i\theta_L}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha} \partial_{\beta} A_{\gamma} \right). \quad (4.25)$$

Vale la pena mencionar que esencialmente, surge aquí la misma estructura que posee la acción efectiva a un loop para un fermión de Dirac sin masa, donde el término de paridad impar refleja la existencia de una anomalía de paridad. La misma estructura también resulta en el proceso de bosonización en 2 + 1 dimensiones [67].

4.4. Comportamiento de la energía para espejos de C-S

Podemos también considerar términos de borde que solo contengan términos que rompan paridad tales que la violación de paridad sea máxima. Este caso equivale a tomar $f_e^{(L,R)} = 0$, y $f_o^{(L,R)} = \theta_{L,R}$ donde cada $\theta_{L,R}$ es una constante adimensional.

En este caso, el resultado para \mathcal{E} puede expresarse como:

$$\mathcal{E} = \frac{\varphi(\theta_L, \theta_R)}{a^3} \quad (4.26)$$

con la función adimensional φ definida como sigue:

$$\varphi(\theta_L, \theta_R) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 + \frac{\theta_L^2 \theta_R^2}{(4 + \theta_L^2)(4 + \theta_R^2)} e^{-2k} + \frac{8\theta_L \theta_R - 2\theta_L^2 \theta_R^2}{(4 + \theta_L^2)(4 + \theta_R^2)} e^{-k} \right]. \quad (4.27)$$

En particular, para espejos idénticos: $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$, tenemos que

$$\varphi(\theta, \theta) \equiv \varphi_g(\theta) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 - \frac{\theta^2}{(4 + \theta^2)^2} e^{-k} [\theta^2(2 - e^{-k}) - 8] \right]. \quad (4.28)$$

Por otro lado, si los coeficientes de C-S poseen igual módulo pero signo opuesto: $\theta_L = -\theta_R \equiv \theta$, tenemos que

$$\varphi(\theta, -\theta) \equiv \varphi_u(\theta) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 - \frac{\theta^2}{(4 + \theta^2)^2} e^{-k} [\theta^2(2 - e^{-k}) + 8] \right]. \quad (4.29)$$

Finalmente, el resultado correspondiente a un espejo perfecto (L) frente a un espejo de C-S (R) con constante θ puede obtenerse evaluando la expresión general para la energía de interacción para el caso $f_o^{(L)} \equiv 0$, $f_e^{(L)} \rightarrow \infty$, y $f_e^{(R)} \equiv 0$, $f_o^{(L)} \equiv \theta$.

La expresión resultante puede escribirse como: $\mathcal{E} = \frac{1}{a^3} \varphi_c(\theta)$, con

$$\varphi_c(\theta) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 - \frac{\theta^2}{4 + \theta^2} e^{-k} (2 - e^{-k}) \right]. \quad (4.30)$$

Para darnos una idea cualitativa del comportamiento de la energía para los diferentes casos considerados previamente, notemos primero que todos ellos tienen la misma dependencia con la distancia (dado que no hay constantes dimensionales en el problema). Por lo tanto tendrán la estructura $\mathcal{E} = \frac{\varphi(\theta)}{a^3}$, con un φ que puede ser φ_g , φ_u o φ_c , dependiendo del caso a considerar. Lo mismo ocurre para dos espejos conductores perfectos, donde recuperamos el conocido resultado, dado por $\mathcal{E} = \frac{\varphi_p}{a^3}$, con $\varphi_p = -\frac{\pi^2}{720}$. Usando esta constante como referencia, en Fig. 4.1 hemos graficado una versión normalizada

de φ para cada caso, es decir, $\varphi_n \equiv \frac{\varphi}{\frac{\pi}{2} \frac{1}{720}}$, como función del coeficiente de C-S θ para los casos particulares considerados anteriormente. La línea punteada horizontal representa el caso de dos espejos conductores perfectos como referencia, la línea sólida más gruesa corresponde a dos espejos de C-S idénticos, la línea sólida más fina corresponde a dos espejos de C-S con coeficientes de igual módulo y signo opuesto, y la línea discontinua representa un conductor perfecto frente a un espejo de C-S.

Notemos que, en todos los casos donde hay espejos de C-S, la energía tiende a la de dos conductores perfectos a medida que θ tiende a infinito, y sus valores no presentan una diferencia significativa a partir de $\theta = 50$.

En particular, es importante notar que para el caso de dos espejos de C-S con coeficientes iguales, observamos que φ_n se vuelve positiva cuando θ es menor que $\sim 2,07$, lo que corresponde a una fuerza repulsiva entre los espejos. Para θ tendiendo a cero, es esperable que la energía se anule, pero la existencia de otro cero ubicado aproximadamente en $\theta = 2,07$ implica que el coeficiente presenta un comportamiento no monótono.

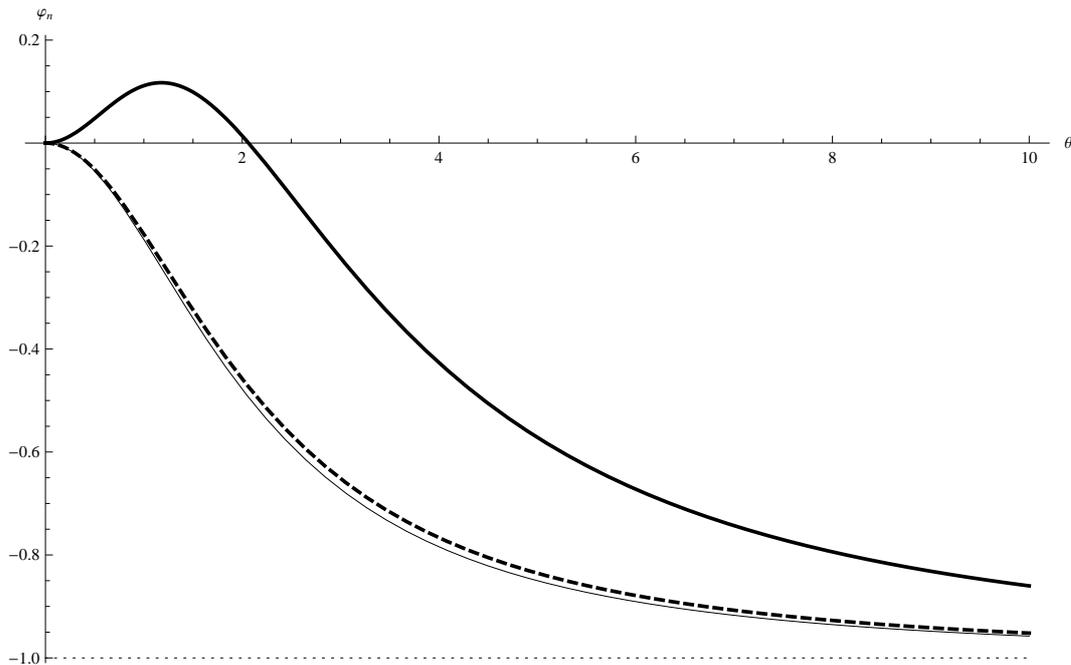


Figura 4.1: φ_n vs. θ para: (a) Dos conductores perfectos (línea punteada horizontal inferior), (b) dos espejos de C-S idénticos (línea sólida y gruesa), (c) dos espejos de C-S con coeficiente opuestos (línea sólida y fina), (d) un conductor perfecto frente a un espejo de C-S (línea discontinua).

Parte II

ECD para espejos imperfectos en campo EM

Capítulo 5

Espejos imperfectos en 3+1 dimensiones

“Quiero atrapar el sol en una pared desierta.”

— En el hospicio, Pastoral.

En este capítulo, estudiamos los efectos disipativos cuánticos debidos al movimiento acelerado de un único espejo imperfecto de ancho cero en un campo EM. En un trabajo reciente [68], se analiza el ECD para espejos imperfectos desde el punto de vista de amplitudes de scattering, para un campo escalar. Aquí, en su lugar, consideramos el caso electromagnético, para espejos que pueden ser descritos por medio de sus TPV, los que a su vez suponemos que provienen de la integración de grados de libertad microscópicos cargados restringidos a los espejos. Para ello nos basamos en trabajos previos [46, 69], correspondientes al campo escalar y campo espinorial, en los cuales se utilizó el enfoque de integrales funcionales propuesto en [47]. Dicho enfoque se basa en la introducción de campos auxiliares dentro de la integral funcional para el campo de vacío, cuyo rol consiste imponer las condiciones de contorno apropiadas para el campo en cada espejo. Utilizamos aquí una versión adaptada de este método, diseñada para tratar el caso de espejos imperfectos en presencia del campo cuántico EM.

A continuación, basados en ciertas suposiciones acerca del modelo microscópico del espejo, definimos la acción efectiva correspondiente, dentro del marco de un desarrollo perturbativo. Tal desarrollo es en potencias del apartamiento del espejo con respecto al equilibrio, entendiendo por equilibrio una configuración estática y plana.

5.1. Modelo

Comencemos por definir las características del sistema y su geometría, así como las convenciones y aproximaciones adoptadas para su descripción. El sistema a considerar

consta de un único espejo móvil, cuya interacción con el vacío cuántico queda representada mediante el TPV $\Pi_{\alpha\beta}$. Consideramos que el mismo se encuentra concentrado sobre una superficie cuya posición es dependiente del tiempo.

Tal como en los capítulos anteriores, utilizamos aquí coordenadas de espacio-tiempo euclídeas x_0, x_1, x_2, x_3 , con la métrica $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Consideramos el campo fluctuante de vacío como un campo de gauge abeliano A_μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$, interactuando con un espejo de ancho cero. Nuevamente consideramos que en una aproximación de respuesta lineal, esta interacción puede representarse mediante el TPV debido al medio confinado a esa superficie.

Adicionalmente, tomamos la siguiente aproximación para este modelo: la curvatura de la superficie debe ser lo suficientemente pequeña como para permitir una descripción donde la función de respuesta lineal correspondiente a un plano pueda ser usada localmente. En otras palabras, en cada plano tangente, utilizamos el TPV debido a un espejo plano. Analicemos ahora las razones detrás de esta aproximación y el tipo de efectos que estamos descartando al implementarla.

El caso más general de movimiento a tratar consiste en un espejo cuya forma y posición pueden definirse por una única función escalar ψ , tal que $x_3 = \psi(x_{\parallel})$, donde $x_{\parallel} \equiv (x_0, x_1, x_2)$. Dentro de esta situación general, nos enfocamos en un caso particular de interés: un plano infinito moviéndose de forma rígida. En este caso la superficie del espejo puede definirse mediante una ecuación de la forma $x_3 = \psi(x_0)$. La razón para considerar este caso es que nos permitirá hallar expresiones explícitas para algunos modelos interesantes. No obstante, presentaremos aquí también expresiones correspondientes a funciones más generales en el resultado correspondiente a la acción efectiva.

Tal como en los capítulos previos, consideramos que la acción efectiva \mathcal{S} guarda la misma estructura general 3.1, con un término para la acción libre y otro para la interacción. La diferencia es que en este caso, el término de interacción \mathcal{S}_I da cuenta del acoplamiento entre A y los grados de libertad microscópicos del espejo en movimiento, y por lo tanto debe ser función tanto de A como de ψ_0 . Para construirlo, empecemos por definirlo para el caso de un espejo plano y estático localizado en $x_3 = \psi_0 = \text{constante}$:

$$\mathcal{S}_I(A, \psi_0) = \frac{1}{2} \int_{x_{\parallel}, y_{\parallel}} A_\alpha(x_{\parallel}, \psi_0) \Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) A_\beta(y_{\parallel}, \psi_0), \quad (5.1)$$

donde $\Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel} - y_{\parallel})$ denota el TPV del medio que conforma la lámina plana, y donde $\alpha, \beta = 0, 1, 2$. En este caso, el mismo depende de la diferencia entre sus argumentos, dado que el medio se asume homogéneo.

Notemos que la componente del campo de gauge, normal al plano del espejo, no se acopla al medio, lo cual es consistente con la suposición de que el espejo tiene ancho cero.

Por consiguiente, la forma general del término de interacción se puede escribir de

la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_I(A, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{x_{\parallel}, y_{\parallel}} \sqrt{g(x_{\parallel})} \sqrt{g(y_{\parallel})} A_{\mu}(x_{\parallel}, \psi(x_{\parallel})) \\ &\times e_{\alpha}^{\mu}(x_{\parallel}) \Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) e_{\beta}^{\nu}(y_{\parallel}) A_{\nu}(y_{\parallel}, \psi(y_{\parallel})) , \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $e_{\alpha}^{\mu}(x_{\parallel})$, con $\alpha = 0, 1, 2$, son tres vectores tangentes al volumen de mundo barrido por el espejo durante su evolución temporal:

$$e_{\alpha}^{\mu}(x_{\parallel}) = \delta_{\alpha}^{\mu} + \delta_3^{\mu} \partial_{\alpha} \psi(x_{\parallel}) , \quad (5.3)$$

y $g(x_{\parallel}) = \det[g_{\alpha\beta}(x_{\parallel})] = 1 + \partial_{\alpha} \psi(x_{\parallel}) \partial_{\alpha} \psi(x_{\parallel})$, donde $g_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida sobre la hipersuperficie curva:

$$g_{\alpha\beta}(x_{\parallel}) = \delta_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} \psi(x_{\parallel}) \partial_{\beta} \psi(x_{\parallel}) . \quad (5.4)$$

$\Pi_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel})$ denota el TPV del medio en el espejo curvo. No supondremos que $\Pi_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel})$ se conoce para un ψ arbitrario; en su lugar, utilizaremos un procedimiento aproximado basado en el tensor de un espejo plano, $\Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel} - y_{\parallel})$, considerando pequeños apartamientos respecto de la métrica plana $g_{\alpha\beta} \simeq \delta_{\alpha\beta}$.

