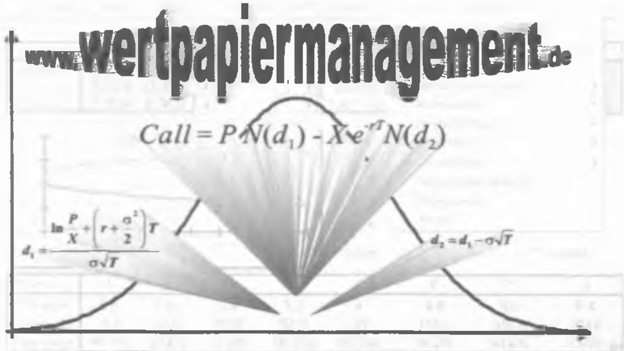
LEHRSTUHL FÜR
ABWL, FINANZIERUNG UND BANKBETRIEBSLEHRE
DER KATHOLISCHEN UNIVERSITÄT
EICHSTÄTT-INGOLSTADT

KATHOLISCHE UNIVERSITÄT EICHSTÄTT INGOLSTADT

Marco Wilkens

Wertpapiermanagement

5. Auflage



L F B – S K R I P T E N

LEHRSTUHL FÜR
ABWL, FINANZIERUNG UND BANKBETRIEBSLEHRE
DER KATHOLISCHEN UNIVERSITÄT
EICHSTÄTT-INGOLSTADT

KATHOLISCHE UNIVERSITÄT EICHSTÄTT INGOLSTADT

Marco Wilkens

Wertpapiermanagement

5. Auflage

L F B – S K R I P T E N

HERAUSGEBER: PROF. DR. MARCO WILKENS

Der Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Finanzierung und Bankbetriebslehre ist Teil der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät Ingolstadt (WFI) der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt. Detaillierte und aktuelle Informationen über den Lehrstuhl erhalten Sie via Internet im World-Wide-Web (www) unter den Adressen

www.ku-eichstaett.de/docs/WWF/FIB/bank.htm

oder einfacher

www.wertpapiermanagement.de

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Marco Wilkens
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt
Lehrstuhl für ABWL, Finanzierung und Bankbetriebslehre
Auf der Schanz 49
D-85049 Ingolstadt
Telefon: 0841 / 9 37-1883
Telefax: 0841 / 9 37-2881
eMail: Marco.Wilkens@KU-Eichstaett.de

Druck: Druckerei Liddy Halm, Backhausstraße 9 b, 37081 Göttingen,
Telefon: 0551 / 9 18 15, Telefax: 0551/9 79 76

Ingolstadt 2002

"Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher."

(angeblich) Albert Einstein

Vorwort

Gegenstand dieses Skriptes sowie der damit verbundenen Vorlesung "Wertpapiermanagement" sind verschiedene Formen von Finanztiteln. Dazu gehören zum einen klassische Wertpapiere wie Kupon-Anleihen und Aktien und zum anderen die sogenannten Derivate wie Futures und Optionen. Die Beschäftigung mit diesen "Finanztiteln im engeren Sinne" erfolgt letztlich aber immer auch stellvertretend für die verschiedenen Formen der "Finanztitel im weiteren Sinne". So soll das finanzwirtschaftlich-analytische Grundverständnis vermittelt werden, welches beispielsweise auch zur Bewertung einer Vielzahl von Bankgeschäften und letztlich zur Bewertung sämtlicher finanzieller Forderungen und Verbindlichkeiten notwendig ist.

Den Ansatzpunkt der Darstellungen bildet stets die Frage, wie der (theoretische) Wert der verschiedenartigen Finanztitel zu berechnen ist. Diese Kenntnisse sind zum einen notwendig, um Fehlbewertungen "am Markt" festzustellen und davon gegebenenfalls zu profitieren. Zum anderen - und dieses wird der weit häufigere Fall sein - sind die Kenntnisse dieser Bewertungsprinzipien auch die Basis dafür, "richtige" finanzielle Angebote abzugeben bzw. finanzielle Angebote z.B. von Banken und Versicherungen zu prüfen.

Nach den Darstellungen der Bewertungsprinzipien werden die Möglichkeiten und Grenzen behandelt, die sich aus diesen Finanztiteln für das Erfolgs- und Risikomanagement ergeben. Dabei werden insbesondere Fragen behandelt, wie Zins- und Währungsrisiken gesteuert werden können und ob bzw. wann es möglich ist, "Überrenditen" zu erzielen.

Aus den o.a. Ausführungen ergibt sich zugleich der Kreis der Adressaten, den dieses Skript ansprechen soll. Grundsätzlich ist dies jeder, der über Kapitalanlage- und Kapitalbeschaffungsmöglichkeiten zu entscheiden hat, sei es als Privatperson hinsichtlich der Zusammenstellung des eigenen Depots oder als Mitarbeiter einer finanzwirtschaftlichen Abteilung eines Unternehmens, der für die optimale Finanzierungspolitik verantwortlich ist. Für denjenigen, der seine Zukunft bei einem Kreditinstitut oder einem anderen Finanzdienstleister plant, womöglich sogar in der Börsenabteilung oder in einem verwandten Unternehmensbereich, sind diese Inhalte "Pflichtprogramm".

Dieses Skript wurde mit der Zielsetzung verfaßt, den Teilnehmern der Vorlesung eine Möglichkeit zur effizienten Vor- und Nachbereitung des Stoffes zu geben. Da es aber das Literaturstudium weder ersetzen kann noch soll, werden zu den jeweiligen Themen sowohl in der Vorlesung als auch im Skript Vorschläge zur ergänzenden Lektüre gegeben. Nahezu alle behandelten Inhalte werden durch quantitative Beispiele veranschaulicht. Ein optimales Studium könnte darin bestehen, diese Beispiele zunächst nachzuvollziehen. Zur Überprüfung des Wissens können dann die am Ende der Blöcke angegebenen Übungsaufgaben gelöst werden. Für die quantitativen Aufgaben sind die Lösungen abgedruckt. Die verbalen Aufgaben sollen eine Diskussion des Stoffes - z.B. im

Rahmen Ihrer Arbeitsgruppe - anregen. Die Lösungen der verbalen Aufgaben sind deshalb nicht angegeben.

Zu diesem Skript gehört eine umfangreiche menügesteuerte Excel-Datei, die in der jeweils neusten Version über das Internet zur Verfügung steht. Diese Datei umfaßt eine Vielzahl der im Skript erklärten finanzmathematischen Modelle und die in diesem Zusammenhang verwendeten Datensätze. Selbstverständlich ist es weiterhin möglich, alle im Skript erklärten finanzmathematischen Zusammenhänge auch ohne Verwendung dieser Datei und ohne PC nachzuvollziehen. Meiner Meinung nach sind aber (nicht nur) die für das Wertpapiermanagement grundlegenden quantitativen Zusammenhänge mittels PC und Tabellenkalkulationsprogramm deutlich schneller zu erlernen und besser zu verstehen. Zu beachten ist, daß bestimmte Teile der Datei geschützt sind, u.a. damit nicht versehentlich Formeln o.ä. überschrieben werden. Um diesen Schutz aufzuheben, können Sie ein Makro mir Strg-U starten. Mit Strg-S wird die Datei wieder geschützt.

Die Internet Seiten zur Vorlesung und zum Skript Wertpapiermanagement sind abrufbar über die üblichen Lehrstuhlseiten sowie über:

www.wertpapiermanagement.de

Hier finden Sie u.a. eine Korrektur- und Ergänzungsliste zum Skript, die jeweils aktuelle Excel-Datei zum Downloaden sowie Hinweise zu weiteren Veranstaltungen und zum Examen. Darüber hinaus sind dort diverse weitere Excel-Dateien und Beiträge im PDF-Format u.a. zu strukturierten Finanzprodukten und zu Basel II abgelegt.

In der nun vorliegenden fünften Auflage des Skriptes erfolgten lediglich einige kleinere Korrekturen und Ergänzungen. Eine permanente weitere Überarbeitung dieser Studienunterlage ist vorgesehen, daher bin ich für jeden Hinweis zur Verbesserung des Skriptes dankbar. In diesem Zusammenhang möchte ich mich bei den Studierenden des IFBG der Georg-August-Universität Göttingen bedanken, die mir durch Verbesserungsvorschläge bei den jeweiligen Überarbeitungen des Skriptes während meiner Zeit in Göttingen sehr geholfen haben.

Ingolstadt im Mai 2002 Prof. Dr. Marco Wilkens

Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

Es folgt eine Auswahl grundlegender Monographien zum Thema Wertpapiermanagement.

Literatur

Zvi Bodie und Robert C. Merton. Finance. New Jersey 2000.

Richard A. Brealey und Stewart C. Myers. Principles of Corporate Finance. 5. Aufl., ohne Angabe des Erscheinungsortes 1996.

Frank J. Fabozzi. Bond Markets, Analysis and Strategies. 4. Aufl., New Jersey 2000.

Frank J. Fabozzi und Franco Modigliani. Capital Markets. 2. Aufl., New Jersey 1996.

Robert A. Haugen. Modern Investment Theory. 4. Aufl., New Jersey 1997.

Thomas Heidorn. Vom Zins zur Option - Finanzmathematik in der Bankpraxis. Wiesbaden 1994.

John C. Hull. Options, Futures, & Other Derivatives. 4. Aufl., New Jersey 2000.

Lutz Kruschwitz. Finanzmathematik. München 1989.

Karl Lohmann. Finanzmathematische Wertpapieranalyse. 2., durchgesehene und erweiterte Aufl., Göttingen 1989.

Louis Perridon und Manfred Steiner. Finanzwirtschaft der Unternehmung. 7., überarbeitete Aufl., München 1993.

William F. Sharpe, Gordon J. Alexander und Jeffery V. Bailey. Investments. 6. Aufl., New Jersey 1999.

Klaus Spremann. Investition und Finanzierung. 4., verb. Aufl., München 1991.

Manfred Steiner und Christoph Bruns. Wertpapiermanagement. 5. Aufl., Stuttgart 1996.

Helmut Uhlir und Peter Steiner. Wertpapieranalyse. 3., durchgesehene Aufl., Heidelberg 1994.

Zum institutionellen Rahmen siehe beispielsweise:

Norbert Kloten und Johann Heinrich von Stein. Obst/Hintner. Geld-, Bank- und Börsenwesen. 39., völlig neu bearbeitete Aufl., Stuttgart 1993.

Gerhard Liebau. Basismaterialien zu "Grundlagen Betriebswirtschaftlicher Geldwirtschaft I und II". IFBG-Göttingen.

Henner Schierenbeck und Reinhold Hölscher. Bankassurance. 3., unveränderte Aufl., Stuttgart 1993.

Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Symbole

A	Anteil
α	Regressionskoeffizient
$aKA_{T,K,t}$	für t antizipierter Wert einer Kupon-Anleihe mit einer Restlaufzeit von (dann) T Jahren und einer Nominalverzinsung von K
APT	Arbitrage Pricing Theory
$aZB_{T,t}$	für t antizipierter Wert eines Zerobonds mit einer Restlaufzeit von (dann) T Jahren
AIBD	Association of International Bond Dealers
act	actual (deutsch: wirklich, tatsächlich)
B	Bezugspreis (Basispreis) einer Option
β_i, b_i	(zu schätzender) Regressionskoeffizient i
β_{ik}	Sensitivität der Aktie i auf Änderungen des Faktors k
B_T	Diskontierungsfaktor für eine Zahlung in T
b_K	aggregierter Teil der YC-Schätzfunktion
BAK	Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen
BP	Bonitätsprämie
BSP_0	Kennzahl für das Bruttosozialprodukt mit einem Erwartungswert von null
C	amerikanischer Call; Convexity (deutsch: Krümmung)
c	europäischer Call; Anteile des varianzminimalen Portefeuilles
CAPM	Capital Asset Pricing Model
Cov	Kovarianz
CTD	Cheapest-to-Deliver
D	Duration; Dividende
d	Wertänderungsfaktor für down
DAX	Deutscher Aktienindex
DB	Deutsche Bundesbank
DTB	Deutsche Terminbörse
e	Schätzfehler (Residuen) bzw. Eulersche Zahl (2,71828...)
E(x)	Erwartungswert von x
η_k	Preis für die Übernahme des Risikos einer unerwarteten Veränderung des Faktors k
F_{kt}	Wert des (renditebestimmenden) Faktors k in t
F_{kt0}	Wert des (renditebestimmenden) Faktors k in t mit einem Erwartungswert von 0
$_{DM/US\$}f_t$	Forward Rate of Exchange (Terminkurs); X DM für 1 US$ für die Laufzeit t
FIBOR	Frankfurt Interbank Offered Rate
FRA	Forward Rate Agreement
FRN	Floating Rate Note
$FU_{U,K,t}$	Wert eines Zins-Futures (in t_0) mit t Jahren Laufzeit auf ein (festverzinsliches) Wertpapier mit (dann) U Jahren Restlaufzeit und einer Nominalverzinsung von K
G	Geld; Gewinn
g	Wachstumsrate
GEM	Parameter der Zinsstrukturkurve für den kurzfristigen Bereich; Geldmarktzinssatz
GEM_{er}	erklärter (geschätzter) Teil des monatsdurchschnittlichen Geldmarktzinssatzes
GEM_{ne}	nicht erklärter Teil des Geldmarktzinssatzes
i, j	Laufvariable
i	Anzahl in eine Schätzung eingehender Wertpapiere
k	Kalkulationszinssatz

K_t	Aktienkurs in t
$\underline{K}_i$	Nominalverzinsung (Kupon) eines festverzinslichen Wertpapiers i
K	durchschnittliche Nominalverzinsung von Kupon-Anleihen
$KA_{T,K}$	Wert einer Kupon-Anleihe mit T Jahren Restlaufzeit und einer Nominalverzinsung von K
KB	Kapitalbetrag, Kreditbetrag
KGV	Kurs-Gewinn-Verhältnis
$KRÜ_K$	Krümmungsparameter der Zinsstrukturkurve (für Kupon-Anleihen mit einem Kupon K)
$KRÜ_{er,K}$	erklärter Teil der Krümmung
$KRÜ_{ne,K}$	nicht erklärter Teil der Krümmung
LIBOR	London Interbank Offered Rate
LIFFE	The London International Financial Futures and Options Exchange
LZ	Laufzeit
μ	Mittelwert
MD	Modified Duration
MVP	Minimum-Varianz-Portefeuille
NIV_K	Niveauparameter der Zinsstrukturkurve (für Kupon-Anleihen mit einem Kupon K), Schätzwert der Rendite für ein Jahr
NV	Normalverteilung
NW	Nominalwert
OTC	Over the Counter
P	amerikanischer Put; Wahrscheinlichkeit; Portefeuille
P'	Pseudowahrscheinlichkeit
p	europäischer Put; Wahrscheinlichkeit
P_0	Barwert
P_A	Ausfallwahrscheinlichkeit
P_R	Rückzahlungswahrscheinlichkeit
P_T	Endwert
π	Pi = 3,14159
PAngV	Preisanagabenverordnung
PF	Preisfaktor (im Zusammenhang mit BUND-Futures)
PF F_t	preisbestimmender Faktor für den Wert eines Zins-Futures in t
PF WP_t	preisbestimmender Faktor für den Wert eines Wertpapiers in t
PST	Portfolio Selection Theory
PV_i	Barwert (Present Value) eines Finanztitels i
QA	Ausfallquote
$_{DM}r$	Rendite für DM-Anlagen
ρ_{ij}	Korrelationskoeffizient
ρ_{ij}^2, R^2	Bestimmtheitsmaß
$\tilde{r}$	Zufallsvariable Rendite
r_{ft}	Zinssatz einer bonitätsrisikofreien Anlage in t
r_{it}	Rendite einer Aktie i in Periode t
r_P	Rendite eines Portefeuilles
R_T	Rendite eines in T fälligen Zerobonds (Spot Rate)
$R_{T,t}$	Rendite eines Zerobonds mit T Jahren Restlaufzeit in t beginnend (wenn t = 0 Spot Rate, wenn t > 0 Forward Rate)
R_K	Rendite eines bonitätsrisikobehafteten Finanztitels (z.B. Kredit)
R_{Tk}	kontinuierliche Verzinsung einer Zahlung in T bzw. eines Zerobonds
$r_{T,K,i}$	interne Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers i mit Fälligkeit in T und einer Nominalverzinsung von K
$\hat{r}_{T,K}$	geschätzte interne Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers mit Fälligkeit in T und einer Nominalverzinsung von K

$\hat{r}_{T,K,t}$	für t antizipierte interne Rendite eines Wertpapiers mit einer Nominalverzinsung von K und einer Restlaufzeit von (dann) T Jahren
REX	Deutscher Rentenindex
$RFRN_{T,K}$	Reverse Floating Rate Note (Reverse Floater) mit einer Restlaufzeit T und einem Kupon K, wobei K = Festzinssatz mit variabler Zinssatz
RLZ	Restlaufzeit
RZ_n	Rentenzahlungen nachschüssig
$R_{DM/US\$}$	Spot Rate of Exchange (Kassakurs); X DM für 1 US$
σ	Standardabweichung
σ'	korrigierte Standardabweichung
σ^2	Varianz
σ_{ij}	Kovarianz
t, T, u	Zeitindex
T_i	Restlaufzeit einer Anleihe i bzw. Fälligkeit einer Zahlung i
S	Wert einer Aktie
SetSum	Settlement Sum (Zinsdifferenzzahlung)
SNV	Standardnormalverteilung
STE_K	Steigungsparameter der Zinsstrukturkurve (für Kupon-Anleihen mit einem Kupon K)
$STE_{er,K}$	erklärter Teil der Steigung
$STE_{ne,K}$	nicht erklärter Teil der Steigung
u	Wertänderungsfaktor für up
U	Nutzen
VM	Variation Margin
w	Gewicht, Anteil
ϕ	Überschußrendite, Excess Return (Differenz Aktienrendite und risikofreier Zinssatz)
ϕ_{Mt}	Überschußrendite eines Marktportefeuilles in t
ϕ_{it}	Überschußrendite einer Aktie i in t
ϕ_{it}^0	unerwartete Überschußrendite einer Aktie i in t (Erwartungswert ist null)
WP	Wertpapier
YC	Yield Curve (Zinsstrukturkurve auf der Basis von Durchschnittsrenditen)
z_k	(Umwelt-)Zustand k
Z_T	Zahlung in T
$Z_{T,i}$	Zahlung in T aus einer Anleihe i
ZB_T	Wert eines Zerobonds mit der Restlaufzeit T

1. Einleitung

1.1. Hinweise zur Excel-Datei

Mit den Excel-Tabellen werden folgende Ziele verfolgt:

- Die im Skript dargelegten Rechnungen sollen schneller nachvollzogen werden können, als es mit dem Taschenrechner möglich ist.
- Durch die Variation von Modellparametern (den Ausgangswerten) und der Betrachtung der verbundenen Ergebnisse können die finanzwirtschaftlichen Modelle besser verstanden werden.
- Auf der Grundlage der vorgegebenen Daten können eigene, weitere Berechnungen sehr schnell durchgeführt werden.
- Es brauchen die Ausgangsdaten (teilweise recht umfangreiche Datensätze) nicht manuell erfaßt zu werden.
- Es sollen die Möglichkeiten von Tabellenkalkulationsprogrammen verdeutlicht werden, die m.E. jeder Student der Wirtschaftswissenschaften nutzen sollte.

Selbstverständlich können alle Inhalte des Skriptes auch weiterhin ohne Unterstützung dieser Dateien und ohne PC erlernt werden! Die Bereitstellung der Dateien stellt insofern eine Alternative bzw. eine Ergänzung dar, mit der die Inhalte zur Vorlesung Wertpapiermanagement erarbeitet werden können.

Einige Felder der Tabellen sind farbig unterlegt. Die Bedeutung der Farben ist wie folgt:

weiße Felder — Die Felder ohne farbige Unterlegung sollten nicht verändert werden. Sie enthalten Formeln oder Ausgangsdaten.

grüne Felder — Diese Felder können und sollten verändert werden, um die Wirkungen unterschiedlicher Vorgabewerte auf die Ergebnisse zu erkennen. Häufig steht in diesen Feldern eine Formel mit einem Bezug auf ein anderes Feld (wie" =D5"). Damit werden dann bestimmte Werte aus vorgelagerten Rechnungen bzw. bestimmte Vorgabewerte übernommen. Daher sollten diese Formeln nach manuellen Änderungen wiederhergestellt werden. Die Vorgabewerte stehen meist direkt bei diesen grünen Feldern.

gelbe Felder — Gelbe Felder kennzeichnen wichtige Hinweise und Endergebnisse, die von besonderem Interesse sind. Auch diese Felder sollten selbstverständlich nicht verändert werden.

Die aktuelle **über das Internet verfügbare Datei** ist menügesteuert. Sie finden dort zunächst die Gliederung dieses Skriptes wieder. Um zu den jeweiligen Arbeitsblättern zu gelangen, brauchen Sie dort nur den gewünschten Gliederungspunkt anzuklicken. Die Nutzung dieser Datei ist also auch ohne Excel-Kenntnisse leicht möglich. Die folgenden Seiten sind für die aktuelle Datei nicht relevant.

Folgende Ausführungen gelten nur für die inzwischen nicht mehr aktuelle Diskettenversion:

Falls Sie das Skript **über das Internet erworben** haben, haben Sie - solange es noch sinnvoll erscheint bzw. erschien - noch eine Diskette dazu erhalten. Hierauf befindet sich eine ältere Version der Excel-Datei, die aber auch noch auf älteren Versionen von Excel läuft. Die Diskette enthält zwei Dateien (Arbeitsmappen mit mehreren Arbeitsblättern), die auch mit Excel 5.0 geladen werden können. Es empfiehlt sich, zunächst beide Dateien auf die Festplatte des PC's zu kopieren.

Die Datei "Zins_95.XLW" enthält alle Arbeitsblätter zu den Kapiteln 2 (Zinstitel), 4 (Optionen) und 5 (Exkurse). Die Datei "KMT_95.XLW" enthält alle Arbeitsblätter zum Kapitel 3 (Beteiligungstitel).

In der Datei **"Zins_95.XLW"** finden Sie die Arbeitsblätter:

Zinstage — Diese Berechnungen veranschaulichen, wie bei Vorgabe eines Anlagezeitraumes die verschiedenen Zinsberechnungsarten (linear, exponentiell und kontinuierlich) auf den Zinsbetrag bei verschiedenen Tage-Konventionen (z.B. act/act, 30/360) wirken. Vorgegeben werden können z.B. der Anlagebeginn als Datum, das Anlageende als Datum, der Kapitalbetrag und der p.a.-Zinssatz.

Anleihen — Mit diesem Spreadsheet können der theoretische Kurswert oder die Durchschnittsrendite und die Stückzinsen einer Kupon-Anleihe berechnet werden. Die Besonderheit liegt darin, daß diese Berechnungen auch für gebrochene Laufzeiten möglich sind. Für die Berechnung der Durchschnittsrendite ist eine manuelle Anpassung vorzunehmen oder der Solver zu nutzen.

Markt — Dieses Arbeitsblatt ist das umfangreichste und leistungsfähigste aller Arbeitsblätter. Zunächst finden Sie hier alle Daten der Kupon-Anleihen, für die Schätzung der Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank durchgeführt wurde. Es kann nachvollzogen werden, wie die Regressionsschätzung erfolgt und wie die Parameter NIV, STE und KRÜ berechnet werden. Durch Eingabe neuer Werte für diese Indikatoren der Renditenstrukturkurve können Sie mittels einer Grafik leicht erkennen, wie sich die Renditenstrukturkurve verändert. Diese Durchschnittsrenditen bilden nun auch die Grundlage zur Berechnung der Spot Rates und Forward Rates.
Weiterhin wird für Kupon-Anleihen, Zerobonds, Reverse Floater, Swaps und Zins-Futures (mit jeweils ganzzahligen Restlaufzeiten!) gezeigt, wie deren theoretischen Werte zu bestimmen sind.
Schließlich erfolgt die Bewertung eines Depots, bestehend aus fünf Kupon-Anleihen. Für dieses Depot werden für die Ausgangssituation sowie für vorzugebende Marktzinsänderungen (in Form der Indikatoren NIV, STE und KRÜ) die Werteverläufe auch grafisch dargestellt.

Duration — In diesem Kalkulationsblatt werden für die Vorgabe von Marktzinssätzen vor und nach Marktzinsänderung die Barwertwirkungen für eine (selbst definierbare) Kupon-Anleihe berechnet. Die Berechnungen erfolgen auf der Basis des "richtigen Abzinsens", der Duration und der Duration in Verbindung mit der Konvexität. Darüber hinaus wird grafisch veranschaulicht, wie die Wertverläufe für das jeweilige Wertpapier für eine zweiprozentige Zinserhöhung und -senkung sind.

Hedge — Dieses Arbeitsblatt, das nur für besonders Interessierte relevant sein mag, zeigt, wie die Regressionsmethode auf der Grundlage modelltheoretischer Daten implementiert werden kann.

Optionen — In diesem Rechenblatt können Sie sämtliche Parameter vorgeben, die für die Optionswertbestimmung (für Puts und Calls) erforderlich sind. Es werden auf dieser Grundlage die inneren Werte der Optionen, deren Wertgrenzen und Werte nach dem Binomialmodell und der Black/Scholes Formel berechnet. Die Verteilungsparameter werden mittels der im Skript genannten Formel approximiert.

Zins_Ex — Mit diesem Arbeitsblatt können Sie die Grundformen der Zins- und Rentenrechnung durchführen. Sie können wahlweise Zinssätze, Anlageperioden, Anfangs-/Endvermögen und Renten vorgeben, für die entsprechenden anderen Werte berechnet werden.

Stat_Ex — Diese Berechnungen zeigen Ihnen, wie Sie auf der Grundlage des im Skript enthaltenen Beispiels statistische Parameter (Mittelwerte, Varianzen, Kovarianzen usw.) berechnen und einfache und multiple Regressionsanalysen durchführen können. Es wird auch gezeigt, wie die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung approximiert werden kann.

Mat_Ex — Eine kurze Übersicht über die Grundformen der Matrizenrechnung (Matrizen addieren, subtrahieren, transponieren, invertieren) verschafft dieses Arbeitsblatt.

In der Datei **"KMT_95.XLW"** finden Sie die Arbeitsblätter:

Renditen — Dieses Arbeitsblatt enthält die für die Bewertung der Beteiligungstitel relevanten Renditen für 10 Aktien und 16 Beobachtungszeitpunkte. Des weiteren sind hier die risikofreien Zinssätze, die Marktrenditen und die für Analysen im Rahmen der APT relevanten BSP-Werte angegeben. Bei den berechneten Standardabweichungen und Varianzen handelt es sich um die korrigierten Formen.

Kurs — Hier kann auf der Grundlage des einfachen Barwertmodells bei Vorgabe der Dividende, der Wachstumsrate der Dividende und eines Kalkulationszinssatzes der (Bar-)Wert von Aktien bestimmt werden.

Ren_Ber — Dieses Arbeitsblatt zeigt, wie aus Kursen und Renditen eine vereinfachte Berechnung exponentieller und kontinuierlicher Renditen möglich ist und wie diese Werte zu Mittelwerten und Verteilungsparametern zusammengeführt werden können.

Nutzen — Diese Rechnungen zeigen, wie die Indifferenzkurven und Risiko-Präferenzfunktionen für vorzugebende Werte für Theta und den Nutzen aussehen. Hier wird die im Skript verwendete Risiko-Präferenzfunktion zugrunde gelegt.

Naive_D	Im Mittelpunkt dieses Arbeitsblattes steht die Frage nach dem Erfolg naiver Diversifikation. Es können die Werte für den Korrelationskoeffizienten und die Standardabweichung vorgegeben werden.
PST2	In diesem umfangreichen Arbeitsblatt sind die im Rahmen der Portfolio Selection Theory relevanten Berechnungen für den 2-Wertpapiere-Fall enthalten. Es können beispielsweise die Mittelwerte, die Standardabweichungen und die Kovarianz für zwei Wertpapiere vorgegeben werden, um daraus das varianzminimale Portefeuille (MVP) zu bestimmen.
PST3	Entsprechendes gilt für dieses Arbeitsblatt, nur daß der Optimierung 3 Wertpapiere zugrunde liegen. Es können also für 3 Aktien die historischen Renditen vorgegeben werden, aus denen dann für vorzugebende Werte für Theta usw. die optimalen Portefeuilleanteile und die Parameter dieses Portefeuilles bestimmt werden
PST10	Entsprechendes gilt auch hier. Dieses Arbeitsblatt enthält darüber hinaus für den exemplarischen Datensatz alle wichtigen Matrizen (wie die Varianz-Kovarianz-Matrix, die Matrix der Regressionskoeffizienten). Die Portefeuilleoptimierung ist vollständig implementiert und erfolgt mittels des Lagrangeansatzes. Letztlich kann mit diesem Arbeitsblatt für jede Wertpapierkombination jeder relevante (Portefeuille-)Parameter bestimmt werden. Interessant an diesem Arbeitsblatt ist auch, wie einfach mit Tabellenkalkulationsprogrammen Matrizenrechnungen vollzogen werden können.
Index	Hier sind alle Rechnungen enthalten, die im Rahmen der Ausführungen zum Index-Modell relevant sind. Der untere Teil des Kalkulationsblattes, mit dem die "Richtigkeit" des Index-Modells überprüft wird, ist vergleichsweise kompliziert. Die Felder mit den jeweils identischen Farben enthalten verschiedene Formeln, mit denen die gleichen Ergebnisse erzielt werden können.
Markt	In diesem Arbeitsblatt befinden sich die Regressionsanalysen zur Bestimmung der Parameter des Markt-Modells (Alpha, Beta, Rho). Das Marktmodell basiert - im Gegensatz zum CAPM - auf den Bruttorenditen.
CAPM	Hier finden sich zunächst alle Regressionsanalysen für das CAPM, das auf den Überschußrenditen basiert. Darüber hinaus können für verschiedene Betas und risikofreie Zinssätze die theoretischen Renditen nach dem CAPM berechnet werden. Ebenso wird gezeigt, wie sich die SML und CML - für beliebige vorzugebende Daten - berechnen und grafisch wiedergeben lassen.
APT_Vor	Dieses Spreadsheet zeigt, wie die APT auf der Grundlage der Vorabspezifikation der Faktoren umgesetzt werden kann. Die Analysen basieren wiederum auf den Überschußrenditen. Zunächst erfolgen die $I = 10$ Zeitreihenregressionen, wobei als zu erklärende Variable die unerwarteten Überschußrenditen des Marktes und die unerwarteten Ausprägungen des Bruttosozialproduktes verwendet werden. Die daraus resultierenden Betas bilden dann für die Querschnittsregression die erklärenden Variablen für die zu erklärenden Mittelwerte der (historischen) Überschußrenditen.

Weiterhin können die nach der APT theoretisch richtigen Überschußrenditen und Bruttorenditen für alle Aktien berechnet werden, wofür die Betas der Aktien sowie der risikofreie Zinssatz vorzugeben sind. Es wird gezeigt, wie die Hyperplane bestimmt werden kann.
Schließlich ist eine Tabelle vorgegeben, die als Grundlage zur Bildung von Arbitrage- und Mimicking-Portefeuilles genutzt werden kann. Hierzu sind allerdings Kenntnisse des Excel-Solvers notwendig.

APT_FAK Dieses Arbeitsblatt bietet die zuletzt genannten Berechnungen für die APT auf der Grundlage der Faktorenanalyse. Zu beachten ist, daß die Werte der Faktoren sowie die Werte der Betas nicht mit diesem Spreadsheet bestimmt wurden. Sie stammen aus Berechnungen mit dem Statistik-Programms SPSS. Die Entstandardisierung der Betas ist nur für besonders Interessierte relevant. Auch hier können durch Vorgabe der Betas die nach der APT theoretisch richtigen Überschußrenditen und Bruttorenditen bestimmt werden.

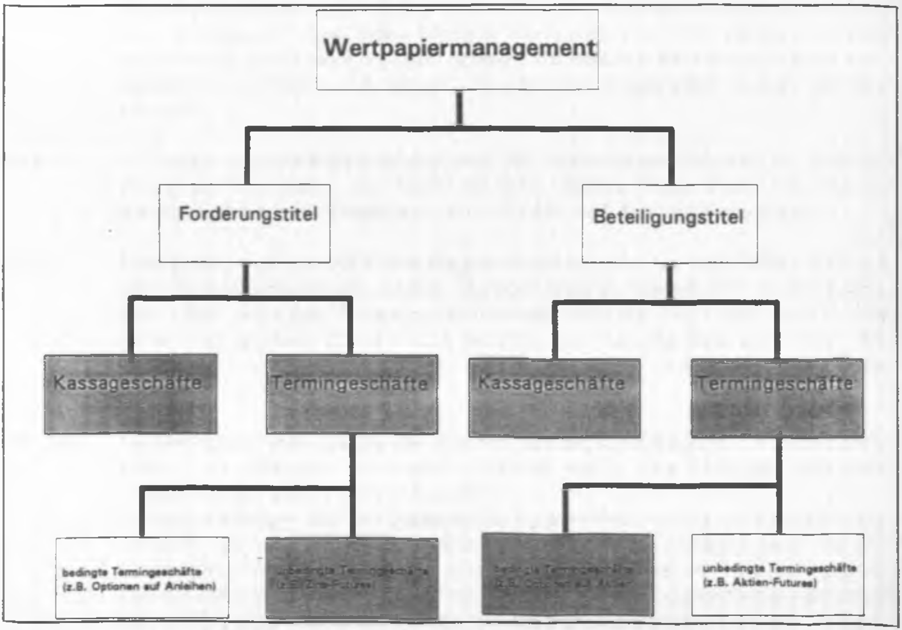
1.2. Institutioneller Überblick

Im folgenden Abschnitt werden lediglich die wichtigsten institutionellen Rahmenbedingungen aufgezeigt, die für das Verständnis der weiteren Überlegungen notwendig sind. Falls Ihnen die im Skript behandelten Instrumente nicht geläufig sind, ist es empfehlenswert, sich die Kenntnisse auf der Grundlage der Literatur eigenständig anzueignen.

Wirft man einen Blick auf die Entwicklung der Finanzmärkte, an denen die zu analysierenden Titel gehandelt werden, so ist festzustellen, daß diese sowohl bezüglich ihrer Volumina als auch ihrer "Artenvielfalt" ein rasantes Wachstum aufweisen. Als Ursache dafür werden u.a. die Stichwörter Globalisierung und Securitisierung genannt, aber auch eine (angebliche) Zunahme der Volatilitäten (z.B. der Wechselkurse und Marktzinssätze) wird dafür verantwortlich gemacht. Oder sind es möglicherweise Banken und ähnliche Finanzdienstleister, die, unter Rentabilitätsdruck stehend, neue Produkte "erfinden" und verkaufen müssen?

Betrachtet man die an den Finanzmärkten gehandelten Titel, so ist festzustellen, daß diese über verschiedene Mechanismen eng miteinander verbunden sind. Man könnte sich vorstellen, daß man es hier mit einer Art Maschine zu tun hat, die aus einer Vielzahl von Zahnrädern besteht. Dreht sich eines, werden sich (fast) alle anderen mitdrehen. Die hier behandelten Zusammenhänge sollen helfen, die wichtigsten dafür verantwortlichen Mechanismen verstehen zu lernen. Für eine beschreibende Darstellung der verschiedenen Formen der einzelnen Finanztitel sowie Finanzmärkte sei auf die Literatur verwiesen.

Überblick



1.2.1. Die wichtigsten Finanzmärkte

Finanzmärkte: Teilnehmer der internationalen Finanzmärkte sind sowohl Banken als auch Finanzinstitute, wie zum Beispiel Investmentgesellschaften, Versicherungen und einige große Industrieunternehmen. Finanzmärkte können nach mehreren Kriterien unterschieden werden. Möglich ist z.B. eine Einteilung in nationale und internationale Märkte. Häufig werden Finanzgeschäfte aber auch nach ihrer Fristigkeit untergliedert, was eine Aufteilung in den Geld- und Kapitalmarkt zur Folge hat. Diese Aufteilung wird im folgenden näher betrachtet.

Geldmarkt: Der Geldmarkt ist der Markt für kurzfristige Geldanlage und -aufnahme, der wiederum in den Bankengeldmarkt und den Unternehmensgeldmarkt aufgegliedert wird. Darüber hinaus können diese beiden Untergruppen noch in den inländischen und internationalen Markt unterteilt werden.

Bankengeldmarkt: An diesem Markt, der auch als Geldmarkt im engeren Sinne bezeichnet wird, sind fast ausschließlich Kreditinstitute tätig. Die hier durchgeführten Transaktionen dienen zum einen der Refinanzierung und zum anderen dem Liquiditätsausgleich durch Interbankgeschäfte.

Unternehmensgeldmarkt: In diesem Segment wird zwischen dem Industrie- und Konzernclearing unterschieden. Beim Industrieclearing werden Tages- und Termingelder zwischen großen Unternehmen mit erstklassiger Bonität direkt gehandelt. Die Umgehung der Kreditinstitute führt zu einer Senkung der Transaktionskosten. Das Konzernclearing verfolgt den gleichen Zweck, wobei Liquiditätsüberhänge zwischen den Unternehmen eines Konzerns ausgeglichen werden.

Kapitalmarkt: Als Kapitalmarkt wird der Markt für längerfristige Kapitalanlagen und Kapitalaufnahmen mit Laufzeiten von über vier Jahren bezeichnet. Er umfaßt sowohl den Primärmarkt, an dem es zur Emission von Finanzpapieren kommt, als auch den Sekundärmarkt, an dem die Papiere nach ihrer Emission gehandelt werden. Der Wertpapierhandel an diesen Märkten kann börslich oder außerbörslich erfolgen. In dem über die Börse abgewickelten Handelssegment wird noch einmal zwischen dem Kassa- und dem Terminmarkt unterschieden.

Kassa- und Terminmarkt: Der Kassamarkt ist dadurch gekennzeichnet, daß die Verpflichtung zur Übertragung eines Finanztitels und die Erfüllung der Übertragung etwa zeitgleich in der Gegenwart abgewickelt werden. Hierin liegt auch das Unterscheidungsmerkmal zu Terminmärkten, auf denen die Erfüllung erst in der Zukunft erfolgt.

1.2.2. Der Markt für festverzinsliche Wertpapiere

Der inländische Primärmarkt für festverzinsliche Wertpapiere wird durch die Emission von Bankschuldverschreibungen und Papiere der Öffentlichen Hand dominiert. Darüber hinaus kommt es auch zur Einführung von ausländischen Rentenwerten. Auch Emissionen von Unternehmensanleihen gewinnen am deutschen Rentenmarkt an Bedeutung.

Die Analyse der Emissionsvolumina ergibt, daß die Emissionstätigkeit insbesondere in den neunziger Jahren stark zugenommen hat. Dies ist in erster Linie auf den starken Finanzierungsbedarf von Bund und Ländern zurückzuführen. Die hierfür erforderlichen Mittel werden zum Teil durch die Plazierung von großvolumigen Emissionen über den Geld- und Kapitalmarkt finanziert.

1.2.3. Die Emission festverzinslicher Wertpapiere

Unter einer Emission ist im allgemeinen die Erstausgabe von Wertpapieren zu verstehen, insbesondere von Aktien und Schuldverschreibungen. Sie kann entweder durch den Aussteller der Wertpapiere selbst (Selbstemission) oder durch ein Bankenkonsortium (Fremdemission) erfolgen.

Bankschuldverschreibungen werden fast immer durch Selbstemission im Rahmen des freihändigen Verkaufs abgesetzt. Hingegen werden Wertpapiere von Industrieunternehmen und öffentlichen Haushalten im Wege der Fremdemission begeben. Hierfür werden i.d.R. Emissionskonsortien gebildet, die aus mehreren Banken bestehen.

Die Fremdemission wird in drei Schritten durchgeführt. Zuerst erfolgt die Vorbereitung der Emission. Sie umfaßt die Aushandlung und den Abschluß des Konsortialvertrages, die Ausarbeitung von Zeichnungs-/Verkaufsangeboten durch das Konsortium und die Bekanntmachung der Emission. In dem abzuschließenden Konsortialvertrag verpflichten sich die Konsorten häufig zur Übernahme der zu emittierenden Wertpapiere und zu deren Kurspflege am Markt.

Im zweiten Schritt kommt es zu einer Übernahme der Papiere durch das Emissionskonsortium. Diese kann in unterschiedlicher Weise geregelt werden. Wird im Übernahmevertrag ein Kauf der Papiere durch die Konsorten vereinbart, so werden sie Eigentümer und behalten den nicht am Markt absetzbaren Teil der Emission im eigenen Bestand. Es kann auch eine kommissonsweise Übernahme der Papiere vereinbart werden, so daß das Konsortium die Papiere in eigenem Namen für fremde Rechnung übernimmt. Wenn sich die beteiligten Parteien auf den Abschluß eines Geschäftsbesorgungsvertrages einigen, so vertreiben die Konsorten die Wertpapiere in offener Stellvertretung im Namen und für Rechnung des Emittenten.

Im letzten Schritt kann es dann zur Plazierung der Papiere am Markt im Rahmen einer Privatplazierung kommen, bei der die Wertpapiere nur wenigen, kapitalstarken Anlegern angeboten werden. Alternativ hierzu kann auch eine öffentliche Begebung vorgesehen sein, wobei in der Praxis zwei Abwicklungsarten unterschieden werden: Die Wertpapiere können im Wege der Subskription an den Markt gebracht werden. Hierbei werden die Anleger durch die Veröffentlichung von Zeichnungsprospekten zur Abgabe einer Zeichnungserklärung zu einem festgelegten Zeichnungskurs aufgefordert, wobei die Wertpapiere dann nach Ablauf der Zeichnungsfrist zugeteilt werden. Hingegen kann die Begebung auch über ein Tenderverfahren abgewickelt werden, bei dem die Zeichner in ihren Zeichnungserklärungen Kurse bieten müssen. Papiere des Bundes und dessen Sondervermögen werden i.d.R. über dieses Verfahren plaziert.

Beim freihändigen Verkauf bringen die Konsorten die von ihnen übernommenen Quoten im Rahmen des Schalterverkaufs bei ihren Kunden unter, wobei der Ausgabekurs an die Marktlage angepaßt wird.

1.2.4. Termingeschäfte im Überblick

Terminmärkte sind dadurch gekennzeichnet, daß hier Zukunftsgüter gehandelt werden. Bei Termingeschäften erfolgt die Verpflichtung zur Übertragung des eigentlichen Finanztitels (des underlying instruments) in der Gegenwart, während die Erfüllung erst in der Zukunft realisiert wird. Terminmärkte können in Forward-, Futures- und Options-Märkte untergliedert werden, die durch unterschiedliche Organisations- und Vertragsformen, underlying instruments und Lieferungsbedingungen gekennzeichnet sind.

Unter Forward-Märkten werden außerbörsliche Märkte (OTC-Geschäfte) verstanden, auf denen individuell auf die Bedürfnisse der Kontraktpartner abgestimmte Verträge über Kauf und Verkauf eines Finanztitels zu einem zukünftigen Zeitpunkt abgeschlossen werden. Die Termingeschäfte können sich z.B. auf Währungen oder auf Aktien beziehen. Nicht standardisierte Zinstermingeschäfte sind beispielsweise Zins-Swaps und Forward Rate Agreements. Da die Ausstattungsmerkmale von den Beteiligten individuell vereinbart werden können, gelten nicht standardisierte Termingeschäfte als sehr flexibel. Dafür ist die Feststellung des "richtigen" Marktpreises schwieriger.

Auf Future-Märkten werden hingegen stark standardisierte Produkte gehandelt. Durch diese Standardisierung, die sich i.d.R. auf den Erfüllungstermin, den Kontraktbetrag und die Kontraktmenge bezieht, wird eine börsenmäßige Handelbarkeit der Terminkontrakte ermöglicht. Diese Marktform liegt sowohl dem Handel von Commodity Futures als auch dem von Financial Futures und Optionen zugrunde. Die auf diesem Markt gehandelten Futures beziehen sich auf Währungen, verzinsliche Wertpapiere und auf Aktienindizes. Aufgrund der starken Standardisierung ist es möglich, daß Positionen vor Fälligkeit durch entsprechende Gegengeschäfte glattgestellt werden können. Um die hohen Transaktionskosten, die im Rahmen einer Kontraktausübung anfallen würden, zu vermeiden, werden offene Positionen nur in den seltensten Fällen bis zur Endfälligkeit gehalten.

Ein Beispiel für ein standardisiertes Termingeschäft sind Zins-Futures. Sie gehen zurück auf den börslichen Handel mit Warentermingeschäften (1848). Seit 1975 findet börslicher Handel mit Zinsterminkontrakten statt (zuerst an der Chicago Board of Trade). Ihnen liegen regelmäßig fiktive Anlagen zugrunde. Die den Zins-Futures zugrundeliegenden (konkreten oder abstrakten) Wertpapiere werden als "<u>Basiswerte</u>" bezeichnet. Sie lauten üblicherweise auf kurz-, mittel- und langfristige Kupon-Anleihen sowie kurzfristige Interbankeinlagen. Während die <u>Preisnotierung</u> bei unterjährigen Titeln grundsätzlich auf "Index Basis" erfolgt, d.h. 100 minus der "impliziten Rendite" des Terminkontraktes, werden die Kurse von Zinsterminkontrakten auf Basiswerte mit Laufzeiten von mehreren Jahren analog zu den Kursnotierungen festverzinslicher Wertpapiere angegeben. Der <u>Handel von Zins-Futures</u> ist grundsätzlich nur über Mitglieder der jeweiligen Terminbörsen möglich. Die Abwicklung erfolgt über <u>Clearing-Stellen</u>, die den Handel überwachen und garantieren und damit die Vertragserfüllung gewährleisten. Die Marktteilnehmer sind verpflichtet, <u>Sicherheitsbeträge</u> (Margins) zu hinterlegen, deren Höhe so bemessen wird, daß potentielle Verluste gedeckt sind. Während der Laufzeit des Futures erfolgt regelmäßig eine Neuberechnung und Anpassung der Margins. Gewinne wie Verluste aus Zins-Futures werden folglich nicht erst am Ende der Future-Laufzeit oder bei Glattstellung des Futures zahlungswirksam, da sie über das "margin-account" laufend gutgeschrieben bzw. belastet werden.

Aufgrund des geringen Kapitaleinsatzes bei dem Kauf oder Verkauf von Zinstermingeschäften ist die Hebelwirkung (Leverage-Effekt) hinsichtlich verbundener Gewinne bzw. Verluste hoch. Daraus resultieren einerseits die Möglichkeiten für Sicherungsstrategien, andererseits aber auch Gefahren für die Beteiligten wie (britische) Kreditinstitute, die erhöhte Risiken eingehen können.

Die Ausführungen zu Futures-Märkten gelten auch für Optionsmärkte. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß bei Optionsgeschäften nur der Verkäufer der Option die Pflicht zur Erfüllung des Geschäftes hat, sofern der Käufer der Option die Option ausübt.

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Systematisieren Sie die Finanzmärkte anhand verschiedener Kriterien.

B) Beschreiben Sie den Vorgang der Emission festverzinslicher Wertpapiere.

C) Beschreiben Sie die an der Eurex gehandelten Produkte. Aktuelle Informationen finden Sie im Internet.

Literatur

Ulf G. Baxmann und Christoph Weichsler. Überlegungen zur Systematisierung von Finanzmärkten. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 546-552.

Wolfgang Benner. Genußscheine als Instrument der Innovationsfinanzierung. "Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis", (1985), S. 438-468.

Wolfgang Benner. Finanzielle Haftung und Intermediation als Konstituenten moderner Geldwirtschaften. In: Benner, Wolfgang und Liebau, Gerhard: (Hrsg.) Finanzielle Haftung in der Geldwirtschaft, Hans-Dieter Deppe zum 60. Geburtstag, Stuttgart 1990, S. 135-163.

Rolf-E. Breuer. Optionshandel in Festverzinslichen - mehr Attraktivität für deutsche Finanzmärkte? "Die Bank", (1985), S. 272-275.

Hans Egon Büschgen. Finanzinnovationen. Neuerungen und Entwicklungen an nationalen und internationalen Finanzmärkten. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1986), S. 301-336.

Hans Egon Büschgen. Zinstermingeschäfte. Frankfurt a.M. 1988.

Deutsche Bundesbank. Neue, nicht bilanzwirksame Finanzinstrumente und ihre Bedeutung für die Kreditinstitute in der Bundesrepublik. "Monatsberichte der Deutschen Bundesbank", (1987), S. 23-27.

Jörg Franke. Deutsche Terminbörse: Kurs auf einen starken Finanzplatz Deutschland. "Das Wirtschaftsstudium", (1990), S. 75-76.

Wolfgang Gerke und Heinz-Werner Rapp. Strukturveränderungen im internationalen Börsenwesen. "Die Betriebswirtschaft", (1994) 54. Jg., H. 1, S. 1-23.

Walter Häußler, Wolfgang Kirschner und Martin Schalk. Deutscher Rentenindex REX eingeführt. "Die Bank", (1991), S. 327-330.

Torsten Lüdecke und Christian Schlag. Die Marktstruktur der Deutschen Terminborse: Eine empirische Analyse des Bid-Ask-Spreads. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1992), S. 323-346.

Frieder Meyer und Carsten Wittrock. DTB vor einer neuen Ära. "Die Bank", (1993), S. 91-98.

Hartmut Schmidt. Neue Börsenstruktur. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1992), S. 792-795.

Harald Wiebke. Finanzterminkontrakte - die neuen Trümpfe der Deutschen Terminbörse. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 147-150.

Carsten Wittrock und Volker Beer. Optionsindices und ihre Anwendungsmöglichkeiten. "Die Bank", (1994), S. 518-523.

1.3. Grundlagen der Zins- und Rentenrechnung

1.3.1. Zinsrechnung

Die grundlegende Formel der einfachen (exponentiellen) Zinseszinsrechnung lautet:

$$P_T = P_0\,(1+r)^T$$

Die Höhe des Endkapitals P_T kann also durch Multiplikation des Anfangskapitals P_0 mit dem Aufzinsungsfaktor $(1+r)^T$ ermittelt werden. Durch Umstellung der Gleichung können auch Aufgaben gelöst werden, die nach dem Wert der anderen Variablen fragen:

$$P_0 = P_T\,(1+r)^{-T} = \frac{P_T}{(1+r)^T}$$

$$r = \sqrt[T]{\frac{P_T}{P_0}} - 1$$

$$T = \frac{\log(\frac{P_T}{P_0})}{\log(1+r)}$$

Übungsaufgaben - Datei: Zins_Ex

A) Über welchen Betrag kann ein Anleger nach 5 Jahren verfügen, wenn er heute 15.000 zu 5% p.a. anlegt? Die zwischenzeitlichen Zinsen werden nicht ausgezahlt, sondern dem Kapitalbetrag zugeschlagen.

B) Wieviel Kapital müßte heute angelegt werden, um in 5 Jahren über 20.000 verfügen zu können? Der Zinssatz ist 5 Prozent.

C) Wie hoch ist die Verzinsung eines Zerobonds mit einer Laufzeit von 20 Jahren und einem Kurs von 50 Prozent?

D) Wie lange müßte ein Kapitalbetrag zu 5,9463% angelegt werden, um ihn zu verdoppeln?

Lösungshinweise

A) P_T = 19.144,22
B) P_0 = 15.670,52
C) r = 3,5264%
D) t = 12

1.3.2. Rentenrechnung

Während bei der einfachen Zinseszinsrechnung keine Ein- oder Auszahlungen während der Laufzeit erfolgen, ist dieses bei der Rentenrechnung der Fall. Die grundlegende Formel der (nachschüssigen) Rentenrechnung lautet:

$$P_0 = RZ_n \frac{(1+r)^T - 1}{r\,(1+r)^T}$$

Der Rentenbarwert (also der heutige Wert einer Reihe zukünftiger Zahlungen) ergibt sich aus der Höhe der regelmäßigen Zahlungen RZ_n (lies: Rentenzahlungen nachschüssig), multipliziert mit dem Rentenbarwertfaktor. Fragen nach den anderen Variablen können gelöst werden, indem diese Grundgleichung umgestellt wird:

$$P_T = RZ_n \frac{(1+r)^T - 1}{r}$$

$$RZ_n = P_0\,(1+r)^T \frac{r}{(1+r)^T - 1} = P_T \frac{r}{(1+r)^T - 1}$$

$$T = \frac{\log\left(\frac{RZ_n}{RZ_n - r\,P_0}\right)}{\log(1+r)} = \frac{\log\left(1 + \frac{r\,P_T}{RZ_n}\right)}{\log(1+r)}$$

Einen Extremfall der Rentenrechnung stellt die "ewige Rente" dar, bei der die Rente RZ_n unendlich lange ($T \rightarrow \infty$) gezahlt wird:

$$P_0 = \frac{RZ_n}{r}$$

Übungsaufgaben - Datei: Zins_Ex

A) Aus einer fälligen Lebensversicherung erhalten Sie einen Betrag von 200.000. Wie hoch wäre eine jährlich nachschüssige Rente für 20 Jahre, wenn Sie diesen Kapitalbetrag dafür einsetzen? Der Marktzinssatz beträgt 12 Prozent.

B) Sie möchten eine Rente in Höhe von 12.000 p.a. erhalten und haben dafür einen Kapitalbetrag von 100.000 zur Verfügung. Wie lange können Sie sich dafür diese Rente zahlen lassen, wenn Sie von einem Marktzinssatz von 11% ausgehen?

C) Über welchen Endwert verfügt ein Anleger, wenn er bei einem Marktzinssatz in Höhe von 10% zehn Jahre lang 5.000 am Ende jeden Jahres anlegt?

D) Wie hoch ist der heutige Wert für eine jährlich nachschüssige Rente für 20 Jahre in Höhe von 4.000 p.a. bei einem Marktzinssatz in Höhe von 10 Prozent?

E) Ein Lebensversicherungsunternehmen bietet Ihnen für 20.000 eine jährliche Rente in Höhe von 6.000 für 4 Jahre. Mit welchem Zinssatz kalkuliert die Lebensversicherungsgesellschaft offensichtlich?

F) Welchen Wert hat eine ewige Rente in Höhe von 750 p.a. bei einem Marktzinssatz in Höhe von 12 Prozent?

Lösungshinweise

A)	RZ_n	= 26.775,75
B)	T	= ca. 24
C)	P_T	= 79.687,12
D)	P_0	= 34.054,25
E)	r	= 7,7138% (Lösung über Interpolation)
F)	P_0	= 6.250

1.3.3. Bewertung von Kupon-Anleihen mittels Interpolation

Eine Art Mischung aus Renten und Zinseszinsrechnung erfolgt bei der Berechnung von Kursen bzw. Endwerten festverzinslicher Wertpapiere. Denn wir haben - wie bei der o.a. einfachen Zinseszinsrechnung - sowohl einen festen Kapitalbetrag (Anfangsauszahlung bzw. Kapitalrückzahlung) zu berücksichtigen als auch eine Rente in Form der regelmäßigen Kuponzahlungen. Die klassische Formel zur Berechnung des Barwertes der Anleihe

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

kann auch geschrieben werden als:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r)^t} + \frac{NW}{(1+r)^T}$$

K = Kupon der Anleihe
NW = Nominalwert (Rückzahlungsbetrag) der Anleihe
Die Kuponzahlungen stellen letztlich eine nachschüssige Rente dar, also gilt:

$$P_0 = K\,\frac{(1+r)^T-1}{r(1+r)^T} + \frac{NW}{(1+r)^T}$$

Übungsaufgaben

A) Wie hoch ist der (Kurs-)Wert einer Anleihe mit einem Kupon von 12%, einer Restlaufzeit von 35 Jahren und einem Nominalwert von 50.000, wenn der Marktzinssatz für solche Anleihen zur Zeit 7% beträgt?

B) Wie hoch ist die Rendite einer Anleihe mit einem Kupon von 10%, einer Restlaufzeit von 25 Jahren und einem Nominalwert von 70.000, wenn der heutige Kurswert 80% ist?

Lösungshinweise

A)

$$P_0 = 0{,}12 \frac{(1+0{,}07)^{35}-1}{0{,}07(1+0{,}07)^{35}} + \frac{1}{(1+0{,}07)^{35}} = 1{,}647383$$

Der Kurswert ist 164,7383 Prozent. Der Wert der Anleihe ist 82.369,18.

B) Das Problem bei dieser Aufgabe besteht darin, daß die Gleichung

$$0{,}8 = 0{,}10 \frac{(1+r)^{25}-1}{r(1+r)^{25}} + \frac{1}{(1+r)^{25}}$$

nicht nach r aufgelöst werden kann. Da dieses häufig der Fall ist, wird im weiteren gezeigt, wie lineare Interpolationen durchgeführt werden können. Es muß gelten:

$$0 = 0{,}10 \frac{(1+r)^{25}-1}{r(1+r)^{25}} + \frac{1}{(1+r)^{25}} - 0{,}8$$

1. Schritt: Einsetzen eines Zinssatzes, von dem angenommen wird, daß er dem gesuchten Zinssatz nahe kommt und Berechnung der linken Seite der Gleichung

für r=12% $$0{,}0431 = 0{,}10 \frac{(1+0{,}12)^{25}-1}{0{,}12(1+0{,}12)^{25}} + \frac{1}{(1+0{,}12)^{25}} - 0{,}8$$

2. Schritt: Auswahl eines weiteren Zinssatzes und wiederum Berechnung der linken Seite der Gleichung

für r=13% $$-0{,}0199 = 0{,}10 \frac{(1+0{,}13)^{25}-1}{0{,}13(1+0{,}13)^{25}} + \frac{1}{(1+0{,}13)^{25}} - 0{,}8$$

3. Schritt: Lineare Interpolation und Ermittlung von r; hier sind diverse Ansätze möglich; der folgende gilt für eine Differenz von 13 - 12 = 1 (%)

$$r \approx 12 + \frac{0{,}0431}{0{,}0431-(-0{,}0199)}(13-12) = 12{,}684126 \ (\textit{Prozent})$$

4. Schritt: Probe und ggf. weitere Interpolation

$$-0{,}0006 = 0{,}10 \frac{(1+0{,}1268)^{25}-1}{0{,}1268(1+0{,}1268)^{25}} + \frac{1}{(1+0{,}1268)^{25}} - 0{,}8$$

Das Ergebnis ist hinreichend genau; also ist keine weitere Interpolation erforderlich.

2. Verzinsliche Finanztitel

Gegenstand des Kapitels sind verschiedene Formen verzinslicher Finanztitel. Dazu gehören beispielsweise Kupon-Anleihen, Zerobonds, Floating Rate Notes und Reverse Floater sowie Derivate wie Zins-Futures, Forward Rate Agreements und Zinsswaps.

Übertragbar sind die Ausführungen aber auf eine Vielzahl verschiedener Formen von finanziellen Titeln. Zu denken ist hier z.B. an Hypothekendarlehen und Sondersparformen. Gemeinsam ist diesen Titeln, daß sie keine Optionsrechte beinhalten.

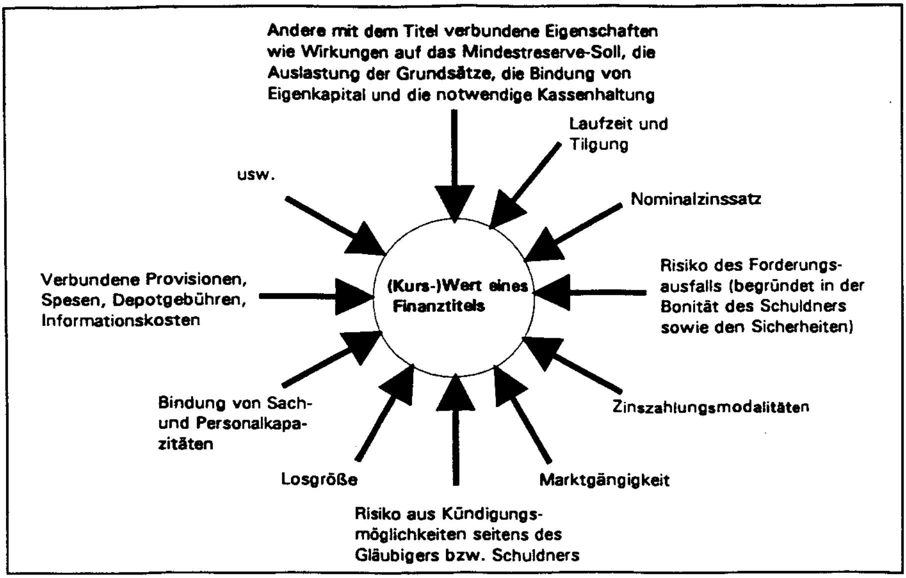
2.1. Ein Grundmodell zur Analyse verzinslicher Finanztitel

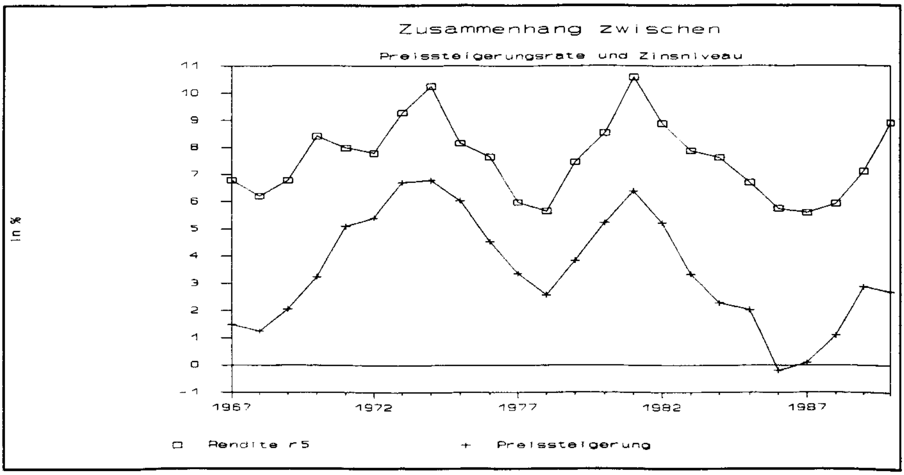
Einleitend soll die Frage beleuchtet werden, welche Faktoren den (Kurs-)Wert verzinslicher Finanztitel bestimmen. Sicher ist dies einerseits der vereinbarte Nominalzinssatz. Darüber hinaus ist aber auch zu berücksichtigen, daß mit den jeweiligen Finanztiteln beispielsweise bestimmte Kündigungsmöglichkeiten und Risiken verbunden sind. Generell müßten alle in der Grafik genannten Ausstattungsmerkmale berücksichtigt werden, wollte man den Wert verschiedener Finanztitel vergleichen.

Im weiteren wird vor allem der Frage nachgegangen, ob einzelne Kurse verzinslicher Finanztitel am Kassa- und Futures-Markt "gerecht" sind. In dem Zusammenhang werden vorrangig die Dauer der mit den Finanztiteln verbundenen Festzinsbindung, das mit dem Finanztitel verbundene Bonitätsrisiko sowie die Währung, auf die die mit dem Finanztitel verbundenen Zahlungen lauten, eine herausragende Rolle spielen.

Da insbesondere die Inflationsrate einen dominierenden Einfluß auf die Renditen von Anleihen hat, werden in der zweiten Grafik die Entwicklung der Renditen festverzinslicher Wertpapiere mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren und die Entwicklung der Preissteigerungsrate einander gegenübergestellt. Als Differenz ergibt sich eine Art Realzinssatz.

Kursbeeinflussende Faktoren verzinslicher Finanztitel





Die folgende Grafik soll sowohl einen Überblick über das weitere Vorgehen geben als auch die der Wertpapieranalyse zugrundeliegende Problematik verdeutlichen.

Eine grundlegende Zielsetzung, die mit der Wertpapieranalyse verbunden ist, besteht in der Prüfung, ob die (am Markt oder von dem Geschäftspartner angebotenen) Kurse oder Zinssätze marktgerecht sind. Das aber setzt voraus, daß bekannt ist, wie hoch "der Marktzinssatz" eigentlich ist.

Beschäftigt man sich mit der Wertpapieranalyse in der Praxis, so wird man zum einen über eine Vielzahl von "direkten Marktdaten" verfügen. An der Börse werden für festverzinsliche Wertpapiere konkrete Kurse (aber keine Renditen!) notiert, im Handel zwischen Banken werden beispielsweise konkrete Zinssätze angegeben, zu denen Geldmarktgeschäfte oder Termingeschäfte kontrahiert werden können.

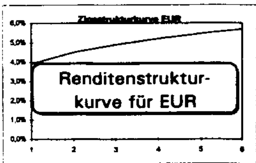
Die einfachste Möglichkeit festzustellen, daß ein Angebot "schlecht" ist, ist dann gegeben, wenn der identische Titel anderweitig günstiger angeboten wird. In der Regel geht es aber weniger um solche trivialen Vergleiche. Üblicherweise werden vielmehr Finanztitel unterschiedlicher Art miteinander verglichen, so beispielsweise Zinsswaps mit festverzinslichen Wertpapieren und dem Kurs für den BUND-Future.

Zu diesem Zweck sind die "direkten Marktdaten" zunächst in "Indikatoren für die Marktdaten" umzuformen. Das gängigste Beispiel dafür ist die Bestimmung der Zinsstrukturkurve. Diese kann dann beispielsweise als Grundlage zur Ermittlung von unter- oder überbewerteten Anleihen herangezogen werden. Eine andere Einsatzmöglichkeit besteht in der Ableitung von Terminzinssätzen, mit denen dann die Preise für Zins-Futures "überprüft" werden können.

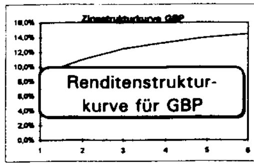
Gesamtmodell zur Analyse verzinslicher Finanztitel

Empirische Ausgangsdaten (Kurse von Bundesanleihen) für EUR

Empirische Ausgangsdaten (Kurse von Bundesanleihen) für GBP



NIV
STE
KRÜ



NIV
STE
KRÜ

Durchschnittsrenditen und Spot Rates für EUR

Durchschnittsrenditen und Spot Rates für GBP

Devisenterminkurse EUR/GBP

Mit diesen Daten ist eine Bewertung möglich für

verschiedene Titel in verschiedenen Währungen		**verschiedene Zeitpunkte**
Zerobonds	Zins-Futures	Wert zum heutigen Zeitpunkt
Kupon-Anleihen	Zinsswaps	sicherbare Werte für zukünftige Zeitpunkte
Bundesschatzbriefe	Währungsswaps	erwartete Werte für zukünftige Zeitpunkte
Hypothekendarlehen	Devisenswaps	
Floating Rate Notes	Zins-Währ.-Swaps	**verschiedene Marktzinsszenarien,**
Reverse Floating Rate Notes	usw.	simuliert über Änderungen der Zinsstrukturkurven
FRA´s		(NIV, STE, KRÜ oder r1 bis r10 oder R1 bis R10)
ganze Depots aus diesen Finanztiteln		

Erweiterungsmöglichkeiten des Modells bestehen durch Berücksichtigung von

Transaktionskosten sowie Geld- und Briefspannen	steuerlichen Aspekten	weiteren YC´s (z.B. Swap-Sätze)
Risikoprämien über PST, CAPM, APT	Bonitätsrisiken	unterjährigen Zinssätzen

2.2. Bewertungsansätze für verzinsliche Finanztitel

2.2.1. Bewertungsansätze auf der Grundlage von Durchschnittsrenditen

Im folgenden werden die Grundlagen der Effektivzinsrechnung behandelt. Grundsätzlich gilt für diesen Abschnitt, daß alle mit einem Finanztitel verbundenen Zahlungen stets mit demselben Zinssatz diskontiert werden. Da es sich bei diesem Zinssatz - im Gegensatz zu den später eingeführten Spot Rates und Forward Rates - um eine Art durchschnittlichen Zinssatz handelt, wird hierfür der Ausdruck "Durchschnittsrendite" verwendet. Die Relevanz der Ausführungen zur Durchschnittsrendite ergibt sich daraus, daß diese in der finanzwirtschaftlichen sowie bankbetrieblichen Praxis weit verbreitet ist. Sie bildet außerdem die Grundlage des Duration-Ansatzes.

Die Ausführungen zur Berechnung der Durchschnittsrendite von Finanztiteln mit einer Laufzeit von einem Jahr bzw. einem Vielfachen davon dienen auch zur Auffrischung des aus der Investitionsrechnung bekannten Wissens. Falls Probleme bei der einfachen Zins- und Zinseszinsrechnung auftreten, sollte der Exkurs am Ende des Skriptes und ggf. die dort angegebene Literatur eigenständig durchgearbeitet werden.

Da in der Realität meist Finanztitel zu bewerten sind, die gebrochene Laufzeiten aufweisen, werden im nächsten Schritt die dafür gängigen Berechnungsmethoden vorgestellt. Im Anschluß daran wird gezeigt, wie andere Ausstattungsmerkmale von Finanztiteln (steuerliche Behandlung, Bonitätsrisiken) in die Bewertung einbezogen werden können.

Ein wichtiger Einflußfaktor auf die Höhe der Durchschnittsrendite eines Finanztitels ist die Dauer der Festzinsbindung. Daher wird ausführlich erklärt, wie der Zusammenhang zwischen der Zinsbindungsdauer und der Rendite von Finanztiteln auf der Grundlage der am Kapitalmarkt verfügbaren Daten ermittelt werden kann.

2.2.1.1. Bewertung bei ganzzahligen Jahreslaufzeiten

2.2.1.1.1. Bestimmung des Wertes einer Kupon-Anleihe

Der (heutige) Wert eines Finanztitels wird bestimmt, indem der (heutige) Wert der zukünftigen mit einem Finanztitel verbundenen Zahlungen berechnet wird. Für den Wert einer Kupon-Anleihe $KA_{T,K}$ mit einer Restlaufzeit von T Jahren und einem Kupon von K Prozent ist also der heutige Wert der noch offenen Zinszahlungen zuzüglich dem heutigen Wert der Kapitalrückzahlung am Ende der Laufzeit zu berechnen. Die Ermittlung des Gegenwartswertes zukünftiger Zahlungen erfolgt durch Abzinsung mit dem hier vorgegebenen Marktzinssatz in Form einer Durchschnittsrendite r:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

Für Ab- und Aufzinsungen werden üblicherweise Ab- und Aufzinsungsfaktoren verwendet, die aus der Durchschnittsrendite wie folgt ermittelt werden können:

$$\text{Abzinsungsfaktor} = \frac{1}{\text{Aufzinsungsfaktor}} = \frac{1}{(1+r)^t} = (1+r)^{-t}$$

Die Summe der mit der Durchschnittsrendite r abgezinsten Zahlungen Z_t ergibt den (rechnerischen) Wert einer Kupon-Anleihe $KA_{T,K}$. Dieser Wert $KA_{T,K}$ wird recht genau dem

Kurswert der Anleihe (ggf. zuzüglich Stückzinsen) entsprechen, vorausgesetzt, die Durchschnittsrendite wurde marktgerecht gewählt.

Bei jährlich gleichbleibenden (Kupon-)Zahlungen ist eine Alternative zu dieser Berechnungsweise die Verwendung von Rentenbarwertfaktoren:

$$KA_{T,K} = K \frac{(1+r)^T-1}{r(1+r)^T} + \frac{NW}{(1+r)^T}$$

Mit dieser Größe kann der heutige Wert regelmäßiger Zahlungen (hier Kuponzahlungen) mit einer geringeren Anzahl von Rechenschritten bestimmt werden. Seine Verwendung bietet sich insbesondere dann an, wenn die Restlaufzeit der Anleihe groß ist. Sowohl für Abzinsungsfaktoren als auch für Rentenbarwertfaktoren sind Tabellen verfügbar, aus denen die Werte für bestimmte Zinssätze abgelesen werden können. Allerdings finden derartige Tabellen aufgrund der Verbreitung von Taschenrechnern sowie Personalcomputern mit entsprechender Software heute kaum noch Verwendung. Daher wird auf eine Wiedergabe derartiger Tabellen verzichtet.

Das folgende grundlegende und einfache Beispiel zeigt, wie der Wert von Kupon-Anleihen berechnet werden kann, wenn eine einheitliche Durchschnittsrendite vorgegeben ist. Diese Art der Berechnung kann auf beliebige andere Finanztitel übertragen werden, sofern ihre Zahlungsreihe bekannt ist.

Berechnung des Wertes einer Kupon-Anleihe

Nominalwert	= NW	= 5.000
Nominalzinssatz	= K	= 8%
(Rest-)Laufzeit	= T	= 5 Jahre
Zinszahlung		= jährlich
Durchschnittsrendite (Marktrendite)	= r	= 10,6842%
Wert der Kupon-Anleihe	= $KA_{T,K}$	= ?
Kurswert der Kupon-Anleihe	= $KA_{T,K}$	= ?

Ermittlung des Wertes einer Kupon-Anleihe $KA_{T,K}$ bei gegebener Durchschnittsrendite r:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{T} Z_t\,(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r)^t} + \frac{NW}{(1+r)^T}$$

$$KA_{5,8\%} = \sum_{t=1}^{5} \frac{Z_t}{(1+0{,}1068)^t} = \sum_{t=1}^{5} \frac{400}{(1+0{,}1068)^t} + \frac{5.000}{(1+0{,}1068)^5}$$

$$KA_{5,8\%} = \frac{400}{(1+0{,}1068)^1} + \frac{400}{(1+0{,}1068)^2} + \frac{400}{(1+0{,}1068)^3} + \frac{400}{(1+0{,}1068)^4} + \frac{5.400}{(1+0{,}1068)^5} = 4.500$$

Ermittlung des Kurswertes einer Kupon-Anleihe $KA_{T,K}$ bei gegebener Durchschnittsrendite r:

$$KA_{5,8\%} = \frac{0{,}08}{(1+0{,}1068)^1} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}1068)^2} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}1068)^3} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}1068)^4} + \frac{1{,}08}{(1+0{,}1068)^5} = 0{,}90 = 90\%$$

Alternativ kann auch der Rentenbarwertfaktor verwendet werden:

$$KA_{T,K} = K\,\frac{(1+r)^T - 1}{r(1+r)^T} + \frac{NW}{(1+r)^T}$$

$$KA_{T,K} = 400\,\frac{(1+0{,}1068)^5 - 1}{0{,}1068(1+0{,}1068)^5} + \frac{5.000}{(1+0{,}1068)^5} = 4.500$$

2.2.1.1.2. Bestimmung der Durchschnittsrendite

Im letzten Abschnitt wurde die Durchschnittsrendite vorgegeben. Im folgenden Beispiel ist sie hingegen gesucht. Gegeben ist die vollständige Zahlungsreihe inclusive Kurswert. Das Maß der Durchschnittsrendite wird insbesondere für einen Vergleich verschiedener Finanztitel verwendet, für die die Kurswerte bzw. Anfangs(aus)zahlungen bekannt sind.

Auch die Aufgabenstellung, aus einer Reihe von Ein- und Auszahlungen eine durchschnittliche Verzinsung zu berechnen, ist aus der Investitionsrechnung bekannt. Stichwörter sind beispielsweise das Interne-Zinsfuß-Verfahren und die interne Rendite. Die Zielsetzung besteht darin, den (einheitlichen) Zinssatz zu ermitteln, mit dem die zukünftigen Zahlungen abgezinst werden müssen, damit deren Summe dem heutigen Marktwert des Wertpapiers (im übertragenen Sinne der Auszahlung für die Investition) entspricht. Nunmehr ist also die Variable r die Unbekannte der Gleichung.

Bei dem Versuch der konkreten Berechnung dieses Zinssatzes ergibt sich allerdings das Problem, daß die Gleichung meist nicht nach r aufgelöst werden kann. Die Berechnung von Gleichungen T-ten Grades erfolgt für $T > 2$ meist über lineare Interpolation. Für $T = 2$ bietet sich der Einsatz der quadratischen Gleichung an.

Steht ein Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel, Applix, Symphony, Lotus 1-2-3) zur Verfügung, kann die Durchschnittsrendite aber auch über "systematisches Ausprobieren" ermittelt werden. Des weiteren bieten die meisten Tabellenkalkulationsprogramme sowie besondere Taschenrechner (Renditerechner) spezielle Funktionen an, denen letztlich aber auch Verfahren des "systematischen Ausprobierens" zugrunde liegen.

Berechnung der Durchschnittsrendite von Kupon-Anleihen

Nominalwert	= NW	= 5.000
Nominalzinssatz	= K	= 8%
(Rest-)Laufzeit	= T	= 5 Jahre
Zinszahlung		= jährlich
Kurswert der Kupon-Anleihe	= $KA_{T,K}$	= 90%
Wert der Kupon-Anleihe	= $KA_{T,K}$	= 4.500
Durchschnittsrendite	= r	= ?

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

$$4.500 = \frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{400}{(1+r)^4} + \frac{5.400}{(1+r)^5}$$

$$r = 0{,}106842 = 10{,}6842\%$$

Berechnung über: Interpolation
oder ggf. Quadratische Gleichung
oder "systematisches Ausprobieren"

2.2.1.2. Bewertung bei gebrochenen Laufzeiten

Bisher wurde vereinfachend davon ausgegangen, daß (Zins-)Zahlungen immer nach einem Jahr oder einem ganzzahligen Vielfachen davon anfallen. Im weiteren soll auf die Problematik eingegangen werden, die bei unterjährigen (Zins-)Zahlungen entsteht.

2.2.1.2.1. Problematik der taggenauen Zinsberechnung

Das grundlegende Problem, welches in diesem Abschnitt behandelt wird, kann mit der Frage umschrieben werden, wieviele Geldeinheiten einem Anleger gutgeschrieben werden, wenn er sein Kapital für einen Zeitraum anlegt, der kleiner als ein Jahr ist. Grundsätzlich wird dem Anleger ein p.a.-Zinssatz r - bezogen auf die Anlageperiode in Tagen - gutgeschrieben. Für eine taggenaue Zinsberechnung stellen sich dabei folgende Fragen:

1. Wird der erste und letzte Tag der Kapitalanlage mitverzinst?
2. Wieviele Tage hat der Anleger sein Kapital angelegt? Werden volle Monate mit 30 Tagen angenommen oder wird die tatsächliche Anzahl der Tage (act) berücksichtigt?
3. Wieviele Tage hat ein Jahr bzw. für wieviele Tage ist der p.a.-Zinssatz definiert? Als Alternativen kommen die tatsächliche Anzahl von Tagen (act) in Betracht oder pauschal 360 oder 365 Tage.
4. Ist der Zinssatz als linearer, exponentieller oder kontinuierlicher Zinssatz definiert?

Die vierte Frage wird in den weiteren Abschnitten behandelt. Zur Veranschaulichung wird zunächst von der linearen Form der unterjährigen Zinsberechnung ausgegangen:

$$\text{Zinszahlung} = \frac{\text{Anlagebetrag} \cdot r \cdot \text{Tage der Anlagedauer}}{\text{Tage p.a.}}$$

Die zweite und dritte Frage kann unterschiedlich beantwortet werden. In diesem Zusammenhang sind folgende Verfahren üblich:

Beim Verfahren 30/360 werden volle Monate pauschal mit 30 Zinstagen berücksichtigt und das Jahr pauschal mit 360 Zinstagen. Ebenso ist es aber auch denkbar, das Verfahren act/360 anzuwenden. Dies bedeutet, daß die tatsächliche Anzahl der Tage in die Berechnung der Laufzeit der Kapitalanlage eingeht, das Jahr aber pauschal wiederum mit 360 Zinstagen angenommen wird. Neben anderen Kombinationen wird insbesondere auch das Verfahren act/act angewendet, wonach sowohl im Zähler als auch im Nenner der Zinsformel die tatsächliche Anzahl der Tage herangezogen wird.

Taggenaue Zinsbestimmung für den Fall linearer Zinsberechnung

Die grundlegende Formel lautet:

$$\text{Zinszahlung} = \frac{\text{Anlagebetrag} \cdot r \cdot \text{Tage der Anlagedauer}}{\text{Tage p.a.}}$$

Problem: Bestimmung der konkreten Anzahl der Tage der Geldanlage und des Zinsjahres

Anlagebetrag	=	100.000
Zinssatz	=	10%
Anlagebeginn	=	01.01.1995
Anlageende	=	11.02.1995
Usance/Verfahren	=	30/360

Bestimmung der Tage der Geldanlage: 1 Monat + 10 Tage = 40 Tage

Berechnung des Zinsbetrages:

$$\text{Zinszahlung} = \frac{100.000 \cdot 0{,}1 \cdot 40}{360} = 1.111{,}11$$

Hier wurde - wie meist üblich - davon ausgegangen, daß nur der erste Tag der Kapitalanlage mitverzinst wird.

2.2.1.2.2. Berechnung von Stückzinsen beim Kauf/Verkauf von Kupon-Anleihen

Bei der Berechnung des Verkaufspreises von Kupon-Anleihen müssen Stückzinsen berücksichtigt werden, wenn das Wertpapier zwischen zwei Zinszahlungsterminen verkauft wird. Der Wert einer Anleihe KA ("dirty price") setzt sich aus dem Kurswert und den Stückzinsen zusammen.

Falls also eine Kupon-Anleihe mit einer Restlaufzeit von beispielsweise 4,75 Jahren verkauft wird, so liegt die letzte Kuponzahlung 3 Monate zurück. Für diesen Zeitraum, für den noch keine Zinszahlung seitens des Emittenten der Kupon-Anleihe geleistet wurde, hat der Verkäufer der Anleihe einen Zinsanspruch. Dieser wird über die sogenannten Stückzinsen entgolten, die der Käufer der Anleihe bei Erwerb der Anleihe (sofort) zu bezahlen hat. Bezogen auf das folgende Beispiel bedeutet das, daß der Käufer dem Verkäufer der Anleihe 2% auf den Nominalwert an Stückzinsen zu zahlen hat.

Wenn auch dem Käufer der Anleihe die Stückzinsen im Rahmen der nächsten Zinszahlung "erstattet" werden, so ist doch zu berücksichtigen, daß die Stückzinsen quasi einem zinslosen Darlehen an den Verkäufer entsprechen, was sich in dem Kurswert der Anleihe niederschlagen wird. Um sich diesen Effekt vor Augen zu führen, könnte (in einer hier nicht dargestellten Rechnung) der Kurswert einer Anleihe für verschiedene Restlaufzeiten mit einer Nominalverzinsung von 10% sowie einem Marktzinssatz von 10% berechnet werden.

Berechnung von Stückzinsen bei Kupon-Anleihen

KA ("dirty price") = Kurswert + Stückzinsen

Nominalzinssatz	= K	= 8%
Nominalwert	= NW	= 5.000
(Rest-)Laufzeit	= T	= 4,75 Jahre
Zinszahlung		= jährlich
Kurs		= 90%
Stückzinsen		= ?
"dirty price"	= $KA_{T,K}$	= ?

Der Käufer der Kupon-Anleihe muß neben dem Kurswert Stückzinsen in Höhe von 2% (100) zahlen.

Der Berechnung liegt das Verfahren 30/360 zugrunde:

$$\text{Stückzinsen} = \frac{NW \cdot K \cdot (\text{Monate} \cdot 30 + \text{restliche Tage})}{360}$$

Der Wert der Anleihe KA ("dirty price") ist folglich 92 Prozent.

Dem Käufer der Anleihe werden insgesamt 4.500 + 100 = 4.600 belastet.

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Berechnen Sie die Kurse für die folgende Kupon-Anleihe, wenn die Durchschnittsrenditen bei 4%, 6%, 8% bzw. 10% liegen.

Nominalzinssatz	=	6%
(Rest-)Laufzeit	=	10 Jahre
Zinszahlung	=	jährlich

Verwenden Sie zur Berechnung sowohl die "einfache" Barwertformel als auch den Rentenbarwertfaktor.

B) Berechnen Sie die Durchschnittsverzinsung (Effektivverzinsung) von festverzinslichen Wertpapieren für die Kurse in Höhe von 60%, 80%, 100% und 120 Prozent. Legen Sie weiterhin folgende Daten zugrunde:

Nominalzinssatz	=	6%
(Rest-)Laufzeit	=	10 Jahre
Zinszahlung	=	jährlich

C) Berechnen Sie die Stückzinsen und den dirty price für folgende Kupon-Anleihen:

C1)	Nominalzinssatz	=	6%
	Nominalwert	=	100.000
	Restlaufzeit	=	9,25 Jahre
	Zinszahlung	=	jährlich
	Kurs	=	100%
C2)	Nominalzinssatz	=	12%
	Nominalwert	=	50.000
	Restlaufzeit	=	4,75 Jahre
	Zinszahlung	=	jährlich
	Kurs	=	95%
C3)	Nominalzinssatz	=	6%
	Nominalwert	=	1.000
	Restlaufzeit	=	5,5 Jahre
	Zinszahlung	=	halbjährlich
	Kurs	=	100%
C4)	Nominalzinssatz	=	7%
	Nominalwert	=	500.000
	Restlaufzeit	=	1,125 Jahre
	Zinszahlung	=	halbjährlich
	Kurs	=	103%

D) Warum und in welche Richtung werden die Kurse verzinslicher Finanztitel durch die in der Grafik genannten Einflußfaktoren beeinflußt?

E) Erläutern Sie den Grundaufbau des Gesamtmodells zur Analyse verzinslicher Finanztitel.

F) Was versteht man unter Stückzinsen und unter dem "dirty price"? Welchen Zweck sollen Stückzinsen erfüllen?

Lösungshinweise

A) $Kurs_A$ = 116,22%; $Kurs_B$ = 100%; $Kurs_C$ = 86,58%; $Kurs_D$ = 75,42%

B) r_A = 13,53%; r_B = 9,13%; r_C = 6%; r_D = 3,58%

C) C1) 100.000 + 4.500 = 104.500
C2) 47.500 + 1.500 = 49.000
C3) 1.000 + 0 = 1.000
C4) 515.000 + 13.125 = 528.125

Literatur

Thomas Braun. Arbitragefreie Bewertung und Anlagenberatung: Zwei Welten? "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1993), S. 817-838.

Wilfried Fuhrmann. Theorie effizienter Finanzmärkte. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1988), S. 546-552.

Eduard Gabele und Matthias Hochrein. Mikrocomputergestütztes Portfoliomanagement festverzinslicher Wertpapiere. "Die Bank", (1992), S. 164-168.

Günter Lassak. Bewertung festverzinslicher Wertpapiere am deutschen Rentenmarkt. Heidelberg 1992.

Bernd Rudolph. Zur Theorie des Kapitalmarktes. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1979), S. 1034-1067.

Ralf Schreyer und Friedrich Thießen. Arbitrage am Anleihemarkt. "Die Bank", (1991), S. 446-452.

2.2.1.2.3. Lineare, kontinuierliche und exponentielle Zinsberechnung

Die folgenden Beispiele verdeutlichen den grundlegenden Unterschied, der sich aus der linearen, kontinuierlichen bzw. exponentiellen Art der Zinsberechnung ergibt. Die Implikationen werden beispielhaft zunächst an einer Spareinlage und dann an einer Termineinlage betrachtet.

Bekanntlich werden die Zinsen bei einer normalen Spareinlage jeweils am Jahresende gutgeschrieben, wobei die lineare Form der unterjährigen Zinsberechnung üblich ist. Das führt dazu, daß der Kontostand am Ende eines (Zeit-)Jahres davon abhängt, wann der Grundbetrag angelegt wurde. Für die beiden im Beispiel beschriebenen Szenarien beträgt die Differenz der Endwerte in Abhängigkeit vom Beginn der Anlageperiode 250,00.

In dem Beispiel auf der Grundlage einer Termineinlage ist dieser "Zinseszinseffekt" noch größer, da die Zinsen monatlich gutgeschrieben und in der Folge mitverzinst werden. Daraus ergibt sich, daß eine Termineinlage mit einer "Effektivverzinsung" von 10% p.a. eine "tatsächliche" Verzinsung von 10,47% p.a. aufweist. Dieser Unterschied ist schon recht beträchtlich und sollte somit bei einem Vergleich verschiedener Anlage- und Kreditformen berücksichtigt werden.

Der Extremfall der Wirkung der linearen Zinsberechnung tritt dann auf, wenn die Zinsen täglich (oder sogar sekündlich) gutgeschrieben, wiederangelegt und in der Folge mitverzinst werden. Im Ergebnis würde sich in dem hier betrachteten Fall ein Endkapital ergeben, welches um gut 0,5 Prozentpunkte höher ist als der Basiszinssatz von 10 Prozent.

Falls diese Art der praktisch permanenten Zinsgutschrift und Wiederanlage vereinbart ist, spricht man von dem "kontinuierlichen Zinssatz" oder vom "Momentanzinssatz". Ergänzend anzumerken ist, daß selbstverständlich keine permanente Zinsgutschrift im Sinne eines "Nachtrags des Sparbuches" stattfinden muß. Die Berechnung der Zinsen erfolgt lediglich auf dieser Grundlage.

Problematik der linearen Zinsberechnung am Beispiel einer Spar- und Termineinlage

Spareinlage:

Anlagebetrag	=	100.000
Anlagedauer	=	ein Jahr
Anlageform	=	Spareinlage
Verzinsung	=	10% p.a.

Wie hoch ist das Endkapital nach einem Jahr? Es kommt darauf an!

Szenarium 1) Anlage am 1.1. und Verfügung am 31.12.

$$100.000\,(1+0{,}1) = 110.000$$

Szenarium 2) Anlage am 1.7. und Verfügung am 30.06.

$$100.000\,(1+\frac{0{,}1}{2})\,(1+\frac{0{,}1}{2}) = 110.250$$

---> Die Differenz beträgt 250.

Termineinlage

Anlagebetrag	=	100.000
Anlageform	=	Termineinlage
Zinsgutschrift	=	monatlich
Verzinsung	=	10% p.a.

$$\begin{aligned}\text{Endwert} &= 100.000\,(1+0{,}1/12)\,(1+0{,}1/12)\,....\,(1+0{,}1/12)\\ &= 100.000\,(1+0{,}1/12)^{12}\\ &= 100.000\,(1{,}1047131)\\ &= 110.471{,}31\end{aligned}$$

Kontinuierliche Zinsberechnung und der Zusammenhang von linearer und kontinuierlicher Verzinsung

Kontinuierliche Zinsberechnung:
- (fiktive) sekündliche Abhebung, Wiederanlage und Mitverzinsung der Zinsen
- unterstellt lineare unterjährige Zinsberechnung aufgrund infinitesimal kurzer Anlageperioden

kontinuierlicher Zinssatz R_{Tk} = 10%
Kapitaleinsatz = 100.000
Wert des Kapitals nach 6 Monaten = ca. 105.126,40
Wert des Kapitals nach 12 Monaten = ca. 110.515,60

kontinuierlicher Zinssatz = 10%	
Näherung: tägliche Kapitalisierung und Wiederanlage auf der Grundlage linearer Zinsberechnung	
Tage	Kapital
0	100.000,00
1	100.027,80
2	100.055,60
...	...
180	105.126,40
...	...
358	110.454,20
359	110.484,90
360	110.515,60

Berechnung der Endwerte über entsprechende Formel:

$$P_T = P_0 \, e^{R_{Tk} T}$$

mit: e = Eulersche Zahl (2,71828...)
P_T = Endwert in T
P_0 = (heutiger) Barwert oder Ertragswert

Für das Beispiel bedeutet das:

$$P_{0,5} = 100.000 \cdot 2{,}71828^{0,10 \cdot 0,5} = 105.127{,}11$$

bzw.

$$P_1 = 100.000 \cdot 2{,}71828^{0,10 \cdot 1} = 110.517{,}09$$

Der Zusammenhang von exponentieller und kontinuierlicher Verzinsung

Die Umrechnung eines kontinuierlichen Zinssatzes in einen exponentiellen Zinssatz und vice versa lautet:

$$R_{Te} = e^{R_{Tk}} - 1$$

$$0{,}105171 = 2{,}71828^{0,10} - 1$$

bzw.:

$$R_{Tk} = \ln(1 + R_T)$$

$$0{,}10 = \ln(1 + 0{,}10517)$$

Für das Beispiel bedeutet das :

$$P_T = 100.000\ (1 + 0{,}105171)^{0,5} = 105.127{,}11$$

bzw.

$$P_T = 100.000\ (1 + 0{,}105171)^{1} = 110.517{,}09$$

---> vgl. das Ergebnis auf der Grundlage der kontinuierlichen Zinsberechnung bei r_{Tk} = 10%

Wäre die exponentielle Zinsberechnung auch im unterjährigen Bereich üblich, so hätte die o.a. Spareinlage auch im zweiten Szenarium einen Wert von 110.000:

$$100.000\ (1+0{,}1)^{0,5}\ (1+0{,}1)^{0,5} = 110.000$$

$$100.000\ (1+0{,}1)^{1} = 110.000$$

Zusammenfassung: Exponentielle, lineare und kontinuierliche Zinsberechnung

Es ist ein Zinssatz von 10% p.a. vereinbart und es wird nach 6 Monaten über das Kapital verfügt. Die Endwerte sind abhängig von der Art der vereinbarten Zinsberechnung:

exponentielle Zinsberechnung (mit r_e):

$$100.000\ (1 + 0{,}10)^{0{,}5} = 104.881$$

lineare Zinsberechnung (mit r_l):

$$100.000\ (1 + 0{,}10\ /\ 2) = 105.000$$

kontinuierliche Zinsberechnung (mit r_k):

$$100.000 \cdot 2{,}71828^{0{,}10 \cdot 0{,}5} = 105.127$$

Der Zusammenhang der gezeigten Formeln ergibt sich über:

$$1 + r_l\,\tau = (1 + r_e)^{\tau} = e^{r_k\,\tau} \qquad \text{mit: } \tau = \text{Jahresbruchteil (z.B. 1/12)}$$

Die bisherigen Ausführungen verdeutlichen das Grundproblem einer Gegenüberstellung von Zinssätzen. Für einen Vorteilhaftigkeitsvergleich verschiedener Geldanlage- und Finanzierungsmöglichkeiten ist es also nicht ausreichend, die jeweils angegebenen p.a.-Zinssätze zu vergleichen, um so den höchst- und niedrigstverzinslichen Finanztitel zu identifizieren. Das Problem resultiert daraus, daß in einen Vergleich verschiedener Anlageformen neben dem Zinssatz auch die Art der Zinsberechnung einzubeziehen ist. Daher sind für einen Vergleich von Finanztiteln alle Zinssätze auf einen Referenzzinssatz mit einer bestimmten Art der Zinsberechnung umzurechnen.

Üblicherweise erfolgt die Zinsberechnung bei Verfügungen über das Kapital im unterjährigen Bereich linear. Das bedeutet, daß die Zinsen für unterjährige Anlageperioden ermittelt werden, indem man den p.a.-Zinssatz mit dem Jahresbruchteil multipliziert. Für eine Anlageperiode von einem halben Jahr wird dem Anleger also nach dem halben Jahr 50% des p.a.-Zinssatzes vergütet.

Die andere Art der Zinsberechnung, die für ganzjährige Anlageperioden üblich ist, ist die exponentielle Zinsberechnung. Überträgt man den Gedanken der exponentiellen Zinsberechnung auch auf den unterjährigen Bereich, würden dem Geldgeber nach einem halben Jahr weniger als 50% des p.a.-Zinssatzes vergütet. Würden sich die Marktteilnehmer auf diese Art der Zinsberechnung einigen, wären die verschiedenen Anlage- und Kreditformen besser vergleichbar.

Die Verwendung des kontinuierlichen Zinssatzes stellt die dritte Möglichkeit dar. Sie ergibt ebenso eine gute Vergleichbarkeit von Zinssätzen verschiedener Finanztitel. Hier wird dem Anleger nach 6 Monaten sogar mehr als 50% des p.a.-Zinssatzes gutgeschrieben. Diese Art der Zinsberechnung findet zunehmend Verwendung, so z.B. im Rahmen von Zinsstrukturkurvenschätzungen und in der Optionsbewertungstheorie.

2.2.1.2.4. Konventionen zur Berechnung von Durchschnittsrenditen bei gebrochenen Laufzeiten (AIBD/ISMA und Moosmüller)

Wie zuletzt gezeigt, bedarf es zusätzlich zur Angabe des Zinssatzes der Information über die Art der unterjährigen Zinsberechnung. Entsprechend problematisch ist daher die Frage, wie hoch die "richtige" Durchschnittsrendite einer Zahlungsreihe ist, wenn unterjährige Zahlungen zu berücksichtigen sind. Daher gibt es verschiedene Konventionen zur Berechnung von Durchschnittsrenditen bei gebrochenen Laufzeiten.

Grundsätzlich gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Durchschnittsrendite für den vorliegenden Fall. Die grundlegende Frage ist, welcher Vergleichsmaßstab (Alternativanlage) bei der Berechnung gelten soll. Die Übersicht zeigt, welche Verfahren in welchen Institutionen vorwiegend eingesetzt werden bzw. wurden. Da insbesondere die Verfahren nach AIBD und nach Moosmüller relevant sind, sollen diese im weiteren genauer dargestellt werden. Das in der Bundesrepublik nach der PAngV vorgesehene Verfahren entspricht inzwischen der AIBD-Methode.

Nach dem Moosmüller-Verfahren wird zunächst die gebrochene Laufzeit am Anfang der Gesamtperiode so festgelegt, daß alle folgenden Zahlungen im gleichen Abstand von hier 12 Monaten erfolgen. Diese Zahlungen werden dann auf das Ende der gebrochenen Laufzeit mit r_{Moos} exponentiell abgezinst, wobei im Exponenten die Anzahl der Perioden steht, um die jeweils abzuzinsen ist. Die Summe dieser so abgezinsten Zahlungen wird dann mit r_{Moos} linear auf den Betrachtungszeitpunkt diskontiert. Der sich ergebende Wert muß der Anfangsauszahlung (Kurs plus Stückzinsen) entsprechen. Anzumerken ist, daß der gesuchte Zinssatz r_{Moos} meist nur durch Interpolation berechnet werden kann.

Für das Verfahren nach ISMA (vorher auch als Verfahren nach AIBD und Renkur bezeichnet) ist der Vergleichsmaßstab ein Bankkonto mit ausschließlich exponentieller Zinsberechnung. Da unterjährige Zinsen auch exponentiell berechnet werden, ist es daher unerheblich, ob gebrochene Laufzeiten vorliegen oder nicht. Deutlich wird das zugrundeliegende Prinzip, wenn man sich die Exponenten anschaut, die nur bei diesem Verfahren auch nicht-ganzzahlig sein dürfen.

Neben den genannten Verfahren werden in der finanzwirtschaftlichen Praxis u.a. die SIA-Methode (Securities Industry Association) und die US Treasury-Methode des Schatzamtes der Vereinigten Staaten angewendet. Die Methoden unterscheiden sich insbesondere darin, ob die gebrochenen Laufzeiten an den Anfang oder an das Ende der Gesamtlaufzeit gelegt werden und wie die Abzinsung für die gebrochene Laufzeit erfolgt. Darüber hinaus ergeben sich Unterschiede, wenn von beispielsweise halbjährlichen Kupons ausgegangen wird. Auf eine detaillierte Darstellung dieser Methoden soll hier verzichtet werden, da es mit den gängigen Finanz-Taschenrechner möglich ist, alle wichtigen Varianten zu rechnen.

In dem Beispiel soll die Durchschnittsrendite berechnet werden, die sich für eine Kupon-Anleihe mit einem Kurs von 100%, einer Restlaufzeit von 2,5 Jahren und einem Nominalzinssatz von 10% ergibt. Die Zahlungsreihe unter Berücksichtigung der Stückzinsen kann der Abbildung entnommen werden.

Im weiteren wird insbesondere das Verfahren nach AIBD/ISMA verwendet.

Konventionen für die Zinsberechnung bei gebrochenen Laufzeiten

Vergleichsmaßstab für die Effektivzinssätze sind Finanztitel mit

* ausschließlich exponentieller Zinsberechnung (also auch im unterjährigen Bereich)
  ---> (AIBD/ISMA/Renkur und neu: PAngV)

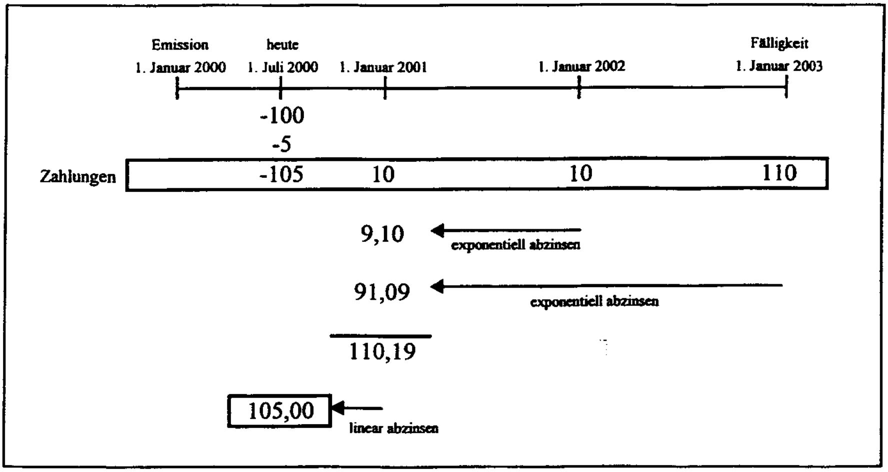
* linear/exponentiell gemischter Zinsberechnung
  ---> Moosmüller - gebrochene Laufzeit am Anfang
  (ggf. auch halbjährliche Intervalle, dann mit exponentieller Umrechnung des Periodenzinssatzes)
  ---> SIA (Securities Industry Association) - gebrochene Laufzeit am Anfang
  (ggf. auch halbjährliche Intervalle mit multiplikativer Umrechnung des Periodenzinssatzes und letzte Periode mit Geldmarktkonvention)
  ---> US Treasury-Methode des Schatzamtes der Vereinigten Staaten - gebrochene Laufzeit am Anfang
  (ggf. auch halbjährliche Intervalle mit liearer Umrechnung des Periodenzinssatzes)
  ---> Braeß/Fangmeyer - gebrochene Laufzeit am Anfang (jährliche Intervalle)
  ---> alt: PAngV - gebrochene Laufzeit am Ende (jährliche Intervalle)

* kontinuierlicher Zinsberechnung

AIBD/Renkur/ISMA	Moosmüller	Braeß/Fangmeyer
Börsen Zeitung Börsen-Daten-Zentrale Monatsberichte/ Euromarkt-Anleihen Statistische Beihefte der Bundesbank Kursblatt: Frankfurter Börse teilweise: Privatbanken, Genossenschaftsbanken gesetzlich vorgeschriebener Vergleichsmaßstab (PAngV)	vorwiegend: institutioneller Rentenhandel Kursblätter Münchener und Düsseldorfer Börse teilweise Großindustrie Kursmakler Länderfinanzministerien	vorwiegend: Sparkassensektor teilweise: Landesbanken andere Kreditinstitute institutionelle Anleger

Methode nach Moosmüller

Emissionszeitpunkt	= 1.1.2000
Ausgangszeitpunkt (heute)	= 1.7.2000
Fälligkeit	= 1.1.2003
Restlaufzeit (hier unterstellt)	= 2,5 Jahre
Nominalzinssatz	= 10%
Zinszahlung	= jährlich
Nominalwert	= 100
Kurs z.Zt.	= 100%



---> Zahlung in t=0 = Kurs + Stückzinsen = 105

$$105 = \frac{10 + \dfrac{10}{1 + r_{Moos}} + \dfrac{110}{(1 + r_{Moos})^2}}{1 + r_{Moos}\, 0{,}5}$$

$$r_{Moos} = 9{,}8895\%$$

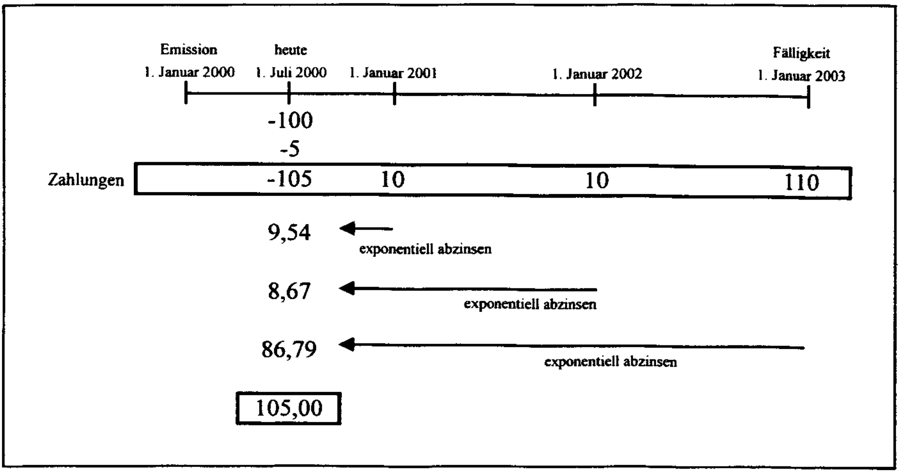
Um das grundlegende Prinzip zu verdeutlichen, wurde auf die taggenaue Berechnung über die Konvention act/act verzichtet.

Methode nach AIBD/ISMA

---> ist an den Euromärkten üblich; zukünftig auch PAngV

Emissionszeitpunkt	= 1.1.2000
Ausgangszeitpunkt (heute)	= 1.7.2000
Fälligkeit	= 1.1.2003
Restlaufzeit (hier unterstellt)	= 2,5 Jahre
Nominalzinssatz	= 10%
Zinszahlung	= jährlich
Nominalwert	= 100
Kurs z.Zt.	= 100%

Wie hoch ist die Durchschnittsrendite?



$$105 = \frac{10}{(1 + r_{AIBD})^{0,5}} + \frac{10}{(1 + r_{AIBD})^{1,5}} + \frac{110}{(1 + r_{AIBD})^{2,5}}$$

$$r_{AIBD} = \mathbf{9{,}9442\%}$$

Um das grundlegende Prinzip zu verdeutlichen, wurde auf die taggenaue Berechnung über die Konvention act/act verzichtet.

2.2.1.3. Bestimmung der Durchschnittsrendite unter Berücksichtigung von Steuern und Transaktionskosten

Die Bewertung von Finanztiteln nach Steuern basiert darauf, zunächst sämtliche mit dem Finanztitel verbundenen Zahlungen zu ermitteln. Dazu gehören neben den Zinszahlungen beispielsweise Steuerzahlungen und Gebühren. Aus diesen einzelnen Zahlungen wird dann für jeden Zeitpunkt der Saldo dieser Zahlungen nach Steuern und Kosten berechnet.