Para llevar a cabo esta aproximación comencemos escribiendo la representación en momentos de $\Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel} - y_{\parallel})$,

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{ip_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} \tilde{\Pi}^{\alpha\beta}(p_{\parallel}) \\ &= \langle x_{\parallel} | \tilde{\Pi}^{\alpha\beta}(-i\partial_{\parallel}) | y_{\parallel} \rangle , \end{aligned} \quad (5.5)$$

y definamos

$$\Pi_{\alpha\beta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) = \langle x_{\parallel} | \tilde{\Pi}^{\alpha\beta}(-i\nabla_{\parallel}) | y_{\parallel} \rangle , \quad (5.6)$$

que se obtiene reemplazando las derivadas por las correspondientes derivadas covariantes (con la conexión determinada por la métrica inducida). En esta aproximación estamos descartando la excitación inercial de los grados de libertad discutida en [70], y acoplamientos específicos entre el campo electromagnético y la curvatura asociada con $g_{\alpha\beta}$.

Nuestro siguiente paso consiste en introducir $\Gamma(\psi)$, la acción efectiva para la configuración del espejo:

$$e^{-\Gamma(\psi)} = \frac{\mathcal{Z}(\psi)}{\mathcal{Z}(0)} , \quad (5.7)$$

donde

$$\mathcal{Z}(\psi) = \int [\mathcal{D}A] e^{-\mathcal{S}(A, \psi)} , \quad (5.8)$$

y $[DA]$ es la medida de la integral de camino incluyendo la fijación de medida.

5.1.1. Campos auxiliares

Utilizando un campo vectorial auxiliar en $2 + 1$ dimensiones, al que denotamos $\xi^\alpha(x_\parallel)$, podemos escribir una forma equivalente del término S_I :

$$e^{-S_I(A,\psi)} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \delta(\nabla \cdot \xi) \quad (5.9)$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} \int_{x_\parallel, y_\parallel} \xi^\alpha(x_\parallel) \Lambda_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel) \xi^\beta(y_\parallel) + i \int_x J_\mu(x) A_\mu(x)}$$

donde hemos introducido una corriente $J^\mu(x)$, concentrada en el volumen de mundo del espejo:

$$J^\mu(x) = \sqrt{g(x_\parallel)} e_\alpha^\mu(x_\parallel) \delta(x_3 - \psi(x_\parallel)) \xi^\alpha(x_\parallel), \quad (5.10)$$

y donde $\Lambda_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel)$ es la inversa (con respecto a índices continuos y discretos) de $\Pi^{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel)$. Dentro de esta aproximación,

$$\Lambda_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel) = \langle x_\parallel | [\tilde{\Pi}(-i\nabla)]_{\alpha\beta}^{-1} | y_\parallel \rangle, \quad (5.11)$$

donde la inversa es interpretada en el espacio de los campos y satisface $\nabla_\alpha \xi^\alpha = 0$, es decir que la divergencia covariante del campo auxiliar es nula. El motivo para introducir el factor con un funcional δ de esta divergencia tiene que ver con la naturaleza transversal del TPV (identidades de Ward-Takahashi): la representación gaussiana usada en Ec.(5.9) no debe ser construida con campos vectoriales sin restricciones sino solo con los que sean transversales. De hecho, $\Pi^{\alpha\beta}$ es invertible, y su inversa es $\Lambda_{\alpha\beta}$, en el subespacio de los campos transversales. Además, la condición sobre la divergencia de los campos auxiliares implica la conservación de J^μ , y por lo tanto la invariancia de la acción ante transformaciones de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$.

Usando la Ec.(5.9) en Ec.(5.8), e integrando A , vemos que:

$$\mathcal{Z}(\psi) = \mathcal{Z}_0 \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \delta(\nabla \cdot \xi) e^{-\mathcal{S}_{\text{eff}}(\xi)}, \quad (5.12)$$

donde \mathcal{Z}_0 es la amplitud del vacío para el campo electromagnético libre, y

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{x_\parallel, y_\parallel} \xi^\alpha(x_\parallel) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel) \xi^\beta(y_\parallel), \quad (5.13)$$

donde

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel) = \sqrt{g(x_\parallel)} e_\alpha^\mu(x_\parallel) G_{\mu\nu}(x_\parallel - y_\parallel, \psi(x_\parallel) - \psi(y_\parallel))$$

$$\times e_\beta^\nu(y_\parallel) \sqrt{g(y_\parallel)} + \Lambda_{\alpha\beta}(x_\parallel, y_\parallel), \quad (5.14)$$

con $G_{\mu\nu}(x-y)$ denotando el propagador del campo de gauge. Encontramos conveniente usar el gauge de Feynman, de forma que

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2}. \quad (5.15)$$

Notemos que, dado que el campo auxiliar está restringido a verificar la relación $\nabla \cdot \xi = 0$, podemos descartar en la Ec.(5.13) toda contribución de $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ que se anule cuando actúa en el subespacio de campos que satisfacen esa condición.

5.1.2. Desarrollo perturbativo a segundo orden

Implementemos ahora un desarrollo perturbativo para la acción efectiva $\Gamma(\psi)$ a segundo orden en ψ , la distancia del espejo de su posición de equilibrio. Notamos que el resultado formal de integrar el campo auxiliar es:

$$\Gamma(\psi) = \frac{1}{2} \left[\text{Tr} \log \mathcal{K} - \text{Tr} \log \mathcal{K}|_{\psi=0} \right]. \quad (5.16)$$

Denotando por $\mathcal{K}^{(a)}$ el a -ésimo término en un desarrollo en potencias de ψ , obtenemos la correspondiente expresión para Γ . Tanto el término de orden 0 como el de orden 1 se anulan, mientras que el término de segundo orden $\Gamma^{(2)}$ es:

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\mathcal{K}^{(0)} \right)^{-1} \mathcal{K}^{(2)} \right]. \quad (5.17)$$

La forma explícita del término de orden cero, que es invariante ante traslaciones, es

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{(0)}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) = \int \frac{d^3k_{\parallel}}{(2\pi)^3} e^{ik_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})} \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}^{(0)}(k_{\parallel}) \quad (5.18)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}^{(0)}(k_{\parallel}) = \frac{1}{2|k_{\parallel}|} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\perp}(k_{\parallel}) + \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}(k_{\parallel}), \quad (5.19)$$

con $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{\perp} \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k_{\parallel}^2}$.

Con respecto al objeto de segundo orden $\mathcal{K}^{(2)}$, el mismo recibe muchas contribuciones diferentes. Sin embargo, aquí solo estamos interesados en obtener los términos disipativos. Por ello, podemos ignorar cualquier término que produzca una contribución local en el tiempo. En particular, como la desviación de la métrica inducida con respecto al tensor identidad ya es cuadrática en ψ , podemos reemplazarla por el tensor identidad, y a las derivadas covariantes por derivadas usuales en el espacio plano. Sin embargo, notemos que existe una contribución no trivial proveniente de los vectores

tangentes e_α^μ , que contiene términos lineales en ψ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{(2)}(x_\parallel, y_\parallel) &= -\frac{1}{2}\psi(x_\parallel)\psi(y_\parallel) \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} e^{ik_\parallel \cdot (x_\parallel - y_\parallel)} |k_\parallel| \delta_{\alpha\beta} \\ &+ \partial_\alpha \psi(x_\parallel) \partial_\beta \psi(y_\parallel) \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\parallel \cdot (x_\parallel - y_\parallel)}}{2|k_\parallel|}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Podemos obtener una fórmula más explícita para la contribución de segundo orden de Γ , tomando en cuenta la estructura del TPV, que aparece en $\tilde{\mathcal{K}}^{(0)}$. Bajo la suposición de invariancia ante rotaciones espaciales en los planos $x_3 = \text{constante}$, este tensor puede descomponerse en proyectores ortogonales de forma análoga a la realizada en el capítulo 3. Obteniendo finalmente que para un medio general el TPV puede expresarse como:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k) = g_t(k_0, \mathbf{k}_\parallel) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + g_l(k_0, \mathbf{k}_\parallel) \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l, \quad (5.21)$$

donde g_t y g_l son funciones escalares dependientes del modelo.

En lo que sigue, particularizaremos nuestro estudio al caso del movimiento rígido de un espejo plano a lo largo de su dirección normal. En este caso $\Gamma^{(2)}$ tiene la forma:

$$\frac{1}{L^2} \Gamma^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_{x_0, x'_0} q(x_0) f(x_0 - x'_0) q(x'_0) \quad (5.22)$$

(L^2 denota el área del espacio x_1, x_2). Usando los proyectores definidos previamente, y luego de algunos pasos algebraicos, vemos que la transformada de Fourier de f , $\tilde{f}(p_0)$, se descompone naturalmente como sigue:

$$\tilde{f}(p_\parallel) = \tilde{f}_t(p_\parallel) + \tilde{f}_l(p_\parallel) \quad (5.23)$$

donde

$$\tilde{f}_t(p_0) = \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} r_t(k_\parallel) |k_\parallel| \sqrt{(k_0 + p_0)^2 + \mathbf{k}_\parallel^2}, \quad (5.24)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{f}_l(p_0) &= \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} r_l(k_\parallel) \left[|k_\parallel| \sqrt{(k_0 + p_0)^2 + \mathbf{k}_\parallel^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{k}_\parallel^2 p_0^2}{|k_\parallel| \sqrt{(k_0 + p_0)^2 + \mathbf{k}_\parallel^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde

$$r_{t,l}(|k_\parallel|) = \frac{1}{1 + \frac{2|k_\parallel|}{g_{t,l}(k_\parallel)}}. \quad (5.26)$$

Es interesante notar que los coeficientes $r_{t,l}$ que aparecen en la fórmula final son justamente los coeficientes estáticos de reflexión TE y TM del espejo. En efecto, en [71] ha

sidó demostrado que para un espejo delgado caracterizado por su TPV, los coeficientes de reflexión euclídeos están dados por

$$r_{TM} = \frac{1}{1 + \frac{2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{|k_{\parallel}|\tilde{\Pi}_{00}}}, \quad (5.27)$$

$$r_{TE} = \frac{-k_{\parallel}^2 \tilde{\Pi}_{00} + \mathbf{k}_{\parallel}^2 \tilde{\Pi}_{\alpha\alpha}}{-k_{\parallel}^2 \tilde{\Pi}_{00} + \mathbf{k}_{\parallel}^2 \tilde{\Pi}_{\alpha\alpha} + 2|k_{\parallel}|\mathbf{k}_{\parallel}^2}. \quad (5.28)$$

A partir de la Ec.(5.21) y de las definiciones de los proyectores transversal y longitudinal, resulta fácil ver que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{00} &= \frac{\mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_{\parallel}^2} g_l, \\ \tilde{\Pi}_{\alpha\alpha} &= g_l + g_t. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Reemplazando estos resultados en las ecuaciones (5.27) y (5.28), uno puede verificar que $r_t = r_{TE}$ y $r_l = r_{TM}$.

Es importante observar que en \tilde{f} , dada por (5.24), quedan aún contribuciones que se cancelan por la sustracción de $\psi = 0$, efectos independientes del tiempo. En el espacio de Fourier podemos imponer esto simplemente sustrayendo de \tilde{f} su valor en $p_0 = 0$. Además, según el comportamiento para momentos grandes de las funciones $r_{t,l}$, podemos necesitar también realizar la sustracción de más términos dentro de la integral sobre el momento. En efecto, según el grado de divergencia superficial, necesitaremos sustraer del integrando un polinomio de orden mayor en p_{\parallel} . Notemos que estos términos no afectarán la parte imaginaria de la acción efectiva, y pueden absorberse mediante una redefinición de la masa y, eventualmente, términos con derivadas de orden superior en la acción clásica del espejo.

La descomposición en ecuaciones (5.23)-(5.25), que conforma el resultado general de este problema, implica que el mismo puede ser descompuesto en dos contribuciones independientes, una debida a r_t y otra debida a r_l , que son versiones euclídeas de los coeficientes de reflexión TE y TM del espejo.