Für das weitere Vorgehen gibt es dann zwei Varianten, analog den dargestellten Möglichkeiten der Bewertung von Finanztiteln ohne Berücksichtigung von Steuern und Kosten. Die erste basiert darauf, die Zahlungsüberschüsse nach Steuern und Kosten mit einer Durchschnittsrendite zu diskontieren, die ebenfalls um Steuern und Kosten korrigiert wurde. Es ergibt sich als Vergleichskriterium für Finanztitel somit der Barwert nach Steuern und Kosten. Dieser Vorgehensweise wird hier allerdings nicht gefolgt.

Die hier gewählte zweite Variante basiert auf der Idee, für den zu bewertenden Finanztitel die Durchschnittsrendite (auf der Grundlage von AIBD/ISMA) nach Steuern und Kosten zu ermitteln. Die Art und Weise der Berechnung dieser Durchschnittsrendite erfolgt analog zum oben dargestellten Verfahren, also wiederum meist über Interpolation. Als Vergleichskriterium für Finanztitel wird die Durchschnittsrendite nach Steuern und Kosten herangezogen.

In dem vorliegenden Beispiel wird von einem (Spitzen-)Steuersatz von 20% ausgegangen. Die Depotgebühren, die bei der Steuerbemessungsgrundlage zu berücksichtigen sind, werden mit 0,5% p.a. auf den Nominalwert angenommen.

Durchschnittsrendite nach Steuern und Kosten

Kurs = 96%
Kupon = 6%
Zinszahlungen = jährlich
(Rest-)Laufzeit = 4 Jahre
Kosten = 0,5% p.a. des Nominalwertes

Individueller Grenzsteuersatz des Anlegers = 20%

	-Kurs	1	2	3	4	Rendite (AIBD/ISMA)
Zahlungen vor Steuern	-0,960	0,060	0,060	0,060	1,060	7,19%
Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Steuern		0,011	0,011	0,011	0,011	
Zahlungen gesamt	-0,960	0,044	0,044	0,044	1,044	5,54%

2.2.1.4. Bestimmung der Durchschnittsrendite unter Berücksichtigung des Bonitätsrisikos

Bisher wurde von sicheren Tilgungs- und Zinszahlungen ausgegangen, so daß Ausfall- und Bonitätsrisiken nicht zu berücksichtigen waren. Im weiteren sollen Ansätze aufgezeigt werden, die bei gegebener Durchschnittsrendite einen Rückschluß auf die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeit der Zahlungen erlauben bzw. bei gegebener Ausfallwahrscheinlichkeit die Berechnung der Bonitätsprämie ermöglichen.

Die Vorgehensweise zur Berechnung des (Mindest-)Zinssatzes für eine bonitätsrisikobehaftete Anleihe erfolgt hier auf Grundlage der Überlegung, daß der Erwartungswert des Kapitalendwertes (zumindest) mit dem Endwert identisch sein muß, den eine bonitätsrisikofreie Anlage aufweist. Alternativ wäre es ebenso denkbar, die Rechnung auf einen (erwarteten) Nettobarwert von null abzustellen. Im Falle der Risikoneutralität wäre der so berechnete Zinssatz akzeptabel. Im Falle von Risikoaversion wäre ein weiterer Risikoaufschlag auf den Zinssatz zu berücksichtigen.

Die weiteren Darstellungen beschäftigen sich in erster Linie mit der Berechnung der Mindestrisikoprämie. Für Überlegungen, die insbesondere Korrelationen zwischen den Ausfallrisiken verschiedener Kredite bzw. Anleihen beinhalten und häufig portfoliotheoretisch begründet sind, sei auf die Literatur verwiesen.

Der Berechnung der Risikoprämie für Anleihen mit Laufzeiten von mehr als einem Jahr liegt das gleiche Prinzip zugrunde. Im zweiten Beispiel sind für einige exemplarisch ausgewählte Datenkonstellationen die Zinssätze für risikobehaftete Kapitalanlagen angegeben.

Berechnung der Bonitätsprämie I

Wie hoch müßte ein Kredit- oder Wertpapierzinssatz sein, wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit 2% beträgt?

Laufzeit des Kredites		= 1 Jahr
Kreditbetrag	= KB	= 1.000
risikofreier Marktzinssatz für ein Jahr	= r_f	= 8%
Ausfallwahrscheinlichkeit (Totalausfall)		= 2%
Rückzahlungswahrscheinlichkeit	= P_R	= 98%
Ausfallquote	= QA	= 100%
Kreditzinssatz incl. Bonitätsprämie	= r_K	= ?

Ziel: Quantifizierung der (Mindest-)Bonitätsprämie

Ansatz:
- Kredit ist wie eine Investition zu behandeln.
- Der Erwartungswert des Endwertes E(Endwert) der risikoreichen Anlage muß mindestens so hoch sein, wie der einer risikofreien Anlage.
- alternativ: Beide Alternativen müssen den gleichen (erwarteten) Barwert aufweisen.

Bedingung: E(P_T sichere Alternative) = E(P_T unsichere Alternative)

$$
\begin{aligned}
1.000\,(1+0{,}08) &= 1.000\,(1+r_K)\,0{,}98 + 0\,(1+r_K)\,0{,}02 \\
1.080 &= 980\,(1+r_K) \\
1.080/980 &= 1+r_K \\
1.080/980-1 &= r_K \\
r_K &= 10{,}2\%
\end{aligned}
$$

Die (Mindest-)Bonitätsprämie ist demnach 2,2 Prozent.

r_K als Formel ausgedrückt:

$$r_K = \frac{1+r_f}{P_R} - 1$$

Wie hoch müßte ein Kredit- oder Wertpapierzinssatz sein, wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit 30% beträgt? **Vorschläge: 5,3%, 15,1%, 36,4% oder 54,3%?**

Berechnung der Bonitätsprämie II

Berechnung des Risikozinssatzes (r_f + Bonitätsprämie) für endfällige Kredite mit Laufzeiten von mehr als einem Jahr

$$R_K = \sqrt[t]{\frac{(1+R_f)^t}{(1-P_A) + P_A(1-QA)}} - 1$$

KB	Kreditbetrag
R_f	(risikofreier) laufzeitkongruenter Zinssatz (Spot Rate)
R_K	Kreditzinssatz (Spot Rate)
BP	Bonitätsprämie
P_A	Ausfallwahrscheinlichkeit ($1-P_R$)
QA	Quote der ausfallenden Zahlungen
t	Zeitpunkt der Kreditrückzahlung
$Z(P_A)$	Zahlung aus dem Kredit bei Kreditausfall
$Z(P_R)$	Zahlung aus dem Kredit bei vollständiger Vertragserfüllung
$Z(r_f)$	Zahlung bei risikofreier Anlage
E(Z)	Erwartungswert der Zahlungen aus dem Kredit

R_f	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	4,00%
R_k	13,40%	11,12%	120,00%	20,88%	11,68%	7,22%
BP	3,40%	1,12%	110,00%	10,88%	1,68%	3,22%
P_A	3,00%	3,00%	50,00%	9,00%	3,00%	3,00%
QA	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	50,00%	100,00%
t	1	3	1	1	1	1
KB	100	100	100	100	100	100
$Z(P_A)$	0	0	0	0	55,838	0
$Z(P_R)$	113,402	137,216	220	120,879	111,675	107,216
E(Z)	110	133,1	110	110	110	104
$Z(r_f)$	110	133,1	110	110	110	104

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Berechnen Sie den Kurs, die Stückzinsen und den dirty price einer Kupon-Anleihe mit folgenden Daten:

Nominalzinssatz	=	7%
Restlaufzeit	=	3 Jahre und 8 Monate
Zinszahlung	=	jährlich
Marktrendite	=	7% (exponentielle Zinsberechnung)

Erklären Sie, warum der Kurs von 100% abweicht.

B) Berechnen Sie den Endwert des folgenden Termingeldkontos:

Anlagebetrag	=	100.000
Zinssatz	=	10% p.a. (lineare Zinsberechnung)
Anlagedauer	=	jeweils zwei Monate, insgesamt ein Jahr

Welcher Endwert hätte sich ergeben, wenn ein festverzinsliches Wertpapier für ein Jahr mit einer Durchschnittsrendite von 10% gekauft worden wäre? Wie ist der Unterschied zu erklären?

C) Berechnen Sie den Endwert einer Kapitalanlage von 5.000 für einen Anlagezeitraum von 9 Monaten und einer Verzinsung von 12% p.a., wenn die Art der unterjährigen Zinsberechnung

C1) linear
C2) exponentiell
C3) kontinuierlich ist.
C4) Welcher Endwert ergibt sich für diese Anlage bei linearer Zinsberechnung ungefähr, wenn das Kapital incl. Zinsen täglich abgehoben und wieder-angelegt wird?

D) Ein Anleger mit einem Grenzsteuersatz von 20% (33%, 45%) fragt nach der Anleihe mit der höchsten Rendite nach Steuern. Es stehen folgende Wertpapiere zur Auswahl:

Wertpapier	A	B	C
Kurswert	96%	100,5%	106%
Kupon	6%	8%	10%
Zinszahlungen	jährlich	jährlich	jährlich
Laufzeit	4 Jahre	4 Jahre	4 Jahre

Die Kosten belaufen sich auf 0,5% p.a. des Nominalwertes.
Welches sind die jeweils höchstverzinslichen Anleihen?
Welche Aspekte sind bei der Anlageempfehlung darüber hinaus zu beachten?

E) Berechnen Sie die Zinszahlung für eine Anlage in Höhe von 500.000 vom 07.01.1996 bis zum 28.09.96 unter Verwendung verschiedener Verfahren der Zinsberechnung bei einem Zinssatz von 12 Prozent:

Verfahren	act/act	30/act	30/360	30/365
exponentielle Zinsberechnung				
lineare Zinsberechnung				
kontinuierliche Zinsberechnung				

Der erste Tag der Kapitalanlage soll nicht verzinst werden, der letzte Tag soll hingegen verzinst werden.

F) Erklären Sie, was unter dem "kontinuierlichen Zinssatz" verstanden wird.

G) Für folgendes Wertpapier sollen die Renditen nach der PAngV/AIBD/ISMA berechnet werden:

Ausgangszeitpunkt	=	30.09.94
Nominalzinssatz	=	10%
Zinszahlung	=	jährlich
(Rest-)Laufzeit	=	2,5 Jahre
Kurs	=	95%

H) Welche zwei Möglichkeiten der Berücksichtigung von Kosten und Steuern bei einem Vergleich von Finanztiteln gibt es?

I) Vereinfachtes Beispiel für eine ausfallrisikobehaftete Anleihe: (Handelsblatt vom 12.01.94)

- Bank für Aw. UDSSR (von 1989)
- Restlaufzeit ca. 2 Jahre
- Nominalzinssatz 7%
- Kurswert 84%
- Kapitalmarktrendite 7%

Berechnen Sie für das Wertpapier die Höhe der Bonitätsprämie.

J) Wie könnte ein Anleger das Risiko prinzipiell berücksichtigen?

Lösungshinweise

A)

$$Kurs = -0{,}0233+\frac{0{,}07}{(1+0{,}07)^{\frac{8}{12}}}+\frac{0{,}07}{(1+0{,}07)^{1+\frac{8}{12}}}+\frac{0{,}07}{(1+0{,}07)^{2+\frac{8}{12}}}+\frac{1{,}07}{(1+0{,}07)^{3+\frac{8}{12}}} = 0{,}9995$$

Kurs = 0,9995
Stückzinsen = (0,07 / 12) · 4 = 0,0233
dirty Price = 0,9995 + 0,0233 = 1,0228

B) Endwert = 110.426
Endwert (WP) = 110.000
Grund = unterjährige Zinsberechnung

C)

C1)	linear	=	5.450,00
C2)	exponentiell	=	5.443,57
C3)	kontinuierlich	=	5.470,87
C4)	tägliche Verfügung	=	ca. wie unter C3) ermittelt; genau 5.470,79

D)

Steuersatz: 20,00% und Kostensatz: 0,50%							
		Kurs -1	1	2	3	4	Rendite
Kupon = 6,00%	Zahlungen vor Steuern	-0,960	0,060	0,060	0,060	1,060	7,19%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,011	0,011	0,011	0,011	
96,00%	Zahlungen gesamt	-0,960	0,044	0,044	0,044	1,044	5,54%
8,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,005	0,080	0,080	0,080	1,080	7,85%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,015	0,015	0,015	0,015	
100,50%	Zahlungen gesamt	-1,005	0,060	0,060	0,060	1,060	5,86%
10,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,060	0,100	0,100	0,100	1,100	8,18%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,019	0,019	0,019	0,019	
106,00%	Zahlungen gesamt	-1,060	0,076	0,076	0,076	1,076	5,87%

Steuersatz: 33,00% und Kostensatz: 0,50%							
6,00%	Zahlungen vor Steuern	-0,960	0,060	0,060	0,060	1,060	7,19%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,018	0,018	0,018	0,018	
96,00%	Zahlungen gesamt	-0,960	0,037	0,037	0,037	1,037	4,81%
8,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,005	0,080	0,080	0,080	1,080	7,85%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,025	0,025	0,025	0,025	
100,50%	Zahlungen gesamt	-1,005	0,050	0,050	0,050	1,050	4,88%
10,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,060	0,100	0,100	0,100	1,100	8,18%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,031	0,031	0,031	0,031	
106,00%	Zahlungen gesamt	-1,060	0,064	0,064	0,064	1,064	4,69%

Steuersatz: 45,00% und Kostensatz: 0,50%							
6,00%	Zahlungen vor Steuern	-0,960	0,060	0,060	0,060	1,060	7,19%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,025	0,025	0,025	0,025	
96,00%	Zahlungen gesamt	-0,960	0,030	0,030	0,030	1,030	4,13%
8,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,005	0,080	0,080	0,080	1,080	7,85%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,034	0,034	0,034	0,034	
100,50%	Zahlungen gesamt	-1,005	0,041	0,041	0,041	1,041	3,99%
10,00%	Zahlungen vor Steuern	-1,060	0,100	0,100	0,100	1,100	8,18%
	Kosten		0,005	0,005	0,005	0,005	
Kurs	Steuern		0,043	0,043	0,043	0,043	
106,00%	Zahlungen gesamt	-1,060	0,052	0,052	0,052	1,052	3,59%

E)

Verfahren	act/act	30/act	30/360	30/365
Anlagedauer in Tagen	265	261	261	261
Anzahl Tage des Jahres	366	366	360	365
exponentielle Zinsberechnung	42.757,71	42.085,89	42.816,54	42.205,93
lineare Zinsberechnung	43.442,62	42.786,89	43.500,00	42.904,11
kontinuierliche Zinsberechnung	45.385,72	44.670,93	45.448,31	44.798,64

G) 12,375%

I) Berechnung der Effektivverzinsung:
(über Interpolation oder die Quadratische Gleichung)

$$84 = \frac{7}{(1+r_k)^1} + \frac{107}{(1+r_k)^2}$$

Durchschnittsrendite = 17,1067%
Berechnung der Bonitätsprämie
17,1067% - Marktrendite = Bonitätsprämie
17,1067% - 7% = 10,1067%

Literatur

Klaus Dibbern. Preisangabenverordnung nach EG-Richtlinie. "Die Bank", (1993), S. 125-127.

B. Fritzsche. Zinsstruktur und Zinsprognose: das Problem der Risikoprämien. Berlin 1980.

Lutz Kruschwitz und Rolf O. A. Decker. Effektivrenditen bei beliebigen Zahlungsstrukturen. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1994), S. 619-628.

Henner Schierenbeck und Bernd Rolfes. Effektivzinsrechnung und Marktzinsmethode. "Die Bank", (1987), S. 25-33.

Henner Schierenbeck und Bernd Rolfes. Effektivzinsrechnung in der Bankpraxis. "Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung", (1986), S. 766-778.

Hartmut Schmidt. Einzelkredit und Kreditportefeuille. Bankpolitik, finanzielle Unternehmensführung und die Theorie der Finanzmärkte, Festschrift für H.-J. Krümmel zur Vollendung des 60. Lebensjahres, Hrsg. von B. Rudolph und J. Wilhelm, Berlin 1988, S. 245-943.

Klaus Spremann. Konsistente Zins-Tableaus. "Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung", (1989), S. 919-943.

Manfred Steiner. Rating. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1992), S. 509-515.

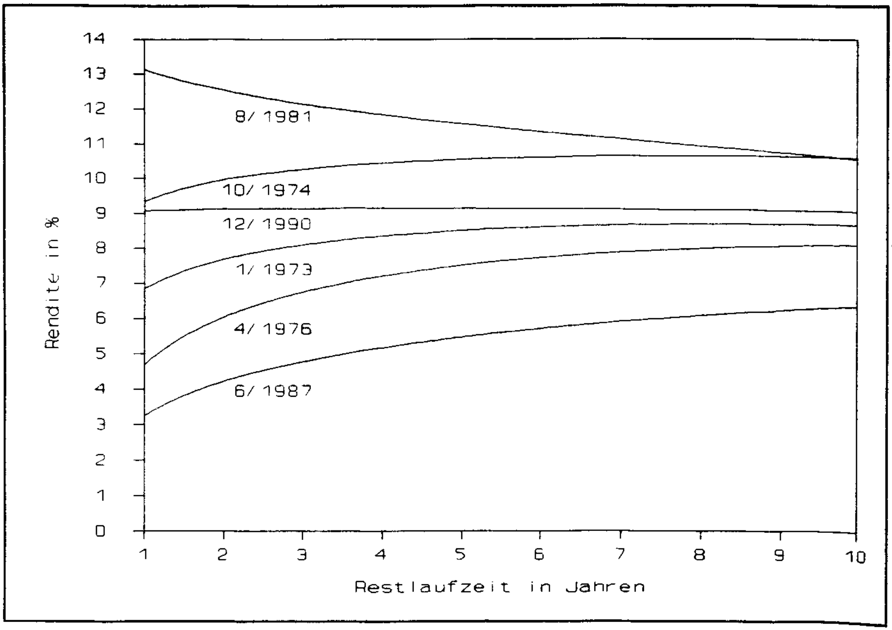
2.2.1.5. Einfluß der Festzinsbindungsdauer auf die Durchschnittsrendite

Ein wesentliches Element im Rahmen der Analyse verzinslicher Finanztitel ist die Zinsstrukturkurve. Eine Zinsstrukturkurve gibt grundsätzlich den Zusammenhang zwischen der Restlaufzeit festverzinslicher Finanztitel und der Höhe der dafür gezahlten Marktzinssätze an.

Die weiteren Betrachtungen erfolgen auf der Basis der (alten) Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank, die den Zusammenhang von Restlaufzeit und Durchschnittsrendite von Kupon-Anleihen angibt. Die Werte der Renditenstrukturkurve werden von der Deutschen Bundesbank regelmäßig in den Wertpapierstatistiken veröffentlicht. Die folgende Abbildung vermittelt einen ersten Eindruck über mögliche Ausprägungen der Renditenstrukturkurve in den letzten Jahrzehnten.

Neben der Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank gibt es eine Vielzahl anderer Definitionen von Zinsstrukturkurven. So nutzt beispielsweise auch die Deutsche Bundesbank einen weiteren Ansatz zur Schätzung der Zinsstruktur. Insbesondere die Ansätze, die den Zusammenhang zwischen der Restlaufzeit und der Verzinsung von Zerobonds angeben, finden in der Theorie und teilweise auch Praxis zunehmend Beachtung.

Renditenstrukturkurven



Zinsstrukturkurven werden u.a. für folgende Zwecke genutzt:

* Überblick über das Zinsgefüge am Markt für verzinsliche Finanztitel
* Anhaltspunkt für die Konditionenpolitik der Banken
* Grundlage für das Konzept der Marktzinsmethode
* Anhaltspunkt für faire Werte festverzinslicher Wertpapiere
* Anhaltspunkt für Vorfälligkeitsentschädigungen im Kreditgeschäft
* Anhaltspunkt für Zinsprognosen
* Berechnung fairer Kurse von Zinstermingeschäften

2.2.1.5.1. Die Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank

2.2.1.5.1.1. Schätzung der Renditenstrukturkurve

Ausgangspunkt der weiteren Berechnungen sind Kurse verschiedener Kupon-Anleihen, die für einen Zeitpunkt (oder während eines kurzen Zeitraums) am Kapitalmarkt Gültigkeit haben. Aus den Kursen können unter Berücksichtigung von Stückzinsen die Durchschnittsverzinsungen der Anleihen ermittelt werden.

Die grundlegende Problematik der Bestimmung der Renditenstrukturkurve besteht darin, aus der Vielzahl der ermittelten Durchschnittsverzinsungen für Kupon-Anleihen eine durchgängige und stetige Renditenstrukturkurve zu berechnen, welche die am Markt beobachteten Zinssätze möglichst gut repräsentiert. Bei dem Versuch, die Höhe der Durchschnittsverzinsung auf die Laufzeit von Kupon-Anleihen zurückzuführen, ergibt sich das Problem, daß die Durchschnittsverzinsung insbesondere auch von der Höhe der Nominalverzinsung (Kupon) der Anleihe abhängt. Der sogenannte Kuponeffekt bezeichnet den Sachverhalt, daß die Durchschnittsrenditen zweier Finanztitel bei identischer Restlaufzeit aber unterschiedlichem Kupon regelmäßig voneinander abweichen.

Eine Erklärung für den Kuponeffekt liegt darin, daß Kupon-Anleihen mit identischer Restlaufzeit aber unterschiedlichem Kupon in der Regel eine voneinander abweichende Duration (durchschnittliche Bindungsdauer des eingesetzten Kapitals) aufweisen. Ein weiterer Grund für den Kuponeffekt ist in der steuerlichen Ungleichbehandlung von Zinserträgen und Kursgewinnen bzw. Kursverlusten für Privatpersonen zu sehen.

Aufgrund des auch in der Empirie zu beobachtenden Kupon-Effektes verwendet die Deutsche Bundesbank daher als erklärende Variable für die Durchschnittsrendite von Kupon-Anleihen neben der Laufzeit der Kupon-Anleihen auch die Höhe deren Nominalverzinsung. Die konkrete Berechnung der Renditenstrukturkurve basiert auf der multiplen Regressionsanalyse.

Im folgenden wird zunächst das (ältere) Schätzverfahren der Deutschen Bundesbank in allgemeiner Form erläutert. Für die anschließende exemplarische Darstellung des Schätzverfahrens wurden der Börsen Zeitung vom 27. Februar 1987 die Werte für 148 Bundesanleihen entnommen. Dieser Zeitpunkt wurde gewählt, weil hier eine normale Renditenstrukturkurve vorlag, die für die Interpretation der Ergebnisse und die im weiteren dargelegten Rechnungen geeignet ist.

Im Vorgriff auf die weiteren Darstellungen ist schon hier der Hinweis nützlich, daß die so ermittelten Durchschnittsrenditen $\hat{r}_{T,K}$ keine Spot Rates R_T darstellen, da die Durchschnittsrenditen sich nicht auf Zerobonds beziehen, sondern auf Kupon-Anleihen mit einer jährlichen Zinszahlung in Höhe von K.

Offensichtlich ist, daß die Durchschnittsrenditen $r_{T,K}$ für eine bestimmte Restlaufzeit T aber verschiedene Kupons K nicht identisch sein müssen. Insofern ist für die eindeutige Bezeichnung von Durchschnittsrenditen die Angabe der Höhe des verbundenen Kupons K unerläßlich. Eine spezielle Variante wäre die Definition, daß die Durchschnittsrenditen für eine Restlaufzeit mit der Höhe der korrespondierenden Kupons K identisch sind. Dieses ist immer dann der Fall, wenn der Wert der verbundenen Kupon-Anleihe (zum Zeitpunkt der Kuponzahlung) genau 100% beträgt.

Die im Rahmen der Schätzung verwendeten Variablen sind:

$\bar{i}$	=	Anzahl der in die Schätzung eingehenden Wertpapiere mit der Laufvariablen i
$r_{T,K,i}$	=	aus dem am Kapitalmarkt beobachteten Kurs berechnete (empirische) interne Rendite einer Anleihe mit der Laufvariablen i mit Fälligkeit in T und einer Nominalverzinsung K
$\hat{r}_{T,K}$	=	geschätzte interne Rendite einer Anleihe mit Fälligkeit in T und einer Nominalverzinsung K
T_i	=	Restlaufzeit der Anleihe mit der Laufvariablen i
K_i	=	Nominalverzinsung (Kupon) der Anleihe mit der Laufvariablen i
$\bar{K}$	=	durchschnittliche Nominalverzinsung aller in die Schätzung eingegangenen Anleihen
b_0 bis b_4	=	(zu schätzende) Regressionskoeffizienten
e_i	=	Residuum bei Schätzung der Renditen der Anleihe mit der Laufvariablen i

Kuponeffekt aufgrund steuerlicher Ungleichbehandlung von Zinserträgen und Kursgewinnen bei Privatpersonen

Wertpapier A	Laufzeit = 1 Jahr Nominalverzinsung = 12% Kurs = 100% Rendite vor Steuern = 12% Rendite nach Steuern = 6% (Grenzsteuersatz hier 50%)
Wertpapier B	Laufzeit = 1 Jahr Nominalverzinsung = 6% Kurs = ? Rendite vor Steuern ist 12% bei einem Kurs von ca. 94% Rendite nach Steuern ist 6% bei einem Kurs von ca. 97% (--> entspricht einer Rendite vor Steuern von ca. 9%) (Grenzsteuersatz hier 50%) **Kurs in der Realität = ca. 94% oder ca. 97%?**

Aufgrund des Kuponeffektes müßten für Anleihen mit (Rest-)Laufzeiten von einem Jahr Renditen vor Steuern von 9 bis 12% zu beobachten sein!

Schätzung der Renditenstrukturkurve durch die Deutsche Bundesbank

1) Beobachtung von $\bar{i}$ Kursen festverzinslicher Wertpapiere (Ende Juli 1993 sowie im Beispiel für Ende Februar 1987 waren das 130 Titel).

2) Berechnung der Durchschnittsrenditen nach AIBD.

3) Es ergeben sich $\bar{i}$ Wertetripel mit Restlaufzeit T_i, Nominalverzinsung K_i und Rendite $r_{T,K,i}$.

4) Diese werden in eine gemischt-logarithmische Schätzfunktion mit T_i und K_i als erklärende und $r_{T,K,i}$ als zu erklärende Variable eingesetzt :

$$r_{T,K,i} = b_0 + b_1 T_i + b_2 \ln T_i + b_3 K_i + b_4 \ln K_i + e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, \bar{i}$$

5) Nach Durchführung der Regressionsschätzung ergibt sich:

$$\hat{r}_{T,K} = b_0 + b_1 T + b_2 \ln T + b_3 K + b_4 \ln K$$

Die Werte der Regressionskoeffizienten b_0 bis b_4 sind Resultat der Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

6) Die Schätzwerte für die Renditen im Laufzeitbereich von T = 1 bis 10 ($\hat{r}_{1,\bar{K}}$ bis $\hat{r}_{10,\bar{K}}$) ergeben sich aus der ermittelten Schätzfunktion (5), wobei $\bar{K}$ für die durchschnittliche Nominalverzinsung aller in die Schätzung eingegangenen $\bar{i}$ Anleihen steht. Für die zuletzt genannte Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\hat{r}_{T,\bar{K}} = b_{\bar{K}} + b_1 T + b_2 \ln T$$

mit:

$$b_{\bar{K}} = b_0 + b_3 \bar{K} + b_4 \ln \bar{K}$$

7) Selbstverständlich können auch alternativ zu $\bar{K}$ die Renditenstrukturkurven für andere Nominalzinssätze K berechnet werden:

$$\hat{r}_{T,K} = b_K + b_1 T + b_2 \ln T$$

mit:

$$b_K = b_0 + b_3 K + b_4 \ln K$$

Zu bedenken ist, daß die über diesen Weg berechneten Zinsstrukturkurven umso ungenauer werden, je deutlicher K von $\bar{K}$ abweicht.

Beispiel zur Schätzung der Renditenstrukturkurve I

Der Börsen Zeitung vom 27. Februar 1987 wurden die Kurse, Nominalzinssätze sowie Fälligkeiten für alle Bundesanleihen entnommen und daraus die Durchschnittsrenditen nach AIBD berechnet (siehe den Auszug aus den Daten).

Nr.	Emission	Emission von	Kurs in %	Fälligkeit	Restlaufzeit (in Jahren)	Kupon in %	Durchschnittsrendite in % (nach AIBD)
1	Bundesanleihe	1977	100,20	1. 4. 1987	0,091	6,750	4,445
2	Bundesobligation	1982	100,40	1. 4. 1987	0,091	9,250	4,708
3	Bundesobligation	1982	100,40	1. 4. 1987	0,091	9,000	4,478
56	Bundesanleihe	1980	109,85	1. 7. 1990	3,349	8,250	4,967
57	Bundesbahn	1980	109,00	1. 7. 1990	3,349	8,000	4,997
58	Bundesobligation	1985	104,75	20. 7. 1990	3,402	6,500	4,935
145	Bundesanleihe	1986	102,95	20. 12. 1996	9,839	6,500	6,088
146	Bundesanleihe	1987	100,80	20. 1. 1997	9,925	6,125	6,014
147	Bundesanleihe	1987	97,90	20. 2. 1997	10,010	5,750	6,036
148	Bundespost	1985	104,35	2. 6. 1997	10,290	7,000	6,404
149	Bundesbahn	1987	99,05	30. 7. 1997	10,449	6,125	6,246
						$\bar{K} = 7{,}639$	

Die multiple Regressionsanalyse ergibt für die Schätzfunktion

$$\hat{r}_{T,\bar{K}} = b_0 + b_1\, T + b_2 \ln T + b_3\, \bar{K} + b_4 \ln \bar{K}$$

das Ergebnis

$$\hat{r}_{T,\,7{,}639\%} =$$

$$0{,}114187 + 0{,}001037\, T + 0{,}006998 \ln T + (-0{,}255599)\, 0{,}07639$$

$$+\ 0{,}022011 \ln 0{,}07639$$

oder kurz:

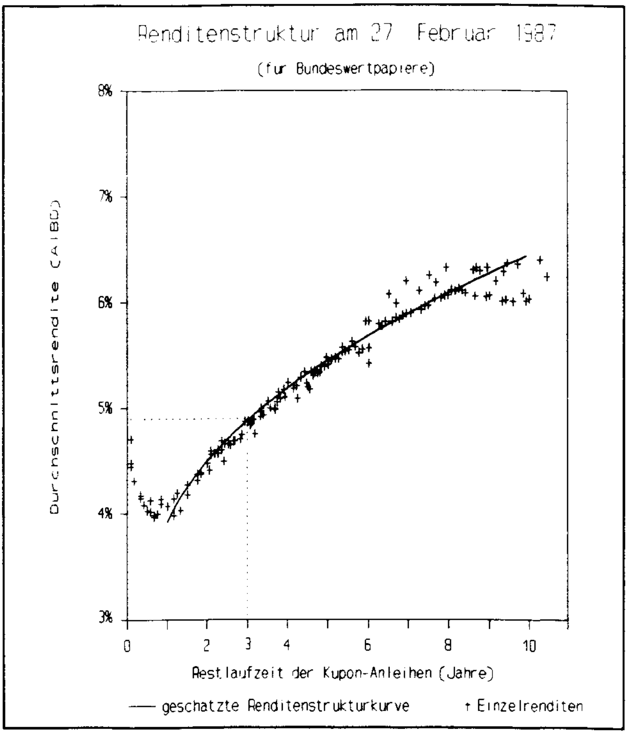
$$\hat{r}_{T,\,7{,}639\%} = 0{,}038052 + 0{,}001037\, T + 0{,}006998 \ln T$$

Beispiel zur Schätzung der Renditenstrukturkurve II

Mit dieser Funktion können die (geschätzten) Durchschnittsrenditen für alle Laufzeiten von T = 1 bis 10 berechnet werden. Aus der Tabelle und der Abbildung gehen die geschätzten Werte hervor. Für eine Kupon-Anleihe mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren und einer Nominalverzinsung von 7,639% gilt beispielsweise:

$$\hat{r}_{3,\,7{,}639\%} = 0{,}038052 + 0{,}001037 \cdot 3 + 0{,}006998 \ln 3 = 4{,}885\%$$

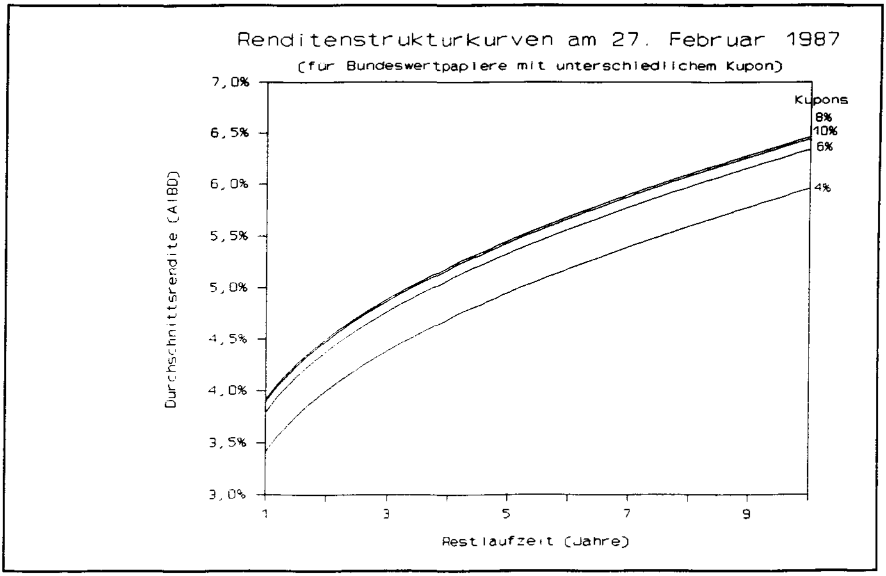
Jahre	Rendite
1	3,9088
1,5	4,2444
2	4,4975
2,5	4,7055
3	**4,8850**
3,5	5,0447
4	5,1900
4,5	5,3242
5	5,4498
5,5	5,5683
6	5,6811
6,5	5,7889
7	5,8926
7,5	5,9927
8	6,0897
8,5	6,1840
9	6,2758
9,5	6,3655
10	6,4532
durchschnittlicher Kupon: 7,639%	



Dieser Renditenstrukturkurve liegen festverzinsliche Wertpapiere mit einem Kupon von 7,639% zugrunde. Das muß bei allen auf diesen Daten basierenden Rechnungen berücksichtigt werden!

Der Kuponeffekt

$\hat{r}_{T,K}$ = 0,114187 + 0,001037T + 0,006998 ln T + (-0,255599) K + 0,022011 ln K



Diesen Renditenstrukturkurven liegen festverzinsliche Wertpapiere mit unterschiedlichen Kupons zugrunde.

Gründe für den Kuponeffekt:

1) Die steuerliche Ungleichbehandlung von Kuponerträgen und Kursgewinnen bzw. Kursverlusten bei privaten Haushalten:
---> je niedriger der Kupon desto niedriger die (Brutto-)Rendite (vor Steuern)

2) Der Kupon beeinflußt die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer ("Duration"):
---> je höher der Kupon desto niedriger die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer und desto niedriger die (Burutto-)Rendite (bei normaler Zinsstrukturkurve, sonst umgekehrt!)

(3) Bestimmte Anleger (z.B. Versicherungen) haben Interesse an hohen und gleichmäßigen Cash Flows:
---> je höher der Kupon desto niedriger die (Brutto-)Rendite)

2.2.1.5.1.2. Ableitung von Indikatoren der Renditenstruktur

Für jeden Kupon K werden alle geschätzten Durchschnittsrenditen einer Renditenstrukturkurve $\hat{r}_{T,K}$ entsprechend der Schätzfunktion durch drei Parameter vollständig determiniert. Daher können statt der Regressionskoeffizienten der Schätzfunktion auch andere Indikatoren verwendet werden, wie z.B. $\hat{r}_{1,K}$, $\hat{r}_{5,K}$ und $\hat{r}_{9,K}$. Ebenso ist es möglich, die in der Grafik veranschaulichten Parameter für das Niveau NIV_K, die Steigung STE_K und die Krümmung $KRÜ_K$ der Zinsstrukturkurve zu nutzen, die wie folgt definiert sein sollen:[1]

$$NIV_K = \hat{r}_{1,K}$$

$$STE_K = \frac{\hat{r}_{9,K} - \hat{r}_{1,K}}{8}$$

$$KRÜ_K = \hat{r}_{5,K} - \hat{r}_{1,K} - 4\ STE_K$$

Somit können die einzelnen Werte der Renditenstrukturkurve auch über folgende Funktion abgebildet werden:

$$\hat{r}_{T,K} = NIV_K + STE_K\ (T - 1) + KRÜ_K\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln T)$$

Zu bedenken ist, daß auch die Indikatoren der Zinsstrukturkurve NIV_K, STE_K und $KRÜ_K$ nur für den jeweiligen Kupon K gelten. Die Herleitung dieser und der weiteren Funktionen basiert auf kanonischen Variablentransformationen (siehe Anhang) und ist hier nicht weiter von Interesse.

Im nächsten Schritt wird der Zusammenhang dieser Indikatoren untersucht. Die Ergebnisse sind aus der im weiteren angegebenen Tabelle ersichtlich. So kann festgestellt werden, daß mit zunehmendem Niveau der Zinsstrukturkurve ihre Steigung im Durchschnitt aller Fälle abgenommen hat. Mit zunehmender Steigung war im Durchschnitt eine größere Krümmung der Renditenstrukturkurve verbunden. Dieser Sachverhalt spiegelt sich in den Indikatoren $NIV_{\bar{K}}$, $STE_{ne,\bar{K}}$ und $KRÜ_{ne,\bar{K}}$ wider. Es ergibt sich die Funktion (siehe Anhang):

$$\hat{r}_{T,\bar{K}} = A + NIV_{\bar{K}}\ B + STE_{ne,\bar{K}}\ C + KRÜ_{ne,\bar{K}}\ D$$

mit:

$$A = 0{,}001297 - 0{,}001297\ T + 0{,}023815\ \ln T$$
$$B = 0{,}988957 + 0{,}011040\ T - 0{,}250510\ \ln T$$
$$C = 0{,}191170 - 0{,}191170\ T + 4{,}337004\ \ln T$$
$$D = 0{,}537665 - 0{,}537665\ T + 1{,}957616\ \ln T$$

Schließlich können auch die Zinssätze für Finanztitel mit einer Festzinsbindung unter einem Jahr einbezogen werden. Die Überlegungen erfolgen analog. Das Ergebnis ergibt sich in Form der Variablen GEM_{ne} in folgender Weise:

$$GEM_{ne} = -0{,}0045 + NIV_{\bar{K}}\ 0{,}99 + STE_{ne,\bar{K}}\ (-1{,}88) + KRÜ_{ne,\bar{K}}\ (-2{,}08)$$

Mittels dieser Funktionen können nun alle Geld- und Kapitalmarktzinssätze auf diese wenigen Indikatoren zurückgeführt werden. Die Variabilität dieser Indikatoren kann dann

1 Diese Parameter ließen sich selbstverständlich auch anders definieren.

letztlich als Ausgangspunkt zur Analyse des Marktzinsrisikos genutzt werden, worauf in einem der weiteren Abschnitte noch näher eingegangen wird.

Für die Einschätzung des Marktzinsrisikos und die Relevanz von Marktzinsszenarien ist es interessant, sich die Verteilungsparameter für die Werte der historischen Indikatoren anzuschauen, da diese letztlich alle Marktzinssätze recht gut repräsentieren. Zu diesem Zweck wurden für den Zeitraum 1/1967 bis 10/1991 (also für ca. 24 Jahre) die Verteilungen der oben eingeführten Werte ermittelt. So ist beispielsweise festzustellen, daß die geschätzte Marktrendite für ein Jahr Restlaufzeit zwischen 3,160% und 13,140% lag. Für eine Szenarioanalyse bezüglich der Wirkungen potentieller Marktzinsänderungen dürfte folglich eine Variation der Zinssätze in diesem Bereich besonders wichtig sein.

Da diese Berechnungen auf den von der Deutschen Bundesbank veröffentlichten Daten beruhen, wobei die jeweiligen durchschnittlichen Kupons $\bar{K}$ aber nicht angegeben sind, konnten die Renditenstrukturkurven bezüglich des zugrundeliegenden Kupons nicht unterschieden werden. Insofern gibt die Tabelle die Verteilungsparameter an, die sich auf der Grundlage der jeweiligen durchschnittlichen Kupons in den Beobachtungszeitpunkten ergeben haben.

Zusammenfassung:

* Ausgangspunkt der Berechnung aller Modellzinssätze ist immer die Ermittlung von Marktzinssätzen.
* Es gibt eine Vielzahl von Marktzinssätzen, die häufig aber nicht direkt beobachtbar sind, da sie erst aus Kursen abgeleitet werden müssen. Verschiedene angegebene Zinssätze werden nach verschiedenen Renditenberechnungsverfahren ermittelt, die für weitere Analysen bekannt sein müssen.
* Da es nicht "den wahren Marktzinssatz" gibt, sollten möglichst viele Informationen (Zinssätze, Kurse usw.) genutzt werden, um daraus eine möglichst gute Annäherung an "die wahren Marktzinssätze" zu erhalten.
* Als Ausgangspunkt dafür ist die Renditenstrukturkurve zu schätzen.
* Die Renditenstrukturkurve faßt zunächst alle Informationen zusammen, die in den Kursen (bonitätsrisikofreier) festverzinslicher Wertpapiere enthalten sind.
* Die Regressionsschätzung erfolgt auf der Grundlage der "Methode der kleinsten Quadrate".
* Nach der Schätzung der Renditenstrukturkurve sind alle weiteren Modellzinssätze durch drei Indikatoren determiniert:
  - b_K, b_1 und b_2 oder
  - $\hat{r}_{1,K}$, $\hat{r}_{5,K}$ und $\hat{r}_{9,K}$ oder
  - NIV_K, STE_K und $KRÜ_K$ oder
  - NIV_K, $STE_{ne,K}$ und $KRÜ_{ne,K}$
* Die Volatilität dieser Indikatoren stellt somit die "Quelle des Marktzinsrisikos" dar.

Ausblick:

Der nächste Schritt besteht darin, alle für die Wertpapieranalyse notwendigen weiteren Zinssätze aus dieser Renditenstrukturkurve berechnen zu können. Daraus können dann wiederum alle Kurse für verzinsliche Wertpapiere, Zins-Futures sowie auch Konditionen im Kundengeschäft der Banken abgeleitet werden.

Indikatoren der Zinsstruktur I

Beschreibung der Renditenstrukturkurve nun über:

$$\hat{r}_{T,K} = \mathbf{NIV}_K + \mathbf{STE}_K\,(T-1) + \mathbf{KRÜ}_K\,(0{,}53767 - 0{,}53767\,T + 1{,}957616\,\ln T)$$

hier mit $K = \bar{K} = 7{,}639$ Prozent:

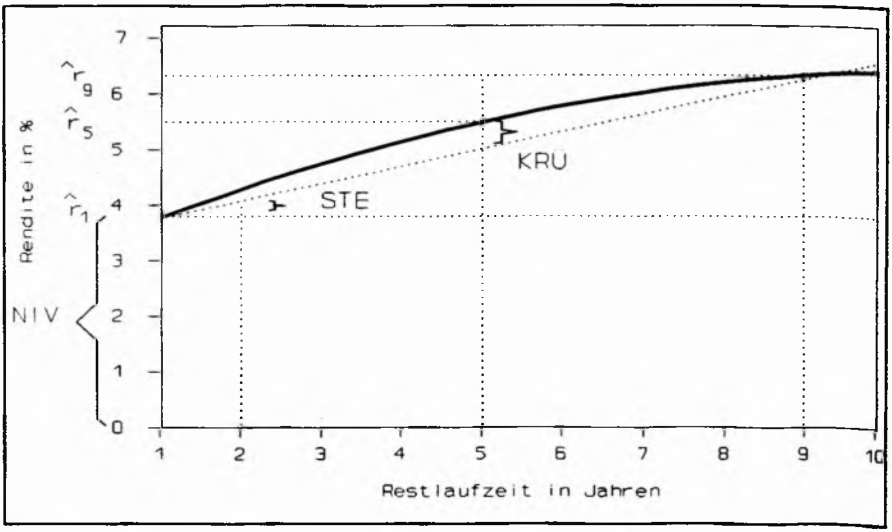
$$\mathrm{NIV}_{7,639\%} = \hat{r}_{1,\,7,639\%} = 0{,}03909 = 3{,}909\%$$

$$\mathrm{STE}_{7,639\%} = \frac{\hat{r}_{9,\,7,639\%} - \hat{r}_{1,\,7,639\%}}{8} = 0{,}00296 = 0{,}296\%$$

$$\mathrm{KRÜ}_{7,639\%} = \hat{r}_{5,\,7,639\%} - \hat{r}_{1,\,7,639\%} - 4\,\mathrm{STE}_{7,639\%} = 0{,}00357 = 0{,}357\%$$

Auf der Grundlage der Indikatoren für die vorher geschätzte Renditenstrukturkurve ergibt sich für die Schätzfunktion in diesem Fall:

$$\hat{r}_{T,\,7,639\%} = 0{,}03909 + 0{,}00296\,(T-1) + 0{,}00357\,(0{,}53767 - 0{,}53767\,T + 1{,}957616\,\ln T)$$



Indikatoren der Zinsstruktur II

Die Schätzfunktion lautet: $\hat{y}_i = b_1 + b_2 x_i$.					
Zeile	Variable 1	Variable 2	Parameter der Schätzung		
			Konstante	Regressions-koeffizient	Bestimmtheitsmaß
	$(\hat{y}_i)$	(x_i)	(b_1)	(b_2)	(R^2)
A	$STE_{er,\bar{K}}$	$NIV_{\bar{K}}$	0,00524	-0,05776	0,734
B	$KRÜ_{er,\bar{K}}$	$STE_{\bar{K}}$	0,000548	2,215452	0,861

Der empirische Zusammenhang zwischen den Indikatoren $NIV_{\bar{K}}$, $STE_{\bar{K}}$ und $KRÜ_{\bar{K}}$ wird über die Einführung zweier neuer Indikatoren berücksichtigt:

$$\mathbf{STE_{ne,\bar{K}} = STE_{\bar{K}} - 0{,}00524367 + 0{,}05776\ NIV_{\bar{K}} = -0{,}0000272}$$
$$\mathbf{KRÜ_{ne,\bar{K}} = KRÜ_{\bar{K}} - 0{,}00054836 - 2{,}215452\ STE_{\bar{K}} = -0{,}0035287}$$

mit:

$STE_{ne,\bar{K}}$ = nicht erklärter Teil der Steigung
$KRÜ_{ne,\bar{K}}$ = nicht erklärter Teil der Krümmung
$STE_{er,\bar{K}}$ = erklärter (geschätzter) Teil der Steigung
$KRÜ_{er,\bar{K}}$ = erklärter (geschätzter) Teil der Krümmung

Die Indikatoren $STE_{ne,\bar{K}}$ und $KRÜ_{ne,\bar{K}}$ beschreiben die "unübliche" Steigung bzw. Krümmung der Zinsstrukturkurve. Mittels dieser Indikatoren kann die Renditenstrukturkurve beschrieben werden als:

$$\mathbf{\hat{r}_{T,\bar{K}} = A + NIV_{\bar{K}}\ B + STE_{ne,\bar{K}}\ C + KRÜ_{ne,\bar{K}}\ D}$$

(immer) mit:

$$\mathbf{A = 0{,}001297 - 0{,}001297\ T + 0{,}023815\ \ln T}$$
$$\mathbf{B = 0{,}988957 + 0{,}011040\ T - 0{,}250510\ \ln T}$$
$$\mathbf{C = 0{,}191170 - 0{,}191170\ T + 4{,}337004\ \ln T}$$
$$\mathbf{D = 0{,}537665 - 0{,}537665\ T + 1{,}957616\ \ln T}$$

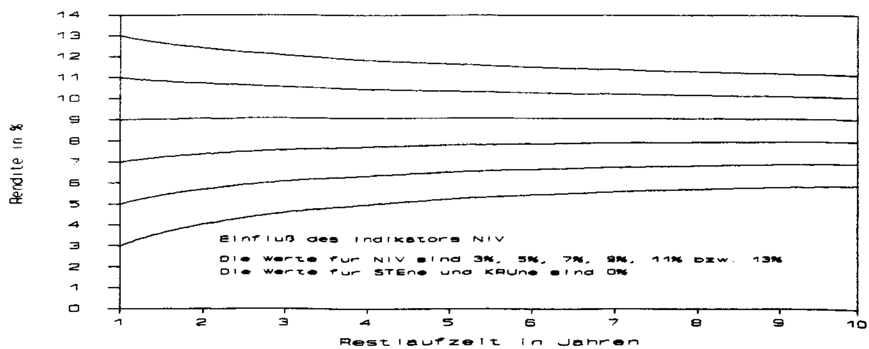
Auf der Grundlage der Werte der Indikatoren für die vorher geschätzte Renditenstrukturkurve ergibt sich für die Schätzfunktion in diesem Fall:

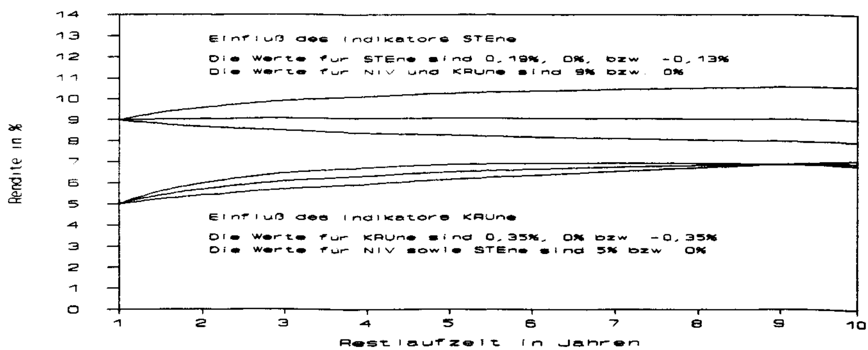
$$\mathbf{\hat{r}_{T,\bar{K}} = A + 0{,}03909\ B + (-0{,}0000272)\ C + (-0{,}0035287)\ D}$$

Verteilungsparameter für die Indikatoren der Zinsstruktur

Januar 1967 bis Oktober 1991 (ca. 24 Jahre) (alle Angaben in Prozent)

	$\hat{r}_{1,\bar{K}} = NIV_{\bar{K}}$	$\hat{r}_{5,\bar{K}}$	$\hat{r}_{9,\bar{K}}$	$STE_{\bar{K}}$	$KRÜ_{\bar{K}}$	$STE_{er,\bar{K}}$	$STE_{ne,\bar{K}}$	$KRÜ_{er,\bar{K}}$	$KRÜ_{ne,\bar{K}}$
Mittelwert	6,711	7,616	7,805	0,137	0,358	0,137	0,000	0,358	0,000
Stdabw.	2,052	1,433	1,243	0,138	0,330	0,119	0,071	0,307	0,123
Minimum	***3,160***	5,080	5,630	-0,299	-0,495	-0,235	***-0,132***	-0,607	***-0,346***
Maximum	***13,140***	11,580	10,800	0,419	1,135	0,342	***0,188***	0,983	***0,346***





2.2.1.5.2. Der Deutsche Rentenindex REX

Der REX ist ein Kursindex für den deutschen Rentenmarkt, der ca. fünfundachtzig Prozent des täglichen Börsenumsatzes in deutschen Renten (Kupon-Anleihen) widerspiegelt. Der Index stellt einen gewichteten Durchschnitt von dreißig synthetischen Anleihen dar, der alle Laufzeitbereiche von einem Jahr bis zu zehn Jahren und drei Kuponklassen abdeckt.

Die Berechnung des REX erfolgt in fünf Schritten:

1) Zunächst werden für alle umlaufenden Bundesobligationen, Bundesanleihen und Schatzanweisungen die aktuellen Renditen nach der AIBD-Methode auf Basis der Schlußkurse an der Frankfurter Wertpapierbörse ermittelt (wie beim Verfahren der Deutschen Bundesbank).
2) Dann wird mit Hilfe der ermittelten Renditen der Bundespapiere eine Renditenstrukturkurve nach folgendem Regressionsansatz geschätzt:
$r_{T,K,i} = b_0 + b_1 T_i + b_2 \ln(T_i) + b_3 T_i^2 + b_4 T_i^3 + b_5 K_i + b_6 K_i^2 + e_i \quad i = 1, 2, \ldots, \bar{i}$
Es ist offensichtlich, daß die verwendete Schätzfunktion der um einige Komponenten modifizierten Form der Schätzfunktion der Deutschen Bundesbank entspricht. Auch hier wird der Kupon der Papiere gesondert berücksichtigt, um Renditeverzerrungen aufgrund des Kuponeffektes zu erfassen.
3) Nun werden die Renditen von 30 synthetischen Kupon-Anleihen berechnet. Da diese synthetischen Wertpapiere nicht an der Börse gehandelt werden, erfolgt die Berechnung ihrer Renditen aus der geschätzten Renditenstrukturkurve. Damit wird sichergestellt, daß der REX auf den aktuellen Marktdaten basiert und immer für die gleichen (wenn auch synthetischen) Kupon-Anleihen gilt. Die Renditeberechnung erfolgt für synthetische Kupon-Anleihen, die sich aus drei verschiedenen Kuponklassen (6%; 7,5% und 9%) und zehn Laufzeitklassen (1 Jahr bis 10 Jahre) ergeben. Die 30 Renditen der 30 synthetischen Kupon-Anleihen am 27.2.1987 können der Abbildung entnommen werden.
4) Sind die (Durchschnitts-)Renditen der 30 synthetischen Kupon-Anleihen ermittelt, können daraus die Kurse dieser Anleihen berechnet werden. Zusammen mit den 30 Renditen werden diese 30 Kurse von der Frankfurter Wertpapierbörse veröffentlicht und über verschiedene Datendienste (wie Datastream, Reuters) angeboten.
5) In einem nächsten Schritt werden Sub-Indizes gebildet:
   - 10 Sub-Indizes (für die Laufzeiten von 1 Jahr bis zu 10 Jahren) werden durch Gewichtung der jeweils 3 (kuponabhängigen) Renditen der synthetischen Kupon-Anleihen gewonnen. Daraus werden auch die korrespondierenden Kurse berechnet.
   - Ein Sub-Index wird durch Gewichtung aller 30 Renditen der synthetischen Kupon-Anleihen bestimmt (die Entwicklung dieses Indizes ist in der folgenden Grafik wiedergegeben). Auch hier wird der korrespondierende Kurs ermittelt.

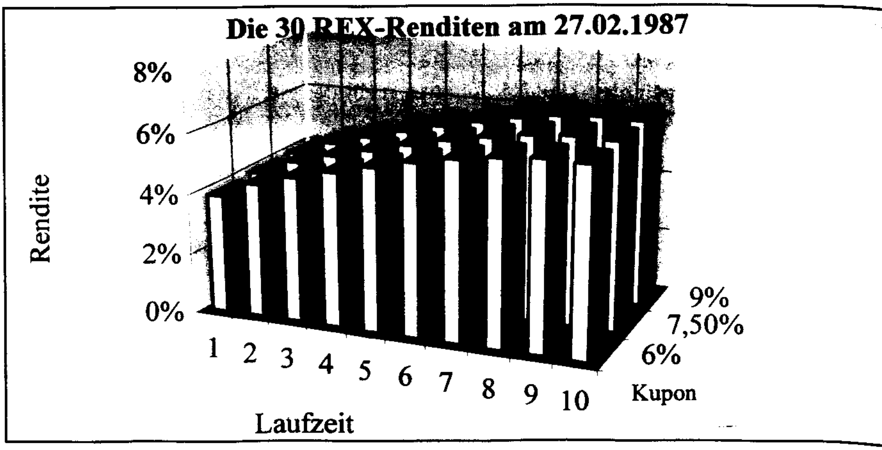
   Die Gewichtungsfaktoren (vgl. die Tabelle) orientieren sich an dem Marktvolumen der einzelnen Kupon- und Laufzeitklassen. Sie sollen ggf. an neue Marktstrukturen angepaßt werden.

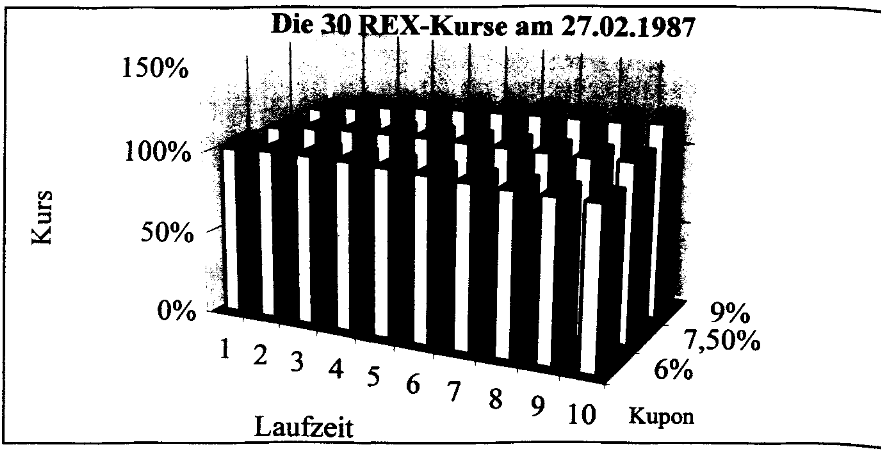
Neben dem "normalen REX" wird noch der REX-P (P steht für Performance) bestimmt. Dieser Performance-Index gibt (analog zum Performance-Index DAX) Auskunft auf die Frage, wie sich der Wert eines der Marktstruktur entsprechenden Depots entwickelt hätte, wenn alle Zahlungen aus diesem Depot sofort wieder in das Depot reinvestiert worden wären. Beide Indexverläufe können aus der Grafik für einen Zeitraum von ca. 28 Jahren ersehen werden.

Der REX I am 27.2.1987

Der Schätzansatz für den deutschen Rentenindex REX lautet:

$$r_{T,K,i} = b_0 + b_1 T_i + b_2 \ln(T_i) + b_3 T_i^2 + b_4 T_i^3 + b_5 K_i + b_6 K_i^2 + e_i \quad i = 1, 2, \ldots, \bar{I}$$





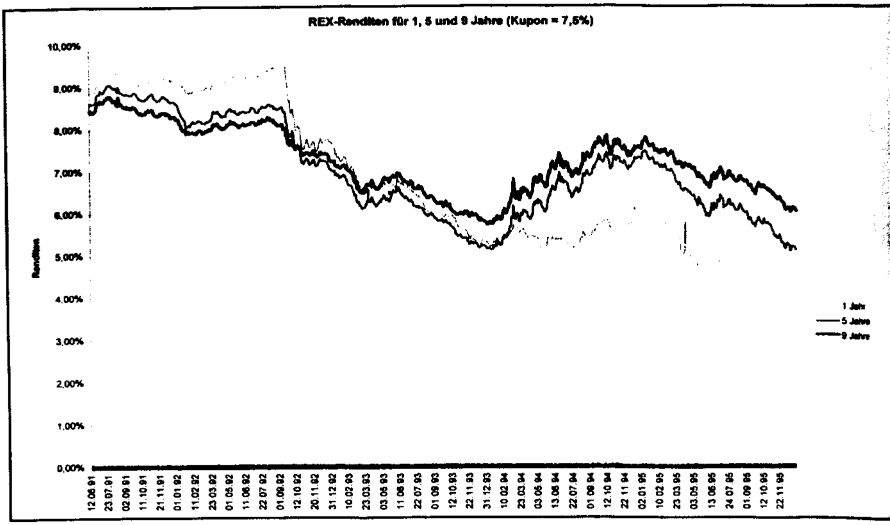
Der REX II am 27.2.1987

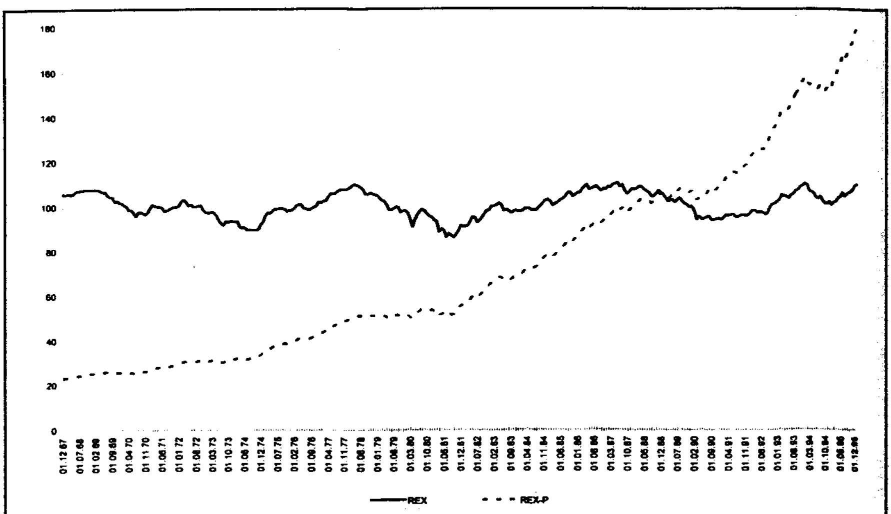
Gewichtungsfaktoren für die Sub-Indizes des REX				
Kupon/ Laufzeit/	6%	7,50%	9%	Summe
1	3,1	1,73	2,56	7,39
2	3,5	2,43	2,87	8,8
3	4,06	3,03	3,16	10,25
4	4,88	3,37	3,7	11,95
5	4,87	3,15	4,02	12,04
6	4,09	2,84	4,32	11,25
7	3,82	3,02	4,79	11,63
8	3,38	3,14	4,06	10,58
9	3,65	2,62	3,38	9,65
10	3,15	1,47	1,84	6,46
Summe	38,5	26,8	34,7	100

30 REX-Renditen sowie Sub-Index-Renditen (in %)				
Kupon/ Laufzeit/	6%	7,5%	9%	gew. Summe
1	3,92	3,97	3,99	3,96
2	4,43	4,48	4,49	4,46
3	4,77	4,82	4,84	4,81
4	5,08	5,13	5,15	5,12
5	5,38	5,43	5,45	5,42
6	5,66	5,71	5,73	5,70
7	5,90	5,95	5,97	5,94
8	6,07	6,12	6,14	6,12
9	6,16	6,21	6,23	6,20
10	6,14	6,18	6,20	6,17
gew. Summe	5,35	5,43	5,48	5,42

REX-Kurse sowie Sub-Index-Kurse (in %)				
Kupon/ Laufzeit	6%	7,5%	9%	gew. Summe
1	102,00	103,39	104,82	103,30
2	102,95	105,67	108,44	105,49
3	103,36	107,32	111,37	107,00
4	103,24	108,37	113,60	107,90
5	102,64	108,85	115,18	108,45
6	101,68	108,88	116,23	109,09
7	100,56	108,68	116,96	109,42
8	99,54	108,50	117,65	109,15
9	98,90	108,68	118,66	108,48
10	99,01	109,60	120,39	107,51
gew. Summe	101,54	107,94	114,62	107,79

Der REX III


REX-Renditen für 1, 5 und 9 Jahre (Kupon = 7,5%)
Renditen
10,00%
9,00%
8,00%
7,00%
6,00%
5,00%
4,00%
3,00%
2,00%
1,00%
0,00%
1 Jahr
5 Jahre
9 Jahre


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
REX
REX-P

2.2.1.5.3. Erklärung der Renditenstruktur

Thesen der Erwartungstheorie

- Der langfristige Zinssatz ist der "Durchschnitt" der erwarteten kurzfristigen Sätze.
- Titel unterschiedlicher Laufzeiten sind Substitute.
- Der Markt ist effizient.
- Die Zinsstrukturkurve spiegelt die Erwartungen der Beteiligten wider (hinsichtlich zukünftiger Zinssätze).
- Die erwarteten Zinssätze könnten sich möglicherweise auf erwartete Inflationsraten zurückführen lassen. Zu dem in der Literatur regelmäßig beschriebenen Zusammenhang von Realzins- und Nominalzinssatz sowie Inflationserwartung siehe die Ausführungen zum Fisher-Effekt.

---> **Laufzeitkombinationen haben keinen Einfluß auf die langfristige Rendite.**

Thesen der Liquiditätspräferenztheorie

- Anleger (Kapitalnachfrager) bevorzugen kurzfristige Anlagen (langfristige Verschuldungen), weil sie "liquide sein möchten". Sie schätzen damit das Kursrisiko höher ein als das Wiederanlagerisiko.

---> **Langfristige Titel werden höher verzinst, weil sie eine Prämie für "entgangene Liquidität" enthalten müssen.**

Thesen der Marktsegmentierungstheorie

- Die Planungshorizonte der Anleger und Nachfrager sind unterschiedlich; tendenziell haben Anleger einen kürzeren Planungshorizont.
- Für eine Abweichung von dem Planungshorizont (und dem damit verbundenen Risiko) wird eine Prämie verlangt.

---> **Langfristige Titel werden höher verzinst.**

Die Theorien könnten zusammen zur Erklärung der Zinsstruktur beitragen.

Da die im folgenden abgebildete Renditenstrukturkurve den Durchschnitt aller Renditenstrukturkurven im Zeitraum von 1/1967 bis 10/1991 darstellt (siehe auch die Tabelle), liegt es nahe, daß in der Bundesrepublik die Erwartungstheorie nur in Kombination mit einer anderen Theorie die Zinsstruktur erklärt. Sollte dies die Liquiditätspräferenztheorie sein, so ergeben sich die in der Tabelle angegebenen durchschnittlichen Liquiditätsprämien.

Interessant ist die Überlegung, ob davon auszugehen ist, daß die "normale" Zinsstrukturkurve zukünftig auch diesen Verlauf haben wird. Der in der letzten Zeit deutlich zunehmende Handel an Terminmärkten wird m.E. dazu führen, daß die durchschnittliche Zinsstrukturkurve (wie in den USA) deutlich flacher verlaufen wird. Damit wären auch diverse Anlage-Strategien (wie das Konzept "riding the yield-curve") obsolet. Ebenso dürfte dieses c.p. zu Ertragseinbußen bei den Kreditinstituten führen, die aktivische Fristentransformation betreiben, also überwiegend "kurzfristige Zinsen" zahlen und "langfristige Zinsen" erhalten.

Zusammenhang von Real- und Nominalzinssatz und der erwarteten Inflationsrate

Welchen Nominalzinssatz fordern Wirtschaftssubjekte, wenn sie eine konstante Realverzinsung vor bzw. nach Steuern erzielen wollen?

Kapitaleinsatz			1	Betrachtung unter Berücksichtigung von Steuern Steuersatz = 50%				
angestrebte Realverzinsung			0,00%					
Inflationsrate	Preis eines Wirtschaftsgutes	benötigtes Kapital in t=1	benötigte Nominalverzinsung	benötiges Kapital vor Steuern in t=1	Zinsen	benötiges Kapital nach Steuern in t=1	Steuern	Nominalverzinsung
0,00%	1,00	1,00	0,00%	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00%
1,00%	1,01	1,01	1,00%	1,02	0,02	1,01	0,01	2,00%
2,00%	1,02	1,02	2,00%	1,04	0,04	1,02	0,02	4,00%
3,00%	1,03	1,03	3,00%	1,06	0,06	1,03	0,03	6,00%
5,00%	1,05	1,05	5,00%	1,10	0,10	1,05	0,05	10,00%
10,00%	1,10	1,10	10,00%	1,20	0,20	1,10	0,10	20,00%
20,00%	1,20	1,20	20,00%	1,40	0,40	1,20	0,20	40,00%
30,00%	1,30	1,30	30,00%	1,60	0,60	1,30	0,30	60,00%
50,00%	1,50	1,50	50,00%	2,00	1,00	1,50	0,50	100,00%
100,00%	2,00	2,00	100,00%	3,00	2,00	2,00	1,00	200,00%

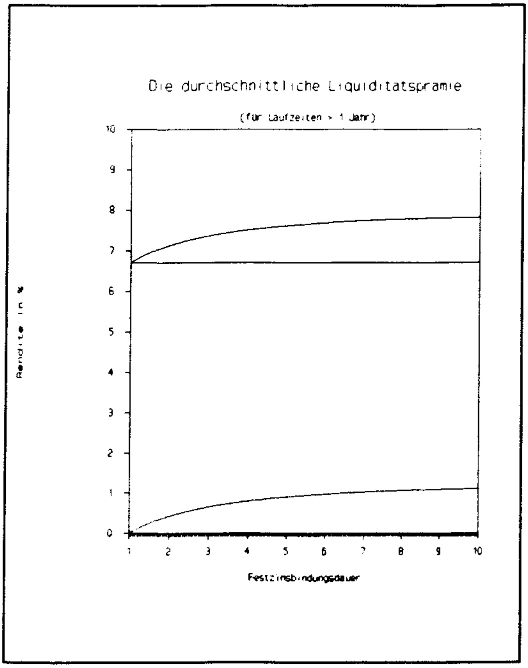
Kapitaleinsatz			1	Betrachtung unter Berücksichtigung von Steuern Steuersatz = 50%				
angestrebte Realverzinsung			5,00%					
Inflationsrate	Preis eines Wirtschaftsgutes	benötigtes Kapital in t=1	benötigte Nominalverzinsung	benötigtes Kapital vor Steuern in t=1	Zinsen	benötigtes Kapital nach Steuern in t=1	Steuern	Nominalverzinsung
0,00%	1,00	1,05	5,00%	1,10	0,10	1,05	0,05	10,00%
1,00%	1,01	1,06	6,05%	1,12	0,12	1,06	0,06	12,10%
2,00%	1,02	1,07	7,10%	1,14	0,14	1,07	0,07	14,20%
3,00%	1,03	1,08	8,15%	1,16	0,16	1,08	0,08	16,30%
5,00%	1,05	1,10	10,25%	1,21	0,21	1,10	0,10	20,50%
10,00%	1,10	1,16	15,50%	1,31	0,31	1,16	0,16	31,00%
20,00%	1,20	1,26	26,00%	1,52	0,52	1,26	0,26	52,00%
30,00%	1,30	1,37	36,50%	1,73	0,73	1,37	0,37	73,00%
50,00%	1,50	1,58	57,50%	2,15	1,15	1,58	0,58	115,00%
100,00%	2,00	2,10	110,00%	3,20	2,20	2,10	1,10	220,00%

Ansätze zur Erklärung der Zinsstruktur

Die drei wichtigsten Ansätze zur Erklärung der Zinsstrukturkurve:

* Erwartungstheorie
* Liquiditätspräferenztheorie
* Marktsegmentierungstheorie

Die abgebildete Renditenstrukturkurve stellt den Durchschnitt aller Renditenstrukturkurven im Zeitraum von 1/1967 bis 10/1991 dar:



Laufzeit	Rendite	Liquiditätsprämie
1	6,71%	0,00%
2	7,14%	0,43%
3	7,37%	0,66%
4	7,51%	0,80%
5	7,62%	0,90%
6	7,69%	0,98%
7	7,74%	1,03%
8	7,78%	1,07%
9	7,80%	1,09%
10	7,82%	1,11%

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Berechnen Sie die Renditen dieser Wertpapiere nach Steuern (sowie alle anderen "?"), wenn die Renditen vor Steuern identisch sind (Grenzsteuersatz von 45 Prozent):

Wertpapier	A	B
Laufzeit	2 Jahre	2 Jahre
Kupon	4%	12%
Marktwert	100%	?
Rendite vor Steuern (soll identisch sein)	4%	4%
Rendite nach Steuern	?	? Wie ist diese rechnerische Größe zu erklären?

B) Gehen Sie davon aus, daß folgende Renditenstrukturkurve geschätzt wurde:

$$\hat{r}_{T,\,9\%} = 0{,}0432 + 0{,}01 \cdot T + 0{,}02 \ln T$$

Welchen Wert haben die Indikatoren $NIV_{9\%}$, $STE_{9\%}$ und $KRÜ_{9\%}$ für diesen Fall?

C) Ermitteln Sie die (Durchschnitts-)Renditen $r_{t,6\%}$ für 1 bis 6 Jahre über folgende Werte der Indikatoren:

$NIV_{6\%}$ = 5,0%
$STE_{6\%}$ = -0,2%
$KRÜ_{6\%}$ = -0,3%

Stellen Sie das Ergebnis auch grafisch dar.

D) Gegeben ist das Ergebnis der REX-Schätzung als:

$$r_{T,K} = 0{,}03 + (-0{,}005)\,T + 0{,}08 \ln(T) + 0{,}0001\,T^2 + (-0{,}00005)\,T^3 + 0{,}5\,K + (-2)\,K^2$$

Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Werte einiger (bzw. möglichst aller) Sub-Indizes für die REX-Renditen und REX-Kurse. Stellen Sie das Ergebnis auch grafisch dar.

E) Was sind Zinsstrukturkurven und welche Möglichkeiten gibt es, sie zu definieren?

F) Erklären Sie das Zustandekommen des Kuponeffektes.

G) Erläutern Sie das Verfahren zur Schätzung der Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank.

H) Inwiefern könnte schon über die Schätzung der Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank versucht werden, über- bzw. unterbewertete Anleihen zu identifizieren? Welche Probleme könnten dabei auftreten?

I) Erläutern Sie Inhalt und Bedeutung der vorgestellten Indikatoren der Zinsstruktur. Wofür könnten diese Indikatoren nützlich sein?

J) Welche Nominalverzinsung wird ein (institutioneller) Anleger fordern, wenn er eine Erhöhung der Inflationsrate von 3% auf 7% annimmt und seine Realverzinsung bei 6% p.a. bleiben soll? Wie wird diese Überlegung beeinflußt, falls 30% Steuern auf Kapitalerträge zu zahlen sind?

K) Welches sind die wesentlichen Inhalte der Theorien zur Erklärung der Zinsstruktur?

L) Welche Erkenntnisse für die Gültigkeit der Theorien zur Erklärung der Zinsstruktur könnten aus den empirisch beobachteten Daten gezogen werden?

Lösungshinweise

A)

Wertpapier	A	B
Laufzeit	2 Jahre	2 Jahre
Kupon	4%	12%
Marktwert	100%	Ergebnis: 115,09%
Rendite vor Steuern (soll identisch sein)	4%	4%
Rendite nach Steuern	Ergebnis: 2,2%	Ergebnis: -0,85%

B) $NIV_{9\%} = 0{,}0532$; $STE_{9\%} = 0{,}0155$; $KRÜ_{9\%} = 0{,}0102$

C) Die Renditen sind: 5,00%; 4,55%; 4,28%; 4,07%; 3,90% und 3,75%

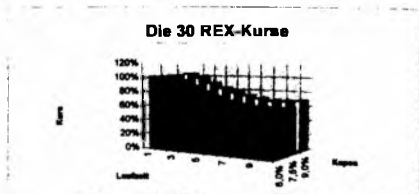
D)

REX-Renditen

Laufzeit/Kupon	6,0%	7,5%	9,0%	gew. Summe
1	4,79%	5,13%	5,39%	5,07%
2	9,83%	10,17%	10,43%	10,12%
3	12,52%	12,87%	13,12%	12,81%
4	14,21%	14,56%	14,81%	14,49%
5	15,28%	15,63%	15,88%	15,57%
6	15,89%	16,24%	16,49%	16,21%
7	16,12%	16,47%	16,72%	16,46%
8	16,00%	16,34%	16,60%	16,33%
9	15,52%	15,87%	16,12%	15,83%
10	14,70%	15,05%	15,30%	14,95%
gew. Summe	13,70%	14,24%	14,56%	14,14%

REX-Kurse

Laufzeit/Kupon	6,0%	7,5%	9,0%	gew. Summe
1	101,16%	102,25%	103,43%	102,20%
2	93,35%	95,38%	97,54%	95,27%
3	84,47%	87,29%	90,28%	87,10%
4	76,18%	79,67%	83,35%	79,38%
5	69,10%	73,16%	77,41%	72,93%
6	63,44%	68,00%	72,74%	68,16%
7	59,27%	64,26%	69,47%	64,77%
8	56,58%	62,02%	67,63%	62,43%
9	55,39%	61,26%	67,33%	61,17%
10	55,83%	62,20%	68,74%	60,96%
gew. Summe	71,34%	74,85%	78,54%	74,78%



J) Zinssatz vorher ohne Steuerberücksichtigung = 9,18%
Zinssatz vorher mit Steuerberücksichtigung = 13,11%
Zinssatz nachher ohne Steuerberücksichtigung = 13,42%
Zinssatz nachher mit Steuerberücksichtigung = 19,17%

Literatur

Johannes Bußmann. Die Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt. Eine empirische Untersuchung für den Zeitraum 1978 bis 1986. "Kredit und Kapital", (1989), S. 117-129.

Deutsche Bundesbank. "Statistische Beihefte zu den Monatsberichten der Deutschen Bundesbank", Reihe 2, Wertpapierstatistik, Tabelle 8d.

Deutsche Bundesbank. Die Zinsentwicklung seit 1978. "Monatsberichte der Deutschen Bundesbank", Januar 1983, S. 14-26.

Deutsche Bundesbank. Zinsentwicklung und Zinsstruktur seit Anfang der achtziger Jahre. "Monatsberichte der Deutschen Bundesbank", Juli 1991, S. 31-42.

Deutsche Bundesbank. "Statistische Beihefte zu den Monatsberichten der Deutschen Bundesbank", Reihe 2, Wertpapierstatistik, Tabelle 8d bzw. Tabelle 7e, Renditenstruktur am Rentenmarkt - Schätzwerte.
(Zur Berechnung der Renditenstrukturkurve siehe Oktober 1987, S. 59.)

Roland Eller und Christian Karl. Total Return Management festverzinslicher Wertpapiere. "Die Bank", (1994), S. 245-250.

Heino Faßbender. Die Theorie der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Ein Überblick. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1977), S. 97-103.

Wolfgang Filc. Theorie und Empirie des Kapitalmarktzinses. Stuttgart 1992.

Dietmar Kath. Die verschiedenen Ansätze der Zinsstrukturtheorie - Versuch einer Systematisierung. "Kredit und Kapital", (1972), S. 28-71.

Günter Lassak. Bewertung festverzinslicher Wertpapiere am deutschen Rentenmarkt. Heidelberg 1992.

Michael Röhrs. Empirischer Vergleich von Zinsstrukturfunktionen anhand öffentlicher Anleihen der Bundesrepublik Deutschland. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1991), S. 919-940.

Elmar Schmitz und André Pesch. Abweichungsanalyse für Zinsstruktur-Kurven. "Die Bank", (1994), S. 550-553.

Jochen Wilhelm und Lars Brüning. Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung. "Kredit und Kapital", (1992), S. 259-294.

Marco Wilkens. Realitätsnahe Schätzung der Markt- und Kundenzinssätze zur besseren Steuerung des Zinsrisikos. "Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft", (1994), S. 9-23.

Marco Wilkens. Risiko-Management mit Zins-Futures in Banken. Göttingen 1994.

2.2.2. Bewertungsansätze auf der Grundlage von Spot Rates und Forward Rates

2.2.2.1. Berechnung von Spot Rates und Forward Rates

Das wesentliche Ziel dieses Abschnittes besteht darin, ein Gesamtkonzept zu entwickeln, mit dem der Wert von verschiedenen verzinslichen Finanztiteln sowohl für heute als auch für die Zukunft möglichst genau berechnet werden kann. Zu diesem Zweck werden Spot Rates und Forward Rates vorgestellt, die eine sinnvolle Alternative zu Durchschnittsrenditen darstellen.

Im nächsten Schritt sind dafür aus den Marktrenditen $r_{T,\,7{,}639\%}$ zunächst die Spot Rates zu berechnen, wobei hier nur die Spot Rates für die ganzzahligen Laufzeiten von einem Jahr bis zu sechs Jahren ermittelt werden sollen.

Im weiteren wird für die Durchschnittsrenditen der Ausdruck $r_{T,K}$ statt $\hat{r}_{T,K}$ verwendet, da es für die Ausführungen unerheblich ist, ob die Durchschnittsrenditen Ergebnis einer Zinsstrukturkurvenschätzung sind oder ob sie andersartig ermittelt wurden.

2.2.2.1.1. Berechnung von Spot Rates aus der Renditenstrukturkurve

Spot Rates R_t sind interne Renditen von Zerobonds mit einer Laufzeit von t. Sie beziehen sich also auf Finanztitel, die - im Gegensatz zu Kupon-Anleihen - ausschließlich am Anfang sowie am Ende ihrer Laufzeit zu einer Ein- oder Auszahlung führen. Insofern könnte für die Spot Rate R_t auch $r_{t,\,0\%}$ geschrieben werden.

Im weiteren wird dargestellt, wie aus den Werten einer Renditenstrukturkurve (also aus den Durchschnittsrenditen) Spot Rates berechnet werden können. Dabei wird zunächst eine allgemeingültige Rechenvorschrift abgeleitet. Darauf basierend erfolgt dann die Darstellung von Formeln für bestimmte Spezialfälle. Insbesondere die letztgenannte Formel findet in der Theorie und Praxis häufig Anwendung, wenn auch teilweise nicht verdeutlicht wird, auf welchen Prämissen sie beruht.

In der folgenden Übersicht werden die genannten Formeln sowie deren Ableitungen kurz erläutert.

zu 1) Wird davon ausgegangen, daß bei Kupon-Anleihen mit einem Jahr Restlaufzeit keine Zinszahlungen vor Fälligkeit mehr auftreten, so sind die Renditen $r_{1,\,7{,}639\%}$ zugleich Spot Rates für ein Jahr. Es gilt also $r_1 = R_1$.

zu 2) Für die Berechnung von Spot Rates für Laufzeiten von länger als einem Jahr sind synthetische Zerobonds zu konstruieren. Die Spot Rates R_T können dann aus den Werten dieser synthetischen Zerobonds ZB_T mit einem Nominalwert von Z_T über (2) berechnet werden.

zu 3) Die Konstruktion synthetischer Zerobonds basiert auf dem Prinzip des "Kupon-Stripping", wonach Kupon-Anleihen als Bündel von Zerobonds mit verschiedenen Laufzeiten aufgefaßt werden können. Der Wert einer Kupon-Anleihe $KA_{2,\,8\%}$ mit einem Nominalwert von 1.000, einer Restlaufzeit von zwei Jahren und einem Kupon von 8% entspricht damit dem Wert eines Zerobonds ZB_1 mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Nominalwert von 80 zuzüglich dem Wert eines Zerobonds ZB_2 mit einer Laufzeit von zwei Jahren und einem Nominalwert von 1.080.

Der **Wert eines synthetischen Zerobonds** ZB_T mit einer Laufzeit von T Jahren und einem Nominalbetrag in Höhe des Rückzahlungsbetrages der Anleihe zuzüglich der letzten Zinszahlung wird berechnet, indem von dem Gesamtwert der Kupon-Anleihe $KA_{T,K}$ die mit den laufzeitkongruenten Spot Rates R_t abgezinsten zwischenzeitlichen Zins- und gegebenenfalls Tilgungszahlungen Z_t subtrahiert werden. Der Kurs eines synthetischen Zerobonds ZB_T ergibt sich damit wie unter (3) erläutert, wobei t die Zeitpunkte der mit der Kupon-Anleihe verbundenen zwischenzeitlichen Zahlungen angibt.

zu 4) Aus (3) wird deutlich, daß aus der Renditenstrukturkurve zunächst die Kurse der Kupon-Anleihen $KA_{T,K}$ - wie in (4) angegeben - zu ermitteln sind. Dafür muß bekannt sein, welche Nominalverzinsung K die Kupon-Anleihen aufweisen, die durch die Renditenstrukturkurve repräsentiert werden.

zu 5) Um die Spot Rates direkt berechnen zu können, wird (4) in (3) und das Ergebnis dann in (2) eingesetzt. Der Nenner des Bruchs entspricht dem Kurswert eines synthetischen Zerobonds.

zu 6) Für den Fall, daß ausschließlich Kurse <u>endfälliger</u> Kupon-Anleihen (also Titel ohne zwischenzeitliche Tilgungen) in die Berechnung der Spot Rates eingehen, kann Z_t teilweise durch K bzw. 1 + K ersetzt werden.

zu 7) In der Literatur wird in diesem Zusammenhang häufig davon ausgegangen, daß sich die Durchschnittsrenditen $r_{T,K}$ auf Kupon-Anleihen mit einem Kurs von 100% beziehen. Ist das der Fall, so müssen die jeweiligen Durchschnittsrenditen $r_{T,K}$ gleich den Kupons K sein. Mithin kann (nur) in diesem Fall $KA_{T,K}$ durch 1 und K durch $r_{T,K}$ ersetzt werden.

zu 8) Die Formel (8) ist lediglich technischer Natur. Versucht man (6) und (7) konkret zu implementieren, so wird man feststellen, daß die Formeln für die Spot Rates längerer Laufzeiten vergleichsweise aufwendig werden. Diesem kann dadurch begegnet werden, daß zum einen Rentenbarwertfaktoren bei der Berechnung des Kurswertes der Kupon-Anleihe herangezogen werden. Zum anderen wird eine Erleichterung durch die Einführung von Zerobondabzinsungsfaktoren erreicht, die bekanntlich wie folgt definiert sind:

$$ZBAF_T = \frac{1}{(1 + R_T)^T}$$

Die Umformung des Summenausdrucks durch Einführung dieser Zerobondabzinsungsfaktoren führt dazu, daß die Summe der Zerobondabzinsungsfaktoren für jede Laufzeit durch Addition des jeweils zusätzlichen Faktors einfacher ermittelt werden kann.

Grundsätzlich gilt, daß für die Ermittlung der Spot Rates für lange Perioden die Spot Rates für die kürzeren Perioden bereits bekannt sein müssen. Daher sollten zunächst die Spot Rates für ein Jahr, dann für zwei Jahre usw. berechnet werden.

Am Beispiel von (6) und auf der Grundlage der im letzten Abschnitt geschätzten Durchschnittsrenditen werden nun die Spot Rates exemplarisch berechnet. Um den Fehler zu verdeutlichen, der aus einer Nicht-Berücksichtigung des richtigen Nominalzinssatzes resultieren würde, werden die Spot Rates auf der Basis einer Renditenstrukturkurve für Kupon-Anleihen mit verschiedenen Nominalverzinsungen errechnet. Korrekt ist die

Berechnung, wie sie im ersten Fall durchgeführt wird. Hier fließt der im Rahmen der Schätzung der Renditenstrukturkurve ermittelte durchschnittliche Kupon ein. Im zweiten Fall wird davon ausgegangen, daß dieser Kupon 10% beträgt. Im dritten Fall wird unterstellt, daß die Kupons den Renditen von Kupon-Anleihen der jeweiligen Laufzeit entsprechen. Für diese Berechnung kann also auch (7) verwendet werden.

Ableitung von Spot Rates aus der Renditenstrukturkurve I

gegeben sind Durchschnittsrenditen $r_{T,K}$; gesucht sind Spot Rates R_T

Spot Rates R_T sind interne Renditen von Zerobonds mit einer Laufzeit von t.

Kupon-Anleihen ohne Zinszahlungen vor Fälligkeit sind Zerobonds, also gilt:

$$R_1 = r_1 \tag{1}$$

Der Endwert einer Kapitalanlage ohne zwischenzeitliche Zahlungen (also auch der Rückzahlungsbetrag eines Zerobonds) ergibt sich über die klassische Aufzinsungsformel:

$$ZB_T\,(1 + R_T)^T = Z_T$$

Durch Umstellung der letzten Formel ergibt sich die Vorschrift zur Berechnung der Spot Rate aus dem Kurs eines (synthetischen) Zerobonds:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{Z_T}{ZB_T}} - 1 \tag{2}$$

Konstruktion synthetischer Zerobonds über das "Kupon-Stripping":

$$ZB_T = KA_{T,K} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t} \tag{3}$$

Ermittlung der Kurse von Kupon-Anleihen:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r_{T,K})^t} \tag{4}$$

Ableitung von Spot Rates aus der Renditenstrukturkurve II

(4) in (3):

$$ZB_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r_{T,K})^t} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}$$

und dann in (2) eingesetzt ergibt die allgemeingültige Formel zur Berechnung von Spot Rates aus Durchschnittsrenditen:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{Z_T}{KA_{T,K} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}}} - 1 = \sqrt[T]{\frac{Z_T}{\sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r_{T,K})^t} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}}} - 1 \quad (5)$$

Sonderfall: Verwendung von Kursen <u>endfälliger</u> Kupon-Anleihen:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{1+K}{KA_{T,K} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{K}{(1+R_t)^t}}} - 1 = \sqrt[T]{\frac{1+K}{\sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r_{T,K})^t} + \frac{1}{(1+r_{T,K})^T} - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{K}{(1+R_t)^t}}} - 1 \quad (6)$$

Sonderfall: Kurs der Kupon-Anleihen = 100 Prozent, also auch $r_{T,K}$ = K:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{1+r_{T,K}}{1 - \sum_{t=1}^{T-1} \frac{r_{T,K}}{(1+R_t)^t}}} - 1 \quad (7)$$

Eine sinnvolle Umformung der Formel (6) für die Implementierung in Tabellenkalkulationsprogrammen (vgl. die Datei) wird durch die Berücksichtigung von Rentenbarwertfaktoren und Zerobondabzinsungsfaktoren erreicht:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{1+K}{K \frac{(1+r_{T,K})^T - 1}{r_{T,K}(1+r_{T,K})^T} + \frac{1}{(1+r_{T,K})^T} - K \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+R_t)^t}}} - 1 \quad (8)$$

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{1+K}{K \; Rentenbarwertfaktor_T + \frac{1}{(1+r_{T,K})^T} - K \sum_{t=1}^{T-1} ZBAF_T}} - 1$$

Berechnung von Spot Rates aus der Renditenstrukturkurve

Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
$r_{T,K}$ (Durchschnittsrendite)		3,9088%	4,4975%	4,8850%	5,1900%	5,4498%	5,6811%
Nominalverzinsung K der durch die Renditenstrukturkurve beschriebenen Kupon-Anleihen	Fall 1	7,639%					
	Fall 2	10,000%					
	Fall 3	3,9088%	4,4975%	4,8850%	5,1900%	5,4498%	5,6811%

Die Zwischen- und Endergebnisse sind:

	Laufzeit (T)	1	2	3	4	5	6
Fall 1	$KA_{T,\ 7,639\%}$	103,590%	105,884%	107,517%	108,647%	109,363%	109,727%
	R_T	3,9088%	4,5195%	4,9289%	5,2581%	5,5453%	5,8076%
Fall 2	$KA_{T,\ 10\%}$	105,862%	110,305%	113,960%	116,981%	119,457%	121,452%
	R_T	3,9088%	4,5257%	4,9408%	5,2761%	5,5698%	5,8392%
Fall 3	$KA_{T,\ diverse}$	100%					
	R_T	3,9088%	4,5109%	4,9141%	5,2382%	5,5209%	5,7795%

Berechnung der Spot Rates R_T für T = 1 bis 3 (Fall 1):

$$R_1 = r_1 = 3{,}9088\%$$

$$R_2 = \sqrt[2]{\frac{1+0{,}07639}{\frac{0{,}07639}{1+0{,}044975} + \frac{1{,}07639}{(1+0{,}044975)^2} - \frac{0{,}07639}{1+0{,}039088}}} - 1 = 4{,}5195\%$$

$$R_3 = \sqrt[3]{\frac{1+0{,}07639}{\frac{0{,}07639}{1+0{,}04885} + \frac{0{,}07639}{(1+0{,}04885)^2} + \frac{1{,}07639}{(1+0{,}04885)^3} - \frac{0{,}07639}{1+0{,}039088} - \frac{0{,}07639}{(1+0{,}045195)^2}}} - 1 = 4{,}9289\%$$

2.2.2.1.2. Berechnung von Forward Rates aus den Spot Rates

Forward Rates $R_{T,t}$ sind interne Renditen von Zerobonds mit einer Laufzeit von T Jahren. Der Unterschied zu Spot Rates besteht darin, daß die Laufzeit dieser Zerobonds nicht heute, sondern in dem zukünftigen Zeitpunkt t beginnt. Vom heutigen Zeitpunkt aus betrachtet, sind die Zerobonds demnach in t + T fällig. Forward Rates können auch als implizite, antizipierte und aus heutiger Sicht tatsächlich sicherbare (Zukunfts-)Zinssätze bezeichnet werden. Sie sind aber nicht zu verwechseln mit den für zukünftige Zeitpunkte "geschätzten" Zinssätzen, wenn ihre Werte im Einzelfall auch identisch sein könnten.

Wenn auch die Forward Rates direkt aus den Durchschnittsrenditen ($r_{T,K}$) berechnet werden können, so wird hier der nach Ansicht des Verfassers verständlichere Weg gewählt, die Forward Rates aus den zuvor berechneten Spot Rates zu ermitteln. Allgemein gilt:

$$R_{T,t} = \sqrt[T]{\frac{(1+R_{T+t})^{T+t}}{(1+R_t)^t}} - 1$$

Auf der Grundlage der oben ermittelten Spot Rates können so die Forward Rates für verschiedene Laufzeiten und verschiedene Startzeitpunkte berechnet werden. In der Tabelle sind die Ergebnisse für zwei typische Arten von Forward Rates angegeben. Dabei handelt es sich um sogenannte **1-Jahres Forward Rates** und **T-Jahres Forward Rates**.

Die 1-Jahres Forward Rates sind die (antizipierten) Renditen für Zerobonds mit einem Jahr Laufzeit, wobei die Laufzeiten nicht heute, sondern zu verschiedenen Zeitpunkten in der Zukunft beginnen. Aus der Tabelle ergibt sich, daß beispielsweise die (antizipierte) Rendite für einen Zerobond mit einem Jahr Laufzeit im nächsten Jahr 5,1338% beträgt.

Die in der Tabelle verzeichneten T-Jahres Forward Rates in einem Jahr geben hingegen an, wie die (antizipierten) Renditen für Zerobonds mit verschiedenen Laufzeiten in einem Jahr sind. Beispielsweise ist die antizipierte Rendite eines Zerobonds in einem Jahr mit einer Laufzeit von 3 Jahren 5,7118 Prozent.

Berechnung von Forward Rates aus Spot Rates

Forward Rates $R_{T,t}$ sind Renditen von Zerobonds, deren Laufzeit in t beginnt und (dann) T Jahre ist. Allgemein gilt:

$$R_{T,t} = \sqrt[T]{\frac{(1+R_{T+t})^{T+t}}{(1+R_t)^t}} - 1$$

Es ergeben sich für das Beispiel folgende Forward Rates:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Die Tabelle faßt zugleich die im weiteren grundsätzlich verwendeten Ausgangsdaten zusammen.

Für die Berechnung von $R_{2,3}$ gilt beispielsweise:

$$R_{2,3} = \sqrt[2]{\frac{(1+R_5)^5}{(1+R_3)^3}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{(1+0{,}055453)^5}{(1+0{,}049289)^3}} - 1 = 6{,}4768\%$$

2.2.2.1.3. Forward Rates als sicherbare zukünftige Zinssätze

Forward Rates sind für die Zukunft tatsächlich sicherbare Zinssätze von Zerobonds. Selbstverständlich ist es ungewiß, wie hoch zukünftige Zinssätze tatsächlich sein werden, wenn auch die Forward Rates eine gute Grundlage für eine Zinsprognose abgeben könnten. Absicht der weiteren Überlegungen ist es also nicht, zukünftige Zinssätze zu prognostizieren, sondern "nur" zu zeigen, daß die Forward Rates aus heutiger Sicht für spätere Zeitpunkte tatsächlich sicherbar sind. Dieser für weitere Überlegungen elementare Sachverhalt soll an einem exemplarischen Beispiel veranschaulicht werden.

Unter Verwendung der berechneten Spot Rates können Kupon-Anleihen mit einer Nominalverzinsung von 8% und einer Restlaufzeit von einem Jahr (zwei Jahren) heute zu $KA_{1,8\%}$ = 103,9373% ($KA_{2,8\%}$ = 106,5610%) gekauft und verkauft (oder emittiert) werden.

Wird nun die Kupon-Anleihe mit einer Restlaufzeit von zwei Jahren zu einem Kurswert von 1 Mio. (Nominalwert = 0,93843 Mio.) gekauft und zugleich die Kupon-Anleihe mit einer Restlaufzeit von einem Jahr zu einem Kurswert von ebenfalls 1 Mio. (Nominalwert = 0,96212 Mio.) verkauft oder emittiert, dann ergibt sich aus diesen beiden Kassageschäften ein Zahlungsstrom, der einer in der Zukunft beginnenden Kapitalanlage entspricht. Diese synthetisch konstruierte Kapitalanlage wird auch als einfaches forward-forward-Geschäft bezeichnet.

In diesem Beispiel wird über die beiden Kassageschäfte letztlich eine Kapitalanlage ab dem Zeitpunkt t = 1 für ein Jahr über 0,96402 Mio. mit einer Rückzahlung in Höhe von 1,01350 Mio. sichergestellt. Dies impliziert eine Verzinsung des investierten Betrages in Höhe von 5,1338 Prozent. Die Verzinsung der Kapitalanlage entspricht damit der aus den Spot Rates berechneten Forward Rate $R_{1,1}$.

Die Forward Rates für andere Startzeitpunkte und Laufzeiten können in prinzipiell gleicher Weise gesichert werden. In den weiteren Abschnitten wird darüber hinaus gezeigt, wie über den Kauf und Verkauf verschiedener Finanztitel die Sicherung dieser Zinssätze alternativ erfolgen kann.

Sicherung der Forward Rates für eine zukünftige Kapitalanlage über ein Forward-Forward-Geschäft (I)

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Berechnung des Kurses zweier Kupon-Anleihen:

$$KA_{1,8\%} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t} = \frac{1{,}08}{1+0{,}039088} = 1{,}039373 = 103{,}9373\%$$

$$KA_{2,8\%} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t} = \frac{0{,}08}{1+0{,}039088} + \frac{1{,}08}{(1+0{,}045195)^2} = 1{,}065610 = 106{,}5610\%$$

Berechnung von Nominalwert (NW) und Rückzahlungsbetrag (RZB) einer einjährigen Kupon-Anleihe mit einem Kurswert (Investitionsbetrag) von 1 Mio.:

$$Nominalwert = \frac{Investitionsbetrag}{Kurs} = \frac{1\ (Mio.)}{1{,}039373} = 0{,}96212\ (Mio.)$$

$$RZB = NW\,(1 + Kupon) = 0{,}96212\ (Mio.)\ (1 + 0{,}08) = 1{,}03909 (Mio.)$$

Konstruktion eines einfachen Forward-Forward-Geschäftes (in Mio.)

t	0	1	2
Mit dem Kauf der Kupon-Anleihe mit zwei Jahren Restlaufzeit verbundene Zahlungen (Nominalwert = 0,93843)	-1	0,07507	1,01350
Mit dem Verkauf der Kupon-Anleihe mit einem Jahr Restlaufzeit verbundene Zahlungen (Nominalwert = 0,96212)	1	-1,03909	
Summe der Zahlungen	0	-0,96402	1,01350

Sicherung der Forward Rates für eine zukünftige Kapitalanlage über ein Forward-Forward-Geschäft (II)

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Welche (sichere) Verzinsung weist dieses Geschäft auf?

Das Forward-Forward-Geschäft ist eine synthetische Kapitalanlage:

Laufzeitbeginn	=	in $t=1$
Laufzeit	=	1 Jahr
Anlagebetrag/Rückzahlungsbetrag	=	0,96401 Mio./1,01350 Mio.
ergibt die Verzinsung	=	5,1338% = $R_{1,1}$

Die Verzinsung entspricht also der bereits oben berechneten Forward Rate für ein Jahr in einem Jahr ($R_{1,1}$)!

Probe:

$$0 = -0{,}96401 + \frac{1{,}01350}{1 + 0{,}051338}$$

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

Gehen Sie von folgenden Daten aus:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,8}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000

A) Berechnen Sie für die o.a. Renditenstrukturkurve die Spot Rates, 1-Jahres Forward Rates und T-Jahres Forward Rates in einem Jahr.

B) Konstruieren Sie auf der Grundlage der o.a. Zinssätze ein Forward-Forward-Geschäft, welches Ihnen zu einem heute festgelegten Zinssatz Kapital in 3 Jahren für die Laufzeit von zwei Jahren zuführt. Die Tilgungs- und Zinszahlung dieses von Ihnen aufzunehmenden Darlehens soll am Ende der Laufzeit erfolgen.

Wie hoch ist der sicherbare Zinssatz? Zeigen Sie Alternativen der Berechnung auf.

Zur Erinnerung: Die Formel zur Berechnung des Wertes eines Zerobonds lautet:

$$ZB_T = \frac{1}{(1 + R_T)^T}$$

C) Wie lassen sich Spot Rates und Forward Rates interpretieren?

D) Erklären Sie das Prinzip der Ableitung der Spot Rates und Forward Rates aus den geschätzten Renditen der Renditenstrukturkurve.

E) Was versteht man unter "Kupon-Stripping"?

Lösungshinweise

A)

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,8}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000
R_T (Spot Rates)	5,0000	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	8,5665	10,9861	12,6159	13,8711	13,6637	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	8,5665	9,7696	10,7103	11,4922	11,9231	

B) Eine Bank sowie andere größere Finanzdienstleister könnten sich heute schon die Zinssätze von morgen sichern, nämlich die Forward Rates.

Aus der Zinsstrukturkurve lassen sich die aktuellen Kurse von Zerobonds für 3 und 5 Jahre Laufzeit ermitteln. Diese, in der im Beispiel gezeigten Anzahl gekauft bzw. verkauft, führen schließlich zu einer Zahlungsreihe (siehe die Zeile "Summe"), die genau dem gewünschten Kredit entspricht. Berechnet man nun wiederum die Verzinsung dieses Darlehens, so kommt man auf 13,2418 Prozent.

Aktion 1: Emission/Verkauf eines Zerobonds mit 5 Jahren Laufzeit						
Aktion 2: Kauf eines Zerobonds mit 3 Jahren Laufzeit						
Kurs des Zerobonds mit 5 Jahren Laufzeit	61,64%					
Kurs des Zerobonds mit 3 Jahren Laufzeit	79,04%					
			Nennwert	Kurswert		
Emission des Zerobonds mit 5 Jahren Laufzeit			1000000,00	616357,82		
Kauf des Zerobonds mit 3 Jahren Laufzeit			779805,97	616357,82		
Zahlungsströme	0	1	2	3	4	5
Zerobond 5 J. LZ	616357,82					-1000000,00
Zerobond 3 J. LZ	-616357,82			779805,97		
Summe	0,00	0,00	0,00	779805,97	0,00	-1000000,00
Wie hoch ist die Verzinsung (die Forward Rate) des Forward-Forward-Geschäftes?						
Lösung:				13,2418%		

Der Wert 13,2418% ließe sich auch auf andere Weise ermitteln, denn er ist in der heutigen Zinsstrukturkurve implizit enthalten. Die Ermittlung kann zum einen direkt aus den 1-Jahres-Forward-Rates $R_{1,3}$ und $R_{1,4}$

$$R_{2,3} = \sqrt{(1 + R_{1,3})\ (1 + R_{1,4})} - 1$$

$$R_{2,3} = \sqrt{(1 + 0{,}126159)\ (1 + 0{,}138711)} - 1 = 0{,}132418$$

oder den Spot Rates R_3 und R_5

$$R_{2,3} = \sqrt[2]{\frac{(1+R_5)^5}{(1+R_3)^3}} - 1$$

$$R_{2,3} = \sqrt[2]{\frac{(1+0{,}101624)^5}{(1+0{,}081561)^3}} - 1 = 0{,}132418$$

erfolgen.

Literatur

Wolfgang Doerks. Die Berücksichtigung von Zinsstrukturkurven bei der Bewertung von Kuponanleihen. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 275-280.

Lutz Kruschwitz und Rolf O.A. Decker. Effektivrenditen bei beliebigen Zahlungsstrukturkurven. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1994), S. 619-628.

Alfred W. Marusev und Andreas Pfingsten. Arbitragefreie Herleitung zukünftiger Zinsstruktur-Kurven und Kurswerte. "Die Bank", (1992), S. 169-172.

Marco Wilkens. Ermittlung und Verwendung marktorientierter und laufzeitkongruenter Kalkulationszinssätze in der Kapitalwertmethode. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1995), S. 461-466.

2.2.2.2. Bewertung ausgewählter Finanzkontrakte

Die Grundlage der Anwendung von Spot Rates liegt in der klassischen Investitionsrechnung und beruht auf dem Prinzip der Zahlungsstromorientierung. Die Kalkulationen und die daraus resultierenden Folgeentscheidungen basieren grundsätzlich auf der Kennzahl (Netto-)Barwert oder Kapitalwert.

Eine Anwendung der berechneten Spot Rates ist auf praktisch fast alle Geschäftsvorfälle möglich, die über Zahlungsströme abbildbar sind.

2.2.2.2.1. Zerobonds

Die folgenden Formeln wurden bereits mehrfach benutzt, werden aber noch einmal zusammenhängend dargestellt, da sie die Grundlage zur Bewertung aller folgenden verzinslichen Finanztitel bilden.

2.2.2.2.1.1. Berechnung des heutigen Wertes

Für den Wert eines Zerobonds ZB_T mit einer Laufzeit von T ergibt sich:

$$ZB_T = \frac{Z_T}{(1+R_T)^T}$$

Für einen Zerobond mit einer Rückzahlung Z_T in Höhe von 1 (oder 100%) ergibt sich folglich:

$$ZB_T = \frac{1}{(1+R_T)^T}$$

In der Literatur finden häufig sogenannte Zero-Bond-Abzinsungsfaktoren Verwendung. Sie sind letztlich aber nichts anderes als der so ermittelte Wert von Zerobonds ZB_T.

Die Spot Rates für einen Zerobond mit $Z_T = 1$ können ermittelt werden über:

$$R_T = \sqrt[T]{\frac{1}{ZB_T}} - 1$$

2.2.2.2.1.2. Berechnung und Sicherung von antizipierten Werten

Bisher wurden die gegenwärtigen Werte von Zerobonds berechnet. Im weiteren soll nun der Frage nachgegangen werden, wie "antizipierte" Werte von Zerobonds und Finanztiteln im allgemeinen berechnet und gesichert werden können.