Sabemos que los efectos disipativos pueden obtenerse a partir de la parte imaginaria de la acción efectiva ‘in-out’ para tiempo real $\Gamma_{\text{in-out}}^{(2)}$, que está relacionada a la probabilidad P de producir un par de fotones a partir del vacío. De forma más general, P es la probabilidad total de decaimiento del vacío, que incluye también la posibilidad de excitación de los grados de libertad internos del espejo. Estos grados de libertad internos producen además fuerzas inerciales y efectos disipativos sobre el espejo acelerado

[70]. Podemos calcular estos efectos disipativos de la siguiente forma:

$$P \simeq 2 \operatorname{Im}[\Gamma_{\text{in-out}}^{(2)}], \quad (5.30)$$

descrita previamente en las nociones preliminares de esta Tesis. Luego, rotando la acción efectiva euclídea al espacio-tiempo de Minkowski obtenemos

$$\frac{\Gamma_{\text{in-out}}^{(2)}}{L^2} = \frac{1}{2} \int dp_0 [\tilde{f}_t(ip_0) + \tilde{f}_l(ip_0)] |\tilde{q}(p_0)|^2, \quad (5.31)$$

donde hemos conservado la misma notación para las funciones rotadas \tilde{q} .

A continuación evaluaremos \tilde{f} y su continuación analítica para algunos ejemplos interesantes.

5.2. Espejo delgado conductor perfecto

Empecemos considerando el caso más simple de conductividad perfecta, para $r_{t,l} = 1$. Para evaluar la contribución del modo TE, necesitamos evaluar la integral

$$\tilde{f}_t(p_0) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} |k_{\parallel}| \sqrt{(k_0 + p_0)^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}, \quad (5.32)$$

o, usando coordenadas esféricas

$$\tilde{f}_t(p_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta k^3 \sin \theta \sqrt{k^2 + p_0^2 + 2kp_0 \cos \theta}. \quad (5.33)$$

Esta integral es por supuesto divergente. Para renormalizar el factor de forma \tilde{f}_t seguimos el esquema de renormalización de BPHZ, sustrayendo del integrando su desarrollo en serie de Taylor en p_0^2 alrededor de 0, hasta orden p_0^4 (dispuesto por el grado de divergencia superficial). Luego de la sustracción, las integrales en θ y en k pueden resolverse analíticamente [72]. Es importante notar que luego de realizar la integración en θ , la función resultante se anula para $k > |p_0|$. El resultado es el siguiente:

$$\tilde{f}_t(p_0) = -\frac{|p_0|^5}{360\pi^2}, \quad (5.34)$$

que es el resultado conocido para la contribución TE [73]. Consideremos ahora la contribución TM. Utilizando otra vez coordenadas esféricas, el factor de forma esta dado

por

$$\begin{aligned} \tilde{f}_l(p_0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta k^3 \sin\theta \sqrt{k^2 + p_0^2 + 2kp_0 \cos\theta} \\ &\times \left(1 - \frac{p_0^2 \sin^2\theta}{k^2 + p_0^2 + 2kp_0 \cos\theta} \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior obtenemos

$$\tilde{f}_l(p_0) = -\frac{11|p_0|^5}{360\pi^2}, \quad (5.36)$$

que reproduce la contribución para TM obtenida mediante otros métodos [73].

El límite de conductor perfecto es útil, no únicamente como un control de consistencia para nuestros cálculos. De hecho, como se señala en [74], hay una sutil diferencia en las condiciones de contorno para conductores perfectos delgados y gruesos. Si bien esta diferencia no se manifiesta en el efecto Casimir estático, influye en la interacción de Casimir-Polder. Hemos observado que este no es el caso para el ECD.

5.3. Un medio con funciones $g_{t,l}$ constantes

Consideremos ahora el caso en que las funciones $g_{t,l}$ son constantes; a saber, $g_{t,l} = \lambda_{t,l}$. Esto corresponde a un medio que suprime tanto el campo magnético normal como el campo eléctrico transversal. La longitud característica para el decaimiento de cada uno de los campos es g_t^{-1} para el campo magnético y g_l^{-1} para el eléctrico. El cálculo puede realizarse siguiendo los mismos pasos que para el caso de conductor perfecto, introduciendo los coeficientes de reflexión en las integrales

$$r_{t,l}(|k_{\parallel}|) = \frac{1}{1 + \frac{2|k_{\parallel}|}{\lambda_{t,l}}}. \quad (5.37)$$

Vale la pena enfatizar que la expresión para la contribución TE coincide exactamente con la de un campo escalar cuántico con un potencial δ , como fue considerado en [46]. Por lo tanto, un TPV con funciones g_t constantes da, para el modo TE, la generalización natural EM del problema escalar, lo cual fue considerado en varios trabajos previos donde se analizan el efecto Casimir estático y el dinámico [75].

Utilizando nuevamente coordenadas esféricas, sustraemos primero los términos del desarrollo en serie de Taylor hasta el orden p_0^4 , y luego resolvemos la integral en θ . La expresión resultante puede integrarse analíticamente en k . El resultado es:

$$\tilde{f}_t(p_0) = -|p_0|^5 \varphi_t\left(\frac{|p_0|}{\lambda_t}\right), \quad (5.38)$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_t(\xi) &= \frac{24\xi^5 - 60\xi^4 - 220\xi^3 - 150\xi^2 - 30\xi}{5760\pi^2\xi^6} \\ &+ \frac{15(2\xi + 1)^3 \log(2\xi + 1)}{5760\pi^2\xi^6}.\end{aligned}\quad (5.39)$$

En el límite de acoplamiento fuerte (casi conductor perfecto), obtenemos:

$$\tilde{f}_t(p_0) = -\frac{|p_0|^5}{360\pi^2} + \frac{|p_0|^6}{420\pi^2\lambda_t} - \frac{|p_0|^7}{420\pi^2\lambda_t^2} + \dots \quad (5.40)$$

Entre estos términos, una vez realizada la continuación analítica a tiempo real, solo contribuyen a la parte imaginaria de la acción efectiva, aquellos con potencias impares de $|p_0|$:

$$\text{Im}\left[\tilde{f}_t(ip_0)\right] = \frac{|p_0|^5}{360\pi^2} - \frac{|p_0|^7}{420\pi^2\lambda_t^2} + \dots \quad (5.41)$$

donde identificamos que el término principal es idéntico al de un campo escalar con condiciones de contorno de Dirichlet, y al perteneciente a los modos TE de un campo electromagnético para conductores perfectos. En el límite de acoplamiento débil, obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_t(p_0) &= -\frac{|p_0|^4\lambda_t}{240\pi^2} + \frac{|p_0|^3\lambda_t^2}{96\pi^2} \\ &- \frac{|p_0|^2(-11 + 6\log(2|p_0|) - 6\log\lambda_t)\lambda_t^3}{288\pi^2} + \dots\end{aligned}\quad (5.42)$$

donde descartamos términos de mayor orden en λ_t . Por lo tanto obtenemos, al orden principal

$$\text{Im}\left[\tilde{f}_t(ip_0)\right] = \frac{|p_0|^3\lambda_t^2}{96\pi^2}.\quad (5.43)$$

El factor de forma asociado al coeficiente de reflexión TM puede obtenerse siguiendo los mismos lineamientos. El resultado puede escribirse como

$$\tilde{f}_l(p_0) = -|p_0|^5 \varphi_l\left(\frac{|p_0|}{\lambda_l}\right), \quad (5.44)$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_l(\xi) &= \frac{-872\xi^5 + 1020\xi^4 + 20\xi^3 - 690\xi^2 - 210\xi}{28800\pi^2\xi^6} \\ &+ \frac{15(2\xi + 1)^3(8\xi^2 - 12\xi + 7)\log(2\xi + 1)}{28800\pi^2\xi^6}.\end{aligned}\quad (5.45)$$

En el límite de acoplamiento fuerte obtenemos

$$\tilde{f}_l(p_0) = -\frac{11|p_0|^5}{360\pi^2} + \frac{|p_0|^6}{60\pi^2\lambda_l} - \frac{17|p_0|^7}{1260\pi^2\lambda_l^2} + \dots \quad (5.46)$$

que reproduce el resultado para conductor perfecto para $\lambda_l \rightarrow \infty$.

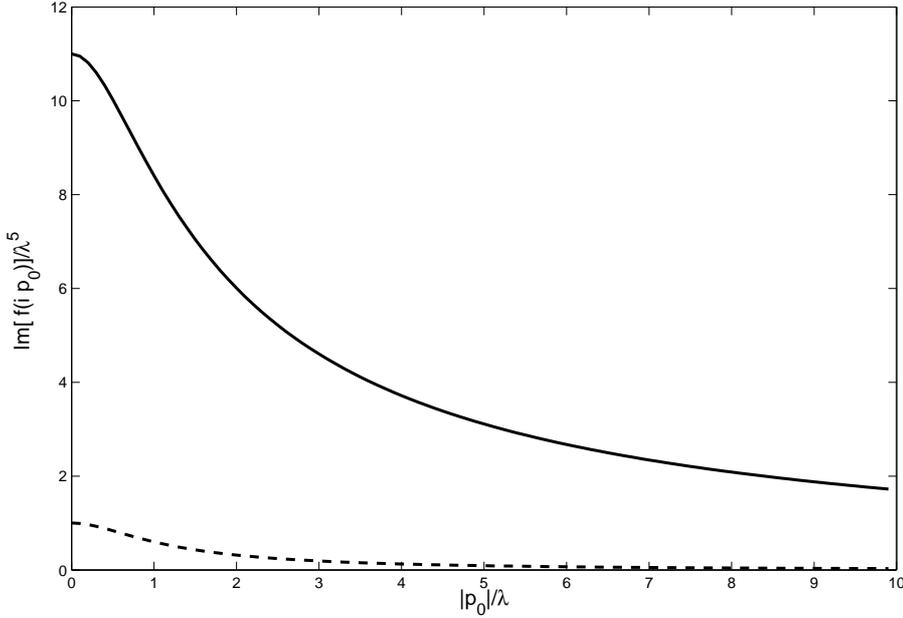


Figura 5.1: La línea punteada representa $\text{Im}[\tilde{f}_t(ip_0)]/\lambda^5$ dividido por el resultado de TE para un conductor perfecto, como función de $|p_0|/\lambda$ para un movimiento rígido en un medio de $g_t = \lambda$ constante. La línea sólida corresponde a $\text{Im}[\tilde{f}_l(ip_0)]/\lambda^5$ dividido por el resultado de TE para un conductor perfecto, como función de $|p_0|/\lambda$. Para $|p_0|/\lambda$ pequeño la línea punteada coincide con el resultado de conductor perfecto, mientras que la línea sólida tiende a 11, que es límite correcto [73].

En la Fig. 5.1 hemos graficado la parte imaginaria $\text{Im}[\tilde{f}(ip_0)]$ dividida por el resultado de TE para conductor perfecto, como función de la frecuencia externa. La línea sólida representa el resultado de la Ec.(5.38) que, en el límite de $|p_0|/\lambda \rightarrow 0$, tiende a 11, tal como se observa en [73]. La línea punteada corresponde a la Ec.(5.44) y se aproxima a 1 en el límite de frecuencia cero (lo cual coincide con el límite de conductor perfecto para el modo TE). Los efectos disipativos crecen con p_0 .

5.4. Evaluación de $\tilde{f}(p_{\parallel})$ para el grafeno

Para el caso del grafeno, podemos aplicar las herramientas presentadas previamente para descomponer el TPV en términos de proyectores irreducibles:

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k) = \frac{e^2 N |m|}{4\pi} F\left(\frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2}{4m^2}\right) \left[\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \frac{k_0^2 + \mathbf{k}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right] \quad (5.47)$$

donde

$$F(x) = 1 - \frac{1-x}{\sqrt{x}} \arcsin[(1+x^{-1})^{-\frac{1}{2}}], \quad (5.48)$$

m es la masa (gap), N es el número de campos fermiónicos de 2 componentes, y v_F es la velocidad de Fermi (en unidades donde $c = 1$). Usualmente, el caso más relevante corresponde a $m = 0$; cuando ese es el caso:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} &= \frac{e^2 N}{16} \sqrt{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2} \left[\mathcal{P}_{\alpha\beta}^t + \frac{k_0^2 + \mathbf{k}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right] \\ &= \frac{e^2 N}{16} \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}^2} \left[\sqrt{\frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2}{k_0^2 + \mathbf{k}^2}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^t \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{k_0^2 + \mathbf{k}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}^2}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}^l \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Luego, volviendo a la formulación general, vemos que (para fermiones sin masa), los coeficientes de reflexión son

$$r_t(k_{\parallel}) = \frac{1}{1 + \frac{32}{e^2 N} \sqrt{\frac{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}}} \quad (5.50)$$

y

$$r_l(k_{\parallel}) = \frac{1}{1 + \frac{32}{e^2 N} \sqrt{\frac{k_0^2 + v_F^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{k_0^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2}}}. \quad (5.51)$$

Dado que el TPV no contiene constantes con dimensiones, realizando un análisis dimensional vemos que

$$\tilde{f}(p_0) = |p_0|^5 C(Ne^2, v_F), \quad (5.52)$$

es decir, que el resultado es proporcional al hallado para un conductor perfecto. La función adimensional C depende de la constante de acoplamiento y de la velocidad de Fermi.