Zunächst ist der Begriff "antizipiert" genauer zu betrachten. Unter einem antizipierten Wert wird der Wert verstanden, den ein Finanztitel aus heutiger Sicht in einem zukünftigen Zeitpunkt hat. Oder anders ausgedrückt: Der antizipierte Wert eines Wertpapiers ist der Wert, den man auf der Grundlage der heutigen Marktzinssätze für einen späteren Zeitpunkt (mittels verschiedener Varianten von Hedgingtransaktionen) sichern könnte. Wie auch die zukünftigen Marktzinssätze ungewiß sind, so ist selbstverständlich auch der zukünftige Marktwert von Finanztiteln ungewiß. Absicht der Überlegungen ist es also nicht, zukünftige Marktwerte von Finanztiteln zu prognostizieren.

Eine einfache Variante der Sicherung des Wertes eines Finanztitels für einen zukünftigen Zeitpunkt besteht in dem Kauf oder Verkauf des Finanztitels auf Termin. Folglich reduziert sich die Fragestellung nach dem sicherbaren Wert von Finanztiteln darauf, welchen Preis Käufer und Verkäufer heute bereit sind festzuschreiben, wenn sie Finanztitel auf Termin kaufen bzw. verkaufen.

Da die Käufer und Verkäufer immer die Möglichkeit haben, sich mittels der Forward-Forward-Geschäfte die Forward Rates für zukünftige Kapitalanlagen und Kapitalaufnahmen zu sichern, muß sich nach ihnen auch der Preis der auf Termin verkauften Finanztitel richten. Das bedeutet, auch der Preis eines auf Termin verkauften Finanztitels muß in Relation zu den Forward Rates stehen. Folglich kann der antizipierte Wert von Finanztiteln über die Diskontierung der nach dem Kaufzeitpunkt noch fälligen Zahlungen mit den entsprechenden Forward Rates auf den Kaufzeitpunkt berechnet werden. Das Beispiel veranschaulicht die Vorgehensweise. Von diesen Werten abweichende Marktpreise ermöglichen Arbitragetransaktionen, die zu einem Preis in Höhe des antizipierten Wertes führen würden.

Zum gleichen Ergebnis führt eine andere Überlegung. Wenn man davon ausgeht, daß der Eigentümer eines Finanztitels diesen in einem Jahr verkaufen will, so hat er für die Sicherung des Vermögens in einem Jahr zwei Alternativen. Die erste besteht darin, den Finanztitel zu einem fixierten Preis auf Termin zu verkaufen. Die zweite Alternative liegt in dem sofortigen Verkauf des Finanztitels und Anlage des Verkaufserlöses zu einem Festzinssatz für ein Jahr. Da beide Alternativen sicher sind, müssen sie auch zu einem identischen Wert der Position in einem Jahr führen. Insofern entspricht der für $t=1$ antizipierte Wert eines Finanztitels dem mit der heute gültigen Spot Rate auf den Verkaufszeitpunkt aufgezinsten gegenwärtigen Wert des Finanztitels. Auch diese Überlegung wird durch das nachfolgende Beispiel veranschaulicht.

Gegenwärtiger und antizipierter Wert von Zerobonds

Laufzeit des Zerobonds = T = 5 Jahre
Rückzahlungsbetrag = 100%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7.639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Bestimmung des heutigen Wertes:

$$ZB_T = \frac{Z_T}{(1+R_T)^T} = \frac{1}{(1+0{,}055453)^5} = 0{,}76349 = 76{,}349\%$$

Die Bestimmung des für t = 3 antizipierten Wertes des Zerobonds $aZB_{2,3}$ ist über zwei Alternativen möglich.

1. Möglichkeit: Abzinsung mit der Forward Rate auf t = 3

Berechnung der Forward Rate für 2 Jahre in 3 Jahren ($R_{2,3}$):

$$R_{2,3} = \sqrt[2]{\frac{(1+R_5)^5}{(1+R_3)^3}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{(1+0{,}055453)^5}{(1+0{,}049289)^3}} - 1 = 6{,}4768\%$$

Abzinsung der Zahlung in t = 5 auf t = 3, also um zwei Jahre:

$$aZB_{2,3} = \frac{1}{(1+0{,}064768)^2} = 0{,}88204 = 88{,}204\%$$

2. Möglichkeit: Aufzinsung mit der Spot Rate auf t = 3

$$aZB_{2,3} = 0{,}76349\,(1+0{,}049289)^3 = 0{,}88204 = 88{,}204\%$$

2.2.2.2.2. Kupon-Anleihen

Grundsätzlich wird bei der Berechnung des gegenwärtigen und antizipierten Wertes von verzinslichen Finanztiteln immer auf die einzelnen Zahlungen abgestellt, die bewertungstechnisch als Zerobonds betrachtet werden. Von daher basieren alle weiteren Bewertungsansätze auf der Bewertung von Zerobonds. Es wird also künftig keine einheitliche Durchschnittsrendite zur Abzinsung der Zahlungen verwendet.

2.2.2.2.2.1. Berechnung des heutigen Wertes

Die Berechnung des heutigen Wertes eines Finanztitels erfolgt mittels Abzinsung der Zahlungen auf der Grundlage der für die verschiedenen Zahlungszeitpunkte relevanten (und daher meistens auch unterschiedlichen) Spot Rates.

Lediglich in einem Sonderfall kann die Berechnung des gegenwärtigen Barwertes von Kupon-Anleihen auch auf der Grundlage der Durchschnittsverzinsung erfolgen. Dieser Sonderfall liegt dann vor, wenn die Durchschnittsverzinsung genau für den Kupon definiert ist, den auch der zu bewertende Finanztitel aufweist. Nur in diesem Fall kann die gleiche Durchschnittsverzinsung zur Abzinsung der Zahlungen zu den verschiedenen Zeitpunkten genutzt werden.

2.2.2.2.2.2. Berechnung von antizipierten Werten

Wie bei der Berechnung der antizipierten Werte von Zerobonds gibt es auch für die Berechnung der antizipierten Werte von Kupon-Anleihen mehrere Möglichkeiten.

Die erste Möglichkeit besteht darin, zunächst alle mit dem Finanztitel verbundenen Zahlungen zu ermitteln, die nach dem Zeitpunkt zu erwarten sind, für den der antizipierte Wert ermittelt werden soll. Diese Zahlungen können dann mit den entsprechenden Forward Rates abgezinst werden. Die Summe ergibt den antizipierten Wert des Finanztitels.

Bei der zweiten - zum gleichen Ergebnis führenden Variante - werden alle Zahlungen ermittelt, die nach dem Zeitpunkt zu erwarten sind, für den der antizipierte Wert ermittelt werden soll. Diese Zahlungen sind zunächst mit den gegebenen Spot Rates auf den heutigen Zeitpunkt abzuzinsen. Das Ergebnis muß dann mit der Spot Rate wiederum aufgezinst werden, und zwar bis zu dem Zeitpunkt, für den der antizipierte Wert ermittelt werden soll. Dieses Verfahren ist insofern einfacher, als daß keine Forward Rates benötigt werden.

Eine dritte Möglichkeit, die aber nicht auf alle Ausgangssituationen so leicht anzuwenden ist wie in dem folgenden Beispiel, basiert auf dem "normalen" heutigen Wert des Finanztitels. Der heutige Wert wird hier zunächst auf den Zeitpunkt aufgezinst, für den der antizipierte Wert zu bestimmen ist. Dann muß von dem ermittelten Ergebnis nur noch die Kuponzahlung in $t=1$ subtrahiert werden.

Heutiger Wert von Kupon-Anleihen

Es ist der heutige Wert einer Kupon-Anleihe $KA_{4,\,12\%}$ zu berechnen:
Laufzeit = T = 4 Jahre
Kupon = K = 12%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

relevante Formel:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}$$

t	1	2	3	4	Summe
Zahlungen	0,12	0,12	0,12	1,12	
R_t (in %)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	
abgezinst	0,1155	0,1098	0,1039	0,9124	1,2416

Die Kupon-Anleihe wird nicht direkt bewertet, sondern über 4 Zerobonds:
- **Zerobond mit 1 Jahr RLZ und einem Rückzahlungsbetrag von 0,12**
- **Zerobond mit 2 Jahren RLZ und einem Rückzahlungsbetrag von 0,12**
- **Zerobond mit drei Jahren RLZ und einem Rückzahlungsbetrag von 0,12**
- **Zerobond mit vier Jahren RLZ und einem Rückzahlungsbetrag von 1,12**

Es wird also **nicht** die Formel auf der Grundlage der Durchschnittsrendite verwendet:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r_{T,K})^t}$$

Das wäre nur zulässig, wenn $r_{T,K}$ für K = 12% bekannt ist.

Sonderfall: Gegenwärtiger Wert von Kupon-Anleihen

Es ist der heutige Wert einer fiktiven Kupon-Anleihe $KA_{4,\ 7{,}639\%}$ zu berechnen.

Laufzeit = T = 4 Jahre
Kupon = K = 7,639%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\ 7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}$$

$$KA_{4,\ 7{,}639\%} = \frac{0{,}07639}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}07639}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}07639}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{1{,}07639}{(1+0{,}052581)^4} = 108{,}65\%$$

oder hier (also nur in diesem Sonderfall!) auch:

$$KA_{T,\ 7{,}639\%} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_T}{(1+r_{T,\ 7{,}639\%})^t}$$

$$KA_{4,\ 7{,}639\%} = \frac{0{,}07639}{(1+0{,}0519)^1} + \frac{0{,}07639}{(1+0{,}0519)^2} + \frac{0{,}07639}{(1+0{,}0519)^3} + \frac{1{,}07639}{(1+0{,}0519)^4} = 108{,}65\%$$

Es kann (nur hier) alternativ auch die Formel auf der Grundlage der Durchschnittsverzinsung verwendet werden.

Antizipierter Wert von Kupon-Anleihen

Es ist für die Kupon-Anleihe $KA_{4,12\%}$ der für t = 1 antizipierte Wert $aKA_{3,12\%,1}$ zu berechnen:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

1. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes über Forward Rates

t	1	2	3	4	Summe
Zahlungen		12	12	112	
$R_{t-1,1}$ (in %)		5,1338	5,4427	5,7118	
abgezinst		11,41	10,79	94,81	117,02

2. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes über Spot Rates

t	1	2	3	4	Summe
relevante Zahlungen		12	12	112	
R_t (heutige Spot Rate in %)		4,5195	4,9289	5,2581	
abgezinst		10,98	10,39	91,24	112,61

$$aKA_{3,\,12\%,1} = 112{,}61\ (1+0{,}039088)^1 = 117{,}02\%$$

3. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes

$$aKA_{3,\,12\%,1} = 1{,}2416\ (1+0{,}039088)^1 - 0{,}12 = 1{,}1702 = 117{,}02\%$$

Was sagt der antizipierte Wert aus?

2.2.2.2.3. Hypothekendarlehen

Im folgenden Beispiel soll ein Anhaltspunkt für den Wert eines Hypothekendarlehens mit Festzinsvereinbarung und regelmäßiger Tilgung gewonnen werden. Das Grundprinzip besteht darin, alle mit dem Darlehen verbundenen Zahlungen mit den vorher berechneten Spot Rates abzuzinsen. Der potentielle Fehler bei der Verwendung eines Durchschnittszinssatzes dürfte hier besonders deutlich werden. Im Ergebnis ist der Wert des Hypothekendarlehens 116,38 bei einem gegenwärtigen Buch- oder Nominalwert von 100.

Im Zusammenhang mit Festzinsdarlehen sind in der Praxis relativ häufig Vorfälligkeitsentschädigungen zu berechnen. Ein einfacher Ansatz zur Abschätzung der Höhe dieser Vorfälligkeitsentschädigungen wird im folgenden dargestellt.

Wert eines Hypothekendarlehens mit Festzinsvereinbarung

Festzinssatz = 12% (auf den Restbuchwert)
Laufzeit = 4 Jahre
Tilgung p.a. = 25% (auf den Ursprungsbetrag)

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

t	1	2	3	4	Summe
Tilgung	25	25	25	25	
Zinszahlungen	12	9	6	3	
Zahlungen	37	34	31	28	
R_t (in %)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	
abgezinst	35,61	31,12	26,83	22,81	116,38

Abschätzung von Vorfälligkeitsentschädigungen I

Restschuld (Buchwert)	=	400
Festzinssatz	=	12%
Zinsbindungsdauer	=	noch 3 Jahre
Tilgung	=	20 p.a.

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

t	1	2	3	Summe
Tilgung	20	20	20 340	400
Buchwert am Anfang des Jahres bzw. Grundlage der Zinszahlung	400	380	360	
Zinszahlungen	48	45,6	43,2	
Summe der Zahlungen	68	65,6	403,2	
R_t (in %)	3,9088	4,5195	4,9289	
abgezinst	65,44	60,05	349,01	474,50

---> Die Vorfälligkeitsentschädigung müßte (aus ökonomischer Sicht) mindestens 74,50 betragen.

---> Berücksichtigt werden müßte aber noch der im Vergleich zum Geldmarktzinssatz höhere Kundengleitzinssatz nach Ablauf der Zinsfestschreibung!

Abschätzung von Vorfälligkeitsentschädigungen II

Restschuld (Buchwert) = 400
Festzinssatz = 4%
Zinsbindungsdauer = noch 3 Jahre
Tilgung = 20 p.a.

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

t	1	2	3	Summe
Tilgung	20	20	20 340	400
Buchwert am Anfang des Jahres bzw. Grundlage der Zinszahlung	400	380	360	
Zinszahlungen	16	15,2	14,4	
Summe der Zahlungen	36	35,2	374,4	
R_t (in %)	3,9088	4,5195	4,9289	
abgezinst	34,65	32,22	324,08	390,95

---> Es muß auf eine Vorfälligkeitsentschädigung verzichtet werden, da das Hypothekendarlehen ohnehin nur einen Wert in Höhe von ca. 390,95 aufweist. Eventuell ist dem Kunden ein Ausgleich zu zahlen.

---> Berücksichtigt werden müßte aber noch der im Vergleich zum Geldmarktzinssatz höhere Kundengleitzinssatz nach Ablauf der Zinsfestschreibung!

2.2.2.2.4. Anleihen mit heterogener Zahlungsstruktur

Grundsätzlich gilt, daß zunächst alle mit dem Finanztitel verbundenen (tatsächlichen) Zahlungen zu ermitteln sind. Es ist dafür unerheblich, ob die Zahlungen Zins- oder Tilgungszahlungen darstellen und ob die Höhe des Kupons während der Laufzeit schwankt. Dies hat keine Auswirkungen auf das Prinzip der Bewertung von Finanztiteln. Es müssen immer die tatsächlichen (wenn auch unterschiedlichen) Zahlungen mit den entsprechenden Spot Rates auf $t=0$ abgezinst werden.

Für Finanztitel, bei denen über die Laufzeit die Zinsen angesammelt und mitverzinst werden (sogenannte aufgezinste Finanztitel) ist genauso zu verfahren. Es ist zunächst die Höhe der Gesamtzahlung am Ende der Laufzeit zu ermitteln und diese dann auf $t=0$ abzuzinsen. Insofern entspricht beispielsweise ein Bundesschatzbrief Typ B (aufgezinster Typ) einem Zerobond.

Bei der Bewertung von Bundesschatzbriefen ist allerdings noch zu berücksichtigen, daß der Inhaber des Bundesschatzbriefes eine Option auf Rückgabe der Wertpapiere zu einem Kurs von 100% hat. Falls es sinnvoll erscheint, den Bundesschatzbrief zurückzugeben, ist es notwendig zu prüfen, ob nicht eine spätere Rückgabe bei Sicherung der gegenwärtigen Zinssätze (z.B. mittels Zins-Futures) zu einem höheren Wert führt. Insofern ist die Bewertung schwieriger, als im weiteren dargestellt.

Anleihen mit Kupons unterschiedlicher Höhe

Nominalwert = 100
Laufzeit = 5 Jahre
Festzinssätze (jährliche Zinszahlung) = 3, 4, 5, 6 und 7%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

relevante Formel:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}$$

t	1	2	3	4	5	Summe
Zinssatz	3%	4%	5%	6%	7%	
Zahlungen	3	4	5	6	107	
R_t (in %)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	
abgezinst	2,887	3,662	4,328	4,888	81,694	97,46

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

Verwenden Sie im weiteren grundsätzlich folgende Daten:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,B}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000
R_T (Spot Rates)	5,0000	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	8,5665	10,9861	12,6159	13,8711	13,6637	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	8,5665	9,7696	10,7103	11,4922	11,9231	

A) Es soll ein Zerobond mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren verkauft werden. Welcher Kurs wäre für ein solches Wertpapier z.Zt. angemessen?

B) Ermitteln Sie den antizipierten Wertverlauf eines Zerobonds mit 6 Jahren Restlaufzeit. Stellen Sie das Ergebnis auch grafisch dar.

C) Welche Rendite erbringt folgender Zerobond:
* Hessische Landesbank
* Laufzeit z.Zt. 12 Jahre
* Kurs 47,25 G

D) Berechnen Sie für ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Restlaufzeit von 3 Jahren und einem Kupon von 5% den heutigen Wert sowie den für in zwei Jahren antizipierten Wert. Beschreiben Sie die drei möglichen Wege, um den antizipierten Wert zu berechnen.

E) Berechnen Sie den Wert eines Bundesschatzbriefes mit jährlicher Zinszahlung (Typ A).
Restlaufzeit = 5 Jahre
Nominalverzinsung = 6%, 8%, 9,5%, 11% und 12%
Vernachlässigen Sie die Optionsprämie sowie die Möglichkeit, im Zusammenhang mit Zinssicherungsgeschäften den Bundesschatzbrief später zurückgeben zu können.

F) Berechnen Sie den Wert eines aufgezinsten Bundesschatzbriefes (Typ B).
Restlaufzeit = 5 Jahre
Nominalverzinsung = 6%, 8%, 9,5%, 11% und 12%
Vernachlässigen Sie die Optionsprämie sowie die Möglichkeit, im Zusammenhang mit Zinssicherungsgeschäften den Bundesschatzbrief später zurückgeben zu können.

G) Diskutieren Sie die Aussage "antizipierte Zinssätze sind zukünftige Zinssätze".

H) Zeigen Sie, wie mit einem heute abgeschlossenen Forward-Forward-Geschäft für $t=1$ eine Kapitalaufnahme in Form der Emission einer Kupon-Anleihe mit einer Nominalverzinsung von 12%, einer Laufzeit von dann 3 Jahren und einem Nominalwert von 1 Mio. nachgebildet werden kann. Nutzen Sie zur Duplikation eine Kupon-Anleihe mit einem Kupon von 12% (mit 4 Jahren Restlaufzeit) und eine mit einem Kupon von 7% (mit einem Jahr Restlaufzeit). Über welchen Betrag können Sie in einem Jahr verfügen? Wie hätte dieser Wert auch alternativ ermittelt werden können?

I) Berechnen Sie den (antizipierten) Wert des folgenden Hypothekendarlehens <u>in einem Jahr</u>.

Festzinssatz	=	12% (auf den jeweiligen Restbuchwert)
Laufzeit	=	heute 4 Jahre bzw. dann 3 Jahre
Tilgung p.a.	=	25% (auf den Ursprungsbetrag)

Lösungshinweise

A)

$$PZB_3 = \frac{1}{(1 + 0{,}0816)^3} = 0{,}7904 = 79{,}04\%$$

B) 0,542 - 0,569 - 0,618 - 0,686 - 0,773 - 0,88 - 1

C)

$$R_{12} = \sqrt[12]{\frac{1}{0{,}4725}} - 1 = 0{,}06447 = 6{,}447\%$$

D) heutiger Wert = 92,14%; antizipierter Wert = 94,60%

$$\frac{1 + K}{1 + R_{1,2}} = \frac{1{,}05}{1 + 0{,}1099} = 94{,}60\%$$

E)

Bundesschatzbrief mit jährlicher Zinszahlung (Typ A)						
	1	2	3	4	5	Summe
Zinssätze	6,00%	8,00%	9,50%	11,00%	12,00%	
Zahlungen	6	8	9,5	11	112	
Spot Rates	5,00%	6,77%	8,16%	9,25%	10,16%	
abgezinst	5,714	7,018	7,509	7,720	69,032	96,99%

---> Optionsanteil mitbewerten!

---> Die Möglichkeit, Bundesschatzbriefe (nach einem Jahr) jederzeit zum Kurs von 100% zurückgeben zu können, entspricht einer Verkaufsoption. Da Optionen bekanntlich immer einen Wert von größer gleich 0 haben, ist ein Kurs knapp unter 100% immer noch "fair" bzw. marktgerecht.

F)

Bundesschatzbrief mit Aufzinsung (LZ = 5 Jahre) (Typ B)							
	0	1	2	3	4	5	
Zinssätze		6,00%	8,00%	9,50%	11,00%	12,00%	
Buchwert	100,00	106,00	114,48	125,36	139,14	155,84	
Zahlungen						155,84	
Spot Rate						10,16%	
abgezinst						96,05	96,05%

---> Optionsanteil mitbewerten!

---> Die Möglichkeit, Bundesschatzbriefe (nach einem Jahr) jederzeit zum Kurs von 100% zurückgeben zu können, entspricht einer Verkaufsoption. Da Optionen bekanntlich immer einen Wert von größer gleich 0 haben, ist ein Kurs knapp unter 100% immer noch "fair" bzw. marktgerecht.

H)

Emission eines festverzinslichen Wertpapiers mit 4 Jahren Laufzeit, Kupon = 12%
Kauf eines festverzinslichen Wertpapiers mit 1 Jahr Laufzeit, Kupon = 7%
(Für die zweite Transaktion sind auch andere Varianten möglich, sie führen aber zu identischen Zahlungen.)

Kurs des Wertpapiers mit 4 Jahren Laufzeit	110,05%
Kurs des Wertpapiers mit 1 Jahr Laufzeit	101,90%

	Nennwert	Kurswert
Emission des Wertpapiers mit 4 Jahren Laufzeit	1000000,00	1100477,46
Kauf des Wertpapiers mit 1 Jahr Laufzeit	1079907,79	1100477,46

Zahlungsströme	0	1	2	3	4	5
WP 4	1100477,46	-120000,00	-120000,00	-120000,00	-1120000,00	
WP 1	-1100477,46	1155501,34				
Summe	0,00	1035501,34	-120000,00	-120000,00	-1120000,00	

Wie hoch ist der nach den Forward Rates erwartete Kurs?				
Zahlungen	-120000,00	-120000,00	-1120000,00	
Abzinsung mit t	1	2	3	
antizipierte Spot Rates (Forward Rates)	8,57%	9,77%	10,71%	
abgezinst	-110531,38	-99590,27	-825379,69	-1035501,34

l)

t	1	2	3	4	Summe
Tilgung		25	25	25	
Zinszahlungen		9	6	3	
Zahlungen		34	31	28	
$R_{t,1}$		8,57%	9,77%	10,71%	
abgezinst auf t = 1		31,317	25,727	20,634	77,679

Literatur

Günter Altrogge. Die Problematik der Tilgungs- und Zinsverrechnung bei (Hypotheken-) Darlehen vor dem Hintergrund des Zinsurteils des BGH vom 24.11.1988. "Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft", (1990), S. 1-9.

Heinz Kußmaul. Zero-Bonds. Begriff, Merkmale, Gestaltungsmöglichkeiten. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1989), S. 15-19.

Theo Menz. Securitization. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1987), S. 338-342.

Karl Scheidl und Ralf Scholz. Zur Rendite von Zero-Bonds nach Steuern. "Die Bank", (1986), S. 572-575.

Stefan Schiestl. Nullkuponanleihen in Österreich. "Österreichisches Bank Archiv", (1991), S. 114-123.

2.2.2.2.5. Floating Rate Notes

Floating Rate Notes sind verzinsliche Wertpapiere, die im Gegensatz zu Kupon-Anleihen keine feste Verzinsung aufweisen. Die Höhe der Verzinsung ist vielmehr an einen Referenzzinssatz gekoppelt, meist an den FIBOR oder den LIBOR. In regelmäßigen Zeitabständen (in der Praxis alle 6 oder 12 Monate) wird der "neue" Zinssatz für die nächste Periode (also für 6 oder 12 Monate) auf den gerade gültigen Referenzzinssatz festgeschrieben.

Im weiteren wird davon ausgegangen, daß die zu bewertenden Floating Rate Notes (FRN) jederzeit an der Börse gehandelt werden können. Ferner wird unterstellt, daß die mit den FRN verbundenen Zins- und Tilgungszahlungen keinem Ausfallrisiko unterliegen bzw. das (konstante) Ausfallrisiko durch den Aufschlag auf den Referenzzinssatz abgegolten ist. Für diesen Fall müßte der Wert zum Zeitpunkt einer Zinszahlung 100% sein, da eine FRN als eine Aneinanderreihung kurzfristiger Geldanlagen anzusehen ist.

Der Wert der FRN zwischen den Zeitpunkten der Zinszahlung hängt von der Entwicklung des Marktzinsniveaus ab. Falls für ein halbes Jahr eine Verzinsung in Höhe des 6-Monats-LIBOR-Satzes von 6% festgeschrieben wurde, so hätte eine dann deutliche Erhöhung des LIBOR-Satzes zur Folge, daß die festgesetzten 6% nicht mehr marktgerecht wären. Insofern könnte die FRN nur noch zu einem Kurs von unter 100% verkauft werden.

Allerdings halten sich Kursgewinne und -verluste bei FRN im Vergleich zu Kupon-Anleihen in Grenzen, da die kurzfristig nicht mehr marktgerechte (zu niedrige oder zu hohe) Verzinsung nur bis zur nächsten Zinsanpassung (hier spätestens in 6 Monaten) Gültigkeit hat. Zum Zeitpunkt der Zinsanpassung wird die FRN wieder marktgerecht verzinst, hat also wieder einen Kurs von 100 Prozent.

Floating Rate Notes I

Bewertung von bonitätsrisikofreien FRN zum Zeitpunkt der Zinszahlung

Gesamtlaufzeit	=	5 Jahre
Zinsanpassung und Zinszahlung	=	halbjährlich
vereinbarter Zinssatz	=	6-Monats-FIBOR (lineare Zinsberechnung)
6-Monats-FIBOR z.Zt.	=	6%
Kurs der FRN	=	100%

Grund: Duplikation über zu prolongierende 6-Monats-Geldanlagen möglich.

Bewertung von bonitätsrisikobehafteten FRN zum Zeitpunkt der Zinszahlung

Gesamtlaufzeit	=	5 Jahre
Zinsanpassung und Zinszahlung	=	halbjährlich
vereinbarter Zinssatz	=	6-Monats-FIBOR + 2% (lineare Zinsberechnung)
6-Monats-FIBOR z.Zt.	=	6%

Wenn die Bonitätsprämie in Höhe von 2% als richtig angesehen wird, dann müßte der Kurs bei 100% liegen.

Die antizipierte Verzinsung der FRN entspricht der 6-Monats-Forward-Rate.

Floating Rate Notes II

Bewertung von bonitätsrisikofreien FRN zwischen den Zeitpunkten der Zinszahlung

Gesamtlaufzeit	=	5 Jahre minus 1 Tag
Zinsanpassung und Zinszahlung	=	halbjährlich
vereinbarter Zinssatz	=	6-Monats-FIBOR (gestern festgesetzt auf 6%)
6-Monats-FIBOR z.Zt.	=	10% (lineare Zinsberechnung)
Wert der FRN (incl. Stückzinsen)	=	?

$$\text{Kurswert} = \text{dirty price} = \frac{103}{1 + \frac{0{,}10}{2}} = 98{,}095\%$$

(Der eine Tag wurde bei der Berechnung des Kurswertes vernachlässigt.)

Grund: Duplikation über eine 6-Monats-Geldanlage und dann zu prolongierende 6-Monats-Geldanlagen möglich.

Bewertung von bonitätsrisikofreien FRN zwischen den Zeitpunkten der Zinszahlung

Gesamtlaufzeit	=	4,75 Jahre
Zinsanpassung und Zinszahlung	=	halbjährlich
vereinbarter Zinssatz	=	6-Monats-FIBOR (vor 3 Monaten festgesetzt auf 6%)
3-Monats-FIBOR z.Zt.	=	10% (lineare Zinsberechnung)
Dirty Price der FRN (incl. Stückzinsen)	=	?
Kurswert der FRN	=	?

$$\text{dirty price} = \frac{103}{1 + \frac{0{,}10}{4}} = 100{,}488\%$$

$$\text{Kurswert} = 1{,}00488 - 0{,}015 = 0{,}98988 = 98{,}988\%$$

Grund: Duplikation über eine 3-Monats-Geldanlage und dann zu prolongierende 6-Monats-Geldanlagen möglich.

2.2.2.2.6. Reverse Floater

Reverse Floater (RFRN) sind eine besondere Form von Floating Rate Notes. Der Erwerber eines Reverse Floaters erhält eine Verzinsung, die zur Entwicklung des kurzfristigen Zinssatzes (üblicherweise LIBOR oder FIBOR) entgegengesetzt verläuft. Die Laufzeit dieser Wertpapiere ist meist langfristig (z.B. 10 Jahre) und die Verzinsung wird - wie bei der "normalen" FRN - jeweils für eine Periode von 6 Monaten oder einem Jahr im voraus festgelegt.

Konkret wird meist vereinbart, daß ein bestimmter Festzinssatz abzüglich des jeweils gültigen variablen Zinssatzes (LIBOR, FIBOR) für eine Periode festgeschrieben wird. Es ist aber auch denkbar, daß ein Festzinssatz abzüglich dem doppelten oder dreifachen LIBOR oder FIBOR vereinbart ist. Üblicherweise ist eine negative Verzinsung des Reverse Floaters vertraglich ausgeschlossen, der niedrigste Zinssatz ist damit 0 Prozent, der höchste Zinssatz entspricht dem Festzinssatz.

Aufgrund der Zinsuntergrenze von 0% ist zu beachten, daß ein Reverse Floater einen - je nach Konstruktion - CAP bzw. FLOOR beeinhaltet. Für eine Wertbestimmung dieses CAPs bzw. FLOORs ist die Optionspreistheorie heranzuziehen. Daher wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

Bewertung eines Reverse Floaters I

Laufzeit des Reverse Floaters = 4 Jahre
Zinssatz = 15% - FIBOR (jährliche Zinsanpassung)

Kuponzahlungen verhalten sich der Marktzinsentwicklung entgegengesetzt

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

$$ZB_4 = \frac{1}{(1+0{,}052581)^4} = 81{,}466\%$$

$$KA_{4,\,15\%} = \frac{0{,}15}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}15}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}15}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{1{,}15}{(1+0{,}052581)^4} = 134{,}8366\%$$

Ein Reverse Floater wird mit einer Kupon-Anleihe $KA_{T,15\%}$ im Bestand (Kurs 134,8366%) und einem Zerobond im Bestand (Kurs 81,466%) und einer (verkauften) FRN (Kurs 100%) dupliziert:

	gekaufte Anleihe	gekaufter Zerobond	verkaufte/ emittierte FRN	Reverse Floater im Bestand	
				Festzinszahlungen	"abzüglich"
Wert in t=0	+ 134,8366	+ 81,466	- 100	+ 116,3028	
	Summe: + 116,3028				
1	+ 15	0	- FIBOR	+ 15	- FIBOR
2	+ 15	0	- FIBOR	+ 15	- FIBOR
3	+ 15	0	- FIBOR	+ 15	- FIBOR
4	+ 115	+ 100	- FIBOR - 100	+ 115	- FIBOR

Achtung: Vernachlässigung des CAP´s und FLOOR´s (Die Zinsuntergrenze des Reverse Floaters ist üblicherweise 0 Prozent, die Zinsobergrenze hier 15 Prozent!)

Bewertung eines Reverse Floaters II

1. Möglichkeit der Bewertung eines Reverse Floaters:

$$RFRN_{T,\ \text{Festsatz-FIBOR}} = -\ FRN + KA_{T,\ \text{Festsatz}} + ZB_T$$

$$RFRN_{4,\ 15\%\text{-FIBOR}} = -\ FRN + KA_{4,\ 15\%} + ZB_4$$

$$RFRN_{4,\ 15\%\text{-FIBOR}} = -100 + 134{,}8366 + 81{,}466 = 116{,}3028$$

2. Möglichkeit der Bewertung eines Reverse Floaters:

$$RFRN_{T,\ \text{Festsatz-FIBOR}} = KA_{T,\ \text{Festsatz - Marktrendite}}$$

Die Marktrendite (hier 5,209%) bezeichnet hier die Nominalverzinsung = Durchschnittsrendite einer Kupon-Anleihe mit einem Kurs von 100 Prozent. Sie kann durch Umstellung der Kapitalwertformel leicht hergeleitet werden:

$$\text{Marktrendite} = \frac{1 - \dfrac{1}{(1 + R_T)^T}}{\sum\limits_{t=1}^{T} \dfrac{1}{(1 + R_t)^t}} = 5{,}209\%$$

Probe:

$$KA_{4,\ 5{,}209\%} = 100\% = \frac{0{,}05209}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}05209}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}05209}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{1{,}05209}{(1+0{,}052581)^4}$$

daraus folgt:

$$RFRN_{4,\ 15\%\text{-FIBOR}} = KA_{4,\ 15\%\ -\ 5{,}209\%} = KA_{4,\ 9{,}791\%}$$

$$KA_{4,\ 9{,}791\%} = \frac{0{,}09791}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}09791}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}09791}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{1{,}09791}{(1+0{,}052581)^4} = 116{,}3028\%$$

- Wie hoch wäre bei den gegebenen Marktrenditen der faire Festzinssatz (für einen Kurs des Reverse Floaters von 100 Prozent)?
- Wie wird ein Reverse Floater 20% - 2 FIBOR bewertet?
- Wieviel ist eine Zinsuntergrenze von 0% (CAP bzw. FLOOR) wert?

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Berechnen Sie den Wert einer Floating Rate Note mit jährlicher Zinsanpassung und einer Restlaufzeit von 5,75 Jahren. Der Zinssatz wurde bei der letzten Zinsanpassung mit 10% festgeschrieben. Folgende Zinssätze (lineare Zinsberechnung unterstellt) sind zur Zeit am Markt erzielbar:

Laufzeit	GEM (0 Jahre)	3 Monate	6 Monate	9 Monate	1 Jahr
FIBOR (p.a.)	10%	9%	8,5%	8%	7,75%

Berechnen Sie den heutigen Kurswert und den dirty price der Floating Rate Note.

Zeigen Sie, wie mittels Arbitragetransaktionen ein Gewinn gemacht werden könnte, falls der dirty price der Floating Rate Note 103 wäre.

Verwenden Sie im weiteren grundsätzlich folgende Daten:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,8}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000
R_T (Spot Rates)	5,0000	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	8,5665	10,9861	12,6159	13,8711	13,6637	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	8,5665	9,7696	10,7103	11,4922	11,9231	

B) Berechnen Sie den Wert eines Reverse Floaters mit einer Laufzeit von 3 Jahren und einer Verzinsung in Höhe von 13% - FIBOR.

C) Wie hoch müßte der Festzinssatz eines Reverse Floaters mit einer Laufzeit von 3 Jahren sein, wenn der Kurs 100% ist?

D) Ermitteln Sie den Wert eines Reverse Floaters mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren und einer Verzinsung von 20% fest gegen 2 x FIBOR. Zeigen Sie des weiteren auf, mit welchen Finanztiteln dieser Reverse Floater zu duplizieren ist.

E) Wie wird ein Reverse-Floater prinzipiell bewertet? Für welche Zwecke könnten Sie sich den Einsatz eines solchen Wertpapiers vorstellen?

Lösungshinweise

A)

$$\text{dirty price} = \frac{110}{1 + 0{,}08 \cdot \frac{3}{4}} = 103{,}7736\%$$

Die Stückzinsen belaufen sich auf 2,5 Prozent. Der Kurs ist folglich 101,2736 Prozent.

Wenn der Wert = dirty price (incl. Stückzinsen) 103 ist, ist die Floating Rate Note unterbewertet und sollte gekauft werden. Dafür wird ein Kredit in Höhe von 103 aufgenommen, dessen Rückzahlungsbetrag 103 (1 + 0,08 / 4 · 3) = 109,18 ist. Die FRN kann dann für 100 verkauft werden, zuzüglich den Zinserträgen ergibt das 110, mithin einen risikofreien Gewinn in Höhe von 110 - 109,18 = 0,82.

Der Gewinn abgezinst ergibt: 0,82 / (1 + 0,08 / 4 · 3) = 0,7736.

Er entspricht der Differenz zwischen dem Marktpreis und dem fair value: 103,7736 - 103 = 0,7736.

(Dieses Ergebnis könnte auch über andere Arbitragetransaktionen erzielt werden.)

B) Die Marktrendite kann ohne Berechnungen mit 8% erkannt werden, da lt. Tabelle die Durchschnittsrendite für 3 Jahre dem Kupon der Zinsstrukturkurve entspricht.

$$RFRN_{3,\ 13\%\text{-FIBOR}} = KA_{3,\ 13\%\ -\ 8\%} = KA_{3,\ 5\%}$$

$$KA_{3,\ 5\%} = \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^1} + \frac{0{,}05}{(1+0{,}067683)^2} + \frac{1{,}05}{(1+0{,}081561)^3} = 92{,}14\%$$

C) Der faire Zinssatz beträgt 8% + 8% = 16% aufgrund von:

$$KA_{3,\ 8\%} = \frac{0{,}08}{(1+0{,}05)^1} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}067683)^2} + \frac{1{,}08}{(1+0{,}081561)^3} = 100\%$$

D) $KA_{5,20\%} + 2\ ZB_5 - 2\ FRN = 1{,}40400 + 2 \cdot 0{,}61636 - 2 \cdot 1 = 0{,}63672$

Literatur

Siegfried C. Cassier. Wertpapiere mit variablem Zins. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1988), S. 662-664.

Gabriele Damm, Gerhard Friedla und Reinhard H. Schmidt. Eine Effizienzanalyse zinsvariabler Finanzierungsinstrumente. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1987), S. 146-162.

2.2.2.2.7. Derivate

Der folgende Abschnitt behandelt die Bewertung verschiedener Formen von Derivaten. Grundsätzlich gilt, daß die Bewertung der Derivate aus den Werten der vorgestellten Grundpositionen (Zerobonds bzw. Kupon-Anleihen und FRN) abgeleitet werden kann.

2.2.2.2.7.1. Einfache Zinstermingeschäfte

Im folgenden werden zunächst die in der Literatur gängigen Arbitragebeweise dargestellt, auf denen die üblichen Formeln zur Bewertung von Zinstermingeschäften basieren. Im Anschluß wird gezeigt, daß diese Werte identisch sind mit den antizipierten Werten der Finanztitel, auf die sich die Zinstermingeschäfte beziehen (den antizipierten Werten der Basiswerte). Der fair value von Zinstermingeschäften kann demnach auch einfacher berechnet werden, als es in der Literatur häufig beschrieben wird.

Die einfachste Variante zur Berechnung des fair value eines einfachen Zinstermingeschäftes beruht auf der Prämisse, daß während der Laufzeit des Zinstermingeschäftes keine Kuponzahlungen anfallen und darüber hinaus keine Stückzinsen zu berücksichtigen sind **(Variante 1)**. Der allgemeingültige Arbitrageansatz zur Berechnung des fair value von Zinstermingeschäften ist etwas komplizierter, basiert aber auf demselben Grundgedanken.

Grundsätzlich müssen folgende Transaktionen in der Summe für jeden Zeitpunkt einen Saldo von null aufweisen:

heute: Verkauf eines Zins-Futures mit einer Laufzeit von t (hier $t = 1$) auf eine Kupon-Anleihe mit einer Nominalverzinsung von K und einer Restlaufzeit von (dann) T-t Jahren zum Kurswert von $FU_{T-t,K,t}$.
Kauf des Basiswertes des Zins-Futures zum heutigen Kurs für $KA_{T,K}$ auf Kredit.
Für den Kredit in Höhe von $KA_{T,K}$ wird eine Laufzeit von t und ein Festzinssatz von R_t vereinbart.
In der Summe ist für diese drei Transaktionen kein Kapital erforderlich.

in t: Vereinnahmung der Kuponzahlung K und Lieferung des Basiswertes zum vereinbarten Kurs in Höhe von $FU_{T-t,K,t}$. Rückzahlung des Darlehens in Höhe von $KA_{T,K}\ (1 + R_t)^t$. Diese Zahlungen müssen in der Summe ebenfalls null ergeben, sonst wären Arbitragetransaktionen möglich.

Im weiteren wird die Berechnung des Wertes eines einfachen Zinstermingeschäftes am Beispiel veranschaulicht. Neben der gezeigten Berechnungsmethodik für den "fairen" Future-Kurs auf Grundlage des Arbitrageprinzips gibt es noch weitere Ansätze, von denen die zwei wichtigsten dargestellt werden. Der Vergleich der verschiedenen Methoden macht noch einmal den Zusammenhang von Spot Rates und Forward Rates deutlich.

1. Möglichkeit: Auf der Grundlage des Arbitrageprinzips

Unter Verwendung der Formel auf der Grundlage des Arbitrageprinzips ergibt sich ein Wert für den Zins-Futures von 107,9024 Prozent. Das Arbitrageprinzip wurde bereits erläutert.

2. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes des Basiswertes über Forward Rates

Die zweite Möglichkeit der Berechnung des fairen Kurses des Zins-Futures besteht darin, den (antizipierten) Wert des zugrundeliegenden Wertpapiers (des Basiswertes) zum Zeitpunkt der Fälligkeit des Futures auf der Basis der Forward Rates zu ermitteln.

Wird das Wertpapier über den Future-Kontrakt in einem Jahr ($t = 1$) erworben, ist die erste relevante Zahlung daraus in zwei Jahren zu erwarten. Daher ist die Summe über u $> t$ bis $T+t$ ($T+t$ = letzter Zeitpunkt einer Zahlung aus dem Wertpapier) zu ermitteln.

Der Vorteil dieser Berechnungsweise liegt darin, daß es unerheblich ist, ob während der Laufzeit des Zinstermingeschäftes mit dem Basiswert verbundene Kuponzahlungen anfallen, da sie keinen Einfluß auf seinen antizipierten Wert haben.

3. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes des Basiswertes über Spot Rates

Diese Möglichkeit zur Berechnung des fair value von Zinstermingeschäften basiert auf der Verwendung von Spot Rates. Hier werden alle Zahlungen, die nach Erwerb des Basiswertes in t anfallen, auf den Zeitpunkt $t=0$ diskontiert. Um den antizipierten Wert des Basiswertes zu ermitteln, muß dieser Wert mit der Spot Rate entsprechend der Laufzeit des Zinstermingeschäftes aufgezinst werden. Neben dem Vorteil, daß auch bei diesem Verfahren die während der Laufzeit des Zinstermingeschäftes anfallenden Kuponzahlungen nicht berücksichtigt werden müssen, ist auch die Berechnung von Forward Rates nicht erforderlich.

Zusammenfassend ist zu konstatieren, daß die Werte aller verzinslichen Finanztitel ausschließlich auf der Grundlage von Spot Rates ermittelt werden können.

Für den Fall, daß Stückzinsen bei Verkauf und Fälligkeit des Zins-Futures zu berücksichtigen sind (**Variante 2**), erhöht sich zunächst der erforderliche Kapitalaufwand in $t=0$ um die bei Abschluß des Zins-Futures fälligen Stückzinsen ($\text{Stückzinsen}_{\text{Abschluß}}$). Bei Fälligkeit des Futures sind dann an Stelle der Kupon-Zahlungen die bis dahin aufgelaufenen Stückzinsen ($\text{Stückzinsen}_{\text{Fälligkeit}}$) zu berücksichtigen. Daraus folgt für die Variante 2:

$$(KA_{T,K} + \text{Stückzinsen}_{\text{Abschluß}})\,(1 + R_t)^t = FU_{T-t,K,t} + \text{Stückzinsen}_{\text{Fälligkeit}}$$

$$FU_{T-t,K,t} = (KA_{T,K} + \text{Stückzinsen}_{\text{Abschluß}})\,(1 + R_t)^t - \text{Stückzinsen}_{\text{Fälligkeit}}$$

Schließlich bleibt die **Variante 3**, bei der während der Laufzeit Kuponzahlungen zu berücksichtigen sind. Hier ist so zu verfahren, daß die vor t gezahlten Kuponzahlungen bis t zu (sicherbaren) Forward Rates anzulegen sind. Für t ist damit bekannt, welche Erträge (inclusive Wiederanlageerträge) aus dem Basiswert resultieren. Per Saldo sind auch dann bis t keine Zahlungsüberschüsse zu verzeichnen.

Zinstermingeschäfte

Das **Grundprinzip von Zinstermingeschäften** besteht darin, daß heute vereinbart wird, zu welchem Zinssatz und auf welchen Betrag morgen eine Kapitalüberlassung erfolgt.

Beispiel: Die Bank vereinbart mit einem Kunden, daß dieser in einem Jahr einen Kredit in Höhe von 100.000 zu 8% für (dann) 5 Jahre erhält.

* Ist Zinssatz in Höhe von 8% "richtig"? Welcher Zinssatz wäre "richtig"?
* Was ist dieses Termingeschäft (bei gegebenem Kreditzinssatz) heute wert?
* Was ist dieses Termingeschäft bei sich ändernden Marktzinssätzen wert?

Varianten einfacher Zinstermingeschäfte:

Variante 1: Die Laufzeit des Zinstermingeschäftes ist ein Jahr. Der Kupon wurde gerade eingelöst. Der nächste Kupontermin ist in genau einem Jahr.

Variante 2: Es müssen Stückzinsen sowohl bei Abschluß als auch bei Fälligkeit des Zinstermingeschäftes berücksichtigt werden. Während der Laufzeit des Zins-Futures erfolgen aber keine Kupon-Zahlungen.

Variante 3: Es erfolgen während der Laufzeit auch Kupon-Zahlungen.

Mit Zinstermingeschäften verbundene Ziele:

* Hedging (Mikro- oder Makro-Hedging)
* Arbitrage
* Spekulation
* Handel

Einfaches Arbitrageprinzip zur Bestimmung des Wertes von einfachen Zins-Futures (Variante 1)

Ein Anleger besitzt eine Kupon-Anleihe mit einer ganzzahligen Restlaufzeit. Er möchte in einem Jahr über den Gegenwert verfügen (zwischenzeitlich fallen keine Kuponzahlungen an, Stückzinsen brauchen nicht berücksichtigt zu werden).

Somit hat er folgende Alternativen:

Er kann seine Anleihe heute verkaufen und das Geld für ein Jahr anlegen.

oder

Er kann heute einen Future verkaufen, der sicherstellt, daß er in einem Jahr einen bestimmten Betrag für die Anleihe (zuzüglich Nominalzinsen aus diesem Papier) erhält.

---> beide Alternativen müssen den gleichen Endwert aufweisen!

Daraus folgt für den einfachen Fall, bei dem während der Laufzeit des Zins-Futures keine Zahlungen aus dem Wertpapier erfolgen:

$$KA_{T,K} (1 + R_t)^t = FU_{T-t,K,t} + K$$

und durch Umstellung der Standardformel zur Berechnung des fair value:

$$FU_{T-t,K,t} = KA_{T,K} (1 + R_t)^t - K$$

Es gibt insbesondere folgende <u>preisbestimmende Faktoren für Zins-Futures</u>:

- Die preisbestimmenden Faktoren des Basiswertes (Restlaufzeit T, Nominalzinssatz K) in Verbindung mit dem gegenwärtigen Marktzinsniveau bestimmen den Wert des Basiswertes ($KA_{T,K}$).
- Der Marktzinssatz für die Future-Laufzeit (R_t) und die Nominalverzinsung des Basiswertes (K) bestimmen in Verbindung mit der Laufzeit des Zins-Futures (t) die sogenannten cost of carry.

Berechnung des Wertes eines einfachen Zinstermingeschäftes 1. Möglichkeit: Auf der Grundlage des Arbitrageprinzips

Es soll der Wert des folgenden Zinstermingeschäftes bestimmt werden:

Laufzeit des Zinstermingeschäftes	= t	= 1 Jahr
Basiswert		= Kupon-Anleihe
heutige Laufzeit des Basiswertes	= T	= 6 Jahre (also in t noch 5)
Nominalverzinsung des Basiswertes	= K	= 8%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Berechnung des heutigen Wertes des Basiswertes:

$$KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+R_t)^t}$$

$$KA_{6,\,8\%} = \frac{0{,}08}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}052581)^4} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}055453)^5} + \frac{1{,}08}{(1+0{,}058076)^6}$$

$$KA_{6,\,8\%} = 1{,}115424 = 111{,}5424\%$$

Der Zinssatz R_1 für einen Zerobond mit einem Jahr Laufzeit ist 3,9088%, daraus folgt:

$$FU_{5,\,8\%,1} = 1{,}115424\ (1{,}039088)^1 - 0{,}08 = 107{,}9024\%$$

Berechnung des Wertes eines einfachen Zinstermingeschäftes 2. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes des Basiswertes über Forward Rates

Es soll der Wert des folgenden Zinstermingeschäftes bestimmt werden:

Laufzeit des Zinstermingeschäftes	= t	= 1 Jahr
Basiswert		= Kupon-Anleihe
heutige Laufzeit des Basiswertes	= T	= 6 Jahre (also in t noch 5)
Nominalverzinsung des Basiswertes	= K	= 8%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\ 7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

$$FU_{T-t,K,t} = aKA_{T-t,K,t} = \sum_{u>t}^{T+t} \frac{Z_u}{(1+R_{u-t,t})^{u-t}}$$

mit:

$aKA_{T-t,K,t}$ = für t (antizipierter) Wert eines festverzinslichen Wertpapiers mit (dann) T Jahren Restlaufzeit und einer Nominalverzinsung von K

Für den Kurs eines Zinstermingeschäftes mit einem Jahr Laufzeit auf eine Kupon-Anleihe mit (dann) 5 Jahren Restlaufzeit und einer Nominalverzinsung von K ergibt sich:

$$FU_{5,8\%,1} = aKA_{5,8\%,1} = \sum_{u>1}^{6} \frac{Z_u}{(1+R_{u-1,1})^{u-1}}$$

$$FU_{5,8\%,1} = \frac{0{,}08}{(1+0{,}051338)^1} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}054427)^2} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}057118)^3} + \frac{0{,}08}{(1+0{,}059585)^4} + \frac{1{,}08}{(1+0{,}061915)^5} = 107{,}9024\%$$

---> Die Ergebnisse sind identisch!

Berechnung des Wertes eines einfachen Zinstermingeschäftes 3. Möglichkeit: Ermittlung des antizipierten Wertes des Basiswertes über Spot Rates

Es soll der Wert des folgenden Zinstermingeschäftes bestimmt werden:

Laufzeit des Zinstermingeschäftes	= t	= 1 Jahr
Basiswert		= Kupon-Anleihe
heutige Laufzeit des Basiswertes	= T	= 6 Jahre (also in t noch 5)
Nominalverzinsung des Basiswertes	= K	= 8%

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7,639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

$$FU_{T-t,K,t} = aKA_{T,K,t} = \sum_{u>t}^{T} \frac{Z_u}{(1+R_u)^u}\,(1+R_t)^t$$

$aKA_{T-t,K,t}$ = für t (antizipierter) Wert eines festverzinslichen Wertpapiers mit (dann) T Jahren Restlaufzeit und einer Nominalverzinsung von K

Abzinsung dann noch relevanter Zahlungen auf t=0 und Aufzinsung auf t=1:

$$FU_{5,8\%,1} = \left(\frac{0{,}08}{(1+0{,}045195)^2}+\frac{0{,}08}{(1+0{,}049289)^3}+\frac{0{,}08}{(1+0{,}052581)^4}+\frac{0{,}08}{(1+0{,}055453)^5}+\frac{1{,}08}{(1+0{,}058076)^6}\right)(1+0{,}039088) = 107{,}9024\%$$

---> Die Ergebnisse sind identisch!

2.2.2.2.7.2. Forward Rate Agreements

Mit dem Ausdruck FRA 6/12 ist ein Forward Rate Agreement mit dem Laufzeitbeginn in 6 Monaten und einer Laufzeit von 6 Monaten gemeint ("von 6 bis 12"). Der Käufer eines FRA ist derjenige, der den vereinbarten Zinssatz quasi zu zahlen hat. Für ihn stellt das Geschäft also eine Art fiktiven Kredit dar.

Bei einem FRA findet grundsätzlich keine wirkliche Kapitalübertragung statt. Es erfolgt lediglich eine Zinsdifferenzzahlung. Die Angabe des Zinssatzes ist "nachschüssig", die Zinsdifferenzzahlung erfolgt aber am Beginn des fiktiven Kredites, so daß eine Abzinsung der Zinsdifferenzzahlung erforderlich ist. Die Notierung der Zinssätze und die Berechnung der Zinsdifferenzzahlung erfolgt auf der Grundlage der linearen Zinsberechnung. Dies muß bei gebrochenen (unterjährigen) Laufzeiten unbedingt beachtet werden. Im weiteren wird grundsätzlich von der Annahme ausgegangen, daß kein Bonitätsrisiko besteht.

Für die Frage, welche Verzinsung ein FRA 6/12 bei gegebenen LIBOR-Sätzen aufweisen müßte, wird der FRA dupliziert und die Verzinsung des Duplikationsportefeuilles ermittelt (vgl. das Beispiel zur Duplikation eines FRA-Kaufs). Die Duplikation erfolgt (hier) durch eine 6-monatige Geldanlage, gekoppelt mit einem 12-monatigen Kredit. Diese Geschäfte führen in der Summe zu der in der Zeile "Summe" angegebenen Zahlungsreihe (zu einem fiktiven Kredit auf Termin). Auf der Grundlage der linearen Zinsberechnung (üblich bei FRA und hier unterstellt auch bei LIBOR-Anlagen) entspricht dieses einer Verzinsung von 6,8293 Prozent. Aufgrund tatsächlicher und potentieller Arbitragegeschäfte zwischen Kassa- und Terminmarkt dürfte der am Markt angebotene FRA-Satz auch in etwa bei diesem Wert liegen.

Wenn die Arbitragebedingung erfüllt ist, müssen die beiden folgenden Alternativen (sicher) zum gleichen Endwert führen (ist das nicht der Fall, ließen sich Arbitragegewinne erzielen):

Alternative 1) Kreditaufnahme von 100 zum LIBOR-Satz von 6% für ein Jahr.

Alternative 2) Kreditaufnahme von 100 zum LIBOR-Satz von 5% für 6 Monate und Kauf eines FRA 6/12 mit einem vereinbarten (und damit gesicherten) FRA-Satz von 6,8293% über einen Betrag von 102,50.
In 6 Monaten Aufnahme eines Kredites in Höhe von 102,5 plus den FRA-Zahlungen zu dem dann gültigen LIBOR-Satz für die restlichen 6 Monate.

zu 1.) Der Endwert beläuft sich auf -106.

zu 2.) Die Zahlung nach 6 Monaten in Verbindung mit dem FRA hängt von dem dann gültigen Zinsniveau ab.

Im Szenarium 1 ist in Verbindung mit dem FRA keine Zahlung fällig, da der Referenzzinssatz dem LIBOR-Satz entspricht.
Im Szenarium 2 beläuft sich die Zinsdifferenz auf genau einen Prozentpunkt. Die fällige Ausgleichszahlung aus Sicht des FRA-Käufers berechnet sich wie folgt:
$-(102{,}50 \cdot 0{,}01 / 2) / (1 + 0{,}058293 / 2) = -0{,}497986$ (siehe auch unten)
Folglich muß ein Kredit in Höhe von 102,5 plus 0,497986 für 6 Monate zum Zinssatz von 5,8293% aufgenommen werden. Es ergibt sich ein Endwert von:
$-(102{,}5 + 0{,}497986) \cdot (1 + 0{,}058293 / 2) = -106$

Für das Szenarium 3 gelten die Ausführungen entsprechend.

Die drei Endwerte sind identisch; also bietet der FRA-Satz keine Arbitragemöglichkeiten, er ist "fair".

	Szenarium 1	Szenarium 2	Szenarium 3
Zinsszenarium	Es stellt sich der vereinbarte FRA-Satz ein	vereinbarter FRA-Satz -1%	vereinbarter FRA-Satz +1%
neuer Zins (6-Monats-LIBOR in 6 Monaten)	6,8293%	5,8293%	7,8293%
Zahlungen aus Sicht des FRA-Käufers ("fiktiver Kredit")	0	-0,497986	0,49319
plus	-102,5	-102,5	-102,5
gleich (in dieser Höhe Kreditaufnahme in 6 Monaten)	-102,5	-102,998	-102,0068
Zinszahlung für den fiktiven Kredit zu LIBOR am Ende des 12. Monats	-3,5	-3,002005	-3,993184
Endwert (Rückzahlungsbetrag des zweiten Kredites)	-106	-106	-106

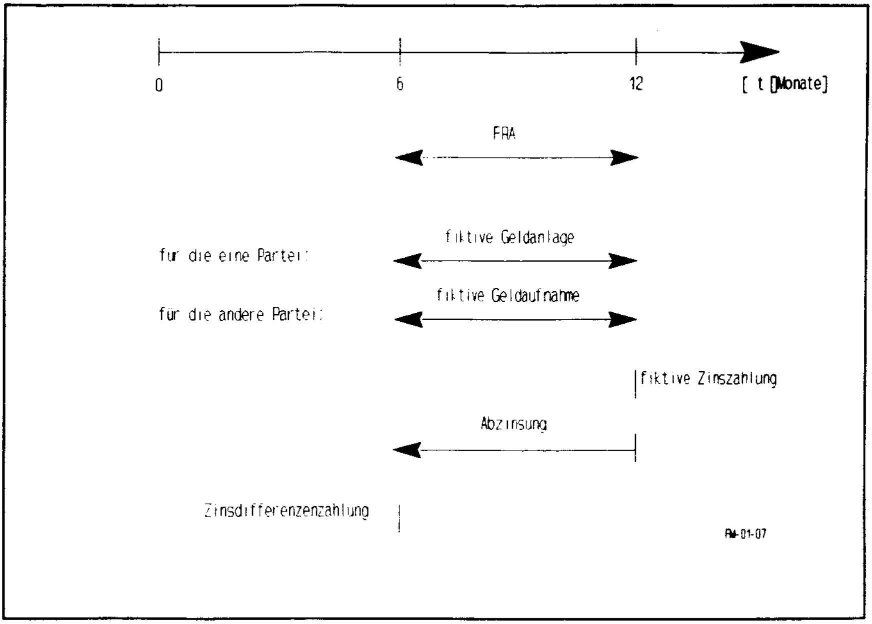
Zur Berechnung der Ausgleichszahlung für das Szenarium 2: Der Grundbetrag des FRA ist 102,50. Da die Zinsdifferenz einen Prozentpunkt beträgt, entspricht das für 6 Monate 0,5 Prozent, die (theoretisch) zum Ende der FRA-Laufzeit - also in 12 Monaten - zu leisten sind. In der Praxis ist dieser Zinsanspruch aber schon zu Beginn der FRA-Laufzeit - also von heute an gerechnet in 6 Monaten - zu begleichen. Daher ist dieser Betrag abzuzinsen mit dem dann gültigen Zinssatz für Anlagen mit einer Laufzeit von 6 Monaten: also dem dann gültigen LIBOR-Satz, hier 5,8293 Prozent. Da dieses ein p.a.-Zinssatz ist, muß er auf 6 Monate bezogen werden, er ist also durch zwei zu teilen.

Den Formeln zur Berechnung der "fairen" Rendite eines FRA sowie zur Berechnung der Zinsdifferenzzahlung liegen die gleichen Überlegungen zugrunde, wie sie zuletzt beschrieben wurden.

Das Vorzeichen für die Zinsdifferenzzahlung ist von der Position (Käufer oder Verkäufer des FRA) abhängig. In diesem Fall ist der Wert aus Sicht des FRA-Käufers angegeben. Der Käufer des FRA hat 0,497986 zu zahlen, da der Marktzinssatz um 1% unter der vereinbarten (antizipierten) FRA-Rendite liegt (er hat sich also einen "zu hohen" Zinssatz gesichert). Eine nicht-antizipierte Marktzinssenkung ist also für den FRA-Beteiligten ungünstig, der einen (fiktiven) Kredit aufgenommen hat (weil er den Kredit hätte billiger bekommen können).

Definition von Forward Rate Agreements

Ein Forward Rate Agreement (FRA) ist eine Zinsvereinbarung über einen (fiktiven) Kapitalbetrag, der für eine Laufzeit, die in der Zukunft beginnt, aufgenommen oder angelegt wird.



fiktive Geldanlage <---> Verkauf eines FRA
fiktiver Kredit <---> Kauf eines FRA

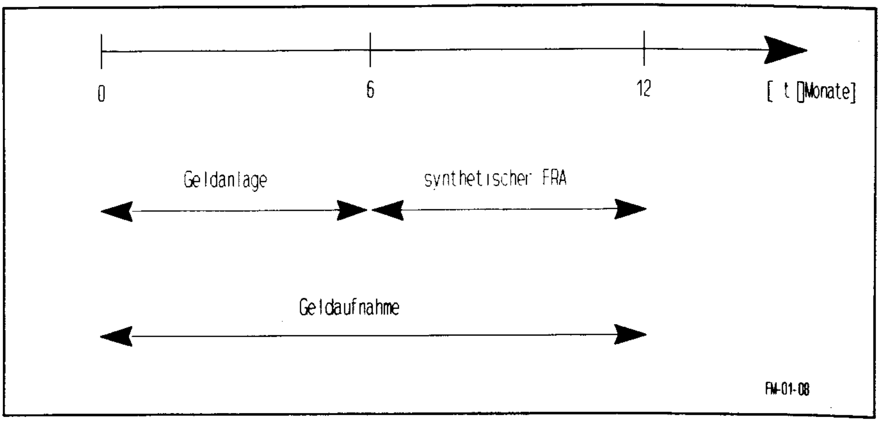
---> Die Positionen werden "andersherum als üblich" bezeichnet.

---> Zum Vergleich: Der Käufer eines Zins-Futures tätigt eine fiktive Geldanlage.

Duplikation eines FRA-Kaufs (eines Kredites auf Termin)

Wie hoch ist die faire Verzinsung eines FRA 6/12, wenn folgende LIBOR-Sätze gegeben sind:

6-Monats-LIBOR = 5%
12-Monats-LIBOR = 6%



Duplikation eines FRA-Kaufs	t=0	t=6 Monate	t=12 Monate
Geldanlage: 6 Monate, 5% (lineare Zinsberechnung)	-100	+102,5	
Kreditaufnahme: 12 Monate, 6%	+100		-106
Summe (Kredit auf Termin)	0	+102,5	-106

Mit welchem Zinssatz (lineare Zinsberechnung) müssen die 102,5 verzinst werden, um nach 6 Monaten 106 zu erzielen?

Lösung: mit 6,8293%

Probe: $102{,}5 \cdot (1 + 0{,}068293 / 2) = 106$

Faire Rendite eines FRA und Zinsdifferenzzahlung

Berechnung der "fairen" Rendite:

$$R_{FRA} = \frac{R_L\, L_L - R_K\, L_K}{(L_L - L_K)\left(1 + \frac{R_K\, L_K}{360}\right)}$$

(Tage) kurze Laufzeit (bis settlement date)	$= L_K$	=	180
(Tage) lange Laufzeit (fiktives LZ-Ende)	$= L_L$	=	360
(Tage) Laufzeit des FRA (contract period); Laufzeit der fiktiven Geldanlage bzw. Geldaufnahme ($L_{FRA} = L_L - L_K$)	$= L_{FRA}$	=	180
Rendite für die kurze Laufzeit	$= R_K$	=	5%
Rendite für die lange Laufzeit	$= R_L$	=	6%
faire bzw. vereinbarte Rendite eines FRA (contract rate)	$= R_{FRA}$	=	?

$$R_{FRA} = \frac{0{,}06 \cdot 360 - 0{,}05 \cdot 180}{(360 - 180)\left(1 + \frac{0{,}05 \cdot 180}{360}\right)} = 6{,}8293\%$$

Berechnung der Zinsdifferenzzahlung (settlement sum) für den FRA-Käufer (Szenarium 2):

$$SetSum = \frac{(R_M - R_{FRA})\, L_{FRA}\, KB}{360} \; \frac{1}{1 + \frac{R_M\, L_{FRA}}{360}}$$

vereinbarte Rendite (contract rate)	$= R_{FRA}$	=	6,83%
Marktzinssatz nach Ablauf der FRA-Laufzeit	$= R_M$	=	5,83%
(Tage) Laufzeit des FRA (contract period); Laufzeit der fiktiven Geldanlage bzw. Geldaufnahme	$= L_{FRA}$	=	180
Kapitalbetrag	$= KB$	=	102,5
settlement sum	$= SetSum$	=	?

$$SetSum = \frac{(0{,}0583 - 0{,}0683)\; 180 \cdot 102{,}5}{360} \; \frac{1}{1 + \frac{0{,}0583 \cdot 180}{360}} = -0{,}497986$$

2.2.2.2.7.3. Euro-BUND-Futures

Der Euro-BUND-Future ist ein stark standardisiertes Börsentermingeschäft, dem festverzinsliche Anleihen zugrunde liegen. Der Basiswert entspricht einer idealtypischen (synthetischen) deutschen Bundesanleihe mit einer 6%igen Nominalverzinsung und einer Laufzeit von 10 Jahren. Jeder einzelne Kontrakt hat einen Nennwert von EUR 100.000. Der Preis wird in Prozent des Nennwertes auf zwei Dezimalstellen notiert (z.B. 90,55%). Die kleinste Wertänderung ist ein Tick (1 Tick = 0,01% von EUR 100.000 = EUR 10). Der Euro-BUND-Future entspricht insofern einer Vereinbarung zwischen zwei Vertragsparteien, zu einem festgelegten Zeitpunkt (Liefertag) eine fiktive Bundesanleihe mit einem Nominalwert von EUR 100.000, einem Kupon von 6% und einer Laufzeit von 10 Jahren zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen.

Zur Erfüllung stehen dem Kontraktverkäufer alle am Markt verfügbaren Bundesanleihen, die eine Laufzeit zwischen 8,5 und 10,5 Jahren und ein Mindestvolumen von DEM 4 Mrd. oder bei Neuemissionen seit dem 1.1.1999 von EUR 2 Mrd. aufweisen. Der Kupon der gelieferten Anleihen darf also von 6% abweichen. Die Wertdifferenzen zwischen den lieferbaren Anleihen werden über einen Preis-Anpassungs-Mechanismus (Konversionsfaktorsystem) ausgeglichen, indem alle Anleihen auf eine fiktive Bundesanleihe mit einem Nominalzinssatz von 6% und einer Laufzeit von 10 Jahren bezogen werden. Da der Wertausgleich zwischen den Anleihen nicht perfekt gelingt, kann der Kontraktverkäufer bei der Titelauswahl dem sogenannten Cheapest-to-Deliver-Prinzip folgen. Das bedeutet, er wird die Anleihe zur Lieferung auswählen, die für ihn am billigsten ist.

Liefermonate für den Euro-BUND-Future sind jeweils die nächsten drei Quartalsmonate des Zyklus März, Juni, September und Dezember. Die maximale Laufzeit des Euro-BUND-Futures ist somit auf 9 Monate begrenzt. So werden z.B. im November die Termine Dezember, März und Juni gehandelt. Liefertag ist der 10. Kalendertag des jeweiligen Liefermonats, sofern dies ein Börsentag ist; sonst der folgende Börsentag. Der letzte Handelstag für einen Kontrakt ist zwei Börsentage vor dem Liefertag. Handelsschluß für den fälligen Liefermonat ist 12.30 Uhr MEZ.

Die Initial Margin ist eine Sicherheitsleistung, die zur Abdeckung der Future-Verpflichtungen gehalten werden muß. Die Höhe der Initial Margin ist abhängig von der Volatilität des underlying instruments und von der Höhe des mit der eingegangenen Position verbundenen Risikogrades. Die Variation Margin stellt hingegen Gewinne bzw. Verluste dar, die sich aus der täglichen Neubewertung der Kontrakte auf Basis der Settlementkurse ergeben. Die Differenz zwischen Neubewertung und Bewertung des Vortages wird börsentäglich vom Clearing-Haus durch Gutschrift beim Käufer und entsprechender Belastung beim Verkäufer (bzw. umgekehrt) verrechnet.

Ähnliche Ausstattungen und Eigenschaften wie der Euro-BUND-Future weisen auch die zur Zeit an der Eurex handelbaren Euro-BOBL-Futures, Euro-SCHATZ-Futures und Euro-BUXL-Futures auf. Diese Zinsfutures unterscheiden sich vom Euro-BUND-Future vor allem in der Laufzeit ihrer Basiswerte. Darüber hinaus stehen für die Erfüllung der Lieferverpflichtung aus einer Short-Position in diesen Futures-Kontrakten andere Schuldverschreibungen zur Verfügung.

Die folgenden Darstellungen der Bewertungsansätze für den Euro-BUND-Future sind exemplarischer Natur und können leicht auf den Euro-BUXL-, den Euro-BOBL- sowie den Euro-SCHATZ-Future übertragen werden.

Das folgende Beispiel zeigt, wie Euro-BUND-Future-Kontrakte behandelt werden, wenn sie nicht vor Fälligkeit glattgestellt wurden. Ein Grundproblem besteht darin, daß der

Verkäufer zwischen mehreren Anleihen wählen kann, um seinen Lieferverpflichtungen nachzukommen (Cheapest-to-deliver-Prinzip). Um seinen Gewinn zu maximieren bzw. seinen Verlust zu minimieren, wird er die Anleihe auswählen, die den geringsten Wert aufweist. Wie er diese "CTD-Anleihe" ermitteln kann, zeigt das Beispiel.

Der **Preisfaktor oder Konversionsfaktor** gibt den theoretischen Kurs der lieferbaren Bundesanleihe an, wenn das Zinsniveau 6% wäre. Somit macht er Anleihen unterschiedlicher Verzinsung vergleichbar. Der **Marktwert** gibt den Betrag an, der für den Kauf einer Anleihe am Kapitalmarkt - incl. Stückzinsen - aufgewendet werden muß. Der **Rechnungsbetrag** ist der dem Verkäufer bei Einlieferung der Anleihen zu zahlende Betrag. Als Gegenwert erhält der Käufer die Wertpapiere. Die **Vergleichsziffer** gibt den Spread zwischen Rechnungsbetrag und Marktwert an. Je positiver dieser ist, desto attraktiver ist es für den Verkäufer, dieses Papier zu liefern. Die **Berechnung des fair value** des Euro-BUND-Futures während der Laufzeit ist dem oben dargestellten Verfahren ähnlich. Zu beachten ist allerdings, daß die Möglichkeit der Wahl der CTD-Anleihe für den Verkäufer eine Option darstellt und insofern der Future-Kurs sinken dürfte. Hinzu kommt, daß der Aufbau des Arbitrageportfolios schwieriger ist als im o.a. einfachen Fall, da die permanenten Margin-Zahlungen während der Laufzeit unsicher sind und somit nicht (sicher) dupliziert werden können.

Neben den schon angesprochen BUXL-, BUND-, BOBL- und SCHATZ-Futures werden an der Eurex z.Zt. ein Einmonats- (sowie ein Dreimonats-) EURIBOR-Future gehandelt. Als Basiswert liegt diesen Futures der Zinssatz "European Interbank Offered Rate (EURIBOR)" für Einmonats- (Dreimonats-) Termingelder in Euro zugrunde. Der Wert eines Kontraktes beträgt 3.000.000 EUR (1.000.000 EUR). Der Preis wird in Prozent auf drei Dezimalstellen auf der Basis 100 abzüglich gehandeltem Zinssatz festgestellt (liegt der Einmonatszinssatz z.B. bei 4%, so notiert der Einmonats-EURIBOR-Future bei 96,000). Die kleinste Wertänderung beträgt 0,005%; dies entspricht jeweils einem Wert von 12,50 EUR [= 3.000.000 EUR · 0,005% · 30/360 (bzw. = 1.000.000 · 0,005% · 90/360)]. Die Verfallsmonate sind die nächsten sechs (drei) aufeinanderfolgenden Kalendermonate (sowie die nächsten elf Quartalsmonate). Der letzte Handelstag ist zwei Börsentage - soweit von der EURIBOR FBE/ACI an diesem Tag der für Einmonats- (Dreimonats-) Euro-Termingelder maßgebliche Referenz-Zinssatz EURIBOR festgestellt wird, ansonsten der davor liegende Börsentag - vor dem dritten Mittwoch des jeweiligen Erfüllungsmonats. Handelsschluß für den fälligen Kontraktmonat ist 11.00 Uhr MEZ. Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Zinsfutures ist bei den Euromark-Futures eine Lieferung bei Kontraktfälligkeit nicht möglich. Die Erfüllung einer nicht glattgestellten Position erfolgt durch einen Barausgleich, der am ersten Börsentag nach dem letzten Handelstag fällig ist. Während der Laufzeit erfolgt auch bei den Euromark-Futures eine tägliche Abrechnung (Variation Margin). Für jeden Kontrakt werden die an dem betreffenden Börsentag erzielten Gewinne und Verluste aus der täglichen Neubewertung ermittelt und dem Konto der Kontrahenten gutgeschrieben bzw. belastet.

Kontraktspezifikationen und Zahlungen des BUND-Futures

Der **Euro-BUND-Future** ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragsparteien, zu einem späteren Zeitpunkt eine **fiktive Bundesanleihe** mit einem Nominalwert von **EUR 100.000**, einem **Kupon von 6%** und einer **Laufzeit von 10 Jahren** zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen oder zu verkaufen.

Geliefert werden können (konkrete) Bundesanleihen mit **jedem Kupon** und einer **Laufzeit zwischen 8,5 und 10,5 Jahren**, wobei Wertdifferenzen zwischen der gelieferten und der fiktiven Anleihe über ein **Konversionsfaktorsystem** ausgeglichen werden (sollen).

Ein Anleger kauft 7 Euro-BUND-Futures zu einem Kurs von 95,00 in t=0. An den darauffolgenden 3 Börsentagen werden folgende Settlementkurse festgestellt:

t=1: 95,50 - t=2: 95,75 - t=3: 94,00

Die Variation Margin (VM) errechnet sich nach folgender Formel:

VM = Kontraktzahl · Kursdifferenz in Ticks · Wert pro Tick (EUR 10)

t=1: 95,50 - 95,00 = 50 Ticks
7 Kontrakte · 50 Ticks · EUR 10 = EUR 3.500
Gutschrift beim Käufer.

t=2: 95,75 - 95,50 = 25 Ticks
7 Kontrakte · 25 Ticks · EUR 10 = EUR 1.750
Gutschrift beim Käufer.

t=3: 94,00 - 95,75 = 175 Ticks
7 Kontrakte · 175 Ticks · EUR 10 = EUR 12.250
Belastung beim Käufer.

---> Der Erfolg aus den Euro-BUND-Futures wird sofort zahlungswirksam!
Das erschwert die Duplikation des Euro-BUND-Futures.

Ermittlung der CTD-Anleihe

Kurs des Zins-Futures am letzten Handelstag = FU = 90
Lieferung = 10.03.2000

$$PF = \frac{1}{1{,}06^{\frac{m}{12}}} \left(\frac{K}{6} \left(1{,}06 - \frac{1}{1{,}06^j} \right) + \frac{1}{1{,}06^j} \right) - \frac{K\left(1-\frac{m}{12}\right)}{100}$$

Preisfaktor	=	PF
Kupon	=	K
ganzzahlige Restlaufzeit in Jahren	=	j
abgerundete Anzahl Monate bis zum nächsten Zinszahlungstermin	=	m

Marktwert	= (Stückzinsen + Kurswert)	bzw.	· 100.000
Rechnungsbetrag	= (FU · PF + Stückzinsen)	bzw.	· 100.000
Vergleichsziffer	= (Rechnungsbetrag - Marktwert)	bzw.	· 100.000
	= (FU · PF - Kurswert)	bzw.	· 100.000

Anleihe #	1	2	3
Kurs in %	92,20	93,00	94,60
Fälligkeit Jahr	2008	2009	2009
Fälligkeit Monat	12	1	1
Fälligkeit Tag	21	2	20
Kupon K in %	6,375	6,5	6,75
Restlaufzeit	8,78	8,81	8,86
ganzzahlige RLZ; Jahre nach Lieferung j	8	8	8
abgerundete ganze Anzahl der Monate bis zur nächsten Zinszahlung m	9	9	10
Preisfaktor (Kurswert bei Rendite = 6%) PF	1,025	1,033	1,050
Stückzinsen für Tage	79	68	50
Stückzinsen in %	1,399	1,228	0,938
Marktwert der Anleihe in %	93,599	94,228	95,538
Marktwert je Kontrakt	93.599	94.228	95.538
Future-Kurs am letzten Handelstag in %	90,00	90,00	90,00
Rechnungsbetrag in %	93,61	94,19	95,44
Rechnungsbetrag je Kontrakt	93.614	94.192	95.439
Vergleichsziffer (in %)	0,02	-0,04	-0,10
Vergleichsziffer je Kontrakt	15	-36	-99

Demnach sollte das Wertpapier Nr. 1 geliefert werden.

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

Gehen Sie von folgenden Marktzinssätzen aus:

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,a}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000
R_T (Spot Rates)	5,0000	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	8,5665	10,9861	12,6159	13,8711	13,6637	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	8,5665	9,7696	10,7103	11,4922	11,9231	

A) Wie hoch ist der faire Wert eines Zins-Futures mit folgenden Daten:

Laufzeit des Zins-Futures = 1 Jahr
Laufzeit des Basiswertes dann = 5 Jahre
Kupon des Basiswertes = 9%

Zeigen und erklären Sie die Alternativen zur Berechnung des Future-Wertes für den allgemeinen Fall (also ohne konkrete Rechnungen).

B) Die Spot Rates steigen plötzlich gleichmäßig um 1 Prozent(punkt).

1) Wie hoch ist der neue Futures-Wert?
2) Wie hoch ist der Barwert dieses einfachen Zins-Futures, falls Sie Kontrakte zum Nominalwert von 1 Mio. gekauft haben? Haben Sie einen Verlust erlitten oder einen Gewinn gemacht? Beachten Sie, daß beim einfachen Zins-Future kein sofortiger Barausgleich der Kursveränderung - wie beispielsweise beim BUND-Future - erfolgt!

Für die beiden folgenden Aufgaben braucht nicht auf die o.a. Tabelle zurückgegriffen zu werden.

C) Wie hoch ist der faire Wert eines Zins-Futures mit folgenden Daten:

Laufzeit des Zins-Futures = 0,5 Jahre
Kurs des Basiswertes heute = 90%
Laufzeit des Basiswertes dann = 3 Jahre
Kupon des Basiswertes = 6,5%
Spot Rate für 6 Monate = 4% (exponentielle Zinsberechnung)

Beachten Sie bei dieser Aufgabe die Stückzinsen (vgl. Variante 2).

D) Berechnen Sie die faire Rendite eines FRA 6/12. Gehen Sie davon aus, daß kein Bonitätsrisiko besteht. Folgende Marktdaten stehen zur Verfügung:

6-Monats-FIBOR	=	6%
12-Monats-FIBOR	=	6%

Zeigen Sie für drei Szenarien (6-Monats-FIBOR in 6 Monaten gleich 5,8252%, 4,8252% bzw. 6,8252%), daß die Arbitragebedingung eingehalten wurde. Warum ergibt sich nicht der zunächst möglicherweise erwartete Terminzinssatz in Höhe von 6 Prozent?

E) Erklären Sie die Prinzipien, die bei der Bewertung von Zins-Futures Anwendung finden. Inwiefern ist die einfache Formel (Variante 1) zu modifizieren, um Zins-Futures auch für die beiden anderen Varianten zu bewerten?

F) Interpretieren Sie die Formel für den fairen Wert von Zins-Futures. Zeigen Sie anhand eines eigenen Beispiels auf, wie das Arbitrageprinzip zum fairen Future-Preis führen muß.

G) Erklären Sie, wie ein FRA abgewickelt wird.

H) Inwiefern unterscheidet sich der Euro-BUND-Future von dem bisher unterstellten idealtypischen Zins-Future? Inwiefern ist die Formel für den Wert von einfachen Zinstermingeschäften auf den Euro-BUND-Future nur begrenzt anwendbar? Welches sind die Vor- und Nachteile von standardisierten Zinstermingeschäften?

I) Erklären Sie den Sinn und das Prinzip des Marginsystems beim Euro-BUND-Future.

Lösungshinweise

A) $0{,}945508\ (1 + 0{,}05) - 0{,}09 = 0{,}90278$

B) $0{,}905555\ (1 + 0{,}06) - 0{,}09 = 0{,}869889$

$(0{,}90278 - 0{,}869889)\ /\ (1 + 0{,}06) = 0{,}03103$ ("barwertiger Verlust")

den barwertigen Verlust bezogen auf 1 Mio. ergibt -31.030

C) $(0{,}90 + 0{,}0325)\ (1 + 0{,}04)^{0{,}5} - 0{,}065 = 0{,}8860$

D)

Arbitrageüberlegung	0	6 Monate	12 Monate
Geldanlage: 6 Monate, 6% (lineare Zinsberechnung)	-100	103	
Geldaufnahme: 12 Monate, 6%	100		-106
Summe (entspricht der Position eines FRA-Käufers; das ist gleichbedeutend mit einem [synthetischen] FRA-Kauf!)	0	103	-106
---> Mit welchem Zinssatz (lineare Zinsberechnung) müssen die 103 verzinst werden, um nach 6 Monaten 106 zu erzielen?			
Lösung: 5,8252%			
Probe: 103 · (1 + 0,058252 / 2) = 106			

Probe auf der Grundlage von 3 Zinsszenarien

	Szenarium 1	Szenarium 2	Szenarium 3
Zinsszenarium	Es stellt sich der vereinbarte FRA-Satz ein	vereinbarter FRA-Satz -1%	vereinbarter FRA-Satz +1%
neuer Zins (6-Monats-FIBOR in 6 Monaten)	5,8252%	4,8252%	6,8252%
Zahlung FRA (aus Sicht eines FRA-Verkäufers)	0	0,502868	-0,498
plus	103	103	103
gleich	103	103,5029	102,502
Anlage zu FIBOR	3	2,497132	3,498005
Endwert	106	106	106

Literatur

Birgit Adolph und Wolfgang Glaab. Finanzinnovationen: Forward Rate Agreement (FRA). "Betriebswirtschaftliche Blätter", (1987), S. 324-326.

Thomas Beilner und Heinz D. Mathes. DTB Bund-Futures: Bewertung und Anwendung. "Die Bank", (1990), S. 449-454.

M. Desmond Fitzgerald. Pricing and Hedging with Financial Futures. Optionen und Futures. Hrsg. Herrmann Göppl, Wolfgang Bühler und Rüdiger von Rosen. Frankfurt a.M. 1990, S. 113-139.

Frank Heitmann. Bewertung von Zinsfutures. Frankfurt a.M. 1992.

Georg Köpf. Zur Bewertung von Index-Futures. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1992), S. 16-20.

Wolfgang Kirschner. Alternatives Preisfaktorensystem erhöht Attraktivität der DTB-Futures. "Die Bank", (1992), S. 387-391.

Wolfgang Kirschner. Spreadhandel mit BUND-Futures. "Die Bank", (1992), S. 648-652.

Arnim Maier. Forward Rate Agreements. "Sparkasse", (1988), S. 475-476.

Freider Meyer und Carsten Wittrock. Der FIBOR-Future an der DTB. "Die Bank", (1994), S. 169-172.

Gerhard Roggemann. Der Terminkontrakt auf Bundesanleihen. Die deutsche Terminbörse, Hrsg. Gerald Braunberger und Thomas Knipp, Frankfurt a. M. 1989, S. 85-101.

Harald Wiebke. Finanzterminkontrakte. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 147-150.

Arnd Wiedemann und Matthias Nolte. Kalkulation von Forward Rate Agreements im Treasury-Management. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1994), S. 629-654.

Jörg H. Wittenberg. Financial Futures und die DTB. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1990), S. 484-490.

2.2.2.2.7.4. Zinsswaps

Bei einem Zinsswap (to swap = tauschen) vereinbaren zwei Parteien, daß zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf einen bestimmten Geldbetrag auszutauschen sind. Die Zinszahlungen werden meist so festgesetzt, daß eine Partei einen (heute zu fixierenden) Festzinssatz zahlt, die andere Partei hingegen einen variablen Zinssatz. Dieser variable Zinssatz orientiert sich an einem öffentlich bekannten Geldmarktzinssatz, wie z.B. dem FIBOR oder LIBOR. In der Realität werden allerdings die beiden Zinszahlungen nicht tatsächlich ausgetauscht, sondern nur die Differenzen der beiden Zahlungen transferiert (Zinsdifferenzausgleich).

Ein Bonitätsrisiko besteht bei Zinsswaps nur insofern, als daß der jeweilige Swap-Partner seinen ggf. zu tätigenden Zinsdifferenzzahlungen möglicherweise nicht nachkommen kann. Der unterliegende Kapitalbetrag ist also keinem Bonitätsrisiko ausgesetzt.

Das Volumen abgeschlossener Zinsswaps hat in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Konkrete Zahlen sind aber schwer zu ermitteln, da Zinsswaps OTC-Geschäfte darstellen, die folglich nicht an Börsen gehandelt werden. Es gibt verschiedene Gründe, die für das zunehmende Volumen von Zinsswaps verantwortlich gemacht werden. Ein Grund wird häufig darin gesehen, daß es über die Einschaltung von Zinsswaps möglich sein soll, Kapitalkosten zu senken bzw. Kapitalerlöse zu erhöhen. Die Begründung erfolgt meist auf der Grundlage des von Ricardo für die Außenhandelstheorie formulierten Theorems der komparativen Kostenvorteile. Das Beispiel veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Aufgrund unterschiedlicher Marktzugangsmöglichkeiten und/oder Bonitätseinstufungen seitens der potentiellen Kreditgeber wird davon ausgegangen, daß sich zwei Unternehmen zu den angegebenen unterschiedlichen Konditionen finanzieren können. Wenn die Unternehmen die ihren Präferenzen entsprechenden Finanzierungen wählen, so zahlen sie die in der ersten Tabelle unterlegten Zinssätze. Die Alternative besteht nun darin, unabhängig von den Präferenzen der Unternehmen den jeweils relativ günstigeren Kredit aufzunehmen. Über einen Zinsswap können dann Gesamtpositionen generiert werden, die den ursprünglichen Präferenzen der Kreditnehmer bezüglich der Festzinsbindung entsprechen. Wie das Beispiel zeigt, ist die so konstruierte Gesamtposition günstiger als die ursprüngliche Möglichkeit. In diesem Beispiel wurde der Bruttozinsvorteil auf beide Unternehmen zur Hälfte aufgeteilt. Andere Varianten sind selbstverständlich auch denkbar. Ebenso gibt es verschiedene Möglichkeiten der Festsetzung der Swap-Sätze.

Konstruktionen dieser Art setzen allerdings voraus, daß die Märkte nicht effizient sind. Ob und welche Zinsvorteile in der finanzwirtschaftlichen Praxis realisierbar sind, kann daher schwer festgestellt werden. Zu bedenken ist aber grundsätzlich, daß die am Swapgeschäft Beteiligten ein Bonitätsrisiko bezüglich der Zinsdifferenzzahlung eingehen.

Die Bewertung von Zinsswaps sowie die Festlegung fairer Zinsswap-Sätze orientiert sich am Duplikations- und Arbitrageprinzip. Grundsätzlich können sämtliche mit einem Zinsswap verbundenen Zahlungen durch zwei Kassageschäfte, nämlich einer normalen festverzinslichen Anleihe sowie einer Floating Rate Note (FRN) dupliziert werden. Wenn die Zahlungen aus dem Zinsswap einerseits und den zur Duplikation herangezogenen Wertpapieren andererseits identisch sind, muß auch der Wert dieser beiden Positionen gleich sein, da sonst Arbitragemöglichkeiten bestünden. Folglich ergibt sich für die Frage nach dem fairen Festzinssatz bei Abschluß des Zinsswaps mit einer variablen Verzinsung von FIBOR + 0 Prozent, daß dieser "faire" Festzinssatz genau der Durchschnittsrendite eines festverzinslichen Wertpapiers mit gleicher Laufzeit und einem Kurs von 100% (d.h. der Marktrendite) entsprechen muß.

Der Wert des Zinsswaps im Zeitverlauf hängt von der zukünftigen Entwicklung der Marktzinssätze ab. Im folgenden Beispiel wird davon ausgegangen, daß die für in einem Jahr antizipierten Zinssätze wirklich eintreten. Grundsätzlich wird für den Wert der FRN angenommen, daß er 100% beträgt. Dementsprechend braucht nur noch der Wert einer (fiktiven) Kupon-Anleihe für die für t=1 antizipierten Marktzinssätze berechnet zu werden. Der Wert des Zinsswaps ergibt sich dann - in Abhängigkeit von dem Swap-Partner - als Wert der FRN abzüglich dem Wert der Kupon-Anleihe bzw. umgekehrt. Je nach Marktkonstellation ist der Wert für die Partei, die den Festzinssatz zahlt, negativ und für die andere Partei positiv bzw. umgekehrt. Im vorliegenden Fall hat der Zinsswap für den Festzinszahler einen positiven Wert von 1,30. Für die andere Partei ist der Wert entsprechend -1,30, wobei auf dieser Grundlage auch eine marktgerechte bilanzielle Erfassung denkbar wäre.

In der Praxis wird die Höhe der variablen Verzinsung häufig in Form des FIBOR plus einem Zuschlag festgelegt. Die Bewertung erfolgt dann analog, wobei hier zu bedenken ist, daß dieser Zuschlag quasi einem Festzinssatz entspricht, der nur mit dem Festzinssatz der anderen Partei verrechnet zu werden braucht.

In den Beispielen wurde davon ausgegangen, daß die (Fest-)Zinssätze von Zinsswaps (die sogenannten Swapsätze) mit den (vergleichbaren) Renditen der Renditenstrukturkurve identisch sind. Wie die Abbildung auf einer der folgenden Seiten zeigt, liegen die Swapsätze aber generell etwas über den Durchschnittsrenditen der Zinsstrukturkurve. Dieses hat mehrere Gründe.

Eine Ursache kann darin liegen, daß die Zinssätze nicht vergleichbar sind, weil ihnen unterschiedliche Kupons zugrunde liegen. Diesem mit dem Begriff "Kuponeffekt" bezeichneten Sachverhalt könnte man durch Umrechnung der Renditen der Zinsstrukturkurve aber begegnen.

Ein weiterer (und meines Erachtens entscheidender) Sachverhalt liegt aber in den unterschiedlichen Bonitäten der Schuldner dieser Finanztitel begründet. Während für die Renditenstrukturkurve die Bonität der Bundesrepublik maßgeblich ist, werden die Swapsätze im Handel zwischen den Banken ermittelt. Geht man davon aus, daß die Bonität der Banken etwas geringer ist als die des Bundes, dann läßt sich hieraus der etwas höhere Swapsatz (mit)erklären. Zu bedenken ist auch, daß der FIBOR wiederum auch etwas höher sein müßte als der kurzfristige Zinssatz für den Bund.

Ein dritter Grund liegt sicherlich in - wenn auch geringen - Marktineffizienzen. Das gilt insbesondere für den Markt für Zinsswaps, da sie nicht börsengehandelt sind. Allerdings dürften Verzerrungen dieser Art teilweise zu positiven, teilweise aber auch zu negativen Differenzen führen.

Grundstruktur eines Zinsswaps

Abschlußdatum	=	02.01.1990
Volumen	=	100 Mio.
Laufzeit	=	3 Jahre
Festzinssatz	=	8% (zahlt B)
Variabler Zinssatz	=	12-Monats-FIBOR (zahlt A)

Entwicklung des 12-Monats-FIBOR:

am 02.01.1990 7%
am 02.01.1991 9%
am 02.01.1992 6%

Daraus resultieren die folgenden Zahlungen:

am 31.12.1990 B an A 1% auf 100 Mio. = 1 Mio.
am 31.12.1991 A an B 1% auf 100 Mio. = 1 Mio.
am 31.12.1992 B an A 2% auf 100 Mio. = 2 Mio.

* Zinsdifferenzausgleich
* kein Bonitätsrisiko bezüglich des unterliegenden Kapitalbetrages (hier i.H.v. 100 Mio.)
* aber Bonitätsrisiko bezüglich der Zinsdifferenzzahlung

Ausnutzung komparativer Zinsvorteile über Zinsswaps

Unternehmen A benötigt für 4 Jahre Kapital und möchte ("eigentlich") variable Zinszahlungen vereinbaren.

Unternehmen B benötigt für 4 Jahre Kapital und möchte ("eigentlich") feste Zinszahlungen vereinbaren.

Folgende Finanzierungsmöglichkeiten bestehen:

	Unternehmen A	Unternehmen B
Kreditzinssätze mit Festzinsvereinbarung	6,50%	7,25%
Kreditzinssätze mit variabler Verzinsung	FIBOR + 0,50%	FIBOR + 0,75%

Die Aufnahme des relativ günstigeren Kredites und Vereinbarung eines Zinsswaps führt (**beispielsweise**) zu:

	Unternehmen A	Unternehmen B
Kosten der Kreditaufnahme	6,50%	FIBOR + 0,75%
zu zahlende Swap-Zinsen zu erhaltende Swap-Zinsen	FIBOR + 0,50% 6,75%	6,75% FIBOR + 0,50%
Gesamtfinanzierungskosten	FIBOR + 0,25%	7,00%
Kostenersparnis	0,25%	0,25%

In der finanzwirtschaftlichen Praxis muß die Aufteilung des Finanzierungsvorteils selbstverständlich nicht 50:50 erfolgen. Der hier angegebene Swapsatz (FIBOR + 0,50% gegen 6,75% fest) könnte also auch anders festgelegt werden.

Ermittlung des fairen Festzinssatzes eines Zinsswaps

Laufzeit des Zinsswaps = 4 Jahre
variabler Zinssatz = 12-Monats-FIBOR (z.Zt. 3,9088%)

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Weg: Ermittlung der Marktrendite (Kupon = Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers mit einem Kurs von 100% und einer Restlaufzeit von 4 Jahren) wieder über:

$$\mathit{Marktrendite} = \frac{1 - \frac{1}{(1 + R_T)^T}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1 + R_t)^t}} = 5{,}209\%$$

Probe:

$$KA_{4,\,5{,}209\%} = 100\% = \frac{0{,}05209}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{0{,}05209}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{0{,}05209}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{1{,}05209}{(1+0{,}052581)^4}$$

Dieses ist zugleich der faire Festzinssatz eines Swaps!

Probe: Der Zinsswap kann geschlossen werden, indem zu den heutigen Marktkonditionen eine (fiktive) Anleihe zum Kurs von 100% mit einer Nominalverzinsung von 5,209% (= Rendite) gekauft und eine FRN zu 100% verkauft (oder emittiert) wird:

	Kauf Anleihe	Verkauf FRN	Swap fix zahlen	Swap var. erhalten	Summe
0	- 100	+ 100	-	-	-
1	+ 5,209	- FIBOR	- 5,209	+ FIBOR	+ 0
2	+ 5,209	- FIBOR	- 5,209	+ FIBOR	+ 0
3	+ 5,209	- FIBOR	- 5,209	+ FIBOR	+ 0
4	+ 105,209	- FIBOR -100	- 5,209	+ FIBOR	+ 0

Bewertung eines Zinsswaps

Ursprungslaufzeit des Zinsswaps	= 4 Jahre
Restlaufzeit	= 3 Jahre
Festzinssatz	= 5,209%
variabler Zinssatz	= 12-Monats-FIBOR

Marktzinssätze zum Zeitpunkt der Bewertung (in diesem Beispiel entsprechen sie den Zinssätzen, die vor einem Jahr auch antizipiert wurden):

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T)	1	2	3	4	5	6
R_T (Spot Rates)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Prinzip: Synthetische Konstruktion eines Zinsswaps mittels einer Floating Rate Note (FRN) und einer Kupon-Anleihe mit einer Nominalverzinsung von 5,209% (also gleich dem Festzinssatz).

$$KA_{3,\,5{,}209\%} = \frac{0{,}05209}{(1+0{,}051338)^1} + \frac{0{,}05209}{(1+0{,}054427)^2} + \frac{1{,}05209}{(1+0{,}057118)^3} = 98{,}70\%$$

Der Zinsswap kann geschlossen werden, indem zu den heutigen Marktkonditionen eine Anleihe mit einer Nominalverzinsung von 5,209% und einem Kurs von 98,70% gekauft und eine FRN zu 100% verkauft (oder emittiert) wird:

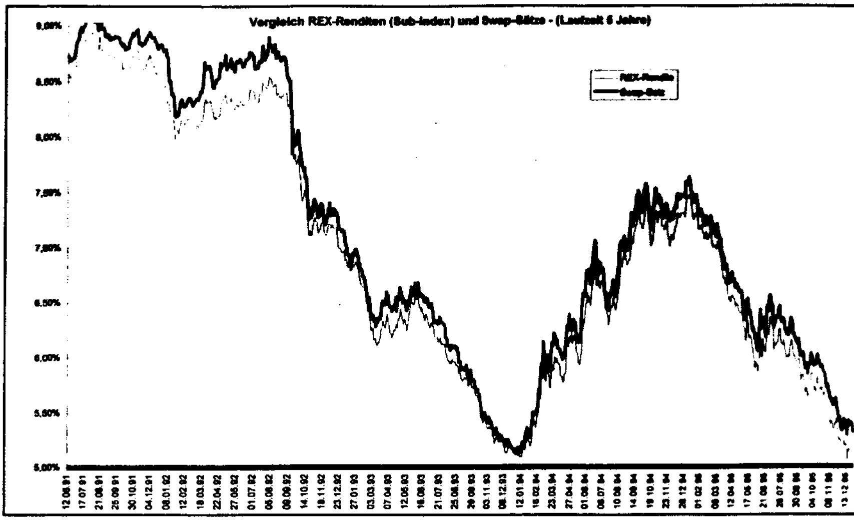
	Kauf Anleihe	Verkauf FRN	Swap fix zahlen	Swap var. erhalten	Summe
0	- 98,70	+ 100	-	-	+ 1,30
1	+ 5,209	- FIBOR	- 5,209	+ FIBOR	0
2	+ 5,209	- FIBOR	- 5,209	+ FIBOR	0
3	+ 105,209	- FIBOR -100	- 5,209	+ FIBOR	0

$$Swap_{T,K} = FRN_T - KA_{T,K} = 100 - 98{,}70 = 1{,}30$$

"Gewinn" resultiert aus der Zinsdifferenz: 5,209 - 3,9088 = 1,30

FIBOR + 2 % gegen 12% fest = FIBOR + 0% gegen 10% fest

Vergleich REX-Rendite und Swapsätze



mögliche Gründe für die Abweichungen:

- Kuponeffekt (schwer testbar)

- Bonitätsunterschiede zwischen dem Bund und den Banken
  ---> wenn der Festzinssatz höher ist, dann wird auch der variable Zinssatz (FIBOR) höher sein

- Marktineffizienzen wie Transaktionskosten, Abweichungen von "fairen" Werten wg. der fehlenden Börsennotierung von Zinsswaps

2.2.2.2.8. Finanzkontrakte auf fremde Währungen

Ein weiteres Ausstattungsmerkmal von Finanztiteln ist die Währung, in der die mit dem Finanztitel verbundenen Zahlungen erfolgen. Während bisher immer davon ausgegangen wurde, daß alle Zahlungen in Euro vorgenommen werden, ist nun zu überlegen, wie Finanztitel zu bewerten sind, bei denen beispielsweise die Zins- und Tilgungszahlungen in GBP erfolgen.

Nicht nur für Mitarbeiter von Kreditinstituten ist die Frage relevant, in welchem Land bzw. in welcher Währung die höchsten Renditen zu erzielen sind. In nahezu jeder finanzwirtschaftlichen Abteilung eines größeren Unternehmens muß darüber entschieden werden, wo und in welcher Währung eine optimale Geldanlage- bzw. Kreditaufnahme möglich ist. Grundsätzlich gilt, daß die folgenden Überlegungen für jeden von Interesse sein dürften, der es mit Zahlungsströmen in unterschiedlichen Währungen zu tun haben wird.

Die folgenden Ausführungen sind insbesondere vor dem Hintergrund der Fragen zu sehen, welchen Wert Zahlungen in einer fremden Währung haben und ob bzw. wann bei Engagements in fremden Währungen Überrenditen zu erzielen sind. Zu diesem Zweck muß zunächst der Zusammenhang von Wechselkursen und Zinssätzen verdeutlicht werden.

2.2.2.2.8.1. Kassa- und Terminkurs für Währungen

Bezüglich der Wechselkurse ist zwischen dem Kassakurs und Terminkurs zu unterscheiden:

Die **Spot Rate of exchange (Kassakurs)** gibt an, wieviele Einheiten der fremden Währung benötigt werden, um **heute** eine Einheit der einheimischen Währung zu kaufen oder zu verkaufen.

Die **Forward Rate of exchange (Terminkurs)** gibt an, wieviele Einheiten der fremden Währung benötigt werden, um (auf der Grundlage eines heute abgeschlossenen Vertrages) **zu einem zukünftigen Zeitpunkt** eine Einheit der einheimischen Währung zu kaufen oder zu verkaufen. Die Laufzeit dieser Termingeschäfte beträgt bis zu 10 Jahren, meist aber 1, 3 oder 6 Monate.

Kassakurs und Terminkurs von Währungen

In welcher Währung würden Sie Ihr Vermögen anlegen?

- Bundesrepublik Deutschland Zinssatz: 8%
- U.K. Zinssatz: 15%
- Brasilien Zinssatz: 40.000%

1. Was ist "der Wechselkurs" und wie kommt er zustande?
2. Warum unterscheiden sich Kassa- und Terminkurse für Währungen?
3. Warum verändern sich Wechselkurse?
4. Lohnt es sich, Finanztitel zu kaufen bzw. zu verkaufen, die auf eine fremde Währung lauten?
5. Welche Maßnahmen bieten sich an, um sich gegen Wechselkursänderungen zu schützen?

Spot Rate of exchange = Kassa(wechsel)kurs GBP 0,6250/EUR ("Mengennotierung") Man bekommt heute (oder hat zu zahlen) 0,6250 GBP für einen EUR **oder** EUR 1,60/GBP ("Preisnotierung") (1/0,6250 = 1,60) Man bekommt heute (oder hat zu zahlen) 1,60 EUR für ein GBP
Forward Rate of exchange = (Devisen-)Terminkurs GBP 0,6020/EUR ("Mengennotierung") Man bekommt in 12 Monaten (oder hat zu zahlen) 0,6020 GBP für einen EUR **oder** EUR 1,6611/GBP ("Preisnotierung") (1/0,6020 = 1,6611) Man bekommt in 12 Monaten (oder hat zu zahlen) 1,6611 EUR für ein GBP

2.2.2.2.8.2. Arbitrageprinzip zwischen Kassa- und Terminkurs

Die Grundlagen für das Verständnis des Zustandekommens der Kassa- und Terminkurse für Währungen dürften insbesondere aus der monetären Außenwirtschaftstheorie bekannt sein. Auf das Kaufkraftparitätentheorem, welches die Kassakurse erklärt bzw. erklären soll, wird hier nicht näher eingegangen. Wichtiger ist hingegen der Zusammenhang zwischen dem Kassa- und Devisenterminkurs sowie gleichzeitig den Zinssätzen zweier Länder, da dieser in der finanzwirtschaftlichen Praxis für frei konvertierbare Währungen nahezu vollständig gültig ist.

Den Ausgangspunkt der Überlegung stellt die Frage dar, ob die für das Szenarium angegebenen Zinssätze und Wechselkurse Gültigkeit haben können. Wenn dem so wäre, kann zunächst festgestellt werden, daß eine Geldanlage in Euro nicht sinnvoll ist. Jeder Anleger, der eine größere Summe zur Verfügung hat, würde sein Geld zum Kassakurs (Mengennotierung) von 0,6250 in GBP umtauschen und diesen Betrag zu 9% anlegen. Den Betrag an GBP, den er inclusive Zinsen nach einem Jahr aus der Geldanlage erhält, würde er schon heute zum Terminkurs von 0,5882 verkaufen. So bekäme er in einem Jahr (sicher) einen höheren EUR-Betrag (hier EUR 1,1581 Mio.) aus der Anlage zurück, als dies bei der Anlage in EUR (hier EUR 1,05 Mio.) der Fall gewesen wäre.

Aber auch ohne den Einsatz von Kapital wäre es bei diesem Szenarium möglich, einen risikofreien Gewinn zu erzielen. Dies zeigt das zweite Beispiel, welches hier nur in Stichworten beschrieben wird:

in $t=0$:
- Kreditaufnahme in Deutschland
- Umtausch des Betrages in GBP zum Kassakurs (Mengennotierung) von 0,6250
- Anlage des Geldes in Großbritannien zu 9%

in $t=1$
- Rücktausch in EUR zum Terminkurs (Mengennotierung) von 0,5882
- Rückzahlung des Darlehens inclusive 5% Zinsen

Derartige Arbitragetransaktionen würden solange durchgeführt, bis sich ein Gleichgewichts-Terminkurs einstellt, der solche Geschäfte unmöglich macht.

Das im weiteren angegebene Szenarium erfüllt die Bedingung der Arbitragefreiheit. Bei dieser Datenkonstellation kann also kein risikofreier Gewinn erzielt werden, wie es vorher gezeigt wurde. In der finanzwirtschaftlichen Praxis kann (für frei konvertierbare Währungen) in der Tat beobachtet werden, daß diese Gleichgewichtsbedingung nahezu vollständig gültig ist. Der Grund liegt darin, daß Arbitragetransaktionen insbesondere von Kreditinstituten und anderen an den internationalen Geld- und Kapitalmärkten direkt agierenden Unternehmen relativ kostengünstig durchgeführt werden (können). Bekannterweise funktionieren derartige Arbitragemechanismen umso besser, je perfekter die Märkte sind.

Die Gleichgewichtsbedingung umgestellt ermöglicht die Berechnung des Terminkurses (Mengennotierung):

$$_{GBP/EUR}f_1 = \frac{(1+{}_{GBP}R_1)^1}{(1+{}_{EUR}R_1)^1} \; {}_{GBP/EUR}S$$

Wie es für unterschiedliche Restlaufzeiten unterschiedliche Zinssätze gibt, muß es auch verschiedene Terminkurse geben, wie es die Tabelle zeigt.

Arbitrageprinzip zwischen Kassa- und Terminkurs

Ist folgendes Szenarium möglich?

$_{GBP/EUR}S$ = GBP 0,6250/EUR
Spot Rate of exchange (Kassawechselkurs Mengennotierung)

$_{GBP/EUR}f_1$ = GBP 0,5882/EUR für 1 Jahr
Forward Rate of exchange (Terminwechselkurs Mengennotierung)

$_{EUR}R_1$ = 5,00% für 1 Jahr
Spot Rate (Zinssatz) in Deutschland

$_{GBP}R_1$ = 9,00% für 1 Jahr
Spot Rate (Zinssatz) in Großbritannien

Für die Anlage von 1 Mio. EUR bestehen folgende Alternativen:

1) Anlage in D zu 5%

$$\text{Endwert} = 1\ (1+0{,}05)^1 = 1{,}05$$

2) Umtausch in GBP zum Kassakurs von 0,6250 Anlage in Großbritannien zu 9% und Umtausch in EUR zum Terminkurs von 0,5882

$$\text{Endwert} = 0{,}6250\ (1+0{,}09)^1\ \frac{1}{0{,}5882} = 1{,}1581$$

Arbitragetransaktion ohne eigenen Kapitaleinsatz:

Kreditaufnahme in D und Anlage des Geldes in Großbritannien ergibt einen Arbitragegewinn von:

$$0{,}6250\ (1+0{,}09)^1\ \frac{1}{0{,}5882} - 1\ (1+0{,}05)^1 = 0{,}1081$$

Berechnung unterschiedlicher Terminkurse

Es muß stets gelten:

$$\frac{(1+{}_{GBP}R_t)^t}{(1+{}_{EUR}R_t)^t} = \frac{{}_{GBP/EUR}f_t}{{}_{GBP/EUR}S}$$

also z.B.:

$$\frac{(1+0{,}09)^1}{(1+0{,}039088)^1} = \frac{0{,}6993}{0{,}6667}$$

Berechnung der theoretischen Terminkurse nach:

$${}_{GBP/EUR}f_t = \frac{(1+{}_{GBP}R_t)^t}{(1+{}_{EUR}R_t)^t} \quad {}_{GBP/EUR}S$$

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
${}_{EUR}r_{T,\ 7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
${}_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
${}_{GBP}r_{T,\ 8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974

$$\frac{(1+0{,}09)^1}{(1+0{,}039088)^1} \quad 0{,}6667 = 0{,}6993$$

$$\frac{(1+0{,}110838)^2}{(1+0{,}045195)^2} \quad 0{,}6667 = 0{,}7530 \qquad \text{usw.}$$

Eine Arbitragetransaktion (ohne eigenen Kapitaleinsatz) ist nun nicht mehr möglich. Eine Kreditaufnahme in Deutschland und die Anlage des Geldes in Großbritannien ergibt nun einen Arbitragegewinn von:

$$0{,}6667\ (1+0{,}09)^1\ \frac{1}{0{,}6993} - 1\ (1+0{,}039088)^1 = 0{,}000$$

2.2.2.2.8.3. Bewertung von Fremdwährungsanleihen

Die Bewertung einer bonitätsrisikofreien Fremdwährungsanleihe erfolgt exemplarisch für die Bewertung von Zahlungsströmen auf der Grundlage fremder Währungen. Diese Vorgehensweise ist auch hilfreich für die Bewertung von Devisen- und Währungsswaps.

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten, Zahlungsströme auf der Grundlage fremder Währungen zu bewerten. Das Ergebnis ist - wie im Beispiel gezeigt - gleich.

Hervorzuheben ist ein interessanter Sachverhalt: Wenn der Preis eines Finanztitels am einheimischen Markt fair (unfair) ist, so muß der Preis auch aus Sicht eines ausländischen Kapitalanlegers fair (unfair) sein. Bei dem hier vorgestellten Modell lohnt sich eine Suche nach fehlbewerteten Fremdwährungsanleihen also nur dann, wenn man davon ausgeht, daß der fremde Markt unfaire Preise zuläßt, also der Markt eine geringe Effizienz aufweist. Dies bedeutet nicht, daß sich ein Engagement auf anderen Märkten grundsätzlich nicht lohnt. So mögen insbesondere steuerliche Überlegungen auch bei fair bewerteten Finanztiteln ein internationales Engagement sinnvoll erscheinen lassen.

Bewertung einer Fremdwährungsanleihe

Nominalwert = 1.000 GBP
Nominalzinssatz = 12%
Laufzeit = 3 Jahre
Kurswert in EUR = ?
Kurswert in GBP = ?

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
${}_{EUR}r_{T,\ 7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
${}_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
${}_{GBP}r_{T,\ 8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974

Berechnung des Kurswertes in GBP: Abzinsung aller Beträge mit ${}_{GBP}R_t$

$$_{GBP}KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1 + {}_{GBP}R_t)^t}$$

$$_{GBP}KA_{3,12\%} = \frac{120}{(1+0{,}09)^1} + \frac{120}{(1+0{,}110838)^2} + \frac{1.120}{(1+0{,}126937)^3} = 989{,}90 \text{ GBP}$$

Zusammenhang des GBP-Kurswertes und des EUR-Kurswertes:

$$_{GBP}KA_{3,12\%} = 989{,}90 \cdot 1{,}50 = 1.484{,}85 \text{ EUR}$$

Berechnung des Kurswertes in EUR: Umrechnung aller Beträge in EUR und Abzinsung mit ${}_{EUR}R_t$

$$_{GBP}KA_{T,K} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t \ {}_{EUR/GBP}f_t}{(1 + {}_{EUR}R_t)^t}$$

$$_{GBP}KA_{3,\ 12\%} = \frac{120 \cdot 1{,}4299}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{120 \cdot 1{,}3280}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{1.120 \cdot 1{,}2108}{(1+0{,}049289)^3} = 1.484{,}85 \ EUR$$

2.2.2.2.8.4. Bewertung von Währungsswaps

Es gibt verschiedene Varianten von Währungsswaps. Bei der klassischen Form eines Währungsswaps mit beidseitiger Festzinsvereinbarung tauschen die beiden beteiligten Parteien in $t=0$ einen bestimmten Kapitalbetrag in einer Währung (im weiteren EUR) gegen einen Kapitalbetrag einer anderen Währung (im weiteren GBP) zum Kassakurs der beiden Währungen (im weiteren 0,6667 GBP für einen EUR). Während der Laufzeit des Währungsswaps zahlt der Empfänger des EUR-Betrages einen festen Zinssatz ("EUR-Zinssatz") auf den in $t=0$ empfangenen EUR-Betrag. Die andere Swap-Partei zahlt entsprechend einen festen Zinssatz ("GBP-Zinssatz") auf den in $t=0$ empfangenen GBP-Betrag. Am Ende der Laufzeit des Währungsswaps werden - neben der letzten Zinszahlung - die in $t=0$ gezahlten Beträge zurückgezahlt.

Es gibt insbesondere zwei Varianten dieser klassischen Form von Währungsswaps. Bei der ersten Variante erfolgt ein Austausch der Kapitalbeträge weder in $t=0$ noch am Ende der Swap-Laufzeit. Die andere Variante stellen kombinierte Zins-Währungsswaps dar. Hier zahlt eine Partei einen Festzinssatz (z.B. auf den EUR-Betrag) während die andere Partei einen variablen Zinssatz in einer anderen Währung (z.B. GBP-Libor auf den GBP-Betrag) zu zahlen hat.

Die Bewertung von Währungsswaps mit festen Zinssätzen kann in verschiedener Weise erfolgen. Grundsätzlich sind aus der Sicht des Bewertenden zunächst alle Zahlungen (in der entsprechenden Währung) zu erfassen, die aus dem Swap vereinnahmt werden bzw. zu leisten sind. Diese Beträge sind nun mit den Spot Rates der entsprechenden Währung abzuzinsen. Die Summen dieser abgezinsten Beträge, die letztlich dem Barwert von Kupon-Anleihen entsprechen, sind auf eine Währung zu beziehen und zu vergleichen. Die Differenz entspricht dem (positiven bzw. negativen) Barwert des Währungsswaps.

Alternativ wäre es - wie im Rahmen der Bewertung von Kupon-Anleihen für verschiedene Währungen bereits dargestellt - auch möglich, die Zahlungen schon vor deren Abzinsung mit den Devisenterminkursen auf eine einheitliche Währung zu beziehen. Die Ergebnisse der beiden Vorgehensweisen müssen identisch sein.

Für den praktischen Handel mit Währungsswaps stellt sich regelmäßig die Frage, welche Festzinssätze bei Neuabschluß eines Swaps "fair" sind, d.h. für welche Zinssätze der Barwert von Währungsswaps null ist. Intuitiv ist die Antwort: Wenn die Werte der beiden zu Duplikationszwecken einsetzbaren Kupon-Anleihen identisch sind, dann muß auch der Wert des Swaps null sein.

Analog zur Vorgehensweise bei den Zinsswaps und Reverse Floatern bietet es sich daher an, zunächst die Kupons zu bestimmen, für die die Werte der beiden involvierten Kupon-Anleihen 100% sind. Die benötigten Formeln wurden bereits im Zusammenhang mit den Reverse Floatern hergeleitet und zur Bestimmung der fairen Festzinssätze bei Reverse Floatern und Zinsswaps verwendet:

$$Marktrendite_T = \frac{1 - \frac{1}{(1+R_T)^T}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+R_t)^t}}$$

Eine weitere Herangehensweise, faire Festzinssätze zu berechnen, besteht darin, zunächst einen Festzinssatz zu fixieren. Dann ist zunächst der Wert der korrespondierenden Kupon-Anleihe zu bestimmen, der in die bekannte Formel statt des (Kurs)Wertes von 100% einzusetzen ist:

$$Festzinssatz_T\ (Währung\ A) = \frac{{}_{Währung\ B}KA_{T,K} - \dfrac{1}{(1 + {}_AR_T)^T}}{\sum_{t=1}^{T} \dfrac{1}{(1 + {}_AR_t)^t}}$$

Die Bestimmung des Wertes von Zins-Währungsswaps ist einfacher als zunächst vermutet werden könnte, da die "eine Hälfte" eines Zins-Währungsswaps durch eine Floating Rate Note in der entsprechenden Währung (oder durch zu prolongierende Geldmarktgeschäfte) dupliziert werden kann. Da der Wert dieser Floater bekanntlich 100% ist, vereinfacht sich die oben gezeigte Rechnung sogar.

Währungsswaps - Definitionen

1. Variante: Austausch der Kapitalbeträge und feste Zinssätze in unterschiedlichen Währungen auf beiden Seiten

Laufzeit des Währungsswaps	= 4 Jahre
Volumen (in EUR)	= 150 Mio. EUR
Volumen (in GBP)	= 100 Mio. GBP
EUR Festzinssatz	= 5%
GBP Festzinssatz	= 10%
Kassakurs (Preisnotierung)	= EUR 1,50 für ein GBP

T	sichere Zahlungen in EUR vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	sichere Zahlungen in GBP vereinbarter GBP-Zinssatz: 10%
0	+ 150 Mio. EUR	- 100 Mio. GBP
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
4	- 157,5 Mio. EUR	+ 110 Mio. GBP

2. Variante: w.o., aber ohne Austausch der Kapitalbeträge

T	sichere Zahlungen in EUR vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	sichere Zahlungen in GBP vereinbarter GBP-Zinssatz: 10%
0		
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
4	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP

Was sind diese Swaps aus Sicht beider Beteiligten wert?
Wie können "faire" Zinssätze für Währungsswaps berechnet werden?

Bewertung eines Währungsswaps mit Austausch der Kapitalbeträge durch Duplikation mit Kupon-Anleihen

Laufzeit des Währungsswaps	= 4 Jahre
Volumen (in EUR)	= 150 Mio. EUR
Volumen (in GBP)	= 100 Mio. GBP
EUR Festzinssatz	= 5%
GBP Festzinssatz	= 10%

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
${}_{EUR}r_{T,\ 7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
${}_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
${}_{GBP}r_{T,\ 8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974

	sichere Zahlungen in EUR	sichere Zahlungen in GBP
	vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	vereinbarter GBP-Zinssatz: 10%
T	Wert = - 148,88 + 135,58 = - 13,30 (Mio. EUR)	
0	Wert = - 148,88 Mio. EUR	Wert = + 90,39 Mio. GBP Wert = + 135,58 Mio. EUR
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 10 Mio. GBP
4	- 157,5 Mio. EUR	+ 110 Mio. GBP

$$KA_{4,\ 5\%} = \frac{-7{,}5}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{-7{,}5}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{-7{,}5}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{-157{,}5}{(1+0{,}052581)^4} = -\ 148{,}88\ (\textit{Mio. EUR})$$

$${}_{GBP}KA_{4,\ 10\%} = \frac{+10}{(1+0{,}09)^1} + \frac{+10}{(1+0{,}110838)^2} + \frac{+10}{(1+0{,}126937)^3} + \frac{+110}{(1+0{,}135691)^4} = +\ 90{,}39\ (\textit{Mio. GBP})$$

$${}_{GBP}KA_{4,\ 10\%} = 90{,}39\ (\textit{Mio. GBP}) \cdot 1{,}50 = 135{,}58\ (\textit{Mio. EUR})$$

Ermittlung der fairen Zinssätze von Währungsswaps mit Austausch der Kapitalbeträge

Laufzeit des Währungsswaps = 4 Jahre
EUR Festzinssatz = ? %
GBP Festzinssatz = ? %

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
$_{EUR}r_{T,\,7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
$_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$_{GBP}r_{T,\,8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
$_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974

Bedingung: Die Werte der beiden zu Duplikationszwecken einsetzbaren Kupon-Anleihen müssen in t=0 identisch sein!

Variante 1: Normierung beider Werte auf 100% über die bereits bekannte "Marktrendite"

$$Marktrendite_4\,(EUR) = \frac{1 - \dfrac{1}{(1 + {}_{EUR}R_4)^4}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{4} \frac{1}{(1 + {}_{EUR}R_t)^t}} = 5{,}209\%$$

$$Marktrendite_4\,(GBP) = \frac{1 - \dfrac{1}{(1 + {}_{GBP}R_4)^4}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{4} \frac{1}{(1 + {}_{GBP}R_t)^t}} = 13{,}1746\%$$

Variante 2: Vorgabe eines Zinssatzes (hier 5% für EUR) und Anpassung des anderen Zinssatzes (hier ergibt sich 12,9290% für GBP)

$$Festzinssatz_4\,(GBP) = \frac{{}_{EUR}KA_{4,5\%} - \dfrac{1}{(1 + {}_{GBP}R_4)^4}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{4} \frac{1}{(1 + {}_{GBP}R_t)^t}} = 12{,}9290\%$$

Ermittlung der fairen Zinssätze von Währungsswaps mit Austausch der Kapitalbeträge (Probe)

Laufzeit des Währungsswaps	= 4 Jahre
Volumen (in EUR)	= 150 Mio. EUR
Volumen (in GBP)	= 100 Mio. GBP
EUR Festzinssatz	= 5%
GBP Festzinssatz	= 12,929%

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
${}_{EUR}r_{T,\,7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
${}_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
${}_{GBP}r_{T,\,8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974

	sichere Zahlungen in EUR	sichere Zahlungen in GBP
	vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	vereinbarter GBP-Zinssatz: 12,929%
T	Wert = - 148,88 + 148,88 = 0,0000 (Mio. EUR)	
0	Wert = - 148,88 Mio. EUR	Wert = + 99,26 Mio. GBP Wert = + 148,88 Mio. EUR
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 12,929 Mio. GBP
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 12,929 Mio. GBP
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 12,929 Mio. GBP
4	- 157,5 Mio. EUR	+ 112,929 Mio. GBP

$$KA_{4,\,5\%} = \frac{-7{,}5}{(1+0{,}039088)^1} + \frac{-7{,}5}{(1+0{,}045195)^2} + \frac{-7{,}5}{(1+0{,}049289)^3} + \frac{-157{,}5}{(1+0{,}052581)^4} = -\,148{,}88\ (\mathit{Mio.\ EUR})$$

$${}_{GBP}KA_{4,\,12{,}929\%} = \frac{+12{,}929}{(1+0{,}09)^1} + \frac{+12{,}929}{(1+0{,}110838)^2} + \frac{+12{,}929}{(1+0{,}126937)^3} + \frac{+112{,}929}{(1+0{,}135691)^4} = +\,99{,}26\ (\mathit{Mio.\ GBP})$$

$${}_{GBP}KA_{4,\,12{,}929\%} = 99{,}26\ (\mathit{Mio.\ GBP}) \cdot 1{,}50 = 148{,}88\ (\mathit{Mio.\ EUR})$$

Bewertung eines Zins-Währungs-Swaps mit Austausch der Kapitalbeträge

Laufzeit des Swaps	= 4 Jahre
Volumen (in EUR)	= 150 Mio. EUR
Volumen (in GBP)	= 100 Mio. GBP
EUR Festzinssatz	= 5%
GBP variabler Zinssatz	= GBP-LIBOR (hier ohne Aufschlag)
Kassakurs (Preisnotierung)	= EUR 1,50 für ein GBP

T	sichere Zahlungen in EUR	sichere und unsichere Zahlungen in GBP
	vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	vereinbarter GBP-Zinssatz: GBP-LIBOR
0	+ 150 Mio. EUR	- 100 Mio. GBP
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
4	- 157,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · (1 + GBP-LIBOR)

	sichere Zahlungen in EUR	sichere und unsichere Zahlungen in GBP
	vereinbarter EUR-Zinssatz: 5%	vereinbarter GBP-Zinssatz: LIBOR
T	Wert = - 148,88 + 150 = 1,12 (Mio. EUR)	
0	Wert = - 148,88 Mio. EUR	Wert = + 100 Mio. GBP Wert = + 150 Mio. EUR
1	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
2	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
3	- 7,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · GBP-LIBOR
4	- 157,5 Mio. EUR	+ 100 Mio. · (1 + GBP-LIBOR)

2.2.2.2.8.5. Bewertung von Devisenswaps

In Abgrenzung zu Währungsswaps haben Devisenswaps in der Regel eine deutlich kürzere Laufzeit. Während Währungsswaps für Laufzeiten von 2 bis zu 10 Jahren gebräuchlich sind, werden Devisenswaps meist für Laufzeiten bis zu einem Jahr abgeschlossen.

Die Grundform eines Devisenswaps kann man sich am besten so vorstellen, daß in $t=0$ wiederum ein Währungsbetrag (z.B. 1,5 Mio. EUR) gegen einen anderen Währungsbetrag (z.B. 1 Mio. GBP) zum Kassakurs (Preisnotierung: hier EUR 1,50 für ein GBP) getauscht wird. Während der Laufzeit des Swaps finden - im Gegensatz zu Währungsswaps - aber keine (Zins-) Zahlungen statt. Am Ende der Laufzeit erfolgt der "Rücktausch" des Geldes - wiederum im Gegensatz zu Währungsswaps - nicht zum Kassakurs, sondern zum vorher vereinbarten Terminkurs (vereinbart wird in der Regel allerdings nicht der Terminkurs direkt, sondern der sogenannte Report bzw. Deport. Diese Ausdrücke bezeichnen aber nichts anderes als die Differenz zwischen Kassa- und Terminkurs).

Devisenswaps mit Austausch der Kapitalbeträge

Laufzeit des Swaps	= 1 Jahr
Volumen (in EUR)	= 150 Mio. EUR
Volumen (in GBP)	= 100 Mio. GBP

Gegenwärtige Marktzinsstrukturen (alle Angaben in %)							
Laufzeit (T)		1	2	3	4	5	6
${}_{EUR}r_{T,\,7{,}639\%}$		3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
${}_{EUR}R_T$		3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
${}_{GBP}r_{T,\,8\%}$		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{GBP}R_T$		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurse	Terminkurse					
EUR x/GBP 1	1,50	1,4299	1,3280	1,2108	1,1068	1,0038	0,9112
GBP x/EUR 1	0,6667	0,6993	0,7530	0,8259	0,9035	0,9924	1,0974
EUR x/GBP 1	Deport	0,0701	0,1720	0,2892	0,3932	0,4962	0,5888
GBP x/EUR 1	Report	-0,0326	-0,0863	-0,1592	-0,2368	-0,3257	-0,4307

Kassakurs - Terminkurs = 1,5000 - 1,4299 = 0,0701 (Deport Preisnotierung)
Kassakurs - Terminkurs = 0,6667 - 0,6993 = -0,0326 (Report Mengennotierung)

Daraus folgt, daß die Rückzahlungsbeträge 100 Mio. GBP und 142,99 Mio. EUR sind. Der Vorteil aus dem Devisenswap ergibt sich in Abhängigkeit des Kassakurses in t=1 für 3 Szenarien wie folgt:

	Zahlungen in EUR	Zahlungen in GBP	Wert der GBP Zahlungen in EUR umgerechnet		Wertdifferenz in EUR
0	-150 Mio. EUR	+100 Mio. GBP	+150 Mio. EUR		0
			Kassakurs in t=1	Wert in EUR	
1	+142,99 Mio. EUR (zum vorher vereinbarten Terminkurs)	-100 Mio. GBP	1,40	-140 Mio. EUR	+2,99 Mio. EUR
			1,4299	-142,99 Mio. EUR	0
			1,45	-145 Mio. EUR	-2,01 Mio. EUR

Die Bewertung vor Fälligkeit des Devisenswaps erfolgt durch Abzinsung der Differenz zwischen dem vereinbarten und dem zur Zeit gültigen Devisenterminkurs (multipliziert mit dem Volumen des Fremdwährungsbetrages).

2.2.2.3. Erweiterungen der vorgestellten Ansätze zur Bewertung von Finanzkontrakten

Können mit den in diesem Abschnitt gezeigten Bewertungsansätzen nun alle Finanztitel (Kupon-Anleihen, Bundesschatzbriefe, Hypothekendarlehen, Zerobonds, Floating Rate Notes, Reverse Floater, FRA´s, Zins-Futures, Zinsswaps, Währungsswaps usw.) perfekt bewertet werden? Ja, wenn die jeweiligen Prämissen zutreffen!

Treffen die Prämissen - wie sie hier idealtypisch angenommen wurden - für die finanzwirtschaftliche Praxis zu? Nein, nie! Aus diesen Überlegungen könnte die Konsequenz abgeleitet werden, daß das Wissen um die hier gezeigten Zusammenhänge in der Praxis keinen Wert hat. Ist das so?

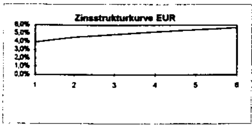
Zunächst besteht das primäre Ziel dieser Ausführungen nicht in der exakten Berechnung der Werte möglichst vieler Finanztitel, sondern vielmehr darin, die - und nur die - wesentlichen Zusammenhänge darzustellen, die für das Verständnis der grundlegenden Mechanismen auf den Märkten für verzinsliche Finanztitel gelten. Vergegenwärtigt man sich den Sachverhalt, daß es wohl keinen anderen Markt gibt, der so effizient wie der Finanzmarkt ist, folgt daraus, daß die Anwendung "theoretischen (Formel-)Wissens" auf keinen anderen Markt so erfolgsversprechend ist, wie eben auf den Finanzmarkt. Anders ausgedrückt: Der Nutzen "theoretischen Wissens" hat auf dem Finanzmarkt einen hohen (den höchsten?) praktischen Wirkungsgrad. Da mit den Ausführungen didaktische Ziele verfolgt werden, können und dürfen die Ausführungen nicht zugleich eine Anleitung zur Programmierung eines - auch Nebensächlichkeiten umfassenden - kompletten Bewertungsprogramms sein.

Zum anderen gelten die berechneten Werte zumindest approximativ. Sie bieten daher einen Anhaltspunkt, den fairen Wert von Finanztiteln abzuschätzen. Darüber hinaus können (und müssen) diese Bewertungsalgorithmen für praktische Ansätze beliebig verfeinert werden. Ansatzpunkte bestehen in der Berücksichtigung von Transaktionskosten, in der getrennten Betrachtung von Geld- und Briefkursen (oder Zinssätzen), in einem durchgängig auch unterjährigen Bewertungsmodell und schließlich in der Berücksichtigung von anderen Risiken als dem Marktzinsrisiko. Stichworte zum zuletzt genannten Punkt sind die Portfoliotheorie, das CAPM, die Arbitrage Pricing Theory und die Optionsbewertungstheorie.

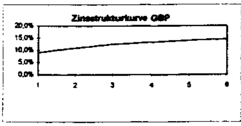
Zusammenfassung: Gesamtmodell zur Bewertung verzinslicher Finanztitel

EUR	Empirische Ausgangsdaten				Ausgangsdatum:		(27.02.1987)
Nr.	Emittent	Emission	Kurs	Kupon	Tag	Monat	Jahr	Laufzeit
1	Bundesanleihe	1977	100,20%	6,75%	1	4	87	0,09
2	Bundesobligation	1982	100,40%	8,25%	1	4	87	0,09
3	Bundesobligation	1982	100,40%	8,00%	1	4	87	0,09
4	Bundesobligation	1982	100,70%	8,50%	1	5	87	0,17
106	Bundespost	1983	112,65%	8,50%	1	9	93	6,53
107	Bundesanleihe	1983	112,95%	8,25%	1	10	93	6,61
108	Bundesbahn	1983	112,10%	8,25%	1	11	93	6,70
109	Bundesanleihe	1983	112,90%	8,25%	1	11	93	6,70
110	Bundesanleihe	1983	113,10%	8,25%	1	12	93	6,78
111	Bundesanleihe	1984	113,05%	8,25%	1	1	94	6,86
112	Bundesanleihe	1984	113,10%	8,25%	1	2	94	6,95
113	Bundespost	1984	111,25%	8,25%	1	2	94	6,95
114	Bundesanleihe	1984	111,85%	8,00%	18	3	94	7,07
115	Bundesbahn	1984	112,20%	8,25%	1	6	94	7,28

GBP	Empirische Ausgangsdaten				Ausgangsdatum:			27. Feb 87
Nr.	Emittent	Emission	Kurs	Kupon	Tag	Monat	Jahr	Laufzeit
1	GBP-Bond	1984	113,40%	8,25%	22	8	94	7,50
2	GBP-Bond	1984	110,15%	8,25%	1	9	94	7,53
3	GBP-Bond	1984	108,70%	8,00%	20	10	94	7,67
4	GBP-Bond	1984	108,30%	8,25%	2	11	94	7,70
106	GBP-Bond	1985	105,70%	8,25%	20	1	95	7,92
107	GBP-Bond	1985	104,85%	8,25%	1	2	95	7,96
108	GBP-Bond	1985	107,30%	8,25%	20	2	95	8,00
109	GBP-Bond	1985	108,35%	8,25%	20	3	95	8,06
110	GBP-Bond	1985	108,70%	8,25%	20	4	95	8,10
111	GBP-Bond	1985	107,05%	8,25%	22	5	95	8,25
112	GBP-Bond	1985	105,60%	8,00%	20	6	95	8,33
113	GBP-Bond	1985	106,20%	8,25%	20	7	95	8,41
114	GBP-Bond	1985	101,20%	8,00%	2	10	95	8,62
115	GBP-Bond	1985	102,85%	8,25%	20	10	95	8,67



NIV	3,918%
STE	3,918%
KRÜ	5,145%



NIV	9,000%
STE	0,813%
KRÜ	1,750%

Eckdaten der geschätzten Zinsstrukturkurve	EUR					
T	1	2	3	4	5	6
Durchschnittsrendite r T	3,9%	4,5%	4,9%	5,2%	5,5%	5,7%
Spot Rates R T	3,9%	4,5%	4,9%	5,3%	5,6%	5,8%
Forward Rates R 1,T	5,1%	5,8%	6,3%	6,7%	7,1%	7,6%
Forward Rates R T,1	5,1%	5,5%	5,7%	6,0%	6,2%	6,4%

Eckdaten der geschätzten Zinsstrukturkurve	GBP					
T	1	2	3	4	5	6
Durchschnittsrendite r T	9,0%	11,0%	12,5%	13,3%	14,0%	14,5%
Spot Rates R T	9,0%	11,1%	12,7%	13,6%	14,4%	15,0%
Forward Rates R 1,T	13,2%	16,0%	16,2%	17,7%	18,0%	19,6%
Forward Rates R T,1	13,2%	17,4%	17,0%	17,1%	17,3%	17,7%

Kassakurs für einen GBP	1,50		Kassakurs für einen EUR			0,67
T	1	2	3	4	5	6
Terminkurse für GBP	1,43	1,33	1,21	1,11	1,00	0,91
Terminkurse für EUR	0,70	0,75	0,83	0,90	1,00	1,10

Mit diesen Daten ist eine Bewertung möglich für		
verschiedene Titel in verschiedenen Währungen		**verschiedene Zeitpunkte**
Zerobonds	Zins-Futures	Wert zum heutigen Zeitpunkt
Kupon-Anleihen	Zinsswaps	sicherbare Werte für zukünftige Zeitpunkte
Bundesschatzbriefe	Währungsswaps	erwartete Werte für zukünftige Zeitpunkte
Hypothekendarlehen	Devisenswaps	
Floating Rate Notes	Zins-Währ.-Swaps	**verschiedene Marktzinsszenarien,**
Reverse Floating Rate Notes	usw.	simuliert über Änderungen der Zinsstrukturkurven
FRA´s		(NIV, STE, KRÜ oder r1 bis r10 oder R1 bis R10)
ganze Depots aus diesen Finanztiteln		

Erweiterungsmöglichkeiten des Modells bestehen durch Berücksichtigung von		
Transaktionskosten sowie Geld- und Briefspannen	steuerlichen Aspekten	weiteren YC´s (z.B. Swap-Sätze)
Risikoprämien über PST, CAPM, APT	Bonitätsrisiken	unterjährigen Zinssätzen

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

Gehen Sie im folgenden von den in der Tabelle genannten Marktzinssätzen aus.

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,8}$ (Durchschnittsrenditen)	5,0000	6,7000	8,0000	9,0000	9,8000	10,3000
R_T (Spot Rates)	5,0000	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	8,5665	10,9861	12,6159	13,8711	13,6637	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	8,5665	9,7696	10,7103	11,4922	11,9231	

A) Ermitteln Sie aus Sicht der beiden Beteiligten den heutigen Wert eines Zinsswaps mit einer Restlaufzeit von 4 Jahren, einem variablen Zinssatz von FIBOR + 3% (12-monatige Zinsanpassung) und einem Festzinssatz von 14 Prozent.

Wie müßte dieses Verfahren prinzipiell modifiziert werden, wenn der Swap eine Restlaufzeit von 3,5 Jahren hätte?

B) Berechnen Sie den fairen Swap-Satz für einen Zinsswap fest gegen FIBOR plus 3 Prozent mit einer Laufzeit von 4 Jahren.

C) Berechnen Sie für die folgenden Zinssätze die Terminkurse:

Laufzeit (T)	0	1	2	3	4	5	6
${}_{DM}r_{T,8\%}$ (Durchschnittsverzinsung)		5,00	6,70	8,00	9,00	9,80	10,30
${}_{DM}R_T$ (Spot Rate)		5,00	6,7683	8,1561	9,2543	10,1624	10,7384
${}_{US\$}r_{T,8\%}$ (Durchschnittsverzinsung)		9,00	11,00	12,50	13,30	14,00	14,50
${}_{US\$}R_T$ (Spot Rate)		9,00	11,0838	12,6937	13,5691	14,3742	14,9730
	Kassakurs	Terminkurse					
DM X/US$ 1	1,6000						
US$ X/DM 1							

D) Berechnen Sie auf der Grundlage der unter C) ermittelten Daten den Wert einer Fremdwährungsanleihe in DM und in US$ mit folgenden Merkmalen:

Nominalwert = 5.000 US$
Nominalzinssatz = 12%
Laufzeit = 4 Jahre
Kurswert = ?

E) Bewerten Sie einen Währungsswap mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren und einem Nominalwert von 200.000 DM gegen 125.000 US$. Die Ausstattung ist 7% DM-Fest-Zinssatz gegen 7% US$-Fest-Zinssatz.

Welcher US$-Zinssatz wäre bei dem gegebenen DM-Zinssatz fair?

F) Wie wäre der faire Deport bzw. Report für einen DM/US$ Devisenswap mit einer Laufzeit von 2 Jahren? Zwischenzeitliche Zinszahlungen fallen nicht an.

G) Bewerten Sie einen Zins-Währungsswap mit einem Nominalwert von 500.000 DM gegen 330.000 US$. Die Restlaufzeit beträgt 3 Jahre. Der DM-Zinssatz ist auf 9% festgeschrieben und der US$-Zinssatz ist an den LIBOR gekoppelt.

H) Diskutieren Sie, inwiefern mittels des Theorems der komparativen Kostenvorteile die Zunahme des Zinsswap-Volumens begründet werden kann.

I) Inwiefern ist bei Zinsswaps das Bonitätsrisiko zu beachten?

J) Als Geschäftsführer eines deutschen Produktionsunternehmens haben Sie zwei Anfragen bezüglich Produktion und Export von Gartenstühlen. Aus Kapazitätsgründen können Sie nur eine der beiden Nachfragen befriedigen. Die Produktion kostet Sie DM 1.500.000 (Zahlung in t=0). Die Lieferung und Bezahlung erfolgt in beiden Fällen sicher in einem Jahr.

- Ein US-Importeur bietet Ihnen US$ 1.300.000, zahlbar in einem Jahr.
- Ein deutsches Unternehmen bietet Ihnen DM 2.000.000, zahlbar in einem Jahr.
- Eine Kreditaufnahme ist zu 5% am deutschen Kapitalmarkt möglich
- Eine Kreditaufnahme ist zu 10% am amerikanischen Kapitalmarkt möglich
- Die Spot Rate of exchange ist 1,60
- Die Forward Rate of exchange ist 1,50

J1) Welchen der beiden Aufträge nehmen Sie an?
J2) Wo nehmen Sie den Kredit auf?
J3) Sie erwarten einen Wechselkurs in einem Jahr von
 J31) 1,40
 J32) 1,50
 J33) 1,55
 J34) 1,60
 J35) 1,70.
 Inwiefern wird Ihre Entscheidung dadurch beeinflußt?

Lösungshinweise

A)

$$\text{Swapwert} = -FRN_4 + KA_{4,\,11\%}$$

$$= -100 + \frac{0{,}11}{(1+0{,}05)^1} + \frac{0{,}11}{(1+0{,}067683)^2} + \frac{0{,}11}{(1+0{,}081561)^3} + \frac{1{,}11}{(1+0{,}092543)^4} = 6{,}726$$

Der Wert ist - 6,73 (für den Festzinszahler) bzw. + 6,73 (für den FIBOR-Zahler).

Der prinzipielle Unterschied bezüglich der Bewertung bei einer Laufzeit von 3,5 Jahren besteht darin, daß nun der Wert der FRN - entsprechend den Ausführungen zur Bewertung von FRN - von 100% abweichen kann und dieser daher (statt 100%) auch in die Formel einzusetzen ist.

B) 11,9753

C)

Laufzeit (T)	0	1	2	3	4	5	6
	Kassa-kurs	Terminkurse					
DM X/US$ 1	1,6000	1,5413	1,4781	1,4144	1,3704	1,3263	1,2774
US$ X/DM 1	0,6250	0,6488	0,6765	0,7070	0,7297	0,7540	0,7828

D) Wert in US$:

$$KA_{4,12\%} = \left(\frac{600}{1+0{,}09} + \frac{600}{(1+0{,}110838)^2} + \frac{600}{(1+0{,}126937)^3} + \frac{5.600}{(1+0{,}135691)^4} \right) = 4.822{,}19 \text{ US\$}$$

Wert in DM (Umrechnung aller Beträge in DM und Abzinsung mit ${}_{DM}R_t$)

$$KA_{4,12\%} = \frac{600 \cdot 1{,}5413}{(1+0{,}05)^1} + \frac{600 \cdot 1{,}4781}{(1+0{,}067683)^2} + \frac{600 \cdot 1{,}4144}{(1+0{,}081561)^3} + \frac{5.600 \cdot 1{,}3704}{(1+0{,}092543)^4} = 7.715{,}50 \text{ DM}$$

oder

$$KA_{4,12\%} = 4.822{,}19 \cdot 1{,}60 = 7.715{,}50 \text{ DM}$$

E) Wert aus Sicht des DM-Zinszahlers: -26.680,86 DM bzw. -16.675,54 US$

Der faire Festzinssatz wäre 10,77% (US$-Zinssatz).

F) 0,1219 (Deport auf DM-Basis)

G) -14.900 DM aus Sicht des US$-Zinszahlers

J) Grundsätzlich gilt, daß die Einzelentscheidungen isoliert voneinander zu treffen sind.

zu J1) Wenn der US-Importeur bedient wird, so hätte die Zahlung in einem Jahr folgenden (antizipierten) Wert:
US$ 1,3 Mio. · 1,50 = DM 1,95 Mio.

Da der Auftragswert des deutschen Unternehmens DM 2 Mio. beträgt, wird dieser vorgezogen.

zu J2) Wenn der Kredit in Deutschland aufgenommen wird, so wären in einem Jahr zurückzuzahlen:
DM 1,5 Mio. · 1,05 = DM 1,575 Mio.

Wenn der Kredit in den USA aufgenommen wird, so müßte zunächst folgender Betrag aufgenommen werden:
1,5 Mio. DM / 1,60 = 0,9375 Mio. US$

Zurückzuzahlen sind in einem Jahr:
US$ 0,9375 Mio. · 1,10 = US$ 1,0312 Mio.

Das entspricht einem antizipierten Wert von:
US$ 1,0312 Mio. · 1,50 = DM 1,5468 Mio.

---> also wird der Kredit in den USA aufgenommen.

zu J3) Die o.a. Entscheidungen werden grundsätzlich nicht beeinflußt. Für folgende Wechselkurse wären folgende Devisentermingeschäfte sinnvoll:

1,40	- US$ auf Termin verkaufen
1,50	- kein Termingeschäft sinnvoll
1,55	**- US$ auf Termin kaufen!**
1,60 bzw. 1,70.	- US$ auf Termin kaufen

Literatur

Martina Andres. Zins- und Währungsswaps als innovative Finanzinstrumente. Wien 1989.

Christian-Uwe Behrens. Wann lohnen sich Zinsswap-Geschäfte?. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1989), S. 201-206.

Roland Erne. Modernes Zinsmanagement durch Einsatz von Zinssatzswaps-viele Chancen kaum Risiken. "Der Betrieb", (1994), S. 1.809-1.812.

Guido Fürer. Währungsabsicherung mit "low-cost"-Optionen. "Die Bank", (1992), S. 206-211.

Matthias Hüppauff. Preisbildung für Zinsswaps. "Die Bank", (1990), S. 203-206.

Hans-Joachim Jarchow und Peter Rühmann. Monetäre Außenwirtschaft Bd. I: Monetäre Außenwirtschaftstheorie. 3., neubearb. Aufl., Göttingen 1991.

Hans-Joachim Jarchow. Monetäre Außenwirtschaftstheorie. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1992), S. 231-240.

Joachim Krink. Fremdwährungs-Anleihemodelle und Währungsparitätsänderungen. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1974), S. 33-46.

Günter Lassak. Zins- und Währungsswaps. Frankfurt a.M. 1988.

Paul Lerbinger. Zins-Swaps. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1986), S. 461-462.

Ivanka Petkova. Instrumente der Wechselkurssicherung. "Das Wirtschaftsstudium", (1993), S. 181-183.

Burkhard Vosshenrich. Devisentermingeschäft: Kurssicherungsinstrument und Spekulationsvehikel. "Die Bank", (1987), S. 447-452.

Hartmut Walz und Marco J. Menichetti. Kriterien zur Bewertung von Doppelwährungsanleihen. "Die Bank", (1987), S. 552-557.

2.3. Management verzinslicher Finanztitel

2.3.1. Definition des Marktzinsrisikos

Ein wesentliches Ziel der Kapitalanlage in verzinslichen Finanztiteln besteht darin, gegenwärtig für Investitions- und Konsumzwecke nicht benötigtes Kapital zu einem möglichst hohen Zinssatz so lange anzulegen, bis es ausgegeben werden soll. Für denjenigen, der das Kapital in Form eines Kredites erhält, gilt der entgegengesetzte Sachverhalt. Offensichtlich ist es also neben der Maximierung bzw. Minimierung der Kapitalverzinsung wichtig, die Zeitpunkte und die Volumina der Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme mit den Finanzplänen der Beteiligten in Übereinstimmung zu bringen. Dabei sind meistens zwei Punkte problematisch: Zum einen können Zeitpunkte und Volumina des Kapitalbedarfs bzw. des Kapitalüberschusses nicht genau vorhergesagt werden. Ferner sind möglicherweise auch die mit den Finanztiteln verbundenen zukünftigen Zahlungen nicht sicher.

Das Management verzinslicher Finanztitel kann helfen, die zuletzt genannte Problematik zu lösen. Es wird also davon ausgegangen, daß die Finanzpläne vorgeben, wann und in welcher Höhe Kapital zur Anlage bereit steht und wann und in welcher Höhe Kapital benötigt wird. Aufgabe ist es, den Kauf und Verkauf von Finanztiteln bezüglich dieser Vorgaben zu optimieren. Darüber hinaus ist es Aufgabe des Wertpapiermanagements, Risiken aus Abweichungen von den vorgegebenen Plänen transparent zu machen, um dann ggf. Maßnahmen zur Reduzierung dieser Risiken aufzuzeigen.

Die folgenden **Möglichkeiten der Definition des Zinsänderungsrisikos** machen deutlich, daß es keine einheitlich anerkannte Sichtweise gibt, was eigentlich unter "dem Zinsänderungsrisiko" zu verstehen ist. Die Konsequenz daraus ist, daß auch unterschiedliche Ansätze zur Quantifizierung und Steuerung dieser Risikoart (z.B. in Kreditinstituten) nebeneinander bestehen.

- Das Zinsänderungsrisiko entspricht der Verlustgefahr, "die aus einer möglichen unvorhergesehenen Änderung des am Kapitalmarkt herrschenden Zinssatzes bzw. aus nicht antizipierten Verschiebungen der herrschenden Zinsstruktur resultier(t)". (Bernd Rudolph. Planungs- und Kontrollrechnungen zur Begrenzung von Zinsänderungsrisiken. Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Kapitaltheorie. Nr. 2, Frankfurt a.M. 1981, S. 1.)

- "Die Möglichkeit, daß aufgrund sich ändernder Zinskurven (Höhe und Struktur der Marktzinsen) die realisierte Rentabilität in einem Planungszeitraum kleiner ausfällt als die geplante, wird als Zinsänderungsrisiko bezeichnet." (Hans-Rudolf Flesch, Friedrich Piaskowski und Christian R. Sièvi. Erfolgsquellensteuerung durch Effektivzinsen im Konzept der Wertsteuerung. "Die Bank", (1984), S. 357-366, hier S. 362.)

- "Deshalb wollen wir hier Zinsänderungsrisiken ganz allgemein als partielle Bankrisiken ansehen, deren Entstehungsursachen in Änderungen relevanter Zinssätze liegen. (...), so lassen sich Zinsänderungsrisiken als Unsicherheiten von negativ empfundenen Werten verstehen, die aus möglichen Fluktuationen relevanter Marktzinssätze resultieren." (Albert Kugler. Konzeptionelle Ansätze zur Analyse und Gestaltung von Zinsänderungsrisiken in Kreditinstituten. Frankfurt a.M. 1985, S. 136.)

- "(...) so kann das Zinsänderungsrisiko zusammenfassend definiert werden als die Gefahr, daß die erzielte (zinsänderungsabhängige) Bruttozinsspanne aufgrund von Zinsänderungen negativ von der erwarteten und angestrebten (zinsänderungsabhängigen) Bruttozinsspanne abweicht." (Bernd Rolfes. Die Steuerung von Zinsänderungsrisiken in Kreditinstituten. Frankfurt a.M. 1985, S. 20.)

- Bessler definiert das Zinsrisiko als das "aus einer Zinsänderung resultierende Risiko, daß das realisierte vom geplanten Eigenkapital am Periodenende abweicht" wobei sich das geplante Eigenkapital auf der Basis konstanter Marktzinssätze errechnet. Es basiert nach Bessler auf dem Eigenkapital am Periodenanfang, dem Zinsüberschuß der Periode und auf der Wertänderung aller (marktgerecht bewerteten) Titel. (Wolfgang Bessler. Zinsrisikomanagement in Kreditinstituten. Wiesbaden 1989, S. 2.)

Definition des Marktzinsrisikos für Finanztitel

Bei nicht antizipierter Entwicklung der Marktzinssätze weichen die Werte von Finanztiteln von denen ab, die sich bei antizipierter Entwicklung der Marktzinssätze ergeben hätten.

Alternativen zu dieser Definition:

* Das Risiko besteht in der Möglichkeit einer (bzw. jeder) Änderung der Marktzinssätze.

* Erwartete oder prognostizierte Marktzinssätze werden als Referenzszenarium verwendet.

* Es werden ausschließlich die negativen Folgen von Marktzinsänderungen betrachtet.

2.3.2. Strategieauswahl

Für das optimale Management verzinslicher Finanztitel sind zunächst einige Vorüberlegungen anzustellen, die an dieser Stelle aber nicht genauer eruiert werden sollen. Grundsätzlich gilt es zu klären, ob von einem festen oder flexiblen Planungshorizont des Anlegers ausgegangen werden soll, welche Risikoeinstellung dieser hat und ob das Ziel in einer Teil-, Voll-Immunisierung oder bedingten Immunisierung liegt.

2.3.3. Management auf der Grundlage von Durchschnittsrenditen

2.3.3.1. Duration

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Möglichkeiten und Grenzen der Kennzahl "Duration" zu erarbeiten. Ferner wird gezeigt, wie mittels der Duration die Immunisierung von Anleihe-Depots gegen Marktzinsänderungen erfolgen kann.

Die Kennzahl "Duration" (oder durchschnittliche Bindungsdauer des eingesetzten Kapitals oder mittlere Selbstliquidationsperiode) hat sowohl in der Theorie als auch in der Praxis eine recht große Bedeutung erlangt. Daher soll im weiteren untersucht werden, welche Möglichkeiten und Grenzen mit dieser von F. Macaulay entwickelten Kennzahl verbunden sind.

2.3.3.1.1. Berechnung der Duration

Die Formel zur Berechnung der Duration ist einprägsam, wenn man sich an die klassische Formel zur Berechnung des Barwertes einer Zahlungsreihe erinnert. Lediglich im Zähler erfolgt hier eine Gewichtung der abgezinsten Zahlungen mit den Zeitpunkten, zu denen die Zahlungen erwartet werden.

Für das erste Beispiel ergibt sich eine "durchschnittliche Bindungsdauer" von 2,88 (Jahren). Dieser Wert ist kleiner als 3 Jahre, da auch vor Fälligkeit der Anleihe (in 3 Jahren) Zahlungen erfolgen. Das können - wie in diesem Fall - Zinszahlungen sein, aber auch zwischenzeitliche Tilgungszahlungen wären zu berücksichtigen.

Wie aus den beiden Beispielen ersichtlich, ist die Duration umso niedriger, je höher die Zinszahlungen (Kupons) sind. Die Duration eines Wertpapiers kann folglich nur dann gleich der Restlaufzeit sein, wenn bis zum Ende der Laufzeit der Anleihe keine zwischenzeitlichen Zahlungen erfolgen. Dies ist beispielsweise bei einem Zerobond der Fall, aber auch bei festverzinslichen Wertpapieren mit jährlicher Zinszahlung und einer Restlaufzeit von kleiner oder gleich einem Jahr.

Weitere Zusammenhänge zwischen den Variablen der Formel und der Duration sind:
Je kürzer die Restlaufzeit t, desto geringer die Duration.
Je höher der Marktzinssatz r, desto geringer die Duration.

2.3.3.1.2. Einschätzung der Kursänderung über die Duration

Die Duration gilt als geeignete Kennzahl zur Beurteilung des mit Kupon-Anleihen verbundenen Zinsrisikos. So ist unmittelbar einsichtig, daß mit zunehmender Bindungsdauer des eingesetzten Kapitals das mit der Anleihe verbundene Zinsrisiko zunimmt.

Einen Eindruck über die Wirkungen von Marktzinsänderungen auf den Kurswert von Anleihen, also die Sensitivität von Kursen festverzinslicher Wertpapiere, kann man sich verschaffen, indem man die Formel zur Ermittlung des Barwertes nach r ableitet. Das Ergebnis der Ableitung zeigt, daß für die Berechnung der Sensitivität des Barwertes die Kennzahl Duration verwendet werden kann. So zeigt das Beispiel, daß bei einer Marktzinssenkung von einem Prozent mit einer Barwerterhöhung um 2,39% (bezogen auf den Nominalwert i.H.v. 100%) zu rechnen ist. Eine andere Möglichkeit, die Veränderung des Barwertes auszudrücken, besteht darin, die Barwertänderung bezogen auf den Barwert vor Änderung zu berechnen. In dem Beispiel beläuft sich dieser Wert auf 2,67 Prozent. Das bedeutet, daß bei einer Marktzinssenkung von einem Prozent mit einer Veränderung des Barwertes um 2,67% (jetzt bezogen auf den ursprünglichen Barwert) zu rechnen ist. Der Unterschied wird deutlich, wenn man das Beispiel nachvollzieht. Grundsätzlich gilt für beide Varianten, die selbstverständlich zum gleichen Ergebnis führen, daß sie lediglich eine Approximation der Barwertänderungen ermöglichen, worauf auf den folgenden Seiten noch näher einzugehen ist.

Im Rahmen der zuletzt gezeigten Formel zur Abschätzung der Barwertänderungen verzinslicher Titel wird häufig auch eine andere Kennzahl verwendet, nämlich die sogenannte "Modified" Duration. Die Bedeutung dieser Kennzahl ergibt sich aus den folgenden Seiten.

Berechnung der Duration

Duration = durchschnittliche Bindungsdauer eines Finanztitels

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t\,Z_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t\,Z_t}{(1+r)^t}}{P_0}$$

Laufzeit	= T	= 3 Jahre (endfällig)
Nominalzinssatz		= 4%
Zinszahlung		= jährlich
Marktzinssatz	= r	= 8%
Duration	= D	= ?

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{3} \frac{t\,Z_t}{(1+0{,}08)^t}}{\sum_{t=1}^{3} \frac{Z_t}{(1+0{,}08)^t}}$$

$$D = \frac{1\frac{0{,}04}{(1+0{,}08)^1} + 2\frac{0{,}04}{(1+0{,}08)^2} + 3\frac{1{,}04}{(1+0{,}08)^3}}{\frac{0{,}04}{(1+0{,}08)^1} + \frac{0{,}04}{(1+0{,}08)^2} + \frac{1{,}04}{(1+0{,}08)^3}} = \frac{2{,}5823}{0{,}8969} = 2{,}88$$

Berechnung der Duration einer Kupon-Anleihe mit einem Kupon von 12%, alle anderen Daten wie oben:

$$D = \frac{1\frac{0{,}12}{(1+0{,}08)^1} + 2\frac{0{,}12}{(1+0{,}08)^2} + 3\frac{1{,}12}{(1+0{,}08)^3}}{\frac{0{,}12}{(1+0{,}08)^1} + \frac{0{,}12}{(1+0{,}08)^2} + \frac{1{,}12}{(1+0{,}08)^3}} = 2{,}71$$

Duration = "mit den Barwerten der Zahlungen gewichtete Zahlungszeitpunkte"

Einschätzung der Kursänderung festverzinslicher Wertpapiere bei Änderung des Marktzinssatzes r über die Duration I

Die Ableitung der Formel

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

nach r ergibt:

$$\frac{\Delta P_0}{\Delta r} = -\frac{1}{(1+r)} \sum_{t=1}^{T} \frac{t\,Z_t}{(1+r)^t}$$

daraus folgt für absolute Barwertänderungen bei Marktzinsänderungen:

$$\Delta P_{0_{\Delta r}} = -\frac{D}{(1+r)}\,P_0\,\Delta r$$

und für relative Barwertänderungen bei Marktzinsänderungen:

$$\frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0} = -\frac{D}{(1+r)}\,\Delta r$$

In der Literatur wird häufig die sogenannte Modified Duration verwendet:

$$MD = \frac{D}{1+r}$$

daraus folgt für absolute Barwertänderungen bei Marktzinsänderungen:

$$\Delta P_{0_{\Delta r}} = -MD\,P_0\,\Delta r$$

und für relative Barwertänderungen bei Marktzinsänderungen:

$$\frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0} = -MD\,\Delta r$$

Der Barwert nach Marktzinsänderungen ergibt sich dann über:

$$P_{0_{\Delta r}} = P_0 + \Delta P_{0_{\Delta r}} = P_0 \left(1 + \frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0}\right)$$

Einschätzung der Kursänderung festverzinslicher Wertpapiere bei Änderung des Marktzinssatzes r über die Duration II

Laufzeit	= T	= 3 Jahre (endfällig)
Nominalzinssatz		= 4%
Zinszahlung		= jährlich
Marktzinssatz	= r	= 8 %
Duration	= D	= 2,88
Kurswert	= P_0	= 89,69%
Marktzinsänderung		= -1%

Berechnung der absoluten Barwertänderung über die Duration:

$$\Delta P_{0\ -1\%} = -\frac{2{,}88}{(1+0{,}08)}\ 0{,}8969 \cdot (-0{,}01) = 0{,}0239 = 2{,}39\%$$

Berechnung der relativen Barwertänderung über die Modified Duration:

$$\frac{\Delta P_{0\ -1\%}}{P_0} = -\frac{2{,}88}{(1+0{,}08)} \cdot (-0{,}01) = 0{,}0267 = 2{,}67\%$$

Der Barwert nach der Marktzinsänderung ist über die Duration berechnet:

$$P_{0\ -1\%} = 0{,}8969 + 0{,}0239 = 0{,}8969\ (1 + 0{,}0267) = 0{,}9208 = 92{,}08\%$$

Wenn die Marktrendite um 1% sinkt, so hätte dies hiernach einen Kursanstieg von ca. 2,39% (bezogen auf 100%) bzw. von ca. 2,67% (bezogen auf den Kurswert in t=0) zur Folge.

Stimmt das Ergebnis? Nein!

Probe:

$$KA_{3,4\%} = \sum_{t=1}^{3} \frac{Z_t}{(1 + r_{3,4\%})^t} = 92{,}13\%$$

2.3.3.1.3. Fehler bei der Einschätzung der Kursänderung

Neben der zuletzt beschriebenen Vorgehensweise zur Abschätzung von Kursänderungen aufgrund von Marktzinsänderungen gibt es einen weiteren Ansatz: Dieser - eigentlich sehr plausible Ansatz - basiert auf der bekannten Formel zur Berechnung des Bar- oder Kurswertes von Zahlungsreihen. Über die Variation des Marktzinssatzes r ergeben sich die damit verbundenen neuen Barwerte der Anleihen.

Im Vergleich zum vorhergehenden Ansatz liegt der Vorteil dieser Berechnungsweise darin, daß die Ergebnisse nicht nur Näherungslösungen darstellen, sondern finanzmathematisch exakt sind. Für eine Einschätzung der Möglichkeiten und Grenzen der zuvor beschriebenen Methode wurde das nachfolgende Beispiel erstellt.

Die beiden Spalten "Marktwert über Duration" und "Marktwert real" zeigen an, welche neuen Marktwerte sich für das exemplarisch gewählte Wertpapier bei den in der zweiten Spalte angegebenen Marktzinsänderungen ergeben. Die unterlegte Spalte verdeutlicht den mit der Verwendung der Duration verbundenen Approximationsfehler, der auch aus der Grafik ersichtlich ist.

Wie die Tabelle zeigt, führt die Verwendung der Duration grundsätzlich zu einer niedrigeren Einschätzung des Barwertes. Das bedeutet, daß die Folgen von Marktzinserhöhungen überschätzt, die von Marktzinssenkungen dagegen unterschätzt werden. Falls also eine Aktivposition mit Hilfe dieses Ansatzes bewertet wird, werden die Risiken aus Marktzinserhöhungen überschätzt, die Chancen aus Marktzinssenkungen unterschätzt. Das könnte zu vorsichtigerem Handeln verleiten. Falls allerdings Passivpositionen bewertet werden, gilt grundsätzlich das Entgegengesetzte.

Es stellt sich abschließend die Frage, warum in diesem Zusammenhang überhaupt die Kennzahl Duration Verwendung findet, da sie doch grundsätzlich zu falschen Ergebnissen führt. Ein Grund kann möglicherweise in dem etwas geringeren Rechenaufwand gesehen werden. Ob diese Begründung zufriedenstellt, soll hier nicht diskutiert werden.

Fehler bei der Einschätzung der Kursänderung über die Duration

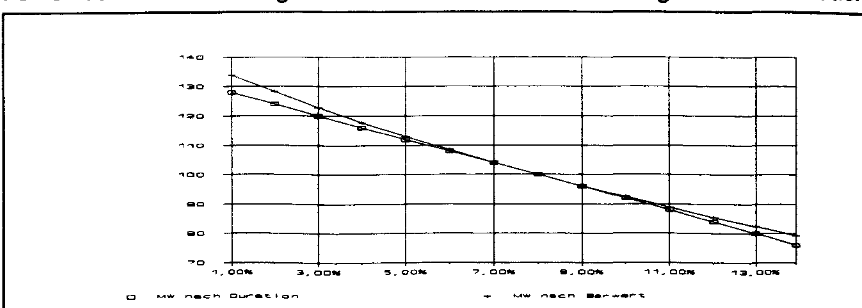
Für ein festverzinsliches Wertpapier sollen die Kursänderungen aufgrund von Marktzinsänderungen (in t=0) ermittelt werden:

Laufzeit	= T	= 5 Jahre (endfällig)
Nominalzinssatz		= 8% (jährliche Zinszahlung)
Marktzinssatz	= r	= in der Ausgangslage 8%
Kurswert	= P_0	= in der Ausgangslage 100%

Werte in t=0			1	2	3	4	5
Rendite:	8,00%		1	2	3	4	5
Duration:	4,31	Zahlungen	8,00	8,00	8,00	8,00	108,00
Barwert	100,00	abgezinst	7,41	6,86	6,35	5,88	73,50
gewichteter Barwert:	431,21	gewichtet	7,41	13,72	19,05	23,52	367,51

Rendite neu	Rendite Differenz	Marktwert über Duration	Fehler Duration	Marktwert real	1	2	3	4	5
1,00%	-7,00%	127,95	-6,03	133,97	7,92	7,84	7,76	7,69	102,76
2,00%	-6,00%	123,96	-4,32	128,28	7,84	7,69	7,54	7,39	97,82
3,00%	-5,00%	119,96	-2,93	122,90	7,77	7,54	7,32	7,11	93,16
4,00%	-4,00%	115,97	-1,84	117,81	7,69	7,40	7,11	6,84	88,77
5,00%	-3,00%	111,98	-1,01	112,99	7,62	7,26	6,91	6,58	84,62
6,00%	-2,00%	107,99	-0,44	108,42	7,55	7,12	6,72	6,34	80,70
7,00%	-1,00%	103,99	-0,11	104,10	7,48	6,99	6,53	6,10	77,00
8,00%	0,00%	100,00	0,00	100,00	7,41	6,86	6,35	5,88	73,50
9,00%	1,00%	96,01	-0,10	96,11	7,34	6,73	6,18	5,67	70,19
10,00%	2,00%	92,01	-0,40	92,42	7,27	6,61	6,01	5,46	67,06
11,00%	3,00%	88,02	-0,89	88,91	7,21	6,49	5,85	5,27	64,09
12,00%	4,00%	84,03	-1,55	85,58	7,14	6,38	5,69	5,08	61,28
13,00%	5,00%	80,04	-2,38	82,41	7,08	6,27	5,54	4,91	58,62
14,00%	6,00%	76,04	-3,36	79,40	7,02	6,16	5,40	4,74	56,09

Fehler bei der Ermittlung der absoluten Barwertänderung über die Duration:



2.3.3.1.4. Convexity

Die in der deutschsprachigen Literatur vergleichsweise selten behandelte Convexity hat für das moderne Renten-Portfoliomanagement eine nicht unerhebliche Bedeutung. Sie stellt eine Präzisierung des Durationansatzes zur Approximation von marktzinsinduzierten Barwertänderungen dar. Wie bereits gezeigt, wird bei der Approximation der Barwertänderung über die Duration ein systematischer Fehler gemacht, weil ein linearer Zusammenhang zwischen Anleihekurs und Marktzinssatz unterstellt wird. In der Realität weisen die durch Marktzinsveränderungen hervorgerufenen Kursveränderungen jedoch eine konvexe (linksgekrümmte) Beziehung auf, so daß die Berechnung von Barwertveränderungen mittels der Duration zu Schätzfehlern (Tracking Errors) führt. Diese sind umso größer, je stärker die Zinsveränderungen sind. Die Höhe des Bewertungsfehlers kann aus dem Abstand zwischen dem realen Kursverlauf des festverzinslichen Wertpapiers und der mittels Duration geschätzten Preisentwicklung abgelesen werden.

Im Gegensatz zur Duration orientiert sich die Convexity nicht an der Steigung des Kursverlaufs im Ausgangszeitpunkt, sondern approximiert die Krümmung der Barwertänderungskurve, dargestellt im Marktzins/Anleihekurs-Diagramm. Der gekrümmte Verlauf der Kursentwicklung - aufgrund von Marktzinsänderungen - wird im Prinzip über die zweite Ableitung der Barwertformel berücksichtigt.

Im Vergleich zur Durationsformel ist festzustellen, daß der Zähler lediglich um den Term $(t+1)$ und der Nenner um $(1+r)^2$ erweitert wurde. Die so ermittelte Convexity kann dann in die bekannten Preisverändungsgleichungen aufgenommen werden, um eine bessere Abschätzung von Kursänderungen zu erzielen.

Zusammenfassend ist zu der Duration, der Convexity sowie den darauf basierenden Approximationen der Barwertänderungen festzustellen, daß die "klassische" Berechnung der Barwerte bzw. der Barwertänderungen (über den Vorgang der "normalen Abzinsung" der Zahlungen aus dem Wertpapier) zu genaueren Ergebnissen führt. Die angesprochenen Größen haben aber trotzdem ihre Berechtigung, da sie als "Kennzahlen" für die Wertpapierlaufzeit und die Barwertreagibilität Informationen verdichten und somit helfen, Anleihen vergleichbar zu machen.

Einschätzung der Kursänderung festverzinslicher Wertpapiere bei Änderung des Marktzinssatzes r über die Duration und die Convexity I

Die Convexity (C) wird nach folgender Formel errechnet:

$$C = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t\,(t+1)\,Z_t}{(1+r)^t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t\,(t+1)\,Z_t}{(1+r)^t}}{(1+r)^2\, P_0}$$

Die Einschätzung der absoluten Barwertänderung erfolgt über:

$$\Delta P_{0_{\Delta r}} = \left(- \frac{D}{1+r}\,\Delta r + 0{,}5\; C\,(\Delta r)^2\right) P_0$$

Die Einschätzung der relativen Barwertänderung erfolgt über:

$$\frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0} = - \frac{D}{1+r}\,\Delta r + 0{,}5\; C\,(\Delta r)^2$$

In Rückgriff auf die Modified Duration:

$$MD = \frac{D}{1+r}$$

ergibt sich die Einschätzung der absoluten Barwertänderung über:

$$\Delta P_{0_{\Delta r}} = (- MD\,\Delta r + 0{,}5\; C\,(\Delta r)^2)\; P_0$$

und die Einschätzung der relativen Barwertänderung über:

$$\frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0} = - MD\,\Delta r + 0{,}5\; C\,(\Delta r)^2$$

Der Barwert nach Marktzinsänderungen ergibt sich dann über:

$$P_{0_{\Delta r}} = P_0 + \Delta P_{0_{\Delta r}} = P_0 \left(1 + \frac{\Delta P_{0_{\Delta r}}}{P_0}\right)$$

Einschätzung der Kursänderung festverzinslicher Wertpapiere bei Änderung des Marktzinssatzes r über die Duration und die Convexity II

Laufzeit	= T	= 3 Jahre (endfällig)
Nominalzinssatz		= 4% (jährliche Zinszahlung)
Marktzinssatz	= r	= 8%
Kurswert	= P_0	= 89,69%
Duration	= D	= 2,88
Convexity	= C	= ?
Marktzinsänderung		= -1%

$$C = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t\,(t+1)\,Z_t}{(1+0{,}08)^t}}{(1+0{,}08)^2\; 0{,}8969}$$

$$C = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 0{,}04}{(1+0{,}08)^1} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 0{,}04}{(1+0{,}08)^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 1{,}04}{(1+0{,}08)^3}}{(1+0{,}08)^2\; 0{,}8969} = 9{,}737$$

Die absolute Barwertänderung über die Duration und Convexity berechnet ist:

$$\Delta P_{0_{-1\%}} = \left(-\frac{2{,}88}{1+0{,}08} \cdot (-0{,}01) + 0{,}5 \cdot 9{,}737 \cdot (-0{,}01)^2\right) 0{,}8969 = 0{,}0243 = 2{,}43\%$$

Die relative Barwertänderung über die Modified Duration und Convexity berechnet ist:

$$\frac{\Delta P_{0_{-1\%}}}{P_0} = -\frac{2{,}88}{1+0{,}08} \cdot (-0{,}01) + 0{,}5 \cdot 9{,}737 \cdot (-0{,}01)^2 = 0{,}0271 = 2{,}71\%$$

Der Barwert nach der Marktzinsänderung über die Duration und Convexity berechnet ist:

$$P_{0_{-1\%}} = 0{,}8969 + 0{,}0243 = 0{,}8969\,(1 + 0{,}0271) = 0{,}9212 = 92{,}12\%$$

Wenn die Marktrendite um 1% sinkt, so hätte dies hiernach einen Kursanstieg von ca. 2,43% (bezogen auf 100%) bzw. von ca. 2,71% (bezogen auf den Kurswert in t=0) zur Folge. Probe:

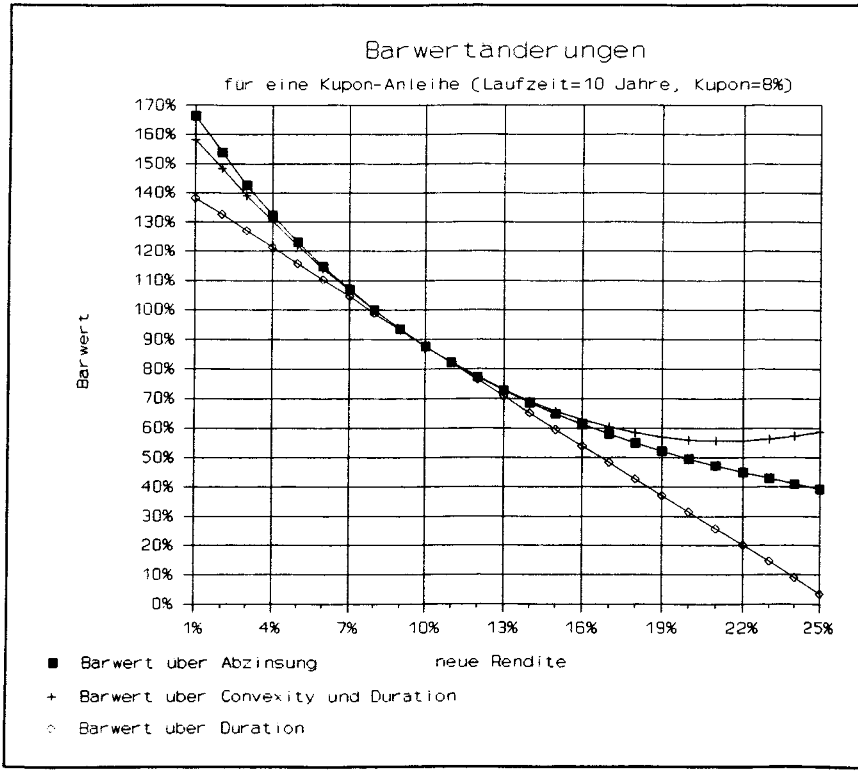
$$KA_{3,4\%} = \sum_{t=1}^{3} \frac{Z_t}{(1 + r_{3,4\%})^t} = 92{,}13\%$$

Fehler bei der Einschätzung der Kursänderung über die Duration und die Convexity

Für folgendes festverzinsliche Wertpapier sollen die Kursänderungen aufgrund von Marktzinsänderungen (in t = 0) über die Duration, über die Duration/Convexity und über "klassisches Abzinsen" eingeschätzt werden:

Laufzeit	= T	= 10 Jahre (endfällig)
Nominalzinssatz		= 8% (jährliche Zinszahlung)
Marktzinssatz	= r	= in der Ausgangslage 10%, dann diverse
Kurswert	= P_0	= in der Ausgangslage 87,71%

Fehler bei der Ermittlung der Barwertänderung über die Convexity und Duration:



2.3.3.1.5. Immunisierungsfunktion der Duration

2.3.3.1.5.1. Betrachtung einer Kupon-Anleihe

Die Einsatzmöglichkeiten der Kennzahl Duration erschöpfen sich aber nicht in dem bisher Gezeigten. Die nach Ansicht des Verfassers wichtigste "Existenzberechtigung" dieser Größe ergibt sich aus der mit ihr verbundenen Immunisierungsfunktion bezüglich des Marktzinsrisikos.

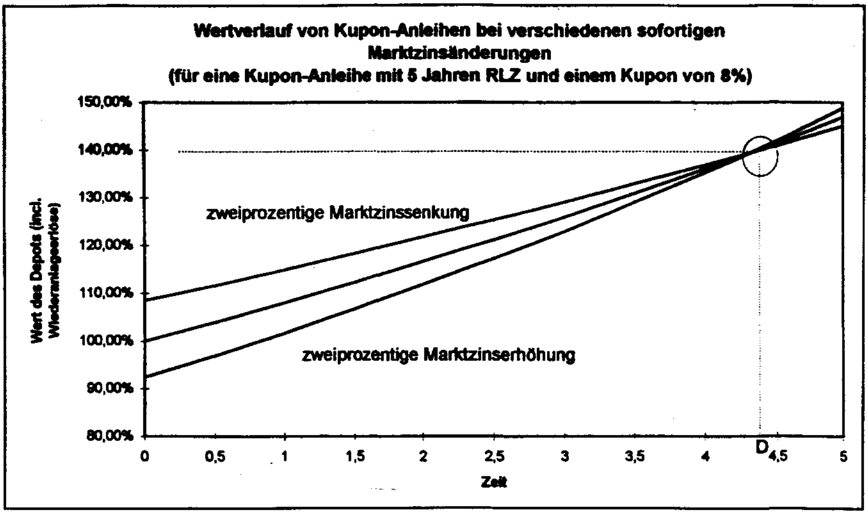
Zu diesem Zweck wird der Wertverlauf eines Depots betrachtet, das aus einer einzigen Anleihe besteht. Vereinfachend wird davon ausgegangen, daß sich die Marktrendite in t=0 sofort verändern kann, dann aber für den Rest der Laufzeit konstant bleibt. Die Ausgangsfrage ist, ob es für den Wert eines Depots einen Vorteil oder Nachteil darstellt, wenn sich der Marktzinssatz in t=0 um beispielsweise einen Prozentpunkt erhöht.

Die Folge einer Marktzinsänderung in t=0 ist, daß sich ein anderer Wertverlauf einerseits daraus ergibt, daß der Kurswert(verlauf) sich ändert. Andererseits ändern sich aber auch die Wiederanlageerträge (Zinserträge auf die zwischenzeitlichen Kuponzahlungen), was grundsätzlich den erstgenannten Effekt mehr oder weniger kompensiert.

Was bedeutet das für den Inhaber des hier betrachteten Wertpapiers? Aus der Grafik ist ersichtlich, daß auf kurze Sicht eine Zinserhöhung für den Depotinhaber ungünstig ist, da er bei Verkauf der Anleihe Kursverluste hinzunehmen hätte. Auf lange Sicht hingegen ist eine Zinserhöhung günstig, da die fälligen Zinszahlungen zu den dann höheren Zinssätzen wiederangelegt werden könnten. Interessant ist nun, daß sich diese beiden Effekte im Zeitpunkt D kompensieren. Die Duration (D) gibt also an, wann der Wert eines Wertpapiers gegen Zinsänderungen in t=0 immun ist.

Immunisierungsfunktion der Duration

Eine Kupon-Anleihe ist in t = D gegen Marktzinsänderungen in t = 0 immun:



2.3.3.1.5.2. Immunisierung eines Wertpapierportfolios

Die Duration läßt sich nicht nur bezüglich eines Wertpapiers errechnen, sondern auch für ein Depot, bestehend aus einer Vielzahl verschiedener verzinslicher Finanztitel. Für die Berechnung gibt es zwei Möglichkeiten. Es könnte zunächst die Duration für jedes einzelne Wertpapier berechnet werden. Wenn diese Werte dann mit ihrem Anteil am Gesamtportfolio gewichtet werden, ergibt sich die Duration des Depots. Die andere Möglichkeit besteht darin, zunächst den Gesamtzahlungsstrom des Portfolios zu ermitteln. Daraus kann dann direkt die Duration des Gesamtdepots berechnet werden.

Die Immunisierungsfunktion der Duration besteht darin, daß der Depotinhaber die Duration des Depots so wählt, daß sie mit seinem persönlichen Planungshorizont übereinstimmt. Bei Gültigkeit der eingangs aufgeführten Annahmen kann er dann sicher sein, daß er über den berechneten Endwert in D tatsächlich verfügen kann.

zu I) Im folgenden Beispiel "Duration-Gap für ein Wertpapierportfolio" besteht das Depot aus Wertpapieren mit einem Nominalwert von 47.000 und einem Kurswert von 40.584,67. Wie aus den Rechnungen ersichtlich, kann die Duration des Gesamtdepots (3,39 Jahre) sowohl über die Gewichtung der einzelnen Durations der Wertpapiere (Alternative 1) als auch über den Gesamtzahlungsstrom (Alternative 2) berechnet werden. Ziel ist es, das mit diesem Depot verbundene Marktzinsrisiko zu ermitteln, um es dann gegen Marktzinsänderungen in $t=0$ zu immunisieren. In der Ausgangssituation beträgt der Marktzinssatz 10 Prozent. Als Planungshorizont seien 5 Jahre vorgegeben.

zu II) Wenn das Depot nicht immunisiert würde, ergäben sich entsprechend der Marktzinsänderung in $t=0$ unterschiedliche Wertverläufe des Depots. Für drei Szenarien sind die Wertverläufe aus der Grafik ersichtlich. Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß sich die drei Kurven in dem oder besser nahe dem Zeitpunkt $t=3{,}39$ (also der gegenwärtigen Duration) schneiden. In der Ausgangssituation ist das Depot somit gegen heutige Marktzinsänderungen bezüglich dieses Zeitpunktes immun. Die Tabelle enthält die Barwerte für verschiedene Marktzinsszenarien und Beobachtungszeitpunkte. Für $t=3{,}4$ ist der Barwert für alle Szenarien ähnlich. Hingegen ist eine Spannbreite der Barwerte bezogen auf den Zeitpunkt $t=5$ (dem angestrebten Immunisierungszeitpunkt) von ca. 61.746 bis zu 69.375 festzustellen. Diese Spannbreite zu reduzieren, ist die Absicht der folgenden Umschichtungsmaßnahmen.

zu III) Die Umschichtungsmaßnahmen basieren auf der Grundidee, soviele Wertpapiere mit einer geringen Duration zu verkaufen und entsprechende mit einer langen Duration zu kaufen, bis die durchschnittliche Duration des Depots mit dem Planungshorizont des Anlegers von 5 Jahren übereinstimmt. Dafür ist es unerheblich, wie die Umschichtungsmaßnahmen konkret durchgeführt werden. In diesem Fall bietet sich eine Umschichtung des Wertpapiers mit 2 Jahren Laufzeit in den Zerobond mit 8 Jahren Laufzeit an. Eine Umschichtung von 1.000 (Kurswert) erhöht dann die Duration des Depots um 0,150436. Dementsprechend führt eine Umschichtung von 10.700 zu einer Duration von $D=5$. Es ergibt sich dann für das Gesamtdepot zwar ein neuer Nominalwert, der Kurswert des Depots ändert sich aber weder im Zeitpunkt $t=0$ noch in der Folgezeit, vorausgesetzt das Marktzinsniveau bleibt bei 10 Prozent.

zu IV) Als Ergebnis erhält man - analog zu der oben gezeigten Darstellungsform - andere Barwertverläufe für die verschiedenen Marktzinsszenarien. Der Schnittpunkt der Kurven liegt nunmehr bei 5 Jahren. Die Tabelle zeigt, daß sich die Spannbreite der Werte im Immunisierungszeitpunkt t=5 von 65.362 bis 65.643 deutlich verringert hat. Ein weiterer interessanter Effekt liegt darin, daß die Immunisierungsmaßnahme dazu geführt hat, daß der Depotwert von 65.362 (der Fall, in dem sich der Marktzinssatz nicht ändert) <u>mindestens</u> erreicht wird. Sowohl bei Marktzinserhöhungen wie auch bei Marktzinssenkungen ergibt sich für t=5 ein höherer Depotwert.

Die weiteren Überlegungen beziehen sich auf die Frage, ob die Immunisierungsfunktion der Duration auch bei Aufhebung der (realitätsfernen) Annahme gilt, daß Marktzinsänderungen nur in t=0 möglich sind.

Die grundlegende Problematik besteht darin, daß sich die Duration eines Depots mit Kupon-Anleihen im Zeitverlauf verschiebt. Um diesen Effekt zu veranschaulichen, wurden für ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Ursprungslaufzeit von 10 Jahren die Durations im Zeitablauf berechnet. So beträgt die Duration im Zeitpunkt t=0 7,25 Jahre. Aus heutiger Sicht ist das Wertpapier somit gegen Marktzinsrisiken immun, wenn der Planungshorizont des Anlegers 7,25 Jahre beträgt. In einem Jahr hingegen beträgt die Duration in dem Beispiel noch 6,75 Jahre. Der Immunisierungszeitpunkt hat sich also verschoben, aus heutiger Sicht auf 6,75 + 1 = 7,75 Jahre.

Aus der Verschiebung der Duration im Zeitablauf ergibt sich die Notwendigkeit, die Duration des Depots durch entsprechende Umschichtungsmaßnahmen in Zeitabständen (bzw. aus theoretischer Sicht permanent) dem Planungshorizont anzupassen.

Duration-Gap für ein Wertpapierportfolio I

Ziel: Sicherung eines Wertpapierdepots gegen Marktzinsänderungen

Vorgabe: Festlegung eines festen Planungshorizonts notwendig

Bedingung: Planungshorizont = Duration des Wertpapierdepots (hier 5 Jahre)

1. Schritt: Alternative Berechnungen der Duration des Depots (vor Immunisierung):

Management eines Wertpapierportefeuilles:	Marktrendite: 10%

ALTERNATIVE 1

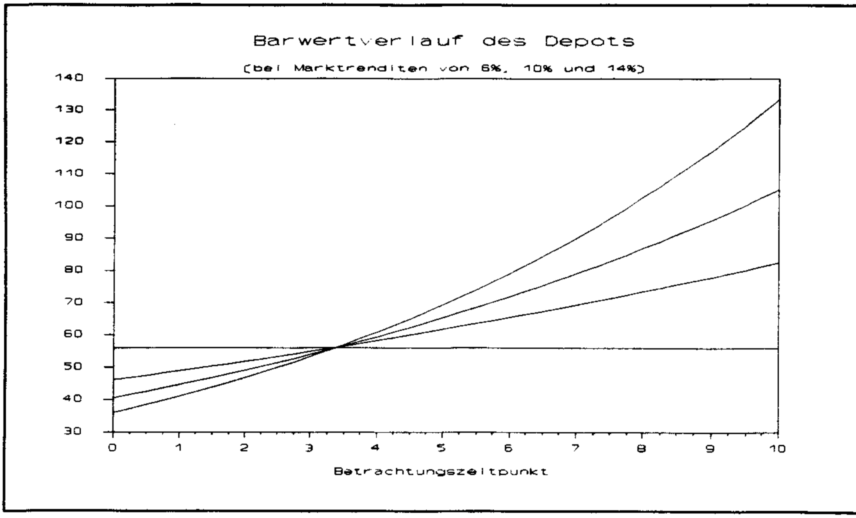
	Nominalwert in Euro	Kurswert in %	Kurswert in Euro	Anteil	Verzinsung	RLZ	Duration	Duration gewichtet	Hilfsgröße	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5000,00	92,42%	4620,92	11,39%	8,00%	5	4,28	0,49	92,42	7,27	6,61	6,01	5,46	67,06			
									395,68	7,27	13,22	18,03	21,86	335,30			
2	6000,00	46,65%	2799,04	6,90%	0,00%	8	8,00	0,55	46,65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	46,65
									373,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	373,21
3	11000,00	103,47%	11381,82	28,04%	12,00%	2	1,89	0,53	103,47	10,91	92,56						
									196,03	10,91	185,12						
4	5000,00	85,39%	4269,74	10,52%	7,00%	7	5,65	0,59	85,39	6,36	5,79	5,26	4,78	4,35	3,95	54,91	
									482,63	6,36	11,57	15,78	19,12	21,73	23,71	384,36	
5	20000,00	87,57%	17513,15	43,15%	5,00%	3	2,85	1,23	87,57	4,55	4,13	78,89					
									249,47	4,55	8,26	236,66					
Summe	47000,00		40584,67	100,00%				3,39									

ALTERNATIVE 2

	Nominalwert in Euro		Kurswert in Euro		Verzinsung	RLZ				1	2	3	4	5	6	7	8
1	5000,00				8,00%	5				400,00	400,00	400,00	400,00	5400,00			
2	6000,00				0,00%	8				0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6000,00
3	11000,00				12,00%	2				1320,00	12320,00						
4	5000,00				7,00%	7				350,00	350,00	350,00	350,00	350,00	350,00	5350,00	
5	20000,00				5,00%	3				1000,00	1000,00	21000,00					
Summe	47000,00		40584,67					3,39	Summe	3070,00	14070,00	21750,00	750,00	5750,00	350,00	5350,0	6000,00
									abgezinst	2790,91	11628,10	16341,10	512,26	3570,30	197,57	2745,4	2799,04
									abgezinst·t	2791	23256	49023	2049	17851	1185	19218	22392

Duration-Gap für ein Wertpapierportfolio II

Der Barwertverlauf vor Immunisierung ergibt sich für einige Marktzinsänderungen wie folgt:



	Depot-Barwert	Zahlungsüberschüsse aus dem Wertpapier-Depot							
		3070	14070	21750	750	5750	350	5350	6000
Marktrendite 10,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	56117	3859	16078	22595	708	4937	273	3796	3870
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	49107	3377	14070	19773	620	4320	239	3322	3387
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	65362	4495	18727	26318	825	5750	318	4421	4508
Marktrendite 6,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	56250	3531	15266	22263	724	5238	301	4338	4589
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	51843	3254	14070	20519	667	4828	277	3998	4230
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	61746	3876	16758	24438	795	5750	330	4761	5038
Marktrendite 14,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	56254	4204	16903	22920	693	4663	249	3338	3284
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	46826	3500	14070	19079	577	3881	207	2779	2734
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	69375	5185	20845	28266	855	5750	307	4117	4050

Duration-Gap für ein Wertpapierportfolio III

Ziel: Immunisierung des Depots gegen Marktzinsänderungen (in $t=0$) für einen beliebigen Planungszeitpunkt

Beispiel: Planungsperiode = 5 Jahre

Frage: Wie muß die Depot-Zusammensetzung geändert werden?

$3{,}39 = D_G = D_1\,A_1 + \ldots + D_5\,A_5$ (augenblickliche Duration)
$5{,}00 = D_G = D_1\,A_1 + \ldots + D_5\,A_5$ (beabsichtigte Duration)

* Umschichtung von der Kupon-Anleihe Nr. 3 (2 Jahre RLZ) in den Zerobond Nr. 2 (8 Jahre RLZ)
* Umschichtung von Euro 1 Kurswert erhöht die Duration um 0,000150436

$$\Delta D = \frac{D_{zu\ kaufendes\ WP} - D_{zu\ verkaufendes\ WP}}{Kurswert\ des\ Depots} = \frac{8 - 1{,}89}{40.584{,}67} = 0{,}000150436$$

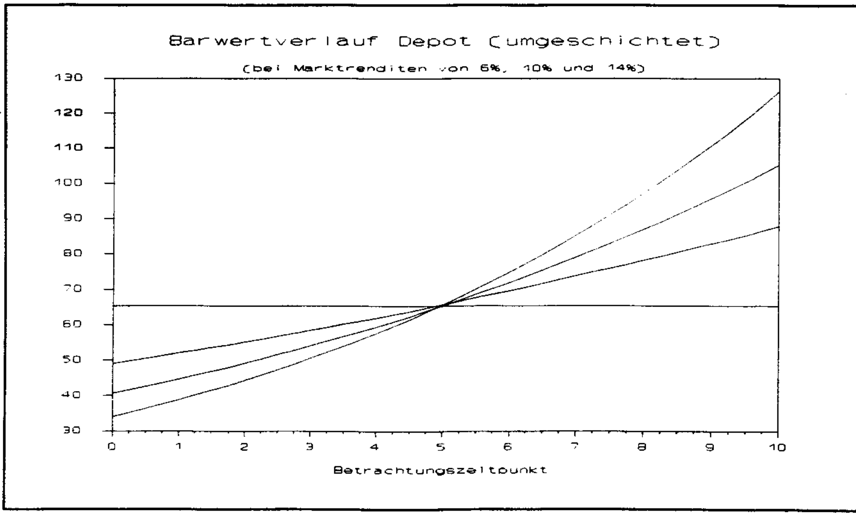
* Bestimmung des umzuschichtenden Kurswertes nach:
(5 - 3,39) / 0,000150436 = 10.700

Das Depot nach Umschichtung hat folgendes Aussehen:

Management eines Wertpapierportefeuilles:						Marktrendite:			10%								
ALTERNATIVE 1																	
	Nominalwert in Euro	Kurswert in %	Kurswert in Euro	Anteil	Verzinsung	LZ	Duration	Duration gewichtet	Hilfsgröße	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5000,00	92,42%	4620,92	11,39%	8,00%	5	4,28	0,49	92,42	7,27	6,61	6,01	5,46	67,06			
									395,68	7,27	13,22	18,03	21,86	335,30			
2	28936,40	46,65%	13499,04	33,26%	0,00%	8	8,00	2,66	46,65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	46,65
									373,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	373,21
3	658,95	103,47%	681,82	1,68%	12,00%	2	1,89	0,03	103,47	10,91	92,56						
									196,03	10,91	185,12						
4	5000,00	85,39%	4269,74	10,52%	7,00%	7	5,65	0,59	85,39	6,36	5,79	5,26	4,78	4,35	3,95	54,91	
									482,63	6,36	11,57	15,78	19,12	21,73	23,71	384,36	
5	20000,00	87,57%	17513,15	43,15%	5,00%	3	2,85	1,23	87,57	4,55	4,13	78,89					
									249,47	4,55	8,26	236,66					
Summe	59595,35		40584,67	100,00%			3,39	5,00									
ALTERNATIVE 2																	
	Nominalwert in Euro		Kurswert in Euro		Verzinsung	LZ		Duration		1	2	3	4	5	6	7	8
1	5000,00				8,00%	5				400,00	400,00	400,00	400,00	5400,00			
2	28936,40				0,00%	8				0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	28936
3	658,95				12,00%	2				79,07	738,02						
4	5000,00				7,00%	7				350,00	350,00	350,00	350,00	350,00	350,00	5350,00	
5	20000,00				5,00%	3				1000,00	1000,00	21000,00					
									Summe	1829,07	2488,02	21750,00	750,00	5750,00	350,00	5350,00	28936
Summe	59595,35		40584,67					5,00	abgezinst	1662,79	2056,22	16341,10	512,26	3570,30	197,57	2745,40	13499
									abgezinst t	1662,79	4112,44	49023,29	2048,04	17851,49	1185,40	19217,77	107992

Duration-Gap für ein Wertpapierportfolio IV

Der Barwertverlauf nach Immunisierung ergibt sich für einige Marktzinsänderungen wie folgt:

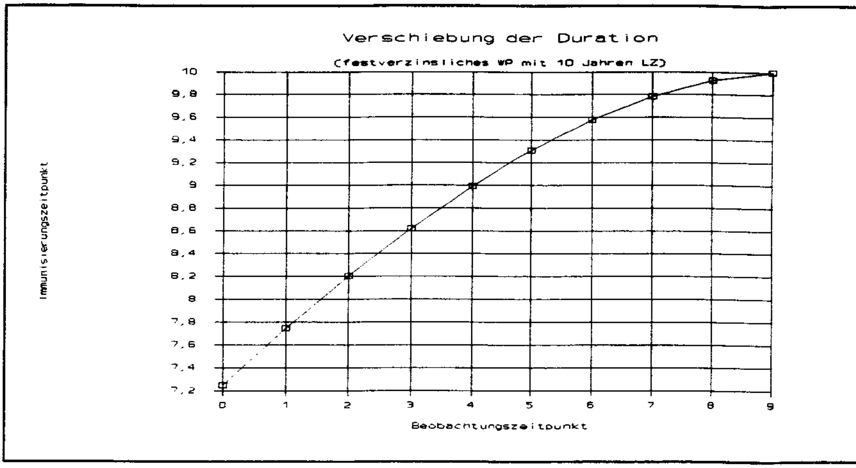


	Depot-Barwert	Zahlungsüberschüsse aus dem Wertpapier-Depot							
		1829	2488	21750	750	5750	350	5350	28936
Marktrendite 10,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	56117	2299	2843	22595	708	4937	273	3796	18665
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	49107	2012	2488	19773	620	4320	239	3322	16334
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	65362	2678	3312	26318	825	5750	318	4421	21740
Marktrendite 6,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	59800	2104	2699	22263	724	5238	301	4338	22133
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	55115	1939	2488	20519	667	4828	277	3998	20399
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	65643	2309	2963	24438	795	5750	330	4761	24296
Marktrendite 14,00%	in t = 3,4	2,4	1,4	0,4	-0,6	-1,6	-2,6	-3,6	-4,6
	53194	2505	2989	22920	693	4663	249	3338	15837
	in t = 2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0
	44279	2085	2488	19079	577	3881	207	2779	13183
	in t = 5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	-1,0	-2,0	-3,0
	65602	3089	3686	28266	855	5750	307	4117	19531

Verschiebung der Duration im Zeitablauf

Gilt die Immunisierungsfunktion der Duration auch bei mehreren Marktzinsänderungen während des Planungszeitraumes?

Problem: Die Durations verschieben sich ("Vorweglaufen der Duration")



Beobachtungs-Zeitpunkt	Restlaufzeit	Duration	Immunisierungs-Zeitpunkt von t=0
0	10	7,25	7,25
1	9	6,75	7,75
2	8	6,21	8,21
3	7	5,62	8,62
4	6	4,99	8,99
5	5	4,31	9,31
6	4	3,58	9,58
7	3	2,78	9,78
8	2	1,93	9,93
9	1	1,00	10,00

Lösung: Umschichtungsmaßnahmen während der Laufzeit

2.3.3.1.6. Probleme des Duration-Ansatzes

Meist werden zwei wesentliche Kritikpunkte genannt, die eine Anwendung des Duration-Ansatzes in der Praxis erschweren, wenn nicht sogar unmöglich erscheinen lassen.

Der erste wesentliche Kritikpunkt liegt darin, daß die Duration-Ansätze meist von einer flachen Zinsstrukturkurve ausgehen. Es wird also unterstellt, daß der Marktzinssatz r für alle Laufzeiten identisch ist und bleibt. Wie die angegebene "normale" Zinsstrukturkurve zeigt, war dieses in der Vergangenheit in der Regel aber nicht der Fall. Nicht nur, daß die Zinsstrukturkurve meist nicht flach ist, sie kann sich darüberhinaus auch drehen sowie ihre Form verändern. Diese in der Praxis zu beobachtenden Phänomene bestimmen das Marktzinsrisiko mit, werden aber in den einfachen Duration-Ansätzen vernachlässigt. In weiterführenden Ansätzen wird zwar gezeigt, wie für bestimmte Fragestellungen diese Annahme aufgehoben werden kann, allerdings sind diese Ansätze dann deutlich komplexer, so daß diesbezüglich auf die Literatur verwiesen werden soll.

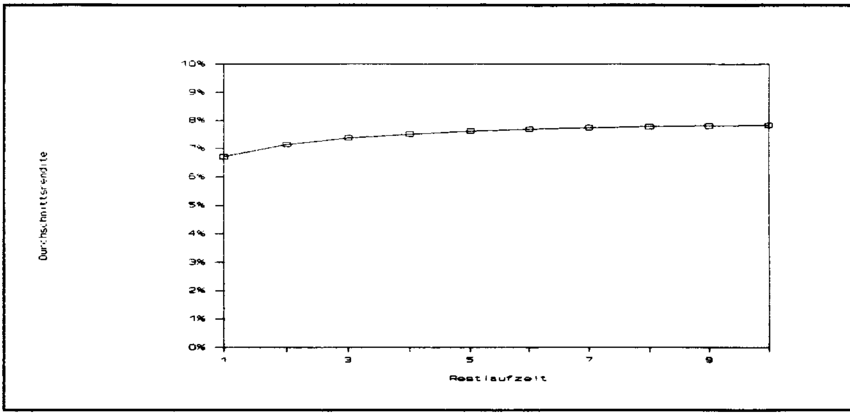
Ein weiterer, schon angesprochener Kritikpunkt im Rahmen bestimmter Fragestellungen liegt darin, daß die Abschätzung der Barwertänderung über die Duration immer nur eine Approximation ist. Das liegt darin begründet, daß diesem Ansatz eine Elastizitätsbetrachtung zugrunde liegt. Letztlich wird ausschließlich die Steigung des Barwertverlaufes in einem spezifischen Punkt (dem gegenwärtigen Barwert) berechnet.

Probleme des (einfachen) Duration-Ansatzes

* Was ist der Marktzinssatz r?

* Problematik der Unterstellung einer gegenwärtig und zukünftig flachen Zinsstrukturkurve.

Die durchschnittliche Zinsstrukturkurve hat folgenden Verlauf:



* Die Abschätzung der Barwertänderung über die Duration stellt lediglich eine Approximation dar.

<u>**Fazit:**</u> **Verwendung von Spot Rates und Forward Rates auch im Wertpapiermanagement**

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Berechnen Sie für die angegebenen Wertpapiere
   a) den gegenwärtigen Barwert,
   b) die Duration,
   c) die Modified Duration,
   d) die Convexity,
   e) die absolute Barwertänderung über die Duration,
   f) die relative Barwertänderung über die Modified Duration,
   g) die absolute Barwertänderung über die Duration und Convexity,
   h) die relative Barwertänderung über die Modified Duration und Convexity,
   i) die absolute Barwertänderung über den normalen Vorgang des Abzinsens,
   j) die relative Barwertänderung über den normalen Vorgang des Abzinsens
   k) und den neuen Barwert über den normalen Vorgang des Abzinsens.

Gehen Sie bei der Berechnung der Barwertänderungen von einer 2%-igen Marktzinserhöhung ($\text{Marktzinssatz}_{neu}$ = 9%) aus.

Marktzinssatz = 7%			
WP-Nr.	1	2	3
Laufzeit/Jahre	2	8	4
Kupon	7%	12%	5%
Zinszahlung	jährlich	jährlich	jährlich

Wie sind die Unterschiede in den Ergebnissen zu erklären? Interpretieren Sie die einzelnen Ergebnisse insbesondere auch in bezug zueinander.

B) Diskutieren Sie Möglichkeiten der Definition des Marktzinsrisikos.

C) Interpretieren Sie die Kennzahl der Duration. Zeigen Sie den Zusammenhang der Ausstattungsmerkmale von Anleihen (Restlaufzeit, Nominalzinssatz usw.) und der Duration auf.

D) Inwiefern kann man über die Kennzahl der Duration die Barwertänderung von Finanztiteln approximieren und warum ist das Ergebnis eine Approximation?

E) Zeigen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Methoden zur Berechnung der Barwertänderungen von Finanztiteln auf.

F) Wie kann die Duration von Depots ermittelt werden, die eine Vielzahl von Finanztiteln beinhalten?

G) Skizzieren Sie die Strategie, mittels der Duration ein Depot festverzinslicher Wertpapiere zu immunisieren. Welche Prämissen sind dabei zu beachten?

H) Welches sind die Möglichkeiten und Grenzen der Kennzahl Duration für das Management von Anleihe-Depots?

I) Interpretieren Sie das Maß der Convexity.

Lösungshinweise

A)

	Marktzinssatz in der Ausgangslage = 7%, dann 9%			
	WP-Nr.	1	2	3
	Laufzeit/Jahre	2	8	4
	Kupon	7%	12%	5%
	Zinszahlung	jährlich	jährlich	jährlich
a)	Barwert in der Ausgangslage	100%	129,86%	93,23%
b)	Duration	1,93	5,87	3,71
c)	Modified Duration	1,808	5,489	3,469
d)	Convexity	5,012	40,964	15,802
e)	absolute Barwertänderung über die Duration berechnet	-3,62%	-14,26%	-6,47%
f)	relative Barwertänderung über die Modified Duration berechnet	-3,62%	-10,98%	-6,94%
g)	absolute Barwertänderung über die Duration und Convexity berechnet	-3,52%	-13,19%	-6,17%
h)	relative Barwertänderung über die Modified Duration und Convexity berechnet	-3,52%	-10,16%	-6,62%
i)	absolute Barwertänderung über "klassisches Abzinsen"	-3,52%	-13,25%	-6,18%
j)	relative Barwertänderung über "klassisches Abzinsen"	-3,52%	-10,21%	-6,63%
k)	Barwert über "klassisches Abzinsen" nach Marktzinsänderung	96,48%	116,6%	87,04%

$$\text{relative Barwertänderung} = \frac{\text{absolute Barwertänderung}}{P_0}$$

Literatur

Wolfgang Bessler. Zinsrisikomanagement in Kreditinstituten. Wiesbaden 1989.

Gerald O. Bierwag und George G. Kaufman. Duration Gap for Financial Institutions. "Financial Analysts Journal", (1985), S. 68-71.

Willi Brammertz und Werner Burger. Duration im Asset & Liability Management. "Die Bank", (1990), S. 323-328.

Willi Brammertz und Andreas Jäk. Barwert und Duration von Spargeldern. "Die Bank", (1993), S. 420-423.

Wolfgang Bühler. Anlagestrategien zur Begrenzung des Zinsänderungsrisikos von Portefeuilles aus festverzinslichen Titeln. Kapitalanlageplanung mit Hilfe der Finanzierungstheorie bei Versicherungen und Bausparkassen. Hrsg. Peter Gessner, Dieter Schneider und Achim Zink. (ZfbF Sonderheft 16), Wiesbaden 1983, S. 82-137.

Wolfgang Bühler und Walter Herzog. Die Duration - eine geeignete Kennzahl für die Steuerung von Zinsänderungsrisiken in Kreditinstituten? Teil I und II. "Kredit und Kapital", (1989), S. 403-427 und S. 524-563.

Wolfgang Doerks und Stefan Hübner. Konvexität festverzinslicher Wertpapiere, "Die Bank", (1993), S. 102-105.

R. Eller und W. Kempfle. Die Finanzkennzahl <<Duration>> in der Anlageberatung. "Die Bank", (1989), S. 675-679.

Roland Eller. Modified Duration and Convexity - Analyse des Zinsrisikos. "Die Bank", (1991), S. 322-326.

Dieter Gramlich und Hartmut Walz. Duration und Zinselastizität als Instrumente des Zinsrisiko-Managements. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 327-332.

Dieter Gramlich und Hartmut Walz. Duration und Zinselastizität. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1991), S. 378-380.

Lutz Kruschwitz und R. Schöbel. Duration - Grundlagen und Anwendung eines einfachen Risikomaßes zur Beurteilung festverzinslicher Wertpapiere (1) (Hauptstudium). "Das Wirtschaftsstudium", (1986), S. 550-554.

Bernd Lucke. Die Duration - ein Anlagekriterium. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1987), S. 1.079-1.080.

Bernd Rudolph. Zinsänderungsrisiken und die Strategie der durchschnittlichen Selbstliquidationsperiode. "Kredit und Kapital", (1979), S. 181-206.

Bernd Rudolph. Eine Strategie zur Immunisierung der Portfeuilleentnahmen gegen Zinsänderungsrisiken. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1981), S. 22-35.

Hartmut Schmidt. Wege zur Ermittlung und Beurteilung von Marktzinsrisiken von Banken. "Kredit und Kapital", (1981), S. 249-286.

Bernd Siegel und Rolf Degener. Neuere Überlegungen zur Steuerung von Zinsänderungsrisiken I und II. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1988), S. 14-20 und S. 12-17.

Peter Steiner. Das Hedging von zinsreagiblen Bilanzpositionen. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1990), S. 778-793.

Helmut Uhlir und Peter Steiner. Analyse anleihenspezifischer Risiken. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1983), S. 632-657.

Hartmut Walz und Dieter Gramlich. Duration und Zinselastizität im Rentenmanagement. "Die Bank", (1991), S. 208-213.

Bernhard Wondrak. Zinsimmunisierung mit Zerobonds im Betriebsvermögen. "Die Bank", (1987), S. 453-458.

2.3.4. Management auf der Grundlage von Spot Rates und Forward Rates

Während in den letzten Abschnitten Ansätze des Wertpapiermanagements auf der Grundlage von Durchschnittsrenditen dargestellt wurden, sollen nun finanzmathematisch genauere Methoden auf der Basis von Spot Rates und Forward Rates vorgestellt werden.

2.3.4.1. Die zukünftige Wertentwicklung des Depots

Bevor überlegt wird, ob und welche Maßnahmen zur Sicherung eines Depots in Betracht kommen, sollten folgende Fragen beantwortet werden:

1) Welchen (Bar-)Wert weist das bestehende Depot auf?
2) Welchen zukünftigen Wertverlauf wird ein Depot haben, falls die antizipierten Zinssätze eintreten und die aus dem Depot resultierenden Zahlungen in das Depot reinvestiert werden?
3) Welchen (Bar-)Wert weist das bestehende Depot auf, wenn sich die Zinsstrukturkurve ändert?

2.3.4.1.1. Der Barwert des Depots und die antizipierte Wertentwicklung

Wie schon an anderer Stelle angesprochen, gibt es zwei Möglichkeiten, den Barwert eines Depots zu bestimmen. Zum einen kann die Summe der Barwerte der Einzelpositionen gebildet werden, zum anderen können zunächst die Summen der Zahlungen aus den verschiedenen Finanztiteln für die verschiedenen Zeitpunkte berechnet werden, um diese dann abzuzinsen und zu addieren.

Auch der antizipierte Wertverlauf des Depots kann auf verschiedenen Wegen bestimmt werden. Der einfachste Weg besteht sicherlich darin, den heutigen Barwert mit den für die Antizipationszeitpunkte relevanten Spot Rates aufzuzinsen.

2.3.4.1.2. Der Barwert des Depots und die antizipierte Wertentwicklung bei sofortiger Zinsänderung

Die neue Zinsstrukturkurve sei dadurch gekennzeichnet, daß der Parameter NIV um 2,09% steigt. Dieses entspricht einer Parallelverschiebung der Renditenstrukturkurve um 2,09% nach oben. Entsprechend ergeben sich neue Spot Rates, die sowohl zu einem neuen Barwert des Depots führen als auch zu einem anderen antizipierten Wertverlauf der zukünftig antizipierten Barwerte.

Wie aus dem Beispiel ersichtlich, hat die Zinserhöhung in kurzfristiger Sicht geringere Barwerte zur Folge, in langfristiger Sicht aufgrund der höheren Wiederanlageerträge hingegen höhere Barwerte. Durch weitere Variation der Indikatoren der Zinstruktur können leicht auch andere Szenarien durchgespielt werden.

Barwert und antizipierte Werte eines Depots vor und nach Marktzinsänderung

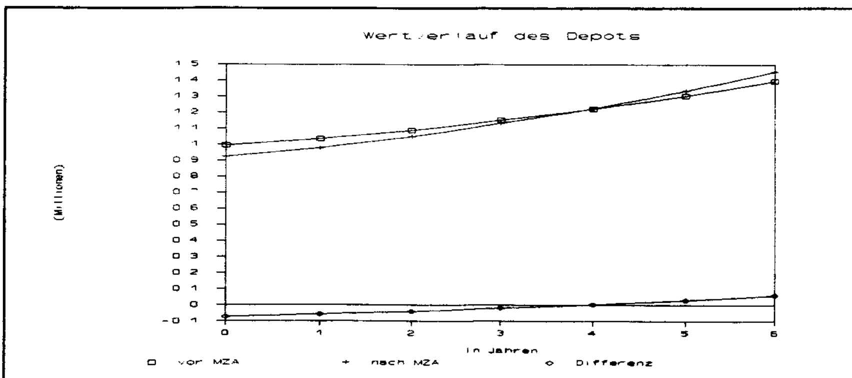
	$NIV_{7,639\%}$	$STE_{7,639\%}$	$KRU_{7,639\%}$
gegenwärtige Zinsstrukturkurve	3,9088%	0,2959%	0,3575%
neue Zinsstrukturkurve (sofortige Zinsänderung unterstellt!)	6,0000%	0,2959%	0,3575%

Berechnung der Barwerte vor und nach Marktzinsänderung:

Typ	Kupon	Laufzeit	Nominal-wert	1	2	3	4	5
Bundesanleihe	6,75%	2	100.000	6.750	106.750	0	0	0
Bundesobligation	6,75%	3	50.000	3.375	3.375	53.375	0	0
Bundesobligation	6,75%	4	300.000	20.250	20.250	20.250	320.250	0
Bundesobligation	6,50%	4	20.000	1.300	1.300	1.300	21.300	0
Bundesobligation	5,50%	5	500.000	27.500	27.500	27.500	27.500	527.500
			Summen	59.175	159.175	102.425	369.050	527.500
abgezinst (vor Zinsänderung)			994.708	56.949	145,707	88.659	300.651	402.743
abgezinst (nach Zinsänderung)			922.324	55.825	140.046	83.559	277.870	365.024

Bestimmung der antizipierten Wertverläufe:

	0 (Barwert)	1	2	3	4	5	6
vor Zinsänderung	994.708	1.033.590	1.086.652	1.149.161	1.221.007	1.302.838	1.395.714
nach Zinsänderung	922.324	977.664	1.048.308	1.130.566	1.224.975	1.332.860	1.456.064
Differenz	-72.384	-55.926	-38.344	-18.595	3.968	30.022	60.350



2.3.4.2. Hedging mit Zinstermingeschäften

2.3.4.2.1. Die Basis und das Basisrisiko

"Hedger transformieren das Zinsrisiko in das Basisrisiko". Daher liegt eine grundlegende Problematik beim Hedging in der Einschätzung bzw. Analyse des Basisrisikos beim Einsatz alternativer Sicherungsinstrumente.