Para calcular explícitamente esta función, introducimos los coeficientes de reflexión del grafeno en las ecuaciones (5.24) y (5.25), sustraemos los términos del desarrollo en serie de Taylor hasta el orden p_0^4 , y evaluamos las integrales usando coordenadas esféricas. A diferencia de los ejemplos previos, la complicada dependencia de los coeficientes de reflexión con el ángulo θ , hace imposible resolver analíticamente esta integral, y es por ello que la calculamos numéricamente. De esta forma se obtienen los factores de forma para diferentes valores de las constantes de acoplamiento y de la velocidad de Fermi. Los resultados se muestran en la Fig. 5.2. Como se esperaba, los factores de forma tienden al límite de conductor perfecto $C \rightarrow -1/(30\pi^2)$ cuando $Ne^2 \rightarrow \infty$, y tienden a cero en el límite de acoplamiento débil $Ne^2 \rightarrow 0$. Observamos que, para valores pequeños de la velocidad de Fermi, el comportamiento respecto a la constante de

acoplamiento es no monótono. Es importante notar además que, para algunos valores de los parámetros, los efectos disipativos pueden ser mayores para el grafeno que para un conductor perfecto.

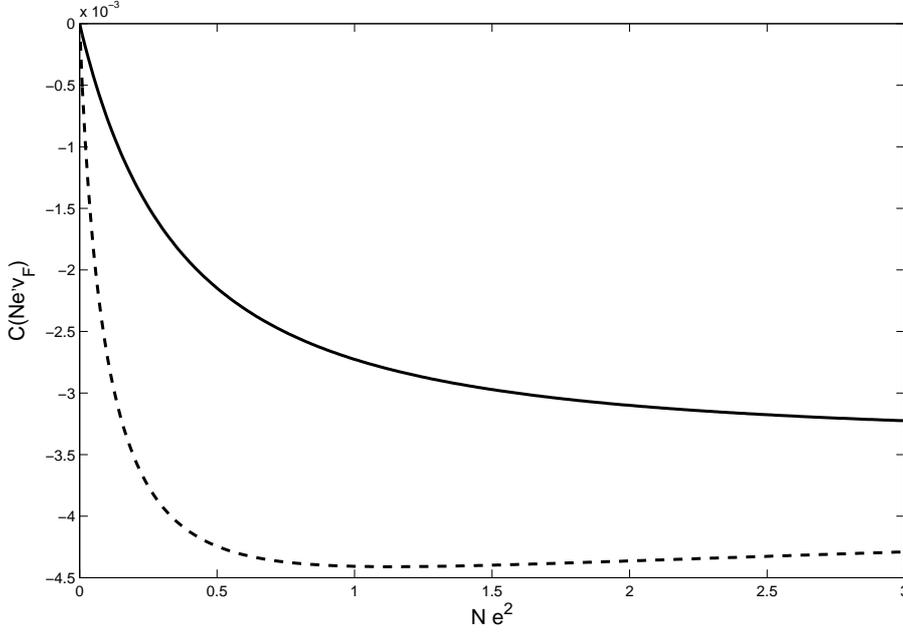


Figura 5.2: Las curvas representan a $C(Ne^2, v_F)$ como función de la constante de acoplamiento adimensional Ne^2 para dos velocidades de Fermi diferentes: $v_F = 0,5$ para la línea sólida, y $v_F = 0,05$ para la línea punteada (v_F está expresado en unidades tales que $c = 1$). Los factores de forma tienden a cero en el límite de acoplamiento débil $Ne^2 \rightarrow 0$, y tienden lentamente al límite de conductor perfecto $-1/(30\pi^2)$ a medida que $Ne^2 \rightarrow \infty$

En el caso particular donde $v_F \rightarrow 1$, correspondiente al límite de fermiones relativistas, los coeficientes de reflexión se vuelven constantes, y los resultados para los factores de forma de TE y TM son los mismos del conductor perfecto divididos por el factor $1 + 32/(e^2 N)$.

Para terminar, es importante señalar que, dado que los grados de libertad internos son fermiones sin masa, la aproximación utilizada en Ec.(5.6) puede no resultar completamente adecuada. Sería necesario en este caso, calcular el TPV en espacios curvos, y verificar que las contribuciones no locales que hemos despreciado no produzcan efectos disipativos cuánticos para movimientos no relativistas de la lámina de grafeno.

Capítulo 6

Espejos semitransparentes en $2 + 1$ dimensiones

“La indómita luz se hizo carne en mí.”

— Rezo por vos, Charly García y Luis Alberto Spinetta.

A lo largo de este capítulo analizamos el ECD generado por un campo de gauge abeliano en $2 + 1$ dimensiones ante la presencia de uno o dos espejos semitransparentes de ancho cero, que pueden moverse y/o deformarse de forma no trivial en función del tiempo. Buscamos obtener expresiones generales para la probabilidad de creación de pares inducida por el movimiento de los espejos, y calcular las mismas de manera más explícita para algunos casos de interés.

Las teorías de campos de gauge abelianos en $2 + 1$ dimensiones juegan un papel importante en modelos relevantes para el estudio de aplicaciones a la Física de la Materia Condensada ([76],[77],[78]), en descripciones efectivas de la teoría cuántica de campos. Estas teorías aparecen por ejemplo cuando utilizamos bosonización en $2 + 1$ dimensiones para tratar el efecto Hall cuántico [79]. Nuestro objetivo aquí es considerar el fenómeno de la radiación inducida por el movimiento en ese tipo de sistema, dada su potencial importancia en los modelos antes mencionados, además de su interés teórico intrínseco. La radiación inducida por el movimiento de espejos imperfectos ya ha sido estudiada para el caso de un espejo en movimiento no relativista en $1 + 1$ dimensiones [48]. También otros modelos han sido considerados por varios autores ([80],[81],[82],[83],[84],[85],[86],[69],[68],[87],[88]).

En el trabajo de Fosco et al. [89], se estudia el efecto Casimir resultante del movimiento oscilatorio de uno o dos espejos semitransparentes acoplados a un campo cuántico escalar real sin masa, siguiendo el formalismo de integrales funcionales. El enfoque utilizado en ese trabajo consiste en evaluar perturbativamente la acción efectiva resultante del acoplamiento entre los espejos y el campo, y luego valerse de la misma

para obtener la probabilidad de creación de partículas. La aproximación involucrada en tratar los espejos perturbativamente permite desacoplar el cálculo puramente cuántico debido al campo del tratamiento del movimiento de los espejos, que puede ser incorporado al final del cálculo. Allí se analizan en detalle los casos de uno o dos espejos planos infinitos de ancho cero en movimiento oscilatorio de amplitud no necesariamente pequeña, tanto para movimientos relativistas como no relativistas. Se encuentra que el caso de un único espejo, solo presenta efectos significativos cuando se mueve a velocidades relativistas, a diferencia del caso de dos espejos, donde se observan interesantes efectos de interferencia incluso para movimientos no relativistas. Nuestra intención radica en extender la idea desarrollada en ese trabajo al caso de un campo abeliano de gauge, y a geometrías y estados de movimiento más generales. En particular, deseamos permitir deformaciones de los espejos que sean dependientes del tiempo.

A continuación vamos a introducir el tipo de modelo a considerar en nuestro estudio y definir la notación y convenciones que hemos adoptado. De forma análoga a lo desarrollado en el capítulo anterior, calcularemos perturbativamente la acción efectiva y su parte imaginaria, en función del acoplamiento entre cada espejo y el campo, tanto para un espejo como para dos. Recordemos nuevamente que la parte imaginaria de la acción efectiva está relacionada con la probabilidad de decaimiento del vacío, y por lo tanto con los efectos disipativos generados por la interacción del campo con los espejos. Finalmente, nos interesa evaluar las expresiones generales antes mencionadas para algunos tipos de movimiento particulares de los espejos para obtener expresiones más explícitas. Para ello consideramos la forma adoptada por las contribuciones de segundo orden a la parte imaginaria en una serie de ejemplos de interés. En particular nos interesa analizar los casos en que la geometría de cada espejo en función del tiempo puede ser modelada por una onda estacionaria, tanto para el caso en que el o los espejos realicen pequeños apartamientos con respecto a una hoja de mundo plana, como para el caso de ondas estacionarias de amplitud arbitraria.

6.1. Modelo

El sistema que vamos a considerar tiene como variable dinámica cuántica, un campo de gauge abeliano $A_\mu(x)$ en 2 + 1 dimensiones ¹. La dinámica de este campo y de su acoplamiento a los espejos móviles, estará codificada por una acción euclídea $\mathcal{S}(A)$, para la cual asumimos la siguiente estructura:

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}_0(A) + \mathcal{S}_I(A) , \quad (6.1)$$

¹Consideramos que los índices provenientes del medio del alfabeto griego (μ, ν, λ, \dots) corren sobre los valores 0, 1 y 2.

donde \mathcal{S}_0 denota la acción del campo de gauge libre:

$$\mathcal{S}_0(A) = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 \right], \quad (6.2)$$

que incluye un término de *gauge-fixing* (utilizaremos $\lambda \equiv 1$), mientras que \mathcal{S}_I representa el acoplamiento entre el campo y uno o dos espejos según el caso que se quiera analizar. En nuestra convención, la métrica euclídea del espacio-tiempo es equivalente a la matriz identidad $\delta_{\mu\nu}$. Por lo tanto no habrá diferencia entre una dada expresión y otra obtenida subiendo o bajando uno o más índices espacio-temporales.

Podemos construir la forma explícita de \mathcal{S}_I para un solo espejo; y luego para considerar más de un espejo, simplemente agregaremos términos análogos para cada uno de ellos. Se supone que los espejos están localizados, es decir, que ocupan una curva espacial a cualquier tiempo dado, y por lo tanto $\mathcal{S}_I(A)$ es una integral sobre la hoja de mundo barrida por el o los espejos durante su evolución temporal. Por lo tanto, la hoja de mundo \mathcal{M} para un espejo puede parametrizarse usando dos coordenadas σ^α , de la siguiente manera ²:

$$\sigma \equiv (\sigma^0, \sigma^1) \rightarrow y^\mu(\sigma). \quad (6.3)$$

Notemos que subir o bajar índices correspondientes a la hoja bidimensional (en general curva) de los espejos, puede de hecho ser relevante, dado que hay una métrica no trivial inducida (ver (6.7)).

Tomando en cuenta que hemos asumido localidad, podemos expresar el término de interacción $\mathcal{S}_I = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(A, y)$ de la siguiente manera, de forma tal que resulte simple y sea invariante ante transformaciones de gauge y reparametrizaciones:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(A, y) = \frac{1}{4\xi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} g^{\alpha\alpha'}(\sigma) g^{\beta\beta'}(\sigma) \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\sigma) \mathcal{F}_{\alpha'\beta'}(\sigma), \quad (6.4)$$

donde hemos introducido:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\sigma) \equiv \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta(\sigma) - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha(\sigma), \quad (6.5)$$

con $\mathcal{A}_\alpha(\sigma)$ denotando la proyección de $A_\mu(x)$ sobre la superficie \mathcal{M} :

$$\mathcal{A}_\alpha(\sigma) \equiv A_\mu[y(\sigma)] e_\alpha^\mu(\sigma), \quad (6.6)$$

$e_\alpha^\mu(\sigma)$ siendo los vectores tangentes $e_\alpha^\mu(\sigma) = \partial y^\mu(\sigma) / \partial \sigma^\alpha$. Los índices correspondientes

²Consideramos que los índices pertenecientes al principio del alfabeto griego ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) corren sobre los valores 0 y 1.

a objetos que viven en \mathcal{M} pueden subirse o bajarse con el tensor de métrica inducida:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) = e_{\alpha}^{\mu}(\sigma)e_{\beta}^{\nu}(\sigma), \quad (6.7)$$

y $g(\sigma) \equiv \det[g_{\alpha\beta}(\sigma)]$.

Por otro lado, la constante ξ (que tiene dimensiones de masa) controla la fuerza de las condiciones de contorno; de esta forma $\xi \rightarrow 0$ corresponde a un conductor perfecto, y $\xi \rightarrow \infty$ corresponde a no imponer condiciones de contorno sobre \mathcal{M} . Por último, valores finitos de ξ , representan condiciones de contorno imperfectas distintas de cero.

Una relación que resultará de utilidad en los desarrollos que prosiguen, es que puede demostrarse que $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ es equivalente a:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(A, y) = \frac{1}{2\xi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \left(\hat{n}_{\mu}(\sigma) \tilde{F}_{\mu}[y(\sigma)] \right)^2, \quad (6.8)$$

donde $\tilde{F}_{\mu}(x) = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} A_{\lambda}(x)$, y $\hat{n}_{\mu}(\sigma)$ es el vector unitario normal a la superficie:

$$\hat{n}_{\mu}(\sigma) = \frac{N_{\mu}(\sigma)}{\sqrt{N^2(\sigma)}}, \quad N_{\mu}(\sigma) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\lambda} e_{\alpha}^{\nu}(\sigma) e_{\beta}^{\lambda}(\sigma), \quad (6.9)$$

(es sencillo verificar que $\sqrt{N^2(\sigma)} = \sqrt{g(\sigma)}$).