Es gibt die **Basis im engeren Sinne** (Basis i.e.S.) und die **Basis im weiteren Sinne** (Basis i.w.S.). Folglich gibt es auch ein Basisrisiko im engeren und weiteren Sinne.

Basis i.e.S. = Terminkurs - Kassakurs des Basiswertes

(In der Literatur findet sich auch die Definition: Basis (i.e.S.) = Terminkurs - Kassakurs des Basiswertes)

Mit abnehmender Restlaufzeit verringert sich die Basis und geht gegen null (Basiskonvergenz).

Basisrisiko i.e.S.: Risiko, daß eine andere als die angenommene Veränderung der Basis i.e.S. eintritt. Geht man davon aus, daß die Future-Kontrakte bei Fälligkeit erfüllt oder zu einem in der Nähe des Fälligkeitstermins liegenden Zeitpunkt glattgestellt werden, kann das Basisrisiko i.e.S. vernachlässigt werden, da es gegen null tendiert.

Definition der Basis i.w.S.:

Basis i.w.S. = Kassakurs des abzusichernden Titels - Terminkurs

Definition des Basisrisikos i.w.S.:

Risiko, daß die preisbestimmenden Faktoren des abzusichernden Titels von denen des Sicherungsinstrumentes abweichen

Zur Abbildung und Erläuterung des Basisrisikos i.w.S.:

Die preisbestimmenden Faktoren sind die jeweiligen Renditen der Renditenstrukturkurven YC_0 bzw. YC_1. Aufgrund der Arbitragemechanismen ergeben sich für den Future in $t=0$ zwei preisbestimmende Faktoren (PF F_0), für den abzusichernden Titel dagegen nur ein preisbestimmender Faktor (PF WP_0). Verschiebt sich die Renditenstrukturkurve zufällig wie angegeben, kann es bei nur einem preisbestimmenden Faktor für das abzusichernde Wertpapier (PF WP_1) mehrere unterschiedliche preisbestimmende Faktoren für den Future geben (PF F_1). Folglich sind auch mehrere - hier drei - unterschiedliche Kurse für den Future-Kontrakt bei Fälligkeit möglich. Daher ist ein perfektes Hedging ausgeschlossen. Das Basisrisiko i.w.S. wäre nur bei Identität der preisbestimmenden Faktoren gleich null.

Gründe für den eingeschränkten Erfolg von Immunisierungsmaßnahmen mit Zins-Futures:

1. (Fiktive) Basiswerte stimmen grundsätzlich nicht mit den abzusichernden Positionen überein. Daher ist die Wirkung von Marktzinsänderungen auf beide Titel - aufgrund der ungleichen preisbestimmenden Faktoren - unterschiedlich.

2. Wegen der Standardisierung der Zins-Futures weichen die Nominalwerte sowie die Fälligkeitstermine voneinander ab.

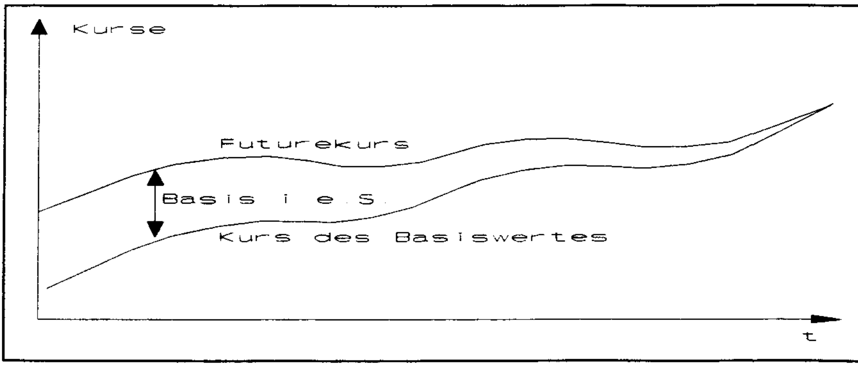
3. Da neben den relevanten Renditen andere Faktoren den Preis der Futures mitbestimmen, lassen sich nur Bandbreiten für den Sicherungserfolg angeben. Schließt man sich der These über die Marktineffizienz an, ist von entsprechend größeren Bandbreiten auszugehen.

4. Neben Kosten für den Abschluß von Zins-Futures sind (Opportunitäts-) Kosten durch die zu hinterlegenden Margins zu berücksichtigen.

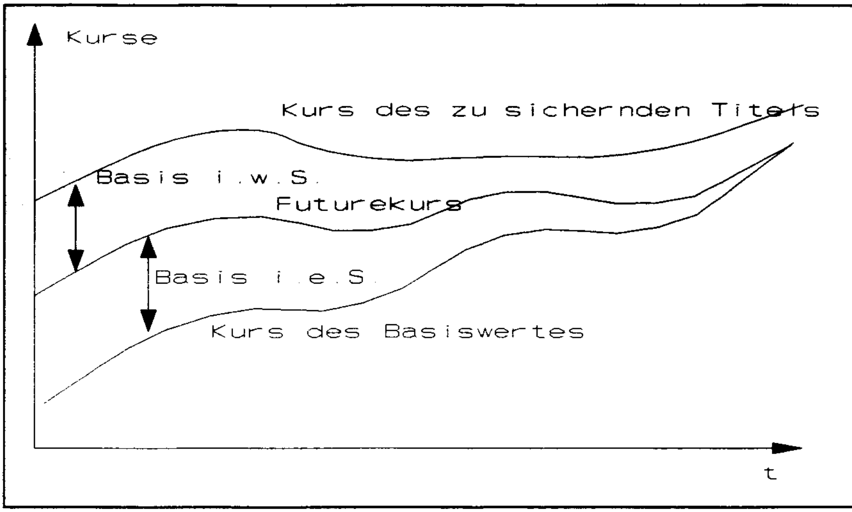
Das Basisrisko

Um den Sicherungserfolg aus Zinstermingeschäften einschätzen zu können, sind folgende Fragen zu beantworten:

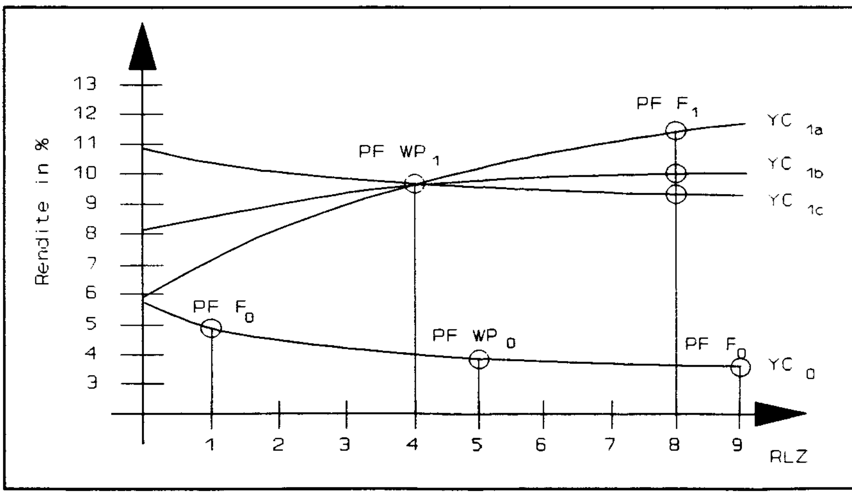
1. Welche Erfolgswirkung ergibt sich bei Marktzinsänderungen aus der abzusichernden Position?
2. Welche Erfolgswirkung resultiert aus dem Kauf oder Verkauf (potentieller) Zins-Futures bei diesen Marktzinsänderungen?
3. Welche Futures in welchen Mengen führen zu möglichst guten Sicherungserfolgen?
4. Wie hoch ist das Restrisiko?
5. Ist die Strategie des Mikro-Hedging oder Makro-Hedging zu verfolgen?



Das Basisrisiko i.w.S.



abzusichernder Titel	=	festverzinsliches Wertpapier, Restlaufzeit 5 Jahre
Future-Kontrakt	=	Laufzeit ein Jahr
Basiswert	=	festverzinsliches Wertpapier, Restlaufzeit (dann) 8 Jahre



2.3.4.2.2. **Optimales Hedging mit der Regressionsmethode**

Hedging-Verfahren mit Zins-Futures

Zwei Grundfragen beim Hedging mit Zins-Futures:

1) Welches ist der optimale Zins-Future?
2) Welche Menge sollte von diesem Zins-Future gekauft bzw. verkauft werden? Was ist also die "optimale Hedge-Ratio"?

Insbesondere werden folgende Hedging-Verfahren angewendet:

A) "naiver" Ansatz
B) Konversionsfaktor-Ansatz
C) Portfolio-Ansatz
D) Duration-Ansatz
E) Regressions-Ansatz
  - **empirischer Regressionsansatz**
  - **modelltheoretischer Regressionsansatz**

Im weiteren wird näher auf das Verfahren der Regressionsanalyse zur Ermittlung des optimalen Zins-Futures sowie zur Ermittlung der optimalen Hedge-Ratio eingegangen.

2.3.4.2.2.1. Verwendung empirischer Daten

Für eine exemplarische Darstellung des Konzeptes der Regressionsmethode wird davon ausgegangen, daß sich im Depot eine Kupon-Anleihe befindet, die gegen Wertveränderungen gesichert werden soll. Die erste Tabelle gibt in Prozentpunkten die empirisch beobachteten Kurse für zwei potentielle Sicherungsinstrumente sowie für das zu sichernde Wertpapier jeweils am Anfang und Ende eines Beobachtungszeitraumes (von z.B. einer Woche) an. Aus diesen Kursen werden zunächst die empirischen Kursveränderungen berechnet.

Ziel ist es nun, den Zins-Future zu bestimmen, dessen Wertänderung in der Vergangenheit einen möglichst parallelen Verlauf mit der Wertänderung des abzusichernden Titels aufweist. Um dieses festzustellen, bietet sich das Verfahren der Regressionsanalyse an (zur Regressionsanalyse siehe den Exkurs am Ende des Skriptes).

Der Schätzansatz wird wie folgt formuliert:

$$y = a + b\,x$$

mit:

y	=	Wertänderung des zu sichernden Titels (bestehendes Portfolio)
x	=	Wertänderung des sichernden Titels (Zins-Future)
a,b	=	Regressionskoeffizienten

Die Ergebnisse der Regressionsschätzungen sind aus der dritten Tabelle ersichtlich. Die Bestimmtheitsmaße quantifizieren den Zusammenhang zwischen den empirischen Wertänderungen des zu sichernden Wertpapiers (y) und den empirischen Wertänderungen der beiden Zins-Futures (X). Es wird deutlich, daß zur Absicherung der Kupon-Anleihe der Zins-Future auf ein Wertpapier mit (dann) 8 Jahren Restlaufzeit wesentlich geeigneter ist als der Zins-Future auf ein Wertpapier mit (dann) 5 Jahren Restlaufzeit.

Grundsätzlich gilt, daß bei Sicherungen von festverzinslichen Wertpapieren im Bestand Zins-Futures verkauft werden müssen, während bei Sicherungen von Kreditpositionen mit einem festen Zinssatz Zins-Futures zu kaufen sind.

Die optimale Anzahl der zu kaufenden bzw. zu verkaufenden Zins-Futures wird durch den zweiten Regressionskoeffizienten b repräsentiert. Zur Sicherung eines im Bestand befindlichen Wertpapiers mit einem Nominalwert von 100 sind folglich 0,551 Zins-Futures mit einem Nominalwert von ebenfalls 100 zu verkaufen.

Voraussetzung für den Sicherungserfolg ist, daß sich die empirisch beobachteten Zusammenhänge aus der Vergangenheit auch auf die Zukunft übertragen lassen.

Prinzipiell läßt sich diese Methodik auch auf das Hedging mit mehreren Zins-Futures übertragen. Zu diesem Zweck ist das Verfahren der multiplen linearen Regressionsanalyse anzuwenden. Der Schätzansatz lautet:

$$y = a + b\,x_1 + c\,x_2$$

mit:

y	=	Wertänderung des zu sichernden Titels (bestehendes Portfolio)
x_1	=	Wertänderung des ersten sichernden Titels (Zins-Future A)
x_2	=	Wertänderung des zweiten sichernden Titels (Zins-Future B)
a,b,c	=	Regressionskoeffizienten

In diesem Beispiel ergibt sich keine nennenswerte Verbesserung des Hedge-Erfolges.

Regressionsmethode auf der Grundlage empirischer Daten I

Der Wert eines Wertpapiers mit 6 Jahren Restlaufzeit ist zu sichern. Es stehen zwei Futures zur Auswahl. Welcher ist der optimale? Wie ist die optimale Hedge-Ratio?

1) Zins-Futures auf ein WP mit (dann) 5 Jahren RLZ
2) Zins-Futures auf ein WP mit (dann) 8 Jahren RLZ

Empirische Daten ergeben folgendes Bild:

	Futures auf ein WP mit 5 Jahren RLZ		Futures auf ein WP mit 8 Jahren RLZ		zu sicherndes Wertpapier	
t	0	1	0	1	0	1
1	95	99	92	88	98	96
2	99	102	88	97	96	100
3	102	101	97	98	100	102
4	101	99	98	90	102	97
5	99	98	90	84	97	93

Reduktion auf die Wertänderungen:

	Futures auf ein WP mit 5 Jahren RLZ	Futures auf ein WP mit 8 Jahren RLZ	zu sicherndes Wertpapier
t	Differenz (x_1)	Differenz (x_2)	Differenz (y)
1	4	-4	-2
2	3	9	4
3	-1	1	2
4	-2	-8	-5
5	-1	-6	-4

Formulierung des Schätzansatzes für den Einsatz eines Zins-Futures:

$$y = a + b\,x_1$$

bzw.:

$$y = a + b\,x_2$$

mit:

y = Wertänderung des zu sichernden Titels (bestehendes Portfolio)

x_1 bzw. x_2 = Wertänderung des sichernden Titels (Zins-Future)

Formulierung des Schätzansatzes für den Einsatz zweier Zins-Futures:

$$y = a + b\,x_1 + c\,x_2$$

Regressionsmethode auf der Grundlage empirischer Daten II

Ergebnisse der Regressionsanalyse auf der Grundlage einzelner Zins-Futures:

	Futures auf ein WP mit 5 Jahren RLZ (x_1)	Futures auf ein WP mit 8 Jahren RLZ (x_2)
Konstante (a)	-1,39	-0,12
Bestimmtheitsmaß	0,206	0,936
Koeffizient (b) = Hedge-Ratio	0,651	0,551
Ergebnis: Wahl des Futures mit 8 Jahren RLZ (Hedge-Ratio = 0,551)		

Ergebnisse der Regressionsanalyse auf der Grundlage beider Zins-Futures:

	Futures auf ein WP mit 5 Jahren RLZ (x_1)	Futures auf ein WP mit 8 Jahren RLZ (x_2)
Konstante (a)	-0,07	
Bestimmtheitsmaß	0,938	
Koeffizient (b, c) = Hedge-Ratio	0,058	0,562

Der zu erwartende Hedge-Erfolg hat sich gegenüber der ausschließlichen Verwendung des zweiten Zins-Futures (x_2) nur unwesentlich verbessert.

2.3.4.2.2.2. Verwendung modelltheoretischer Daten

Die Vorteile der Regressionsmethode liegen darin, daß Standardalgorithmen der linearen Regressionsanalyse genutzt werden können, die praktisch jedes Tabellenkalkulationsprogramm zur Verfügung stellt. Der optimale Zins-Future und die Hedge-Ratio können so relativ einfach ermittelt werden. Gegebenenfalls vorhandene empirische Daten können - wie gezeigt - genutzt werden, womit implizit sogar der Optionscharakter von Zins-Futures aufgrund der CTD-Möglichkeit ebenfalls berücksichtigt wird.

Probleme der Regressionsmethode bestehen darin, daß häufig keine oder nicht genügend empirische Daten für eine Regressionsanalyse verfügbar sind. Dieser Fall ergibt sich insbesondere für Ansätze des Makro-Hedging, also bei Immunisierung eines Portfolios heterogener Einzelpositionen. Unmöglich ist die Beschaffung empirischer Daten für neue Finanztitel. Hinzu kommt, daß empirische Werte nicht alle denkbaren zukünftigen Zinsszenarien abbilden und somit das Marktzinsrisiko nur begrenzt erfassen.

Ein Lösungsansatz dieser Probleme kann in der Regressionsmethode auf der Grundlage modelltheoretischer Daten gesehen werden. Hierbei werden die notwendigen "empirischen Daten" für vorzugebene Zinsszenarien simuliert. Es werden also zunächst die für die Regressionsanalyse notwendigen Future-Werte sowie die Werte für die abzusichernde Position für verschiedene Marktzinsentwicklungen berechnet, um dann mittels der Regressionsanalyse, wie zuletzt dargestellt, die optimalen Zins-Futures sowie die optimale Hedge-Ratio zu berechnen.

Zunächst sind Marktzinsszenarien festzulegen und die damit verbundenen Futures- und Depotwerte zu ermitteln. Dabei tritt das Problem auf, daß letztlich sämtliche Renditen variabel sind. Somit müßte eine sehr große Anzahl von Zinsszenarien generiert werden, um alle denkbaren Kombinationen von Zinssätzen abzubilden. Um dieses Problem zu lösen, bieten sich die oben eingeführten Indikatoren der Zinsstrukturkurve an, die letztlich - wie in den vorangegangenen Ausführungen gezeigt - alle weiteren Zinssätze und die damit verbundenen Marktwerte der Finanztitel determinieren. Somit spiegeln die Veränderungen dieser Indikatoren letztlich das Spektrum der Marktzinsszenarien und damit das Zinsrisiko wider.

Das "Referenz-Marktszenarium" basiert auf den antizipierten Zinssätzen (also auf den Forward Rates). Treten diese ein, wäre der Erfolg aus sämtlichen zu Sicherungszwecken gekauften oder verkauften Zins-Futures null. In diesem Fall haben die Zins-Futures bei Fälligkeit einen Wert in Höhe des heute antizipierten Wertes und dieser ist - wie gezeigt - mit den Werten der Zins-Futures zum Abschlußzeitpunkt identisch. Eine Sicherung gegen eine antizipierte Marktzinsentwicklung ist mit Zins-Futures also unmöglich.

Die Regressionsmethode auf der Grundlage modelltheoretischer Daten wird an einem Beispiel dargestellt, bei dem ein Depot - bestehend aus fünf verschiedenen Positionen festverzinslicher Wertpapiere - gegen Marktzinsrisiken zu sichern ist. Als Planungshorizont wird ein Jahr angenommen, d.h. der Depotinhaber möchte über den Endwert des Depots in einem Jahr Gewißheit haben, z.B. um zu diesem Zeitpunkt das Depot aufzulösen.

zu I) Zunächst ist die Fragestellung relevant, welchen Wert der Depotinhaber für $t = 1$ sichern kann. Auf der Grundlage des durchgängig verwendeten Zinsszenariums hat das Depot in der Ausgangssituation einen Wert von 994.708,25. Vorausgesetzt, die heute ermittelten Forward Rates treten in einem Jahr ein (die antizipierte Marktzinsentwicklung entspricht also der tatsächlichen), so wird das Depot in einem Jahr einen Wert von 1.033.590 haben. Dieser Wert kann über zwei Wege berechnet werden. Zum einen durch Abzinsung der in einem Jahr noch anstehenden Zahlungen mit den Forward Rates in einem Jahr zuzüglich den Zinszahlungen in einem Jahr, zum anderen durch Aufzinsung des heutigen Depotwertes mit der Ein-Jahres-Spot-Rate. Nur dieser antizipierte Depotwert kann mit Zins-Futures gesichert werden. Die Werte für die antizipierten Indikatoren der Renditenstrukturkurve (vgl. das Szenarium 1) wurden rekursiv unter Nutzung eines Solvers berechnet.

Die anderen 12 Marktzinsszenarien werden im Beispiel durch 12 Indikator-Kombinationen beschrieben. Die Spannbreite der Indikatoren der Renditenstrukturkurve ist an die empirisch beobachteten Bandbreiten angelehnt. Alle Spot Rates, Forward Rates und damit auch Kurse der hier relevanten Wertpapiere und Zins-Futures können dann - wie gezeigt - auf dieser Grundlage berechnet werden.

zu II) Zur Sicherung des Depots soll die Möglichkeit genutzt werden, Zins-Futures mit einem Jahr Laufzeit auf ein festverzinsliches Wertpapier mit (dann) 5 Jahren Laufzeit und einem Kupon von 8% zu kaufen bzw. zu verkaufen.

Für die 13 Marktzinszenarien werden nun die Depotwerte sowie die Werte der Zins-Futures berechnet. Offensichtlich könnte bei diesen Bandbreiten für die Marktzinssätze der Kuswert des Depots in einem Jahr zwischen ca. 946.984 und 1.113.132 liegen. Hätte man Zins-Futures verkauft, so würde der Erfolg daraus zwischen ca. 13,83% und -15,25% des Kontraktwertes liegen.

Im nächsten Schritt erfolgt nun - wie bei der empirischen Regressionsmethode - eine Regression bezüglich der Datenreihen "Wertänderung des Depots" und "Erfolg pro verkauftem Future in %". Das Bestimmtheitsmaß der Regressionsschätzung ist recht hoch (ca. 99%). Offensichtlich kann mit dem Zins-Future eine fast perfekte Sicherung durchgeführt werden. Die Hedge-Ratio liegt bei 609.840. Zur Sicherung müssen also Zins-Futures auf eine Kupon-Anleihe mit (dann) 5 Jahren Restlaufzeit, einer Nominalverzinsung von 8% und einem Nominalwert in Höhe von 609.840 verkauft werden.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß sich der Sicherungserfolg nur einstellt, wenn sich die Kurse in der Realität wie vorher berechnet einstellen. Dementsprechend ist bei dieser Sicherungsmaßnahme insbesondere das Basisrisiko i.e.S zu berücksichtigen. Geht man aber davon aus, daß die Märkte für verzinsliche Finanztitel effizient sind, so kann es sich hier nur um geringfügige Abweichungen handeln.

zu III) Die Tabelle und die Abbildung geben den Erfolg der Sicherungsaktion wieder. Die Spannbreite des Depotwertes zum Zeitpunkt $t=1$ ist deutlich gesunken, wenn auch keine perfekte Sicherung möglich ist.

Abschließend soll angemerkt werden, daß das hier nur in der Grundkonzeption vorgestellte Konzept beliebig modifizierbar ist. Wären beispielsweise mehrere Zins-Futures verfügbar, so könnte mit Hilfe einer multiplen linearen Regressionsanalyse das Hedge-Ergebnis deutlich verbessert werden. Selbstverständlich ist es auch problemlos möglich, ein Depot zu hedgen, das eine größere Anzahl von Wertpapierpositionen beinhaltet. Auch bietet dieser Ansatz die Möglichkeit, die gesamte Zinsrisikoposition eines Kreditinstitutes zu quantifizieren und - im Anschluß daran - gegen Marktzinsrisiken zu sichern.

Hier wurden nur Ansätze gezeigt, die auf eine möglichst vollständige Immunisierung des Marktzinsrisikos abzielen. Da aber zu bedenken ist, daß mittels dieser Vorgehensweise nicht nur die Risiken, sondern auch die Chancen vernichtet werden, liegt dieses nicht immer im Interesse des Anlegers. Das trifft inbesondere dann zu, wenn der Anleger oder Portfoliomanager bestimmten Zinsprognosen folgen möchte, also kein passives, sondern ein aktives Risikomanagement durchführen möchte. Zu diesem Zweck wären dann Konzepte der bedingten Immunisierung oder der Teilimmunisierung einsetzbar, die aber auch auf die hier vorgestellten Grundideen aufgebaut werden können.

Regressionsmethode auf der Grundlage modelltheoretischer Daten

Vorteile der Regressionsmethode(n)

- Nutzung von Standardalgorithmen der linearen Regressionsanalyse
- Ermittlung des optimalen Zins-Futures und der optimalen Hedge-Ratio

Probleme der empirischen Regressionsmethode

- keine oder nicht genügend empirische Daten
- Problematik beim Makro-Hedging und beim Hedging neuer Produkte
- keine vollständige Erfassung von Zinsszenarien

Lösung über modelltheoretische Regressionsanalyse

- "Simulation von empirischen Daten"
- Ermittlung der Future-Werte sowie der Werte für die abzusichernden Positionen für verschiedene Marktzinsentwicklungen
- weitere Vorgehensweise wie bei der empirischen Regressionsanalyse

Festlegung von Marktzinsszenarien

Welche der Renditen ist variabel? Welche sollten wie variiert werden?

Gegenwärtige Marktzinsstruktur (alle Angaben in %)						
Laufzeit (T) bzw. Periodenbeginn (t)	1	2	3	4	5	6
$r_{T,\,7{,}639}$ (Durchschnittsrenditen)	3,9088	4,4975	4,8850	5,1900	5,4498	5,6811
R_T (Spot Rates)	3,9088	4,5195	4,9289	5,2581	5,5453	5,8076
$R_{1,t}$ (1-Jahres Forward Rates)	5,1338	5,7524	6,2521	6,7020	7,1288	
$R_{T,1}$ (T-Jahres Forward Rates in einem Jahr)	5,1338	5,4427	5,7118	5,9585	6,1915	

Lösungsansatz:

Nutzung der Indikatoren NIV, STE und KRÜ der Renditenstrukturkurve über:

$$\hat{r}_{T,K} = NIV_K + STE_K\,(T-1) + KRÜ_K\,(0{,}53767 - 0{,}53767\,T + 1{,}957616 \ln T)$$

Von dieser Funktion sind alle Zinssätze, Kurse usw. abhängig.

Somit spiegeln die Veränderungen dieser Indikatoren das Zinsrisiko wider.

Hedging auf der Grundlage modelltheoretischer Daten I

Ein Wertpapierdepot enthält fünf Positionen festverzinslicher Wertpapiere. Der heutige Gesamtwert des Depots sowie der in einem Jahr (t = 1) antizipierte Wert können aus der Summe der Zahlungen berechnet werden:

				ZAHLUNGEN				
Typ	Kupon	Laufzeit	Nominalwert	1	2	3	4	5
Bundesanleihe	6,75%	2	100.000	6.750	106.750	0	0	0
Bundesobligation	6,75%	3	50.000	3.375	3.375	53.375	0	0
Bundesobligation	6,75%	4	300.000	20.250	20.250	20.250	320.250	0
Bundesobligation	6,50%	4	20.000	1.300	1.300	1.300	21.300	0
Bundesobligation	5,50%	5	500.000	27.500	27.500	27.500	27.500	527.500
			Summe der Zahlungen	59.175	159.175	102.425	369.050	527.500

Barwert der Zahlungen in t = 0 = 994.708

antizipierter Barwert in t = 1 = 994.708 (1 + 0,039088) = 1.033.590

Folgende Szenarien (beschrieben durch die Indikatoren der Renditenstrukturkurve in einem Jahr) repräsentieren das Marktzinsrisiko:

#	Indikatoren der Renditenstrukturkurve		
	$NIV_{7,639\%}$	$STE_{7,639\%}$	$KRÜ_{7,639\%}$
1	5,1338%	0,2215%	0,1009%
2	3%	0,30%	0,35%
3	5%	0,30%	0,35%
4	8%	0,30%	0,35%
5	3%	0,10%	0,35%
6	5%	0,10%	0,35%
7	8%	0,10%	0,35%
8	3%	-0,10%	0,35%
9	5%	-0,10%	0,35%
10	8%	-0,10%	0,35%
11	3%	0,10%	0,00%
12	5%	0,10%	0,00%
13	8%	0,10%	0,00%

Hedging auf der Grundlage modelltheoretischer Daten II

Sicherungsinstrument: Verkauf eines Zins-Futures mit einer Laufzeit von einem Jahr auf ein festverzinsliches Wertpapier mit (dann) 5 Jahren Laufzeit und einem Kupon von 8 Prozent.

#	Indikatoren der Renditen-strukturkurve für t=1			Kurswert des Depots in t=1	Wertänderung des Depots in t=1	Erfolg pro verkauftem Future in % in t=1
	$NIV_{7,639\%}$	$STE_{7,639\%}$	$KRÜ_{7,639\%}$			
1	(5,13%)	(0,22%)	(0,10%)	1.033.590	0	0,00%
2	3%	0,30%	0,35%	1.081.868	48.279	-7,24%
3	5%	0,30%	0,35%	1.024.552	-9.038	1,87%
4	8%	0,30%	0,35%	946.984	-86.606	13,83%
5	3%	0,10%	0,35%	1.097.307	63.718	-11,16%
6	5%	0,10%	0,35%	1.038.699	5.109	-1,65%
7	8%	0,10%	0,35%	959.435	-74.155	10,83%
8	3%	-0,10%	0,35%	1.113.132	79.542	-15,25%
9	5%	-0,10%	0,35%	1.053.192	19.602	-5,32%
10	8%	-0,10%	0,35%	972.180	-61.410	7,71%
11	3%	0,10%	0,00%	1.108.671	75.081	-12,93%
12	5%	0,10%	0,00%	1.049.124	15.534	-3,24%
13	8%	0,10%	0,00%	968.626	-64.964	9,48%

Eine Regressionsanalyse bezüglich der Kursänderungen des Depots und der potentiellen Erfolgswirkungen des Zins-Futures ergibt folgende Ergebnisse:

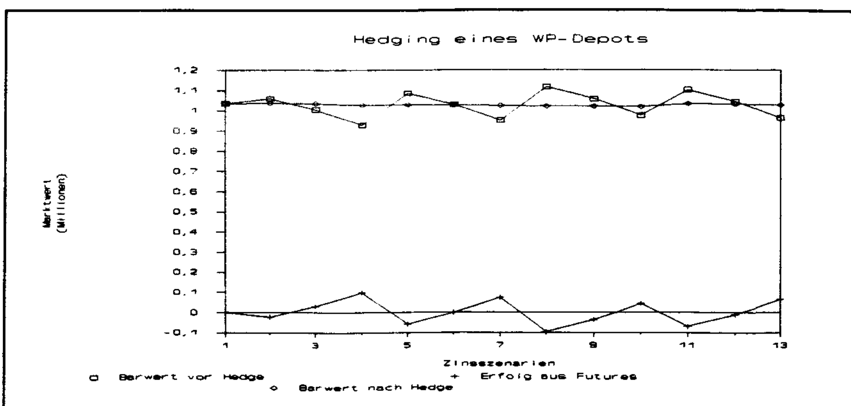
R^2 = 0,99
Konstante = -5.304
Regressionskoeffizient = 609.840 (= Hedge-Ratio)

Beispiel zum Hedging auf der Grundlage modelltheoretischer Daten III

Eine Gegenüberstellung der Depotwerte in Abhängigkeit von den Marktzinsszenarien ergibt folgendes Bild (jeweils vor und nach Hedging):

#	Indikatoren der Renditen-strukturkurve in t=1			Kurswert des Depots ohne Hedging in t=1	Wertänderung des Depots ohne Hedging in t=1	Erfolg aus dem Hedge mit dem Zins-Future in t=1	Kurswert des Depots incl. Hedge-erfolg in t=1	Wertänderung des Depots incl. Hedge-erfolg in t=1
	$NIV_{7,639\%}$	$STE_{7,639\%}$	$KRÜ_{7,639\%}$					
1	5,13%	0,22%	0,10%	1.033.590	0	0	1.033.590	0
2	3%	0,30%	0,35%	1.081.868	48.279	-44.146	1.037.722	4.132
3	5%	0,30%	0,35%	1.024.552	-9.038	11.397	1.035.948	2.359
4	8%	0,30%	0,35%	946.984	-86.606	84.351	1.031.335	-2.255
5	3%	0,10%	0,35%	1.097.307	63.718	-68.044	1.029.263	-4.326
6	5%	0,10%	0,35%	1.038.699	5.109	-10.038	1.028.661	-4.929
7	8%	0,10%	0,35%	959.435	-74.155	66.066	1.025.501	-8.089
8	3%	-0,10%	0,35%	1.113.132	79.542	-93.019	1.020.113	-13.477
9	5%	-0,10%	0,35%	1.053.192	19.602	-32.419	1.020.773	-12.817
10	8%	-0,10%	0,35%	972.180	-61.410	46.999	1.019.179	-14.411
11	3%	0,10%	0,00%	1.108.671	75.081	-78.861	1.029.810	-3.780
12	5%	0,10%	0,00%	1.049.124	15.534	-19.735	1.029.389	-4.201
13	8%	0,10%	0,00%	968.626	-64.964	57.801	1.026.426	-7.163
μ	5,32%	0,11%	0,25%	1.034.412	823	-6.127	1.028.285	-5.304
σ				54.300	54.300	54.188	5.798	5.798

Grafische Gegenüberstellung der Barwerte, die sich für die Zinsszenarien vor und nach Hedging für t=1 ergeben:



Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Der Wert eines Wertpapiers mit 4 Jahren Restlaufzeit ist zu sichern. Es stehen zwei Futures zur Auswahl. Welcher ist der optimale? Wie ist die optimale Hedge-Ratio? Die Beobachtungen der Kursänderungen in der Vergangenheit ergaben (in v.H.):

t	Futures auf ein WP mit 3 Jahren RLZ	Futures auf ein WP mit 7 Jahren RLZ	zu sicherndes Wertpapier
1	100	92	94
2	99	98	96
3	102	104	97
4	107	109	99
5	112	112	100
6	109	111	99
7	99	108	97

Welcher Hedge-Erfolg ergibt sich für den Fall, daß Sie beide Zins-Futures zum Hedging einsetzen können?

Erklären Sie Stärken und Schwächen dieses Ansatzes.

B) Zeigen Sie die grundlegenden Probleme auf, die beim Hedging des Marktzinsrisikos auftreten könnten.

C) Erklären Sie die prinzipielle Vorgehensweise bei der Ermittlung der optimalen Hedge-Ratio sowie des optimalen Zins-Futures mittels der Regressionsmethode auf der Grundlage modelltheoretischer Daten.

D) Definieren Sie die Basis und das Basisrisiko.

Lösungshinweise

A)

Reduktion auf die Wertänderungen:

	Futures auf ein WP mit 3 Jahren RLZ	Futures auf ein WP mit 7 Jahren RLZ	zu sicherndes Wertpapier
t	Differenz	Differenz	Differenz
1	-1	6	2
2	3	6	1
3	5	5	2
4	5	3	1
5	-3	-1	-1
6	-10	-3	-2

Ergebnisse der Regressionsanalyse für die einzelnen Zins-Futures:

	Futures auf ein WP mit 3 Jahren RLZ	Futures auf ein WP mit 7 Jahren RLZ
Konstante	0,5390	-0,591
Bestimmtheitsmaß	0,68	0,909
X Koeffizient = Hedge-Ratio	0,234	0,409
Ergebnis: Wahl des Futures mit 7 Jahren RLZ (Hedge-Ratio = 0,409)		

Ergebnisse der Regressionsanalyse für beide Zins-Futures:

	Futures auf ein WP mit 3 Jahren RLZ	Futures auf ein WP mit 7 Jahren RLZ
Konstante	-0,400	
Bestimmtheitsmaß	0,924	
X Koeffizienten = Hedge-Ratio	0,0568	0,3412

Literatur

Manfred Berger. Hedging - Effiziente Kursabsicherung festverzinslicher Wertpapiere mit Finanzterminkontrakten. Wiesbaden 1990.

Wolfgang Bessler. Zinsrisikomanagement in Kreditinstituten. Wiesbaden 1989.

Eduard Gabele und Matthias Hochrein. Mikrocomputergestütztes Portfoliomanagement festverzinslicher Wertpapiere. "Die Bank", (1992), S. 164-168.

C. Holzer. Anlagestrategien in festverzinslichen Wertpapieren, Wiesbaden 1990.

Andreas Jeschko. "Managed Futures" als Diversifikationselement in einem traditionellen Aktien/Anleiheportfolio. "Österreichisches Bankarchiv", (1992), S. 684-689.

Rüdiger Kalinski, Wolfgang Dürr und Kathrin Fach. Steuerung des Zinsänderungsrisikos im Wertpapieranlagegeschäft. "Die Bank", (1993), S. 40-45.

Klaus Spremann. Kann man mit Terminkontrakten hedgen? "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1991), S. 295-312.

Peter Steiner. Das Hedging von zinsreagiblen Bilanzpositionen. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1990), S. 778-793.

Marco Wilkens. Risiko-Management mit Zins-Futures in Banken, Göttingen 1994.

Bernhard Wondrak. Zur Steuerung des Zinsänderungsrisikos in Kreditinstituten. "Kredit und Kapital", (1986), S. 401-415.

3. Beteiligungstitel

3.1. Grundlagen

3.1.1. Formen der Aktienanalyse

In der finanzwirtschaftlichen Literatur und Praxis existiert eine Vielzahl von Methoden zur Analyse von Aktien. Hierbei handelt es sich zum Beispiel um Versuche, gegenwärtige und vergangene Kurse und Renditen von Aktien zu erklären. Andere Versuche sind primär darauf ausgerichtet, unter- und überbewertete Aktien zu identifizieren, um mit diesem Wissen Spekulationsgewinne zu erzielen. Gemeinsam ist allen Methoden, daß ihnen irgendwie geartete Vorstellungen über den Preisbildungsmechanismus von Aktien zugrunde liegen müssen. Daher beschäftigt sich dieses Kapitel in erster Linie mit Ansätzen, die die Preisbildung von Aktien zum Inhalt haben.

Grundsätzlich lassen sich folgende Formen der Aktienanalyse unterscheiden:

- traditionelle Aktienanalyse
  - technische Analyse
  - Fundamentalanalyse
- moderne Aktienanalyse

Während die modernen Verfahren der Aktienanalyse den Schwerpunkt der folgenden Ausführungen bilden, soll hier ein kurzer Überblick über die traditionellen Verfahren gegeben werden. Für eine detaillierte Darstellung und Diskussion sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

Im Rahmen der technischen Aktienanalyse wird versucht, mittels empirischer Zeitreihen (insbesondere von Aktienkursen und Umsätzen) Prognosen bezüglich der zukünftigen Entwicklung der Aktienkurse abzuleiten. Hierfür wird davon ausgegangen, daß in diesen Zeitreihen bestimmte "Muster" enthalten sind, die "nur" aufgedeckt zu werden brauchen, um daraus Prognosen ableiten zu können. Die gebräuchlichste Form, potentielle Muster zu visualisieren, ist die Chartdarstellung. Die wesentlichen Formen von Charts sind klassische Liniencharts, Barcharts und Point & Figure Charts. Wie aus der folgenden Aufstellung hervorgeht, stellen die Methoden der Chartanalyse aber nur eine Form der technischen Aktienanalyse dar:

Methoden der technischen Aktienanalyse
- für den Gesamtmarkt
  - Dow-Theorie
  - Elliot-Wave-Theorie
  - Methode der gleitenden Durchschnitte
  - Advance-Decline-Verfahren
  - Odd-Lot Short Sales Index
- für Einzelwerte
  - Konzept der relativen Stärke
  - Methode der gleitenden Durchschnitte
  - Kurs/Umsatz-Formationsanalysen (Chartanalysen)

Im Gegensatz zur technischen Aktienanalyse wird bei der fundamentalen Aktienanalyse versucht, über die Beobachtung unternehmensspezifischer Einflußfaktoren die zukünftigen Aktienkurse zu prognostizieren. Typischerweise fließen in derartige Analysen folgende Informationen ein:

- quantitative Analysen
  - mikroökonomische Daten aus Bilanzen und Gewinn- und Verlustrechnungen, Liquidität, Kapitalstruktur, Vermögensstruktur
  - makroökonomische Daten wie Wachstum des Bruttosozialproduktes
- qualitative Analysen
  - mikroökonomische Daten wie Managementqualitäten, Marktstellung, Ruf des Unternehmens, Wachstumsperspektiven
  - makroökonomische Daten wie Wirtschaftsklima

Die Möglichkeit, mittels technischer Verfahren der Aktienanalyse im Vergleich zu einem risikoangepaßten Marktindex unter Berücksichtigung von Transaktionskosten systematisch Überrenditen zu erzielen, wird in der wissenschaftlichen Literatur in der Regel als gering bzw. nicht gegeben eingeschätzt. Hingegen erscheint es grundsätzlich nicht unmöglich, mittels fundamentaler Aktienanalysen Überrenditen zu erzielen. Da Spekulationen am Kapitalmarkt aber eine Art Nullsummenspiel darstellen, ist die Voraussetzung für die Erzielung systematischer Überrenditen, daß die individuellen Analysefähigkeiten des (Fundamental-)Analysten (aufgrund der Transaktionskosten deutlich) besser sind als die der anderen Spekulanten (incl. potentiellen Insidern).

3.1.2. Einfache Bewertungsansätze ohne Portfoliobezug

3.1.2.1. Barwertansatz, KGV

Grundsätzlich ließe sich der Wert einer Aktie S - analog zur Anleihebewertung - als Barwert der zukünftig mit der Aktie verbundenen erwarteten Rückflüsse Z_t (Dividenden, Bezugsrechtserlöse usw.) interpretieren. Geht man von einer unbegrenzten Lebensdauer des Unternehmens aus, ergibt sich:

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Z_t}{(1+k)^t}$$

Der Ausdruck k repräsentiert einen risikoangepaßten Kalkulationszinssatz.

Für den Fall, daß in Verbindung mit der Aktie ausschließlich Zahlungen in Form von Dividenden in stets gleicher Höhe erwartet werden, kann diese Gleichung umgeformt werden zu (Datei: Kurs):

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+k)^t} = \frac{D}{k}$$

Eine Erweiterung dieses einfachen Modells besteht nun darin, eine konstante Wachstumsrate g für die Dividenden zu unterstellen. Daraus folgt für den Wert der Aktie in t=0 (Datei: Kurs):

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D\,(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \frac{D}{k-g} \quad \textit{für: } g < k$$

Hier wird davon ausgegangen, daß die Dividende in t=1 vorgegeben ist. Die Wachstumsraten werden also erst ab t=2 relevant. In t=0 sei die Dividende bereits gezahlt.

Aus verschiedenen Gründen, die an dieser Stelle aber nicht diskutiert werden sollen, läßt sich dieses Modell für praktische Aktienbewertungen aber nur sehr begrenzt einsetzen.

In der Anlagepraxis werden häufig die Dividendenrendite und das Kurs-Gewinn-Verhältnis (auch bezeichnet als Price-Earnings-Ratio) zur Aktienbewertung herangezogen. Die Kennzahl der Dividendenrendite vernachlässigt vollständig potentielle Kursgewinne und Kursverluste und soll daher auch nicht weiter dargestellt und diskutiert werden. Das Kurs-Gewinn-Verhältnis (KGV) gibt Auskunft darüber, mit welchem Vielfachen des (letzten oder prognostizierten) Jahresgewinns eine Aktie zur Zeit notiert:

$$KGV = \frac{S}{G}$$

Je niedriger das KGV, desto attraktiver erscheint die Aktie. Problematisch an dieser Kennzahl ist aber insbesondere die Festlegung des "Gewinns".

3.1.2.2. Empirisch-induktive Bewertungsmodelle

Das grundlegende Ziel empirisch-induktiver Bewertungsmodelle besteht darin, die Aktienkurse bestimmenden Einflußfaktoren zu identifizieren und den Zusammenhang zwischen diesen Faktoren und den Aktienkursen im allgemeinen sowie den einzelner Aktien zu quantifizieren. In Abgrenzung zu den im weiteren noch darzustellenden Bewertungsansätzen sind die hier verwendeten Faktoren meist alle unternehmensindividueller Natur, wie beispielsweise die Dividende oder der Unternehmensgewinn, die erwartete Wachstumsrate der Gewinne und die Ausschüttungsquote. Für die Quantifizierung der Zusammenhänge werden sowohl Schätzverfahren auf der Grundlage der einfachen linearen Regressionsanalyse wie auch der multiplen linearen Regressionsanalyse verwendet. Bewertungsmodelle dieser Art werden in der englischsprachigen Literatur als Single-Equation-Regression-Models (SERM) bezeichnet. Die Schätzfunktionen haben üblicherweise folgende Form:

$$S_{it} = \alpha_i + \beta_{i1} F_{1t} + \ldots + \beta_{ik} F_{kt} + \varepsilon_{it}$$

Als zu erklärende Variable wird nicht nur der Marktwert der Aktien S eingesetzt, sondern beispielsweise auch das Kurs-Gewinn-Verhältnis. Die meisten Bewertungsmodelle basieren auf drei bis vier Erklärungsfaktoren, da eine Hinzunahme weiterer Faktoren meist keine deutliche Verbesserung der Bestimmtheitsmaße ergibt.

Für eine praktische Anwendung dieser Form von Bewertungsmodellen ist die Kenntnis historischer Zusammenhänge zwischen den Erklärungsvariablen und den Aktienkursen nur sinnvoll, wenn diese Relationen auch für die Zukunft hinreichend konstant sind. Untersuchungen hierzu zeigen jedoch, daß zwar die Bestimmtheitsmaße dauerhaft recht hoch sind, allerdings verändern sich die Ausprägungen der Regressionskoeffizienten im Zeitablauf deutlich.

Ein Problem für einen praktischen Einsatz dieser Modelle liegt darin, daß für die Bestimmung zukünftiger Kurse die Vorhersage der zukünftigen Ausprägungen der Einflußfaktoren notwendig ist. Letztlich stellt aber beispielsweise gerade die Ermittlung zukünftiger Gewinne ein Kernproblem der Aktienbewertung dar. Somit wird das Prognoseproblem letztlich nur verlagert.

3.1.3. Informationseffizienz der Kapitalmärkte

Für verschiedene Modelle im Rahmen der Kapitalmarkttheorie ist ein informationseffizienter Kapitalmarkt Voraussetzung (z.B. für das CAPM, weil hier homogene Erwartungen vorausgesetzt werden). An einem informationseffizienten Kapitalmarkt reflektieren die Wertpapierpreise sofort alle relevanten Informationen, die den Anlegern zum Zeitpunkt der Bewertung der Finanztitel zugänglich sind. Gleiche Erwartungen bezüglich der Zufallsverteilungen zukünftiger Renditen können alle Anleger folglich nur dann haben, wenn sie über den gleichen Informationsstand verfügen.

Wird von einem informationseffizienten Kapitalmarkt ausgegangen, können keine systematischen Überrenditen aufgrund von Informationen erzielt werden, da die Informationen bereits in den Wertpapierpreisen enthalten sind. In Abhängigkeit von der Art der enthaltenen Informationen werden drei Informationseffizienzhypothesen unterschieden:

Wenn davon ausgegangen wird, daß der Kapitalmarkt schwach informationseffizient ist, dann reflektieren die Kurse alle Informationen über vergangene Kursentwicklungen. Folglich können mittels technischer Ansätze der Wertpapieranalyse keine systematischen (sondern nur zufällige) Überrenditen erzielt werden. Für die These der halb-strengen Informationseffizienz gilt die Unterstellung, daß alle öffentlich verfügbaren Informationen in den Kursen enthalten sind. Demnach können auch durch Verfahren der Fundamentalanalyse keine Überrenditen erzielt werden. Schließlich wird für einen streng informationseffizienten Kapitalmarkt angenommen, daß auch öffentlich nicht zugängliche Informationen (wie Insiderinformationen) in den Wertpapierpreisen enthalten sind. Empirische Untersuchungen kommen meist zu dem Ergebnis, daß der Kapitalmarkt die halb-strenge Form der Informationseffizienz aufweist.

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben

A) Nennen und erklären Sie die Grundformen der Aktienanalyse.

B) Der Kurs der Siemens-Aktie sei 750. Sie erwarten, daß die nächste Dividende von Siemens 12% auf den Nennwert der Aktie in Höhe von 50 sein wird. Darüber hinaus nehmen Sie an, daß die Wachstumsrate der Rendite 5% beträgt. Berechnen Sie - bei ausschließlicher Betrachtung der Dividendenrendite - den (durchschnittlichen) Kapitalmarktzinssatz, bis zu dem ein Kauf der Siemens-Aktie sinnvoll wäre.

C) Der zukünftige durchschnittliche Kapitalmarktzinssatz sei 6 Prozent. Welchen Kurs müßte dann die o.a. Siemens-Aktie haben, falls die Dividendenrendite von 12% ausgehend, in jedem Jahr um 5% steigt?

D) Erläutern Sie ausführlich, warum die beiden letztgenannten Bewertungsansätze nur eine sehr grobe Bewertung der Siemens-Aktie erlauben.

E) Nennen und erläutern Sie die drei Thesen zur Informationseffizienz der Kapitalmärkte und begründen Sie, wann und warum die verschiedenen Formen der Aktienanalyse zu Überrenditen führen könnten.

F) Inwiefern sind Aktienspekulationen eine Art Nullsummenspiel?

Lösungshinweise

B) 5,8%

C) 600

Literatur

Martin Glaum. Informationseffizienz der Devisenmärkte und unternehmerisches Wechselkursrisiko-Management. "Kredit und Kapital", (1994), S. 67-99.

K. W. Hansmann. Dynamische Aktienanlage-Planung. Wiesbaden 1980.

Martin Klein. Ist die Theorie effizienter Märkte empirisch widerlegt? "Kredit und Kapital", (1983), S. 126-140.

Paul Lerbinger. Die Leistungsfähigkeit deutscher Aktieninvestmentfonds - Eine empirische Untersuchung zur Informationseffizienz des deutschen Aktienmarktes. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1984), S. 60-73.

Hans-Peter Möller. Die Informationseffizienz des deutschen Aktienmarktes - eine Zusammenfassung und Analyse empirischer Untersuchungen. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1985), S. 500-518.

Thomas Nowak. Faktormodelle in der Kapitalmarkttheorie. Köln 1994.

Manfred Perlitz. Einige Überlegungen zur iterativ-multiplen Regressionsmethode für die Aktienprognose. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1981), S. 604-620.

Fritz H. Rau. Was kann die Aktienanalyse heute leisten - und was nicht? "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1993), S. 846-848.

Dieter Schneider. Wider Insiderhandelsverbot und die Informationseffizienz des Kapitalmarktes. "Der Betrieb", (1993), S. 1.429-1.435.

Friedrich Thießen. Technische Analyse mit dem Elliot-Wave-Prinzip. "Die Bank", (1989), S. 609-612.

3.2. Portfoliotheorie

Für die weiteren Darstellungen wird - so weit wie möglich - auf einen einheitlichen Datensatz (Datei: Kurse und Datei: Renditen) Bezug genommen. Hierbei handelt es sich um fiktive historische Kurse und diskrete Renditen für 10 Aktien und 16 Beobachtungszeiträume (Jahre). Hinzu kommen für die gleichen Zeiträume die Marktrenditen und die Renditen für risikofreie Anlagen. Selbstverständlich würden praktische Anwendungen auf umfangreicheres Datenmaterial aufbauen müssen. Die Vorteile des hier gewählten Datensatzes liegen darin, daß die gezeigten Berechnungen vergleichsweise einfach nachvollzogen werden können.

Die Darstellungen zur Portfoliotheorie und den darauf aufbauenden Faktormodellen basieren grundsätzlich auf Verteilungen zukünftiger Renditen, für die angenommen wird, daß sie mit den hier gegebenen Verteilungen historischer Renditen identisch sind. Es wird also unterstellt, daß die fiktiven historischen Verteilungsparameter μ_{ri} und σ_{ri}, σ_{ri}^2, $\sigma_{ri\,rj}$ usw. eine gute Schätzgrundlage für die zukünftigen Verteilungsparameter abgeben.

Eine Problematik beim Nachvollziehen der im weiteren durchgeführten Rechnungen besteht darin, daß abweichend von den Ausführungen im Skript gerundet wird. Grundsätzlich gilt, daß die Ergebnisse im Skript "so genau wie möglich" berechnet wurden, indem die Zwischenergebnisse ***nicht*** *gerundet werden. Im allgemeinen werden die Rundungsdifferenzen erkennbar sein. Um Mißverständnisse auszuschließen, sollten Sie sich die genauen Werte in den Dateien ansehen.*

Den Ausgangspunkt aller Rechungen bilden - wie in der finanzwirtschaftlichen Praxis - die Kurse der 10 Aktien über 17 Beobachtungszeitpunkte = 16 Beobachtungszeiträume (Datei: Kurse). Alle weiteren Ergebnisse beziehen sich - ohne die Rundung von Zwischenergebnissen - auf diese Ausgangswerte.

Datensatz: Aktienrenditen, risikofreie Zinssätze und Marktrenditen (Datei: Renditen)

Rendite r_{it}	t = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	μ_i	σ_i	σ_i^2
Aktie i = 1	-0,75%	1,00%	-0,22%	4,11%	2,71%	6,88%	3,60%	0,70%	5,33%	-1,58%	-3,88%	-1,20%	-0,99%	1,38%	4,55%	-2,03%	1,23%	3,03%	0,09%
2	8,12%	13,08%	7,52%	7,35%	5,00%	14,02%	6,03%	5,38%	9,84%	15,96%	4,14%	10,26%	13,23%	11,28%	7,03%	10,90%	9,32%	3,55%	0,13%
3	11,74%	18,56%	7,92%	14,80%	7,95%	16,40%	10,44%	4,74%	11,32%	16,64%	7,09%	16,00%	12,12%	14,34%	15,92%	20,50%	12,91%	4,48%	0,20%
4	15,23%	6,81%	8,54%	13,33%	14,32%	14,90%	3,86%	11,62%	7,57%	20,12%	13,20%	9,22%	6,67%	18,13%	14,98%	12,92%	11,96%	4,48%	0,20%
5	15,97%	20,96%	17,73%	18,00%	14,28%	22,55%	13,17%	13,20%	10,74%	31,96%	15,63%	16,18%	19,09%	28,38%	16,45%	23,29%	18,60%	5,68%	0,32%
6	14,26%	15,85%	15,52%	18,36%	12,12%	21,58%	8,90%	12,23%	14,22%	26,08%	9,11%	14,92%	16,45%	25,18%	16,96%	17,10%	16,18%	4,89%	0,24%
7	18,98%	18,38%	9,89%	24,81%	15,36%	33,42%	13,41%	16,89%	13,36%	32,74%	12,06%	16,85%	17,04%	24,58%	21,15%	27,58%	19,78%	7,08%	0,50%
8	20,42%	17,83%	23,94%	24,60%	21,18%	35,16%	9,35%	15,12%	16,22%	38,19%	7,66%	19,68%	21,96%	27,61%	22,76%	28,97%	21,92%	8,16%	0,67%
9	24,64%	20,93%	27,20%	34,90%	24,00%	31,40%	14,53%	22,62%	18,02%	33,76%	12,24%	16,57%	28,11%	32,51%	30,55%	36,09%	25,50%	7,54%	0,57%
10	12,46%	23,54%	21,39%	21,83%	25,48%	43,24%	15,46%	20,28%	21,73%	34,65%	14,50%	17,47%	17,68%	44,55%	32,87%	26,50%	24,60%	9,65%	0,93%
μ	14,11%	15,70%	13,94%	18,21%	14,24%	23,96%	9,87%	12,28%	12,84%	24,85%	9,18%	13,60%	15,14%	22,79%	18,32%	20,18%	16,20%	4,76%	0,23%
σ	7,02%	6,98%	8,64%	9,00%	7,70%	11,45%	4,32%	6,99%	4,94%	12,18%	5,83%	6,10%	8,07%	12,09%	9,00%	10,94%	8,20%	2,46%	0,06%
σ^2	0,49%	0,49%	0,75%	0,81%	0,59%	1,31%	0,19%	0,49%	0,24%	1,48%	0,34%	0,37%	0,65%	1,46%	0,81%	1,20%	0,73%	0,42%	0,00%
r_{ft}	3,00%	4,00%	3,00%	2,50%	4,00%	5,00%	4,00%	2,50%	3,00%	4,00%	3,50%	5,00%	3,00%	2,50%	3,00%	4,00%	3,50%	0,82%	0,01%
r_{Mt}	14,11%	15,70%	13,94%	18,21%	14,24%	23,96%	9,87%	12,28%	12,84%	24,85%	9,18%	13,60%	15,14%	22,79%	18,32%	20,18%	16,20%	4,76%	0,23%

3.2.1. Rendite und Risiko einzelner Aktien

Im Rahmen kapitalmarkttheoretischer Modelle kommen eine Vielzahl von Definitionsmöglichkeiten für Renditen in Betracht. Grundsätzlich ist zu unterscheiden zwischen diskreten und kontinuierlichen Renditen, die wiederum als Totalrenditen und Relativrenditen berechnet werden können. Da inbesondere diskrete und kontinuierliche Totalrenditen in Modellen der Kapitalmarkttheorie Verwendung finden, stehen diese im folgenden im Mittelpunkt der Betrachtung. Im weiteren wird davon ausgegangen, daß die Berechnung der Renditen auf der Grundlage bereinigter Kursreihen erfolgt.

Die diskrete Totalrendite r_{itd} eines Finanztitels i für eine (vergangene) Periode t mit der Periodenlänge P ergibt sich aus der Summe des (bereinigten) Kursgewinns in der Periode (also S_{it} - $S_{i,t-1}$) bezogen auf den Kurs am Anfang der Periode ("total return" bzw. "holding period return"):

$$r_{itd} = \frac{S_{it} - S_{i,t-1}}{S_{i,t-1}} = \frac{S_{it}}{S_{i,t-1}} - 1$$

Diese einfache Formel muß allerdings modifiziert werden, falls der Bezugszeitraum der Rendite nicht identisch ist mit der in die Formel eingehenden Periodenlänge, falls also die diskrete Relativrendite zu bestimmen ist. So kann es für eine bessere Vergleichbarkeit von Renditen insbesondere sinnvoll sein, sie grundsätzlich auf p.a.-Basis anzugeben (also $r_{itd\,(p.a.)}$), auch wenn sie nur auf der Grundlage der Kursänderung z.B. eines Monats bestimmt werden. Die Formel zur Umrechnung von Monats- in Jahresrenditen kann aus der Vorschrift zur Berechnung des Endwertes einer Anlage auf der Basis des Jahreszinssatzes

$$S_{it} = S_{i,t-1}\,(1 + r_{itd\,(p.a.)})^{P}$$

abgeleitet werden. Der Ausdruck P bezeichnet hier den Jahresbruchteil der betrachteten Anlageperiode. Für eine Anlageperiode von einem Monat ist P = 1/12 = 0,083333. Um die diskrete p.a.-Rendite einer Finanzanlage zu bestimmen, ist die letztgenannte Gleichung nach $r_{itd\,(p.a.)}$ aufzulösen:

$$r_{itd\,(p.a.)} = \sqrt[P]{\frac{S_{it}}{S_{i,t-1}}} - 1$$

Für die Überführung der diskreten Totalrendite in eine diskrete Relativrendite p.a. und umgekehrt gilt:

$$r_{itd\,(p.a.)} = \sqrt[P]{1 + r_{itd}} - 1$$

bzw.:

$$r_{itd} = (1 + r_{itd\,(p.a.)})^{P} - 1$$

Für die kontinuierliche Zinsberechnung, ergibt sich aufgrund der Formel zur Endwertbestimmung

$$S_{it} = S_{i,t-1}\, e^{r_{itk\,(p.a.)}\,P}$$

die kontinuierliche Relativrendite $r_{itk\,(p.a.)}$ als

$$r_{itk\,(p.a.)} = \frac{\ln(S_{it}) - \ln(S_{i,t-1})}{P} = \frac{\ln \dfrac{S_{it}}{S_{i,t-1}}}{P}$$

und die kontinuierliche Totalrendite r_{itk} als

$$r_{itk} = \ln(S_{it}) - \ln(S_{i,t-1}) = \ln \frac{S_{it}}{S_{i,t-1}}$$

Für die Überführung der kontinuierlichen Totalrendite in eine kontinuierliche Relativrendite und umgekehrt gilt:

$$r_{itk\,(p.a.)} = \frac{r_{itk}}{P}$$

bzw.:

$$r_{itk} = r_{itk\,(p.a.)}\, P$$

Aus der letzten Umformung wird der additive Charakter der kontinuierlichen Rendite deutlich, mit dem - wie noch zu zeigen ist - häufig der Vorzug dieser Renditeform in der Kapitalmarkttheorie begründet wird.

Für weitere Betrachtungen ist die Überführung der diskreten Totalrendite in die kontinuierliche Totalrendite und umgekehrt von Bedeutung. Für Totalrenditen gilt

$$1 + r_{itd} = e^{r_{itk}}$$

Das kann umgeformt werden zu

$$r_{itd} = e^{r_{itk}} - 1$$

bzw.:

$$r_{itk} = \ln(1 + r_{itd})$$

Für Entscheidungen über die Vorteilhaftigkeit von Finanztiteln ist der Erwartungswert der zukünftigen Renditen ein zentraler Parameter. Der Erwartungswert kann definiert werden als arithmetisches Mittel μ_{ri} der möglichen Renditen eines Finanztitels i in den verschiedenen Umweltzuständen/Szenarien z_u gewichtet mit deren Eintrittswahrscheinlichkeiten $p(z_u)$:

$$\mu_{r_i} = \sum_{u=1}^{U} r_i(z_u)\, p(z_u) \qquad mit: \sum_{u=1}^{U} p(z_u) = 1$$

Das Risiko einer Anlage wird üblicherweise als Varianz σ_{ri}^2 bzw. Standardabweichung σ_{ri} der Renditen ausgedrückt und ergibt sich dann als:

$$\sigma_{r_i}^2 = \sum_{u=1}^{U} [r_i(z_u) - \mu_{r_i}]^2\, p(z_u)$$

Die beiden letztgenannten Formeln setzen zunächst die Festlegung der möglichen Umweltzustände voraus, für die dann die verbundenen Renditen zu bestimmen sind. Für praktische Anwendungen wird auf diesen Schritt aber meist verzichtet, indem davon ausgegangen wird, daß die zukünftigen Renditen Zufallsvariable $\tilde{r}_i$ mit einer bestimmten Verteilung darstellen. Für eine vollständige Beschreibung der zukünftig möglichen Renditen inklusive deren Eintrittswahrscheinlichkeiten reicht für den Fall der Normalverteilung der Renditen die Festlegung folgender Parameter aus:

- Erwartungswert der Renditen μ_{ri}
- Standardabweichung σ_{ri} oder Varianz σ_{ri}^2 der Renditen

oder kurz $NV(\mu_{ri}; \sigma_{ri}^2)$.

Das folgende Beispiel zeigt, welche Ergebnisse sich für die gezeigten Vorgehensweisen der Renditenbestimmung - am Beispiel der Aktie 10 - ergeben (Datei: Ren_Ber).

Jahr	$S_{10,t}$ (Kurs der Aktie)	$r_{10,t,k}$ (Rendite kontinuierlich)	$r_{k10,t,d}$ (Rendite diskret)
t=0	30,000		
1	33,737	11,74%	12,46%
2	41,680	21,14%	23,54%
3	50,595	19,38%	21,39%
4	61,638	19,74%	21,83%
5	77,344	22,70%	25,48%
6	110,790	35,94%	43,24%
7	127,916	14,37%	15,46%
8	153,861	18,47%	20,28%
9	187,292	19,66%	21,73%
10	252,195	29,75%	34,65%
11	288,768	13,54%	14,50%
12	339,226	16,10%	17,47%
13	399,197	16,28%	17,68%
14	577,031	36,84%	44,55%
15	766,702	28,42%	32,87%
16	969,862	23,51%	26,50%
μ_{r10} (Erwartungswert der Renditen p.a.)		21,72%	24,60%
$\sigma_{r10}^{2\prime}$ (korrigierte Varianz p.a.)		0,57%	0,93%
σ_{r10}' (korrigierte Standardabweichung p.a.)		7,53%	9,65%
σ_{r10}^2 (nicht korrigierte Varianz p.a.)		0,53%	0,87%
σ_{r10} (nicht korrigierte Standardabweichung p.a.)		7,29%	9,34%

Im weiteren wird beschrieben, wie die Annahme der Normalverteilung der Renditen aus der Unabhängigkeit der Renditen im Zeitverlauf begründet wird.[1] Geht man zunächst von diskreten Renditen $\tilde{r}_{itd}$ aus, kann der Aufzinsungsfaktor eines Finanztitels für eine Periode G $(1+\tilde{r}_{iGd})$ als Produkt der Aufzinsungsfaktoren für die Teilperioden t dargestellt werden:

$$1 + \tilde{r}_{iGd} = (1 + \tilde{r}_{i1d}) \dots (1 + \tilde{r}_{itd}) \dots (1 + \tilde{r}_{iTd})$$

Dies läßt sich auch formulieren als

$$\ln(1 + \tilde{r}_{iGd}) = \ln(1 + \tilde{r}_{i1d}) + \dots + \ln(1 + \tilde{r}_{itd}) + \dots + \ln(1 + \tilde{r}_{iTd})$$

Aufgrund der Identität von $\ln(1+\tilde{r}_{itd})$ und dem kontinuierlichen Zinssatz $\tilde{r}_{itk}$ gilt:

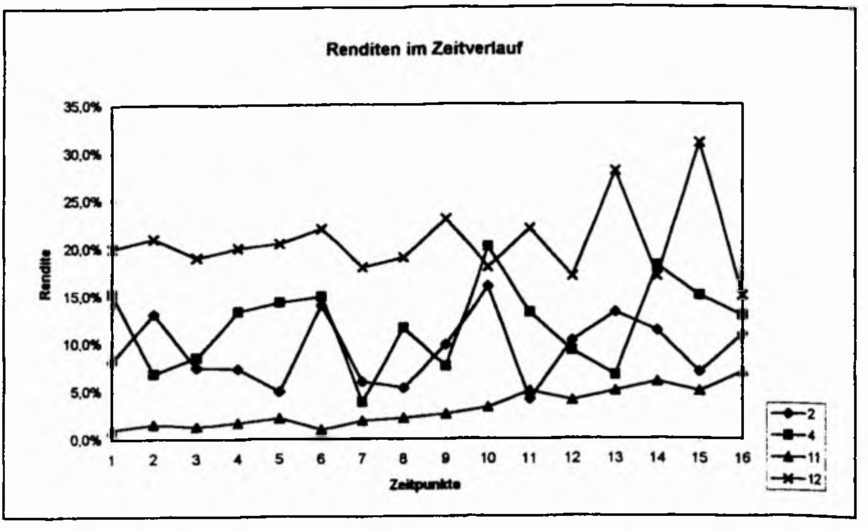
$$\tilde{r}_{iGk} = \tilde{r}_{i1k} + \dots + \tilde{r}_{itk} + \dots + \tilde{r}_{iTk}$$

Geht man nun davon aus, daß die Renditen der Teilperioden unabhängige Zufallsvariablen einer identischen Verteilung sind, dann ist die Zufallsvariable $\tilde{r}_{iGk}$ (und eben nicht $\tilde{r}_{iGd}$ oder $1+\tilde{r}_{iGd}$!) nach dem Zentralen Grenzwertsatz asymptotisch normalverteilt mit den Parametern NV(T μ_{rik}; T σ^2_{rik}). Diesen Ausführungen zur Folge erscheint mit zunehmender Periodenlänge, für die die Renditen beobachtet werden, die Annahme der Normalverteilung der Renditen begründeter.

1 Vgl. Uhlir/Steiner (1994), S. 129-131.

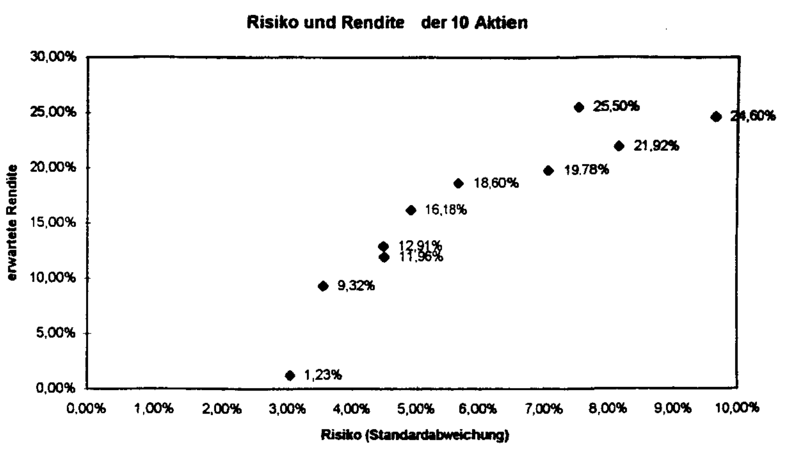
Zu bedenken ist, daß die vorgestellten Überlegungen lediglich für kontinuierliche Renditen Gültigkeit besitzen, denn wie gezeigt, gilt nur für sie, daß die Rendite von T Tagen der Summe der Renditen der T Tage entspricht. Die Normalverteilung der Renditen ist also "stabil". Aufgrund der geringen Differenz zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Zinssatz bei der Wahl kurzer (wöchentlicher oder täglicher) Teilperioden, gelten die beschriebenen Zusammenhänge approximativ aber auch für diskrete Zinssätze. Aus diesem Grund wird bei der Berechnung von Volatilitäten häufig auf eine entsprechende Umrechnung des diskreten in den kontinuierlichen Zinssatz verzichtet.

Voraussetzung für die Normalverteilung der kontinuierlichen Renditen ist, daß die Unabhängigkeit der Renditen zwischen den Beobachtungszeitpunkten gegeben sein muß und daß die Volatilitäten über die Zeit konstant (stationär) sind (die Verteilung muß also über die Zeit stabil sein). Für eine genauere Überprüfung der geschilderten Bedingungen werden üblicherweise verschiedene statistische Testverfahren eingesetzt, auf die weiter unten genauer eingegangen wird.



Schon anhand der Abbildung (Datei: Renditen) ist ersichtlich, daß die Renditen der Aktie 11 einem Trend folgen und daher autokorreliert sind. Es kann somit nicht von der Unabhängigkeit der Renditen eines Zeitpunktes von den Renditen vorangegangener Zeitpunkte ausgegangen werden. Die Volatilität der Aktie 12 ist im Zeitablauf offensichtlich nicht stabil. Die Bedingung der Stationarität der Verteilungen der Renditen ist damit nicht erfüllt. Für eine genauere Überprüfung der geschilderten Bedingungen werden üblicherweise verschiedene statistische Testverfahren eingesetzt, auf die an dieser Stelle aber nicht eingegangen werden soll.

In der folgenden Abbildung sind die Rendite-Risiko Kombinationen für die 10 Aktien wiedergegeben. Es wird deutlich, daß bei isolierter Betrachtung die Aktien mit einem Erwartungswert der Renditen von 11,96%, 21,92% und 24,60% (zunächst) inferiore Anlagen darstellen. Wollte ein risikoaverser Anleger Aktien von nur einem Unternehmen kaufen, würde er diese - unabhängig von dem Grad seiner Risikoaversion - nie wählen. Nur im Portfoliozusammenhang macht es (möglicherweise) Sinn, diese Aktien zu erwerben, da sie insofern einen zusätzlichen Wert aufweisen, als sie zur Reduktion des Portefeuillerisikos beitragen (vgl. die Ausführungen zur Portfoliotheorie).



An dieser Stelle ist auf einige (übliche) Konventionen hinzuweisen, die auch für die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel wichtig sind:

- Es wird grundsätzlich mit korrigierten Standardabweichungen, Varianzen und Kovarianzen gerechnet. Auf eine entsprechende Markierung dieser Verteilungsparameter (mit ') wird aber verzichtet.
- Es wird grundsätzlich mit diskreten Renditen gerechnet. Auch hier wird auf die entsprechende Markierung (mit d) verzichtet.
- Die Streuungsparameter bezeichnen jährliche Streuungen.
- Die Renditen sind als Renditen p.a. angegeben.
- Zufallsvariable werden mit ~ und geschätzte Größen mit ^ gekennzeichnet. Ist der Parameter t im Index einer Variablen angegeben, handelt es sich grundsätzlich um einen historischen Wert.

Die Ermittlung historischer Kurse und Renditen ist in der Realität komplizierter als bisher beschrieben. So ist insbesondere die Berücksichtigung rein technisch bedingter Kursrückgänge bei Kapitalerhöhungen aufgrund von Bezugsrechtsabschlägen wichtig. Hierfür wird häufig unterstellt, daß die Erträge aus den Bezugsrechten ohne die Aufbringung zusätzlicher Mittel sofort zum Kauf junger Aktien verwendet werden ("operation blanche"). Danach entspricht der bereinigte Kurs nicht mehr dem Börsenkurs - je nach der Art der Bereinigung - entweder vor oder nach der Kapitalerhöhung.

Ein weiteres grundsätzliches und kaum zu lösendes Problem besteht darin, daß die mit den Aktienengagements verbundenen Zahlungen - und daher auch die Renditen der Aktien - von Anleger zu Anleger differieren. Geht man davon aus, daß der relevante Vergleichsmaßstab für Finanztitel eigentlich in der Verzinsung nach Abzug aller Kosten und nach Steuern liegt, so sind die Gründe offensichtlich: Sie liegen beispielsweise in unterschiedlichen Steuersätzen für private Investoren und in den mit dem Aktienengagement verbundenen unterschiedlich hohen Transaktionskosten. Insofern sollte bei den weiteren Ausführungen bedacht werden, daß Renditen vor Steuern und Kosten eigentlich nicht entscheidungsrelevant sind.

3.2.2. Korrelation zwischen Renditeverteilungen verschiedener Aktien

Weitere wichtige Kennzahlen zur Beschreibung von Renditeverteilungen sind dann relevant, wenn zwei Renditeverteilungen i und j zueinander in Beziehung gesetzt werden. Die übliche Darstellungsform einer linearen Beziehung lautet:

$$\tilde{y} = \alpha + \beta\,\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$$

Übertragen auf den Zusammenhang zweier Renditeverteilungen r_i und r_j ("r_i erklärt r_j" bzw. aufgrund des nicht vorhandenen Kausalzusammenhanges besser "über r_i wird r_j abgebildet") bedeutet das:

$$\tilde{r}_j = \alpha_{r_i r_j} + \beta_{r_i r_j}\,\tilde{r}_i + \tilde{\varepsilon}_j$$

Ist es das Ziel, die Regressionskoeffizienten aus historischen Daten zu schätzen, dann lautet die (Ausgangsform der) Schätzfunktion:

$$r_{jt} = \alpha_{r_i r_j} + \beta_{r_i r_j}\,r_{it} + \varepsilon_{jt}$$

Nach der Regressionsanalyse lautet das Ergebnis der Schätzung:

$$\hat{r}_{jt} = \hat{\alpha}_{r_i r_j} + \hat{\beta}_{r_i r_j}\,r_{it}$$

Soll dieses Ergebnis auf die zukünftige Verteilung von Renditen übertragen werden, so sind die Ausgangsdaten als Stichprobe anzusehen, die aus einer Grundgesamtheit gezogen wurde. Mithin sind die oben angeführten $\hat{\alpha}_{ri\,rj}$ und $\hat{\beta}_{ri\,rj}$ Schätzwerte für die "richtigen" $\alpha_{ri\,rj}$ und $\beta_{ri\,rj}$ (der Grundgesamtheit). Folglich gilt:

$$\tilde{r}_j = \hat{\alpha}_{r_i r_j} + \hat{\beta}_{r_i r_j}\,\tilde{r}_i + \tilde{\varepsilon}_j$$

Die in diesem Zusammenhang wichtigsten Kennzahlen für den o.a. Datensatz sind:

- die Kovarianz zweier Renditeverteilungen $\sigma_{ri\,rj}$
- der Korrelationskoeffizient $\rho_{ri\,rj}$ und das Bestimmtheitsmaß $\rho_{ri\,rj}^2$ zweier Renditeverteilungen
- der Regressionskoeffizient $\alpha_{ri\,rj}$ (die Konstante) der Regressionsbeziehung zweier Renditeverteilungen
- der Regressionskoeffizient $ß_{ri\,rj}$ (die Steigung) der Regressionsbeziehung zweier Renditeverteilungen

Da die vorgestellten Kennzahlen immer nur den Zusammenhang von zwei (Rendite-)Verteilungen angeben, können bei Vorgabe von I (Rendite-)Verteilungen (hier I = 10) folgende Werte bestimmt werden (Datei: PST10):

- I Erwartungswerte μ_{ri} (hier 10)
- I Varianzen σ_{ri}^2 und Standardabweichungen σ_{ri} (hier jeweils 10)
- I(I-1)/2 Kovarianzen $\sigma_{ri\,rj}$ (hier 45)
- I(I-1)/2 Korrelationskoeffizienten $\rho_{ri\,rj}$ bzw. Bestimmtheitsmaße $\rho_{ri\,rj}^2$ (hier jeweils 45)
- I^2-I Regressionskoeffizienten $\alpha_{ri\,rj}$ (hier 90)
- I^2-I Regressionskoeffizienten $ß_{ri\,rj}$ (hier 90)

Stellt man die Varianzen und Kovarianzen in einer Tabelle (Matrix) dar, so spricht man von der Varianz-Kovarianz-Matrix oder kurz Kovarianz-Matrix. Dabei ist zu beachten, daß die Kovarianzen $\sigma_{r_i r_j}$ für i=j (also $\sigma_{r_i r_i}$) identisch sind mit der Varianz $\sigma_{r_i}^2$. Darüber hinaus gilt $\sigma_{r_i r_j} = \sigma_{r_j r_i}$. Auch die Korrelationskoeffizienten, Bestimmtheitsmaße und Regressionskoeffizienten können so in Matrizenform dargestellt werden. Hier gilt, daß die Korrelationskoeffizienten $\rho_{r_i r_i}$ gleich eins sind. Des weiteren gilt $\rho_{r_i r_j} = \rho_{r_j r_i}$. Die Regressionskoeffizienten $\alpha_{r_i r_i}$ sind gleich null und die Regressionskoeffizienten $\beta_{r_i r_i}$ gleich eins. Allerdings kann im allgemeinen nicht von der Identität von $\alpha_{r_i r_j}$ und $\alpha_{r_j r_i}$ sowie $\beta_{r_i r_j}$ und $\beta_{r_j r_i}$ ausgegangen werden.

Im folgenden sind diese Verteilungsparameter für den fiktiven Datensatz vollständig angegeben (Datei: PST10).

	Varianz-Kovarianz-Matrix $\sigma_{i,j}$ - i erklärt j (korrigierte Varianzen und Kovarianzen!)									
Aktien-renditen	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1	0,0917%	-0,0004%	0,0113%	-0,0109%	-0,0404%	0,0161%	0,0383%	0,0307%	0,0313%	0,1178%
2	-0,0004%	0,1259%	0,1119%	0,0272%	0,1483%	0,1326%	0,1647%	0,2057%	0,1229%	0,1732%
3	0,0113%	0,1119%	0,2005%	0,0395%	0,1515%	0,1309%	0,2184%	0,2134%	0,1726%	0,1931%
4	-0,0109%	0,0272%	0,0395%	0,2011%	0,1540%	0,1391%	0,2105%	0,2298%	0,1964%	0,2632%
5	-0,0404%	0,1483%	0,1515%	0,1540%	0,3228%	0,2438%	0,3071%	0,3656%	0,2854%	0,3759%
6	0,0161%	0,1326%	0,1309%	0,1391%	0,2438%	0,2394%	0,2791%	0,3571%	0,2870%	0,3812%
7	0,0383%	0,1647%	0,2184%	0,2105%	0,3071%	0,2791%	0,5008%	0,4877%	0,4018%	0,4924%
8	0,0307%	0,2057%	0,2134%	0,2298%	0,3656%	0,3571%	0,4877%	0,6658%	0,5268%	0,5818%
9	0,0313%	0,1229%	0,1726%	0,1964%	0,2854%	0,2870%	0,4018%	0,5268%	0,5679%	0,4605%
10	0,1178%	0,1732%	0,1931%	0,2632%	0,3759%	0,3812%	0,4924%	0,5818%	0,4605%	0,9314%

	Matrix der Korrelationskoeffizienten $\rho_{i,j}$ - i erklärt j									
Aktien-renditen	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1	1,000	-0,004	0,084	-0,080	-0,235	0,109	0,179	0,124	0,137	0,403
2	-0,004	1,000	0,705	0,171	0,736	0,764	0,656	0,710	0,460	0,606
3	0,084	0,705	1,000	0,197	0,596	0,597	0,689	0,584	0,512	0,447
4	-0,080	0,171	0,197	1,000	0,604	0,634	0,663	0,628	0,581	0,606
5	-0,235	0,736	0,596	0,604	1,000	0,877	0,764	0,789	0,667	0,686
6	0,109	0,764	0,597	0,634	0,877	1,000	0,806	0,896	0,778	0,807
7	0,179	0,656	0,689	0,663	0,764	0,806	1,000	0,845	0,753	0,721
8	0,124	0,710	0,584	0,628	0,789	0,895	0,845	1,000	0,857	0,739
9	0,137	0,460	0,512	0,581	0,667	0,778	0,753	0,857	1,000	0,633
10	0,403	0,506	0,447	0,606	0,686	0,807	0,721	0,739	0,633	1,000

	Matrix der Regressionskoeffizienten $\alpha_{r_i r_j}$ - i erklärt j									
Aktien-renditen	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1	0,00000	0,09325	0,12755	0,12109	0,19140	0,15964	0,19269	0,21506	0,25086	0,23029
2	0,01253	0,00000	0,04618	0,09950	0,07620	0,06357	0,07586	0,06688	0,16405	0,11778
3	0,00495	0,02114	0,00000	0,09418	0,08844	0,07752	0,05719	0,08176	0,14390	0,12168
4	0,01872	0,07702	0,10554	0,00000	0,09440	0,07904	0,07257	0,08245	0,13821	0,08998
5	0,03555	0,00775	0,04174	0,03092	0,00000	0,02127	0,02086	0,00848	0,09060	0,02942
6	0,00138	0,00356	0,04061	0,02564	0,02121	0,00000	0,00917	-0,02219	0,06109	-0,01156
7	-0,00289	0,02815	0,04278	0,03649	0,06470	0,05152	0,00000	0,02650	0,09634	0,05150
8	0,00216	0,02551	0,05882	0,04400	0,06566	0,04423	0,03727	0,00000	0,08162	0,05453
9	-0,00182	0,03801	0,05153	0,03144	0,05783	0,03288	0,01737	-0,01746	0,00000	0,03918
10	-0,01886	0,04746	0,07804	0,05035	0,08671	0,06110	0,06773	0,06548	0,13339	0,00000

	Matrix der Regressionskoeffizienten $ß_{r_i r_j}$ - i erklärt j									
Aktien-renditen	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1	1,00000	-0,00410	0,12356	-0,11856	-0,44067	0,17536	0,41779	0,33431	0,34143	1,28377
2	-0,00299	1,00000	0,88925	0,21607	1,17809	1,05380	1,30840	1,63387	0,97627	1,37589
3	0,05655	0,55834	1,00000	0,19724	0,75588	0,65290	1,08953	1,06454	0,86115	0,96344
4	-0,05409	0,13524	0,19663	1,00000	0,76560	0,69166	1,04678	1,14268	0,97657	1,30428
5	-0,12526	0,45943	0,46949	0,47699	1,00000	0,75550	0,95135	1,13270	0,88411	1,16451
6	0,06720	0,55405	0,54672	0,58097	1,01855	1,00000	1,16597	1,49173	1,19883	1,59208
7	0,07655	0,32888	0,43618	0,42036	0,61319	0,55744	1,00000	0,97395	0,80229	0,98340
8	0,04607	0,30889	0,32054	0,34513	0,54911	0,53640	0,73253	1,00000	0,79130	0,87377
9	0,05516	0,21640	0,30401	0,34582	0,50252	0,50542	0,70748	0,92777	1,00000	0,81099
10	0,12646	0,18595	0,20738	0,28161	0,40356	0,40925	0,52874	0,62463	0,49448	1,00000

3.2.3. Der Risikopräferenzwert als Ergebnis der Abwägung von Risiko und Rendite

Als Vergleichskriterien für Anlagen werden im allgemeinen die Rendite und das Risiko angesehen,[1] wobei Anleger üblicherweise daran interessiert sind, c.p. eine hohe Rendite zu erzielen bzw. c.p. ein niedriges Risiko einzugehen. Dieser Sachverhalt führt tendenziell dazu, daß sich Anlagen mit einem hohen Risiko auch höher verzinsen und umgekehrt. Jeder Anleger muß bei seiner Anlageentscheidung insofern einen Kompromiß zwischen dem Renditeziel und dem Sicherheitsziel eingehen. Jeder dieser Rendite/Risiko-Kompromisse kann nun mit einem Risikopräferenzwert belegt werden, wobei ein Anleger die Anlage wählen wird, die den höchsten Risikopräferenzwert aufweist.

Der Risikopräferenzwert in Abhängigkeit von dem Erwartungswert und der Varianz der Renditen wird meist über eine Risikopräferenzfunktion erfaßt (μ-σ-Prinzip). Zu unterscheiden sind hierbei drei Grundformen: risikofreudiges, -indifferentes und -scheues Verhalten. Üblicherweise wird davon ausgegangen, daß Anleger risikoscheu sind, die Anleger also bereit sind, auf einen Teil ihrer Rendite zu verzichten, wenn sie dafür ein geringeres Risiko eingehen können. Der Zusammenhang von Rendite/Risiko Kombinationen wird häufig auch in Form von Indifferenzkurven dargestellt. Eine Indifferenzkurve gibt an, welche Rendite/Risiko-Kombinationen den gleichen Risikopräferenzwert aufweisen, welchen Rendite/Risiko-Kombinationen gegenüber ein Anleger also indifferent ist.

Eine vergleichsweise einfache Risikopräferenzfunktion, die im weiteren wiederholt herangezogen wird, lautet:

$$U(\mu_{r_p}, \sigma^2_{r_p}) = \Theta\ \mu_{r_p} - \sigma^2_{r_p}$$

mit:

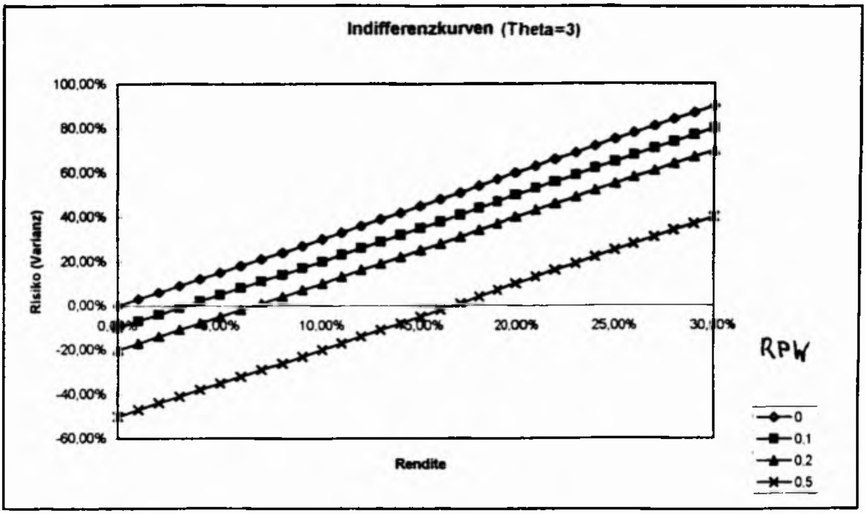
$$\textit{Risikopräferenzwert} = \textit{Risikopräferenzparameter}\ \mu_{r_p} - \sigma^2_{r_p}$$

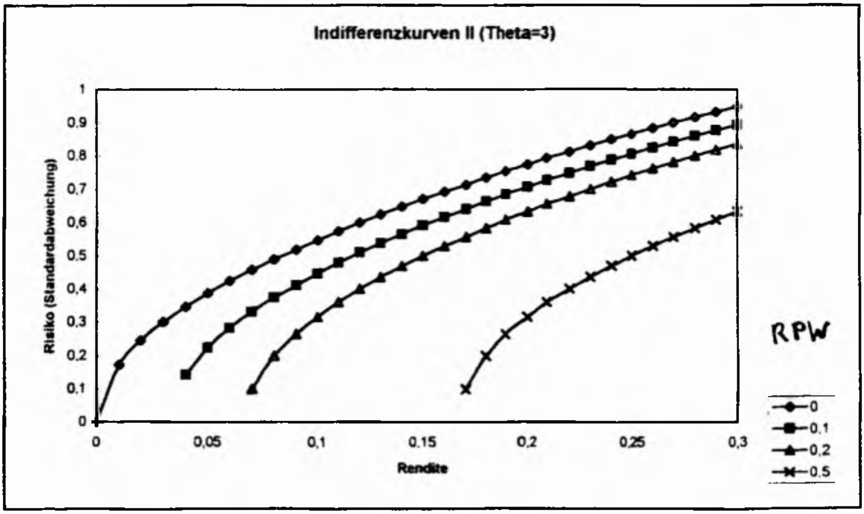
Nach dieser Risikopräferenzfunktion fordert ein Investor für eine Einheit Risiko das 1/Θ-fache an Ertrag.[2] Der Faktor Θ (Theta) wird auch als Risikopräferenzparameter bezeichnet. Die vier folgenden Abbildungen veranschaulichen die Eigenschaften dieser Risikopräferenzfunktion. Für die ersten beiden Abbildungen wurde ein Risikopräferenzparameter Θ von 3 angenommen, für die beiden folgenden ein Risikopräferenzwert von 0,1 (Datei: Nutzen). Zu bedenken ist, daß es Anlagen mit einer negativen Standardabweichung/Varianz nicht geben kann. Die in der Grafik dargestellten Zusammenhänge sind daher teilweise nur theoretischer Natur.

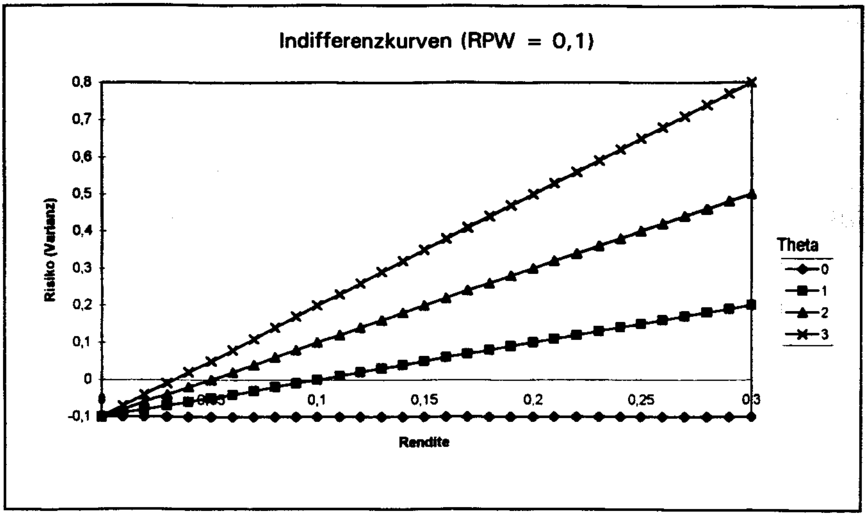
---

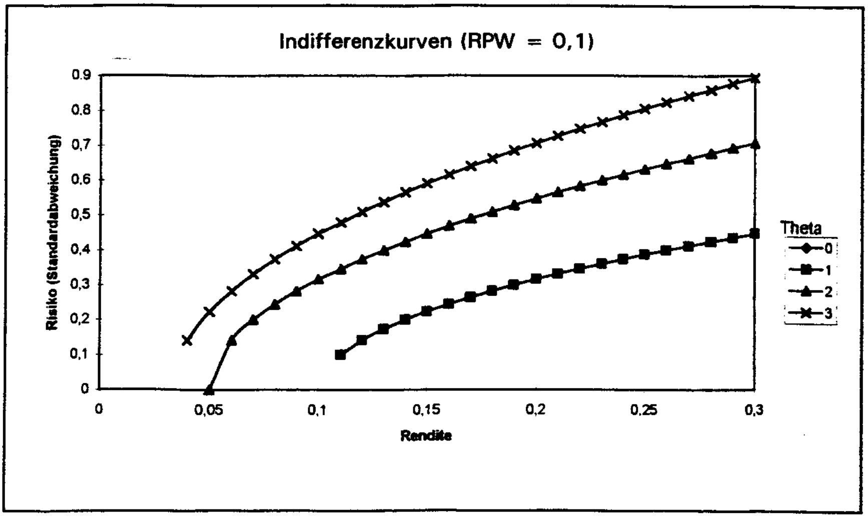
1 Tatsächlich spielen auch andere Faktoren bei der Auswahl von Aktien eine nutzenbestimmende Rolle (z.B. ob man sich mit einem Unternehmen aufgrund seines Engagements identifizieren kann).

2 Die Relation mag an folgendem Beispiel eingängig sein:
0,5 = 10 · 0,05 - 0
0,5 = 10 · 0,15 - 1
0,5 = 10 · 0,25 - 2
Das Risiko steigt in dem Beispiel jeweils um eine Einheit. Der Erwartungswert muß um jeweils 0,1 steigen, damit der Nutzen mit 0,5 konstant bleibt. Diese 0,1 entsprechen 1/Θ = 1/10 = 0,1.


Indifferenzkurven (Theta=3)
100,00%
80,00%
60,00%
40,00%
20,00%
0,00%
-20,00%
-40,00%
-60,00%
Risiko (Varianz)
10,00%
20,00%
25,00%
Rendite
RPW
0
0,1
0,2
0,5


Indifferenzkurven II (Theta=3)
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Risiko (Standardabweichung)
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
Rendite
RPW
0
0,1
0,2
0,5


Indifferenzkurven (RPW = 0,1)
Risiko (Varianz)
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
Rendite
Theta
0
1
2
3


Indifferenzkurven (RPW = 0,1)
Risiko (Standardabweichung)
0.9
0.8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
Rendite
Theta
0
1
2
3

3.2.4. Rendite und Risiko von Portefeuilles

Die Portfoliotheorie ist seit der Publikation der Aufsätze von Markowitz in den 50er Jahren inzwischen fester Bestandteil nahezu jeden Lehrbuchs, das sich mit der Frage der Zusammenstellung von risikobehafteten Finanztiteln befaßt. Mit Hilfe des Modells der Portfolio Selection kann die Rendite-Risiko-Kombination von Portefeuilles unter Berücksichtigung der Renditen, Risiken und insbesondere der Korrelationen der einzelnen Titel quantifiziert und nach verschiedenen Maßgaben (wie Erwartungswertmaximierung oder Risikominimierung) optimiert werden.

Die erwartete Rendite eines Portefeuilles bestehend aus I Titeln ergibt sich als:

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{r_i} \qquad mit: \; \sum_{i=1}^{I} w_i = 1$$

Falls keine Leerverkäufe zugelassen sind, gilt für die Anteile w_i zusätzlich:

$$w_i \geq 0 \qquad \forall \; i = 1, \ldots, I$$

Für die Varianz der Renditen des Portefeuilles gilt:[1]

$$\sigma^2_{r_P} = E(\tilde{r}_P - \mu_{r_P})^2$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{r_i r_j}$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma^2_{r_i} + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{r_i r_j}$$

wobei die Kovarianz $\sigma_{ri\,rj}$ definiert ist als:

$$\sigma_{r_i r_j} = E\left([\tilde{r}_i - \mu_{r_i}]\,[\tilde{r}_j - \mu_{r_j}]\right) = \rho_{r_i r_j} \, \sigma_{r_i} \, \sigma_{r_j}$$

Insbesondere die letztgenannte Schreibweise für die Varianz eines Portefeuilles ist für konkrete Berechnungen sehr brauchbar, da sie leicht als die mit den Anteilen gewichtete Summe der Varianz-Kovarianz-Matrix interpretierbar ist (Datei: PST10).

Beispiele:

Fall	w_3	w_7	w_9	μ_{rP}	σ_{rP}^2	σ_{rP}	Risikopräferenzwert für Θ = 0,1
1	100%	-	-	12,91%	0,200%	4,48%	1,09%
2	-	100%	-	19,78%	0,501%	7,08%	1,48%
3	30%	70%	-	17,72%	0,355%	5,96%	1,42%
4	30%	30%	40%	20,01%	0,331%	5,75%	1,67%
5	-	20%	80%	24,36%	0,512%	7,16%	1,92%

1 Zu den Umformungen siehe Uhlir/Steiner (1994), S. 135 und den dortigen Anhang 3.2.

Zum Fall 3:

$$\mu_{r_p} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{r_i} = 0{,}3 \cdot 0{,}1291 + 0{,}7 \cdot 0{,}1978 = 17{,}72\%$$

$$\sigma_{r_p}^2 = \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma_{r_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{r_i r_j}$$

$$\sigma_{r_p}^2 = 0{,}3^2 \cdot 0{,}002005 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}005008 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}002184 = 0{,}355\%$$

$$\sigma_{r_p} = 5{,}96\%$$

$$U(\mu_{r_p}, \sigma_{r_p}^2) = \Theta \, \mu_{r_p} - \sigma_{r_p}^2$$

$$\textit{Risikopräferenzwert} = 0{,}10 \cdot 0{,}1772 - 0{,}00355 = 0{,}0142$$

3.2.5. Ermittlung optimaler Portefeuilles

Für die weiteren Darstellungen zur Portfoliotheorie ist von folgenden Prämissen auszugehen:

- Anlageentscheidungen basieren nur auf den Größen "Erwartungswert der Renditen" und "Varianz bzw. Standardabweichung der Renditen".
- Anleger präferieren Finanztitel mit einer höherverzinslichen Rendite bei konstantem Risiko bzw. einem geringeren Risiko bei konstanter Rendite.
- Die Risikopräferenzfunktion repräsentiert also Risikoscheu der Anleger.
- Investoren wollen ihren auf eine Periode ausgerichteten Risikopräferenzwert maximieren.
- Steuern und Transaktionskosten werden vernachlässigt.
- Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.

(- Leerverkäufe von Wertpapieren sind zulässig.)

3.2.5.1. Ermittlung optimaler Portefeuilles im Zwei-Wertpapiere-Fall

Ausgangspunkt für die Berechnung der Varianzen und der Erwartungswerte von Portefeuillerenditen bei der Kombination zweier Finanzanlagen sind folgende Funktionen als Spezialfälle der o.a. Gleichungen:

$$\mu_{r_p} = w_1 \, \mu_{r_1} + w_2 \, \mu_{r_2}$$

$$\sigma_{r_p}^2 = w_1^2 \, \sigma_{r_1}^2 + w_2^2 \, \sigma_{r_2}^2 + 2 \, w_1 \, w_2 \, \sigma_{r_1 r_2}$$

Für Sonderfälle von $\rho_{r_i r_j}$ gilt für die Varianz im Zwei-Wertpapiere-Fall (Datei: PST2):

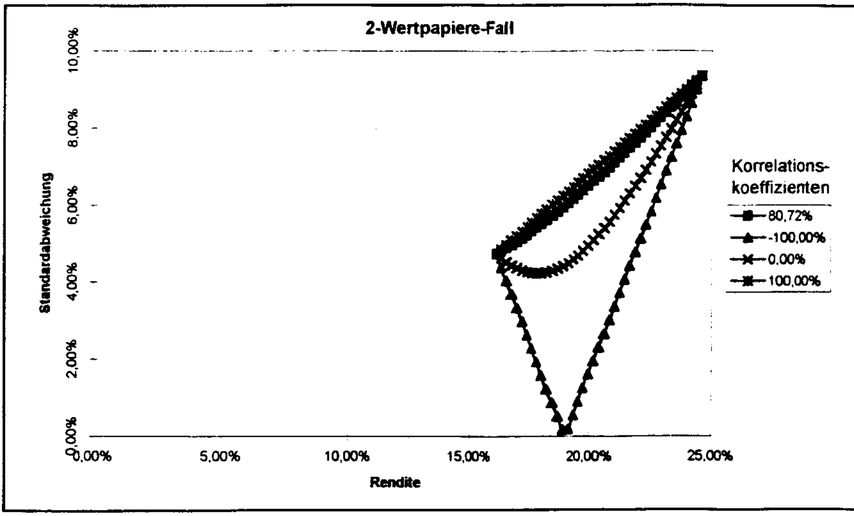
$$\sigma_{r_p}^2 = (w_1 \, \sigma_{r_1} + w_2 \, \sigma_{r_2})^2 \quad \textit{für: } \rho_{r_1 r_2} = 1$$

$$\sigma_{r_p}^2 = w_1^2 \, \sigma_{r_1}^2 + w_2^2 \, \sigma_{r_2}^2 \quad \textit{für: } \rho_{r_1 r_2} = 0$$

$$\sigma_{r_p}^2 = |w_1 \, \sigma_{r_1} - w_2 \, \sigma_{r_2}|^2 \quad \textit{für: } \rho_{r_1 r_2} = -1$$

Entsprechend der Kombination der Anteile w_1 und w_2 können für das Beispiel (vgl. die Angaben zu den Aktien 6 und 10) die drei Sonderfälle bezüglich der Korrelationskoeffizienten $\rho_{ri\,rj}$ aus der Abbildung die Effizienzlinien ersehen werden (Datei: PST2).

Aktie(n) #	μ_{ri}	σ_{ri}	σ_{ri}^2	Kovarianz $\sigma_{ri\,rj}$	Korrelationskoeffizient $\rho_{ri\,rj}$
6	16,18%	4,8929%	0,2394%		
10	24,60%	9,6507%	0,9314%		
6, 10				0,3812%	80,7191%



Für die **Bestimmung des risikominimalen Portefeuilles** (des Minimum-Varianz-Portefeuilles - MVP) ist es zweckmäßig, aufgrund von $w_1 + w_2 = 1$ für w_2 nun $1 - w_1$ zu schreiben:

$$\sigma_{r_P}^2 = w_1^2\ \sigma_{r_1}^2 + (1 - w_1)^2\ \sigma_{r_2}^2 + 2\ w_1\ (1-w_1)\ \sigma_{r_1 r_2}$$

Die Minimierung der Portfoliovarianz ergibt sich, indem diese Funktion nach w_1 abgeleitet und gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{d(\sigma_{r_P}^2)}{d(w_1)} = 2\ w_1\ \sigma_{r_1}^2 + 2(1-w_1)\ (-1)\ \sigma_{r_2}^2 + 2(1-w_1)\ \sigma_{r_1 r_2} + 2\ w_1\ \sigma_{r_1 r_2}\ (-1) = 0$$

Durch Umformung erhält man den gesuchten Anteil $w_{1,MVP}$ (und $w_{2,MVP}$ über $1 - w_{1,MVP}$):

$$w_{1,MVP} = \frac{\sigma_{r_2}^2 - \sigma_{r_1 r_2}}{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2 - 2\ \sigma_{r_1 r_2}}$$

Die erwartete Rendite und das Risiko des varianzminimalen Portefeuilles (MVP) ergeben sich durch Einsetzen der optimalen Anteile (Datei: PST2):

$$\mu_{r_{MVP}} = w_{1,MVP}\ \mu_{r_1} + w_{2,MVP}\ \mu_{r_2}$$

$$\sigma^2_{r_{MVP}} = w^2_{1,MVP}\,\sigma^2_{r_1} + w^2_{2,MVP}\,\sigma^2_{r_2} + 2\,w_{1,MVP}\,w_{2,MVP}\,\sigma_{r_1 r_2}$$

Zu beachten ist, daß für die Gültigkeit dieser Relationen teilweise Leerverkäufe möglich sein müssen, da sich auch negative Anteile ergeben können.

Beispiel: Das varianzminimale Portefeuille für die Aktien 6 und 10 ergibt sich über (Datei: PST2):

$$w_{6,MVP} = \frac{0{,}00931358 - 0{,}00381158}{0{,}00239409 + 0{,}00931358 - 2 \cdot 0{,}00381158} = 134{,}70\%$$

$$w_{10,MVP} = 1 - 1{,}3470 = -0{,}3470 = -34{,}70\%$$

Der Erwartungswert der Renditen dieses Portefeuilles ist:

$$\mu_{r_{MVP}} = 1{,}3470 \cdot 0{,}1618 - 0{,}3470 \cdot 0{,}2460 = 0{,}1326 = 13{,}26\%$$

Die Varianz der Renditen beträgt:

$$\sigma^2_{r_{MVP}} = 1{,}347^2 \cdot 0{,}002394 + (-0{,}347^2) \cdot 0{,}009314 + 2 \cdot 1{,}347 \cdot (-0{,}347) \cdot 0{,}003812 = 0{,}0019 = 0{,}19\%$$

Selbstverständlich ist es nicht zwangsläufig das Ziel, das Risiko eines Portefeuilles zu minimieren. Ebenso mag es erstrebenswert sein, einen gewünschten Erwartungswert der Renditen oder eine gewünschte Standardabweichung bzw. Varianz vorzugeben, für die die optimale und im Zwei-Wertpapiere-Fall einzige (bei Vorgabe der Varianzen ggf. zwei) Wertpapierkombination gesucht wird. Hierfür sind zunächst die Gleichungen für den Erwartungswert und die Varianz nach w_1 aufzulösen.

Zunächst soll dargelegt werden, wie die Portefeuilleanteile für einen **vorgegebenen Erwartungswert** zu bestimmen sind. Aus

$$\mu_{r_P} = w_1\,\mu_{r_1} + w_2\,\mu_{r_2}$$

folgt

$$\mu_{r_P} = w_1\,\mu_{r_1} + (1 - w_1)\,\mu_{r_2}$$

und nach einigen Umformungen

$$w_1 = \frac{\mu_{r_P} - \mu_{r_2}}{\mu_{r_1} - \mu_{r_2}}$$

Beispiel: Es soll für die Aktien 6 und 10 das optimale Portefeuille bestimmt werden, wobei als Erwartungswert der Renditen 20% vorgegeben ist:

$$w_6 = \frac{\mu_{r_P} - \mu_{r_{10}}}{\mu_{r_6} - \mu_{r_{10}}} = \frac{0{,}20 - 0{,}2460}{0{,}1618 - 0{,}2460} = 54{,}63\%$$

Die Varianz der Renditen beträgt:

$$\sigma^2_{r_P} = 0{,}5463^2 \cdot 0{,}002394 + 0{,}4537^2 \cdot 0{,}009314 + 2 \cdot 0{,}5463 \cdot 0{,}4537 \cdot 0{,}003812 = 0{,}0045 = 0{,}45\%$$

Für die **Vorgabe einer Standardabweichung** ist die Berechnung der optimalen Anteile etwas aufwendiger. Aus

$$\sigma^2_{r_P} = w_1^2\,\sigma^2_{r_1} + w_2^2\,\sigma^2_{r_2} + 2\,w_1\,w_2\,\sigma_{r_1 r_2}$$

folgt

$$\sigma^2_{r_P} = w_1^2\ \sigma^2_{r_1} + (1-w_1)^2\ \sigma^2_{r_2} + 2\ w_1\ (1-w_1)\ \sigma_{r_1 r_2}$$

und nach einigen Umformungen

$$\sigma^2_{r_P} = w_1^2\ \sigma^2_{r_1} + \sigma^2_{r_2} - \sigma^2_{r_2}\ 2\ w_1 + \sigma^2_{r_2}\ w_1^2 + 2\ w_1\ \sigma_{r_1 r_2} - 2\ w_1^2\ \sigma_{r_1 r_2}$$

$$\sigma^2_{r_P} = w_1^2\ (\sigma^2_{r_1} + \sigma^2_{r_2} - 2\ \sigma_{r_1 r_2}) + w_1\ (2\ \sigma_{r_1 r_2} - 2\ \sigma^2_{r_2}) + \sigma^2_{r_2}$$

$$0 = w_1^2 + w_1\ \frac{2\ \sigma_{r_1 r_2} - 2\ \sigma^2_{r_2}}{\sigma^2_{r_1} + \sigma^2_{r_2} - 2\ \sigma_{r_1 r_2}} + \frac{\sigma^2_{r_2} - \sigma^2_{r_P}}{\sigma^2_{r_1} + \sigma^2_{r_2} - 2\ \sigma_{r_1 r_2}}$$

Auf der Grundlage der letzten Formel kann der Wert für w_1 über die Quadratische Gleichung bestimmt werden. Zur Erinnerung:

$$0 = x^2 + p\,x + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beispiel: Es soll auf der Grundlage der Aktien 6 und 10 das optimale Portefeuille bestimmt werden, wobei die Varianz der Renditen mit 0,5% vorgegeben ist:

$$0 = w_1^2 + w_1\ \frac{2 \cdot 0{,}00381158 - 2 \cdot 0{,}00931358}{0{,}00239409 + 0{,}00931358 - 2 \cdot 0{,}00381158} + \frac{0{,}00931358 - 0{,}005}{0{,}00239409 + 0{,}00931358 - 2 \cdot 0{,}00381158}$$

$$0 = w_1^2 + w_1\ (-2{,}6941) + 1{,}0561$$

$$x_1 = w_6 = -\frac{-2{,}6941}{2} + \sqrt{\frac{(-2{,}6941)^2}{4} - 1{,}0561} = 221{,}79\%$$

$$x_2 = w_6{'} = -\frac{-2{,}6941}{2} - \sqrt{\frac{(-2{,}6941)^2}{4} - 1{,}0561} = 47{,}62\%$$

Der Erwartungswert der Renditen ist:

$$\mu_{r_{P1}} = 0{,}1618 \cdot 2{,}2179 + 0{,}2460\ (-1{,}2179) = 5{,}92\%$$

bzw.:

$$\mu_{r_{P2}} = 0{,}1618 \cdot 0{,}4762 + 0{,}2460 \cdot 0{,}5238 = 20{,}59\%$$

Eine weitere Vorgehensweise besteht darin, über die **Vorgabe einer Risikopräferenzfunktion** die entsprechenden Indifferenzkurven zu bestimmen, um dann die Wertpapierkombination zu wählen, bei der die höchstgelegenste Indifferenzkurve die Effizienzlinie tangiert (vgl. dazu auch die folgende Abbildung). Verbindet man die Risikopräferenzfunktion

$$U(\mu_{r_P},\ \sigma^2_{r_P}) = \Theta\ \mu_{r_P} - \sigma^2_{r_P}$$

mit den o.a. Vorschriften zur Berechnung der Erwartungswerte und Varianzen der Portefeuillerenditen, ergibt sich der Nutzen nach:

$$U(\mu_{r_P},\ \sigma^2_{r_P}) = \Theta\ (w_1\ \mu_{r_1} + w_2\ \mu_{r_2}) - (w_1^2\ \sigma^2_{r_1} + w_2^2\ \sigma^2_{r_2} + 2\ w_1\ w_2\ \sigma_{r_1 r_2})$$

Ersetzt man w_2 durch $(1-w_1)$ und leitet man die Gleichung nach w_1 ab, erhält man

$$\frac{dU}{dw_1} = \theta\ (\mu_{r_1} - \mu_{r_2}) - 2\ w_1\ \sigma^2_{r_1} + 2\ \sigma^2_{r_2} - 2\ w_1\ \sigma^2_{r_2} - 2\ \sigma_{r_1 r_2} + 4\ w_1\ \sigma_{r_1 r_2}$$

Setzt man diese Funktion gleich null, ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$w_1 = \frac{-\theta\ (\mu_{r_1} - \mu_{r_2}) - 2\ \sigma^2_{r_2} + 2\ \sigma_{r_1 r_2}}{-2\ \sigma^2_{r_1} - 2\ \sigma^2_{r_2} + 4\ \sigma_{r_1 r_2}} = \frac{\theta\ (\mu_{r_1} - \mu_{r_2}) + 2\ \sigma^2_{r_2} - 2\ \sigma_{r_1 r_2}}{2\ \sigma^2_{r_1} + 2\ \sigma^2_{r_2} - 4\ \sigma_{r_1 r_2}}$$

Beispiel: Es soll auf der Grundlage der Aktien 6 und 10 das optimale Portefeuille bestimmt werden, wobei ein Wert für Theta von 0,2 vorgegeben ist:

$$w_1 = \frac{0{,}2\ (0{,}161787 - 0{,}246020) + 2 \cdot 0{,}00931358 - 2 \cdot 0{,}00381158}{2 \cdot 0{,}00239409 + 2 \cdot 0{,}00931358 - 4 \cdot 0{,}00381158} = -\ 0{,}71522$$

Der Erwartungswert der Renditen dieses Portefeuilles ist:

$$\mu_{r_p} = -0{,}71522 \cdot 0{,}161787 + 1{,}71522 \cdot 0{,}246020 = 0{,}3063 = 30{,}63\%$$

Die Varianz der Renditen beträgt:

$$\sigma^2_{r_p} = (-0{,}7152)^2 \cdot 0{,}002394 + 1{,}7152^2 \cdot 0{,}009314 + 2 \cdot (-0{,}7152) \cdot 1{,}7152 \cdot 0{,}003812 = 0{,}0193 = 1{,}93\%$$

Es ergibt sich ein Nutzen von:

$$U(\mu_{r_p}, \sigma^2_{r_p}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3063 - 0{,}0193 = 0{,}042$$

Eine besondere Bedeutung haben die gezeigten Überlegungen im weiteren für **Kombinationen einer risikobehafteten Anlage** (meist dem Marktportefeuille) und einer risikofreien Anlage mit der Verzinsung r_f. Für diesen Fall vereinfachen sich die gezeigten Relationen (aufgrund von $\sigma_{rf} = 0$ und $\sigma_{r1\,rf} = 0$) zur Bestimmung des optimalen (risikobehafteten) Portefeuilleanteils w_1 wie folgt:

$$\mu_{r_p} = w_1\ \mu_{r_1} + w_2\ r_f$$

$$\sigma^2_{r_p} = w_1^2\ \sigma^2_{r_1}$$

Für einen vorgegebenen Erwartungswert kann der Anteil w_1 bestimmt werden über

$$w_1 = \frac{\mu_{r_p} - r_f}{\mu_{r_1} - r_f}$$

Für eine vorgegebene Varianz kann

$$\sigma^2_{r_p} = w_1^2\ \sigma^2_{r_1}$$

aufgelöst werden zu

$$w_1 = \frac{\sigma_{r_p}}{\sigma_{r_1}}$$

Für ein vorgegebenes Theta gilt (auch aufgrund von $\sigma_{rf} = 0$ und $\sigma_{r1\,rf} = 0$)

$$w_1 = \frac{\theta\ (\mu_{r_1} - r_f)}{2\ \sigma^2_{r_1}}$$

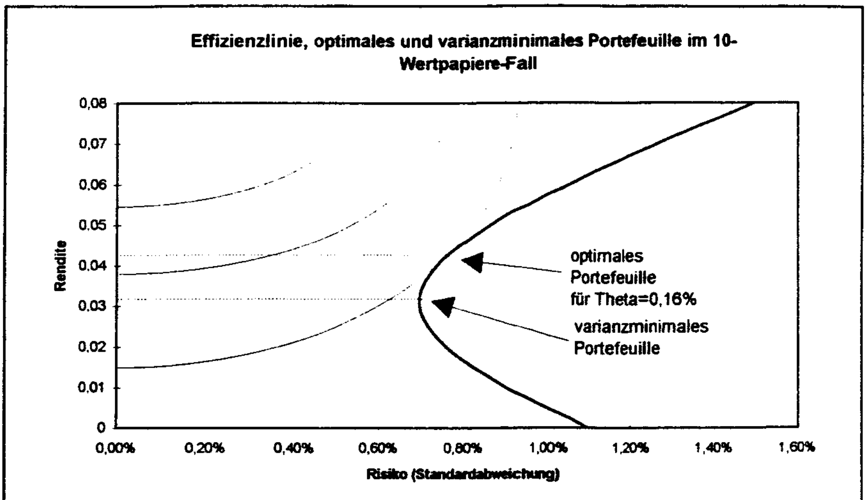
Auf der Grundlage der so berechneten optimalen Anteile können der Erwartungswert und die Varianz sowie der Nutzen des Portefeuilles - wie oben gezeigt - bestimmt werden.

3.2.5.2. Ermittlung optimaler Portefeuilles im I-Wertpapiere-Fall

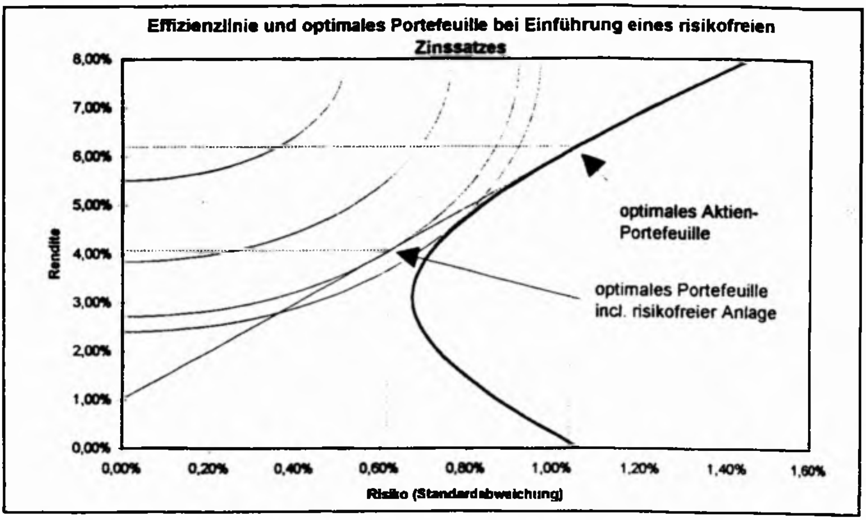
3.2.5.2.1. Grafische Lösung

Für den I-Wertpapiere-Fall gelten die beschriebenen Zusammenhänge in ähnlicher Form, nur daß die Optimierung des Wertpapierportefeuilles mathematisch aufwendiger ist. Während im Zwei-Wertpapiere-Fall die Parameter der möglichen Portefeuilles mittels einer Linie abgebildet werden können, ergibt sich im I-Wertpapiere-Fall eine Fläche, die alle möglichen Rendite-Risiko-Kombinationen der verschiedenen Wertpapierzusammenstellungen wiedergibt.

Als effiziente Portefeuilles werden diejenigen Portefeuilles bezeichnet, die eine maximale Rendite bei gegebenem Risiko bzw. ein minimales Risiko bei gegebener Rendite aufweisen (vgl. die Linie der effizienten Portefeuilles, die sogenannte efficient frontier). Ein Anleger wird nun das Portefeuille auf der efficient frontier wählen, welches seinen Risikopräferenzwert maximiert. Die einzelnen Indifferenzkurven geben jeweils an, welche Risiko-Rendite-Kombinationen aus Sicht des Anlegers den gleichen Risikopräferenzwert aufweisen. Somit ist das Portefeuille optimal, welches sich als Tangentialpunkt der Indifferenzkurve mit dem maximalen Risikopräferenzwert und der Linie der effizienten Portefeuilles ergibt. Die in der folgenden Abbildung angegebene Linie der effizienten Portefeuilles wurde aus den angegebenen Daten - wie im weiteren noch beschrieben - berechnet (Datei: PST10).



Führt man als zusätzliche Annahme ein, daß es risikolose Anlage- und Finanzierungsmöglichkeiten zum Zinssatz r_f (hier = 1%) gibt, dann erhält man eine neue Effizienzlinie. Wie aus der folgenden Abbildung ersichtlich, kann es für einen Anleger dann immer nur eine sinnvolle Kombination risikobehafteter Finanztitel geben, die dann wiederum in Verbindung mit einer risikolosen Geldanlage bzw. Finanzierung zum risikolosen Zinssatz den optimalen Risikopräferenzwert aufweist (Tobin Separationstheorem).



Die noch folgende Herleitung des Capital Asset Pricing Model ist ähnlich, nur braucht hier im Rahmen der Portfoliotheorie die Annahme homogener Erwartungen der Anleger bezüglich der zukünftigen Verteilung der Aktienrenditen nicht eingeführt zu werden. Jeder Anleger wird auch im Rahmen der Portfoliotheorie eine Kombination aus risikofreien Titeln und einem speziellen Portefeuille risikobehafteter Titel wählen, wobei die Zusammenstellung des risikobehafteten Aktienportefeuilles unabhängig ist von der Risikopräferenzfunktion des Anlegers. Wenn Anleger aber unterschiedliche (also heterogene) Erwartungen bezüglich der Verteilungen zukünftiger Aktienrenditen haben, sind auch die durch die Anleger ermittelten Effizienzlinien unterschiedlich, da sich individuelle Zusammenstellungen der risikobehafteten Portefeuilleanteile ergeben (also unterschiedliche "individuelle Marktportefeuilles").

3.2.5.2.2. Mathematische Lösung

Im weiteren wird dargestellt, wie die optimale Zusammenstellung eines Portefeuilles auf der Grundlage von I Wertpapieren mittels des Lagrangeansatzes möglich ist, wobei davon ausgegangen wird, daß Leerverkäufe zugelassen sind. Die weitere Vorgehensweise basiert auf folgenden Schritten:[1]

1) Ermittlung des Erwartungswertes und der Varianz der Renditen des varianzminimalen Portefeuilles sowie der Gewichte (Anteile) dieses Portefeuilles.
2) Berechnung der Hilfsgrößen KE und d_i.
3) Ermittlung der Parameter anderer optimaler Portefeuilles bei Vorgabe von Theta, dem Erwartungswert bzw. der Varianz der Renditen.
4) Ermittlung der Parameter des optimalen Aktienportefeuilles bei Vorgabe des risikofreien Zinssatzes.

1 Zu den folgenden Ausführungen siehe Uhlir/Steiner (1994), S. 142-156.

Bevor die einzelnen Schritte dargestellt werden, ist es zweckmäßig, die Gleichungen zur Bestimmung des Erwartungswertes und der Varianz der Portefeuillerenditen in Matrizenform zu schreiben. So gilt für den Erwartungswert der Renditen eines Portefeuilles (siehe für die folgenden Rechnungen die Datei PST10):

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{r_i} = (w_1 \ \dots \ w_I) \begin{pmatrix} \mu_{r_1} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{r_I} \end{pmatrix}$$

Die Varianz eines Portefeuilles ergibt sich über:

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{r_i r_j} = (w_1 \ \dots \ w_I) \begin{pmatrix} \sigma_{r_1 r_1} & \dots & \sigma_{r_1 r_I} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \sigma_{r_I r_1} & \dots & \sigma_{r_I r_I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_I \end{pmatrix}$$

Die mittlere der drei zu multiplizierenden Matrizen ist die eingangs erläuterte Varianz-Kovarianz-Matrix. Die dritte Matrix ist der Vektor der Gewichte (Anteile) der im Portefeuille enthaltenen Wertpapiere. Die erste Matrix entspricht dem transponierten Vektor dieser Gewichte.

Für die Optimierung des Portefeuilles bei Vorgabe einer Risikopräferenzfunktion wird im weiteren von folgender - bereits vorgestellten - Form ausgegangen:

$$U(\mu_{r_P}, \sigma^2_{r_P}) = \Theta \, \mu_{r_P} - \sigma^2_{r_P}$$

Schritt 1: Varianzminimales Portefeuille

Als erster Schritt ist - auf der Grundlage der Varianz-Kovarianz-Matrix - eine Matrix C mit folgendem Muster aufzustellen:

$$C = \begin{pmatrix} 2\sigma_{r_1 r_1} & \dots & 2\sigma_{r_1 r_I} & 1 \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ 2\sigma_{r_I r_1} & \dots & 2\sigma_{r_I r_I} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix C ist zu invertieren. Man erhält die Matrix C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1I} & c_1 \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ a_{I1} & \dots & a_{II} & c_I \\ c_1 & \dots & c_I & c_{I+1} \end{pmatrix}$$

Die Werte für c_1 bis c_I stellen bereits die Anteile des varianzminimalen Portefeuilles MVP dar. Aus diesen Anteilen können der Erwartungswert der Renditen des **varianzminimalen Portefeuilles** und die Varianz der Renditen dieses Portefeuilles berechnet werden:

$$\mu_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I} c_i \, \mu_{r_i} = (c_1 \; \dots \; c_I) \begin{pmatrix} \mu_{r_1} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{r_I} \end{pmatrix} = 3{,}12\%$$

$$\sigma^2_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} c_i \, c_j \, \sigma_{r_i r_j} = (c_1 \; \dots \; c_I) \begin{pmatrix} \sigma_{r_1 r_1} & \dots & \sigma_{r_1 r_I} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \sigma_{r_I r_1} & \dots & \sigma_{r_I r_I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_I \end{pmatrix} = 0{,}00484\%$$

mit den Gewichten:

$$(c_1 \; \dots \; c_I) = (52\%; \; 45\%; \; 4\%; \; 39\%; \; 30\%; \; -38\%; \; -22\%; \; -9\%; \; 11\%; \; -10\%)$$

Schritt 2: Berechnung von KE und d_i

Die Parameter des MVP sind hilfreich bei der Berechnung der optimalen Anteile von Portefeuilles bei denen der Erwartungswert, die Varianz oder der Risikopräferenzparameter Θ vorgegeben werden. Benötigt wird darüber hinaus aber noch eine "ertragsspezifische Kennzahl", die in Anlehnung an Uhlir/Steiner als KE bezeichnet werden soll:

$$KE = \sum_{i=1}^{I} \mu_{r_i} \, d_i = (\mu_{r_1} \; \dots \; \mu_{r_I}) \begin{pmatrix} d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_I \end{pmatrix} = (\mu_{r_1} \; \dots \; \mu_{r_I}) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1I} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{I1} & \dots & a_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{r_1} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{r_I} \end{pmatrix} = 6{,}79$$

wobei die Werte für d_i definiert sind als:

$$d_i = \sum_{j=1}^{I} a_{ij} \, \mu_{r_j}$$

bzw.:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1I} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{I1} & \dots & a_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{r_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{r_I} \end{pmatrix}$$

mit:

$(d_1 \dots d_I)$ = (-41,97; 16,74; 10,58; 2,28; -17,68; 11,29; 1,02; -27,22; 29,86; 15,11)

Schritt 3: Optimierung von Portefeuilles ohne Vorgabe von r_f

Grundsätzlich können Portefeuilles nach drei Maßgaben optimiert werden:
- Bei Vorgabe des Risikopräferenzparameters Θ wird der Nutzen optimiert, der sich aus der Kombination des Erwartungswertes mit der Varianz der Portefeuillerenditen ergibt.
- Bei Vorgabe des Erwartungswertes der Portefeuillerenditen wird die Varianz der Portefeuillerenditen minimiert.
- Bei Vorgabe der Varianz der Portefeuillerenditen wird der Erwartungswert der Portefeuillerenditen maximiert.

Für die beiden letztgenannten Fälle wird als eine Art Zwischenergebnis zunächst der Wert für Theta bestimmt. Dieser Wert bildet auch den Ausgangspunkt zur Berechnung der jeweiligen Anteile der Wertpapiere am Wert des Portefeuilles.

Für ein **vorgegebenes (oder bereits ermitteltes)** Θ (hier 0,160%) werden die optimalen Anteile w_i wie folgt bestimmt (falls die Möglichkeit einer risikofreien Anlage **nicht** besteht):

$$w_i = c_i + \Theta\, d_i$$

bzw.:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_I \end{pmatrix} + \Theta \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}93\% \\ 48{,}00\% \\ 5{,}37\% \\ 39{,}08\% \\ 27{,}50\% \\ -36{,}65\% \\ -22{,}10\% \\ -13{,}76\% \\ 15{,}43\% \\ -7{,}81\% \end{pmatrix}$$

Der Erwartungswert der Renditen kann über die ermittelten Anteile oder vereinfacht wie folgt bestimmt werden:

$$\mu_{r_P} = \mu_{r_{MVP}} + \Theta\, KE = 0{,}0312 + 0{,}0016 \cdot 6{,}79 = 4{,}206\%$$

Gleiches gilt für die Varianz der Portefeuillerenditen:

$$\sigma^2_{r_P} = \sigma^2_{r_{MVP}} + \theta^2 \frac{KE}{2} = 0{,}0000484 + 0{,}0016^2 \frac{6{,}79}{2} = 0{,}00571\%$$

Für die Optimierung der Portefeuilleanteile im Sinne einer Varianzminimierung bei **Vorgabe des Erwartungswertes** der Portefeuillerenditen (hier 5%) ist zunächst Θ zu bestimmen, indem die o.a. Funktion umgeformt wird. Der Wert für Θ wird hier also nicht vom Anleger vorgegeben, sondern nur als eine Art Hilfsgröße oder Zwischenergebnis berechnet:

$$\Theta = \frac{\mu_{r_P} - \mu_{r_{MVP}}}{KE} = \frac{0{,}05 - 0{,}0312}{6{,}79} = 0{,}00277$$

Durch Verwendung der o.a. Funktion ergibt sich:

$$\sigma^2_{r_P} = \sigma^2_{r_{MVP}} + \theta^2 \frac{KE}{2} = 0{,}0000484 + 0{,}00277^2 \frac{6{,}79}{2} = 0{,}007446\%$$

Die Anteile könnten - wie oben gezeigt - berechnet werden, worauf an dieser Stelle aber verzichtet werden soll.

Für die Optimierung der Portefeuilleanteile im Sinne einer Maximierung des Erwartungswertes der Renditen bei **Vorgabe der Varianz** der Portefeuillerenditen (hier 0,0081%) ist Θ über die Umformung der o.a. Funktion zu bestimmen:

$$\Theta = \left(\frac{2\,(\sigma^2_{r_P} - \sigma^2_{r_{MVP}})}{KE}\right)^{0,5} = \left(\frac{2\,(0{,}000081 - 0{,}0000484)}{6{,}79}\right)^{0,5} = 0{,}0031$$

Durch Verwendung der o.a. Funktion ergibt sich:

$$\mu_{r_P} = \mu_{r_{MVP}} + \theta\, KE = 0{,}0312 + 0{,}0031 \cdot 6{,}79 = 5{,}22\%$$

Die Anteile könnten w.o. berechnet werden, worauf an dieser Stelle aber verzichtet werden soll.

Schritt 4: Einbezug einer risikofreien Anlage

Für den Fall, daß eine **risikolose Kapitalanlage oder Finanzierung** zu r_f (hier = 1%) möglich ist, gibt es nur eine sinnvolle Gewichtung der risikobehafteten Titel (das "individuelle Marktportefeuille"). Diese Gewichte ergeben sich wiederum über die Hilfsgröße Θ, welche wie folgt berechnet wird:

$$\Theta = \frac{2\,\sigma^2_{r_{MVP}}}{\mu_{r_{MVP}} - r_f} = \frac{2 \cdot 0{,}0000484}{0{,}0312 - 0{,}01} = 0{,}0046$$

Das optimale (von den Risikopräferenzen unabhängige) Portefeuille weist eine erwartete Rendite von 6,22% und eine Varianz von 0,01193% auf:

$$\mu_{r_P} = \mu_{r_{MVP}} + \theta\, KE = 0{,}0312 + 0{,}0046 \cdot 6{,}79 = 6{,}22\%$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sigma^2_{r_{MVP}} + \theta^2 \frac{KE}{2} = 0{,}0000484 + 0{,}0046^2 \frac{6{,}79}{2} = 0{,}01193\%$$

Die auf dieser Grundlage berechneten Anteile können in Kombination mit einer risikolosen Kapitalanlage so optimiert werden, daß den Präferenzen des Anlegers entsprochen wird. Hierfür wäre wiederum die Vorgabe von Θ, des Erwartungswertes oder der Varianz der Portefeuillerenditen notwendig. Die Lösung ergibt sich wie bereits im Zwei-Wertpapiere-Fall behandelt. Die beiden "Wertpapiere" sind hier die risikofreie Verzinsung und das "individuelle Marktportefeuille".

Abschließend soll auf die Problematik eingegangen werden, daß die bisher gezeigten Relationen nur bei Zulässigkeit von Leerverkäufen gelten. Wenn Leerverkäufe ausgeschlossen sind, darf keiner der berechneten Anteile negativ sein. Dies ist dann der Fall, wenn Θ einen bestimmten Bereich weder unter- noch überschreitet. Für einen Finanztitel i gilt diese Bedingung, wenn folgende Relationen eingehalten werden:

$$-\frac{c_i}{d_i} \leq \theta \leq +\frac{c_i}{d_i}$$

Wenn diese Bedingungen für alle I Finanztitel "übereinandergelegt" werden, erhält man einen Wertebereich, in dem sich Θ befinden muß, falls Leerverkäufe nicht zugelassen sind. Liegt Θ nicht in diesem Bereich, kann eine Lösung mittels des gezeigten Lagrangeansatzes nicht berechnet werden. Statt dessen wären Verfahren der Quadratischen Optimierung unter Verwendung der Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingung einzusetzen.

Im vorliegenden Rechenbeispiel ist die Nicht-Negativitätsbedingung der Anteile nicht eingehalten. Die berechneten Ergebnisse sind also nur dann "richtig", wenn Leerverkäufe zulässig sind.

3.2.6. Systematisches, unsystematisches Risiko und naive Diversifikation

Eine wichtige Erkenntnis der Ausführungen zur Portfoliotheorie ist, daß entsprechend den Kovarianzen der Wertpapierrenditen durch Wertpapiermischung (nur) eine teilweise Risikovernichtung möglich ist. Das durch Diversifikation nicht zu eliminierende Restrisiko wird üblicherweise als systematisches Risiko oder Marktrisiko bezeichnet. Das unsystematische Risiko oder Unternehmensrisiko hingegen kann folglich durch Diversifikation vernichtet werden. Die ökonomische Interpretation des systematischen Risikos könnte in einer gleichzeitigen Wirkung von gesamtwirtschaftlichen Einflüssen auf alle Wertpapierrenditen gesehen werden. Hingegen liegt der Grund für das unsystematische Risiko in unternehmensindividuellen Geschehnissen, die nur auf die Rendite des einzelnen Wertpapiers wirken.

Bezieht man die Risikopräferenzfunktionen mit ein, so resultiert ein Problem bei der Anwendung der Portfoliotheorie daraus, daß die $\mu\sigma$-Entscheidungsregel bei Vorgabe einer beliebigen konkaven Risikopräferenzfunktion eine Normalverteilung der Renditen voraussetzt.

Ein weiteres Problem bei der Anwendung der Portefeuilletheorie besteht darin, die Werte für die notwendigen Verteilungsparameter der erwarteten Wertpapierrenditen zu ermitteln. Neben den grundsätzlichen Problemen, die mit einer Übertragung vergangenheitsbezogener Renditeverteilungen auf zukünftig erwartete Renditeverteilungen einhergehen, ist insbesondere die vollständige Aufstellung der Varianz-Kovarianz-Matrix und deren anschließende Optimierung aufwendig. Wie gezeigt, benötigt man für I = 10 Wertpapiere I = 10 Varianzen und I(I-1)/2 = 45 Kovarianzen. Wollte man eine derartige Analyse für den deutschen Kapitalmarkt mit ca. 500 börsennotierten Werten durchführen, so würde eine vollständige Aufstellung der Varianz-Kovarianz-Matrix die Berechnung von 500 Varianzen und 124.750 Kovarianzen erfordern. Nicht zuletzt dieser Sachverhalt führte zur Entwicklung von Faktormodellen (insbesondere zunächst dem Index-Modell), mit denen versucht wird, die Fülle der Informationen zu verdichten, indem Variablen identifiziert werden sollen, die die Renditen verschiedener Finanztitel zugleich beeinflussen. Ein Problem bei der Anwendung des Lagrangeansatzes besteht - wie gezeigt - darin, daß meist ein Optimum auf der Grundlage von Leerverkäufen gefunden wird.

In der finanzwirtschaftlichen Praxis findet aus den genannten Gründen häufig das Verfahren der "naiven Diversifikation" Anwendung. Bei der reinsten Form der naiven Diversifikation werden Portefeuilles ohne Kenntnis der Erwartungswerte, der Varianzen und insbesondere der Kovarianzen der Wertpapiere quasi willkürlich (naiv) zusammengestellt. Die Portefeuilles werden also im Sinne der Portefeuilletheorie nicht optimiert. Variiert wird lediglich die Anzahl der in das Depot aufzunehmenden unterschiedlichen Aktien, wobei bezüglich nationaler Märkte ein Depot mit ca. 20 Werten insofern als optimal diversifiziert gilt, als daß die Aufnahme zusätzlicher Titel in Relation zur damit verbundenen Risikoreduktion zu hohe Transaktionskosten verursacht.

Für eine Veranschaulichung des Vorgehens bei der "naiven" Diversifikation soll davon ausgegangen werden, daß die Erwartungswerte der Renditen, die Standardabweichungen sowie sämtliche Korrelationskoeffizienten identisch sind. Dann kann die grundlegende Formel zur Bestimmung der Portefeuillevarianz

$$\sigma_{r_p}^2 = \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma_{r_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{r_i r_j}$$

umgeformt werden zu:

$$\sigma_{r_p}^2 = I \, w^2 \, \sigma_r^2 + 2 \, \frac{I(I-1)}{2} \, w^2 \, \sigma_r^2 \, \rho$$

$$\sigma_{r_p}^2 = I \, \frac{1}{I^2} \, \sigma_r^2 + I(I-1) \, \frac{1}{I^2} \, \sigma_r^2 \, \rho$$

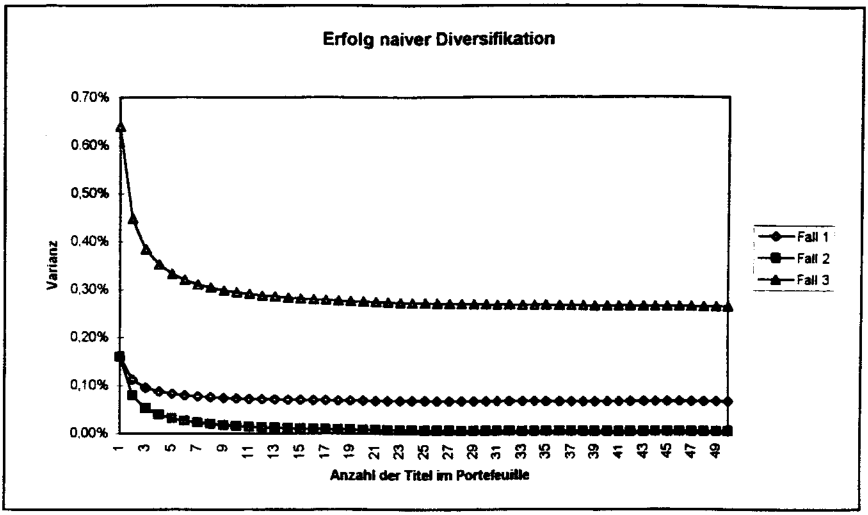
$$\sigma_{r_p}^2 = \frac{1}{I} \, \sigma_r^2 + \frac{I-1}{I} \, \sigma_r^2 \, \rho$$

Es ist erkennbar, daß für I gegen ∞ gilt:

$$\sigma_{r_p}^2 = \sigma_r^2 \, \rho = \sigma_{r_i r_j}$$

Für ein Beispiel werden 3 Fälle unterschieden, für die in der Tabelle und in der Grafik die Portefeuillevarianzen angegeben sind (Datei: Naive_D):

Fall	1	2	3
$\rho_{ri\,rj}$ (Korrelationskoeffizienten)	40%	0%	40%
$\sigma_{ri\,rj}$ (Kovarianzen)	0,06%	0%	0,26%
σ_{ri} (Standardabweichungen)	4%	4%	8%
σ_{ri}^2 (Varianzen)	0,16%	0,16%	0,64%
Anzahl der Finanztitel	σ_{rP}^2 (Portefeuillevarianzen)		
I=1	0,16%	0,16%	0,64%
4	0,09%	0,04%	0,35%
50	0,07%	0,00%	0,26%



Übertragen auf das vorliegende Beispiel auf der Grundlage der 10 Aktien (vgl. die Tabelle Datensatz: Aktienrenditen, risikofreie Zinssätze und Marktrenditen [Datei: Renditen]) führt die naive Diversifikation (also die gleichgewichtete Zusammensetzung eines Portefeuilles aus den I = 10 Aktien) zu einem Erwartungswert der Portefeuillerenditen von 16,20% mit einer Standardabweichung von 4,76 Prozent.

3.2.7. Empirische Daten

Ein Gegenüberstellung von Renditen im internationalen Vergleich zeigt, daß die beschriebenen Zusammenhänge zumindest in der Vergangenheit tendenziell galten. So kann beobachtet werden, daß Anlagen mit höheren Risiken grundsätzlich auch höhere Renditen erwarten ließen. Dies galt insbesondere für gut diversifizierte Portefeuilles, die letztlich nur noch dem systematischen Risiko unterlagen.

Vorsteuerrenditen der Jahre 1953-1988 im internationalen Vergleich; Quelle: modifiziert entnommen aus Uhlir/Steiner (1994), S. 161 f.

alle Angaben in %	BRD	Österreich	Schweiz	USA
Aktienrenditen (μ,σ)	14,4; 27,2	12,8; 24,3	10,4; 22,7	12,4; 17,5
Renditen von Obligationen (μ,σ)	7,9; 5,6	7,4; 2,9	4,7; 4,2	5,6; 10,6
r_f (μ,σ)	4,6; 1,6	5,6;1,7	3,3; 1,5	5,5; 3,2
Risikoprämien (Aktienrenditen-r_f) (μ,σ)	9,8; 27,7	7,2; 24,4	7,1; 23,1	6,9; 18,1
Inflationsraten (μ)	3,0	4,0	3,3	4,5
Aktienrenditen nach Inflation (μ)	11,4	8,8	7,1	7,9
Renditen von Obligationen nach Inflation (μ)	4,9	3,4	1,4	1,1
risikofreie Verzinsung nach Inflation (μ)	1,6	1,6	0,0	1,0

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben - Dateien: Renditen, Ren-Ber, PST2, PST3, PST10, Nutzen

A) Berechnen Sie für die folgenden drei Aktien die Renditen bei diskreter und kontinuierlicher Zinsberechnung. Ermitteln Sie daraus die Mittelwerte sowie die "normalen" und korrigierten Volatilitäten (jeweils p.a.).

	t=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Kurs 3	90,00	100,57	119,24	128,68	147,73	159,47	185,63	205,00	214,72	239,03	278,81	298,59	346,37	388,34	444,04	514,73	620,26
Kurs 6	75,00	85,70	99,28	114,69	135,75	152,20	185,04	201,51	226,17	258,34	325,70	355,37	408,41	475,60	595,38	696,37	815,43
Kurs 10	30,00	33,74	41,68	50,59	61,64	77,34	110,79	127,92	153,86	187,29	252,20	288,77	339,23	399,20	577,03	766,70	969,86

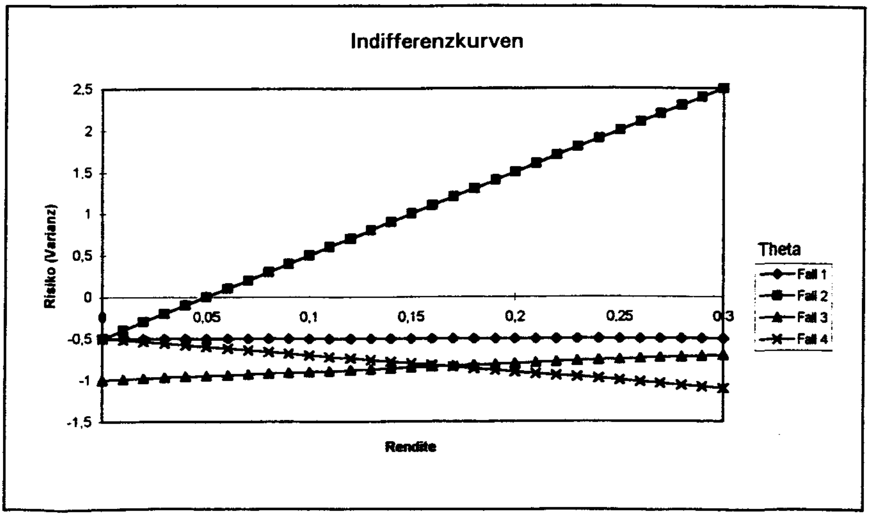
B) Scheinen Ihnen die berechneten Renditen - wenn Sie die Ergebnisse als Grafik darstellen - frei von Autokorrelation?

C) Stellen Sie die Varianz-Kovarianz-Matrix, die Matrix der Korrelationskoeffizienten, die Matrix der Konstanten und der Steigungen auf.

D) Gehen Sie von folgender bekannten Risikopräferenzfunktion aus:

$$U(\mu_{r_p}, \sigma^2_{r_p}) = \Theta\ \mu_{r_p} - \sigma^2_{r_p}$$

Ermitteln Sie für die in der folgenden Abbildung wiedergegebenen Verläufe die Parameter der Risikopräferenzfunktionen. Wie würden Sie die Risikoeinstellung der jeweiligen Investoren beschreiben?



Inwiefern sind die gewählten Beispiele/Verläufe nicht plausibel?

E) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Renditen eines Wertpapier-Portefeuilles, welches zu gleichen Teilen aus den drei Aktien 3, 6 und 10 besteht.

F) Ermitteln Sie die Parameter (Gewichte, Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen) eines varianzminimalen Zwei-Wertpapiere-Portefeuilles, wenn Sie nur die Aktien 3 und 6 einbeziehen dürfen.

G) Welche Parameter (Gewichte, Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen) hätten sich für das varianzminimale Zwei-Wertpapiere-Portefeuille ergeben, wenn der Korrelationskoeffizient 1, 0, -1 bzw. 0,5 wäre (die Kovarianzen ändern sich entsprechend)?

H) Stellen Sie die Risiko-Rendite-Kombinationen für diese vier Fälle in einer Grafik dar, falls Leerverkäufe nicht zulässig sind.

I) Ermitteln Sie das varianzminimale Portefeuille (Gewichte, Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen) unter Einbezug aller $I = 3$ Wertpapiere (Leerverkäufe sind zugelassen).

J) Gehen Sie von der im Skript unterstellten Risikopräferenzfunktion aus und berechnen Sie für $\Theta = 0{,}10$ die Parameter (Gewichte, Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen) des optimalen Portefeuilles.

K) Wie setzt sich das optimale (varianzminimale) Portefeuille zusammen, wenn der Erwartungswert der Renditen 30% sein soll? Geben Sie die Parameter des Portefeuilles vollständig an (Gewichte, Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen). Ist die Bedingung relevant, daß Leerverkäufe zulässig sind?

L) Wie setzt sich das optimale (renditemaximale) Portefeuille zusammen, wenn die Standardabweichung der Renditen 10% sein soll? Geben Sie die Parameter des Portefeuilles vollständig an (Gewichte, Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen). Ist die Bedingung relevant, daß Leerverkäufe zulässig sind?

M) Wie setzt sich das optimale Portefeuille zusammen, wenn die Möglichkeit einer risikofreien Kapitalanlage- und aufnahme zu einem Zinssatz von 2% hinzukommt? Geben Sie die Parameter des Portefeuilles vollständig an (Gewichte, Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen). Ist die Bedingung relevant, daß Leerverkäufe zulässig sind?

N) Ermitteln Sie das Risiko (die Varianz der Renditen) eines Wertpapierportefeuilles, welches sich zu gleichen Teilen aus $I = 1/4/\infty$ vielen Wertpapieren zusammensetzt, die alle folgende identische Parameter aufweisen:
Erwartungswert der Renditen $\mu_{ri} = 12\%$
Standardabweichung der Renditen $\sigma_{ri} = 6\%$
Korrelationskoeffizienten der Renditen $\rho_{ri\,rj} = 0/0{,}5/1$

Erklären Sie auf dieser Grundlage anhand einer Grafik das systematische und unsystematische Risiko sowie die Möglichkeiten und Grenzen der naiven Diversifikation.

Lösungshinweise

A)

	t = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	μ_n	σ_n'	$\sigma_n^{2\prime}$	σ_n	σ_n^2
Kurs 3	90,00	100,57	119,24	128,68	147,73	169,47	185,63	205,00	214,72	239,03	278,81	298,59	346,37	388,34	444,04	514,73	620,26					
Kurs 6	75,00	85,70	99,28	114,69	135,75	152,20	186,04	201,51	226,17	268,34	326,70	356,37	408,41	475,60	595,38	696,37	815,43					
Kurs 10	30,00	33,74	41,68	50,59	61,64	77,34	110,79	127,92	153,86	187,29	252,20	288,77	339,23	399,20	577,03	766,70	969,86					
r_{3tk}		11,10	17,03	7,62	13,80	7,65	15,19	9,93	4,63	10,73	15,39	6,85	14,64	11,44	13,40	14,77	18,65	12,06	3.98	0,16	3,88	0,15
r_{6tk}		13,33	14,72	14,43	16,86	11,44	19,54	8,53	11,54	13,30	23,17	8,72	13,91	15,23	22,46	15,67	15,78	14,91	4,17	0,17	4,04	0,16
r_{10tk}		11,74	21,14	19,38	18,74	22,70	35,94	14,37	18,47	19,68	29,75	13,54	16,10	18,28	36,84	28,42	23,51	21,72	7,53	0,57	7,29	0,53
r_{3td}		11,74	18,56	7,92	14,60	7,95	18,40	10,44	4,74	11,32	18,64	7,09	16,00	12,12	14,34	15,92	20,60	12,91	4,48	0,20	4,34	0.19
r_{6td}		14,26	15,85	15,52	18,36	12,12	21,58	8,90	12,23	14,22	26,08	9,11	14,92	16,45	25,18	16,96	17,10	16,18	4,89	0,24	4,74	0,22
r_{10td}		12,46	23,54	21,39	21,83	25,48	43,24	15,46	20,28	21,73	34,65	14,50	17,47	17,68	44,55	32,87	26,50	24,60	9,65	0,93	9,34	0,87

C)

	Varianz-Kovarianz-Matrix		
Aktien	3	6	10
3	0,002005	0,001309	0,001931
6	0,001309	0,002394	0,003812
10	0,001931	0,003812	0,009314

	Matrix der Konstanten		
Aktien	3	6	10
3	0,00000	0,07752	0,12168
6	0,04061	0,00000	-0,01156
10	0,07804	0,06110	0,00000

	Korrelationskoeffizientenmatrix		
Aktien	3	6	10
3	1,000	0,597	0,447
6	0,597	1,000	0,807
10	0,447	0,807	1,000

	Matrix der Steigungen		
Aktien	3	6	10
3	1,00000	0,65290	0,96344
6	0,54672	1,00000	1,59208
10	0,20738	0,40925	1,00000

D)

	1	2	3	4
Risikopräferenzwert für $\mu = 0$	0,5	0,5	1	0,5
Θ	0	10	1	-2

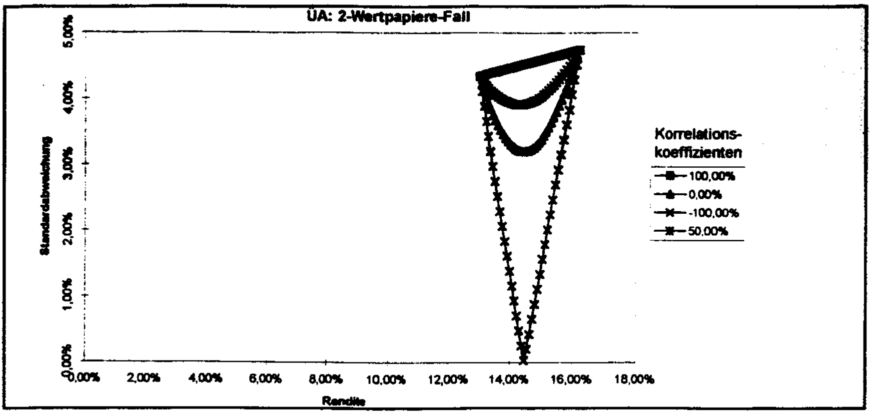
E) $\mu_{rP} = 17{,}90\%$; $\sigma_{rP}^2 = 0{,}3091\%$; $\sigma_{rP} = 5{,}56\%$

F) $w_3 = 60{,}93\%$; $w_6 = 39{,}07\%$; $\mu_{rMVP} = 14{,}18\%$; $\sigma_{rMVP} = 4{,}16\%$; $\sigma_{rMVP}^2 = 0{,}17\%$

G)

$\rho_{ri\,rj}$	$w_{3,MVP}$	$w_{6,MVP}$	μ_{rMVP}	σ_{rMVP}
1	1.177,46%	-1.077,46%	-22,35%	0
0	54,43%	45,57%	14,40%	3,30%
-1	52,22%	47,78%	14,47%	0
0,5	58,82%	41,18%	14,25%	4,04%

H)



I) Zwischenschritte:
erweiterte Kovarianzmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0,00401 & 0,00262 & 0,00386 & 1 \\ 0,00262 & 0,00479 & 0,00762 & 1 \\ 0,00386 & 0,00762 & 0,01863 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse der erweiterten Kovarianzmatrix (incl. den Gewichten c für MVP)

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 307,44 & -367,28 & 59,84 & 0,50 \\ -367,28 & 561,17 & -193,89 & 0,75 \\ 59,84 & -193,89 & 134,06 & -0,25 \\ 0,50 & 0,75 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen des MVP

$$\mu_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I} c_i \, \mu_{r_i} = (0,50 \quad 0,75 \quad -0,25) \begin{pmatrix} 0,1291 \\ 0,1618 \\ 0,2460 \end{pmatrix} = 12,44\%$$

$$\sigma^2_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} c_i \, c_j \, \sigma_{ij} = (0,50 \quad 0,75 \quad -0,25) \begin{pmatrix} 0,002005 & 0,001309 & 0,001931 \\ 0,001309 & 0,002394 & 0,003812 \\ 0,001931 & 0,003812 & 0,009313 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix} = 0,150\%$$

$$\sigma_{r_{MVP}} = 3,872\%$$

$$KE = \sum_{i=1}^{I} \mu_{r_i} \, d_i = (0,1291 \quad 0,1618 \quad 0,2460) \begin{pmatrix} 307,44 & -367,28 & 59,84 \\ -367,28 & 561,17 & -193,89 \\ 59,84 & -193,89 & 134,06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1291 \\ 0,1618 \\ 0,2460 \end{pmatrix} = 95,06\%$$

J) $\mu_{rP} = 21,95\%$; $\sigma_{rP}^2 = 0,63\%$; $\sigma_{rP} = 7,91\%$
$w_1 = -0,45\%$; $w_2 = 32,12\%$; $w_3 = 68,32\%$

K) Θ (Zwischenwert) = 18,47%; σ_{rP}^2 = 1,77%; σ_{rP} = 13,31%
w_1 = -42,97%; w_2 = -4,41%; w_3 = 147,39%

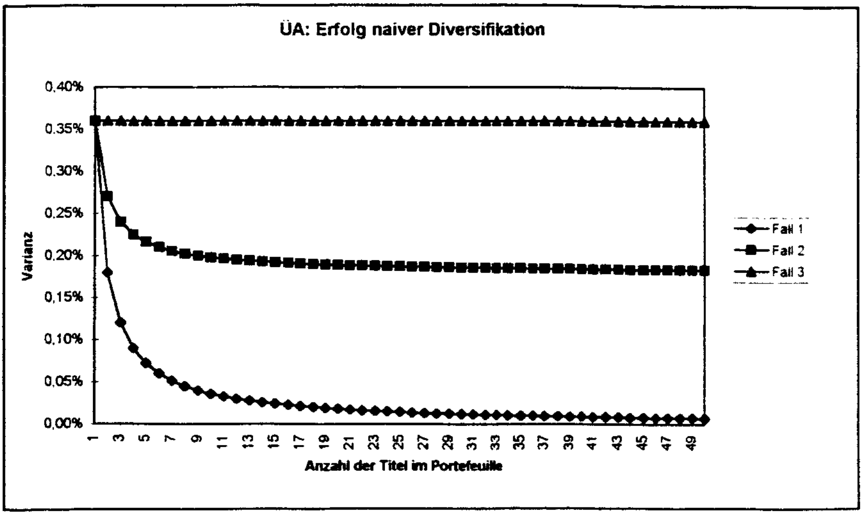
L) Θ (Zwischenwert) = 13,37%; μ_{rP} = 25,16%
w_1 = -17,38%; w_2 = 17,57%; w_3 = 99,81%

M) Θ (Zwischenwert) = 2,87%; μ_{rP} = 15,17%; σ_{rP}^2 = 0,19%; σ_{rP} = 4,35%
w_1 = 35,35%; w_2 = 62,87%; w_3 = 1,79%

Die Zusammenstellung der risikofreien Anlage/Finanzierung mit dem optimalen Aktienportefeuille kann wiederum nur bei Vorgabe einer Risikopräferenzfunktion erfolgen.

N)

Fall	1	2	3
$\rho_{ri\,rj}$ (Korrelationskoeffizienten)	0%	50%	100%
$\sigma_{ri\,rj}$ (Kovarianzen)	0%	0,18%	0,36%
σ_{ri} (Standardabweichungen)	6%	6%	6%
σ_{ri}^2 (Varianzen)	0,36%	0,36%	0,36%
Anzahl der Finanztitel	σ_{rP}^2 (Portefeuillevarianzen)		
I=1	0,36%	0,36%	0,36%
4	0,09%	0,23%	0,36%
∞	0,00%	0,18%	0,36%



Literatur

Ernst-Ludwig Drayß. Nutzen und Gefahren der Portfolio-Optimierung. "Die Bank", (1990), S. 566-567.

Michael Keppler. Portfolio-Theorie: Zweifelhafte Annahmen, suboptimale Ergebnisse. "Die Bank", (1991), S. 382-385.

Michael Keppler. Risiko ist nicht gleich Volatilität. "Die Bank", (1990), S. 610-614.

Markowitz, Harry M. Portfolio Selection, in: "Journal of Finance", (1952), S. 77-92.

Markowitz, Harry M. Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment, New York/London/Sydney 1959.

W. Neuhaus. Indexmodelle zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1969), S. 801-820.

Thomas Nowak. Faktormodelle in der Kapitalmarkttheorie. Köln 1994.

Thomas Roeder und Allan Young. Verringert die Globalisierung die Vorteile internationaler Aktienportefeuilles? "Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft", (1989), S. 85-90.

Herold C. Rohweder. Performancebeitragsmessung und Risikoanalyse in Wertpapierportfolios. "Die Bank", (1992), S. 579-584.

Bernd Rudolph. Portefeuille- und Aktienkursbildung bei monopolistischem Anlegerwettbewerb. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1982), S. 471-490.

Hans-Joachim Spindler. Risiko- und Renditeeffekte der Diversifikation in Konjunkturkrisen. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1988), S. 858-875.

Richard Stehle und Anette Hartmond. Durchschnittsrenditen deutscher Aktien 1954-1988. "Kredit und Kapital", (1991), S. 371-411.

3.3. Faktormodelle

3.3.1. Grundlagen

3.3.1.1. Definition von Faktormodellen

Wie im weiteren Verlauf der Ausführungen noch deutlich wird, liegen die Gemeinsamkeiten der modernen Verfahren der Finanztitelbewertung darin, daß die ihnen zugrunde liegenden Modelle sogenannte Faktormodelle darstellen. Faktormodelle werden unter anderem danach unterschieden, ob sie historische (ex-post-Faktormodelle) oder erwartete (ex-ante-Faktormodelle) Zusammenhänge beschreiben. Die Verbindung dieser beiden Formen sind Faktormodelle, die die zukünftigen Renditen von Finanztiteln als Schätzung aus vergangenen Renditen ableiten (geschätzte Faktormodelle). Die Darstellungen in diesem Abschnitt erfolgen für ex-post-Faktormodelle. Sie sind aber auf ex-ante-Faktormodelle übertragbar. Die zunächst behandelten Faktormodelle - das Markt- und das Indexmodell - beschreiben lediglich statistische Zusammenhänge, die als zutreffend angenommen werden. Die ökonomische Begründung dieser Zusammenhänge erfolgt über die im Anschluß daran dargestellten Faktormodelle in Form des CAPM und der APT.

Ausgangspunkt eines jeden ex-post-Faktormodells sind I*T empirisch beobachtete Renditen r_{it} von I verschiedenen Finanztiteln für T Zeitpunkte. Der Grundgedanke von Faktormodellen ist darin zu sehen, daß die Renditen aller Finanztitel in zwei Komponenten aufgespalten werden können: In eine finanztitelspezifische Komponente und eine faktorspezifische Komponente. Die faktorspezifische Komponente beschreibt den Anteil der Renditen, der sich in Abhängigkeit von K Faktoren F_{kt} ergeben hat, wobei als Faktoren beispielsweise Marktindizes (wie der DAX) Verwendung finden. Die finanztitelspezifische Komponente beschreibt folglich den verbleibenden Teil der Renditen, der sich unabhängig von diesen Faktoren ergeben hat, also "finanztitelspezifisch" ist. Diese "Reste" werden üblicherweise als Residuen bezeichnet. Falls nur ein Faktor zur Erklärung der Renditen herangezogen wird, handelt es sich um ein Ein-Faktormodell, ansonsten um K-Faktormodelle.

Allgemein formuliert wird für (Ex-post-)K-Faktormodelle folgender Renditengenerierungsprozeß angenommen:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_{i1} F_{1t} + \ldots + \beta_{ik} F_{kt} + \ldots + \beta_{iK} F_{Kt} + \varepsilon_{it}$$

bzw.:

$$r_{it} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + \varepsilon_{it}$$

3.3.1.2. Für Faktormodelle relevante Prämissen

Prämissen, die im Zusammenhang mit Faktormodellen relevant sind, werden im weiteren als Faktormodellprämissen (FMP) bezeichnet. Folgende sechs FMP, die einzeln oder in Kombination relevant sein **können**, sind zu unterscheiden:

FMP 1: Die Mittelwerte der Residuen aller Finanztitel sind null:

$$\mu_{\varepsilon_i} = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, I$$

FMP 2: Die Mittelwerte aller Faktoren sind null:

$$\mu_{F_k} = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, K$$

FMP 3: Die Renditen aller Finanztitel sind normalverteilt:

$$r_{it} = NV(\mu_{r_i}; \sigma^2_{r_i}) \quad \forall\, i = 1, \dots, I$$

FMP 4: Die Kovarianzen der Residuen aller Finanztitel sind null:

$$\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = 0 \quad \forall\, i, j = 1, \dots, I \quad \textit{für: } i \neq j$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen entspricht also einer Diagonalmatrix.

FMP 5: Die Kovarianzen aller Faktoren sind null:

$$\sigma_{F_k F_l} = 0 \quad \forall\, k, l = 1, \dots, K \quad \textit{für: } l \neq k$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Faktoren entspricht also einer Diagonalmatrix.

FMP 6: Die Kovarianzen der Residuen aller Finanztitel und aller Faktoren sind null:

$$\sigma_{\varepsilon_i F_k} = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, I \quad \forall\, k = 1, \dots, K$$

Es bestehen also keine Abhängigkeiten zwischen den Residuen und den Faktoren.

3.3.1.3. Mittelwerte und Varianzen auf der Grundlage von Faktormodellen

Wie oben dargelegt, wird im Zusammenhang mit Faktormodellen davon ausgegangen, daß sich die Renditen von Finanztiteln nach folgendem Renditengenerierungsprozeß ergeben haben:

$$r_{it} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, F_{kt} + \varepsilon_{it}$$

In diesem Zusammenhang sind regelmäßig folgende Verteilungsparameter zu berechnen:

1. die Mittelwerte der Renditen einzelner Finanztitel
2. die Kovarianzen der Renditen zwischen einzelnen Finanztiteln
3. die Varianzen der Renditen einzelner Finanztitel
4. die Mittelwerte der Renditen von Portefeuilles
5. die Varianzen der Renditen von Portefeuilles

Bei der Berechnung dieser Verteilungsparameter werden - in Abhängigkeit von den jeweiligen Faktormodellen - verschiedene der o.a. sechs FMP als zutreffend angenommen. Zunächst wird aber dargestellt, wie sich diese Parameter bestimmen lassen, ohne von der Gültigkeit der FMP auszugehen. Die Ausführungen erfolgen für K-Faktormodelle und im Anschluß daran für den Spezialfall der Ein-Faktormodelle.

Zu 1.: Auf der Grundlage des o.a. Renditengenerierungsprozesses können die Mittelwerte der Renditen einzelner Finanztitel wie folgt bestimmt werden:

$$\mu_{r_i} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \mu_{F_k} + \mu_{\varepsilon_i}$$

Zu 2.: Die Varianzen und Kovarianzen der Renditen einzelner Finanztitel ergeben sich über folgende Herleitung:

$$\sigma_{r_i r_j} = E\left([\, r_{it} - \mu_{r_i}]\, [\, r_{jt} - \mu_{r_j}] \right)$$

Durch Einsetzen der Werte für r_{it} bzw. r_{jt} und μ_{ri} und μ_{rj} ergibt sich

$$\sigma_{r_i r_j} = E\left([\, \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + \varepsilon_{it} - \alpha_i - \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \mu_{F_k} - \mu_{\varepsilon_i}]\, [\, \alpha_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} F_{kt} + \varepsilon_{jt} - \alpha_j - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \mu_{F_k} - \mu_{\varepsilon_j}] \right)$$

$$\sigma_{r_i r_j} = E\left([\, \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + \varepsilon_{it} - \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \mu_{F_k} - \mu_{\varepsilon_i}]\, [\, \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} F_{kt} + \varepsilon_{jt} - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \mu_{F_k} - \mu_{\varepsilon_j}] \right)$$

$$\sigma_{r_i r_j} = E\left([\, \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} (F_{kt} - \mu_{F_k}) + (\varepsilon_{it} - \mu_{\varepsilon_i})]\, [\, \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (F_{kt} - \mu_{F_k}) + (\varepsilon_{jt} - \mu_{\varepsilon_j})] \right)$$

$$\sigma_{r_i r_j} = E\Big(\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik} \beta_{jl} (F_{kt} - \mu_{F_k}) (F_{lt} - \mu_{F_l}) + (\varepsilon_{it} - \mu_{\varepsilon_i}) (\varepsilon_{jt} - \mu_{\varepsilon_j}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} (F_{kt} - \mu_{F_k}) (\varepsilon_{jt} - \mu_{\varepsilon_j}) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (F_{kt} - \mu_{F_k}) (\varepsilon_{it} - \mu_{\varepsilon_i}) \Big)$$

$$\sigma_{r_i r_j} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik} \beta_{jl} E[(F_{kt} - \mu_{F_k}) (F_{lt} - \mu_{F_l})] + E[\, (\varepsilon_{it} - \mu_{\varepsilon_i}) (\varepsilon_{jt} - \mu_{\varepsilon_j})] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} E[(F_{kt} - \mu_{F_k}) (\varepsilon_{jt} - \mu_{\varepsilon_j})] + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} E[(F_{kt} - \mu_{F_k}) (\varepsilon_{it} - \mu_{\varepsilon_i})]$$

$$\sigma_{r_i r_j} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

Im weiteren wird die Bestimmungsgleichung für die Kovarianzen weiter aufgespalten, um Erkenntnisse über die Komponenten der Kovarianzen zu gewinnen:

$$\sigma_{r_i r_j} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \beta_{jk} \sigma_{F_k}^2 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{l=1 \\ \text{für } k \neq l}}^{K} \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

Zu 3.: Für die Varianzen der Renditen einzelner Finanztitel als Spezialfall der letztgenannten Relation gilt:

$$\sigma^2_{r_i} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} \beta_{ik}\,\beta_{il}\,\sigma_{F_k F_l} + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,\sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

Eine entsprechende Aufspaltung ergibt:

$$\sigma^2_{r_i} = \sum_{k=1}^{K} \beta^2_{ik}\,\sigma^2_{F_k} + \sum_{k=1}^{K}\;\sum_{l=1\text{ für } l\neq k}^{K} \beta_{ik}\,\beta_{il}\,\sigma_{F_k F_l} + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,\sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

Zu 4.: Für die Mittelwerte der Renditen von Portefeuilles gilt:

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \left(\alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,\mu_{F_k} + \mu_{\varepsilon_i} \right)$$

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i\,\alpha_i + \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\,\beta_{ik}\,\mu_{F_k} + \sum_{i=1}^{I} w_i\,\mu_{\varepsilon_i}$$

sowie

$$\mu_{r_P} = \alpha_P + \sum_{k=1}^{K} \beta_{Pk}\,\mu_{F_k} + \mu_{\varepsilon_P}$$

Zu 5.: Für die Varianzen der Renditen von Portefeuilles gilt:

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} w_i\,w_j \left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} \beta_{ik}\,\beta_{jl}\,\sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,\sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\,\sigma_{F_k \varepsilon_i} \right)$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{ik}\,\beta_{jl}\,\sigma_{F_k F_l} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} w_i\,w_j\,\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{ik}\,\sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{jk}\,\sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

Eine Aufspaltung dieser Gleichung ergibt:

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{ik}\,\beta_{jk}\,\sigma^2_{F_k} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\;\sum_{l=1\text{ für } l\neq k}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{ik}\,\beta_{jl}\,\sigma_{F_k F_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} w_i^2\,\sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=i+1}^{I} w_i\,w_j\,\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\,w_j\,\beta_{ik}\,\sigma_{F_k \varepsilon_j}$$

Für Ein-Faktormodelle vereinfachen sich diese Gleichungen wie folgt:

Zu 1.: Mittelwerte der Renditen einzelner Finanztitel

$$\mu_{r_i} = \alpha_i + \beta_i\,\mu_F + \mu_{\varepsilon_i}$$

Zu 2.: Kovarianzen der Renditen zwischen einzelnen Finanztiteln

$$\sigma_{r_i r_j} = \beta_i\,\beta_j\,\sigma^2_F + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \beta_i\,\sigma_{F \varepsilon_j} + \beta_j\,\sigma_{F \varepsilon_i}$$

Zu 3.: Varianzen der Renditen einzelner Finanztitel

$$\sigma^2_{r_i} = \beta_i^2\,\sigma^2_F + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\,\beta_i\,\sigma_{F \varepsilon_i}$$

Zu 4.: Mittelwerte der Renditen von Portefeuilles

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i\, \alpha_i + \mu_F \sum_{i=1}^{I} w_i\, \beta_i + \sum_{i=1}^{I} w_i\, \mu_{\varepsilon_i}$$

sowie

$$\mu_{r_P} = \alpha_P + \mu_F\, \beta_P + \mu_{\varepsilon_P}$$

Zu 5.: Varianzen der Renditen von Portefeuilles

$$\sigma_{r_P}^2 = \sigma_F^2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j\, \beta_i\, \beta_j + \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma_{\varepsilon_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i\, w_j\, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j\, \beta_i\, \sigma_{F \varepsilon_j}$$

Die verschiedenen Modelle, die im weiteren dargestellt werden, unterstellen die Gültigkeit einer oder mehrerer der o.a. FMP. In Abhängigkeit dieser FMP vereinfachen sich die o.a. Gleichungen zum Teil erheblich, was am Beispiel der Berechnung der Varianzen der Renditen eines Portefeuilles dargestellt werden soll:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jk}\, \sigma_{F_k}^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{l=1 \\ \text{für } l \neq k}}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma_{\varepsilon_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i\, w_j\, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j}$$

Die Varianz der Portefeuillerenditen - berechnet auf der Grundlage von K-Faktormodellen - setzt sich aus fünf Komponenten zusammen. Diese basieren auf

1) den Varianzen der Faktoren
2) den Kovarianzen* der Faktoren
3) den Varianzen der Residuen
4) den Kovarianzen* der Residuen
5) den Kovarianzen* der Faktoren mit den Residuen

Es wird ersichtlich, welche Auswirkungen die FMP 4, 5 und 6 haben. Die mit * gekennzeichneten Komponenten entfallen in der o.a. Gleichung, falls die jeweiligen FMP zutreffen. Wird von der Gültigkeit der drei genannten FMP ausgegangen, verkürzt sich der o.a. Ausdruck für die Varianzen der Renditen von Portefeuilles wie folgt:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jk}\, \sigma_{F_k}^2 + \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Die o.a. Relationen erlauben es nun auch, das Fehlerpotential zu quantifizieren, falls diese FMP nicht eingehalten sind.

3.3.2. Marktmodell

Das Marktmodell stellt eine der grundlegendsten und einfachsten Anwendungen von Faktormodellen dar. Mit Marktmodellen wird insbesondere das Ziel verfolgt, die Bestimmungsgrößen für die Erwartungswerte und die Varianzen zukünftiger Renditen einzelner Finanztitel zu ermitteln, um auf dieser Grundlage Handlungsempfehlungen für den Kauf bzw. Verkauf von Finanztiteln ableiten zu können.

Zu diesem Zweck wird davon ausgegangen, daß der Renditengenerierungsprozeß von Finanztiteln mit folgendem Ein-Faktormodell in Verbindung mit den FMP 1, 4 und 6 beschrieben werden kann:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_i$$

Der renditeerklärende Faktor $\tilde{r}_M$ entspricht der Rendite eines sogenannten Marktportefeuilles (oder dem "Marktindex"), in dem alle Finanztitel (ggf. mit ihren jeweiligen Gewichten in Form der Marktkapitalisierung) enthalten sind. Somit wird davon ausgegangen, daß sich die zukünftigen Renditen und Risiken von Finanztiteln aus zwei Komponenten zusammensetzen: einer finanztitelspezifischen (unsystematischen) und einer marktbezogenen (systematischen) Komponente.

In der marktbezogenen Komponente spiegelt sich die Vorstellung wider, daß die zukünftigen Renditen aller Finanztitel mehr oder weniger stark von der Entwicklung nur einer Größe, dem Marktindex, abhängig sind. Andere zukünftige gemeinsame Abhängigkeiten der Renditen verschiedener Finanztitel werden somit ausgeschlossen. Damit wird unterstellt, daß die zukünftigen variablen finanztitelspezifischen Renditekomponenten (die Residuen) zwischen verschiedenen Finanztiteln unabhängig sind (FMP 4).

Die Gültigkeit der FMP 1 vorausgesetzt, ergibt sich der Erwartungswert der Renditen von Finanztiteln nach dem Marktmodell als ein (ex-ante-)Ein-Faktormodell:

$$\mu_{r_i} = \alpha_i + \beta_i \mu_{r_M}$$

Die Gültigkeit der FMP 6 vorausgesetzt, können die Varianzen der Renditen einzelner Finanztitel bestimmt werden über:

$$\sigma_{r_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_{r_M}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Das Risiko bezüglich einzelner Finanztitel wird somit aufgespalten in einen systematischen (marktbezogenen) $\beta_i^2 \sigma_{r_M}^2$ und einen unsystematischen (finanztitelspezifischen) Teil $\sigma_{\varepsilon_i}^2$. Diese Aufspaltung ist begrifflich aber nur dann zutreffend, wenn die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen einer Diagonalmatrix entspricht, wenn also die Kovarianzen zwischen den Residuen der Finanztitel null sind (FMP 4). Wenn die Kovarianzen der Residuen ungleich null sind, gibt es offensichtlich weitere systematische Risiken, die über den einen Faktor nicht erfaßt werden. Ungeachtet dieser Überlegung führt die o.a. Berechnungsvorschrift zu korrekten Werten für die Varianzen der Renditen einzelner Finanztitel.

Der Anteil der systematischen (marktbezogenen oder auch erklärten) Varianz der Renditen einzelner Finanztitel an der Gesamtvarianz wird über das Bestimmtheitsmaß $\rho_{r_i}^2$ quantifiziert:

$$\rho_{r_i}^2 = \frac{\text{systematische Varianz eines Finanztitels}}{\text{Gesamtvarianz eines Finanztitels}} = \frac{\sigma_{r_i}^2 - \sigma_{\varepsilon_i}^2}{\sigma_{r_i}^2}$$

Durch Umstellung kann auch geschrieben werden:

$$\rho_{r_i}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\varepsilon_i}^2}{\sigma_{r_i}^2}$$

Somit ist die unsystematische (finanztitelspezifische oder auch nicht erklärte) Varianz bestimmbar über:

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = (1 - \rho_{r_i}^2)\, \sigma_{r_i}^2$$

Die Werte für α_i und β_i ergeben sich aus den Kovarianzen $\sigma_{r_M r_i}$ wie folgt:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{r_M r_i}}{\sigma_{r_M}^2}$$

$$\alpha_i = \mu_{r_i} - \beta_i\, \mu_{r_M}$$

Ausgehend von der Annahme, daß der ermittelte (ex-post)Renditengenerierungsprozeß auf die Zukunft übertragbar ist, wird in der Anlagepraxis gelegentlich empfohlen, Finanztitel mit einem hohen Wert für α_i zu kaufen. Diese Empfehlungen sind c.p. natürlich nachvollziehbar. Für eine finanzwirtschaftliche Interpretation dieser Überlegung bei Aufhebung der c.p.-Bedingung ist es zweckmäßig, die o.a. Faktormodellannahme umzuformulieren zu:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_i\, \mu_{r_M} + \beta_i\, \tilde{r}_M^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

mit:

$$\tilde{r}_M^0 = \tilde{r}_M - \mu_{r_M}$$

$$\mu_{r_M^0} = 0$$

Geht man von der Überlegung aus, daß Anleger für Entscheidungen über den Erwerb von Finanztitel sowohl den Erwartungswert als auch die Standardabweichung der Renditen heranziehen, so ist erkennbar, daß Empfehlungen dieser Art von zwei weiteren Prämissen abhängen. Ein Anleger wird nur dann den Alpha-Faktor als alleiniges Vorteilhaftigkeitskriterium akzeptieren, wenn er

- indifferent ist hinsichtlich der Höhe des unsystematischen Risikos
- und wenn er - aufgrund unterschiedlicher Beta-Faktoren der Finanztitel - den (negativen) Wert einer Einheit systematischen Risikos genauso hoch einschätzt, wie den (positiven) Wert des damit verbundenen höheren Erwartungswertes der Renditen.[1]

Für abweichende Risikoeinstellungen der Anleger kann der Alpha-Faktor somit kein (alleiniges) Selektionskriterium für Finanzanlagen sein.

Das Marktmodell ist letztlich ein ausschließlich "empirisches Modell", mit dem keine Begründungsversuche für das Zustandekommen der Renditen gegeben werden sollen. Es wird beispielsweise nicht erklärt, warum der Kapitalmarkt bestimmte Risiken vergütet. Auch der risikofreie Zinssatz wird nicht explizit berücksichtigt.

Die konkrete Quantifizierung des Marktmodells basiert in der Regel auf historisch beobachteten Renditen der einzelnen Finanztitel und der Renditen des Marktportefeuilles, für die zunächst folgender Renditengenerierungsprozeß zugrunde gelegt wird:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i\, r_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

1 Mit der zweiten Prämisse ist auch die Konstellation verbunden, daß bei einem Vergleich zweier Finanztitel mit einem identischen Beta-Faktor die Anlage vorgezogen wird, die den höheren Alpha-Faktor hat. Auch hier müßte allerdings die Annahme getroffen werden, daß der Anleger indifferent ist hinsichtlich der Höhe des mit den Finanztiteln verbundenen unsystematischen Risikos.

Die Werte für die finanztitelspezifischen Grundverzinsungen $\hat{\alpha}_i$ und die finanztitelspezifischen Sensitivitäten β_i werden üblicherweise mittels einfacher linearer Regressionsanalysen geschätzt. Als Ergebnis der Regressionsschätzungen ergeben sich für die Residuen methodenbedingt Mittelwerte von null, womit die FMP 1 erfüllt ist. Auch die FMP 6, die Unkorreliertheit des Faktors (der Marktrenditen) mit den Residuen, wird methodenbedingt eingehalten.

Für eine praktische Umsetzung des Marktmodells ergibt sich folglich "nur" noch die Notwendigkeit, die Einhaltung der FMP 4 - also die Unkorreliertheit der Residuen - zu überprüfen. Auf der Basis empirischer Daten wird grundsätzlich festzustellen sein, daß die Kovarianzen der Residuen nicht null sind, sondern signifikant von null abweichen. Im Ergebnis führt das dazu, daß eine begriffliche Trennung zwischen dem Marktrisiko und dem finanztitelspezifischen Risiko auf der Grundlage von Ein-Faktormodellen nicht erfolgen darf, da das systematische Risiko unterschätzt würde. Das bedeutet wiederum, daß Entscheidungen über den Kauf- oder Verkauf von Finanztiteln auf der Grundlage von Alpha-Faktoren - auch bei Beachtung der beiden o.a. weiteren Prämissen - nicht sinnvoll sind. Ein Ansatz zur Lösung des Problems der Korreliertheit der Residuen besteht darin, Marktmodelle auf der Basis von K-Faktormodellen zu schätzen.

Wäre die FMP 4 hinsichtlich des ex-post-Marktmodells eingehalten, müßte im nächsten Schritt die Übertragung der Ergebnisse des ex-post-Marktmodells auf ein geschätztes ex-ante-Marktmodell erfolgen. Zu diesem Zweck werden die historischen und zukünftigen Renditen in der Regel als (zeit-)unabhängige Zufallsvariable aufgefaßt, deren Zufallsverteilungen[1] in der Vergangenheit und in der Zukunft als identisch angenommen werden.[2]

3.3.3. Das Indexmodell

Ziel des von Sharpe entwickelten und 1963 vorgestellten Indexmodells ist es, die für die Optimierung von Portefeuilles im Rahmen der Portfoliotheorie zu berechnende Effizienzlinie auf einfachere Art zu ermitteln. Dies soll erreicht werden, indem der benötigte Daten- und damit auch Rechenaufwand reduziert wird. Dafür wird davon ausgegangen, daß sich die zukünftigen Renditen und Risiken von Finanztiteln aus zwei Komponenten zusammensetzen: einer wertpapierspezifischen (unsystematischen) und einer markt- oder indexbezogenen (systematischen) Komponente. Dem Indexmodell liegt damit das gleiche allgemeine Faktormodell zugrunde wie dem Marktmodell.

In der marktbezogenen Komponente spiegelt sich wiederum die Vorstellung wider, daß die zukünftigen Renditen aller Finanztitel mehr oder weniger stark von der Entwicklung einer Größe (Single-Indexmodelle) oder mehrerer den Gesamtmarkt repräsentierenden Größen (Multiple-Indexmodelle) abhängig sind. Andere zukünftige gemeinsame Abhängigkeiten der Renditen verschiedener Finanztitel werden somit ausgeschlossen bzw. nicht betrachtet. Damit wird unterstellt, daß die zukünftigen variablen finanztitelspezifischen Renditekomponenten zwischen verschiedenen Finanztiteln unabhängig sind.

---

1 Für bestimmte Fragestellungen ist es ausreichend, wenn die Erwartungswerte und Varianzen konstant und unabhängig voneinander sind.

2 Diese grundlegende Problematik tritt nicht nur bei diesem Modell auf, sondern auch bei Anwendung diverser anderer Modelle der Finanztitelbewertung. Daher sollte man sich der Implikationen dieser Annahme und der Fehler bei Ungültigkeit dieser Annahme permanent bewußt sein. Im weiteren wird hierauf noch genauer eingegangen.

Bei Single-Indexmodellen wird unterstellt, daß sich die zukünftigen Renditen nach folgendem Renditengenerierungsprozeß in Verbindung mit den FMP 1, 4 und 6 einstellen:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_i$$

Die Gültigkeit der FMP 1 vorausgesetzt, ergibt sich der Erwartungswert der Renditen eines Portefeuilles nach:

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i (\alpha_i + \beta_i \mu_{r_M})$$

Die Varianz der Portefeuillerenditen ergibt sich für Ein-Faktormodelle allgemein als:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sigma_F^2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i w_j \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i w_j \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i w_j \beta_i \sigma_{F \varepsilon_j}$$

Die Gültigkeit der FMP 4 und 6 vorausgesetzt, entfallen die beiden letzten Komponenten der Gleichung. Die Varianz der Portefeuillerenditen ergibt sich nach dem Indexmodell folglich als:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sigma_{r_M}^2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i w_j \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Für eine Optimierung von Portefeuilles auf der Grundlage von I Finanztiteln sind somit alle Werte bekannt.[1] Aufgrund der geringeren Anzahl von Input-Werten ist die Effizienzlinie von Portefeuilles nun einfacher zu berechnen. Statt der vorher erforderlichen vollständigen Varianz-Kovarianz-Matrix der Wertpapierrenditen (mit zu ermittelnden I Varianzen und I(I-1)/2 Kovarianzen) sind nun folgende Input-Daten zu verarbeiten:

- die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen in Form einer Diagonalmatrix bzw. die I Varianzen der Residuen der Finanztitel
- die (eine) Varianz des Faktors in Form des Marktindexes
- die I Sensitivitäten der Renditen der einzelnen Finanztitel (die Beta-Faktoren)

Darüber hinaus sind - wie auch im Rahmen der klassischen Portfoliotheorie - die I finanztitelspezifischen Grundverzinsungen bzw. die Erwartungswerte der Renditen aller Finanztitel zu ermitteln.

Eine Erweiterung des Single-Faktor-Indexmodells liegt in der Verwendung mehrerer die Renditen der Finanztitel erklärenden "Indexvariablen". Schon Sharpe stellt 1970 fest, daß eine erklärende Variable wohl nicht ausreiche, die Renditen von Aktien hinreichend genau zu beschreiben. Der Renditengenerierungsprozeß für Multiple-Faktor-Indexmodelle in Verbindung mit den FMP 1, 4, 5 und 6 lautet:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \tilde{F}_k + \tilde{\varepsilon}_i$$

Während beim Ein-Faktormodell als erklärende Variable nur ein Marktindex in Form eines Indexes für den Gesamtmarkt herangezogen wird, können als erklärende Variable nun

1 Die Optimierung der Funktion erfolgt in der Regel auf der Grundlage nutzentheoretischer Überlegungen, wofür zusätzlich die Normalverteilungsannahme der Renditen erforderlich ist (FMP 3).

mehrere Marktindizes verwendet werden, wie z.B. die Renditen verschiedener Branchen. Daher wird statt $\tilde{r}_M$ nun pauschal $\tilde{F}_k$ mit k = 1 bis K geschrieben.

Die Gültigkeit der FMP 1 unterstellt, ergibt sich der Erwartungswert der Renditen eines Portefeuilles nach:

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \left(\alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \, \mu_{F_k} \right)$$

Die Varianz der Portefeuillerenditen ergibt sich für K-Faktormodelle allgemein nach:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i \, w_j \, \beta_{ik} \, \beta_{jk} \, \sigma_{F_k}^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1 \text{ für } l \neq k}^{K} w_i \, w_j \, \beta_{ik} \, \beta_{jl} \, \sigma_{F_k F_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma_{\varepsilon_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i \, w_j \, \beta_{ik} \, \sigma_{F_k \varepsilon_j}$$

Wird davon ausgegangen, daß neben den FMP 4 und 6 auch die FMP 5 eingehalten ist, dann entfallen in der Gleichung der zweite, vierte und fünfte Summand. Es ergibt sich für die Varianz der Portefeuillerenditen nach dem Multiple-Faktor-Indexmodell:

$$\sigma_{r_P}^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i \, w_j \, \beta_{ik} \, \beta_{jk} \, \sigma_{F_k}^2 + \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Für eine Optimierung von Wertpapierportefeuilles auf der Basis von Multiple-Faktor-Indexmodellen sind im Vergleich zu Single-Faktor-Indexmodellen folglich einige Parameter mehr zu ermitteln, nämlich die zusätzlichen erklärenden Faktoren und die damit verbundenen Faktorsensitivitäten aller Finanztitel.

Die konkrete Anwendung von Indexmodellen basiert in der Regel auf einfachen bzw. multiplen linearen Regressionsanalysen. Insofern wird das Marktmodell teilweise als Anwendungsfall des eher theoretisch geprägten Indexmodells angesehen. Alternativ wäre es aber auch denkbar, daß die Parameter des Indexmodells über andere Vorgehensweisen bestimmt werden, wobei sich insbesondere die Faktorenanalyse[1] anbietet.

Hinsichtlich der Einhaltung der FMP 1 und 6 treten - wiederum methodenbedingt - keine Probleme auf. Hinsichtlich der FMP 4 ergeben sich für das Indexmodell selbstverständlich die gleichen Probleme wie für das Marktmodell. Allerdings folgt aus der Nicht-Einhaltung der FMP 4 nicht nur eine "Fehlbezeichnung" der Risikokomponenten wie im Zusammenhang mit dem Marktmodell, sondern es tritt nunmehr (zusätzlich) ein Fehler bei der Berechnung der Varianz der Portefeuillerenditen auf. Dieser Fehler wird mit zunehmender Anzahl erklärender Faktoren zwar geringer, dafür erhöht sich aber der Rechenaufwand bei der Optimierung von Portefeuilles. Falls die Annahme der Unabhängigkeit der Residuen nicht zutrifft, erkauft man sich die Möglichkeit der einfacheren Optimierung mit ungenaueren Ergebnissen bei der Bestimmung der Varianz der Portefeuillerenditen und damit letztlich mit einem "weniger guten Ergebnis der Optimierung".

Neben den genannten FMP ist für Multiple-Faktor-Indexmodelle auch die FMP 5 relevant. Wenn das Indexmodell auf beobachtbaren Faktoren (wie Branchenrenditen) basiert, dann kann in der Regel nicht von der Unabhängigkeit der erklärenden Marktindizes ausgegangen werden. Das Problem der Übertragbarkeit der auf der Grundlage historischer Daten ermittelten ex-post-Faktormodellannahme auf eine ex-ante-

1 Vgl. die Ausführungen zur APT.

Faktormodellannahme tritt in gleicher Weise auf, wie bereits im Rahmen des Marktmodells behandelt.

Empirische Untersuchungen zur Frage, ob das Indexmodell trotz der gezeigten theoretisch begründeten Schwächen einsetzbar ist, kommen zu dem Ergebnis, daß die Portefeuillebildung auf der Grundlage der vollständigen Aufstellung der Varianz-Kovarianz-Matrix kaum bessere, erstaunlicherweise teilweise sogar schlechtere Ergebnisse liefert.

3.3.4. Anwendung des Markt- und Indexmodells

In Vorbereitung der beispielhaften Anwendung des Markt- und Indexmodells sind zehn einfache lineare Regressionsanalysen nach folgendem Schätzansatz durchzuführen:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i \, r_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

Nach diesen zehn Schätzungen können die 160 geschätzten Renditen (10 Aktien mal 16 Beobachtungszeitpunkte) wie folgt berechnet werden:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \, r_{Mt}$$

Die geschätzten Residuen ergeben sich als:

$$\hat{\varepsilon}_{it} = r_{it} - \hat{r}_{it}$$

Die 160 Residuen werden zum einen benötigt, um deren Varianzen bestimmen zu können, die für die Berechnung der Varianzen der Renditen der Wertpapiere sowie der Renditen der Wertpapierportefeuilles notwendig sind. Zum anderen ist zu prüfen, ob die Kovarianzen der Residuen null sind, ob also die FMP 4 eingehalten wird.

Die Ausgangsparameter und die relevanten Ergebnisse der Regressionsanalysen sind in folgender Tabelle zusammengefaßt (Datei: Index):

	Markt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{ri}	16,20%	1,23%	9,32%	12,91%	11,96%	18,60%	16,18%	19,78%	21,92%	25,50%	24,60%
σ_{ri}^2	0,2270%	0,0917%	0,1259%	0,2005%	0,2011%	0,3228%	0,2394%	0,5008%	0,6658%	0,5679%	0,9314%
$\hat{\alpha}_i$		-0,0081	0,0067	0,0260	0,0162	0,0209	0,0043	-0,0235	-0,0424	0,0372	-0,0373
β_i		0,1258	0,5340	0,6359	0,6384	1,0194	0,9721	1,3662	1,6144	1,3449	1,7489
$\rho_{ri\,rM}$		19,79%	71,70%	67,66%	67,82%	85,49%	94,65%	91,98%	94,26%	85,03%	86,34%
$\sigma_{ri\,rM}$		0,0286%	0,1212%	0,1443%	0,1449%	0,2314%	0,2206%	0,3101%	0,3664%	0,3053%	0,3970%
$\sigma_{\varepsilon i}^2$		0,0882%	0,0612%	0,1087%	0,1086%	0,0869%	0,0249%	0,0771%	0,0742%	0,1573%	0,2371%

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen lautet (Datei: Index):

	Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen - i erklärt j (korrigierte Varianzen und Kovarianzen)									
Aktien	j=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1	0,0882%	-0,0156%	-0,0068%	-0,0291%	-0,0695%	-0,0117%	-0,0007%	-0,0154%	-0,0071%	0,0678%
2	-0,0156%	0,0612%	0,0349%	-0,0502%	0,0247%	0,0148%	-0,0009%	0,0100%	-0,0401%	-0,0388%
3	-0,0068%	0,0349%	0,1087%	-0,0526%	0,0044%	-0,0094%	0,0212%	-0,0196%	-0,0215%	-0,0593%
4	-0,0291%	-0,0502%	-0,0526%	0,1086%	0,0062%	-0,0018%	0,0126%	-0,0041%	0,0015%	0,0089%
5	-0,0695%	0,0247%	0,0044%	0,0062%	0,0869%	0,0189%	-0,0090%	-0,0080%	-0,0258%	-0,0288%
6	-0,0117%	0,0148%	-0,0094%	-0,0018%	0,0189%	0,0249%	-0,0223%	0,0009%	-0,0097%	-0,0047%
7	-0,0007%	-0,0009%	0,0212%	0,0126%	-0,0090%	-0,0223%	0,0771%	-0,0129%	-0,0153%	-0,0498%
8	-0,0154%	0,0100%	-0,0196%	-0,0041%	-0,0080%	0,0009%	-0,0129%	0,0742%	0,0340%	-0,0591%
9	-0,0071%	-0,0401%	-0,0215%	0,0015%	-0,0258%	-0,0097%	-0,0153%	0,0340%	0,1573%	-0,0733%
10	0,0678%	-0,0388%	-0,0593%	0,0089%	-0,0288%	-0,0047%	-0,0498%	-0,0591%	-0,0733%	0,2371%

Wären die Residuen unabhängig, dann müßte es sich bei dieser Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen um eine Diagonalmatrix handeln, bei der alle Werte außerhalb der Diagonalen null sind. Im vorliegenden Fall sind die Residuen offensichtlich nicht unabhängig. Demnach dürften das Markt- und das Indexmodell nicht angewendet werden.

Im weiteren werden die Fehler aufgezeigt, wenn das Indexmodell trotzdem angewendet wird. Zu diesem Zweck sollen die Verteilungsparameter für ein Portefeuille berechnet werden, welches folgende Anteile aufweist (vgl. die im Rahmen der Portfoliotheorie ermittelten optimalen Anteile für $\Theta = 0,16$ Prozent; Datei: PST10):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
optimale Anteile PST	44,93%	48,00%	5,37%	39,08%	27,50%	-36,65%	-22,10%	-13,76%	15,43%	-7,81%

Der Erwartungswert der Renditen eines Portefeuilles ergibt sich für Faktormodelle über (vgl. die Berechnungen im Rahmen der Portfoliotheorie):

$$\mu_{r_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, (\alpha_i + \beta_i \, \mu_{r_M}) = 4{,}206\%$$

Es zeigt sich, daß der Erwartungswert korrekt bestimmt wird.

Die Varianz der Portefeuillerenditen ergibt sich nach dem Ein-Faktor-Indexmodell - bei Gültigkeit der FMP 4 und 6 - als (Datei: Index):

$$\sigma_{r_P}^2 = \sigma_{r_M}^2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i \, w_j \, \beta_i \, \beta_j + \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma_{\varepsilon_i}^2 = 0{,}00001032 + 0{,}00069074 = 0{,}0007011$$

Ein Vergleich mit dem berechneten Wert auf der Grundlage der vollständigen Varianz-Kovarianz-Matrix in Höhe von 0,00005711 (vgl. die Berechnungen im Rahmen der Portfoliotheorie; Datei: PST10) zeigt, daß die Varianz über das Indexmodell nicht korrekt bestimmt wird. Die Differenz in Höhe von -0,00064395 ist auf die Kovarianzen der Residuen zurückzuführen, die hier zu Unrecht mit null angenommen wurden.

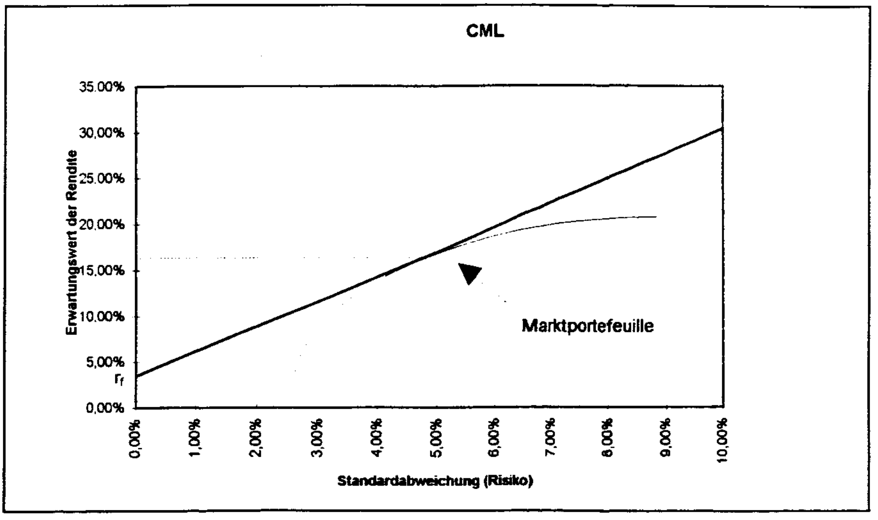
3.3.5. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

3.3.5.1. Herleitung des CAPM als ex-ante-Modell

Die Darstellung der Grundform des CAPM (Sharpe-Lintner-CAPM) ist zweigeteilt. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Frage, welche Risiko-Rendite-Kombinationen effiziente Portefeuilles aufweisen, und mündet schließlich in der Ableitung der Kapitalmarktlinie (CML). Im zweiten Teil wird ein Maß für das bewertungsrelevante Risiko hergeleitet und die Verbindung dieses Risikomaßes mit den Erwartungswerten der Renditen von Finanztiteln in Form der Wertpapier(kenn)linie (SML) hergestellt.

Im Gegensatz zu den Ausführungen im Rahmen der Portfoliotheorie, des Markt- und des Indexmodells wird für die Ableitung des auf Sharpe, Lintner und Mossin zurückgehenden Capital Asset Pricing Models (CAPM) angenommen, daß alle Anleger homogene (gleiche) Erwartungen bezüglich der Verteilungen der zukünftigen Renditen der verschiedenen Finanztitel haben, was einen informationseffizienten Kapitalmarkt voraussetzt. Folglich kann davon ausgegangen werden, daß alle Anleger dieselbe (gekrümmte) Effizienzlinie ermitteln. Als weitere Annahme wird eingeführt, daß der Zinssatz für risikofreie Kapitalanlage- und -aufnahmemöglichkeiten r_f für alle Anleger identisch ist. Somit ergibt sich für alle Anleger - unabhängig von der Risikoeinstellung - ein bestimmtes optimales Portefeuille risikobehafteter Titel: das sogenannte Marktportefeuille.

Alle Marktteilnehmer werden nun - entsprechend ihren Risikopräferenzen - eine Kombination aus risikofreier Anlage (bzw. Finanzierung) zu r_f (hier 3,5%) und diesem Marktportefeuille wählen. Die Rendite-Risiko-Kombinationen werden durch die sogenannte Kapitalmarktlinie (CML) repräsentiert. Im Gegensatz zu den Ausführungen im Rahmen der Portfoliotheorie gilt die "neue Effizienzlinie" nicht nur für einen einzelnen Investor, sondern für alle Investoren gleichermaßen, was als Two-Fund-Theorem bezeichnet wird[1].



Wird eine Verzinsung des Marktportefeuilles in Höhe von μ_{rM} (hier 16,20%) bei einer Standardabweichung von σ_{rM} (hier 4,76%) erwartet, dann ergibt sich der Erwartungswert der Renditen eines nach der obigen Maßgabe zusammengesetzten Portefeuilles in Abhängigkeit von der Standardabweichung dieses Portefeuilles über die Kapitalmarktlinie (Capital Market Line - CML; siehe für die weiteren Rechnungen die Datei CAPM):

$$\mu_{r_P} = r_f + \frac{\mu_{r_M} - r_f}{\sigma_{r_M}} \sigma_{r_P}$$

hier:

$$\mu_{r_P} = 0{,}035 + \frac{0{,}1620 - 0{,}035}{0{,}0476} \sigma_{r_P} = 0{,}035 + 2{,}6918\ \sigma_{r_P}$$

Die Renditen dieser Portefeuilles setzen sich also aus einem risikolosen Anteil (r_f) und einer Risikoprämie (2. Term der CML) zusammen.

1 Die Erkenntnis, daß die Zusammenstellung der risikobehafteten Wertpapiere von der Risikoeinstellung der Investoren unabhängig ist, wird als Separationstheorem (Tobin Separation) bezeichnet. Das Separationstheorem gilt aber auch für heterogene Erwartungen, wie aus den Ausführungen zur Portfoliotheorie hervorgeht (vgl. auch die Abbildung im Rahmen der Ausführungen zur Portfoliotheorie).

Nicht beantwortet wurde bisher die Frage, welche erwartete Rendite ein Wertpapier oder jedes beliebige Portefeuille aufweisen müßte, wenn sich alle Anleger Portefeuilles nach Maßgabe der CML zusammenstellten. Dafür wird als weitere Überlegung eingeführt, daß das unsystematische Risiko eines Finanztitels am Markt nicht vergütet wird, da es durch Wertpapiermischung - wie im Marktportefeuille geschehen - vollständig zu eliminieren ist. Im Umkehrschluß darf lediglich der Risikoanteil durch eine Risikoprämie entgolten werden, der durch Portefeuillebildung nicht eliminiert wird. Diese wohl wichtigste Aussage des CAPM findet ihren Niederschlag in der Wertpapiermarktlinie oder Wertpapierkennlinie (Security Market Line - SML), die man durch Umformung der CML erhält:[1]

$$\mu_{r_i} = r_f + \frac{\mu_{r_M} - r_f}{\sigma^2_{r_M}} \sigma_{r_M r_i}$$

$$\mu_{r_i} = r_f + \frac{\mu_{r_M} - r_f}{\sigma_{r_M}} \sigma_{r_i} \rho_{r_M r_i}$$

Aufgrund von

$$\beta_{r_i} = \frac{\rho_{r_i} \sigma_{r_i}}{\sigma_{r_M}} = \frac{\sigma_{r_M r_i}}{\sigma^2_{r_M}}$$

lautet die Standardformel der SML:

$$\mu_{r_i} = r_f + (\mu_{r_M} - r_f) \beta_{r_i}$$

Aus der SML wird deutlich, daß die Grundform des CAPM ein Ein-Faktormodell darstellt. Der Faktor wird repräsentiert durch den Klammerausdruck, also der Differenz des Erwartungswertes der Rendite des Marktes und der risikofreien Verzinsung. Im Zuge der Ableitung des CAPM wird (u.a.) vorausgesetzt, daß ausschließlich dieser Faktor das systematische Risiko der Finanztitel bestimmt. Diese Annahme entspricht der bereits mehrfach behandelten FMP 4, nach der die Kovarianzen der Residuen null sein müssen. Wird von der Gültigkeit dieser Prämisse ausgegangen, ergibt sich hier:

$$\mu_{r_i} = 0{,}035 + (0{,}1620 - 0{,}035)\ \hat{\beta}_i = 0{,}035 + 0{,}1270\ \hat{\beta}_i$$

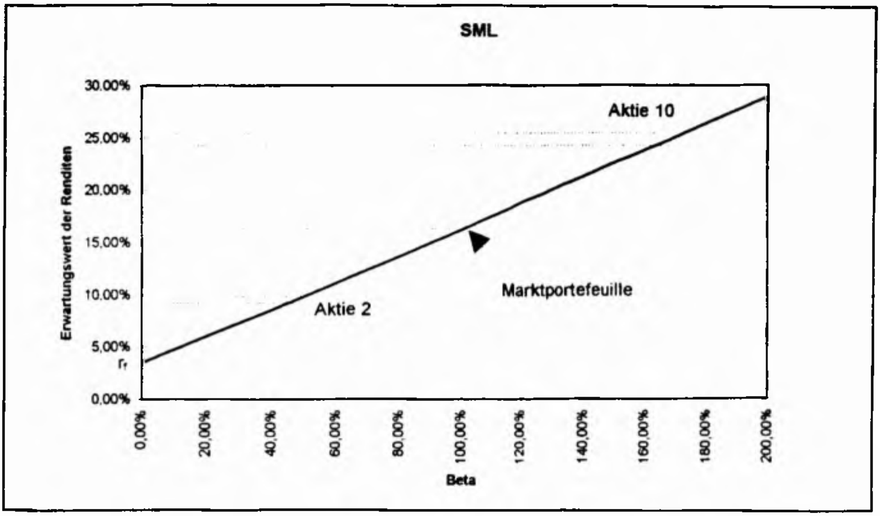
Die SML gibt den Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite eines richtig bewerteten Finanztitels (sowie eines jeden richtig bewerteten Portefeuilles) und seines systematischen Risikos, ausgedrückt durch den Beta-Faktor, an.

Bei Wertpapieren mit einem Beta-Faktor von 1 geht man davon aus, daß der Erwartungswert der Renditen identisch ist mit dem Erwartungswert der Marktrenditen. Daher wird eine solche Aktie als "neutral" eingestuft (Man beachte, daß die Varianz der Renditen des Finanztitels von der Varianz der Renditen des Marktportefeuilles abweicht!). Aktien mit einem Beta-Faktor von größer eins gelten als "aggressiv", Aktien mit einem Beta-Faktor von kleiner eins als "defensiv".

Theoretisch kann es auch Aktien mit einem Beta-Faktor von kleiner als null geben, deren Verzinsung dann unter der Verzinsung für risikofreie Titel liegen muß. Oder noch extremer könnte es demnach - für Beta-Faktoren mit einem hohen negativen Wert - auch Titel mit einer negativen Verzinsung geben. Diese zunächst erstaunliche Feststellung wird verständlich, wenn man überlegt, daß die verbundene geringe bzw. sogar negative

---

1 Zur Ableitung der SML siehe Uhlir/Steiner (1994), S. 189-191 oder Steiner/Bruns (1993), S. 20-22. Der Wert für ρ ist eins, wenn Anleger das Marktportefeuille halten.



Verzinsung als eine Versicherungsprämie gegen das nicht diversifizierbare systematische Risiko angesehen werden kann.

Eine wichtige und für weitere Überlegungen praktische Eigenschaft dieses Kapitalmarktmodells ist, daß der Beta-Faktor jedes Portefeuilles β_P der Summe der mit den Anteilen gewichteten Beta-Faktoren der im Portefeuille enthaltenen I einzelnen Finanztitel β_i entspricht. Der Beta-Faktor des Portefeuilles ist also eine gewichtete Linearkombination der Beta-Faktoren der Einzeltitel:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \beta_i$$

Ergebnis der Ableitung des klassischen CAPM ist die Erkenntnis, daß sich die zukünftigen Renditen der Finanztitel - bei Gültigkeit der FMP 1, 4 und 6 - nach folgendem Renditengenerierungsprozeß bilden müssen, da der Kapitalmarkt sonst nicht im Gleichgewicht wäre:

$$\tilde{r}_i = r_f + \beta_i \left(\tilde{r}_M - r_f \right) + \tilde{\varepsilon}_i$$

3.3.5.2. Das CAPM in Risikoprämienschreibweise

Für die weiteren Darstellungen zum CAPM ist es zweckmäßig, lediglich auf die Überschußrenditen $\tilde{\phi}_i$ (Phi) als Differenz der (zufälligen) Aktienrenditen zur risikofreien Verzinsung abzustellen (vgl. den Datensatz: Überschußrenditen). Die Überschußrenditen $\tilde{\phi}_i$ seien definiert als:

$$\tilde{\Phi}_i = \tilde{r}_i - r_f$$

bzw:

$$\tilde{\phi}_M = \tilde{r}_M - r_f$$

Der risikofreie Zinssatz stellt beim ex-ante-CAPM keine Zufallsvariable dar, da er - realitätskonform - für die Anlageperiode als sicher angenommen werden kann. Damit kann der Renditengenerierungsprozeß

$$\tilde{r}_i = r_f + (\tilde{r}_M - r_f)\, \beta_i + \tilde{\varepsilon}_i$$

auch dargestellt werden als

$$\tilde{r}_i - r_f = \beta_i\, (\tilde{r}_M - r_f) + \tilde{\varepsilon}_i$$

$$\tilde{\phi}_i = \beta_i\, \tilde{\phi}_M + \tilde{\varepsilon}_i$$

Es wird deutlich, daß das CAPM in Risikoprämienschreibweise ein Ein-Faktormodell mit $\alpha_i = 0$ darstellt.

Während bisher von erwarteten zukünftigen Renditeverteilungen ausgegangen wurde, wird das CAPM in der Regel auf der Grundlage von ex-post-Renditen angewendet bzw. getestet. Daher soll die anwendungsbezogene Variante des CAPM als "ex-post-CAPM" bezeichnet werden.

Für die Nutzung historischer Renditen im einfachen Fall wird wiederum davon ausgegangen, daß die Verteilungen der historischen und zukünftigen Renditen stationär sind. Daraus folgt, daß der Mittelwert der historischen Renditen dem Erwartungswert der zukünftigen Renditen entspricht und die Varianzen und Kovarianzen in der Vergangenheit stabil waren und daher eine gute Schätzung der zukünftigen Varianzen und Kovarianzen darstellen.

Die konkrete Berechnung erfolgt in der Weise, daß zunächst die Überschußrenditen ϕ_{it} als Differenzen der Aktienrenditen und den jeweiligen risikofreien Zinssätzen gebildet werden. Ebenso werden die Überschußrenditen des Marktportefeuilles ϕ_{Mt} berechnet (vgl. den Datensatz: Überschußrenditen). Stellt man den Renditengenerierungsprozeß für das ex-post-CAPM dar, ändert sich die o.a. Relation durch Hinzufügung des Zeitindexes t und durch Entfallen der Tilden als Markierung von Zufallsvariablen:

$$\phi_{it} = \beta_i\, \phi_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

In dieser Schreibweise stellt das CAPM ein Ein-Faktormodell mit $\alpha_i = 0$ dar.

Zu überlegen ist nun, wie die Werte für die Sensitivitäten β_i konkret ermittelt werden können. Grundsätzlich bietet es sich an, die Funktion mittels I einfacher linearer Regressionsanalysen direkt zu schätzen, wobei die Parameter α_i aufgrund der CAPM-Modellannahme $\alpha_i = 0$ nicht mitgeschätzt werden:

$$\phi_{it} = \beta_i\, \phi_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

Es bietet sich für eine praktische Anwendung aber auch an, den Wert für α_i nach folgende Funktion mitzuschätzen:

$$\phi_{it} = \alpha_i + \beta_i\, \phi_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

Wenn die Titel nach dem CAPM "perfekt" bewertet waren, der Markt sich also im "CAPM-Gleichgewicht" befand, müßten sich als Schätzwerte für $\hat{\alpha}_i$ für alle Finanztitel die Werte null ergeben.