En el caso de dos espejos, denotados por L y R , en lugar de tener $\mathcal{S}_I = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ como antes, tendremos:

$$\mathcal{S}_I(A) = \mathcal{S}_L(A, y_L) + \mathcal{S}_R(A, y_R), \quad (6.10)$$

donde hemos introducido dos parametrizaciones, denotadas respectivamente $y_L^{\mu}(\sigma_L)$ y $y_R^{\mu}(\sigma_R)$ para cada espejo. Las constantes de acoplamiento ξ_L , ξ_R , no son necesariamente iguales, y las acciones se suponen con la misma estructura que $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(A, y)$.

6.2. Cálculo perturbativo

El observable que nos concierne aquí es la probabilidad de creación de pares \mathcal{P} , que obtendremos tal como en el capítulo anterior, a partir de la acción efectiva ‘in-out’ para tiempo real, que aquí denotaremos Γ . Consideremos ahora el cálculo perturbativo de Γ_I (la parte de interacción de Γ), y su parte imaginaria, pero sin dar especificaciones sobre el movimiento particular de los espejos.

Si expandimos ahora Γ_I en potencias de \mathcal{S}_I , $\Gamma_I = \Gamma_I^{(1)} + \Gamma_I^{(2)} + \dots$, podemos escribir los términos de primer y segundo orden como sigue:

$$\Gamma_I^{(1)} = \langle \mathcal{S}_I \rangle, \quad (6.11)$$

y

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{S}_I \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{S}_I^2 \rangle = -\frac{1}{2} \langle (\mathcal{S}_I - \langle \mathcal{S}_I \rangle)^2 \rangle . \quad (6.12)$$

Para un solo espejo, podemos obtener $\Gamma_I \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}$ mediante la siguiente sustitución: $\mathcal{S}_I \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ (donde hemos definido $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ como en (6.4)), y para dos espejos simplemente realizamos la sustitución $\mathcal{S}_I \rightarrow \mathcal{S}_L + \mathcal{S}_R$ obteniendo:

$$\Gamma_I^{(1)} \equiv \Gamma_L^{(1)} + \Gamma_R^{(1)} , \quad \Gamma_I^{(2)} \equiv \Gamma_L^{(2)} + \Gamma_R^{(2)} + \Gamma_{LR}^{(2)} , \quad (6.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\frac{L}{R}}^{(1)} &\equiv \Gamma_{\mathcal{M}}^{(1)} \Big|_{\mathcal{M} \rightarrow L,R} , \quad \Gamma_{\frac{L}{R}}^{(2)} \equiv \Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)} \Big|_{\mathcal{M} \rightarrow L,R} , \\ \Gamma_{LR}^{(2)} &= -\langle (\mathcal{S}_L - \langle \mathcal{S}_L \rangle)(\mathcal{S}_R - \langle \mathcal{S}_R \rangle) \rangle . \end{aligned} \quad (6.14)$$

En otras palabras, a este orden, tenemos términos que involucran a cada uno de los espejos individualmente, más un término que los combina a ambos. Por lo tanto, necesitamos únicamente calcular la acción efectiva $\Gamma_{\mathcal{M}}^{(1,2)}$, correspondiente a un término de interacción $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$, y la acción efectiva $\Gamma_{LR}^{(2)}$ que da cuenta de la interacción de los espejos entre sí. Los términos restantes pueden hallarse realizando las sustituciones apropiadas en un conjunto de términos independientes. Explícitamente, la forma de estos términos (hasta segundo orden) está dada por:

$$\Gamma_{\mathcal{M}}^{(1)} = \frac{1}{2\xi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \hat{n}_\mu(\sigma) \hat{n}_\nu(\sigma) \langle \tilde{F}_\mu[y(\sigma)] \tilde{F}_\nu[y(\sigma)] \rangle , \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)} &= -\frac{1}{2(2\xi)^2} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \hat{n}_\mu(\sigma) \hat{n}_\nu(\sigma) \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma' \sqrt{g(\sigma')} \hat{n}_{\mu'}(\sigma') \hat{n}_{\nu'}(\sigma') \\ &\times \langle : \tilde{F}_\mu[y(\sigma)] \tilde{F}_\nu[y(\sigma)] : : \tilde{F}_{\mu'}[y(\sigma')] \tilde{F}_{\nu'}[y(\sigma')] : \rangle , \end{aligned} \quad (6.16)$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma_{LR}^{(2)} &= -\frac{1}{2\xi_L 2\xi_R} \int_{\mathcal{M}_L} d^2\sigma \sqrt{g_L(\sigma)} \hat{n}_\mu^L(\sigma) \hat{n}_\nu^L(\sigma) \int_{\mathcal{M}_R} d^2\sigma' \sqrt{g_R(\sigma')} \hat{n}_{\mu'}^R(\sigma') \hat{n}_{\nu'}^R(\sigma') \\ &\times \langle : \tilde{F}_\mu[y_L(\sigma)] \tilde{F}_\nu[y_L(\sigma)] : : \tilde{F}_{\mu'}[y_R(\sigma')] \tilde{F}_{\nu'}[y_R(\sigma')] : \rangle , \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde utilizamos la notación $:G: \equiv G - \langle G \rangle$. Todos los términos antes mencionados involucran al correlador $\langle \tilde{F}_\mu(x) \tilde{F}_\nu(x') \rangle$, que puede obtenerse a partir del propagador del campo de gauge. El resultado que se obtiene evaluando cada uno de ellos es:

$$\langle \tilde{F}_\mu(x) \tilde{F}_\nu(x') \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot (x-x')} \delta_{\mu\nu}^\perp(k) , \quad (6.18)$$

donde hemos introducido el objeto: $\delta_{\mu\nu}^{\perp}(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}$.

Por lo tanto, el primer orden queda

$$\Gamma_I^{(1)} = \frac{1}{2\xi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \hat{n}_{\mu}(\sigma) \hat{n}_{\nu}(\sigma) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta_{\mu\nu}^{\perp}(k), \quad (6.19)$$

que presenta una divergencia ultravioleta; de hecho, usando un “*cutoff*” euclídeo Λ , vemos que

$$\int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta_{\mu\nu}^{\perp}(k) = \frac{\Lambda^3}{9\pi^2} \delta_{\mu\nu}. \quad (6.20)$$

Finalmente,

$$\Gamma_{\mathcal{M}}^{(1)} = \frac{\Lambda^3}{9\pi^2\xi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} = \frac{\Lambda^3}{9\pi^2\xi} \text{area}(\mathcal{M}). \quad (6.21)$$

Este término, como ya se mencionó, es un término divergente, y es proporcional al área de la hoja de mundo. El mismo puede ser absorbido en una renormalización de la tensión asociada a la curva, y por lo tanto, no contribuye a generar efectos disipativos relacionados al movimiento del contorno.

Consideremos ahora el término de segundo orden $\Gamma_I^{(2)}$: aplicando el teorema de Wick y teniendo en cuenta la forma del término de interacción, vemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)} = & -\frac{1}{(2\xi)^2} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \hat{n}_{\mu}(\sigma) \hat{n}_{\nu}(\sigma) \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma' \sqrt{g(\sigma')} \hat{n}_{\mu'}(\sigma') \hat{n}_{\nu'}(\sigma') \\ & \times \langle \tilde{F}_{\mu}[y(\sigma)] \tilde{F}_{\mu'}[y(\sigma')] \rangle \langle \tilde{F}_{\nu}[y(\sigma)] \tilde{F}_{\nu'}[y(\sigma')] \rangle, \end{aligned} \quad (6.22)$$

que, recordando (6.18), puede reescribirse como sigue:

$$\Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)} = \frac{1}{2\xi^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\mu\nu}(-k) \tilde{\Pi}_{\mu\nu;\mu'\nu'}(k) f_{\mu'\nu'}(k) \quad (6.23)$$

donde

$$f_{\mu\nu}(k) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \hat{n}_{\mu}(\sigma) \hat{n}_{\nu}(\sigma) e^{-ik \cdot y(\sigma)}, \quad (6.24)$$

y

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu;\mu'\nu'}(k) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \delta_{\mu\mu'}^{\perp}(p) \delta_{\nu\nu'}^{\perp}(k-p). \quad (6.25)$$

Realizando un análisis completamente análogo para $\Gamma_{LR}^{(2)}$ obtenemos que:

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{\xi_L \xi_R} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{\mu\nu}^L(-k) \tilde{\Pi}_{\mu\nu;\mu'\nu'}(k) f_{\mu'\nu'}^R(k) \quad (6.26)$$

donde $f_{\mu\nu}^L$ y $f_{\mu\nu}^R$ se definen como en (6.24), para sus correspondientes espejos, y utilizando el mismo núcleo $\tilde{\Pi}_{\mu\nu;\mu'\nu'}$ que en $\Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)}$. Consideremos por lo tanto el cálculo de este núcleo, que permite determinar todos los términos de segundo orden. Tras algunos

pasos algebraicos, podemos ver que la estructura del objeto es:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) = A \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} + B_{\mu\nu,\mu'\nu'}(k), \quad (6.27)$$

donde

$$A \equiv -\frac{1}{6} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (6.28)$$

y

$$B_{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) \equiv -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu p_{\mu'} (k-p)_\nu (k-p)_{\nu'}}{p^2 (k-p)^2}. \quad (6.29)$$

El término proporcional a A en la expresión anterior puede ser absorbido en una renormalización de la tensión, tal como en el caso del cálculo a primer orden, utilizando para ello regularización dimensional. Nuevamente, como estamos interesados en los efectos disipativos, a los cuales este término no contribuye, vamos a omitirlo de ahora en más. Podemos reescribir el término anterior usando regularización dimensional e introduciendo una representación con parámetros de Feynman, obteniendo así una versión en D dimensiones de ese término:

$$B_{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_{\mu'} (p+k)_\nu (p+k)_{\nu'}}{[(1-\alpha)p^2 + \alpha(p+k)^2]^2}. \quad (6.30)$$

Evaluando lo anterior para $D = 3$, obtenemos:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu,\mu'\nu'}(k) = -\frac{1}{2048} \left(\frac{2}{5} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} |k|^3 + 3 k_\mu k_{\mu'} k_\nu k_{\nu'} \frac{1}{|k|} \right). \quad (6.31)$$

Recordemos que este resultado nos permitirá determinar todos los términos de segundo orden para uno y dos espejos. Entonces, realizando la rotación de Wick a tiempo real, y tomando luego la parte imaginaria, vemos que:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)} \right] &= \frac{1}{4096 \xi^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_{\mu\nu}(-k) f_{\mu'\nu'}(k) \\ &\times \left[\frac{2}{5} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \text{Im}(|k|^3) + 3 k^\mu k^{\mu'} k^\nu k^{\nu'} \text{Im}(|k|^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (6.32)$$

mientras que para $\text{Im} \left[\Gamma_{LR}^{(2)} \right]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\Gamma_{LR}^{(2)} \right] &= \frac{1}{2048 \xi_L \xi_R} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_{\mu\nu}^L(-k) f_{\mu'\nu'}^R(k) \\ &\times \left[\frac{2}{5} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \text{Im}(|k|^3) + 3 k^\mu k^{\mu'} k^\nu k^{\nu'} \text{Im}(|k|^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Notemos que las partes imaginarias relevantes en el cálculo son:

$$\text{Im}(|k|^3) = \theta(|k_0| - |\mathbf{k}|) (k_0^2 - |\mathbf{k}|^2)^{3/2}, \quad (6.34)$$

y

$$\text{Im}(|k|^{-1}) = \theta(|k_0| - |\mathbf{k}|) (k_0^2 - |\mathbf{k}|^2)^{-1/2}, \quad (6.35)$$

donde θ es la función escalón de Heaviside y $\mathbf{k} \equiv (k_1, k_2)$. Es importante remarcar que las expresiones (6.32) y (6.33) pueden considerarse como resultados generales, en los cuales el movimiento está codificado en la función $f_{\mu\nu}$ y el efecto cuántico está presente en el núcleo dependiente de k .

6.3. Pequeños apartamentos del equilibrio

6.3.1. Un solo espejo

Consideremos como primer ejemplo concreto, pequeños apartamentos dependientes del tiempo con respecto a una línea recta estática en el espacio, o en otras palabras, pequeñas deformaciones de una hoja de mundo plana. Asumimos que la misma coincide con el plano $y^2 = 0$:

$$y^0 = x^0, \quad y^1 = x^1, \quad y^2 = q(x_{\parallel}) \quad (6.36)$$

donde $x_{\parallel} = (x^0, x^1)$, y $q(x_{\parallel})$ representa los pequeños apartamentos de la configuración de equilibrio dada por la línea estática recta. Entonces, expandiendo $f_{\mu\nu}(k)$ en potencias de $q(x_{\parallel}) = 0$, obtenemos:

$$f_{\mu\nu}(k) = f_{\mu\nu}^{(0)}(k) + f_{\mu\nu}^{(1)}(k) + \dots, \quad (6.37)$$

donde

$$f_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 \delta(k^0) \delta(k^1), \quad (6.38)$$

y

$$f_{\mu\nu}^{(1)}(k) = -i (\delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 k^2 + \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^{\alpha} k_{\alpha} + \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^2 k^{\alpha}) \tilde{q}(k_{\parallel}), \quad (6.39)$$

donde hemos introducido la transformada de Fourier del apartamento:

$$\tilde{q}(k_{\parallel}) = \int d^2 x_{\parallel} q(x_{\parallel}) e^{-i k_{\parallel} \cdot x_{\parallel}}. \quad (6.40)$$

Puede verificarse que a segundo orden en el apartamento, la única contribución no nula a la parte imaginaria proviene de utilizar dos veces el término de primer orden para $f_{\mu\nu}$ en la expresión general. Encontramos entonces que la probabilidad de creación

de pares $\mathcal{P} = 2 \operatorname{Im}[\Gamma_{\mathcal{M}}^{(2)}]$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{1}{2^{11} \xi^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta(|k_0| - |\mathbf{k}|) \left[\frac{2}{5} ((k^2)^2 + 2k_{\parallel}^2) ((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2)^{3/2} \right. \\ & \left. + 3 (k^2)^2 ((k^2)^2 + 2k_{\parallel}^2)^2 ((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2)^{-1/2} \right] |\tilde{q}(k_{\parallel})|^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Integrando en k^2 , podemos obtener una expresión más compacta de lo anterior, que depende únicamente de los momentos paralelos al plano espacio-temporal:

$$\mathcal{P} = \frac{941}{2^{16} 5 \xi^2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \theta(|k^0| - |k^1|) |k_{\parallel}|^6 |\tilde{q}(k_{\parallel})|^2. \quad (6.42)$$

Es interesante mencionar que una fórmula análoga surge al tratar con espacios curvos (ver [90], ecuación 4). Ahora, para obtener una expresión todavía más concreta, vamos a considerar el caso en el cual la deformación del contorno lineal corresponde a una onda estacionaria (esto podría ocurrir por ejemplo en una placa rectangular cuyo borde esté vibrando). Tomamos entonces $q(x_{\parallel})$ de la siguiente manera:

$$q(x_{\parallel}) = \epsilon \cos(\Omega x^0) \cos(p x^1), \quad (6.43)$$

donde ϵ , Ω y p son constantes positivas. Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{q}(k_{\parallel}) = & 4\pi^2 \epsilon [\delta(k^0 - \Omega) \delta(k^1 - p) + \delta(k^0 - \Omega) \delta(k^1 + p) \\ & + \delta(k^0 + \Omega) \delta(k^1 - p) + \delta(k^0 + \Omega) \delta(k^1 + p)]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 6.42 e integrando sobre k_{\parallel} , vemos que las periodicidades presentes en el tiempo y el espacio implican que el resultado es proporcional al tiempo total T y a la longitud L del espejo, de forma tal que la probabilidad por unidad de longitud y por unidad de tiempo resulta:

$$\frac{\mathcal{P}}{LT} = \frac{941 \epsilon^2}{2^{16} 5 \xi^2} \theta(\Omega - p) (\Omega^2 - p^2)^3. \quad (6.45)$$

Este resultado muestra un umbral para la frecuencia de la onda estacionaria, relacionado a su número de onda. Teniendo en cuenta que la máxima velocidad v de cada punto en el espejo está dada por $v \sim \Omega \epsilon$, la presencia de este umbral implica que v , debe ser mayor que el cociente ϵ/λ (en unidades donde la velocidad de la luz es $c = 1$), donde λ es la longitud de onda. Por lo tanto, para superar el umbral con velocidades no relativistas, la amplitud de la onda debe ser menor que su longitud de onda, es decir, $\epsilon p < v < 1$.

6.3.2. Dos espejos

Para tratar el ejemplo de dos espejos vamos a considerar la contribución $\Gamma_{LR}^{(2)}$. Asumimos la siguiente parametrización para el espejo L :

$$y_L^0 = x^0, \quad y_L^1 = x^1, \quad y_L^2 = q_L(x_{||}) \quad (6.46)$$

mientras que para el espejo R incluimos una distancia promedio a :

$$y_R^0 = x^0, \quad y_R^1 = x^1, \quad y_R^2 = a + q_R(x_{||}). \quad (6.47)$$

A segundo orden, es decir a primer orden en cada uno de los apartamientos, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{1}{2^{11} \xi_L \xi_R} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta(|k^0| - |\mathbf{k}|) \cos(k^2 a) \tilde{q}_L(-k_{||}) \tilde{q}_R(k_{||}) \\ & \times \left[\frac{2}{5} ((k^2)^2 + 2k_{||}^2) ((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2)^{3/2} \right. \\ & \left. + 3(k^2)^2 ((k^2)^2 + 2k_{||}^2)^2 ((k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2)^{-1/2} \right]. \quad (6.48) \end{aligned}$$

de esta ecuación observamos que la distancia promedio a aparece dentro del integrando.

Vemos también que, debido a la presencia de las transformadas de Fourier de ambos apartamientos, necesitamos que las mismas tengan un solapamiento no nulo para obtener un resultado distinto de cero. En el caso especial de un movimiento que involucre un único modo, este término solo es distinto de cero si su frecuencia y número de onda coinciden. Para el caso especial de dos ondas estacionarias en contrafase:

$$\begin{aligned} q_L(x_{||}) &= 4\epsilon_L \cos(\Omega x^0) \cos(px^1) \\ q_R(x_{||}) &= -4\epsilon_R \cos(\Omega x^0) \cos(px^1). \quad (6.49) \end{aligned}$$

la probabilidad puede escribirse como sigue:

$$\frac{\mathcal{P}}{LT} = \frac{\epsilon_L \epsilon_R}{2^{10} \pi \xi_L \xi_R} \theta(\Omega - p) (\Omega^2 - p^2)^3 \varphi(\sqrt{\Omega^2 - p^2} a), \quad (6.50)$$

con

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 ds \cos(sx) \left[\frac{2}{5} (s^2 + 2)(1 - s^2)^{3/2} + 3s^2 (s^2 + 2)^2 (1 - s^2)^{-1/2} \right]. \quad (6.51)$$

Integrando en s , finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{3\pi}{5x^5} \left[x(340 - 111x^2 + 45x^4)J_0(x) \right. \\ \left. + (-680 + 307x^2 - 75x^4)J_1(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

6.4. Ondas estacionarias de amplitud arbitraria

Notemos ahora una característica cualitativa que surge al tratar con ondas estacionarias, o en forma más general, cuando consideramos una función periódica tanto en el tiempo como en el espacio $q(x_{||})$, de períodos $\tau = \frac{2\pi}{\Omega}$ y $\lambda = \frac{2\pi}{p}$ respectivamente. Esto implica que $C_{\mu\nu}(k^2; x_{||})$, definida a continuación, que es un objeto que aparece en el integrando en la definición de $f_{\mu\nu}$, también es periódico:

$$C^{\mu\nu}(k^2; x^0, x^1) \equiv \sqrt{g(x_{||})} \hat{n}^\mu(x_{||}) \hat{n}^\nu(x_{||}) e^{-ik^2 q(x_{||})} = C^{\mu\nu}(k^2; x^0 + \tau, x^1 + \lambda), \quad (6.53)$$

y tiene la misma periodicidad que q . Entonces $C^{\mu\nu}(k^2; x_{||})$ puede representarse con una doble serie de Fourier:

$$C^{\mu\nu}(k^2; x_{||}) = \sum_{l_{||}} \tilde{C}^{\mu\nu}(k^2; l_{||}) e^{-il_{||} \cdot x_{||}}, \quad (6.54)$$

donde $l_{||} = 2\pi(\frac{n^0}{\tau}, \frac{n^1}{\lambda})$, y donde n^0 y n^1 son números enteros. Así,

$$\tilde{C}^{\mu\nu}(k^2; l_{||}) = \frac{1}{\tau\lambda} \int_0^\tau dx^0 \int_0^\lambda dx^1 C^{\mu\nu}(k^2; x_{||}) e^{il_{||} \cdot x_{||}}. \quad (6.55)$$

Por lo tanto,

$$f^{\mu\nu}(k) = (2\pi)^2 \sum_{n^0, n^1} \tilde{C}^{\mu\nu}(k^2; l_{||}) \delta(k_{||} - l_{||}). \quad (6.56)$$

Notemos que aún sin conocer la forma exacta de las funciones $\tilde{C}^{\mu\nu}$, vemos que la parte imaginaria de la acción efectiva será proporcional al tiempo total y a la longitud del espejo. Además, otra característica cualitativa interesante en este caso tiene que ver con el umbral para la existencia de la parte imaginaria. De hecho, la existencia de una serie en $f^{\mu\nu}$ implica que, para que exista una parte imaginaria necesitamos tener:

$$|l^0| > |l^1|, \quad (6.57)$$

o:

$$\left| \frac{n^0}{n^1} \right| > \frac{\tau}{\lambda} = \frac{p}{\Omega}. \quad (6.58)$$

En otras palabras, siempre habrá alguna contribución no nula a la parte imaginaria, sin importar la relación que mantengan la frecuencia y longitud de la onda. Otro análisis que puede hacerse para estudiar una configuración de ondas estacionarias resulta de definir dos ondas diferentes con direcciones opuestas, cada una con la siguiente forma:

$$q(x_{\parallel}) = A \cos(p_{\parallel} x_{\parallel}), \quad (6.59)$$

y $p_{\parallel} = (p_0, p_1)$. En este caso, si asumimos que la derivada de q es pequeña, se puede demostrar que la única contribución proviene de f_{22} . Para evaluar esta función, utilizamos el desarrollo de Jacobi-Anger y obtuvimos que la parte imaginaria de la acción efectiva está dada por

$$\text{Im} [\Gamma_I^{(2)}] = \frac{1}{2^{12} \xi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^2}{2\pi} \Theta[n^2 ((p^0)^2 - (p^1)^2) - (k^2)^2] \quad (6.60)$$

$$\times \left[\frac{2}{5} J_n^2(k^2 A) [n^2 ((p^0)^2 - (p^1)^2) - (k^2)^2]^{3/2} \quad (6.61)$$

$$+ 3 \frac{(k^2)^4}{\sqrt{n^2 ((p^0)^2 - (p^1)^2) - (k^2)^2}} \right]. \quad (6.62)$$

En el caso de dos espejos aparecerá un fenómeno similar.

Parte III

Conclusiones y bibliografía

Capítulo 7

Conclusiones

“Pasa el tiempo y ahora creo que el vacío es un lugar normal.”

— Ella usó mi cabeza como un revólver, Soda Stereo

En primer lugar, en el capítulo 3, hemos derivado una expresión general para la energía libre de Casimir, usando un enfoque completamente basado en teoría de campos, donde el problema es analizado en términos de determinantes funcionales para un campo de gauge Abelian fluctuante. Hemos mostrado que, bajo algunas suposiciones con respecto al acoplamiento entre el campo de gauge y los espejos, el problema puede reducirse a sistemas escalares, para los cuales se pueden aplicar las expresiones ya conocidas para el determinante funcional. El resultado obtenido se ha expresado en términos de los invariantes de la versión euclídea del tensor de polarización del vacío debido a la materia cargada contenida en cada espejo. De esta forma uno puede evitar el cálculo de los coeficientes de reflexión de cada espejo, como se haría en el caso de la versión usual de la fórmula de Lifshitz. Además, el resultado para espejos de delgados permite estudiar casos donde el medio material tiene una dependencia no trivial sobre la dirección normal; como por ejemplo, el caso del TPV correspondiente a un medio estratificado. Para el caso de espejos de ancho cero con propiedades tipo grafeno, hemos demostrado que el enfoque basado en teoría cuántica de campos lleva a resultados consistentes con los presentados en [56],[57],[58].

En el capítulo 4, hemos obtenido una expresión general para la energía de Casimir correspondiente a dos espejos materiales, cuya descripción puede contener tanto términos que rompen paridad como términos que la conservan. Basados en ese resultado general, hemos mostrado que los resultados obtenidos introduciendo una condición de contorno (en lugar de una acción de borde) pueden recuperarse como resultado de usar una clase especial de términos de borde. La misma no debe involucrar constantes dimensionales en su definición. Por lo tanto, posee una estructura muy similar a la que uno obtendría para la acción efectiva debida a un campo de Dirac no masivo en $2 + 1$ dimensiones. La expresión obtenida para la energía por unidad de área en el caso

general, donde pueden existir tanto términos que rompen paridad 4.20 como términos que la conservan, muestra que solo en el caso de $\delta = 0$ la energía se vuelve la suma de dos contribuciones iguales. En otras palabras, la contribución a la energía del vacío para cada modo de polarización circular (izquierda y derecha) es la misma solo cuando las fases de los coeficientes de reflexión son iguales. En los ejemplos particulares que hemos considerado, hemos encontrado e interpretado un fenómeno interesante que se observa cuando la violación de paridad es máxima (es decir, cuando no tenemos ningún término que conserve paridad), a saber, la existencia de un comportamiento no monótono de la energía en función de la fortaleza de los términos de C-S, cuando estos se suponen iguales.