Datensatz: Überschußrenditen (Datei: CAPM)

ϕ_{it}	t = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	μ_n	σ_n	σ_n^2
Aktie $i = 1$	-3,75%	-3,00%	-3,22%	1,61%	-1,29%	1,88%	-0,40%	-1,80%	2,33%	-5,58%	-7,38%	-6,20%	-3,99%	-1,12%	1,55%	-6,03%	-2,27%	3,13%	0,0981%
2	5,12%	9,07%	4,52%	4,85%	1,00%	9,02%	2,03%	2,88%	6,84%	11,96%	0,64%	5,26%	10,23%	8,78%	4,03%	6,90%	5,82%	3,35%	0,1125%
3	8,74%	14,56%	4,92%	12,30%	3,95%	11,40%	6,43%	2,24%	8,32%	12,64%	3,59%	11,00%	9,12%	11,84%	12,92%	16,50%	9,41%	4,21%	0,1775%
4	12,23%	2,81%	5,54%	10,84%	10,32%	9,89%	-0,14%	9,12%	4,57%	16,12%	9,70%	4,22%	3,67%	15,63%	11,98%	8,92%	8,46%	4,62%	0,22136
5	12,97%	16,98%	14,73%	15,50%	10,28%	17,55%	9,17%	10,70%	7,74%	27,96%	12,13%	11,18%	16,09%	25,88%	13,45%	19,29%	15,10%	5,62%	0,3156%
6	11,26%	11,85%	12,52%	15,86%	8,12%	16,58%	4,90%	9,73%	11,22%	22,08%	5,61%	9,92%	13,45%	22,68%	13,96%	13,10%	12,68%	4,96%	0,2457%
7	15,98%	14,38%	6,89%	22,31%	11,36%	28,42%	9,41%	14,39%	10,35%	28,74%	8,55%	11,85%	14,04%	22,08%	18,15%	23,58%	16,28%	6,91%	0,4772%
8	17,42%	13,84%	20,94%	22,10%	17,18%	30,16%	5,35%	12,62%	13,22%	34,19%	4,16%	14,68%	18,96%	25,11%	19,76%	24,97%	18,42%	8,04%	0,6457%
9	21,64%	16,93%	24,20%	32,40%	20,00%	26,40%	10,53%	20,12%	15,02%	29,76%	8,74%	11,57%	25,11%	30,01%	27,55%	32,09%	22,00%	7,73%	0,5981%
10	9,46%	19,54%	18,39%	19,33%	21,48%	38,24%	11,46%	17,78%	18,73%	30,65%	11,00%	12,47%	14,68%	42,05%	29,87%	22,50%	21,10%	9,59%	0,9191%
μ	11,11%	11,69%	10,94%	15,71%	10,24%	18,96%	5,87%	9,78%	9,84%	20,85%	5,68%	8,60%	12,14%	20,29%	15,32%	16,18%	12,70%	4,72%	0,2226%
σ	7,02%	6,98%	8,64%	9,00%	7,70%	11,45%	4,32%	6,99%	4,94%	12,18%	5,83%	6,10%	8,07%	12,09%	9,00%	10,94%	8,20%	2,46%	0,0605%
σ^2	0,493%	0,487%	0,747%	0,809%	0,593%	1,311%	0,187%	0,489%	0,244%	01,483%	0,340%	0,372%	0,652%	1,461%	0,809%	1,196%	0,73%	0,42%	0,0018%
$\phi_{Mt} = r_{Mt} - r_{ft}$	11,11%	11,69%	10,94%	15,71%	10,24%	18,96%	5,87%	9,78%	9,84%	20,85%	5,68%	8,60%	12,14%	20,29%	15,32%	16,18%	12,70%	4,72%	0,2226%
$F_{1t}^0 = \phi_{Mt}^0 = (r_{Mt} - r_{ft}) - E(r_{Mt} - r_{ft})$	-1,59%	-1,00%	-1,76%	3,01%	-2,46%	8,26%	-6,83%	-2,92%	-2,86%	8,15%	-7,02%	-4,10%	-0,56%	7,60%	2,62%	3,48%	0,00%	4,72%	0,2226%
$F_{2t}^0 = BSP_t - \mu_{BSP\,t}$	186,6%	56,0%	-157,1%	-31,9%	-190,6%	-93,2%	-149,5%	-224,4%	-63,1%	188,0%	-38,6%	149,6%	204,5%	74,0%	-158,0%	247,6%	0,0%	158,8%	252,07%

Die Ergebnisse der I Regressionsschätzungen sind für das Ausgangsbeispiel in der Tabelle zusammengefaßt (Datei: CAPM).

Aktien	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	ρ_{Mi}	ρ_{Mi}^2	$\hat{\mu}_{\phi i}$	$\mu_{\phi i}$ nach CAPM (ohne $\hat{\alpha}_i$)	$\mu_{\phi i}$ - $\hat{\mu}_{\phi i}$	$\hat{\mu}_{ri}$ für $r_f = 3{,}5\%$ (ohne $\hat{\alpha}_i$)
1	-3,96%	13,27%	19,99%	4,00%	-2,27%	1,69%	-3,96%	5,19%
2	-0,59%	50,47%	70,98%	50,39%	5,82%	6,41%	-0,59%	9,91%
3	1,95%	58,69%	65,73%	43,20%	9,41%	7,45%	1,95%	10,95%
4	-0,04%	66,92%	68,31%	46,66%	8,46%	8,50%	-0,04%	12,00%
5	2,23%	101,36%	85,12%	72,46%	15,10%	12,87%	2,23%	16,37%
6	0,04%	99,56%	94,76%	89,79%	12,68%	12,64%	0,04%	16,14%
7	-0,61%	133,04%	90,86%	82,55%	16,28%	16,90%	-0,61%	20,40%
8	-1,79%	159,14%	93,43%	87,29%	18,42%	20,21%	-1,79%	23,71%
9	3,85%	142,95%	87,21%	76,05%	22,00%	18,15%	3,85%	21,65%
10	-1,07%	174,61%	85,92%	73,83%	21,10%	22,17%	-1,07%	25,67%
Markt	0%	100%	100,00%	100,00%	12,70%	12,70%	0%	16,20%

Es zeigt sich, daß die geschätzten $\hat{\alpha}_i$ nicht null sind, wie es die Annahmen des CAPM voraussetzen. Eine Gegenüberstellung der Mittelwerte der historischen Überschußrenditen und der nach dem CAPM sich ergebenden Mittelwerte der Überschußrenditen macht deutlich, daß das CAPM nicht in der Lage ist, die Mittelwerte der historischen Renditen perfekt zu erklären. Wie sich zeigt, spiegeln sich genau diese Differenzen in den $\hat{\alpha}_i$ wider, wie es auch aus der Abbildung der SML hervorgeht.

3.3.5.3. Modellerweiterungen und empirische Überprüfung des CAPM

Die Grundform des CAPM geht von verschiedenen Prämissen aus, die in der finanzwirtschaftlichen Realität nicht zutreffen. Daraus entstanden eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit der Aufhebung einzelner oder zugleich mehrerer Prämissen befassen.

- Verzicht auf die Prämisse des Vorhandenseins eines Zinssatzes für risikolose Kapitalanlage- und -aufnahmemöglichkeiten durch Einführung eines sogenannten Zero-Beta-Portefeuilles,
- Verzicht auf die Annahme homogener Erwartungen,
- Aufhebung eines einheitlichen, einperiodigen Planungshorizontes,
- Aufhebung der Prämisse eines vollkommenen Kapitalmarktes durch Berücksichtigung von Steuern und anderen Vermögensansprüchen sowie Transaktionskosten,
- Aufhebung der Prämisse, daß alle Anleger das Marktportefeuille halten und
- Berücksichtigung weiterer erklärender Faktoren (Mehr-Faktoren-CAPM)

Insbesondere in den USA - aber auch in Deutschland - wurden zahlreiche Versuche unternommen, die Gültigkeit des CAPM zu testen, wobei ein allgemeingültiges Urteil bislang nicht existiert.

Ein grundsätzliches Problem bei den Tests besteht in der CAPM-Annahme, daß Anleger aufgrund ihrer Erwartungen über die zukünftigen Renditeverteilungen handeln. Da die von den Anlegern jeweils erwarteten Renditeverteilungen kaum bestimmt werden können, geht man davon aus, daß die Erwartungen der Anleger im Durchschnitt richtig waren und daß man daher auf die im Durchschnitt tatsächlich eingetretenen Renditeverteilungen zurückgreifen kann (das ex-post-CAPM also auf das ex-ante-CAPM übertragbar ist). Dies mag dann plausibel erscheinen, wenn man davon ausgehen kann, daß die Renditeverteilungen im Zeitverlauf stabil (stationär) und voneinander unabhängig waren. Dieser Sachverhalt ist in der Literatur zumindest umstritten.

Ein weiterer, häufig genannter Kritikpunkt basiert auf der Verwendung eines falschen Marktportefeuilles (bzw. der Vorgabe eines ungeeigneten Marktindexes).

Übungsaufgaben und Literatur

A) **Nennen Sie die Prämissen des CAPM und versuchen Sie zu erklären, wie die Ungültigkeit der einzelnen Prämissen konkret wirkt.**

B) Worin liegen Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Portfoliotheorie, des Marktmodells, des Indexmodells und des CAPM?

C) Die Regressionsanalysen nach dem Index-/Marktmodell und dem ex-post-CAPM ergaben folgende Ergebnisse:

	Markt-/Indexmodell			ex-post-CAPM		
	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\rho_{rM\,ri}$	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\rho_{rM\,ri}$
Aktie 3	2,60%	63,59%	67,66%	1,95%	58,69%	65,73%
Aktie 6	0,43%	97,21%	94,65%	0,04%	99,56%	94,76%
Aktie 10	-3,73%	174,89%	86,34%	-1,07%	174,61%	85,92%

Wie sind die unterschiedlichen Ergebnisse zu erklären? Welche der Ergebnisse erscheinen Ihnen für die Einschätzung der Risikoprämien sinnvoller? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Gehen Sie für die weiteren Fragen von den im Skript bereits dargestellten Ergebnissen im Zusammenhang mit dem CAPM aus.

D) Was könnten die Werte für $\hat{\alpha}_i$ aussagen?

E) Was sagen die SML und CML aus?

F) Welches Risiko müßte eine Anlage aufweisen, die eine Risikoprämie von 6,35% verspricht?

G) Welche Rendite erwarten Sie für einen Finanztitel mit einem $\hat{\beta}$ von 2?

H) Ein Finanztitel habe ein ß von -0,4. Die risikofreie Verzinsung beträgt 4 Prozent. Welche Rendite ergibt sich für diesen Finanztitel lt. CAPM? Ist dieser Wert plausibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise

C) Hilfreich mag folgende Überlegung sein:

$$\mu_{r_i} = r_f + (r_{Mt} - r_f) \beta_i$$

$$\mu_{r_i} = r_f - r_f \beta_i + r_{Mt} \beta_i$$

$$\mu_{r_i} = r_f (1 - \beta_i) + r_{Mt} \beta_i$$

F) Es kann nur etwas über das systematische Risiko ausgesagt werden. Das Gesamtrisiko der Aktie ist entscheidungsirrelevant. Der Beta-Faktor muß 50% betragen.

G) 25,40% + r_f

H) 0,04 + 0,127 (-0,4) = -1,08%

Literatur

Christoph Bauer. Volatilitäten und Betafaktoren-geeignete Risikomaße?. "Die Bank", (1991), S. 172-175.

Matthias Bode und Michael Mohr. Alles falsch? II und III. "Die Bank", (1994), S. 434-435 und 482-484.

Michael Keppler. Beta-Faktoren und CAPM-ein Nachruf. "Die Bank", (1992), S. 268-269.

Jochen M. Kleeberg. Der Einsatz von fundamentalen Betas im modernen Portfoliomanagement. "Die Bank", (1992), S. 474-478.

J. Lintner. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, "Review of Economics and Statistics", (1965), S. 13-37.

Hans-Peter Möller. Das Capital-Asset-Pricing-Modell. Separationstheorem oder auch Erklärung der Preisbildung auf realen Kapitalmärkten. "Die Betriebswirtschaft", (1986) S. 707-719.

Hans-Peter Möller. Die Bewertung risikobehafteter Anlagen an deutschen Wertpapierbörsen. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1988), S. 779-797.

J. Mossin. Equilibrium in a Capital Asset Market, "Econometrica", (1966), S. 768-783.

W. Neuhaus. Indexmodelle zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1969), S. 801-820.

Bernd Rudolph. Zur Theorie des Kapitalmarktes-Grundlagen , Erweiterungen und Anwendungsbereiche des "Capital Asset Pricing Modell (CAPM)". "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1979), S. 1034-1067.

Bernd Rudolph. Portefeuille- und Aktienkursbildung bei monopolistischem Anlegerwettbewerb. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", (1982), S. 471-490.

W. F. Sharpe. Capital Asset Prices, A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, "Journal of Finance", (1964), S. 425-442.

Klaus Serfling und Marita Markx. Capital Asset Pricing Model, Kapitalkosten und Investitionsentscheidungen. "Das Wirtschaftsstudium", (1990), S. 425-429.

Manfred Steiner und Christoph Bauer. Die fundamentale Analyse des Marktrisikos deutscher Aktien. "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung", (1992), S. 347-368.

Manfred Steiner und Jochen Kleeberg. Zum Problem der Indexauswahl im Rahmen der wissenschaftlich-empirischen Anwendung des Capital Asset Pricing Model. "Die Betriebswirtschaft", (1991), S. 171-182.

3.3.6. Arbitrage Pricing Theory (APT)

3.3.6.1. Theoretische Grundlagen der APT

3.3.6.1.1. Überblick

Die APT wird im historischen Kontext häufig als eine Weiterentwicklung des traditionellen CAPM angesehen. Den Ausgangspunkt der APT, die im allgemeinen auf Ross zurückgeführt wird, stellt - wie beim CAPM - die Überlegung dar, daß Finanztitel mit identischen Eigenschaften im Sinne von erwarteten Renditen und Risiken auch gleiche Preise haben müssen. Die Begründung dieses Zusammenhanges erfolgt abweichend vom CAPM über eine Arbitrageargumentation, wobei im allgemeinen behauptet wird, daß der APT (damit) weniger restriktive Prämissen zugrunde liegen als dem CAPM. Letztlich ist die APT eher als eine Alternative zum CAPM anzusehen.

Die Basis des Modells besteht in der zunächst trivial anmutenden Überlegung, daß es auf funktionierenden Finanzmärkten kein risikoloses Portefeuille ("Arbitrageportefeuille") geben darf, welches mittels einer Anfangsauszahlung von null erworben und am Ende einer bestimmten Periode für einen sicheren Betrag von größer null verkauft werden kann. Falls diese Möglichkeit bestünde, würden Arbitrageure sie so lange nutzen, bis sich durch Angebot und Nachfrage die Preise der involvierten Finanztitel so verändern, daß diese Gelegenheit verloren geht.

In diesem Zusammenhang ist es nicht relevant, welche Risikoeinstellung die Marktteilnehmer (incl. Arbitrageure) haben, da es sich um potentielle risikolose Arbitragegewinne ohne Kapitaleinsatz handelt. Es muß lediglich unterstellt werden, daß die Arbitrageure nicht risikofreudig sind, d.h. daß sie dem Risiko c.p. keinen positiven Wert beimessen. Da die APT auf den Handlungsmöglichkeiten von Arbitrageuren beruht, wird - im Gegensatz zum CAPM - die Annahme homogener Erwartungen hinsichtlich der Verteilungen der zukünftigen Renditen der Finanztitel aller am Kapitalmarkt agierenden Wirtschaftssubjekte nicht benötigt. Darüber hinaus kann auch auf die Annahme der Existenz und Beobachtbarkeit eines Marktportefeuilles verzichtet werden.

Interessant ist, daß sich aus dieser einfachen Arbitrageüberlegung - in Verbindung mit verschiedenen Prämissen - ein Bewertungsansatz für risikobehaftete Finanztitel ableiten läßt. Die allgemeinen Modellannahmen für diese Herleitung sind in weiten Teilen mit den Annahmen der neoklassischen Finanzierungstheorie eines vollkommenen Kapitalmarktes identisch. Dazu gehören insbesondere die Einperiodigkeit der Betrachtung, die beliebige Teilbarkeit der zugrunde liegenden Finanztitel, die Möglichkeit von Leerverkäufen, die Preisnehmereigenschaft der Anleger, das Fehlen von Transaktionskosten und die Vernachlässigung von Steuerzahlungen. Des weiteren wird unterstellt, daß mit den Finanztiteln keine Nachschußpflichten verbunden sind. In theoretischer Hinsicht wäre ergänzend anzunehmen, daß eine unendliche Anzahl von Wertpapieren verfügbar ist.

Die speziellen Annahmen der APT bestehen in der Faktormodellannahme und der Arbitragefreiheitsbedingung in Verbindung mit verschiedenen Faktormodellprämissen (FMP), die in den folgenden Abschnitten behandelt werden.

3.3.6.1.2. Die Faktormodellannahme

Die Faktormodellannahme (gleich dem Renditengenerierungsprozeß) der APT wird zunächst für Ein-Faktormodelle und dann für K-Faktormodelle dargestellt. Für den **einfaktoriellen Ansatz der APT** gilt die Faktormodellannahme:

$$\tilde{r}_i = \mu_{r_i} + \beta_i \tilde{F}^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

Demnach wird davon ausgegangen, daß die zukünftig möglichen Renditen $\tilde{r}_i$ des Finanztitels i von zunächst vier Größen abhängen. Die erste Größe ist die Konstante "Erwartungswert der Renditen" des Finanztitels μ_{r_i}. Des weiteren wird angenommen, daß die Renditen finanztitelspezifische (aber konstante und bekannte) Faktorsensitivitäten β_i (2. Größe) bezüglich der zukünftigen Ausprägungen eines (Umwelt-)Faktors $\tilde{F}^0$ (3. Größe) haben. Dieser Umweltfaktor $\tilde{F}^0$ wird in dem Faktormodell durch eine Zufallsvariable repräsentiert, die nicht nur die Renditen des einen Finanztitels, sondern auch die Renditen anderer Finanztitel mitbestimmt. Daher wird dieser Faktor auch als "gemeinsamer Faktor" bezeichnet. Des weiteren werden die Renditen der Finanztitel von jeweils finanztitelspezifischen Renditeanteilen $\tilde{\varepsilon}_i$ (4. Größe) bestimmt, die in dem Modell ebenso durch Zufallsvariable repräsentiert werden. Diese "finanztitelspezifischen Störterme" stellen die Renditebestandteile dar, die sich aufgrund finanztitelspezifischer Einflußfaktoren (wie unerwarteten unternehmensindividuellen Vertriebserfolgen bzw. Vertriebsmißerfolgen) ergeben. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Renditen von Finanztiteln der Summe aus erwarteter Rendite und zufälliger Rendite aufgrund unbekannter Ausprägungen der beiden Zufallsvariablen entsprechen.

Im allgemeinen werden zur Erklärung der Renditen über die APT mehrere Faktoren (in der Regel 5 bis 15) herangezogen. Bei diesen **K-Faktormodellen** ergeben sich die Renditen der I Finanztitel entsprechend der Faktormodellannahme

$$\tilde{r}_i = \mu_{r_i} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \tilde{F}_k^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

In Verbindung mit der Faktormodellannahme wird von der Gültigkeit der FMP 1, 2, 4, 5 und 6 ausgegangen. Aus der (unterstellten) Gültigkeit dieser Faktormodellannahme (in Verbindung mit den weiteren genannten Annahmen) ergibt sich für die Renditen eines Wertpapierportefeuilles mit I Finanztiteln und den Gewichten w_i:

$$\tilde{r}_P = \sum_{i=1}^{I} w_i \tilde{r}_i$$

$$\tilde{r}_P = \sum_{i=1}^{I} w_i \mu_{r_i} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i \beta_{ik} \tilde{F}_k^0 + \sum_{i=1}^{I} w_i \tilde{\varepsilon}_i$$

$$\tilde{r}_P = \mu_{r_P} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{Pk} \tilde{F}_k^0 + \tilde{\varepsilon}_P$$

mit:

$$\beta_{Pk} = \sum_{i=1}^{I} w_i \beta_{ik}$$

Für die Varianz der Renditen des Portefeuilles gilt entsprechend

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jk}\, \sigma^2_{F_k} + \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma^2_{\varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sum_{k=1}^{K} \beta^2_{Pk}\, \sigma^2_{F_k^0} + \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma^2_{\varepsilon_i}$$

Für ein "gut diversifiziertes Portefeuille (DP)", bestehend aus einer hinreichend großen Anzahl unterschiedlicher Finanztitel, gilt analog zu den Ausführungen im Rahmen der Portfoliotheorie, daß sich die Ausprägungen der wertpapierspezifischen Störterme gegeneinander aufheben, da sie annahmegemäß voneinander unabhängig sind. Für i gegen unendlich folgt daraus, daß die Rendite eines solchen Portefeuilles lediglich aus zwei Komponenten besteht: Dem Erwartungswert der Renditen des Portefeuilles $\mu_{r_{DP}}$ als gewichtetes Mittel der Erwartungswerte der Renditen der einzelnen Finanztitel $w_i\,\mu_{r_i}$ plus den Faktorsensitivitäten des Portefeuilles β_{DPk} als gewichtete Mittelwerte der einzelnen Sensitivitäten $w_i\,\beta_{ik}$ multipliziert mit den Faktoren $\tilde{F}_k^0$:

$$\tilde{r}_{DP} = \mu_{r_{DP}} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{DPk}\, \tilde{F}_k^0$$

Die Varianz der Portefeuillerenditen eines auf diese Weise diversifizierten Portefeuilles ergibt sich als:

$$\sigma^2_{r_{DP}} = \sum_{k=1}^{K} \beta^2_{DPk}\, \sigma^2_{F_k^0}$$

Unter dem Ausdruck "gut diversifizierte Portefeuilles (DP)" sollen im weiteren Portefeuilles verstanden werden, die kein oder ein nur vernachlässigbares unsystematisches Risiko aufweisen.

Aus der Annahme, daß jeder Kapitalanleger gut diversifizierte Portefeuilles halten kann, folgt, daß eine Vergütung nur für die Übernahme von Risiken bezüglich der Veränderungen der Faktoren $\tilde{F}_k^0$ erfolgt, also nur für das Eingehen systematischer Risiken. Weist ein gut diversifiziertes Portefeuille eine Sensitivität von $\beta_{DPk} = 0$ für alle K Faktoren auf,[1] ist die Rendite des Portefeuilles sicher. Daher muß es sich mit dem risikofreien Zinssatz r_f verzinsen:

$$r_{DP} = r_f \quad \textit{für: } \beta_{DPk} = 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, K$$

Einzelne Finanztitel mit einer Sensitivität von $\beta_{ik} = 0$ für alle K Faktoren sowie alle (auch nicht gut diversifizierten) Portefeuilles müssen folglich auch einen Erwartungswert der Renditen in Höhe des risikofreien Zinssatzes r_f aufweisen, obwohl deren Renditen - aufgrund des unsystematischen Risikos - unsicher sind:

$$\tilde{r}_i = r_f + \tilde{\varepsilon}_i \quad \textit{für: } \beta_{ik} = 0\ \forall\, k = 1, \ldots, K$$

$$\tilde{r}_P = r_f + \tilde{\varepsilon}_P \quad \textit{für: } \beta_{Pk} = 0\ \forall\, k = 1, \ldots, K$$

1 Auch dieses Portefeuille (DP) entspricht (noch) nicht dem Arbitrageportefeuille (AP), da es mit einem Kapitaleinsatz verbunden sein kann.

3.3.6.1.3. Die Einführung und Begründung der Bewertungsgleichung über die Arbitragefreiheitsbedingung

Bis zu diesem Punkt der Darstellung handelt es sich um ein "normales" Faktormodell. Die Besonderheit der APT ist in der Arbitragefreiheitsbedingung zu sehen, mit der

$$\tilde{r}_i = \mu_{r_i} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \tilde{F}_k^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

in folgendes spezielle Faktormodell überführt wird:

$$\tilde{r}_i = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \eta_k + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \tilde{F}_k^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

mit:

$$\mu_{r_i} = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \eta_k$$

Im weiteren wird dargelegt, wie die Überführung finanzwirtschaftlich begründet und formal durchgeführt wird.

Die im Zentrum der weiteren Ausführungen stehende Arbitragefreiheitsbedingung besagt zunächst nur, daß jedes risikolose Portefeuille mit einem Anfangswert von null[1] in jedem zukünftigen Zeitpunkt auch einen Wert von null aufweisen muß, da sich sonst risikolose Gewinne ohne jeglichen Kapitaleinsatz erzielen ließen. Derartige "Arbitrageportefeuilles (AP)" müssen so zusammengesetzt sein, daß deren Kaufpreis (und damit gegenwärtige Wert) in der Summe null ist. Es muß also gelten:

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = 0 \quad \textit{und:} \quad \sum_{i=1}^{I} |w_i| = 1$$

Mit w_i wird der wertmäßige Anteil des Finanztitels i am Gesamtinvestitionsvolumen des Portefeuilles (als Summe der absoluten Werte der einzelnen Finanztitel) bezeichnet. Für leerverkaufte Finanztitel ist w_i negativ. Die (eher technische) Bedingung, daß die Summe der absoluten wertmäßigen Anteile gleich eins ist, schließt aus, daß jeder Anteil w_i null ist, das Arbitrageportefeuille also aus null Anteilen jedes Finanztitels i besteht und dann logischerweise immer die anderen Arbitragebedingungen erfüllt.

Um das unsystematische Risiko eines solchen Portefeuilles auszuschließen, muß die Anzahl der verschiedenen in das Arbitrageportefeuille aufgenommenen Wertpapiere groß - theoretisch unendlich groß - sein. Es gilt also die Bedingung

$$\sigma^2_{\varepsilon_{AP}} = 0$$

die für P gegen unendlich erfüllt ist. Ein Arbitrageportefeuille (AP) ist damit ein spezielles gut diversifiziertes Portefeuille (DP).

Es verbleibt die Notwendigkeit, das systematische Risiko ebenfalls auf null zu reduzieren, wofür folgende Bedingung eingehalten sein muß:

$$\beta_{APk} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \beta_{ik} = 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, K$$

Das systematische Risiko eines Portefeuilles kann eliminiert werden, indem die Gewichte w_i der einzelnen Finanztitel so gewählt werden, daß die Summe der gewichteten

---

1 Ein Portefeuille weist beispielsweise einen Gesamtwert von Null auf, wenn der Wert der im Portefeuille enthaltenen Aktien gleich dem (negativen) Wert der im Portefeuille enthaltenen Verpflichtungen aus leerverkauften Aktien ist.

Faktorsensitivitäten β_{Pk} für jeden Faktor k null ist. Die Umsetzung dieser Bedingung kann entweder über Finanztitel erfolgen, die mit unterschiedlichem Vorzeichen auf die Veränderungen der Faktoren reagieren, oder über eine geeignete Kombination von Käufen und Leerverkäufen von Finanztitel.

Wenn alle o.a. Bedingungen eingehalten sind, darf ein solches Arbitrageportefeuille auch zukünftig keinen Wert aufweisen, da die (sichere) Portefeuillerendite sonst nicht null (sondern aufgrund des nicht vorhandenen Kapitaleinsatzes unendlich) wäre. Die Arbitragefreiheitsannahme impliziert für solche Depots also:

$$r_{AP} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{r_i} = 0$$

Die Aufspaltung der Erwartungswerte der Renditen der Einzeltitel in die mit den Faktorsensitivitäten zu multiplizierenden faktorspezifischen Risikoprämien basiert auf einem Gleichungssystem aus den beiden o.a. Bedingungen.[1] Ohne die Herleitung hier durchzuführen, ergibt sich:

$$\mu_{r_i} = \eta_0 + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \, \eta_k$$

Da diese Beziehung auch für Finanztitel mit Faktorsensitivitäten von null gilt, muß η_0 dem Wert der risikofreien Verzinsung entsprechen. Also gilt die eingangs formulierte Relation

$$\mu_{r_i} = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \, \eta_k$$

für alle einzelnen Finanztitel sowie selbstverständlich auch für alle Portefeuilles aus Kombinationen verschiedener Finanztitel. Die Größen η_k lassen sich als faktorspezifische Risikoprämien für die Übernahme einer Einheit des (systematischen) Risikos aus unerwarteten Veränderungen des Faktors k interpretieren. Für alle Portefeuilles sowie für alle Finanztitel gilt, daß die erwarteten Renditen nach der APT auf der Grundlage von K-Faktormodellen auf einer "Hyperplane" liegen müssen. Die Hyperplane entspricht einer Art "mehrdimensionaler SML".

Eine besondere Rolle spielen in diesem Zusammenhang sogenannte Mimicking-Portefeuilles (MP). Mimicking-Portefeuilles sind aus I Aktien bestehende (risikobehaftete) Portefeuilles, die kein unsystematisches Risiko, aber ein genau spezifiziertes systematisches Risiko aufweisen. Auch Mimicking-Portefeuilles stellen somit gut diversifizierte Portefeuilles (DP) dar. Sie werden so zusammengestellt, daß die Portefeuillerenditen lediglich von der Sensitivität eines Faktors abhängen, d.h., bis auf einen Beta-Faktor mit einer Ausprägung von (in der Regel) eins, sind alle anderen Beta-Faktoren des Portefeuilles null. Demnach lauten die Bedingungen für ein Mimicking-Portefeuille für ein K-Faktor-Modell beispielsweise:

1 Zu den weiteren Umformungen siehe Uhlir/Steiner (1994), S. 198 f.

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{I} w_i \, \beta_{i1} = \beta_{MP1} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{I} w_i \, \beta_{ik} = \beta_{MPk} = 0 \quad \forall \; k = 2, \ldots, K$$

Die zukünftige Rendite eines Mimicking-Portefeuilles, welche ausschließlich von dem Faktor k = 1 abhängt, ergibt sich nach

$$\tilde{r}_{MP} = r_f + \beta_{MP1} \, \eta_1 + \beta_{MP1} \, \tilde{F}_1^0$$

$$\tilde{r}_{MP} = r_f + \eta_1 + \tilde{F}_1^0$$

Für Mimicking-Portefeuilles mit einem Kapitaleinsatz von größer null[1] muß der Erwartungswert der Renditen folglich

$$\mu_{r_{MP}} = r_f + \eta_1 \quad \textit{für:} \; \beta_{MP1} = 1$$

betragen. Die Varianz der Renditen eines Mimicking-Portefeuilles ist entsprechend:

$$\sigma^2_{r_{MP}} = \sigma^2_{\tilde{F}_1^0}$$

Mimicking-Portefeuilles lassen sich kombinieren und so zur Duplizierung jedes Finanztitels verwenden, was u.a. die praktische Durchführung von Arbitragetransaktionen vereinfacht. Darüber hinaus kann mit Hilfe von Mimicking-Portefeuilles eine bewußte Spekulation auf einzelne Faktoren erfolgen, für die ein Anleger meint, über gute Prognosen zu verfügen. Letztlich können diese Portefeuilles auch zur Überprüfung der APT herangezogen werden.

Neben dieser Grundform der APT werden APT-Modelle mit weniger restriktiven Modellannahmen entwickelt, um der APT eine größere Praxisrelevanz zu verschaffen.

3.3.6.2. Praktische Umsetzung der APT

Ausgehend von diesen Überlegungen ergibt sich für die Frage nach den heute für die Zukunft erwarteten Renditen auf der Grundlage der APT die Problematik:

1. Die Faktoren $\tilde{F}_k^0$ zu identifizieren, deren unerwartete Veränderungen alle Renditen so erklären werden, daß die Residuen der Einzelrenditen $\tilde{\varepsilon}_i$ unabhängig voneinander sind. Damit verbunden stellt sich das Problem, die von den Marktteilnehmern erwarteten Veränderungen der Faktoren zu identifizieren.
2. Die zukünftigen Sensitivitäten β_{ik} für die Finanztitel i der Faktoren k zu ermitteln.
3. Die Preise η_k zu bestimmen, die für die Risiken aus den unerwarteten Veränderungen von $\tilde{F}_k^0$ gezahlt bzw. gefordert werden.

---

1 Es ist auch möglich, Mimicking-Portefeuilles ohne Kapitaleinsatz zu generieren, die folglich einen Erwartungswert der Rendite von unendlich haben müssen. Zur besseren Veranschaulichung wird im weiteren aber unterstellt, daß derartige Portefeuilles auf der Grundlage eines positiven Kapitaleinsatzes gebildet werden.

Letztlich ist also die ex ante Formulierung der APT

$$\tilde{r}_i = r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \eta_k + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \tilde{F}_k^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

in eine ex post Form zu bringen, wobei die FMP 1, 2, 4, 5 und 6 einzuhalten sind:

$$r_{it} = r_{ft} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \eta_k + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, F_{kt}^0 + \varepsilon_{it}$$

Da die historischen Werte für r_{ft} unterschiedlich waren, sollte das APT-Schätzmodell - analog des CAPM-Schätzmodells - auf den Überschußrenditen ϕ_{it} aufbauen:

$$\phi_{it} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \eta_k + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, F_{kt}^0 + \varepsilon_{it}$$

mit:

$$\phi_{it} = r_{it} - r_{ft}$$

Für die weiteren Darstellungen wird wiederum davon ausgegangen, daß die Verteilungsparameter der Überschußrenditen sowie die der anderen Modellparameter im Zeitablauf stationär sind. Für diesen Fall sind die Verteilungsparameter der historischen Überschußrenditen gute Schätzer für die "wahren" Verteilungsparameter, sowohl für die Vergangenheit als auch für die Zukunft.

3.3.6.2.1. APT-Modelle mit Vorabspezifikation der Faktoren

3.3.6.2.1.1. Ermittlung potentieller Faktoren

Die Grundannahme der APT mit Vorabspezifikation besteht darin, daß es beobachtbare Faktoren gibt, die die Überschußrenditen mindestens mehrerer Finanztitel beeinflussen. Diese Faktoren werden meist auf der Grundlage ökonomischer Überlegungen ausgewählt und dann auf ihren Erklärungsgehalt für die Überschußrenditen untersucht. Die ökonomischen Vorüberlegungen können auf bekannten modelltheoretischen Zusammenhängen beruhen wie dem Dividend Discount Model für die Aktienkurse und dem IS/LM-Modell der Makroökonomik.

Die Vielzahl der in Betracht kommenden erklärenden Faktoren hat daher auch zu einer kaum überschaubaren Anzahl von Untersuchungen der APT auf der Grundlage der Vorabspezifikation geführt. Eine eindeutige Dominanz bestimmter Faktorkombinationen konnte dabei nicht festgestellt werden, hingegen werden bestimmte einzelne Faktoren häufig herangezogen.

Die wichtigsten Faktoren scheinen aus der Gruppe monetärer Faktoren zu stammen. Hier stellt der Zins einen dominanten Faktor dar, wobei in erster Linie langfristige Zinssätze sowie der Spread zwischen kurzfristigen und langfristigen Zinssätzen Verwendung finden, um auch die Variabilität der Zinsstrukturkurve zu erfassen. Letztlich bieten sich als Indikatoren auch die Regressionskoeffizienten der Schätzung der Renditenstrukturkurve oder aus diesen abgeleitete Indikatoren wie NIV, STE und KRÜ an. Des weiteren werden Faktoren genutzt, die auf Zinssätze wirken bzw. als Bestandteile der Zinssätze angesehen werden können, wie Inflationsraten, Risikoprämien und Geldmengen.

Der Einfluß der Absatz-, Beschaffungs- und Arbeitsmärkte auf die Überschußrenditen von Aktien wird über die Gruppe der Konjunkturfaktoren erfaßt. Hier finden sich Faktoren wie Geschäftsklima, Wachstum der industriellen Produktion, Auftragseingänge, Einzelhandelsumsätze, Lohnkosten, Bruttosozialprodukt und Arbeitslosenquote.

Eine weitere Gruppe häufig herangezogener erklärender Variablen sind Internationale Faktoren, über die die Im- und Exportabhängigkeit deutscher Unternehmen sowie das Anlegerverhalten ausländischer Investoren erfaßt werden können. Hierzu gehören Wechselkurse bzw. Wechselkursindizes, Im- und Exportvolumina, ausländische Aktienindizes, ausländische Zinssätze sowie Zahlen aus der deutschen Handelsbilanz.

Neben diesen drei Gruppen ließe sich eine vierte Gruppe hinzufügen, die als Gruppe der Sonstigen Faktoren bezeichnet werden kann. In diese Gruppe fallen beispielsweise der Goldpreis und der Ölpreis.

Grundsätzlich lassen sich für die Auswahl von Faktoren folgende Anforderungen nennen:

- Die Faktoren sollten für einen längeren Zeitraum verfügbar und vergleichbar sein.
- Die unerwarteten Veränderungen dieser Faktoren müssen berechenbar sein.
- Die unerwarteten Veränderungen verschiedener Faktoren sollten nicht oder zumindest wenig korreliert sein (FMP 5), einen konstanten Mittelwert von null (FMP 2) und eine konstante Varianz aufweisen.
- Die unerwarteten Veränderungen dieser Faktoren sollten die Aktienrenditen möglichst stark aber über die Zeit gleichmäßig beeinflußt haben. Sie sollten darüber hinaus trennscharf sein, indem ihr Einfluß auf bestimmte Überschußrenditen möglichst stark, auf andere wiederum nur schwach war.

3.3.6.2.1.2. Ermittlung der unerwarteten Veränderungen der Faktoren und Bereinigung der Faktoren um Multikollinearität

Eine grundlegende Annahme der APT besteht darin, daß die Überschußrenditen der Finanztitel nur von unerwarteten Ausprägungen der voneinander unabhängigen Faktoren beeinflußt werden, weil nur für diese unerwarteten Faktorausprägungen davon ausgegangen werden kann, daß der Erwartungswert null ist (vgl. die FMP 2). Daher stellt sich zunächst die Aufgabe, die erwarteten Werte der potentiell renditebeeinflussenden Faktoren zu bestimmen. Erst die Differenzen zwischen diesen erwarteten Werten und den tatsächlich eingetretenen Werten ergeben die gesuchten renditeerklärenden Faktoren, die für die praktische Umsetzung der APT erforderlich sind. Die Verfahren, mit denen Faktorwerte berechnet werden, die aus damaliger Sicht für die jeweiligen Zeitpunkte erwartet wurden, sind nahezu unüberschaubar.

Abhängigkeiten in den Zeitreihen äußern sich unter anderem durch Autokorrelation, die für bestimmte Zeitreihen, wie z.B. der Entwicklung des Bruttosozialproduktes, offensichtlich sind. Daher werden für verschiedene makroökonomische Variablen zunächst logarithmierte Wachstumsraten nach folgender Vorschrift berechnet:

$$F_{BSP,t} = \ln(BSP_t) - \ln(BSP_{t-1}) = \ln\left(\frac{BSP_t}{BSP_{t-1}}\right)$$

In den einfachsten Anwendungen der APT wird im nächsten Schritt unterstellt, daß die erwarteten Werte einer Zeitreihe dem Mittelwert der beobachteten Werte entsprechen. Damit sind die unerwarteten Komponenten definiert als:

$$F^0_{BSP,t} = F_{BSP_t} - \mu_{BSP_t}$$

Um die erwarteten Werte in der Entwicklung von Zeitreihen zu identifizieren, werden in Untersuchungen zur APT eine Vielzahl weiterer Verfahren angewendet, wie beispielsweise die ARIMA-Zeitreihenanalyse. Darüber hinaus wird versucht, die erwarteten Ausprägungen der renditeerklärenden Variablen über künstliche neuronale Netze zu ermitteln. Neben den "rein technischen" Prognoseverfahren wäre zu prüfen, ob auf der Grundlage fundamentaler Prognoseverfahren eine bessere Ermittlung der unerwarteten Komponenten möglich ist. Letztlich muß gemäß den Annahmen der APT für eine Anwendung der APT im Rahmen von ex-post-Modellen versucht werden, das historische Prognoseverhalten der damaligen potentiellen Arbitrageure zu rekonstruieren. Dabei ist zu bedenken, daß Prognosen unter Hinzunahme einer Vielzahl erklärender Variablen durchgeführt werden (können). Im Prinzip müßte also auf ein Prognosemodell für die gesamte Volkswirtschaft zurückgegriffen werden, wie es - zumindest für einige der gesuchten Faktoren - die Deutsche Bundesbank verwendet.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, von sicherbaren Werten als erwarteten Werten auszugehen. Diese Möglichkeit erscheint insbesondere im Hinblick auf Zinssätze (also die Verwendung von Forward Rates) anwendbar, aber auch auf Aktienindizes und Wechselkurse. Bei dieser Vorgehensweise sind allerdings Risikoprämien einzubeziehen, die über die APT aber gerade ermittelt werden sollen. Für Zinssätze bietet es sich beispielsweise an, die Forward Rates über im Durchschnitt konstante Liquiditätsprämien zu korrigieren.

Aus den Ausführungen wird deutlich, daß ein wesentliches Problem für die Anwendung der APT mit Vorabspezifikation in der Prognose der unerwarteten Faktoren liegt. So wird darauf hingewiesen, daß mit einem zu regiden Herausfiltern zeitlicher Abhängigkeitsstrukturen ("Prewhitening") eine "Überadjustierung" der Zeitreihen erfolgt, womit den Werten soviel Informationen entzogen werden, daß sie keinen Erklärungsgehalt für die Aktienrenditen mehr aufweisen. Die Überlegung, aus diesem Grunde ganz auf ein Herausfiltern der erwarteten Veränderungen zu verzichten, erscheint aber ebenso fraglich.

Nachdem die unerwarteten Werte der die Überschußrenditen von Finanztiteln potentiell erklärenden Faktoren bestimmt wurden, ist zu prüfen, ob diese Faktoren nicht oder zumindest nur schwach korreliert sind, da ihr Einfluß auf die Überschußrenditen ansonsten nicht isoliert bestimmbar ist (FMP 5). Wird festgestellt, daß zwei Faktoren stark korrelieren, kann einer der Faktoren von den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen werden. Eine andere Möglichkeit besteht in der Bereinigung der Faktoren um Multikollinearität mittels der (sequentiellen) Orthogonalisierung. Hierbei werden die erklärenden Faktoren in hierarchischer Weise um ihre Korrelationen bereinigt, wie es in etwa für die Indikatoren der Zinsstruktur gezeigt wurde. Problematisch ist, daß die Reihenfolge der Orthogonalisierung nicht festgelegt ist und daß die bereinigten Faktorausprägungen ökonomisch nur begrenzt interpretierbar sind.

3.3.6.2.1.3. Berechnung von Beta und Eta

Die weiteren Darstellungen zur exemplarischen Anwendung der APT basieren wiederum auf dem Datensatz: Überschußrenditen, d.h. mit der APT sollen (wie beim CAPM) ausschließlich die Überschußrenditen erklärt werden. Als unerwartete Ausprägung des Faktors "Überschußrendite des Marktes" wird die jeweilige Abweichung vom Mittelwert der Überschußrenditen des Marktes gewählt. Als weiterer Faktor wird eine (wiederum fiktive) Kennzahl verwendet, die das Bruttosozialprodukt beschreiben soll. Für diesen zweiten Faktor sind bereits die unerwarteten Ausprägungen angegeben.

Eine Regressionsanalyse bezüglich der beiden erklärenden Faktoren ergibt ein Bestimmtheitsmaß von 10,58 Prozent. Damit sind die Faktoren zwar nicht gänzlich unkorreliert. Da dieser Wert aber vergleichsweise gering ist, wird auf eine Bereinigung verzichtet.

3.3.6.2.1.3.1. Zweistufiges Verfahren

Das in diesem Abschnitt beschriebene und in der Regel in den Untersuchungen zur APT angewendete Verfahren besteht aus folgenden zwei Stufen:

1. Stufe: I Schätzungen der Einzelwerte der Überschußrenditen (abhängige Variablen) mit den Ausprägungen der unerwarteten Faktoren (unabhängige Variablen); man erhält die β_{ik} (Zeitreihenregression)

2. Stufe: Eine Schätzung der Mittelwerte der Überschußrenditen (abhängige Variablen) mit den in der ersten Stufe ermittelten β_{ik} (unabhängige Variablen); man erhält die Risikoprämien $\hat{\eta}_k$ für die verschiedenen Faktoren k (Querschnittsregression)

Ziel des ersten Schrittes ist es, mittels multipler linearer Regressionsanalyse für jeden Finanztitel zunächst die Beta-Faktoren zu bestimmen, wofür folgender allgemeine Schätzansatz Verwendung findet:

$$\Phi_{it} = \alpha_i' + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt}^0 + \varepsilon_{it}$$

Die in dem Regressionsmodell zu schätzenden Konstanten α_i' entsprechen den Mittelwerten der Überschußrenditen der einzelnen Finanztitel, wenn die Mittelwerte der Faktoren - wie angenommen - null betragen. Daher kann auch geschrieben werden:

$$\Phi_{it} = \mu_{\Phi_i} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt}^0 + \varepsilon_{it}$$

Anzumerken ist, daß es sich bei diesen Schätzungen nie um eine vollkommene Erklärung der Einzelrenditen handeln kann, da hier lediglich das systematische Risiko erfaßt wird. Da das unsystematische Risiko einen großen Teil des Gesamtrisikos darstellt, liegen die Korrelationskoeffizienten dieser Schätzungen in der Regel weit unter 100 Prozent.

Auf das vorliegende Beispiel bezogen lautet die Schätzfunktion:

$$\Phi_{it} = \alpha_i' + \beta_{i1} \Phi_{Mt}^0 + \beta_{i2} BSP_t^0 + \varepsilon_{it}$$

Die Ergebnisse der Schätzungen lauten (Datei: APT_Vor):

Aktie	$\hat{\alpha}_i = \mu_{\phi i}$	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	ρ_i^2	$\hat{\mu}_{\phi i}$ (ohne $\hat{\alpha}$)	Differenz
1	-2,27%	28,93%	-1,43%	51,01%	0,21%	-2,49%
2	5,82%	40,21%	0,94%	67,99%	8,27%	-2,45%
3	9,41%	45,74%	1,18%	61,00%	9,72%	-0,32%
4	8,46%	69,87%	-0,27%	47,43%	9,19%	-0,73%
5	15,10%	90,61%	0,98%	79,35%	15,55%	-0,45%
6	12,68%	96,89%	0,24%	90,33%	14,43%	-1,75%
7	16,28%	128,67%	0,40%	83,30%	19,37%	-3,09%
8	18,42%	156,15%	0,27%	87,55%	22,93%	-4,51%
9	22,00%	144,38%	-0,13%	76,12%	20,15%	1,85%
10	21,10%	198,55%	-2,19%	85,58%	22,24%	-1,14%
$\hat{\eta}_k$		14,20%	272,54%			Mittelwert -1,51%

Wie aus der Tabelle ersichtlich, entsprechen die Werte für $\hat{\alpha}_i$ den Erwartungswerten der historischen Überschußrenditen.

Im zweiten Schritt sind die historischen Mittelwerte der Überschußrenditen mit den vorher ermittelten Beta-Faktoren zu schätzen (Querschnittsregression):

$$\mu_{\Phi_i} = \alpha + \sum_{k=1}^{K} \hat{\beta}_{ik}\, \eta_k + \varepsilon_{\mu_i}$$

Das Ergebnis der Schätzung ist in folgender Tabelle zusammengefaßt (Datei: APT_Vor):

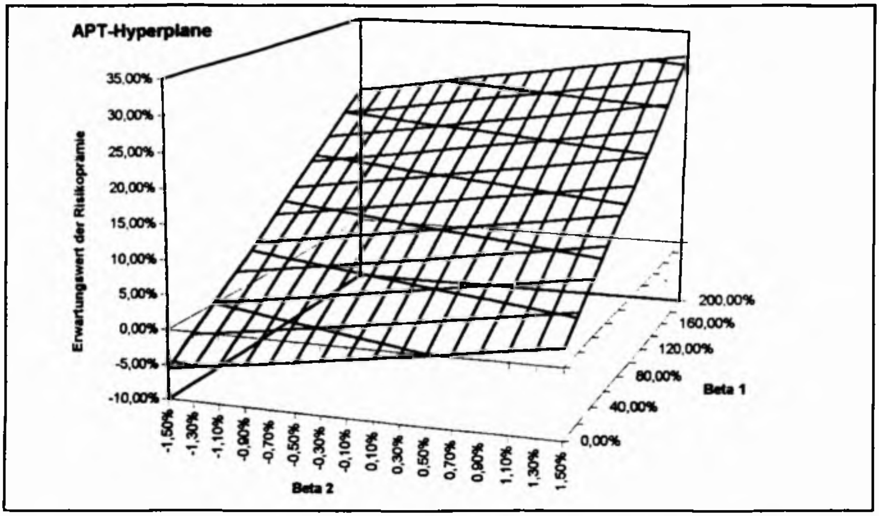
$\hat{\alpha}$	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\eta}_2$	ρ^2 (Bestimmtheitsmaß)
-1,51%	14,20%	272,54%	94,50%

Das sich aus dieser Schätzung ergebende α sollte bei null liegen. In diesem Fall impliziert $\hat{\alpha}$ = -1,51%, daß jeder Finanztitel eine negative "Basisrisikoprämie"in Höhe von 1,51% hat, was mit der Grundannahme der APT nicht vereinbar ist. Nun ist aus diesem Sachverhalt nicht automatisch abzuleiten, daß die APT nicht zutrifft. Zu prüfen ist vielmehr, ob dieser Wert "zufällig" ist. Im Gegensatz zu den Schätzungen der Beta-Faktoren, müßte das Bestimmtheitsmaß dieser Schätzung in theoretischer Hinsicht bei 100% liegen. Je geringer das Bestimmtheitsmaß ist desto weniger gut eignen sich die verwendeten Faktoren in Verbindung mit den Faktorsensitivitäten zur Erklärung der Mittelwerte der Überschußrenditen der einbezogenen Finanztitel, desto weniger gut ist also das geschätzte APT-Faktormodell. Aus dem gleichen Grund sollten die Werte der Residuen der Mittelwerte für alle Finanztitel gering sein bzw. in theoretischer Hinsicht sogar für jeden Finanztitel bei null liegen. Um in statistischer Hinsicht haltbare Aussagen hinsichtlich der Güte der ermittelten Risikoprämien zu erhalten, bieten sich verschiedene Testverfahren an, auf die an dieser Stelle aber nicht näher eingegangen werden soll.

Beschreibt das Modell der APT die Überschußrenditen der einzelnen Aktien zutreffend, so ergibt sich für zukünftige Überschußrenditen der Finanztitel i:

$$\tilde{r}_i = r_f + \tilde{\phi}_i + \tilde{\varepsilon}_i = r_f + \hat{\beta}_{i1}\,\hat{\eta}_1 + \hat{\beta}_{i2}\,\hat{\eta}_2 + \hat{\beta}_{i1}\,\tilde{\phi}_M^0 + \hat{\beta}_{i2}\,B\tilde{S}P^0 + \tilde{\varepsilon}_i$$

Den Zusammenhang zwischen den Beta-Faktoren und den Erwartungswerten von Finanztiteln nach der APT-Gleichung wird auch durch die APT-Hyperplane veranschaulicht.



Für die Aktie 7 bedeutet das beispielsweise (Datei: APT_Vor):

$$\tilde{r}_7 = r_f + 1{,}2867 \cdot 0{,}1420 + 0{,}0040 \cdot 2{,}7254 + 1{,}2867 \cdot \tilde{\phi}_M^0 + 0{,}0040\,B\tilde{S}P^0 + \tilde{\varepsilon}_7$$

$$\tilde{r}_7 = r_f + 0{,}1937 + 1{,}2867\,\tilde{\phi}_M^0 + 0{,}0040\,B\tilde{S}P^0 + \tilde{\varepsilon}_7$$

mit dem Erwartungswert

$$\mu_{\tilde{r}_7} = r_f + 0{,}1937$$

Im nächsten Schritt soll anhand des Beispiels gezeigt werden, wie eine Überprüfung der Ergebnisse anhand eines Arbitrageportefeuilles durchgeführt werden kann. Die Tabelle zeigt, wie ein Portefeuille zusammengesetzt[1] werden kann, welches die Voraussetzungen eines Arbitrageportefeuilles erfüllt.

1 Die Anteile wurden mit dem Excel-Solver berechnet.

Aktie	β_{i1}	β_{i2}	$\hat{\mu}_{\phi i}$	$\mu_{\phi i}$	w_i	$\lvert w_i \rvert$	$w_i\,\beta_{i1}$	$w_i\,\beta_{i2}$	$w_i \mu_{\phi i}$	$w_i\,\hat{\mu}_{\phi i}$
1	28,93%	-1,43%	0,21%	-2,27%	0,110	0,110	0,0318	-0,0016	-0,0025	0,0002
2	40,21%	0,94%	8,27%	5,82%	-0,084	0,084	-0,0338	-0,0008	-0,0049	-0,0069
3	45,74%	1,18%	9,72%	9,41%	-0,082	0,082	-0,0375	-0,0010	-0,0077	-0,0080
4	69,87%	-0,27%	9,19%	8,46%	-0,088	0,088	-0,0615	0,0002	-0,0074	-0,0081
5	90,61%	0,98%	15,55%	15,10%	0,130	0,130	0,1178	0,0013	0,0196	0,0202
6	96,89%	0,24%	14,43%	12,68%	-0,083	0,083	-0,0804	-0,0002	-0,0105	-0,0120
7	128,67%	0,40%	19,37%	16,28%	0,130	0,130	0,1673	0,0005	0,0212	0,0252
8	156,15%	0,27%	22,93%	18.42%	-0,077	0,077	-0,1202	-0,0002	-0,0142	-0,0177
9	144,38%	-0,13%	20,15%	22,00%	0,129	0,129	0,1863	-0,0002	0,0284	0,0260
10	198,55%	-2,19%	22,24%	21,10%	-0,086	0,086	-0,1708	0,0019	-0,0182	-0,0191
$\hat{\eta}_k$	14,20%	272,53%								
					0	1	0	0	0,0039	0
Bedingungen					0	1	0	0		
					$\sigma^2 =$ 1,05%					

Die Anteile wurden so gewählt, daß die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = 0 \quad bzw.: \quad \sum_{i=1}^{I} |w_i| = 1$$

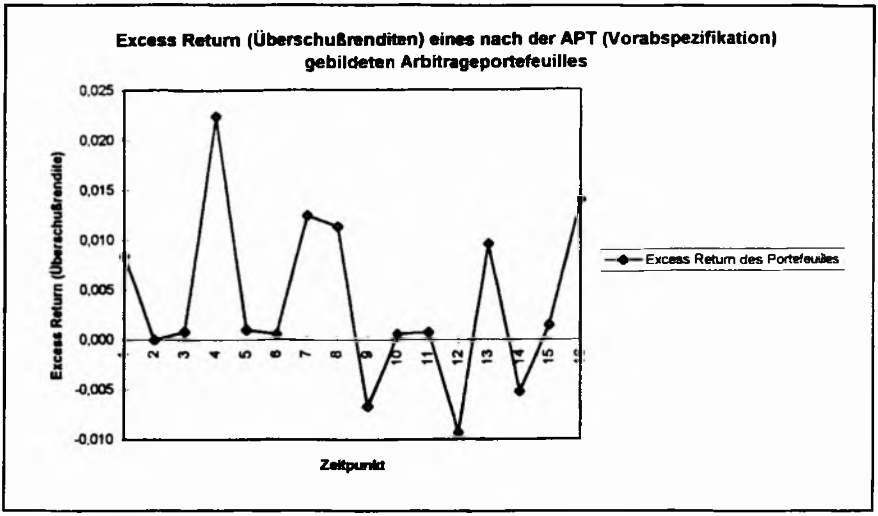
und

$$\sum_{i=1}^{10} w_i \; \beta_{ik} = \beta_{APk} = 0 \quad \forall\, k \quad mit: \quad k = 1, \ldots, 2$$

erfüllt sind. Darüber hinaus wurden die Anteile so bestimmt, daß die Varianz der Anteile minimal ist (hier 1,05%), damit eine möglichst gleichmäßige Verteilung der verschiedenen Wertpapiere im Arbitrageportefeuille und damit eine gute Diversifikation des unsystematischen Risikos gewährleistet ist. Hierfür gibt es selbstverständlich bessere - allerdings aufwendigere - Verfahren, mit denen ein noch größerer Diversifikationseffekt erzielt werden kann. Diese basieren darauf, die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen (also die nicht durch die APT-Gleichung erfaßten Risiken) zu minimieren.

Wie aus der Tabelle ersichtlich, beträgt die Summe der Anteile null und die Summe der absoluten Werte der Anteile eins. Das Portefeuille weist Werte von null für die beiden Beta-Faktoren auf, es dürfte damit - wenn es gut diversifiziert ist - frei von Risiken bezüglich unerwarteter Veränderungen der Faktoren Überschußrendite des Marktes und Bruttosozialprodukt sein. Da es kein systematisches Risiko aufweist, darf es auch keine Risikoprämie erwarten lassen. Ermittelt man den Erwartungswert der Überschußrendite des Portefeuilles auf der Grundlage der erwarteten Überschußrenditen nach der APT, so zeigt sich, daß dieser null ist. Ein etwas anderes Resultat ergibt sich, wenn man die erwartete Überschußrendite des Portefeuilles mit dem Erwartungswert der historischen Überschußrenditen der einzelnen Finanztitel ermittelt. In diesem Fall ergibt sich eine Überschußrendite für das "Arbitrageportefeuille" von 0,0039. Die Abweichung von null ist allerdings vergleichsweise gering, so daß die Gültigkeit der APT-Gleichung in diesem Beispiel nicht unmittelbar verworfen werden kann. Auch für diese Fragestellung gibt es selbstverständlich Tests, auf die an dieser Stelle aber nicht eingegangen werden soll.

Eine abschließende Betrachtung besteht darin, die Überschußrenditen des Arbitrageportefeuilles für die 16 (vergangenen) Zeitpunkte zu berechnen, um die Frage zu beantworten, ob das Arbitrageportefeuille in den 16 Zeitpunkten wirklich eine Überschußrendite von null aufgewiesen hätte, wie es die APT unterstellt. Die Grafik faßt die Ergebnisse zusammen.



Daß die Überschußrenditen in den 16 Zeitpunkten um null schwanken, ist damit zu erklären, daß eine gute Diversifikation des Arbitrageportefeuilles auf der Grundlage der 10 Aktien selbstverständlich nicht möglich ist. Zu testen wäre also, ob die Abweichungen zufällig oder systematisch sind, die APT diesbezüglich also zu bestätigen oder abzulehnen ist.

Abschließend wird gezeigt, wie sogenannte Mimicking-Portefeuilles konstruiert werden können, die nur auf einen Beta-Faktor laden. Die Bedingungen für ein Mimicking-Portefeuille lauten im vorliegenden Fall:

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{10} w_i \, \beta_{i2} = \beta_{MP2} = 0$$

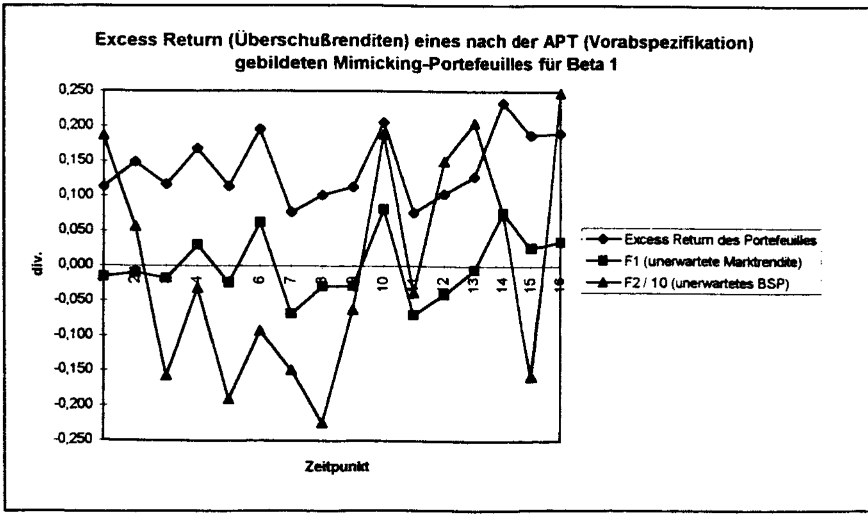
$$\sum_{i=1}^{10} w_i \, \beta_{i1} = \beta_{MP1} = 1$$

Sind die nach der APT ermittelten Sensitivitäten und Faktorprämien richtig, dann muß der Erwartungswert der Überschußrenditen jedes dieser Mimicking-Portefeuilles genau der jeweiligen Faktorprämie entsprechen. Die folgende Tabelle zeigt auf, wie ein solches Mimicking-Portefeuille zusammengestellt werden kann.[1] Auch hier bietet es sich an, eine gute Diversifikation des Mimicking-Portefeuilles anzustreben, indem die Varianz der Anteile minimiert wird (Datei: APT_Vor).

1 Die Anteile wurden wiederum mit dem Excel-Solver berechnet.

Aktie	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\mu}_{\phi i}$	$\mu_{\phi i}$	w_i	$\lvert w_i \rvert$	$w_i \hat{\beta}_{i1}$	$w_i \hat{\beta}_{i2}$	$w_i \mu_{\phi i}$	$w_i \hat{\mu}_{\phi i}$
1	28,93%	-1,43%	0,21%	-2,27%	-0,008	0,008	-0,0023	0,0001	0,0002	0,0000
2	40,21%	0,94%	8,27%	5,82%	0,033	0,033	0,0133	0,0003	0,0019	0,0027
3	45,74%	1,18%	9,72%	9,41%	0,392	0,392	0,1793	0,0046	0,0369	0,0381
4	69,87%	-0,27%	9,19%	8,46%	0,115	0,115	0,0804	-0,0003	0,0097	0,0106
5	90,61%	0,98%	15,55%	15,10%	0,083	0,083	0,0752	0,0008	0,0125	0,0129
6	96,89%	0,24%	14,43%	12,68%	0,054	0,054	0,0523	0,0001	0,0068	0,0078
7	128,67%	0,40%	19,37%	16,28%	-0,011	0,011	-0,0142	0,0000	-0,0018	-0,0021
8	156,15%	0,27%	22,93%	18.42%	-0,069	0,069	-0,1077	-0,0002	-1,2710	-0,0158
9	144,39%	-0,13%	20,15%	22,00%	0,173	0,173	0,2498	-0,0002	0,0381	0,0349
10	198,55%	-2,19%	22,24%	21,10%	0,239	0,239	0,4745	-0,0052	0,0504	0,0532
η_k	14,20%	272,53%								
					1	1,177	1	0	0,1420	0,1420
Bedingung					1		1	0	0,1420	0,1420
					$\sigma^2 =$ 1,7%					

Die folgende Abbildung veranschaulicht, daß die Überschußrenditen des Mimicking-Portefeuilles in den 16 Zeiträumen primär von der Sensitivität des ersten Faktors abhängig sind. Der zweite Faktor dürfte theoretisch keinen Einfluß auf die Überschußrendite des Mimicking-Portefeuilles haben, da der Wert für β_{MP2} null ist. Der Abbildung kann hierzu allerdings entnommen werden, daß - u.a. aufgrund der nicht perfekten Diversifikation des Mimicking-Portefeuilles - auch der zweite Faktor einen, wenn auch geringen, Einfluß auf die Überschußrendite hat.



3.3.6.2.1.3.2. Einstufiges Verfahren

Während beim gezeigten zweistufigen Verfahren die Werte für die Sensitivitäten β_{ik} und Faktorprämien η_k sequentiell geschätzt werden, erfolgt beim einstufigen Verfahren eine gleichzeitige Schätzung dieser Größen, womit eine höhere Schätzgenauigkeit verbunden ist. Zu diesem Zweck wird die oben eingeführte Zielgleichung

$$\Phi_{it} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,\eta_k + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,F_{kt}^{0} + \varepsilon_{it}$$

umgeformt zu:

$$\Phi_{it} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\,(\eta_k + F_{kt}^{0}) + \varepsilon_{it}$$

Damit liegt ein nicht-lineares Mehrgleichungssystem vor, welches mit Hilfe spezieller, vergleichsweise komplexer Schätzverfahren geschätzt werden kann. Der Schätzvorgang ist aufgrund von Iterationsvorgängen sehr rechenintensiv, so daß Lösungen für eine große Anzahl von Finanztitel und Beobachtungszeitpunkten nur mit langen Computerrechenzeiten erzielt werden können. Eine weitere Problematik besteht darin, daß für die Berechnung dieses Mehrgleichungssystems Startwerte vorzugeben sind, von denen wiederum die Ergebnisse in Form der Werte für β_{ik} und η_k abhängig sind. Nach der Schätzung ist - analog zu den o.a. Ausführungen - die Einhaltung der FMP zu prüfen.

3.3.6.2.2. APT mit endogener Bestimmung der Faktoren und Risikoprämien (Faktorenanalyse)

Die Faktorenanalyse ist ein Verfahren der multivariaten Statistik. Das Ziel dieses Verfahrens besteht darin, aus einer Menge beobachteter Variablen (hier empirische Renditen von Finanztiteln r_{it} bzw. Φ_{it}) eine möglichst geringe Anzahl von Faktoren (hier mit der Bezeichnung F_{kt}^{0}) zu extrahieren. Dabei sollen die Faktoren so bestimmt werden, daß sie die Varianz der beobachteten Variablen möglichst gut erklären. In Abgrenzung zur APT mit Vorabspezifikation werden die renditebeeinflussenden Faktoren F_{kt}^{0} also nicht vorgegeben. Sie ergeben sich erst im Zuge der Anwendung der Faktorenanalyse. Eine ökonomische Interpretation der Faktorwerte ist folglich nicht bzw. im Anschluß an die Faktorenanalyse nur schwer möglich.

Sind die Faktoren ermittelt, können daraus die Sensitivitäten der Finanztitel $\hat{\beta}_{ik}$ geschätzt werden. Im nächsten Schritt werden wiederum - analog zur bereits beschriebenen Vorgehensweise - die Mittelwerte der Renditen mit den Beta-Faktoren geschätzt, um die Faktorprämien $\hat{\eta}_k$ zu erhalten (Querschnittsregression). Insofern handelt es sich bei der APT auf der Grundlage der Faktorenanalyse um ein zweistufiges Verfahren.

Im weiteren werden die einzelnen Schritte des Einsatzes der Faktorenanalyse für die APT genauer erklärt, wobei der rechentechnische Vorgang der Faktorenanalyse nicht bzw. nur sehr allgemein dargestellt werden kann. Ein Nachvollziehen der Rechnungen ist nur mit Hilfe spezieller Statistik-Software praktikabel (hier wurde SPSS genutzt).

3.3.6.2.2.1. Bestimmung der Anzahl relevanter Faktoren

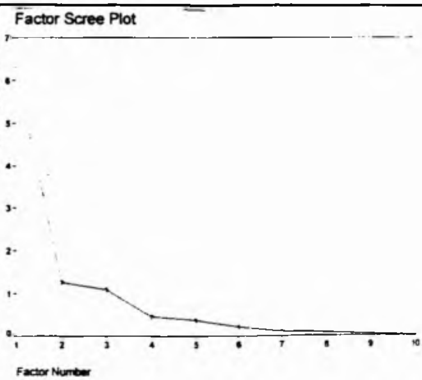
Für die Vorbereitung der Ermittlung der Anzahl relevanter Faktoren wird meist die sogenannte Hauptkomponentenanalyse oder Principal Component Analysis (PCA) - eine Variante der Faktorenanalyse - genutzt. Bei der Hauptkomponentenanalyse wird zunächst ein erster Faktor bestimmt, der den größtmöglichen Teil der Varianz der

Überschußrenditen aller Aktien erklärt. Es folgt die Extraktion eines zweiten Faktors mit dem Ziel einer möglichst guten Erklärung der bisher nicht erklärten Varianz usw. Im Ergebnis ist das Verfahren darauf ausgelegt, die gesamte Varianz der empirischen Daten durch gemeinsame Faktoren zu erklären. Dies gelingt in der Regel erst dann perfekt, wenn die Anzahl der Faktoren der Anzahl der zu erklärenden Variablen (hier Überschußrenditen der Aktien) entspricht.

Für das vorliegende Beispiel lautet das Ergebnis einer derartigen Hauptkomponentenanalyse wie folgt:

Aktie	Kommunalität (Anteil der Varianz der Überschußrenditen, der durch die Faktoren erklärt wird)	Faktor	Eigenvalue	kum. Prozentsatz der Eigenvalues
1	1	1	6,32	63,2%
2	1	2	1,29	76,1%
3	1	3	1,02	86,3%
4	1	4	0,47	91,0%
5	1	5	0,35	94,6%
6	1	6	0,2	96,6%
7	1	7	0,17	98,4%
8	1	8	0,1	99,4%
9	1	9	0,04	99,8%
10	1	10	0,02	100%
	Summe = 10		Summe = 10	

Wie aus der Tabelle ersichtlich, würde die Einbeziehung nur eines Faktors 63,2% der Gesamtvarianz aller Überschußrenditen erklären. Die Hinzunahme eines zweiten Faktors kann zusätzlich 12,90% erklären. In der Summe können mit 2 Faktoren also 76,10% der Varianz erklärt werden. Nimmt man alle 10 Faktoren, so kann selbstverständlich die gesamte Varianz (100%) erklärt werden, da mit 10 erklärenden Faktoren 10 zu erklärende Variablen immer perfekt abgebildet werden können. In diesem Fall hätte man die Daten allerdings nicht reduziert, so daß zu viele Faktoren dem Ziel einer Datenkomprimierung entgegenstehen. Den Zusammenhang der Anzahl erklärender Variablen und der Summe der erklärten Gesamtvarianz ist aus der Abbildung ersichtlich.



Für die Festlegung einer "optimalen" Anzahl von Faktoren gibt es verschiedene Verfahren. Ein Verfahren basiert auf dem Kaiser-Kriterium, wonach Faktoren hinzugenommen werden, sofern ihr Eigenvalue größer eins ist. Erklärende Faktoren, die diese Bedingung erfüllen, erklären mehr Varianz als die (zu erklärenden) Variablen (die Überschußrenditen) im Durchschnitt aufweisen. Ihre Extraktion ist somit zur Datenreduktion geeignet. In dem Beispiel erfüllen genau 3 Faktoren diese Bedingung, womit für das weitere Vorgehen die Anzahl der erklärenden, zu extrahierenden Faktoren auf drei festgelegt ist.

3.3.6.2.2.2. Bestimmung der Faktorwerte und der Betas

Nachdem die "optimale" Anzahl von Faktoren festgelegt ist, gilt es, geeignete Faktorwerte und dazugehörige β_{ik} zu berechnen. Zu diesem Zweck gibt es innerhalb der Faktorenanalyse wiederum verschiedene Verfahren, die hier im einzelnen nicht dargestellt werden sollen. Letztlich ergeben sich bestimmte Werte für die erklärenden Faktoren, die, um die Abgrenzung zur APT mit Vorabspezifikation deutlich zu machen, zusammen mit den zu erklärenden Überschußrenditen in der folgenden Tabelle zusammengefaßt sind:

Die sich nach der Faktorenanalyse ergebenden Werte für $\dot{\beta}_{ki}$ sind aus der Tabelle ersichtlich (Datei: APT_FAK):

Aktie	β_{i1}	β_{i2}	β_{i3}	$\mu_{\phi i}$	$\mu_{\phi i}$ (ohne $\hat{\alpha}$)	Differenzen
1	0,20%	-0,07%	3,12%	-2,27%	-0,61%	-1,66%
2	0,48%	3,32%	-0,08%	5,82%	7,17%	-1,35%
3	1,05%	2,68%	0,09%	9,41%	7,33%	2,08%
4	4,09%	0,21%	-0,30%	8,46%	10,31%	-1,85%
5	3,72%	3,59%	-1,46%	15,10%	15,90%	-0,80%
6	3,40%	3,42%	0,58%	12,68%	14,18%	-1,50%
7	4,46%	3,78%	0,75%	16,28%	17,35%	-1,07%
8	5,34%	4,94%	0,53%	18,42%	21,63%	-3,21%
9	5,56%	3,19%	1,30%	22,00%	18,75%	3,26%
10	6,63%	3,96%	3,34%	21,10%	22,08%	-0,98%
						Mittelwert: -0,71%

Mittels dieser $\dot{\beta}_{ik}$ können, wie bereits im Rahmen der Vorabspezifikation gezeigt, die Werte für $\hat{\eta}_k$ mittels einer Querschnittsregression geschätzt werden:

$\hat{\alpha}$	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\eta}_2$	$\hat{\eta}_3$	ρ^2
-0,71%	240,56%	180,83%	-30,92%	93,48%

Eine Gegenüberstellung der über diesen Weg nach der APT berechneten erwarteten Überschußrenditen und dem Erwartungswert der historischen Überschußrenditen kann ebenso der o.a. Tabelle entnommen werden.

Datensatz: Überschußrenditen u. Faktoren nach der Faktorenanalyse (Datei: APT_FAK)

ϕ_{it}	t = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	μ	σ	σ^2
Aktie i = 1	-3,75%	-3,00%	-3,22%	1,61%	-1,29%	1,88%	-0,40%	-1,80%	2,33%	-5,58%	-7,38%	-6,20%	-3,99%	-1,12%	1,55%	-6,03%	-2,27%	3,13%	0,10%
2	5,12%	9,07%	4,52%	4,85%	1,00%	9,02%	2,03%	2,88%	6,84%	11,96%	0,64%	5,26%	10,23%	8,78%	4,03%	6,90%	5,82%	3,35%	0,11%
3	8,74%	14,56%	4,92%	12,30%	3,95%	11,40%	6,43%	2,24%	8,32%	12,64%	3,59%	11,00%	9,12%	11,84%	12,92%	16,50%	9,41%	4,21%	0,18%
4	12,23%	2,81%	5,54%	10,84%	10,32%	9,89%	-0,14%	9,12%	4,57%	16,12%	9,70%	4,22%	3,67%	15,63%	11,98%	8,92%	8,46%	4,62%	0,21%
5	12,97%	16,96%	14,73%	15,50%	10,28%	17,55%	9,17%	10,70%	7,74%	27,96%	12,13%	11,18%	16,09%	25,88%	13,45%	19,29%	15,10%	5,62%	0,32%
6	11,26%	11,85%	12,52%	15,86%	8,12%	16,58%	4,90%	9,73%	11,22%	22,08%	5,61%	9,92%	13,45%	22,68%	13,96%	13,10%	12,68%	4,96%	0,25%
7	15,98%	14,38%	6,89%	22,31%	11,36%	28,42%	9,41%	14,39%	10,35%	28,74%	8,55%	11,85%	14,04%	22,08%	18,15%	23,58%	16,28%	6,91%	0,48%
8	17,42%	13,84%	20,94%	22,10%	17,18%	30,16%	5,35%	12,62%	13,22%	34,19%	4,16%	14,68%	18,96%	25,11%	19,76%	24,97%	18,42%	8,04%	0,65%
9	21,64%	16,93%	24,20%	32,40%	20,00%	26,40%	10,53%	20,12%	15,02%	29,76%	8,74%	11,57%	25,11%	30,01%	27,55%	32,09%	22,00%	7,73%	0,60%
10	9,46%	19,54%	18,39%	19,33%	21,48%	38,24%	11,46%	17,78%	18,73%	30,65%	11,00%	12,47%	14,68%	42,05%	29,87%	22,50%	21,10%	9,59%	0,92%
μ	11,11%	11,69%	10,94%	15,71%	10,24%	18,96%	5,87%	9,78%	9,84%	20,85%	5,68%	8,60%	12,14%	20,29%	15,32%	16,18%	12,70%	4,57%	0,2087%
σ	7,02%	6,98%	8,64%	9,00%	7,70%	11,46%	4,32%	6,99%	4,94%	12,18%	5,83%	6,10%	8,07%	12,09%	9,00%	10,94%	8,20%	2,46%	0,06%
F_{1t}^0 (Faktor 1)	-0,0927	-1,211	0,1048	0,9231	0,3402	0,3826	-1,279	-0,0407	-1,381	1,316	-0,1937	-0,8334	-1,182	1,857	0,8085	0,4810	0,00	97,78%	95,60%
F_{2t}^0 (Faktor 2)	-0,2109	1,1504	-0,4124	-0,3929	-1,497	0,9386	-0,9418	-0,8791	0,5399	1,634	-1,573	-0,0770	1,486	0,6350	-0,6274	0,2276	0,00	99,89%	99,78%
F_{3t}^0 (Faktor 3)	-0,4710	-0,1307	-0,3185	1,172	0,2585	1,327	0,6577	0,1338	1,576	-1,105	-1,655	-1,201	-0,4391	0,2631	1,158	-1,225	0,00	99,94%	99,88%

3.3.6.3. Kritische Würdigung der APT

Bei den gezeigten APT-Ansätzen treten im Rahmen einer praktischen Anwendung u.a. folgende Probleme auf:

1. Die renditebeeinflussenden Faktoren können sich im Zeitverlauf geändert haben. Gleiches gilt für die Sensitivitäten der einzelnen Finanztitel auf diese Faktoren.
2. Im Rahmen der Vorabspezifikation ist die Wahl der Faktoren problematisch, da deren Ausprägungen für einen längeren Zeitraum unabhängig voneinander sein sollten.
3. Ein Problem bei der Faktorenanalyse besteht darin, daß die Faktoren statistische Artefakte darstellen, die eine ökonomische Interpretation nicht unmittelbar zulassen.
4. Der Preis für Risikoübernahmen kann sich sowohl insgesamt als auch für einzelne Faktoren geändert haben.
5. Es lassen sich keine Mimicking-Portefeuilles konstruieren, die nur auf die Veränderung eines Faktors reagieren. Es verbleibt ein nicht diversifizierbares Restrisiko.
6. Es lassen sich keine Arbitrageportefeuilles konstruieren, die wirklich risikofrei sind.
7. Da u.a. Transaktionskosten einer perfekten Arbitragefreiheit der Märkte entgegenstehen, kann es letztlich nur Bandbreiten für die Gleichgewichts-Überschußrenditen geben (und gegeben haben), außerhalb derer sich Arbitragetransaktionen erst lohnen.

Schließlich setzt die ex-post-APT voraus, daß sich die Überschußrenditen in der Vergangenheit so gebildet haben, wie es das zu konstruierende Modell unterstellt. Ungeachtet der Tatsache, daß zumindest einige Wirtschaftssubjekte (die Arbitrageure) diesen Zusammenhang also bereits gekannt haben mußten, hätte es bei der damaligen "Anwendung" der APT im Sinne von Arbitragetransaktionen eine Reihe von Problemen gegeben. Diese Probleme könnten letztlich dazu geführt haben, daß es gar kein arbitragefreies Preis- bzw. Renditengefüge gegeben hat.

Schließlich erscheint es fraglich, daß die Wirtschaftssubjekte die erwarteten Überschußrenditen so bestimmen, daß die Arbitrageure davon ausgehen können, daß der titelspezifische Einflußfaktor $\tilde{\varepsilon}_i$ einen Erwartungswert von null hat. Werden bestimmte Unternehmensentwicklungen systematisch unter- oder überschätzt, ist auch das unsystematische Risiko nicht diversifizierbar. In diesem Zusammenhang sind die Ausführungen und Untersuchungen zur Markteffizienz anzuführen.

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben - Datei: APT_FAK

A) Welche Gründe sprechen dafür, daß nur ein Faktor (wie z.B. die Marktrendite) zur Erklärung von Aktienrenditen nicht ausreicht?

B) Begründen Sie, warum die aufgeführten potentiellen Faktoren einen Einfluß auf die Überschußrenditen von Aktien haben könnten.

C) Warum ist es wichtig, daß die Faktoren im Rahmen der APT einen Erwartungswert von null und eine konstante Varianz haben? Warum sollten die Faktoren darüber hinaus untereinander nicht korreliert sein?

D) Worin liegen die Unterschiede von APT-Modellen auf der Grundlage der Faktorenanalyse und der Vorabspezifikation?

E) Beschreiben Sie das ein- und zweistufige Verfahren der Bestimmung der Werte für Beta und Eta.

F) Was sagt ein hohes/niedriges Bestimmtheitsmaß aus, welches als Ergebnis bei der Berechnung der Beta-Faktoren auftritt?

G) Was sagt der Wert für α im Rahmen der Querschnittsregression aus?

H) Ermitteln Sie für folgende Aktien die erwarteten Renditen bei einem risikofreien Zinssatz von 5 Prozent:

auf der Grundlage der Daten der Vorabspezifikation (ohne Alpha $\hat{\alpha}$)			
Fall/Finanztitel (i)	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	
1	0	0	
2	50%	8%	
3	100%	0%	
auf der Grundlage der Daten der Faktorenanalyse (ohne Alpha $\hat{\alpha}$)			
	$\hat{\beta}_{i1}$	$\hat{\beta}_{i2}$	$\hat{\beta}_{i3}$
4	0%	0%	0%
5	2%	1%	4%
6	5%	0%	0%
7	0%	0%	5%

I) Interpretieren Sie die Renditen insb. für die Fälle 1, 3, 4 und 7.

J) Wo fließt in die APT-Gleichung das systematische, wo das unsystematische Risiko ein?

K) Was ist die Aufgabe der Hauptkomponentenanalyse im Rahmen der APT-Faktorenanalyse?

Lösungshinweise

H) Fall 1: 5% - Fall 2: 33,9% - Fall 3: 19,2%
Fall 4: 5% - Fall 5: 10,38% - Fall 6: 17,03% - Fall 7: 3,45%

Literatur

Christoph Auckenthahler. Trust Banking - Theorie und Praxis des Anlagegeschäftes. Bern und Stuttgart 1991.

Matthias Denzler. Arbitrage-Preis-Theorie: Eine empirische Untersuchung für den schweizerischen Aktienmarkt. Winterthur 1988.

Günter Franke. Neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der Finanzmarkttheorie, "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1993), S. 389-398.

Günter Franke. Performancemessung auf der Basis von Mehrfaktorenmodellen, in: Erfolgsmessung und Erfolgsanalyse im Portfolio-Management, hrsg. v. Wolfgang Gebauer und Bernd Rudolph, Frankfurt a.M. 1994, S. 125-143.

Hans-Jörg Frantzmann. Saisonalitäten und Bewertung am deutschen Aktien- und Rentenmarkt, Frankfurt am Main 1989.

Elke Hörnstein. Arbitrage- und Gleichgewichtsmodelle in der Kapitalmarkttheorie: Eine vergleichende Analyse der CAPM und APT-Ansätze unter Berücksichtigung ihrer empirischen Überprüfbarkeit, Frankfurt am Main, Bern, New York und Paris 1990.

Wolfgang Müller. Bilanzinformation und Aktienbewertung: Eine theoretische und empirische Überprüfung der Entscheidungsrelevanz von Jahresabschlußinformationen für die Preisbildung deutscher Aktien, Frankfurt am Main 1992.

Hans-Walter Peters. Kapitalmarkttheorie und Aktienmarktanalyse, Frankfurt am Main, Bern, New York und Paris 1987.

S. A. Ross. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, "Journal of Economic Theory", (1976), S. 341-360.

Manfred Steiner und Thomas Nowak. Zur Bestimmung von Risikofaktoren am deutschen Aktienmarkt auf Basis der Arbitrage Pricing Theory, "Die Betriebswirtschaft", (1994), S. 347-363.

Arnd Verleger. Risikostrukturen am deutschen Aktienmarkt, Münster/Hamburg 1993.

Josef F. Wertschulte. Koreferat, in: Erfolgsmessung und Erfolgsanalyse im Portfolio-Management, hrsg. v. Wolfgang Gebauer und Bernd Rudolph, Frankfurt am Main 1994, S. 145-157.

Jochen Wilhelm. Zum Verhältnis von Capital Asset Pricing Model, Arbitrage Pricing Theory und Bedingungen der Arbitragefreiheit von Finanzmärkten, "Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis", (1981), S. 891-905.

Michael Winkelmann. Aktienbewertung in Deutschland, Königstein/Ts. 1984.

4. Optionspreistheorie

Die Optionspreis- oder Optionsbewertungstheorie hat sich inzwischen zu einer so umfassenden Theorie ausgeweitet, daß es schwierig ist, sie selbst in Monographien vollständig und geschlossen darzustellen. Hinzu kommt, daß auf diesem Gebiet eine permanente Weiterentwicklung stattfindet. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, daß die finanzwirtschaftliche Praxis ein ausgesprochen starkes Interesse an diesem Teilgebiet der Finanzwirtschaft hat. Offensichtlich kann an den Kapitalmärkten mit dem Wissen um "richtige" Ansätze zur Bewertung von Optionen viel verdient werden.

Ziel dieses Blocks kann es (leider) nur sein, eine Einführung in die Optionsbewertungstheorie zu geben. Die gängigen Ansätze, wie das Binomialmodell und das Black & Scholes Modell, werden kurz dargestellt und anhand konkreter Zahlen durchgerechnet. So soll ein Grundverständnis bezüglich der wesentlichen Zusammenhänge vermittelt werden, das gegebenenfalls eigenständig weiter ausgebaut werden kann. Wie sich zeigen wird, sind gewisse Grundkenntnisse statistischer Natur hilfreich. Aus diesem Grund sei an dieser Stelle auf den Exkurs zur Statistik verwiesen, der am Ende des Skriptes zu finden ist.

4.1. Grundlagen

Optionen gehören in die Gruppe der bedingten Termingeschäfte, d.h. der Optionsnehmer kann später wählen, ob er sein Optionsrecht ausüben will, also den Basiswert kaufen bzw. verkaufen möchte oder nicht. Der Optionsgeber oder Stillhalter hat sich der Entscheidung des Optionsnehmers zu fügen.

Bei den Optionsgeschäften sind standardisierte Optionen und OTC-Optionen (over the counter) zu unterscheiden. Standardisierte Optionen weisen einheitliche Kontraktspezifika hinsichtlich Laufzeit, Kontraktgröße, Basispreis etc. auf und sind daher an der Börse handelbar und somit prinzipiell fungibel. OTC-Optionen bieten die Möglichkeit des individuellen Zuschnittes, werden jedoch nicht börsenmäßig gehandelt und weisen daher eine eingeschränkte Fungibilität (Wiederverkaufseignung) auf.

Die folgenden Darstellungen erfolgen exemplarisch für Aktienoptionen. Eine Verallgemeinerung ist aber möglich, da dafür lediglich der Basiswert auszutauschen ist. Die prinzipiellen Zusammenhänge bleiben dabei meist bestehen. So können prinzipiell alle bedingten Ansprüche (contingent claims) mit Hilfe der Optionspreistheorie bewertet werden.

Optionsähnliche Geschäfte sind weit verbreitet und seien hier an zwei Beispielen angedeutet. So ist der Abschluß einer Sachversicherung ein Optionsgeschäft, bei der der Versicherungsnehmer (Optionsinhaber) gegen die Zahlung der Versicherungsprämie (Optionsprämie) bei Eintritt einer bestimmten Kondition (beispielsweise einem Geräteausfall oder Diebstahl) vom Versicherer (Optionsgeber oder Stillhalter) die Zahlung der Versicherungssumme (Basispreis) verlangen kann. Als zweites Beispiel sei das Eigenkapital eines Unternehmens als Option auf den Kauf des gesamten Unternehmensvermögens gedeutet. Im letzten Beispiel entspricht der Unternehmenswert dem zugrundeliegenden Aktienkurs einer Option auf Aktien.

Das Optionsgeschäft kennt vier grundlegende Positionen, wie sie in der Tabelle wiedergegeben sind. Der Käufer einer Option befindet sich stets in einer der beiden long-

Positionen, d.h. er verschafft sich ein späteres Ausübungswahlrecht. Dafür ist er bereit, die Optionsprämie zu zahlen. Diese erhält der Stillhalter, der sich stets in einer der beiden short-Positionen befindet. Short bedeutet, daß er auf ein zukünftiges eigenes Ausübungswahlrecht verzichtet und sich einem fremden Wahlrecht unterwirft.

Den Optionswert bestimmen verschiedene Größen. Die Aktienvolatilität beeinflußt die Optionsprämie, da eine Aktie mit hoher Volatilität die Wahrscheinlichkeit steigen läßt, daß die Aktie innerhalb der Optionsfrist einen hohen oder niedrigen Wert erreicht. Dieses Risiko wird dem Stillhalter über eine adäquate Prämie abgegolten. Aus ähnlichen Gründen wird die Optionsprämie bei einer größeren Restlaufzeit höher ausfallen als bei einer kleineren.

Das Zinsniveau weist zwei Einwirkungsmechanismen auf. Zinsänderungen führen einerseits häufig zu einer Änderung des Aktienkursniveaus. Andererseits wirken Zinsänderungen auf die Zahlungen im Zusammenhang mit dem Hedge-Portfolio, welches zur Wertbestimmung der Option herangezogen werden kann. Wie noch genauer gezeigt wird, sind daher die Optionsprämien in Hochzinsphasen höher als in Niedrigzinsphasen.

Dividendenzahlungen während der Optionslaufzeit haben einen erheblichen Einfluß auf die Aktienkurse und daher auch auf den Optionspreis. Im weiteren wird auf den Dividendeneinfluß nicht weiter eingegangen.

Bei Marktunvollkommenheiten spielt die Fungibilität bzw. das Umsatzvolumen von Aktien eine Rolle. Werden jeweils nur wenige Aktien gehandelt, so birgt dies das Risiko einer erhöhten Kursbeeinflussung, denn ein hoher Umsatz senkt die auf die einzelne Transaktion bezogene Kursänderung.

Der innere Wert quantifiziert den Nutzen einer (sofortigen) Optionsausübung, wobei sich eine Ausübung der Option selbstverständlich nur bei einem inneren Wert von größer Null lohnt. Der Zeitwert der Option quantifiziert die Chance, daß sich der Aktienkurs des Basiswertes in die für den Käufer der Option günstige Richtung verändern kann, so daß eine Ausübung der Option vorteilhaft wird.

Wie man der Tabelle entnimmt, wird das Risiko der Aktienkursänderung in der Position "at-the-money" am höchsten über den Zeitwert honoriert, während bei "deep-in-the-money" und bei "out-of-the-money" der Zeitwert relativ gering ist. Ebenfalls kann der Tabelle entnommen werden, daß bei hohem inneren Wert (positiver Ausübungswert) die Ausübung der Option wahrscheinlich wird; der Charakter des Optionsgeschäftes wandelt sich mehr zum (unbedingten) Termingeschäft.

Definition und Einordnung

Optionen sind bedingte Finanztermingeschäfte, bei denen das Recht gekauft (long) bzw. verkauft (short) wird, einen bestimmten Finanztitel (Basiswert) zu einem heute festgelegten Preis (Basispreis) zu einem späteren Zeitpunkt zu kaufen (Kaufoption oder Call) oder zu verkaufen (Verkaufsoption oder Put). Der Käufer des Rechts zahlt dem Verkäufer (Stillhalter) eine Optionsprämie.

Bei europäischen Optionen (c oder p) kann die Ausübung der Option nur zu einem festen Zeitpunkt erfolgen. Bei amerikanischen Optionen (C oder P) dagegen während der gesamten Laufzeit der Option.

An der Deutschen Terminbörse (DTB) werden amerikanische Optionen gehandelt.

Kontrakt-position Optionsart	**Käufer/Long Position** - zahlt Optionsprämie - aktives Ausübungsrecht	**Verkäufer/Short Position** - erhält Optionsprämie - passive Verpflichtung
Kaufoption/ Call	**Käufer einer Kaufoption/ Long Call** Recht auf Bezug von Wertpapieren	**Verkäufer einer Kaufoption/ Short Call** Stillhalter (in Wertpapieren) mit der Pflicht, diese ggf. zu liefern
Verkaufs-option/Put	**Käufer einer Verkaufsoption/ Long Put** Recht auf Abgabe von Wertpapieren	**Verkäufer einer Verkaufs-option/Short Put** Stillhalter in Geld mit der Pflicht, Wertpapiere ggf. zu kaufen

Den Optionswert bestimmende Größen - Datei: Optionen

Die wichtigsten Einflußfaktoren auf den Optionspreis:

Bezugspreis/Basispreis der Option = B
aktueller Aktienkurs = K
Volatilität des Aktienkurses = σ
Restlaufzeit der Option = t
Verfalltag der Option = T
Zinsniveau = r_f
Dividende
Marktgängigkeit (Fungibilität) der Aktie und somit der Option

Optionspreis = innerer Wert + Zeitwert

Aufgrund der Größe und Vorzeichen der Differenz von Aktienkurs und Basispreis können für Call und Put 3 Situationen beschrieben werden:

	Call/Kaufoption	Put/Verkaufsoption
Aktienkurs größer Basispreis	in-the-money	out-of-the-money
Aktienkurs gleich Basispreis	at-the-money	at-the-money
Aktienkurs kleiner Basispreis	out-of-the-money	in-the-money

Beispiel anhand einer Kaufoption:

Aktien-kurs	Basispreis	Options-preis Call	Innerer Wert	Zeitwert	Klassifikation
250	220	42	30	12	(deep) in-the-money
250	240	34	10	24	in-the-money
250	250	28	0	28	at-the-money
250	270	18	0	18	out-of-the-money

4.2. Wertgrenzen

4.2.1. Wertgrenzen von Calls

Der Sachverhalt, daß amerikanische Optionen stets mindestens den Wert von europäischen haben müssen[1] und daß der Wert nie geringer sein kann als Null, ist leicht nachvollziehbar. Wären diese Bedingungen nicht erfüllt, wären einfache Arbitragestrategien anwendbar.

Im weiteren sollen die Unter- und Obergrenzen für die Optionswerte am Verfalltag sowie während der (Rest-)Laufzeit der Option bestimmt werden. Wie schon ausgeführt, bleiben dabei Ausschüttungen und Dividendenzahlungen außer Betracht.

Zum Verfallzeitpunkt T ist jeder Call entweder wertlos, oder der Wert entspricht der positiven Differenz zwischen zugehörigem Aktienkurs und Basispreis. Ist die Differenz negativ, so ist es vorteilhafter, die Option verfallen zu lassen, da der Titel billiger direkt auf dem Aktienmarkt erworben werden kann. Am Verfalltag entspricht der Optionspreis also dem inneren Wert der Option. Wenn der Optionspreis größer als die Differenz von Aktienkurs und Basiswert wäre, könnte ein Arbitrageur die Option verkaufen und den Basiswert (zwecks Lieferung) erwerben. Wäre der Optionspreis hingegen geringer als diese Differenz, so könnte ein Arbitrageur eine Long-Call-Position eingehen, die Kaufoption ausüben und als Gegengeschäft einen Leerverkauf des Basiswertes durchführen. Durch diese Arbitragestrategien wird der Optionspreis am Verfalltag der Differenz recht nahe kommen.

Für die Zeit vor dem Verfalltag können zunächst nur obere und untere Wertgrenzen benannt werden. Leicht nachvollziehbar ist, daß der Optionspreis den Wert der Aktie nicht überschreiten kann.

Die Optionspreisuntergrenze eines amerikanischen Calls muß stets seinem inneren Wert entsprechen, darf dabei jedoch nicht negativ werden. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so könnte unmittelbar ein Arbitragegewinn erzielt werden, indem der Call gekauft und sofort ausgeübt sowie der Basiswert sofort verkauft wird.

Diese Überlegung gilt zunächst nicht für europäische Optionen, da bei diesen die Option nur in einem Zeitpunkt ausgeübt werden kann, der Basispreis bei einem europäischen Call also erst bei Optionsausübung am Verfalltag bezahlt wird. Das Geld kann bis dahin zum risikolosen Zins r angelegt werden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist es vorteilhaft, eine Long-Call-Position mit Leerverkauf des Basiswertes einzugehen. Der Betrag in Höhe des Barwertes des Basispreises wäre am Geldmarkt risikolos anzulegen. Folglich stellt man sich bei einem amerikanischem Call bei vorzeitiger Optionsausübung stets schlechter als bei einer europäischen Kaufoption. Das amerikanische Optionsfristrecht ist daher wertlos, da es nicht rational ist, die Option vorzeitig auszuüben. Das bedeutet, daß der Wert von amerikanischen Calls gleich dem Wert der europäischen Calls ist (für $r > 0$).

Beispiel: Eine amerikanische Kaufoption mit einer Restlaufzeit von 30 Tagen bis zum Verfalltag weist einen Kurs von 27,00 auf. Der Basispreis beträgt 250,00, der aktuelle Aktienkurs 280,00. Der Geldmarktzins liegt bei 5 Prozent.

---

1 Im weiteren wird gezeigt, daß diese Werte sogar identisch sind, falls während der Optionslaufzeit keine Zahlungen wie Dividenden zu berücksichtigen sind.

Die rechnerische Untergrenze der Kaufoption beträgt daher:

$$\max [0;\ 280 - 250\ (1 + 0{,}05)^{-\frac{30}{360}}] = 31{,}01$$

Da 31,01 größer ist als der ausgewiesene Optionskurswert von 27,00, muß die Kaufoption als unterbewertet angesehen werden. Ein Arbitrageur wird daher diese Kaufoption zum Preis von 27,00 erwerben.

Für das weitere Vorgehen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit (Alternative A) besteht darin, die Option sofort auszuüben. Wie die Tabelle zeigt, ergibt sich dann ein sofortiger Zahlungsüberschuß von 3,01.

Die andere und grundsätzlich bessere Alternative B besteht nun darin, die Option nicht auszuüben, aber sofort die zugehörige Aktie zum Preis von 280,00 zu verkaufen. Der dadurch erzielte Zahlungsüberschuß in Höhe von 253,00 kann dann zu 5% für 30 Tage angelegt werden. Nach 30 Tagen verfügt der Arbitrageur über:

$$253\ (1 + 0{,}05)^{\frac{30}{360}} = 254{,}03$$

Nach Ablauf der Optionslaufzeit kann der Arbitrageur die Option ausüben. Er erhält die Aktie, stellt damit den Leerverkauf glatt und zahlt den Basispreis in Höhe von 250,00. Von den 254,03 bleibt ein im Vergleich zur ersten Möglichkeit höherer risikoloser Arbitragegewinn über, nämlich 4,03. Mit diesem Beispiel ist nun auch rechnerisch gezeigt, daß das Recht der vorzeitigen Ausübbarkeit bei amerikanischen Calls keinen monetären Wert darstellt.

Setzt man den rechnerischen Mindestcallpreis von 31,01 ein, so wäre der Arbitrageur bei seiner Anlage auf den Basispreis von 250,00 gekommen, d.h. er hätte keinen Differenzgewinn mehr erzielt. Ein Kauf der Option zu einem höheren Preis als 31,01 macht aus rein investiven Gründen keinen Sinn mehr, denn dann wäre die Geldanlage zum risikolosen Geldmarktzins r = 5% günstiger.

Wertgrenzen von Calls - Datei: Optionen

Wert von Calls am Verfalltag:

$$C = c = \max\,[0;\, K - B]$$

Wertobergrenze für Calls während der Optionslaufzeit:

$$C = c \leq K$$

Erste Wertuntergrenze für amerikanische Calls während der Optionslaufzeit:

$$C \geq \max\,[0;\, K - B]$$

Wertuntergrenze für europäische Calls während der Optionslaufzeit:

$$c \geq \max\,[0;\, K - B\,(1+r)^{-t}\,]$$

Zweite Wertuntergrenze für amerikanische Calls während der Optionslaufzeit:

$$C = c \geq \max\,[0;\, K - B\,(1+r)^{-t}\,]$$

Falls der Geldmarktzins r stets positiv ist, gilt:

$$K - B\,(1+r)^{-t} \geq K - B$$

Damit sind die Wertgrenzen während der Laufzeit für amerikanische und europäische Kaufoptionen identisch **(vgl. auch das folgende Beispiel)**:

$$K \geq C = c \geq \max\,[0;\, K - B\,(1+r)^{-t}\,]$$

Arbitrage bezüglich der Untergrenze eines Calls

amerikanische Kaufoption

Restlaufzeit	=	t	=	30 Tage
Basispreis	=	B	=	250,00
Aktienkurs	=	K	=	280,00
Geldmarktzinssatz	=	r	=	5%
Optionspreis	=	C	=	27,00 **(Ist der Preis "richtig"?)**

Die rechnerische Untergrenze der Kaufoption beträgt

$$\max\left[0;\ 280 - 250\,(1 + 0{,}05)^{-\frac{30}{360}}\right] = 31{,}01$$

---> Option ist um 4,01 unterbewertet: Kauf des Calls zu 27,00!

Arbitragetransaktionen

Alternative A - sofortige Ausübung der Option	
Kauf der Kaufoption zum Preis von 27,00 in t=0	-27,00
Bezahlung des Basispreises und Erhalt der Aktie in t=0	-250,00
Verkauf einer Aktie zum Preis von 280,00 in t=0	280,00
Ergebnis in t=0	3,00
Ergebnis in T (aufgezinst)	3,01
Alternative B - spätere Ausübung der Option	
Kauf der Kaufoption zum Preis von 27,00 in t=0	-27,00
Verkauf einer Aktie in t=0 (Bestand oder Leerverkauf)	280,00
Anlage des Geldes zu 5% für 30 Tage, Zinsertrag in T	1,03
Bezahlung des Basispreises und Erhalt der Aktie in T (falls der Bezug der Aktie über die Option günstiger ist; sonst Kauf der Aktie am Kapitalmarkt)	-250,00
Ergebnis in T (falls K>B; sonst höher)	4,03
Ergebnis auf t=0 abgezinst	4,01

Berechnung der Zinszahlung erfolgte nach

$$P_T = P_0\,(1 + r)^{\frac{Tage}{360}}$$

4.2.2. Wertgrenzen für Puts

Die Ableitung der Optionspreisgrenzen bei Puts erfolgt wie bei Calls, jedoch wird sich zeigen, daß Unterschiede in der Bewertung von amerikanischen und europäischen Puts liegen. Auch hier werden Ausschüttungen und Dividendenzahlungen während der Restlaufzeit der Puts vernachlässigt.

Am Verfalltag T ist der Wert von amerikanischen und europäischen Puts aufgrund ähnlicher Überlegungen wie beim Call entweder Null oder gleich der positiven Differenz von Basispreis und Aktienkurs.

Während der Restlaufzeit kann für Puts ebenso wie für Calls zunächst kein exakter Optionspreis genannt werden, jedoch lassen sich wieder Ober- und Untergrenze angeben.

Die Obergrenze für einen amerikanischen Put ist der Basispreis. Für europäische Puts ist die Obergrenze der abgezinste Basispreis. Wenn diese Bedingungen nicht eingehalten werden, so kann ein risikoloser Gewinn erzielt werden, wenn der Put verkauft wird und der Erlös am Geldmarkt zum risikofreien Geldmarktzinssatz r angelegt wird.

Die Untergrenze eines amerikanischen Puts ist durch Null bzw. den Wert einer hypothetischen, sofortigen Ausübung bestimmt (also Basispreis abzüglich gegenwärtiger Aktienkurs). Hingegen muß bei europäischen Puts bedacht werden, daß diese nicht sofort ausgeübt werden können. Die angegebene Formel berücksichtigt dies und zeigt zugleich, daß die Untergrenze des Wertes eines amerikanischen Puts daher höher oder gleich der Untergrenze des europäischen Puts sein muß.

Wertgrenzen von Puts - Datei: Optionen

Wert von Puts am Verfalltag:

$$P = p = \max\,[0;\ B - K]$$

Ober- und Untergrenze für amerikanische Puts während der Laufzeit:

$$\max\,[0;\ B - K] \leq P \leq B$$

Ober- und Untergrenze für europäische Puts während der Laufzeit:

$$\max\,[0;\ B\,(1+r)^{-t} - K] \leq p \leq B\,(1+r)^{-t}$$

Es gilt also:

$$P \geq p$$

4.2.3. Put-Call-Parität

Nachdem auf die Arbitragemöglichkeiten von Calls und Puts bei Wertabweichungen innerhalb ihrer erwarteten Grenzen eingegangen worden ist, stellt sich die Frage, ob Wertdifferenzen zwischen Call und zugehörigem Put nicht ebenfalls arbitriert werden können. Die Differenz zwischen dem Wert eines Calls und seinem zugehörigen Put wird als Put-Call-Parität bezeichnet. Auch hier ist eine Unterscheidung zwischen amerikanischen und europäischen Optionen erforderlich. Voraussetzung für die folgenden Überlegungen ist, daß Call und Put auf denselben Basiswert lauten, den gleichen Basispreis aufweisen und eine identische Restlaufzeit haben. Diese Bedingungen sind unabhängig von der Ausführungsform der Option (amerikanisch oder europäisch).

Bei europäischen Optionen muß die angegebene Relation erfüllt sein. Falls dies nicht der Fall ist, können risikolose Arbitragegewinne erzielt werden, wie es das Beispiel zeigt.

Bei der hier vorliegenden Datenkonstellation würde ein Arbitrageur folglich Calls verkaufen und zugleich Puts kaufen, bis sich die o.a. Relation zwischen den Preisen einstellt. Um kein Risiko einzugehen, würde er parallel dazu dieselbe Menge an Aktien kaufen. Nun müßte er nur noch einen Kredit in Höhe des abgezinsten Basispreises aufnehmen:

$$250\,(1+0{,}05)^{-\frac{30}{360}} = 248{,}99$$

Dieser Kredit finanziert den für die Arbitragetransaktionen benötigten Geldbedarf. Am Ende kann der Arbitrageur über einen risikolosen Arbitragegewinn in Höhe von 1,99 verfügen.

Nach Ablauf der Optionslaufzeit ergibt sich (mit Sicherheit) in der Summe kein weiterer Zahlungsüberschuß bzw. -fehlbetrag. Die Aktien werden auf jeden Fall gegen Erhalt des Basispreises von 250,00 geliefert. Falls der Aktienkurs höher als 250,00 ist, wird der Käufer der vom Arbitrageur verkauften Kaufoption seine Option ausüben. Die Verkaufsoption wird sinnvollerweise dann nicht ausgeübt. Falls der Aktienkurs hingegen niedriger als 250,00 ist, nutzt der Arbitrageur seine Verkaufsoption zu 250,00. Die Kaufoption dagegen wird in diesem Fall unausgeübt verfallen. Die so erhaltenen 250,00 werden in voller Höhe zur Rückzahlung des Kredites incl. der Zinsen genutzt.

Für amerikanische Optionen stellt sich dieser Sachverhalt komplizierter dar. Letztlich lassen sich für die Put-Call-"Parität" nur Wertintervalle angeben:

$$B - K \geq P - C \geq B\,(1+r)^{-t} - K$$

Die Put-Call-Parität - Datei: Optionen

$$p - c = B\,(1+r)^{-t} - K$$

Aktienkurs	=	K	=	280,00
Basispreis	=	B	=	250,00
Restlaufzeit	=	t	=	30 Tage
Zinssatz	=	r	=	5%
Marktpreis des Calls	=	c	=	35,00
Marktpreis des Puts	=	p	=	2,00 **(sind die Preise "richtig"?)**

Theoretischer Wert des Puts:

$$35 - 280 + 250 \quad (1 + 0{,}05)^{-\frac{30}{360}} = 3{,}99$$

Der Put ist folglich unterbewertet, der Call dagegen ist überbewertet. Das führt zur folgenden Arbitragetransaktion:

Kauf eines Puts in t=0	- 2,00
Verkauf eines Calls in t=0	+ 35,00
Kauf einer Aktie in t=0	- 280,00
Kreditaufnahme in t=0	+ 248,99
Risikoloser Arbitragegewinn in t=0	+ 1,99
Lieferung der Aktie über den Call oder Put zum Basiskurs in T	+ 250,00
Rückzahlung des Kredites einschl. Zinsen in T	- 250,00

Berechnung des Kapitalrückzahlungsbetrags:

$$250 = 248{,}99\ (1 + 0{,}05)^{\frac{30}{360}}$$

4.3. Ausgewählte Modelle zur Optionspreisbewertung

Die Preisober- wie -untergrenzen bei der Optionsbewertung ergeben nur einen groben Rahmen für den wahren Wert von Optionen, der sich zwischen diesen Grenzen befinden muß. Daher wird im weiteren der Frage nachgegangen, wie der fair value von Optionen während der Laufzeit bestimmt werden kann. In diesem Zusammenhang werden mit dem Binomialmodell und dem Black & Scholes Modell die wichtigsten Gleichgewichtsmodelle vorgestellt.