Luego, en el capítulo 5, hemos obtenido una expresión general para la acción efectiva correspondiente a un espejo imperfecto en movimiento acoplado al campo electromagnético, desarrollada a segundo orden con respecto al apartamiento del espejo de su posición de equilibrio. La fórmula resultante puede descomponerse en dos contribuciones de tipo escalar, escritas en términos de dos funciones escalares que definen el TPV. La expresión final para la acción efectiva puede escribirse en una forma muy compacta en términos de los coeficientes de reflexión TE y TM del espejo. Estos resultados pueden considerarse como una generalización al campo EM de aquellos hallados en [46]. Hemos evaluado explícitamente la acción efectiva para algunos ejemplos, utilizando para ello el correspondiente TPV en el contexto de nuestro modelo. Obtuvimos la amplitud de decaimiento del vacío usando una continuación analítica apropiada de los resultados obtenidos con un tratamiento euclídeo. Hemos demostrado que nuestros resultados reproducen correctamente las contribuciones de TE y TM para conductores perfectos. Para el caso particular del grafeno, hemos mostrado que la parte imaginaria de la acción efectiva es igual a la de un conductor perfecto multiplicada por una función que depende de la constante de acoplamiento y de la velocidad de Fermi. Calculamos explícitamente esta función y hallamos que presenta un comportamiento no monótono con respecto a su dependencia con la constante de acoplamiento. Incluso, para algunos valores de los parámetros, los efectos disipativos pueden ser mayores que los de un conductor perfecto.

Finalmente, en el capítulo 6 hemos evaluado la probabilidad de decaimiento del vacío, a través del cálculo de la parte imaginaria de la acción efectiva Γ , para espejos semitransparentes en $2 + 1$ dimensiones, acoplados a un campo de gauge abeliano. Hemos extendido los análisis previos para casos de campo escalar con movimientos rígidos de los espejos, al caso de un campo electromagnético, y a movimientos más generales de los espejos. Hemos obtenido expresiones generales para la contribución principal a la parte imaginaria de Γ , y resultados aún más explícitos para el caso de pequeñas amplitudes y ondas estacionarias. Pensamos que las ondas estacionarias son una configuración natural a considerar, dado que las mismas aparecen, por ejemplo,

cuando uno trata con un espejo tipo cuerda con los extremos fijos. Hemos mostrado que, cuando el movimiento es periódico tanto en el tiempo como en el espacio, la parte imaginaria es siempre distinta de cero, con un umbral que surge para pequeñas amplitudes correspondiente a uno de los posibles procesos que conducen a la creación de pares.

En el marco de la línea de investigación de esta Tesis, surgen entre otras, dos grandes posibles extensiones que nos resultan de interés para estudiar en el futuro, y que mencionamos a continuación. Por un lado, para el efecto Casimir estático, con espejos de espesor finito, nos proponemos incluir efectos debidos a propagación en la dirección normal al espejo. Es decir, permitir que existan no-localidades espaciales en esa dirección (siempre dentro de la región ocupada por el espejo), además de las ya incluidas para las direcciones paralelas. Por otro lado, para el efecto Casimir dinámico, proyectamos generalizar los estudios ya realizados acerca del grafeno, al caso de superficies curvadas, o más generalmente, a superficies cuya geometría dependa del tiempo, obteniendo primeramente expresiones adecuadas para el TPV correspondiente a ese caso, y analizando luego la probabilidad de creación de pares en ejemplos compatibles con el modelo.

Bibliografía

- [1] Saunders, S., Brown, H. R. The philosophy of vacuum. Oxford University Press, 1991. 1
- [2] Daywitt, W. C. The planck vacuum. *Progress in Physics*, **1**, 20, 2009. 4
- [3] Casimir, H. B. G. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, **10**, 261–263, 1948. 4
- [4] Milonni, P. W. The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics. Academic press, 2013. 5, 16, 25
- [5] Milton, K. A. The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy. World Scientific, 2001. 5, 6, 25
- [6] Bordag, M., Klimchitskaya, G. L., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M. Advances in the Casimir effect, tomo 145. OUP Oxford, 2009. 5, 25
- [7] Casimir, H. B. G., Polder, D. The influence of retardation on the London-van der Waals forces. *Physical Review*, **73** (4), 360, 1948. 5, 14
- [8] Sparnaay, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, **24** (6-10), 751–764, 1958. 6
- [9] van Blokland, P. H., Overbeek, J. T. G. Van der Waals forces between objects covered with a chromium layer. *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 1: Physical Chemistry in Condensed Phases*, **74**, 2637–2651, 1978. 6
- [10] Derjaguin, B. Molekulartheorie der äußeren Reibung. *Zeitschrift für Physik*, **88** (9), 661–675, 1934. 6
- [11] Derjaguin, B., Abrikosova, I., Lifshitz, E. Direct measurement of molecular attraction between solids separated by a narrow gap. *Quarterly Reviews, Chemical Society*, **10** (3), 295–329, 1956. 6
- [12] Derjaguin, B. V., Churaev, N. V., Muller, V. M., Kisin, V. Surface forces. Springer, 1987. 6

-
- [13] Lamoreaux, S. K. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, **78** (1), 5, 1997. 6
- [14] Mohideen, U., Roy, A. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Physical Review Letters*, **81** (21), 4549, 1998. 6
- [15] Roy, A., Lin, C.-Y., Mohideen, U. Improved precision measurement of the Casimir force. *Physical Review D*, **60** (11), 111101, 1999. 6
- [16] Harris, B., Chen, F., Mohideen, U. Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces. *Physical Review A*, **62** (5), 052109, 2000. 6
- [17] Bordag, M., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M. New developments in the Casimir effect. *Physics reports*, **353** (1-3), 1–205, 2001. 6, 25
- [18] Bressi, G., Carugno, G., Onofrio, R., Ruoso, G. Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces. *Physical review letters*, **88** (4), 041804, 2002. 6
- [19] Lambrecht, A. The Casimir effect: a force from nothing. *Physics world*, **15** (9), 29, 2002. 7
- [20] Lu, B.-S. The Casimir effect in topological matter. *Universe*, **7** (7), 237, 2021. 7
- [21] Buks, E., Roukes, M. Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micro-mechanical systems. *Physical Review B*, **63** (3), 033402, 2001. 7
- [22] Chan, H. B., Aksyuk, V. A., Kleiman, R. N., Bishop, D. J., Capasso, F. Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force. *Science*, **291** (5510), 1941–1944, 2001. 7
- [23] Klimchitskaya, G. L., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M. The Casimir force between real materials: Experiment and theory. *Reviews of Modern Physics*, **81** (4), 1827, 2009. 8
- [24] Neto, P. A. M., Lambrecht, A., Reynaud, S. Casimir energy between a plane and a sphere in electromagnetic vacuum. *Physical Review A*, **78** (1), 012115, 2008. 8
- [25] Wang, M., Tang, L., Ng, C. Y., Messina, R., Guizal, B., Crosse, J. A., *et al.* Strong geometry dependence of the Casimir force between interpenetrated rectangular gratings. *Nature communications*, **12** (1), 1–9, 2021. 8
- [26] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Derivative expansion for the Casimir effect at zero and finite temperature in $d+1$ dimensions. *Physical Review D*, **86** (4), 045021, 2012. 8

- [27] Dodonov, V. Fifty years of the dynamical Casimir effect. *Physics*, **2** (1), 67–104, 2020. 8
- [28] Moore, G. T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *Journal of Mathematical Physics*, **11** (9), 2679–2691, 1970. 8
- [29] Fulling, S. A., Davies, P. C. W. Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, **348** (1654), 393–414, 1976. 8
- [30] Barton, G., Dodonov, V. V., Man’ko, V. I. The nonstationary Casimir effect and quantum systems with moving boundaries. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **7** (3), S1, 2005. 9
- [31] Dodonov, V. V. Current status of the dynamical Casimir effect. *Physica Scripta*, **82** (3), 038105, 2010. 9
- [32] Dalvit, D. A. R., Neto, P. A. M., Mazzitelli, F. D. Fluctuations, dissipation and the dynamical Casimir effect. En: Casimir Physics, págs. 419–457. Springer, 2011. 9
- [33] Nation, P. D., Johansson, J. R., Blencowe, M. P., Nori, F. Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits. *Reviews of Modern Physics*, **84** (1), 1, 2012. 9
- [34] Schützhold, R. Refractive index perturbations–Unruh effect, Hawking radiation or dynamical Casimir effect? *arXiv preprint arXiv:1110.6064*, 2011. 9
- [35] Wilson, C. M., Johansson, G., Pourkabirian, A., Simoen, M., Johansson, J. R., Duty, T., *et al.* Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit. *nature*, **479** (7373), 376–379, 2011. 9
- [36] Lähteenmäki, P., Paraoanu, G., Hassel, J., Hakonen, P. J. Dynamical Casimir effect in a Josephson metamaterial. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110** (11), 4234–4238, 2013. 9
- [37] Vezzoli, S., Mussot, A., Westerberg, N., Kudlinski, A., Saleh, H. D., Prain, A., *et al.* Optical analogue of the dynamical Casimir effect in a dispersion-oscillating fibre. *Communications Physics*, **2** (1), 1–6, 2019. 9
- [38] Klimchitskaya, G. L., Mostepanenko, V. M. Casimir and Casimir-Polder forces in graphene systems: Quantum field theoretical description and thermodynamics. *Universe*, **6** (9), 150, 2020. 9

- [39] Rodriguez-Lopez, P., Kort-Kamp, W. J. M., Dalvit, D. A. R., Woods, L. M. Casimir force phase transitions in the graphene family. *Nature communications*, **8** (1), 1–9, 2017. 9
- [40] Liu, M., Zhang, Y., Klimchitskaya, G. L., Mostepanenko, V. M., Mohideen, U. Demonstration of an Unusual Thermal Effect in the Casimir Force from Graphene. *Physical Review Letters*, **126** (20), 206802, 2021. 9
- [41] Liu, M., Zhang, Y., Klimchitskaya, G., Mostepanenko, V., Mohideen, U. Experimental and theoretical investigation of the thermal effect in the Casimir interaction from graphene. *Physical Review B*, **104** (8), 085436, 2021. 9
- [42] Zinn-Justin, J. Quantum field theory and critical phenomena, tomo 171. Oxford university press, 2021. 12
- [43] Lifshitz, E. M. The theory of molecular attractive forces between solids. *Sov. Phys. JETP*, **2**, 73–83, 1956. 14, 15
- [44] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Casimir effect with dynamical matter on thin mirrors. *Phys. Lett. B*, **669**, 371–375, 2008. 16, 25, 34
- [45] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Casimir energies with finite-width mirrors. *Physical Review D*, **77** (8), 085018, 2008. 16, 25
- [46] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Quantum dissipative effects in moving mirrors: A functional approach. *Phys. Rev. D*, **76** (8), 085007, 2007. 19, 49, 57, 78
- [47] Golestanian, R., Kardar, M. Path-integral approach to the dynamic Casimir effect with fluctuating boundaries. *Phys. Rev. A*, **58** (3), 1713, 1998. 19, 49
- [48] Barton, G., Calogeracos, A. On the quantum electrodynamics of a dispersive mirror.: I. Mass shifts, radiation, and radiative reaction. *Annals of Physics*, **238** (2), 227–267, 1995. 19, 63
- [49] Lamoreaux, S. K. The Casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in Physics*, **68** (1), 201, 2004. 25
- [50] Graham, N., Jaffe, R. L., Khemani, V., Quandt, M., Schroeder, O., Weigel, H. The dirichlet casimir problem. *Nuclear Physics B*, **677** (1-2), 379–404, 2004. 25
- [51] Fosco, C. D., Losada, E. Casimir effect with nonlocal boundary interactions. *Physics Letters B*, **675** (2), 252–256, 2009. 26

- [52] Ccapa Ttira, C., Fosco, C. D., Mazzitelli, F. D. Lifshitz formula for the Casimir force and the Gelfand-Yaglom theorem. *J. Phys. A*, **44**, 465403, 2011. 26, 27, 33, 42
- [53] Gelfand, I. M., Yaglom, A. M. Integration in functional spaces and it applications in quantum physics. *J. Math. Phys.*, **1**, 48, 1960. 27
- [54] Dunne, G. V. Functional determinants in quantum field theory. *J. Phys. A*, **41**, 304006 1–15, 2008. 27
- [55] Fosco, C. D., Oxman, L. Vacuum fluctuations in the presence of nonlinear boundary conditions. *Physical Review D*, **92** (12), 125021, 2015. 28
- [56] Bordag, M., Geyer, B., Klimchitskaya, G. L., Mostepanenko, V. M. Lifshitz-type formulas for graphene and single-wall carbon nanotubes: van der Waals and Casimir interactions. *Phys. Rev. B*, **74**, 205431 1–9, 2006. 34, 77
- [57] Bordag, M., Fialkovsky, I. V., Gitman, D. M., Vassilevich, D. V. Casimir interaction between a perfect conductor and graphene described by the Dirac model. *Phys. Rev. B*, **80**, 245406 1–5, 2009. 34, 77
- [58] Fialkovsky, I. V., Marachevsky, V. N., , Vassilevich, D. V. Finite temperature Casimir effect for graphene. *Phys. Rev. B*, **84**, 035446 1–13, 2011. 34, 77
- [59] Bordag, M., Vassilevich, D. V. Casimir force between Chern-Simons surfaces. *Phys. Lett. A*, **268**, 75–80, 2000. 37, 38, 42, 43
- [60] Canfora, F., Rosa, L., Zanelli, J. Theta term in a bounded region. *Phys. Rev. D*, **84**, 105008, 2011. 38
- [61] Rodriguez-Lopez, P., Grushin, A. G. Repulsive Casimir Effect with Chern insulators. *Phys. Rev. Lett.*, **112** (5), 056804, 2014. 38
- [62] Pavlovsky, O. V., Ulybyshev, M. V. Casimir energy calculations for Chern-Simons surfaces and dielectric plates within the formalism of lattice quantum field theory. *Phys. Part. Nucl. Lett.*, **7**, 345–348, 2010. 38
- [63] Pavlovsky, O. V., Ulybyshev, M. V. Casimir energy in noncompact lattice electrodynamics. *Theor. Math. Phys.*, **164**, 1051–1063, 2010. 38
- [64] Fialkovsky, I. V., Vassilevich, D. V. Parity-odd effects and polarization rotation in graphene. *J. Phys. A*, **42** (44), 442001, 2009. 38
- [65] Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S. Three-Dimensional Massive Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 975–978, 1982. 38

- [66] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Derivative expansion of the electromagnetic Casimir energy for two thin mirrors. *Phys. Rev. D*, **85**, 125037, 2012. 39
- [67] Barci, D. G., Fosco, C. D., Oxman, L. E. On bosonization in 3 dimensions. *Phys. Lett. B*, **375** (1-4), 267–272, 1996. 43
- [68] Maghrebi, M. F., Golestanian, R., Kardar, M. Scattering approach to the dynamical Casimir effect. *Phys. Rev. D*, **87** (2), 025016, 2013. 49, 63
- [69] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Quantum dissipative effects in moving imperfect mirrors: Sidewise and normal motions. *Phys. Rev. D*, **84** (2), 025011, 2011. 49, 63
- [70] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Inertial forces and dissipation on accelerated boundaries. *Phys. Rev. D*, **82** (12), 125039, 2010. 51, 56
- [71] Fialkovsky, I. V., Marachevsky, V. N., Vassilevich, D. V. Finite-temperature Casimir effect for graphene. *Phys. Rev. B*, **84** (3), 035446, 2011. 54
- [72] Inc., W. R. Mathematica, Version 10.4, 2016. Champaign, IL. 56
- [73] Neto, P. A. M. Vacuum radiation pressure on moving mirrors. *J. Phys. A*, **27** (6), 2167, 1994. 56, 57, 59
- [74] Bordag, M. Reconsidering the quantization of electrodynamics with boundary conditions and some measurable consequences. *Phys. Rev. D*, **70** (8), 085010, 2004. 57
- [75] Milton, K. A., Wagner, J. Multiple scattering methods in Casimir calculations. *J. Phys. A*, **41** (15), 155402, 2008. 57
- [76] Fradkin, E. H. Field theories of condensed matter physics. Cambridge University Press, 2013. 63
- [77] Kleinert, H. Gauge fields in Condensed Matter, Vol. I: Superflow and Vortex Lines, Disorder Fields. *Phase Transitions*, **2**, 1989. 63
- [78] Kleinert, H. Gauge Fields in Condensed Matter, Vol. II–Stresses and Defects, 1989. 63
- [79] Goldman, H., Sohal, R., Fradkin, E. Landau-Ginzburg theories of non-Abelian quantum Hall states from non-Abelian bosonization. *Physical Review B*, **100** (11), 115111, 2019. 63

-
- [80] Lambrecht, A., Jaekel, M. T., Reynaud, S. Motion induced radiation from a vibrating cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (4), 615, 1996. 63
- [81] Barton, G. The quantum radiation from mirrors moving sideways. *Annals of Physics*, **245** (2), 361–388, 1996. 63
- [82] Frolov, V., Singh, D. Quantum effects in the presence of expanding semi-transparent spherical mirrors. *Classical and Quantum Gravity*, **16** (11), 3693, 1999. 63
- [83] Obadia, N., Parentani, R. Notes on moving mirrors. *Phys. Rev. D*, **64** (4), 044019, 2001. 63
- [84] Nicolaevici, N. Quantum radiation from a partially reflecting moving mirror. *Classical and Quantum Gravity*, **18** (4), 619, 2001. 63
- [85] Haro, J., Elizalde, E. Dynamical Casimir effect and the black body spectrum. *J. Phys. A*, **41** (3), 032002, 2008. 63
- [86] Nicolaevici, N. On the dynamics of a semitransparent moving mirror. *Classical and Quantum Gravity*, **28** (2), 025014, 2011. 63
- [87] Wang, Q., Unruh, W. G. Mirror moving in quantum vacuum of a massive scalar field. *Phys. Rev. D*, **92** (6), 063520, 2015. 63
- [88] Silva, J. D. L., Braga, A. N., Alves, D. T. Dynamical Casimir effect with δ - δ' mirrors. *Phys. Rev. D*, **94** (10), 105009, 2016. 63
- [89] Fosco, C. D., Giraldo, A., Mazzitelli, F. D. Dynamical Casimir effect for semi-transparent mirrors. *Phys. Rev. D*, **96** (4), 045004, 2017. 63
- [90] Frieman, J. A. Particle creation in inhomogeneous spacetimes. *Physical Review D*, **39** (2), 389, 1989. 71

Publicaciones asociadas

1. Fosco, C. D., Remaggi, M. L. (2013). Electromagnetic Lifshitz Formula for Small-Width Mirrors from Functional Determinants. Scientific Research Publishing. Applied Mathematics, 4(8), 1173.
2. Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., Remaggi, M. L. (2013). Quantum dissipative effects in graphenelike mirrors. Physical Review D, 88(10), 105004.
3. Fosco, C. D., Remaggi, M. L. (2017). On the static Casimir effect with parity-breaking mirrors. The European Physical Journal C, 77(3), 1-7.
4. Fosco, C. D., Remaggi, M. L., Rodríguez, M. C. (2019). Vacuum fluctuation effects due to an Abelian gauge field in 2+ 1 dimensions, in the presence of moving mirrors. Physics Letters B, 797, 134838.

Agradecimientos

Al Instituto Balseiro, por brindarme una formación tan profunda, y particularmente al gran equipo de docencia e investigación del Grupo de Partículas y Campos, por estimular mi interés y pasión por esa área de la Física y por su excepcional disponibilidad a la hora de atender mis consultas.

Al CONICET, por darme apoyo económico mediante becas, que me permitieron dedicarme por completo a mi doctorado en los primeros años del mismo y asistir a conferencias y workshops.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN) de la UNCuyo, mi segundo hogar, por ofrecerme un lugar de trabajo en los últimos años de mi doctorado en los que simultáneamente me he desempeñado como docente exclusiva de la institución. Gracias por ofrecerme en numerosas ocasiones apoyo económico y autorización para licencias por viajes de investigación y estudios, y particularmente para la escritura de esta Tesis, y por brindarme formación a través del dictado de materias de posgrado.

A mi director, César Fosco, por su increíble generosidad, que me ha permitido iniciar exitosamente este camino de la investigación científica, por su calidad humana, su confianza, su temple y su calma, y por su contagiosa pasión por la Física Teórica, que logró deslumbrarme desde aquel momento en que cursé con él Mecánica Cuántica. A mi codirector, Enrique Miranda, que ha seguido mi carrera desde mis primeros pasos en la querida Universidad de San Luis donde comencé mis estudios, y que en todo este camino siempre ha estado presente, pendiente de estimular y motivar desde lo personal mi progreso en el camino académico.

A Diego Mazzitelli, Fernando Lombardo y María Cristina Fernández, por permitirme el placer de trabajar en conjunto en las publicaciones que forman parte de la investigación abordada en esta Tesis. Gracias especialmente a Diego, por tomarse el invaluable trabajo de revisar y dar sugerencias para esta Tesis.

A los equipos docentes de las cátedras en las que me desempeñé en la FCEN, es-

pecialmente a sus docentes responsables: Iván Gentile de Austria, Eduardo Bringa, Mariano Aguilar y Romina Calvo, por colaborar desde su apoyo concreto en mis pedidos de licencia reorganizando las cátedras para el reemplazo de mis tareas, hasta el apoyo emocional como colegas y amigos, y la invaluable transmisión de sus experiencias. Especialmente quiero expresar mi gratitud con todas las personas que me han reemplazado en aquellas oportunidades que tomé licencia para avanzar con mi doctorado: Franco Giménez, Juan Quiroga, Martina Galarza, Nicolás Bizzotto y Sergio Fonrouge, y con todo mi equipo de trabajo de la materia que coordinó: Marysol Olivera, Julieta Anastasi, Mariana Noguerol, Franco Daniel Marquez y Walter Guiñazú. La calidad y responsabilidad en el desempeño de sus tareas me permitió progresar con total confianza y tranquilidad, sabiendo que dejaba en sus manos la labor por la cual compartimos pasión. Gracias a cada colega de la FCEN que me aconsejó y compartió conmigo su experiencia en el camino académico. Particularmente gracias Alejandro Lobos, Cecilia Fernández Gauna, Belén Planes y Andrés Aceña por brindarme confianza incentivándome siempre a seguir perseverante.

A todas las personas con las que he compartido amistad y me han acompañado en algún tramo de este camino, a quienes me brindaron contención y compañía, a quienes me regalaron su sentido del humor, y a quienes incluso me dieron un lugar en su casa. Gracias especialmente a Paola Córdoba, Laura Curuchet, Carolina Daza, María Da Fonseca, Florencia Grinblat, Guadalupe Cascallares, Juan Vicente Guerrero Terán, Leonardo Salazar, Diego Pérez, Gustavo Portillo, Clara Zonana, Ana Gargantini, María Belén Tomaselli, Natalia Zalecki, Victoria Meonis y Natalia Orduña.

A mis estudiantes, que me motivan día a día a ser mejor y alcanzar mis metas. Particularmente a Cinzia Mancuso, quien con su desbordante entusiasmo por la Física me recuerda a diario las razones por las cuales inicié este camino.

A mi hijo, mi persona preferida, que todos estos años ha sabido compartir a su madre con este doctorado, comprendiendo siempre mi fuerte dedicación a la Física, e incluso expresando su interés por lo que hago.

A mi familia, por brindarme apoyo desde lo emocional y desde lo concreto, ofreciéndome tantas veces su tiempo, esfuerzo y cariño, y también el soporte económico para que yo pudiera perseguir mis sueños.

A mi madre, una mujer indispensable en mi desarrollo profesional, por reemplazarme en incontables oportunidades en mis tareas de cuidado, trabajo que no tiene remuneración alguna, que no tiene días libres ni vacaciones, que considero es de los tra-

bajos más difíciles porque sus efectos se ven reflejados sobre la vida de otras personas, y que siempre hace con amor y dedicación.

A mi madre, una vez más, porque de pequeña me enseñó la disciplina y las técnicas de estudio.

A mi madre, nuevamente, por darme la vida más de una vez.

A mi padre, por inculcarme desde pequeña la curiosidad sobre el mundo que nos rodea.

A mi hermano Jose y a Ani, por su empatía y afecto, por siempre darme ánimo y confianza en mí misma.

A quienes haciendo su trabajo con tanta responsabilidad y compromiso, me ayudaron a recuperar la esperanza de poder perseguir mis proyectos y disfrutar plenamente la vida: Dr. Jorge Nazar y Lic. Jerónimo Torres Mateos.

A todas las hermosas personas que le dieron la bienvenida a mi familia en el colectivo “Acá estamos”, y en esta última etapa en que este gran esfuerzo individual se superpuso con un momento tan importante y transformador para mi familia, se han convertido en un pilar fundamental. Gracias por sostenerme con su inmensa empatía, su cariño sincero, su presencia constante y su generosidad.

Finalmente quiero aprovechar esta oportunidad única, para expresarle mi agradecimiento a la profesora Eugenia Richiardi, que fue quien me hizo enamorarme de la Física en un primer momento, y destacar en este agradecimiento el rol fundamental que ejercen los docentes de colegio secundario, ya que ese primer contacto con una asignatura, por corto que parezca, puede tener efectos transformadores en la vida de sus estudiantes cuando ese trabajo se hace con responsabilidad, conocimiento y vocación.