4.3.1. Binomialmodell

Voraussetzungen:

1. Alle Marktteilnehmer gehen von einem positiven Grenznutzen des Geldes aus, d.h. sie ziehen mehr Geld weniger Geld vor.
2. Die Märkte für Optionen, für Basiswerte (Aktien) sowie für festverzinsliche Wertpapiere sind vollkommen.
3. Zum risikolosen und über die Laufzeit der Option konstanten Zinssatz r können Mittel in beliebiger Höhe angelegt oder aufgenommmem werden.
4. Transaktionskosten, Einschußleistungen, Steuern, Dividenden, Bezugsrechtzahlungen u.ä. fallen während der Optionslaufzeit nicht an.
5. Leerverkäufe, d.h. Verkäufe ohne Besitz der entsprechenden Finanztitel, sind unbeschränkt möglich.
6. Der zukünftige Aktienkursverlauf entspricht einem multiplikativen Binomialprozeß mit dem Wahrscheinlichkeitsparameter p und den Kurswertänderungsparametern u (up) und d (down). Wird der Aktienkurs mit den Kurswertänderungsparametern multipliziert, so erhält man den angenommenen (neuen) gestiegenen bzw. gesunkenen Aktienkurs. Der Binomialprozeß erfordert einen diskreten Aktienhandel.

Bei der Bewertung von Calls braucht zwischen amerikanischen und europäischen Calls nicht unterschieden zu werden. Zwar beinhaltet ein amerikanischer Call gegenüber einem europäischen Call ein zusätzliches Recht (die vorzeitige Ausübbarkeit), jedoch weist dieses Recht - wie oben gezeigt - keinen ökonomischen Wert auf.

4.3.1.1. Bewertung von Calls

4.3.1.1.1. Ein-Perioden-Binomialmodell

Der Einperiodenfall des Binomialmodells umfaßt zwei Zeitpunkte. Der Endzeitpunkt der Periode liegt am Verfalltag und wird mit dem Index 1 gekennzeichnet. Der Startzeitpunkt der Periode mit dem Index 0 legt den Zeitpunkt fest, an dem die Kaufoption bewertet wird. Die Grafik verdeutlicht, daß am Verfalltag der Aktienkurs K_1 zwei Ausprägungen haben kann. Insofern kann auch der Wert der Kaufoption für den Zeitpunkt t=1 zwei Ausprägungen haben. Zu überlegen ist nun, welchen Wert die Kaufoption in t=0 hat.

Die erste Möglichkeit besteht darin, den Wert der Option nach dem μ-Prinzip zu bestimmen, was allerdings Risikoneutralität der Entscheider voraussetzt. Wie das Beispiel zeigt, ergibt sich so ein Wert für die Kaufoption in t=0 von 8,38.

Die zweite und im weiteren genauer dargestellte Möglichkeit basiert auf dem Verfahren "pricing by duplication". Es kann gezeigt werden, daß der Wert eines sich selbst finanzierenden Depots aus einer Aktie, n Optionen und einem entsprechenden Kreditgeschäft bei einem bestimmten Optionswert immer (also sowohl in t=0 als auch in t=1) den Wert Null aufweist. Falls dieser Optionspreis nicht zugleich Marktpreis ist, könnten Arbitragestrategien durchgeführt werden.

Zur Herleitung und Erklärung der Funktionen:

	t=0	t=1up	t=1down
Verkauf bzw. Kauf von n Calls	+ nC_0	- nC_{1u}	- nC_{1d}
Kauf bzw. Verkauf einer Aktie	- K_0	+ K_{1u}	+ K_{1d}
Kreditaufnahme bzw. -rückzahlung	+ KB_0	- KB_1	- KB_1
Portfoliowert:	**0**	**0**	**0**

n = Zahl der verkauften Calls
KB = Kreditbetrag (in t=1 einschließlich Zinskosten)

Die drei aus der Tabelle ersichtlichen Umweltzustände lassen sich als lineares homogenes Gleichungssystem dreier Variablen darstellen:

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = n\,C_0 - K_0 + KB_0 \\ (2) & 0 = -n\,C_{1d} + K_{1d} - KB_1 \\ (3) & 0 = -n\,C_{1u} + K_{1u} - KB_1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist jedoch unterbestimmt. Zwar sind die drei Aktienkurse bekannt, nicht jedoch die Callpreise. Zudem kennt man weder die Kredithöhe noch die Kreditkosten (Zinsen). Schließlich ist die Anzahl n der zu verkaufenden Calls noch unbekannt.

Zunächst ist deshalb aus den Gleichungen (2) und (3) der Wert für n zu bestimmen:

$$(4a) \qquad n = \frac{K_{1u} - K_{1d}}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{(u - d)\, K_0}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{\Delta K_1}{\Delta C_1}$$

Offensichtlich reicht es zur Bestimmung von n aus, die maximalen Kursunterschiede im Aktienkurs sowie im Callpreis jeweils am Verfalltag zu kennen. Nun läßt sich der Callpreis am Verfalltag angeben:

$$(5a) \qquad C_{1u} = \max[0;\ uK_0 - B]$$

$$(5b) \qquad C_{1d} = \max[0;\ dK_0 - B]$$

Somit ergibt sich für die Hedge Ratio n auch:

$$(4b) \quad n = \frac{(u - d)\, K_0}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{(u - d)\, K_0}{\max[0;\ uK_0 - B] - \max[0;\ dK_0 - B]}$$

Es sei bemerkt, daß für weit im Geld liegende Calls die Hedge Ratio immer eins ist. Wird angenommen, daß der Call am Verfalltag weit out-of-the-money liegt, so strebt die Hedge Ratio gegen unendlich. Dies bedeutet, daß dann ein Aktienportefeuille durch den Verkauf von Calls nicht zu hedgen ist; die Calls sind praktisch wertlos, die Basiswerte werden direkt am Aktienmarkt zu niedrigeren Preisen als der Callbasispreis erworben.

In Formel (1) ist der Auszahlungsbetrag des Kredites KB_0 unbekannt, ebenfalls die Kredittilgung KB_1 in den Formeln (2) bzw. (3). Die Tilgungshöhe läßt sich, weil die Hedge Ratio ebenso wie die Callpreise am Verfalltag bekannt sind, berechnen. Der Zusammenhang zwischen Kredittilgung und Kreditauszahlung läßt sich nun durch Aufzinsung letzterer ermitteln:

$$(6) \qquad KB_1 = (1+r)^t KB_0$$

Formel (6) kann nun in (1) eingesetzt werden, um den Callpreis zu Periodenbeginn festzulegen. Formel (1) aufgelöst nach dem Callpreis ergibt:

$$(7) \qquad C_0 = \frac{K_0 - KB_0}{n}$$

Die einfachste Möglichkeit wäre nun, in Formel (7) die Formeln (2), (3), (4) und (6) einzusetzen. Der Rechengang sei kurz vorgestellt:

$$KB_1 = K_{1u} - nC_{1u} = uK_0 - nC_{1u}$$

$$nC_0 = K_0 - KB_0 = K_0 - (1+r)^{-t} KB_1 = \frac{(1+r)^t K_0 - KB_1}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{(1+r)^t K_0 - (uK_0 - nC_{1u})}{(1+r)^t} = \frac{((1+r)^t - u)\, K_0 + nC_{1u}}{(1+r)^t}$$

Nunmehr wird (4a) verwendet:

$$C_0 = \frac{\frac{(1+r)^t - u}{n} K_0 + C_{1u}}{(1+r)^t} = \frac{\frac{(1+r)^t - u}{\frac{(u-d)K_0}{C_{1u} - C_{1d}}} K_0 + C_{1u}}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{\frac{(1+r)^t - u}{u-d}(C_{1u} - C_{1d}) + C_{1u}}{(1+r)^t} = \frac{\frac{(1+r)^t - u}{u-d} C_{1u} - \frac{(1+r)^t - u}{u-d} C_{1d} + \frac{uC_{1u} - dC_{1u}}{u-d}}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{\frac{(1+r)^t - d}{u-d} C_{1u} - \frac{(1+r)^t - u}{u-d} C_{1d}}{(1+r)^t}$$

Dieses Endergebnis läßt sich noch verfeinern, indem man Pseudowahrscheinlichkeiten p' einführt und die Callpreisgrenzen aus (5) einbezieht:

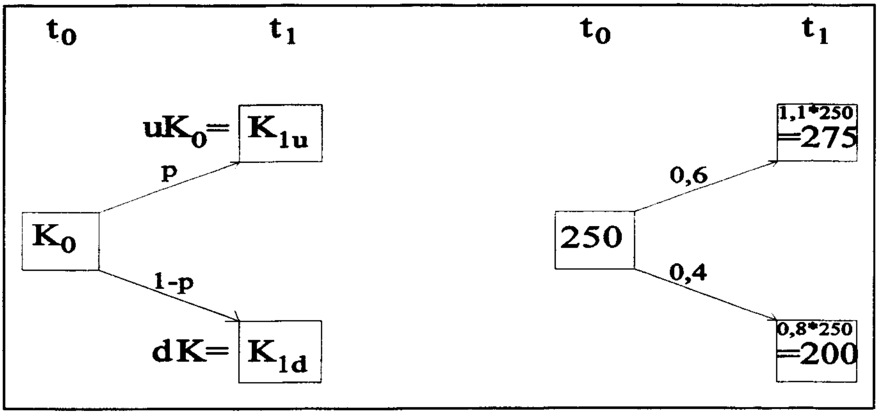
$$(8) \quad C_0 = \frac{p' \max[0; uK_0 - B] + (1 - p') \max[0; dK_0 - B]}{(1+r)^t}$$

$$mit \quad p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$

Der Wert p' ist als Pseudowahrscheinlichkeit zu deuten, weil implizite Vorgaben über das Eintreten der Up- bzw. Down-Zustände nicht benötigt werden. Selbst wenn Eintrittswahrscheinlichkeiten bezüglich des Aktienkurses bekannt wären, gingen sie nicht in das Modell ein. Man sagt auch, das Bewertungsmodell ist präferenzfrei.

Das Ergebnis der Berechnung des Optionspreises über diese 2. Möglichkeit ist wie gezeigt 12,7595. Interessant ist, daß sich die Werte für die Optionen in Abhängigkeit der beiden dargestellten Möglichkeiten unterscheiden.

Ein-Perioden-Binomialmodell für Calls (1)



Kurswert der Aktie in t=0	=	K_0	=	250,00
Geldmarktzinssatz	=	r	=	10%
Laufzeit der Option	=	t	=	9 Monate
Basispreis der Option	=	B	=	260,00
Wertänderungsfaktor up	=	u	=	1,1
Wertänderungsfaktor down	=	d	=	0,8
(Wahrscheinlichkeit für up	=	P_{up}	=	0,6)
(Wahrscheinlichkeit für down	=	P_{down}	=	0,4)

1. Möglichkeit: Unterstellung von Risikoneutralität

$$C_0 = \frac{E\,(C_1)}{(1+r)^t} = \frac{P_{up} \max\,[0;\, u\,K_0 - B\,] + P_{down} \max[0;\, d\,K_0 - B\,]}{(1+r)^t}$$

$$C_0 = \frac{0{,}6 \max[0;\, 1{,}1 \cdot 250 - 260] + 0{,}4 \max[0;\, 0{,}8 \cdot 250 - 260]}{(1+0{,}1)^{0{,}75}}$$

$$C_0 = \frac{0{,}6 \cdot 15 + 0{,}4 \cdot 0}{(1+0{,}1)^{0{,}75}} = 8{,}38$$

Ein-Perioden-Binomialmodell für Calls (2)

2. Möglichkeit: Duplikation der Option

Darstellung der drei Umweltzustände als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllll} (1) & 0 = & n\,C_0 & - K_0 & + KB_0 \\ (2) & 0 = & -n\,C_{1d} & + K_{1d} & - KB_1 \\ (3) & 0 = & -n\,C_{1u} & + K_{1u} & - KB_1 \end{array}$$

Für die Hedge Ratio n ergibt sich:

$$(4a) \qquad n = \frac{K_{1u} - K_{1d}}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{(u - d)\,K_0}{C_{1u} - C_{1d}}$$

oder:

$$(4b) \qquad n = \frac{(u - d)\,K_0}{\max[0;\, uK_0 - B] - \max[0;\, dK_0 - B]}$$

Nach weiteren Umformungen ergibt sich:

$$C_0 = \frac{\frac{(1+r)^t - d}{u - d} C_{1u} - \frac{(1+r)^t - u}{u - d} C_{1d}}{(1+r)^t}$$

oder über die Pseudowahrscheinlichkeit p':

$$(8) \qquad C_0 = \frac{p' \max[0;\, uK_0 - B] + (1 - p')\max[0;\, dK_0 - B]}{(1+r)^t}$$

$$mit \quad p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$

Vergleiche die letztgenannte Formel mit der Formel bei Unterstellung von Risikoneutralität!

Ein-Perioden-Binomialmodell für Calls (3) - Datei: Optionen

Kurswert der Aktie in t=0	=	K_0	=	250,00
Geldmarktzinssatz	=	r	=	10%
Laufzeit der Option	=	t	=	9 Monate
Basispreis der Option	=	B	=	260,00
Wertänderungsfaktor up	=	u	=	1,1
Wertänderungsfaktor down	=	d	=	0,8
Pseudowahrscheinlichkeit	=	p'		

$$p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$

$$p' = \frac{(1 + 0{,}1)^{0{,}75} - 0{,}8}{1{,}1 - 0{,}8} = 0{,}913664 \approx 0{,}914$$

$$C_0 = \frac{p' \max[0;\, uK_0 - B] + (1 - p') \max[0;\, dK_0 - B]}{(1+r)^t}$$

$$C_0 = \frac{0{,}914 \max[0;\, 1{,}1 \cdot 250 - 260] + (1 - 0{,}914) \max[0;\, 0{,}8 \cdot 250 - 260]}{(1+0{,}1)^{0{,}75}}$$

$$C_0 = \frac{0{,}914 \cdot 15 + (1 - 0{,}914)\, 0}{(1+0{,}1)^{0{,}75}} = 12{,}7595$$

Wie kann die Differenz zum oben berechneten Wert in Höhe von 8,38 erklärt werden?

Ein-Perioden-Binomialmodell für Calls (4)

Pricing by duplication

Beweis, daß der soeben berechnete Wert die Arbitragebedingung erfüllt

$$(4b) \qquad n = \frac{(u - d)\ K_0}{\max[0;\ uK_0 - B] - \max[0;\ dK_0 - B]}$$

$$n = \frac{(1{,}1 - 0{,}8)\ 250}{\max\ [0;\ 1{,}1 \cdot 250 - 260] - \max\ [0;\ 0{,}8 \cdot 250 - 260]} = 5$$

	t=0	t=1 für up	t=1 für down
Verkauf von 5 Calls in t=0	+63,80		
Kauf einer Aktie in t=0	-250,00		
Kreditaufnahme in t=0	+186,20		
Summe in t=0	0,00		
Kreditrückzahlung in T $186{,}2(1+0{,}10)^{0{,}75} = 200$		-200,00	-200,00
Verkauf der Aktie in T		+275,00	+200,00
Rückkauf der 5 Calls in T		-75,00	0,00
Summe in T		0,00	0,00

4.3.1.1.2. Mehr-Perioden-Binomialmodell

Ein wesentlicher Nachteil des Ein-Perioden-Binomialmodells ist, daß die Aktienkursrenditen u-1 und d-1 mit zunehmender Periodenlänge unzuverlässiger geschätzt werden können, deren Wahl also relativ willkürlich ist. Dieser Nachteil wird eliminiert, wenn die Perioden hinreichend klein gewählt werden, denn es gibt keine Modellschranken, die die mehrfache Anwendung des Ein-Perioden-Binomialmodells einschränken. Die Grafik veranschaulicht das Vorgehen.

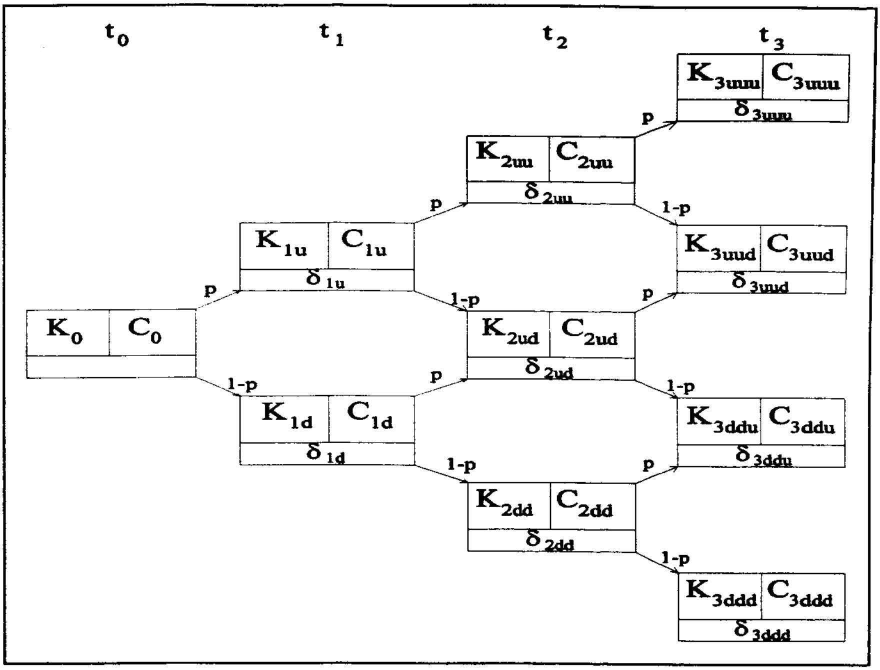
In einem ersten Schritt wird das Mehr-Perioden-Modell so zerlegt, daß sich genügend Ein-Perioden-Modelle ergeben. Für jeden Zeitpunkt werden die modellrelevanten Daten (K_{td}, K_{tu} bzw. u_t, d_t und K_0 sowie C_{td}, C_{tu}) notiert. Zusätzlich werden ein für die beiden Wertepaare aus K_{td}, K_{tu} und C_{td}, C_{tu} charakteristisches Optionsdelta δ bzw. dessen Kehrwert (die Hedge Ratio n) zweckmäßigerweise im verzweigenden Kasten der Vorperiode festgehalten.

Üblicherweise werden für jede Stufe die gleichen konstanten Basiswertrenditen vorausgesetzt, so daß u und d nicht jeweils neu notiert werden müssen. Werden u und d als Grenzen einer symmetrischen Volatilitätsbreite gedeutet, so werden manche Zustände auf verschiedenen Pfaden erreicht. Diese üblichen Einschränkungen werden zumeist getroffen und sind in der Grafik bereits dargestellt. Unter diesen weitergehenden Voraussetzungen kann die in der Darstellung verwendete allgemeine Formel für die Anzahl der Pfade genutzt werden. Unter den genannten Voraussetzungen und einem über alle Perioden konstanten Geldmarktzinssatz r bleiben auch die Pseudowahrscheinlichkeiten p′ bzw. 1-p′ im gesamten Modell konstant. Auch dieses ist der Grafik zu entnehmen.

Ausgehend vom heutigen Aktienkurs werden zunächst alle zukünftig möglichen Aktienkurse berechnet. Von hinten wird dann das jeweilige Optionsdelta ermittelt und darüber dann die verschiedenen Callpreise. Durch sukzessive Fortsetzung des Verfahrens erhält man schließlich den Callpreis zu Beginn der ersten Periode.

Aus der mehrfach angewendeten Formel des Ein-Perioden-Modells kann dann über mehrere Schritte die angegebene Formel für den n-Periodenfall ermittelt werden.

Mehr-Perioden-Binomialmodell für Calls



$$C_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1 - p')^{n-j} \max[0;\ u^j d^{n-j} K_0 - B]}{(1+r)^t}$$

mit:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\, j!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

z.B.: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

4.3.1.2. Bewertung von Puts

Puts kommen ebenso wie Calls in zwei Ausführungsformen vor, als europäische und als amerikanische. Die europäische Ausstattungsform beinhaltet das Optionsrecht ausschließlich genau am Verfalltag, die amerikanische kann vorzeitig ausgeübt werden. Wie bereits dargelegt worden ist, unterscheiden sich die beiden Ausstattungsformen eines Puts nicht nur rechtlich, sondern auch ökonomisch. Dies zeigt u.a. folgende Überlegung: Ein Put wird nur dann ausgeübt, wenn der Basispreis über dem Aktienkurs liegt. Sinkt nun der Aktienkurs auf Null, so wird der Put seinen maximalen Wert annehmen. Der Zeitwert des Puts wird daher Null, eben weil der Put nicht mehr höher bewertet werden kann und der Aktienkurs womöglich wieder steigen wird. Wird bei dieser Konstellation mit der Putausübung gewartet, so tritt zum einen ein Zinsverlust ein, denn die Gewinnmitnahme hätte am Geldmarkt angelegt werden können. Zum anderen wäre es ohnehin unsinnig, mit der Ausübung zu warten, da der Aktienkurs wieder steigen könnte und damit der Put an Wert verlieren würde. Aus diesem Grund wird ein amerikanischer Put niemals weniger wert sein als seine europäische Variante.

Ähnlich der Callbewertung wird bei der Bewertung des europäischen Puts vorgegangen. Die wichtigsten Bestimmungsgleichungen sind daher ohne Angabe der Ableitungen abgedruckt. Zu beachten ist, daß diese Ausführungen zunächst nur für europäische Puts gelten. Es gilt wiederum die gleiche Duplizierungsstrategie auf der Grundlage der folgenden Geschäfte:

	t=0	t=1d	t=1u
Kauf bzw. Verkauf von n Puts	$-np_0$	$+np_{1d}$	$+np_{1u}$
Kauf bzw. Verkauf einer Aktie	$-K_0$	$+K_{1d}$	$+K_{1u}$
Kreditaufnahme bzw. Kreditrückzahlung	$+KB_0$	$-KB_1$	$-KB_1$
Portfoliowert:	0	0	0

Zur Berechnung des Wertes von amerikanischen Puts ist die Vorgehensweise zweigeteilt. Im ersten Schritt wird unterstellt, daß der amerikanische Put sich europäisch verhält, also eine Optionsausübung zu Periodenbeginn nicht erfolgt. Daher wird sein Wert wie beim europäischen Put berechnet. In einem zweiten Schritt wird nunmehr überprüft, ob sein innerer Wert nicht den Marktpreis überschreitet, d.h. ob der Put nicht auszuüben wäre. Dazu wird der ermittelte (europäische) Putwert mit der Differenz aus dem Basispreis und dem Aktienkurs zu Periodenbeginn verglichen. Das Maximum beider Werte ist der gesuchte Wert der amerikanischen Option, so daß sich ihre vorzeitige Ausübung hier lohnen kann:

$$P = \max\,[p\,;\,B - K]$$

Der Mehrperiodenfall bei Puts wird analog dem Mehrperiodenfall bei Calls behandelt, so daß sich daraus keine systematischen Änderungen ergeben. Wie gezeigt worden ist, müssen amerikanische Puts bisweilen anders bewertet werden. Auch dies ist schon für den Einperiodenfall aufgezeigt worden. Das Ergebnis muß nur übernommen werden.

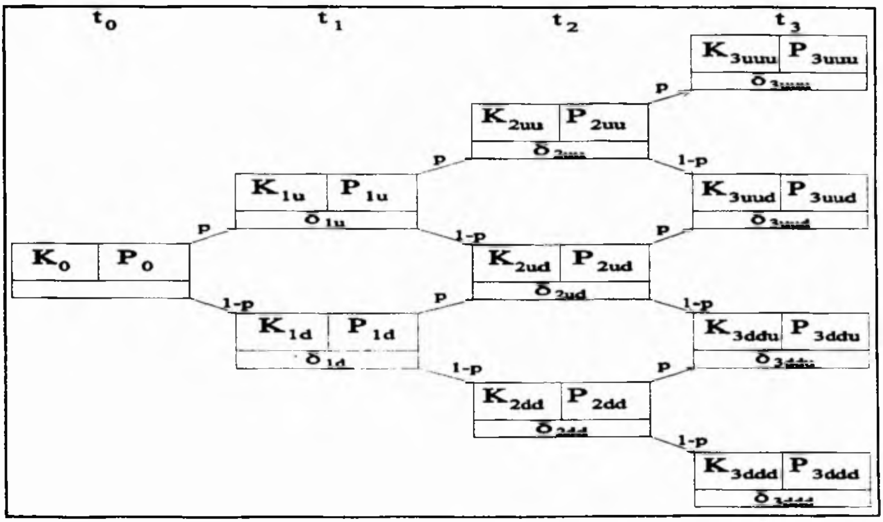
Bewertung von Puts (1)

$$p_{1u} = \max[0;\ B - uK_0]$$
$$p_{1d} = \max[0;\ B - dK_0]$$

$$n = -\frac{(u-d)\ K_0}{\max[0;\ B - uK_0]\ -\ \max[0;\ B - dK_0]}$$

$$p_0 = \frac{p'\ \max[0;\ B - uK_0] + (1 - p')\ \max[0;\ B - dK_0]}{(1+r)^t}$$

$$mit\ \ p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$



Bewertung von Puts (2) - Datei: Optionen

Kurswert der Aktie in t=0	=	K	=	250,00
Geldmarktzinssatz	=	r_k	=	10%
Laufzeit der Option	=	t	=	9 Monate
Basispreis der Option	=	B	=	260,00
Wertänderungsfaktor up	=	u	=	1,1
Wertänderungsfaktor down	=	d	=	0,8

$$p_{1u} = \max\,[0;\ 260 - 1{,}1 \cdot 250] = 0$$
$$p_{1d} = \max\,[0;\ 260 - 0{,}8 \cdot 250] = 60$$

$$n = -\frac{(1{,}1 - 0{,}8)\ 250}{\max[0;\ 260 - 1{,}1 \cdot 250] - \max\,[0;\ 260 - 0{,}8 \cdot 250]} = 1{,}25$$

$$p' = \frac{(1+0{,}1)^{0{,}75} - 0{,}8}{1{,}1 - 0{,}8} = 0{,}914$$

$$p_0 = \frac{0{,}914 \max[0;\ 260 - 1{,}1 \cdot 250] + (1 - 0{,}914) \max[0;\ 260 - 0{,}8 \cdot 250]}{(1+0{,}1)^{0{,}75}} = 4{,}823$$

Probe: Berechnung des Wertes des europäischen Puts über die Put-Call-Parität (der Wert für den Call wurde schon vorher mit 12,7595 berechnet):

$$p - c = B\,(1+r)^{-t} - K_0$$

$$p = B\,(1+r)^{-t} - K_0 + c$$

$$p = 260\ (1+0{,}1)^{-0{,}75} - 250 + 12{,}7595 = 4{,}823$$

4.3.2. Bewertung nach Black & Scholes

Das Binomialmodell geht von diskreten Zeitpunkten aus, zu denen die Werte der Optionen jeweils bestimmt werden. Zwar ist jede Transaktion letztendlich ebenfalls diskret, demgegenüber laufen börsliche Transaktionsprozesse so schnell ab, daß sie kontinuierlich erscheinen und daher auch so bewertet werden können. Ein solches kontinuierliches Modell ist das von Black & Scholes entwickelte. Da es aus mathematischer Sicht ein Spezialfall des Binomialmodells ist, gleichen sich auch deren Prämissen. Die Black & Scholes Formel bestimmt den Preis von europäischen Optionen, wobei auch hier die Ausführungen zur Identität von europäischen und amerikanischen Calls gelten. Da in Europa Optionen amerikanischen Typs üblich sind, müßte also für amerikanische Puts eine andere Bewertungsgleichung herangezogen werden.

Ausgangspunkt des Black & Scholes Modells ist, daß der Aktienkurs einen Random Walk mit konstanter Varianz aufweist. Der Random Walk entspricht der aus der Thermodynamik oder Physik bekannten geometrischen Brown'schen Molekularbewegung. In dem Black & Scholes Modell als Spezialfall des Binomialmodells werden also die Basiswertrenditen u und d durch den einheitlichen Volatilitätsparameter der Varianz σ^2 ersetzt. Dies ist folglich gegenüber dem Binomialmodell eine Beschränkung, denn im Binomialmodell sind getrennte positive wie negative Schwankungsbreiten u und d erlaubt, welche die Realität möglichweise besser wiedergeben können.

Die Unterstellung des Random Walks führt über den zentralen Grenzwertsatz der Statistik zu einer Lognormalverteilung der möglichen Aktienkurse in der Zukunft. Die zukünftigen kontinuierlichen Aktienrenditen sind normalverteilt mit dem Mittelwertparameter μ und der Standardabweichung σ.

Wie schon erwähnt, geht das Black & Scholes Modell von einem kontinuierlichen Aktienhandel aus und nicht von einem diskreten. Bei einem diskreten Modell wird die Verzinsung pro Periode erfolgen, bei einem kontinuierlichen Modell in infinitesimal kleinen Schritten, eben stetig. Daher wird für die Barwertberechnung der diskrete Abzinsungsfaktor $(1+r)^{-t}$ durch den kontinuierlichen $e^{-r_k t}$ ersetzt.

Auch die Optionspreisbewertung durch das Modell von Black & Scholes basiert auf der Duplizierung durch ein risikoloses Arbitrageportfolio. Dabei erfordert der kontinuierliche Prozeß ein ständiges Anpassen des Portefeuilles. Aus diesem Grund sind die Bewertungsgleichungen komplizierter herzuleiten, weil dazu die Kenntnis der statistischen Differentialrechnung erforderlich ist. Daher werden auf der nächsten Seite die Grundgedanken aufgezeigt, die für den mathematisch/statistisch interessierten Leser relevant sein dürften.

Die Ableitung des Callwertes nach Black & Scholes erfolgt wie folgt:

Ein arbitragefähiges Portfolio aus verkauften Calls und einer gekauften Aktie besitzt, wie gesehen, einen festen Marktpreis. Die Anzahl der zu verkaufenden Calls pro gekaufter Aktie soll durch den Portfoliowert V dargestellt werden:

$$V = K + n\,C = K + \frac{1}{\delta}\,C$$

Aus der Differentialrechnung ergibt sich aus dem totalen Differential die Wertänderung des Arbitrageportfolios:

$$dV = dK + \frac{1}{\delta}\,dC$$

Die Brown'sche Bewegung bestimmt die relative Aktienkursänderung:

$$\frac{dK}{K} = \mu\ dt + \sigma\ dz$$

wobei μ: *erwartete Aktienrendite*
dt: *infinitesimal kleine Zeiteinheit*
σ: *Volatilität der Aktienrendite*
dz: *Wiener Prozeß*

Aus dem Binomialmodell ist bekannt, daß der Aktienkurs den Optionspreis mitbedingt. Ein gegenseitiges Einsetzen ergibt:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial K} dK + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 C}{2\ \partial K^2} \sigma^2 K^2\ dt$$

Die Duplizierung des Portefeuilles läßt nun dC in die Überlegung Eingang finden:

$$dV = dK + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial C}{\partial K} dK + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 C}{2\ \partial K^2} \sigma^2 K^2\ dt \right)$$

Ein risikoloses Portfolio muß sich mit dem Geldmarktzinssatz r_k verzinsen:

$$\frac{dV}{V} = (1 + r_k) dt$$

Mit dem Optionsdelta

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial K}$$

erhält man nach einigen Zwischenschritten:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = (1 + r_k)\ C - (1 + r_k)\ K \frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial^2 C}{2\ \partial K^2}\ \sigma^2\ K^2$$

Diese erinnert an die Wärmeaustauschgleichung der Thermodynamik und kann entsprechend gelöst werden. Black & Scholes leiteten daraus die inzwischen weltweit bekannte und in der finanzwirtschaftlichen Praxis gebräuchliche Formel ab:

$$C = K\ N\ (d_1)\ -\ B\ e^{-r_k t}\ N\ (d_2)$$

$$mit\ \ d_1 = \frac{\ln \frac{K}{B} + (r_k + \frac{\sigma^2}{2})\, t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

Der Parameter $N(d_i)$ gibt den Flächeninhalt der Standardnormalverteilungsfunktion von $-\infty$ bis d_i an.

Der Verlauf der Funktion ist in einer Grafik wiedergegeben. Die Werte für die Standardnormalverteilung können den Standardnormalverteilungs-Tabellen entnommen werden (im Exkurs zur Statistik abgedruckt). Wie man sieht, wird das Black & Scholes Modell Calls am Geld (Basispreis = Aktienkurs) mit den höchsten Zeitprämien bewerten. Am Verfalltag wird korrekterweise die Option mit der Differenz aus Aktienkurs und Basispreis bewertet. Während der Restlaufzeit werden die Komponenten der Differenz mit $N(d_i)$ gewichtet. $N(d_1)$ kann dabei als Anzahl der zu kaufenden Aktien pro Call interpretiert werden, $N(d_2)$ als die Wahrscheinlichkeit für einen am Ende der Laufzeit nicht verschwindenden inneren Wert und somit Wert der Optionsausübung. Das Beispiel des Calls, welches bereits beim Binomialmodell verwendet wurde, liegt bei dieser Rechnung erneut zugrunde.

Es hat sich im Rahmen von umfangreichen Untersuchungen gezeigt, daß das Black & Scholes Modell out-of-the-money Calls über- und in-the-money Calls unterbewertet. Bei Optionen nahe am Geld liefert das Black & Scholes Modell gute Ergebnisse, wie in umfangreichen Untersuchungen verifiziert wurde.

Das Modell von Black & Scholes (1) - Datei: Optionen

Das Modell von Black & Scholes ist ein Spezialfall des Binomialmodells

* unendliche Anzahl von Teilperioden, damit ist es quasi ein "kontinuierliches Binomialmodell"
* daher Verwendung des kontinuierlichen Zinssatzes r_k notwendig
* u und d werden als einheitlich angesehen und durch σ ersetzt
* die Grundform ist zur Bewertung von amerikanischen Puts ungeeignet

Die Aktienkurse verlaufen nach folgendem Muster:

$$\frac{dK}{K} = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

wobei μ: *erwartete Aktienrendite*
dt: *infinitesimal kleine Zeiteinheit*
σ: *Volatilität der Aktienrendite*
dz: *Wiener Prozeß*

Nach einer recht umfangreichen Herleitung ergibt sich die Black & Scholes Formel für Calls wie folgt:

$$C = K\, N(d_1) - B\, e^{-r_k t}\, N(d_2)$$

$$\textit{mit} \quad d_1 = \frac{\ln\frac{K}{B} + \left(r_k + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

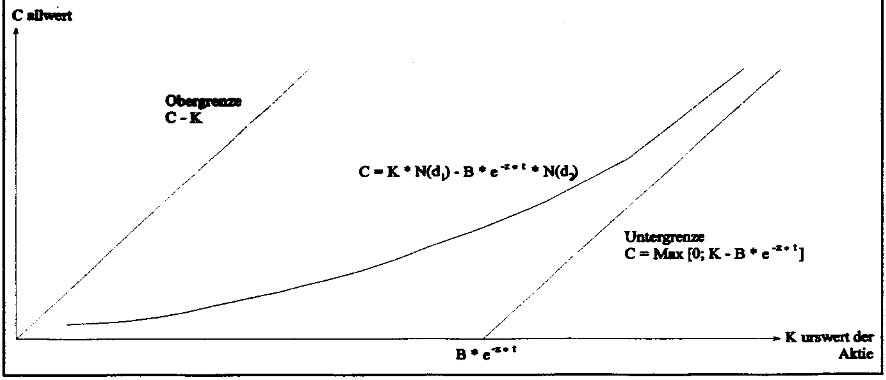
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$e = 2{,}71828...$$

Der Parameter $N(d_i)$ gibt den Flächeninhalt der Standardnormalverteilungsfunktion von $-\infty$ bis d_i an.

Das Modell von Black & Scholes (2) - Datei: Optionen

Darstellung der Black&Scholes-Bewertungsfunktion für Calls



Die Black & Scholes Formel für europäische Puts lautet:

$$p = B\, e^{-r_k\, t}\, N(d_2) - K\, N(d_1)$$

$$mit \quad d_1 = \frac{\ln\frac{B}{K} - (r_k + \frac{\sigma^2}{2})\, t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{t}$$

Als Put-Call-Parität ergibt sich wegen der stetigen Verzinsung die leicht geänderte Formel für europäische Optionen:

$$p - c = B\, e^{-r_k\, t} - K$$

Das Modell von Black & Scholes (3) - Datei: Optionen

Kurswert der Aktie in t=0	=	K	=	250,00
Geldmarktzinssatz	=	r_k	=	10%
Laufzeit der Option	=	t	=	9 Monate
Basispreis der Option	=	B	=	260,00
Varianz der Aktienrendite	=	σ^2	=	0,12

1. Schritt: Berechnung der Werte für d_i

$$d_1 = \frac{\ln\frac{250}{260} + (0{,}1 + \frac{0{,}12}{2})0{,}75}{\sqrt{0{,}12}\,\sqrt{0{,}75}} = 0{,}269$$

$$d_2 = 0{,}269 - \sqrt{0{,}12}\,\sqrt{0{,}75} = -0{,}031$$

2. Schritt: Ermittlung der Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung für d_i (hier mittels Tabelle; ist alternativ auch über die im Exkurs dargestellte Approximationsfunktion möglich)

$$\mathbf{N(0{,}269) \approx N(0{,}27) = 0{,}6064}$$

$$\mathbf{N(-0{,}031) \approx N(-0{,}03) = 1 - N(0{,}03) = 1 - 0{,}5120 = 0{,}4880}$$

3. Schritt: Einsetzen und Lösen der Gesamtgleichung

$$C = 250 \cdot 0{,}6064 - 260 \cdot 2{,}71828^{-0{,}1 \cdot 0{,}75} \cdot 0{,}4880 = 33{,}89$$

ggf. 4. Schritt: Berechnung der Werte für europäische Puts über die Put-Call-Parität

$$p = 260 \cdot 2{,}71828^{-0{,}1 \cdot 0{,}75} - 250 + 33{,}89 = 25{,}10$$

Übungsaufgaben und Literatur

Übungsaufgaben - Datei: Optionen

A) Grenzen Sie bedingte und unbedingte Termingeschäfte voneinander ab.

B) Welches sind die Vor- und Nachteile von OTC-Geschäften gegenüber an der Börse gehandelten Termingeschäften?

C) Welche Optionsgeschäfte würden sich anbieten, wenn Sie auf einen deutlichen Aktienkursrückgang spekulieren wollen?

D) Welche Parameter beeinflussen den Optionspreis? In welche Richtung wird sich der Optionspreis bei einer Erhöhung dieser Parameter verändern?

E) Grenzen Sie die Begriffe innerer Wert und Zeitwert einer Option voneinander ab.

F) Wie sind die oberen und unteren Wertgrenzen für Optionen begründet?

G) Warum müssen amerikanische und europäische Calls den gleichen Wert aufweisen?

H) Welche in der Praxis zu beobachtenden Zusammenhänge berücksichtigen die hier vorgestellten Optionspreismodelle nicht?

I) Gegeben sind folgende Daten:

Kurswert der Aktie in t=0	=	K	=	100
Geldmarktzinssatz	=	r	=	12%
Laufzeit der Option	=	t	=	6 Monate
Basispreis der Option	=	B	=	110
Wertänderungsfaktor up	=	u	=	1,3
Wertänderungsfaktor down	=	d	=	0,8
Wahrscheinlichkeit für up	=	P_{up}	=	0,5
Wahrscheinlichkeit für down	=	P_{down}	=	0,5
Varianz der Aktienrendite	=	σ^2	=	0,2

I.1) Welches sind die oberen und unteren Wertgrenzen für Puts und Calls?
I.2) Angenommen der Marktpreis für Calls ist 12 und der für Puts ist 10. Zeigen Sie, wie Sie auf der Grundlage der Put-Call-Parität einen risikofreien Arbitragegewinn machen könnten.
I.3) Berechnen Sie den Wert von Put und Calls nach dem Ein-Perioden-Binomialmodell und nach dem Black & Scholes Modell.
I.4) Zeigen Sie, daß der berechnete Call-Preis im Ein-Perioden-Binomialmodell "richtig" ist.

Lösungshinweise

I.3)

* n für Calls im Ein-Perioden-Binomialmodell ist 2,5
* n für Puts im Ein-Perioden-Binomialmodell ist 1,667
* der Wert eines Calls im Ein-Perioden-Binomialmodell ist 9,7628
* der Wert eines Puts im Ein-Perioden-Binomialmodell ist 13,7031
* der kontinuierliche Zinssatz ist 11,33%
* die Werte für d_1 und d_2 für Calls nach Black & Scholes sind 0,036 und -0,280
* d_1 und d_2 für Puts nach Black & Scholes sind -0,036 und 0,280
* $N(d_1)$ und $N(d_2)$ für Calls nach Black & Scholes sind 0,514 und 0,390
* $N(d_1)$ und $N(d_2)$ für Puts nach Black & Scholes sind 0,486 und 0,610
* der Wert eines Calls nach Black & Scholes ist 10,94
* der Wert eines europäischen Puts nach Black & Scholes ist 14,88

Literatur

Gerhard Aischinger. Optionspreisbestimmung und Portfolio-Insurance. "Wirtschaftswissenschaftliches Studium", (1993) 22. Jg., H. 1, S. 2-8.

Michael Bös. Optionsbewertung und Kapitalmarkt. Berg.-Gladb./Köln 1991.

Wilfried Hauck. Optionspreise-Märkte, Preisfaktoren, Kennzahlen. Wiesbaden 1991.

Ralf Hohmann. Wertpapierleihe und Put-Call-Parität - ein deutsches Free Lunch? "Die Bank", (1992), H. 3, S. 160-163.

Ludwig Jurgeit. Modelle zur Bewertung von Aktienoptionen - Systematik und Überblick. "Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft", (1990) 2. Jg., S. 118-127.

Lutz Kruschwitz und Rainer Schöbel. Eine Einführung in die Optionspreistheorie (I). "Das Wirtschaftsstudium", (1984) 13. Jg., H. 2, S. 68-72.

Jürgen Maier. Optionspreistheorie. "Das Wirtschaftsstudium", Jg. 23 (1994), H. 10, S. 787-792.

Hermann Naust. Zur Optionsscheinbewertung mit Rücksicht auf die Kapitalverwässerung bei der Ausübung. "Kredit und Kapital", (1994) 27. Jg., H. 2, S. 268-290.

Patrick Navatte und Marco Wilkens. Bewertung und Eigenschaften von Rainbow-Optionen, IFBG-Studien, No. 1, April 1995.

Anatol Porak. Die Optionspreisformel von Black und Scholes. Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen. Wiesbaden 1988.

Carl-Martin Preuß. Computergestützte Optionsgeschäfte in Theorie und Anwendung. Berg.-Gladb./Köln 1993.

Klaus Serfling. Die Bewertung von Optionen I und II. "Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen", (1990) 43. Jg., S. 448-452 und S. 494-498.

Peter Steiner. Wertgrenzen bei geschützten Kaufoptionen. "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", Wiesbaden, (1988) 58. Jg., S. 373-380.

Siegfried Trautmann. Optionsbewertungsmodelle. Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens. Enzyklopädie der Betriebswirtschaftslehre. Wolfgang Gerke und Manfred Steiner (Hrsg.), 2., überarb. u. erw. Aufl., Stuttgart 1995, S. 1.475-1.488.

Johannes Welcker. Was bestimmt die Preisunterschiede zwischen Puts und Calls? "Die Bank", Köln, (1984), S. 590-592.

Johannes Welcker und Joachim Ulrich. Der Hebel als Maßstab zur Beurteilung der Kurssteigerungschancen von Kauf- und Verkaufsoptionen sowie Optionsscheinen. "Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft", (1990) 2. Jg., H. 1, S. 21-28.

5. Exkurse und Anhänge

Die im Skript behandelten Grundlagen des Wertpapiermanagements können nur verstanden werden, wenn die dafür notwendigen mathematischen und statistischen Grundkenntnisse vorhanden sind. Da sich damit wohl jeder bereits in der Schule, in der betrieblichen Ausbildung und/oder im Studium beschäftigt hat, werden diese in der Vorlesung nicht wiederholt vorgetragen. Für eine Überprüfung bzw. Wiederholung dieser für das Wertpapiermanagement wichtigen Kenntnisse, empfiehlt es sich, die Exkurse bei Bedarf selbständig durchzuarbeiten. Bei der Auswahl der in diesem Kapitel dargestellten Zusammenhänge wurde des weiteren Wert darauf gelegt, insbesondere die finanzmathematischen und statistischen Methoden zu wiederholen, die auch in der finanzwirtschaftlichen Praxis dringend benötigt werden.

Literatur

Josef Bleymüller, Günther Gehlert und Herbert Gülicher. Statistik für Wirtschaftswissenschaftler. 6. Aufl., München 1989.

Lutz Kruschwitz. Finanzmathematik. München 1989.

Karl Lohmann. Finanzmathematische Wertpapieranalyse. 2., durchgesehene und erweiterte Aufl., Göttingen 1989.

5.1. Grundlagen der Finanzstatistik

Im folgenden werden die statistischen Grundlagen für wertpapieranalytische Fragestellungen zusammenfassend dargestellt. Dem Leser, der einen vollständigen und im statistisch-theoretischen Sinne geschlossenen Überblick über diese Bereiche der Statistik gewinnen möchte, wird empfohlen, ein oder zwei Standardlehrbücher der Statistik hinzuzuziehen. Für ein erstes Verständnis der hier relevanten Statistik sind die Ausführungen aber ausreichend.

Auf den weiteren Seiten findet der Leser zugleich eine Art Formelsammlung für die Finanzstatistik. Die Formeln und Begriffe sind in der Regel auf Renditen bezogen, um sie so schneller und leichter interpretieren zu können. Darüber hinaus werden sie auf ein kleines Zahlenbeispiel auf der Grundlage empirischer Daten angewendet, damit sie nachvollzogen werden können.

Die Beispielrechnungen beziehen sich auf realisierte diskrete p.a.-Renditen eines Aktienindexes ("Index"), der Daimler-Aktie und der Siemens-Aktie. Selbstverständlich sind die Ausführungen übertragbar auf andere Variablen.

Jährliche (diskrete) Renditen* im Zeitraum von 1974 bis 1995

Jahr	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Index (gesamt) ($r_{Index,t}$) in %	4	37	-5	13	10	-10	5	3	19	39	10	73	7	-37	37	37	-17	10	-7	44	-7	6
Daimler ($r_{DAI,t}$) in %	35	42	-2	13	2	-22	14	25	42	85	-7	108	22	-54	36	16	-34	45	-28	61	-8	-3
Siemens ($r_{SIE,t}$) in %	11	55	-11	12	0	-4	8	-18	32	56	27	64	0	-52	61	37	-19	13	-5	37	-18	25

Quelle: Karlsruher Kapitalmarkt-Datenbank - Vgl. auch Hermann Göppl, Ralf Herrmann, Tobis Kirchner und Marco Neumann, Risk Book - German Stocks 1976-1995, Frankfurt 1996.

T = Größe der Grundgesamtheit bzw. der Stichprobe
t = Zeitindex (Laufvariable)
r_t = diskrete (realisierte) Rendite der Aktie in t
= $(S_{i,t} - S_{i,t-1}) / S_{i,t-1}$

* Bei den Renditen handelt es sich um kapital- und dividendenbereinigte diskrete Renditen für jeweils ein Jahr. Die Dividendenbereinigung erfolgte auf der Grundlage der Bardividende. Körperschaftsteuergutschriften sind also nicht berücksichtigt. Insofern handelt es sich hier um Nach-Steuerrenditen für Kapitalanleger mit einem persönlichen Einkommensteuersatz, der dem Körperschaftsteuersatz auf ausgeschüttete Gewinne entspricht. Der Index (Deutscher Aktien Forschungsindex - DAFOX gesamt) bezieht sich auf alle im amtlichen Handel an der Frankfurter Wertpapierbörse notierten deutschen Aktien. Die Aktien sind entsprechend ihrer Marktkapitalisierung im Index gewichtet.

5.1.1. Verteilungsparameter für einzelne Aktien

Ausgangspunkt der empirischen Kapitalmarktforschung sind meist **realisierte (historische) Renditen** eines Finanztitels oder eines Portefeuilles - bestehend aus mehreren Finanztiteln - für verschiedene vergangene Perioden. Eine Periode wird im weiteren meist die Dauer eines Jahres oder eines Tages umfassen. Die realisierten Renditen werden mit r_{it} bezeichnet, wobei hier von diskreten Renditen ausgegangen wird, die sich aus den (bereinigten) Kursen wie folgt ergeben:

$$r_{it} = \frac{S_{it} - S_{i,t-1}}{S_{i,t-1}} \quad \text{mit: } S_{it} = \text{Kurs der Aktie i im Zeitpunkt t}$$

Die Menge der Renditen einer Aktie kann durch verschiedene Verteilungsparameter beschrieben werden. Die wichtigsten Verteilungsparameter **sind der Mittelwert und die Varianz (bzw. die Standardabweichung) der realisierten Renditen**. Daneben gibt es verschiedene andere Verteilungsparameter, die in der folgenden Tabelle zusammenfassend aufgeführt sind.

Neben den oben genannten zentralen Verteilungsparametern wird in kapitalmarkttheoretischen Untersuchungen regelmäßig das "**geometrische Mittel der (diskreten) Renditen**" gM_{ri} berechnet. Dieses ergibt sich über:

$$gM_{r_i} = \sqrt[T]{\left(\prod_{t=1}^{T}(1 + r_{it})\right)} - 1$$

Anhand der Formel wird deutlich, daß diese Größe korrekterweise als "geometrisches Mittel der (diskreten) Aufzinsungsfaktoren minus eins" bezeichnet werden müßte, worauf der Einfachheit halber üblicherweise aber verzichtet wird.

Schließlich werden auch häufig der Median und der Modus der realisierten Renditen bestimmt. Der **Median** realisierter Renditen gibt die Rendite an, die in (knapp) 50% aller Fälle unterschritten und in (knapp) 50% aller Fälle überschritten wurde. Der **Modus** realisierter Renditen bezeichnet die Rendite, die am häufigten beobachtet wurde.

Die **x%-Quantile** der Renditeverteilungen geben die Renditen an, die in (knapp) x% unterschritten und in (knapp) 100% - x% überschritten wurden. Insofern ist der Median das 50%-Quantil.

Auf die Verteilungsparameter **Schiefe und Wölbung** wird im Zusammenhang mit den Darstellungen zur Normalverteilung genauer eingegangen.

Im weiteren sind die wichtigsten Formeln zusammengefaßt.

Lageparameter

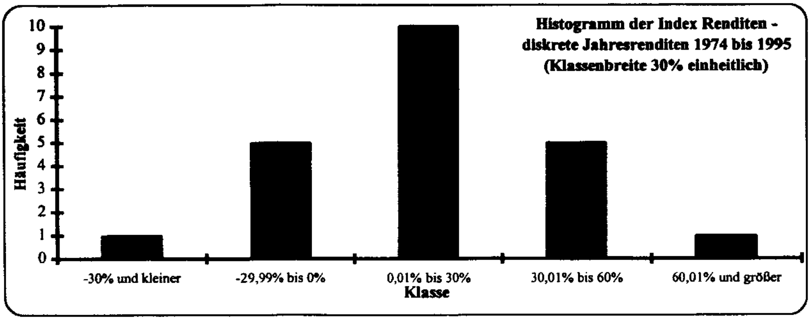
Bezeichnung des Lageparameters	Formel	Index	Daimler	Siemens
(arithmetischer) Mittelwert (Erwartungswert)	$\mu_{r_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$	12,3%	17,6%	14,1%
Minimum	die geringste Rendite	-37,0%	-54%	-52%
Maximum	die höchste Rendite	73,0%	108%	64%
geometrischer Mittelwert (allgemeine Definition)	$gM_x = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} x_t}$			
geometrischer Mittelwert (bezogen auf Renditen)	$gM_{r_i} = \sqrt[T]{\left(\prod_{t=1}^{T}(1 + r_{it})\right)} - 1$	9,8%	11,4%	10,0%
Median (Zentralwert; 50%-Quantil)	Der Median der Renditen ist die Rendite, die in der nach der Größe geordneten Renditenreihe in der Mitte steht. Falls die Anzahl der Renditen gerade ist, ist der Median der arithmetische Mittelwert zwischen den beiden in der Mitte liegenden Renditen.	8,5%	15,0%	11,5%
x%-Quantil	Das x%-Quantil der Renditen ist die Rendite, die in x% unterschritten wird und in 100% - x% überschritten wird. $25\%\,Quantil_{r_i}$ $75\%\,Quantil_{r_i}$	-3,0% 32,5%	-6,0% 40,5%	-4,8% 35,8%
Modus	Der Modus der Renditen ist die Rendite, die am häufigsten auftritt.	37,0%	42%	0,0%

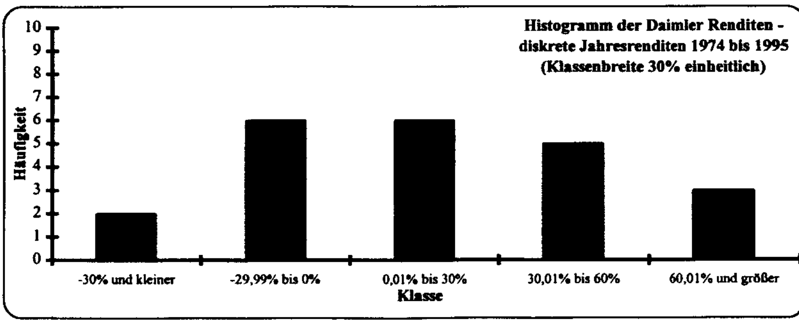
Streuungsparameter

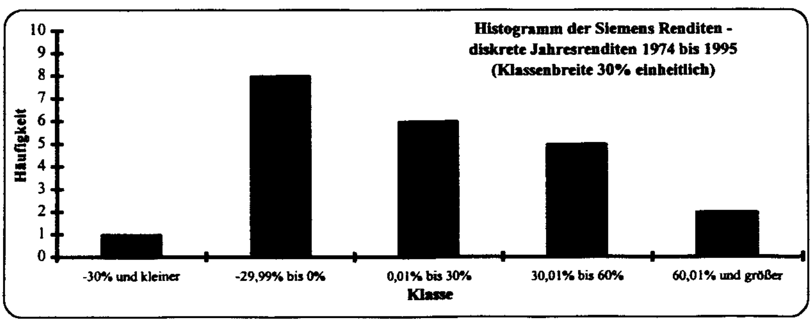
Bezeichnung des Streuungs-parameters	Formel	Index	Daimler	Siemens
Varianz	$\sigma_{r_i}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \mu_{r_i})^2$ oder $\sigma_{r_i}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}^2 - \mu_{r_i}^2$	5,6%	14,1%	8,7%
Standardab-weichung	$\sigma_{r_i} = \sqrt[2]{\sigma_{r_i}^2}$	23,7%	37,6%	29,4%
Spannweite (Range)	Maximum - Minimum	110%	162%	116%
Schiefe (Skewness)	$\mathit{Schiefe}_{r_i} = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \mu_{r_i})^3}{\sigma_{r_i}^3}$ mit: $\sigma_{r_i}^3 = \left(\sqrt[2]{\sigma_{r_i}^2}\right)^3$	51,7%	43,5%	-4,8%
Wölbung (Kurtosis)	$\mathit{Wölbung}_{r_i} = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \mu_{r_i})^4}{\sigma_{r_i}^4}$ mit: $\sigma_{r_i}^4 = \left(\sqrt[2]{\sigma_{r_i}^2}\right)^4$	78,8%	39,9%	-34,9%

Histogramme

Verteilungen realisierter Renditen können als Histogramm dargestellt werden.







Wenn es auch interessant ist, die Verteilung der realisierten Renditen einer Aktie zu ermitteln, so ist es für viele finanzwirtschaftliche Fragstellungen viel wichtiger, die Verteilung der möglichen Renditen in einer (vergangenen oder zukünftigen) Periode zu kennen. Es ist also zwischen den **Verteilungsparametern realisierter Renditen mehrerer Perioden und den Verteilungsparametern möglicher Renditen einer Periode** zu unterscheiden.

Das Problem besteht nun darin, daß naturgemäß grundsätzlich nur eine realisierte Rendite je vergangener Periode beobachtet werden kann. Aus dieser einzelnen Rendite kann selbstverständlich nicht auf die Verteilung der möglichen Renditen in dieser einen Periode geschlossen werden. Falls aber die Verteilungen der möglichen Renditen jeder Periode **unabhängig und identisch** sind, dann tendiert (konvergiert) die Verteilung der realisierten Renditen mit zunehmender Anzahl der Perioden gegen die Verteilung der möglichen Renditen in jeder Periode. Im weiteren wird diese Unabhängigkeit und Identität der Verteilungen der (möglichen) Renditen vorausgesetzt, so daß nun von der Verteilung der realisierten Renditen auf die Verteilungen der möglichen Renditen vergangener Perioden und insbesondere auch zukünftiger Perioden geschlossen werden kann.[1]

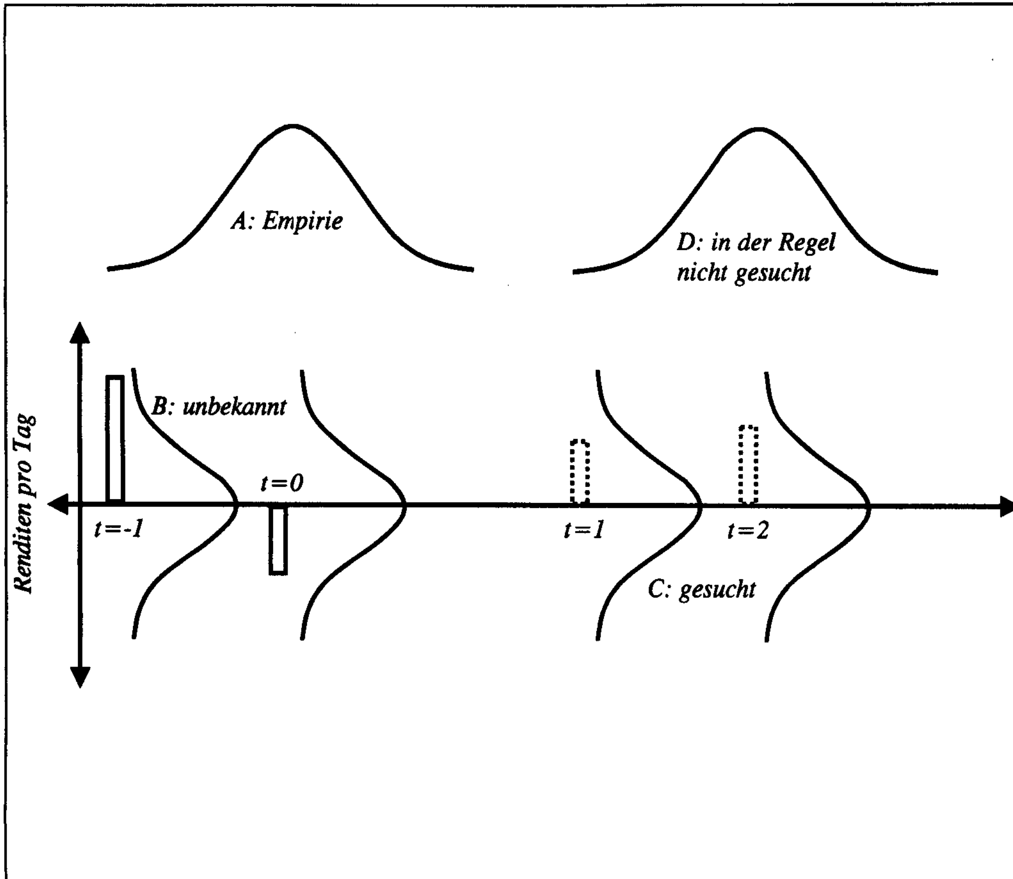
In folgender Abbildung ist der geschilderte Zusammenhang grafisch dargestellt. Da die Verteilungen der möglichen Renditen in den Perioden hier offensichtlich nicht identisch sind, kann aus der Verteilung der realisierten Renditen nicht auf die Verteilungen der möglichen Renditen vergangener und zukünftiger Perioden geschlossen werden.

Die Verteilung der realisierten Renditen ist letztlich als eine Stichprobe aus der Verteilung der möglichen Renditen anzusehen (der Grundgesamtheit). Wenn von der Varianz einer Stichprobe (also der Varianz der realisierten Renditen) auf die Varianz der Grundgesamtheit (also der Varianz der möglichen Renditen) geschlossen wird, ist die "korrigierte" Varianz ("mit T - 1") zu berechnen:

$$\sigma'^2_{r_i} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \mu_{r_i})^2$$

Für große Stichproben (also hohe Werte für T) ist die korrigierte Varianz der "normalen" Varianz sehr ähnlich. Da Verteilungsparameter für Renditen im allgemeinen auf der Grundlage sehr vieler realisierter Renditen berechnet werden, wird im weiteren davon ausgegangen, daß die korrigierte Varianz der "normalen" Varianz entspricht. Gleiches gilt für die noch einzuführenden Kovarianzen der Renditen zweier Finanztitel.

1 Falls Renditeverteilungen nicht identisch und unabhängig sind, sind Zeitreihenmodelle wie beispielsweise ARMA- und GARCH-Modelle anzupassen.


A: Empirie
D: in der Regel nicht gesucht
Renditen pro Tag
B: unbekannt
t=0
t=-1
t=1
t=2
C: gesucht

5.1.2. Normalverteilung der Renditen einzelner Aktien

In finanzwirtschaftlichen Untersuchungen wird häufig davon ausgegangen, daß die **zukünftig möglichen Renditen einer Aktie $\tilde{r}_i$ normalverteilt** sind. Für eine vollständige Beschreibung der zukünftig möglichen Renditen inklusive deren Eintrittswahrscheinlichkeiten reicht dann die Festlegung folgender zwei Verteilungsparameter:

- Erwartungswert der Renditen $\mu_{\tilde{r}_i}$
- Standardabweichung $\sigma_{\tilde{r}_i}$ oder Varianz $\sigma_{\tilde{r}_i}^2$ der Renditen

oder kurz $\tilde{r}_i = N(\mu_{\tilde{r}_i}; \sigma_{\tilde{r}_i}^2)$.

Für Normalverteilungen gilt, daß die Lageparameter Erwartungswert, Median und Modus identisch sind. Der Wert für die Schiefe ist null, der Wert der Wölbung drei[2]. Das Minimum, das Maximum und die Spannweite sind unendlich.

Normalverteilte Zufallszahlen (wie $\tilde{r}$) können durch **Standardisierung** in standardnormalverteilte Zufallszahlen (wie z) umgeformt werden:

$$z = \frac{\tilde{r} - \mu_{\tilde{r}}}{\sigma_{\tilde{r}}}$$

Eine **Standardnormalverteilung** ist eine Normalverteilung mit einem Erwartungswert von null und einer Varianz von eins oder kurz z = SN(0; 1). Die **Dichtefunktion** der Standardnormalverteilung lautet:[3]

$$f_{SN}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad \text{mit: } e = 2{,}71828$$

Auf dieser Grundlage wird häufig die Fläche gesucht, die sich unter dem Integral von $-\infty$ bis z^* befindet. Die **Verteilungsfunktion** der Standardnormalverteilung, die diese Fläche quantifiziert, lautet:

$$F_{SN}(z^*) = \int_{-\infty}^{z^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

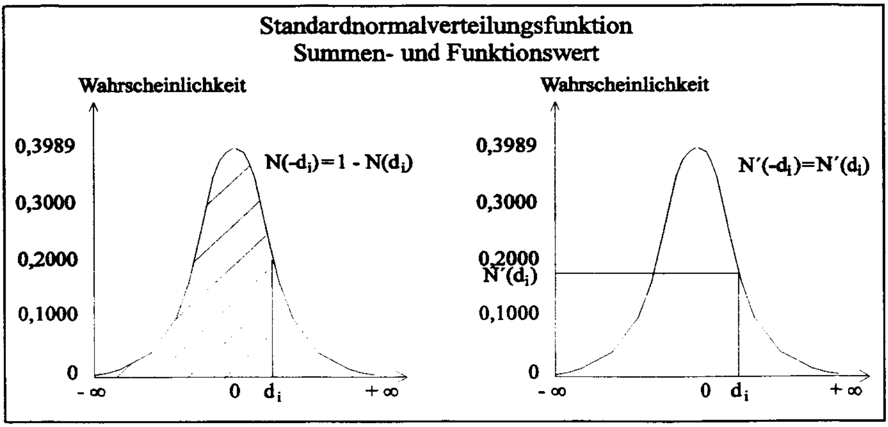
Die Werte $F_{SN}(z^*)$ drücken eine Wahrscheinlichkeit aus. Sie können also zwischen 0 und 1 liegen.

In folgender Abbildung sind Dichtefunktionen für standardnormalverteilte Zufallszahlen angegeben. Mit z wird der Wert auf der x-Achse bezeichnet, also die Ausprägung der Zufallsvariablen. Mit $f_{SN}(z)$ wird die Dichte bezeichnet, die auf der y-Achse abgetragen ist. Die Dichte liegt in dem Beispiel bei knapp 0,2000 (rechte Grafik). Die Dichte kann (sehr) vereinfacht - aber für ein erstes intuitives Verständnis der wesentlichen Zusammenhänge zweckmäßig - auch als eine Art Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden.

---

2 Einige Tabellenkalkulationsprogramme berechnen den Wert der Wölbung minus drei. Für den Fall, daß die Daten normalverteilt sind, wird dann der Wert null angezeigt.

3 Für die Umsetzung dieser Funktion in Tabellenkalkulationsprogrammen ist es hilfreich, sich folgende Schreibweise vor Augen zu führen: e^a = EXP(a)



Die schraffierte Fläche in der links angeordneten Grafik gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, daß ein Wert für die Zufallsvariable eintritt, der zwischen minus unendlich und z liegt. Diese Grafik korrespondiert also mit der Verteilungsfunktion, die diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z^* angibt. Die gesamte Fläche unter der Dichtefunktion ist grundsätzlich eins.

Dichte- und Verteilungsfunktionen standardnormalverteilter Zufallszahlen können auch in Dichte- und die Verteilungsfunktionen normalverteilter Zufallszahlen transformiert werden, wie es das folgende Beispiel auf der Grundlage der Index-Renditen zeigt.

Normalverteilung der Renditen

Die diskreten Renditen des Index (p. a.) seien normalverteilt mit einem Erwartungswert von 12,3% und einer Varianz von 5,6% oder kurz:

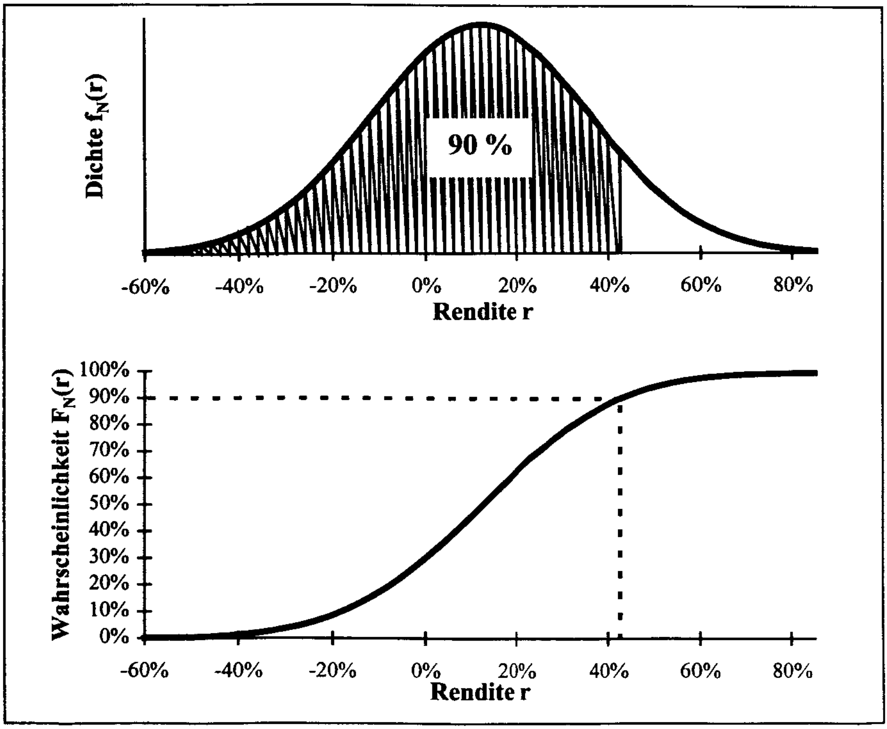
$$\tilde{r}_{Index} = N(\mu_{\tilde{r}_{Index}} = 12{,}3\%;\ \sigma^2_{\tilde{r}_{Index}} = 5{,}6\%)$$

Die **Dichtefunktion** der Normalverteilung der Index-Renditen lautet:

$$f_N(\tilde{r}_{Index}) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}_{Index}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{r}_{Index} - \mu_{\tilde{r}_{Index}}}{\sigma_{\tilde{r}_{Index}}}\right)^2}$$

Die **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung der Index-Renditen lautet:

$$F_N(\tilde{r}^*_{Index}) = \int_{-\infty}^{\tilde{r}^*_{Index}} \frac{1}{\sigma_{\tilde{r}_{Index}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{r}_{Index} - \mu_{\tilde{r}_{Index}}}{\sigma_{\tilde{r}_{Index}}}\right)^2} d\tilde{r}_{Index}$$



Die diskrete Rendite des Index (hier des DAX) lag 1996 bei ca. 28 Prozent.

Dichtefunktion f(z) der Standardnormalverteilung für z > 0

z	+0,00	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

$z < 0: f(z) = f(-z)$

Verteilungsfunktion F(z) der Standardnormalverteilung für z > 0

z	+0,00	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$z < 0: F(z) = 1 - F(-z)$

Exkurs: Approximation der Verteilungsfunktion standardnormalverteilter Zufallsvariablen

Die Dichten $f_{SN}(z)$ standardnormalverteilter Zufallszahlen z können einfach berechnet werden:

$$f_{SN}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Das gilt hingegen nicht für die kumulierten Dichten $F_{SN}(z^*)$ standardnormalverteilter Zufallszahlen z, also für die Werte der Verteilungsfunktion. Es existiert keine einfache Berechnungsvorschrift (oder Funktion), die den exakten Wert der kumulierten Dichten $F_{SN}(z_*)$ angibt, da hiefür ein Integral zu berechnen ist. Daher wird entweder auf Tabellen zurückgegriffen oder es werden Näherungsverfahren benutzt.

Nach einem üblichen Näherungsverfahren kann die Verteilungsfunktion

$$F_{SN}(z^*) = \int_{-\infty}^{z^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad dz$$

für $z^* > 0$ aber wie folgt approximiert werden:

$$F_{SN}(z^*) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_i^2} (b_1\, a + b_2\, a^2 + b_3\, a^3 + b_4\, a^4 + b_5\, a^5)$$

b_1 = 0,319381530
b_2 = -0,356563782
b_3 = 1,781477937
b_4 = -1,821255978
b_5 = 1,330274429

a = 1 / (1 + 0,2316419 z^*)

Für $z^* < 0$ gilt $F_{SN}(z^*) = 1 - F_{SN}(-z^*)$.

5.1.3. Verbundene Verteilungsparameter für mehrere Aktien sowie zwischen Aktien und Aktienindizes - Grundlagen der einfachen und multiplen Regressionsanalyse

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Formeln und Matrizendefinitionen aufgeführt, mit denen **lineare Abhängigkeiten zwischen Renditeverteilungen zweier Finanztitel** beschrieben werden.

Die übliche Darstellungsform für eine **lineare Beziehung** zwischen zwei Variablen lautet:

$$\tilde{y} = \alpha + \beta\,\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$$

Derartige lineare Beziehungen werden in finanzwirtschaftlichen Modellen regelmäßig **für realisierte Renditen** unterstellt:

$$r_{jt} = \alpha_{r_i r_j} + \beta_{r_i r_j}\, r_{it} + \varepsilon_{r_{it} r_{jt}}$$

Die Regressionskoeffizienten α und β und Residuen ϵ sind hier mit den **Indizes r_i und r_j** versehen, um deutlich zu machen, welche Variable als erklärende und welche als zu erklärende definiert ist. Es gilt, daß j über i abgebildet wird. Trotz des nicht zwingend vorhandenen Kausalzusammenhanges wird diese Beziehung der Einfachheit halber im weiteren aber mit "i erklärt j" umschrieben. Ein Index oder beide Indizes werden verwendet, wenn es zum Verständnis der Ausführungen beiträgt. Beispielsweise wird ausschließlich der Index für die zu erklärende Variable angegeben, wenn die erklärende Variable eindeutig definiert ist, wie im Fall der Marktrendite.

Die Regressionskoeffizienten $\alpha_{ri\,rj}$ (Konstante) und $ß_{ri\,rj}$ (Steigung) werden meist nach der **Methode der kleinsten Quadrate** (MSE) ermittelt. Die Kovarianz $\sigma_{ri\,rj}$, der Korrelationskoeffizient $\rho_{ri\,rj}$ und das Bestimmtheitsmaß $\rho_{ri\,rj}^2$ ergeben sich auf der Grundlage der Formeln, die im weiteren angegeben sind.

Eine positive **Kovarianz** weist darauf hin, daß sich die Renditen zweier Finanztitel tendenziell in die gleiche Richtung verändern. Aus einer negativen Kovarianz folgt, daß eine positive Rendite des einen Finanztitels tendenziell mit einer negativen Rendite des anderen Finanztitels verbunden ist und umgekehrt. Dabei ist zu beachten, daß die Kovarianzen $\sigma_{ri\,rj}$ für i = j (also $\sigma_{ri\,ri}$) identisch sind mit der Varianz σ_{ri}^2. Darüber hinaus gilt $\sigma_{ri\,rj} = \sigma_{rj\,ri}$. Grundsätzlich gilt, daß die **Korrelationskoeffizienten** $\rho_{ri\,ri}$ gleich eins sind. Des weiteren gilt $\rho_{ri\,rj} = \rho_{rj\,ri}$. Die **Regressionskoeffizienten** $\alpha_{ri\,ri}$ sind gleich null und die Regressionskoeffizienten $ß_{ri\,ri}$ gleich eins. Im allgemeinen kann nicht von der Identität von $\alpha_{ri\,rj}$ und $\alpha_{rj\,ri}$ sowie $ß_{ri\,rj}$ und $ß_{rj\,ri}$ ausgegangen werden.

Da die vorgestellten Kennzahlen immer nur den Zusammenhang von zwei (Rendite-)Verteilungen angeben, können bei Vorgabe von **I (Rendite-)Verteilungen** (z. B. I = 10) folgende Werte bestimmt werden:

- I Mittelwerte μ_{ri} (hier 10)
- I Varianzen σ_{ri}^2 und Standardabweichungen σ_{ri} (hier jeweils 10)
- I (I - 1) / 2 Kovarianzen $\sigma_{ri\,rj}$ (hier 45)
- I (I - 1) / 2 Korrelationskoeffizienten $\rho_{ri\,rj}$ bzw. Bestimmtheitsmaße $\rho_{ri\,rj}^2$ (hier jeweils 45)
- I^2 - I Regressionskoeffizienten $\alpha_{ri\,rj}$ (hier 90)
- I^2 - I Regressionskoeffizienten $ß_{ri\,rj}$ (hier 90)

Aus Gründen einer einfacheren Darstellung ist es häufig sinnvoll, die Matrizenschreibweise zu verwenden. Daher sollen an dieser Stelle einige relevante Matrizen beispielhaft definiert werden.

Die Renditenmatrix **r** umfaßt die realisierten Einzelrenditen r_{it} für alle I Finanztitel (zeilenweise) und alle T Beobachtungszeitpunkte (spaltenweise):

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1t} & \cdots & r_{1T} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{it} & \cdots & r_{iT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{I1} & \cdots & r_{It} & \cdots & r_{IT} \end{pmatrix}$$

Werden die Varianzen und Kovarianzen der realisierten Renditen in einer Tabelle (Matrix) zusammengefaßt, so wird im weiteren von der **Kovarianzmatrix der realisierten Renditen V$_r$** gesprochen. Die Kovarianzmatrix der realisierten Renditen ist wie folgt aufgebaut:

$$V_r = \begin{pmatrix} \sigma_{r_1}^2 & \cdots & \sigma_{r_1 r_i} & \cdots & \sigma_{r_1 r_I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_i r_1} & \cdots & \sigma_{r_i}^2 & \cdots & \sigma_{r_i r_I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_I r_1} & \cdots & \sigma_{r_I r_i} & \cdots & \sigma_{r_I}^2 \end{pmatrix}$$

Auch die Korrelationskoeffizienten $\mathbf{KK}_r$ und Bestimmtheitsmaße $\mathbf{KK}_r^2$ können so in Matrizenform dargestellt werden. Gleiches gilt für die Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_r$ und $\boldsymbol{\beta}_r$. Um die Zuordnung der Zeilen und Spalten zu verdeutlichen, sei hier die Matrix der Beta-Faktoren $\boldsymbol{\beta}_r$ angegeben:

$$\boldsymbol{\beta}_r = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdots & \beta_{ij} & \cdots & \beta_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{I1} & \cdots & \beta_{Ij} & \cdots & \beta_{IJ} \end{pmatrix}$$

Im weiteren sind die wichtigsten Formeln zusammengefaßt, die in wertpapier-analytischen Untersuchungen regelmäßig verwendet werden.

Parameter verbundener Verteilungen I

Bezeichnung	Formel	Index erklärt Daimler	Index erklärt Siemens	Daimler erklärt Siemens
Kovarianz	$\sigma_{r_{Index}\, r_i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (r_{Index,t} - \mu_{r_{Index}})\,(r_{it} - \mu_{r_i})$ oder $\sigma_{r_{Index}\, r_i} = \mu_{r_{Index} \cdot r_i} - \mu_{r_{Index}}\, \mu_{r_i}$	7,9%	6,4%	8,8%
Korrelations-koeffizient	$\rho_{r_{Index}\, r_i} = \frac{\sigma_{r_{Index}\, r_i}}{\sigma_{r_{Index}}\, \sigma_{r_i}}$	88,8%	92,1%	79,2%
Bestimmt-heitsmaß	$\rho^2_{r_{Index}\, r_i}$	78,9%	84,8%	62,7%

T = Größe der Grundgesamtheit bzw. der Stichprobe
t = Zeitindex (Laufvariable)
r_{it} = abhängige oder zu erklärende Variable (Regressand), hier: (realisierte) Renditen der Aktie i in t
$r_{Index,t}$ = unabhängige oder erklärende Variable (Regressor), hier: (realisierte) Renditen des Indexes in t
$\hat{r}_i$ = geschätzter Wert der abhängigen oder zu erklärenden Variablen

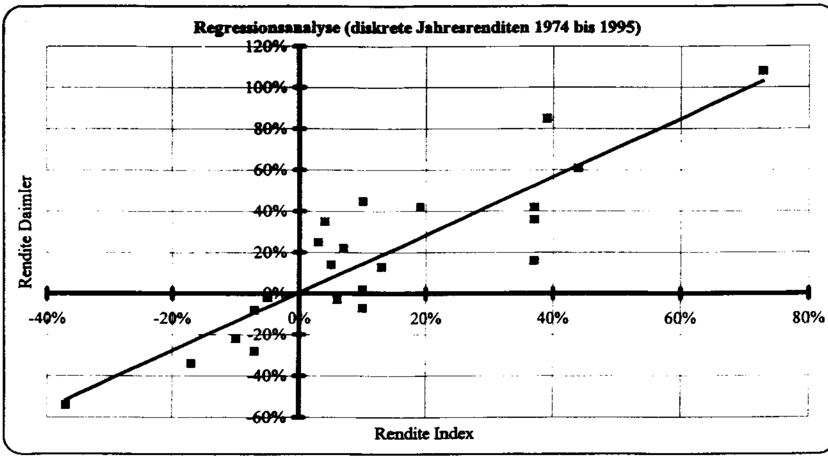
Die (realisierten) Renditen sind in Matrizen zusammengefaßt. Gleiches gilt für die Verteilungsparameter von (realisierten) Renditen mehrerer Finanztitel:

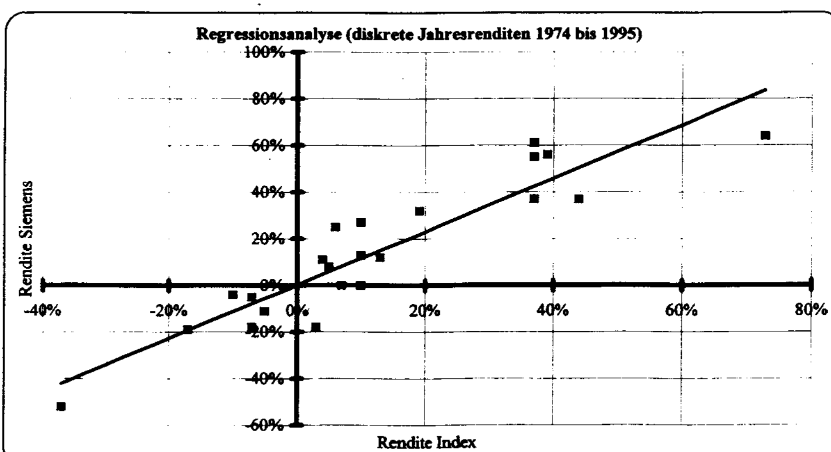
$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1t} & \cdots & r_{1T} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{it} & \cdots & r_{iT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{I1} & \cdots & r_{It} & \cdots & r_{IT} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V}_r = \begin{pmatrix} \sigma^2_{r_1} & \cdots & \sigma_{r_1 r_i} & \cdots & \sigma_{r_1 r_I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_i r_1} & \cdots & \sigma^2_{r_i} & \cdots & \sigma_{r_i r_I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_I r_1} & \cdots & \sigma_{r_I r_i} & \cdots & \sigma^2_{r_I} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_r = \begin{pmatrix} \mu_{r_1} \\ \vdots \\ \mu_{r_i} \\ \vdots \\ \mu_{r_I} \end{pmatrix}$$

Parameter verbundener Verteilungen II

Bezeichnung	Formel	Index erklärt Daimler	Index erklärt Siemens	Daimler erklärt Siemens
Ausgangs- und Schätzfunktion	$r_{it} = \alpha + \beta\, r_{Index,t} + \varepsilon_{it}$ $\hat{r}_i = \alpha + \beta\, r_{Index}$			
Residuen	$\varepsilon_{it} = r_{it} - \alpha - \beta\, r_{Index,t}$			
Berechnung des ersten Regressions-koeffizienten	$\alpha = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}^2 \sum_{t=1}^{T} r_{it} - \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t} \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}\, r_{it}}{T \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}\right)^2}$ oder $\alpha = \mu_{r_i} - \beta\, \mu_{r_{Index}}$	0,3%	0,1%	3,2%
Berechnung des zweiten Regressions-koeffizienten	$\beta = \dfrac{T \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}\, r_{it} - \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t} \sum_{t=1}^{T} r_{it}}{T \sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}\right)^2}$ oder $\beta = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}\, r_{it} - T\, \mu_{r_{Index}}\, \mu_{r_i}}{\sum_{t=1}^{T} r_{Index,t}^2 - T\, \mu_{r_{Index}}^2}$ oder $\beta = \rho_{r_{Index}\, r_i} \dfrac{\sigma_{r_i}}{\sigma_{r_{Index}}} = \dfrac{\sigma_{r_{Index}\, r_i}}{\sigma_{r_{Index}}^2}$	140,5%	114,2%	62%
Gesamtvarianz = erklärte Varianz + nicht erklärte Varianz	$\sigma_{\tilde{r}_i}^2 = \beta^2\, \sigma_{\tilde{r}_{Index}}^2 + \sigma_{\tilde{\varepsilon}_i}^2$	14,1% = 11,1% + 3,0%	8,7% = 7,4% + 1,3%	8,7% = 5,4% + 3,3%

Zusammenhang der Renditen des Index und der Daimler-Aktie





Die empirischen Renditen lagen 1996 bei ca. 28% (Index; hier DAX), 47% (Daimler) und -7% (Siemens).

Exkurs: Multiple lineare Regressionsanalyse

Während bei der einfachen linearen Regressionsanalyse lediglich eine erklärende Variable zur Abbildung der zu erklärenden Variablen herangezogen wird, werden bei der multiplen linearen Regressionsanalyse mehrere erklärende Variablen (parallel) genutzt. Die multiple lineare Regressionsanalyse auf der Grundlage zweier erklärender Variablen basiert auf folgender Schätzfunktion:

Ausgangs- und Schätzfunktion	$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i$ bzw.: $\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i$

y_i = empirischer Wert der abhängigen oder zu erklärenden Variablen (Regressand)

$\hat{y}_i$ = geschätzter Wert der abhängigen oder zu erklärenden Variablen

x_i und z_i = unabhängige oder erklärende Variable (Regressor)

α, β_1 und β_2 = Regressionskoeffizienten

Während die Regressionskoeffizienten im Rahmen der einfachen linearen Regressionsanalyse noch vergleichsweise einfach zu bestimmen sind, so erfordert dieses Optimierungsproblem ("minimiere die Summe der quadrierten Abweichungen") aufwendigere Lösungsalgorithmen. Meistens wird die Technik der Matrizenrechnung genutzt. In der Praxis können derartige Aufgabenstellungen vergleichsweise schnell gelöst werden, da inzwischen jedes bessere Tabellenkalkulationsprogramm Funktionen bietet, die quasi auf Knopfdruck alle relevanten Parameter auch multipler Regressionsanalysen berechnen.

Um das Prinzip der multiplen linearen Regressionsanalyse zu verdeutlichen, werden in der folgenden Tabelle die Ergebnisse mehrerer einfacher und multipler Regressionsanalysen aufgeführt. Ausgangspunkt sind tägliche diskrete Renditen eines Aktienindex über 4 Jahre (1993 bis 1996), die mit den US$-Kursen und den Kursen des 10-Jahres-REX jeweils einzeln und im Verbund erklärt werden sollen. Das Ergebnis zeigt, daß die Kurse des US$ und des REX wenig geeignet sind, die Renditen des Aktienindexes zu erklären (vgl. die Bestimmtheitsmaße). Deshalb wurden im nächsten Schritt die diskreten Renditen des US$ und des REX berechnet, um auf dieser Grundlage die Regressionsschätzungen zu wiederholen. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse etwas besser sind.

Einfache und multiple Regressionsanalysen zur Erklärung der Renditen eines Aktienindexes (Zeitraum: 1993 bis 1996 - börsentäglich)

einfache lineare Regressionsanalyse (US$)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta \; US\$_t + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = -0{,}0028 + 0{,}0022 \; US\$_t$
Bestimmtheitsmaß	0,0007
einfache lineare Regressionsanalyse (REX)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta \; REX_t + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = -0{,}0178 + 0{,}0002 \; REX_t$
Bestimmtheitsmaß	0,0057
multiple lineare Regressionsanalyse (US$ und REX)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta_1 \; US\$_t + \beta_2 \; REX_t + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = -0{,}0187 + 0{,}0010 \; US\$_t + 0{,}0002 \; REX_t$
Bestimmtheitsmaß	0,0058
einfache lineare Regressionsanalyse (US$)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta \; r_{US\$,t} + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = 0{,}0006 + 0{,}4932 \; r_{US\$,t}$
Bestimmtheitsmaß	0,1307
einfache lineare Regressionsanalyse (REX)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta \; r_{REX,t} + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = 0{,}0005 + 1{,}0982 \; r_{REX,t}$
Bestimmtheitsmaß	0,2540
multiple lineare Regressionsanalyse (US$ und REX)	$r_{Index,t} = \alpha + \beta_1 \; r_{US\$,t} + \beta_2 \; r_{REX,t} + \varepsilon_{Index,t}$ $\hat{r}_{Index,t} = 0{,}0005 + 0{,}3907 \; r_{US\$,t} + 0{,}9955 \; r_{REX,t}$
Bestimmtheitsmaß	0,3338

Exkurs: Berechnung der Kovarianzmatrix über Matrizenoperationen

Im weiteren wird gezeigt, wie die Parameter verbundener Verteilungen für mehrere Finanztitel über Matrizenoperationen vereinfacht berechnet werden können. Die Kovarianzmatrix $\mathbf{V_r}$ und die Matrix der Korrelationskoeffizienten $\mathbf{KK_r}$ kann für die Renditenmatrix $\mathbf{r}$ bestimmt werden, indem die standardisierten Renditenmatrizen $\mathbf{r'}$ bzw. $\mathbf{r''}$ mit den transponierten standardisierten Renditenmatrizen $\mathbf{r'^T}$ bzw. $\mathbf{r''^T}$ multipliziert und diese Ergebnisse durch die Anzahl der in die Rechnung eingegangenen Perioden T geteilt werden.

Im einzelnen: Die in der Matrix $\mathbf{r'}$ bzw. $\mathbf{r''}$ enthaltenen standardisierten Renditen r_{it}' und r_{it}'' lassen sich wie folgt bestimmen:

$$r_{it}' = r_{it} - \mu_{r_i}$$

$$r_{it}'' = \frac{r_{it} - \mu_{r_i}}{\sigma_{r_i}} = \frac{r_{it}'}{\sigma_{r_i}}$$

Hieraus kann nun die Kovarianzmatrix $\mathbf{V_r}$ berechnet werden:

$$\boldsymbol{V_r} = \frac{\boldsymbol{r'}\,\boldsymbol{r'^T}}{T}$$

mit T = Anzahl der Perioden (z. B. Jahre) je Finanztitel

Die Kovarianzmatrix $\mathbf{V_r}$ gilt sowohl für die ursprünglichen Renditen r_{it} als auch für die mittelwertstandardisierten Renditen r_{it}', selbstverständlich aber nicht für die standardisierten Renditen r_{it}''.

Die Matrix der Korrelationskoeffizienten $\mathbf{KK_r}$ ergibt sich aus der standardisierten Renditenmatrix $\mathbf{r''}$ über:

$$\boldsymbol{KK_r} = \frac{\boldsymbol{r''}\,\boldsymbol{r''^T}}{T}$$

Die Matrix der Korrelationskoeffizienten $\mathbf{KK_r}$ gilt sowohl für die ursprünglichen Renditen r_{it} als auch für die standardisierten Renditen r_{it}' und r_{it}''.

Die Werte für die Regressionskoeffizienten der Matrizen $\boldsymbol{\alpha_r}$ und $\boldsymbol{\beta_r}$ lassen sich nun einfach bestimmen über

$$\beta_{r_i r_j} = \frac{\sigma_{r_i r_j}}{\sigma_{r_i}^2} = \frac{\rho_{r_i r_j}\,\sigma_{r_j}}{\sigma_{r_i}}$$

bzw.

$$\alpha_{r_i r_j} = \mu_{r_j} - \beta_{r_i r_j}\,\mu_{r_i}$$

5.1.4. Multivariat normalverteilte Aktienrenditen als Grundlage zur Berechnung von Portefeuillerenditen

Wenn zwei bzw. mehrere verbundene normalverteilte Zufallszahlen (hier Renditen) beschrieben werden, spricht man von bivariat bzw. multivariat normalverteilten Zufallszahlen. Bezogen auf das Beispiel sind die Paare "Rendite Index und Rendite Daimler" bivariat normalverteilt mit den jeweiligen Erwartungswerten, den jeweiligen Varianzen und der gemeinsamen Kovarianz oder kurz:

$$\tilde{r}_{Index}; \tilde{r}_{Daimler} =$$

$$BN\ (\ \mu_{\tilde{r}\ Index} = 12{,}3\%;\ \mu_{\tilde{r}\ Daimler} = 17{,}6\%;$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}\ Index} = 5{,}6\%;\ \sigma^2_{\tilde{r}\ Daimler} = 14{,}1\%;$$

$$\sigma_{\tilde{r}\ Index,\ Daimler} = 7{,}9\%\ )$$

Mit diesen Angaben kann beispielsweise berechnet werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Rendite des Index über 10% und die Rendite der Daimler Aktie zugleich über 5% liegt.

Multivariat normalverteilte Renditen können praktisch nur in Matrizenschreibweise angegeben werden:

$$\tilde{r} = MN(\mu_{\tilde{r}};\ V_{\tilde{r}})$$

Im weiteren wird erklärt, wie die Verteilung der Rendite eines Portefeuilles bestimmt werden kann, wenn die Renditen der im Portefeuille enthaltenen Finanztitel multivariat normalverteilt sind. Mit anderen Worten soll folgende Frage beantwortet werden: Mit welcher Verteilung der Renditen in der nächsten Periode bzw. mit welcher Verteilung der Kurse am Ende der Periode kann ein Anleger rechnen, wenn die Erwartungswerte und die Varianzen sowie alle Kovarianzen der normalverteilten Renditen aller im Depot befindlichen Finanztitel bekannt sind?

Da die Lösung derartiger Aufgabenstellungen (gerade bei Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen) über Matrizenoperationen stark vereinfacht werden kann, sind die wichtigsten Formeln auch in Matrizenschreibweise angegeben.

Die diskrete Rendite eines Depots $\tilde{r}_P$ kann über die Anteile der Wertpapiere am Depot $w_{i,t-1}$

$$w_{i,t-1} = \frac{S_{i,t-1}}{S_{P,t-1}} = \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_{1,t-1} \\ \vdots \\ w_{i,t-1} \\ \vdots \\ w_{I,t-1} \end{pmatrix}$$

einfach berechnet werden:

$$\tilde{r}_P = \sum_{i=1}^{I} w_{i,t-1}\, \tilde{r}_i = \boldsymbol{w}^T \tilde{\boldsymbol{r}} \qquad \text{mit: } \sum_{i=1}^{I} w_{i,t-1} = 1$$

Die Variable $w_{i,t-1}$ bezeichnet den Kurs des Finanztitels $S_{i,t-1}$ im Zeitpunkt t-1, also zu Beginn der Periode t.

Falls keine Leerverkäufe zugelassen sind, gilt für die Anteile $w_{i,t-1}$ zusätzlich:

$$w_{i,t-1} \geq 0 \; \forall \; i$$

Für den Kurswert eines Depots gilt:

$$\tilde{S}_{Pt} = \sum_{i=1}^{I} S_{i,t-1}\, (1 + \tilde{r}_i)$$

bzw.:

$$\tilde{S}_{Pt} = S_{P,t-1}\, \left(1 + \sum_{i=1}^{I} w_{i,t-1}\, \tilde{r}_i \right)$$

Auf die Angabe des Zeitindexes für die Gewichte wird im weiteren verzichtet, wenn es für das Verständnis der Ausführungen nicht erforderlich ist.

Für den Erwartungswert der diskreten Rendite eines Depots sowie deren Varianz gilt:

$$\mu_{\tilde{r}_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{\tilde{r}_i} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}_r$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}_P} = \mu_{(\tilde{r}_P - \mu_{\tilde{r}_P})^2}$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i^2 \, \sigma^2_{\tilde{r}_i} + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{\tilde{r}_i \tilde{r}_j}$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}_P} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=i}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{\tilde{r}_i \tilde{r}_j} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V}_{\tilde{r}} \, \boldsymbol{w}$$

wobei die Kovarianz definiert ist als:

$$\sigma_{\tilde{r}_i \tilde{r}_j} = \mu_{(\tilde{r}_i - \mu_{\tilde{r}_i})(\tilde{r}_j - \mu_{\tilde{r}_j})} = \rho_{\tilde{r}_i \tilde{r}_j} \, \sigma_{\tilde{r}_i} \, \sigma_{\tilde{r}_j}$$

Wenn die diskreten Einzelrenditen der Finanztitel eines Depots normalverteilt sind, sind auch die diskreten Renditen des Depots wie folgt normalverteilt:

$$\tilde{r}_P = N(\mu_{\tilde{r}_P};\ \sigma^2_{\tilde{r}_P})$$

Die Verteilung der Kurse des Depots kann nun aufgrund

$$\tilde{S}_{Pt} = S_{P,t-1} \, (1 + \tilde{r}_{Pt})$$

einfach bestimmt werden:

$$\tilde{S}_{Pt} = N(\mu_{\tilde{S}_P} = S_{P,t-1} \, [1 + \mu_{\tilde{r}_P}];\ \sigma^2_{\tilde{S}_{Pt}} = S^2_{P,t-1} \, \sigma^2_{\tilde{r}_P})$$

Wenn die Berechnung der Werte des Depots für verschiedene zukünftige Zeitpunkte durchgeführt werden soll, ist festzulegen, ob die Gewichte der einzelnen Finanztitel im Zeitablauf konstant gelassen werden oder nach vorzugebenden Regeln anzupassen sind.

Multivariat normalverteilte Renditen (per Monat)

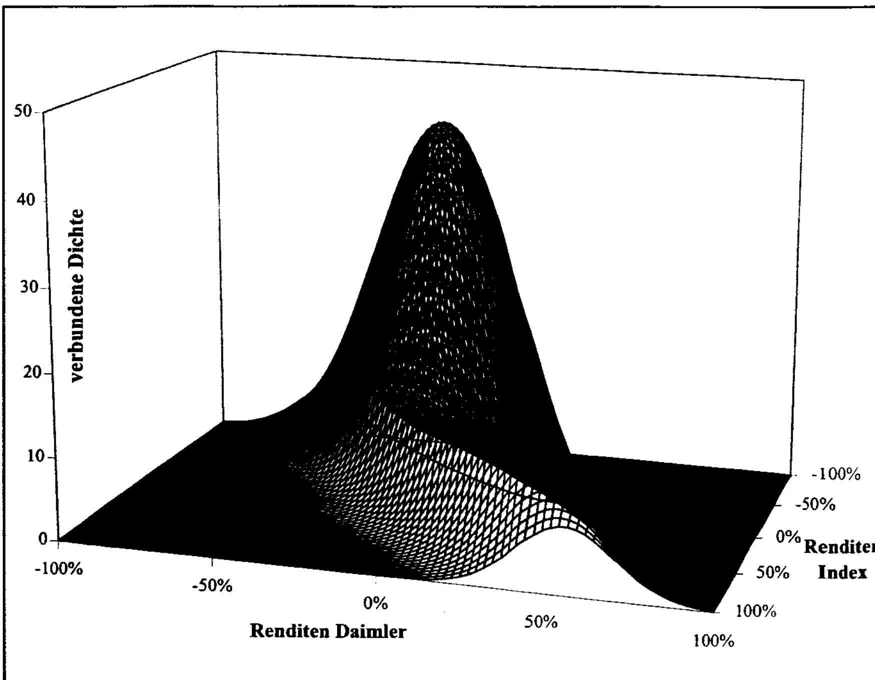
$$\tilde{r}_{Index}; \tilde{r}_{Daimler} =$$

$$BN\ (\ \mu_{\tilde{r}\ Index} = 12{,}3\%;\ \mu_{\tilde{r}\ Daimler} = 17{,}6\%;$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}\ Index} = 5{,}6\%;\ \sigma^2_{\tilde{r}\ Daimler} = 14{,}1\%;$$

$$\sigma_{\tilde{r}\ Index,\ Daimler} = 7{,}9\%\ )$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Rendite des Index über 1% und die Rendite der Daimler Aktie zugleich über 0,5% liegt?



Multivariat normalverteilte Renditen werden über Matrizen angegeben:

$$\tilde{r} = MN(\mu_{\tilde{r}};\ V_{\tilde{r}})$$

Berechnung von Portefeuillerenditen bei multivariat normalverteilte Renditen der im Portefeuille enthaltenen Finanztitel

Erwartungswert der Renditen eines Depots:

$$\mu_{\tilde{r}_P} = \sum_{i=1}^{I} w_i \, \mu_{\tilde{r}_i} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}_{\tilde{r}}$$

Varianz der Renditen eines Depots:

$$\sigma^2_{\tilde{r}_P} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=i}^{I} w_i \, w_j \, \sigma_{\tilde{r}_i \tilde{r}_j} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V}_{\tilde{r}} \, \boldsymbol{w}$$

Die Renditen des Depots sind normalverteilt:

$$\tilde{r}_P = N(\mu_{\tilde{r}_P}; \, \sigma^2_{\tilde{r}_P})$$

Die Verteilung der Kurse des Depots ergibt sich dann über:

$$\tilde{S}_{Pt} = N(\mu_{\tilde{S}_P} = S_{P,t-1} \, [1 + \mu_{\tilde{r}_P}]; \, \sigma^2_{\tilde{S}_{Pt}} = S^2_{P,t-1} \, \sigma^2_{\tilde{r}_P})$$

Falls keine Leerverkäufe zugelassen sind, gilt für die Anteile w_i:

$$w_i \geq 0 \; \forall \; i$$

Investition von DM 1.000	Kauf 100% Daimler	Kauf 100% Siemens	Kauf 30% Daimler 70% Siemens
Erwartungswert der Renditen	17,6%	14,1%	$0{,}3 \cdot 0{,}176 + 0{,}7 \cdot 0{,}141 = 15{,}150\%$
Varianz der Renditen	14,1%	8,7%	$0{,}3^2 \cdot 0{,}141 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}087 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}088 = 9{,}228\%$
	Kovarianz 8,8%		
Erwartungswert des Depots am Ende der Periode in DM	1.176	1.141	$1.000 \cdot (1 + 0{,}1515) = 1.152$
Varianz des Depots am Ende der Periode in DM	141.000	87.000	$1.000^2 \cdot 0{,}09228 = 92.280$
Standardabweichung des Depots am Ende der Periode in DM	376	295	$92.280^{0,5} = 304$

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben - Dateien: Zinstage und Anleihen

A) Berechnen Sie die diskreten Renditen für die in der Tabelle angegebenen Aktiengesellschaften. Bestimmen Sie auf dieser Grundlage die Verteilungsparameter der Renditen. Interpretieren Sie anschließend die Ergebnisse.

Datum	2.1.1992	2.1.1993	2.1.1994	2.1.1995	2.1.1996	2.1.1997
Kurse Risiko AG	100	50	140	90	180	250
Kurse Gleich AG	100	130	170	200	220	250
Kurse Null AG	100	130	170	200	220	100
Kurse Minus AG	100	50	140	90	180	80

B) Was sagen Dichte- und Verteilungsfunktionen allgemein aus?

C) Ermitteln Sie die Werte der Dichte- und Verteilungsfunktion für standardnormalverteilte d_i = -1,5; 0; 1 und 1,78. Was sagen diese Werte aus?

D) Gehen Sie von folgender empirisch beobachteten Verteilung der möglichen Renditen der Daimler-Aktie im Zeitraum 1974 bis 1995 aus:
$\tilde{r}_{Daimler} = N(\mu_{\tilde{r}\ Daimler} = 17{,}6\%;\ \sigma^2_{\tilde{r}\ Daimler} = 14{,}1\%)$
Berechnen Sie aus damaliger Sicht die Wahrscheinlichkeit, daß die Rendite der Daimler-Aktie in 1996
- unter 10%
- über 50%
- zwischen -10% und 10%
- genau bei 5%

liegen wird.

Berechnen Sie die Rendite der Daimler-Aktie, die aus damaliger Sicht in 1996 mit
- 1% Wahrscheinlichkeit
- 5% Wahrscheinlichkeit
- 20% Wahrscheinlichkeit
- 95% Wahrscheinlichkeit
- 99% Wahrscheinlichkeit
- 100% Wahrscheinlichkeit

mindestens eintritt.

Interpretieren Sie die Ergebnisse vor dem Hintergrund, daß 1996 eine Rendite für die Daimler-Aktie von ca. 47% eintrat.

E)

Jahr	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$r_{\text{Brau AG}, t}$ (in %)	2	1	4	5	7	7	1	-6	-2	2	-5
$r_{\text{Index}, t}$ (in %)	5	7	12	18	23	12	5	-3	0	1	-12
Sonnentage p. a.	160	220	210	270	170	100	199	270	210	100	120

Führen Sie für die angegebenen Daten eine einfache lineare Regressionsanalyse durch (die Anzahl der Sonnentage ist hier zunächst irrelevant). Wie hoch sind die verbundenen Verteilungsparameter? Was sagen diese Werte aus?

Zusatzaufgabe für besonders interessierte Studierende: Als weitere erklärende Variable soll die Anzahl der Sonnentage je Jahr zur Erklärung der Aktienrenditen der Brau AG herangezogen werden. Führen Sie in Anlehnung an die letzte Aufgabenstellung eine multiple lineare Regressionsanalyse durch (Aufgabe dieser Art sind praktisch nur mit PC-Unterstützung zu lösen).

F) Erklären Sie die Aussagen der Ergebnisse (insbesondere die besonders relevanten Parameter) einfacher und multipler Regressionsanalysen.

G) Ihr Wertpapierportefeuille enthält einen Investmentfondanteil im gegenwärtigen Wert von 12.000 DM. Darüber hinaus verfügen Sie über 100 Daimler Aktien, die zur Zeit mit DM 152,50 notieren. Berechnen Sie die Verteilungsparameter der Rendite und des Kurswertes Ihres Portefeuilles in einem Jahr. Gehen Sie dabei von folgenden bekannten Daten aus:

$$\tilde{r}_{\text{Index}}; \tilde{r}_{\text{Daimler}} =$$

$$\text{BN} \; (\mu_{\tilde{r}\,\text{Index}} = 12{,}3\%; \mu_{\tilde{r}\,\text{Daimler}} = 17{,}6\%;$$

$$\sigma^2_{\tilde{r}\,\text{Index}} = 5{,}6\%; \sigma^2_{\tilde{r}\,\text{Daimler}} = 14{,}1\%;$$

$$\sigma_{\tilde{r}\,\text{Index, Daimler}} = 7{,}9\% \;)$$

H) Welchen Einfluß hat die Korrelation auf das vorangegangene Ergebnis? Wie würden sich andere Korrelationskoeffizienten auswirken?

Lösungshinweise

A)

	Risiko AG	Gleich AG	Null AG	Minus AG
Kurse	100	100	100	100
	50	130	130	50
	140	170	170	140
	90	200	200	90
	180	220	220	180
	250	250	100	80
Renditen	-50,0%	30,0%	30,0%	-50,0%
	180,0%	30,8%	30,8%	180,0%
	-35,7%	17,6%	17,6%	-35,7%
	100,0%	10,0%	10,0%	100,0%
	38,9%	13,6%	-54,5%	-55,6%
Aufzinsungsfaktoren	0,500	1,300	1,300	0,500
	2,800	1,308	1,308	2,800
	0,643	1,176	1,176	0,643
	2,000	1,100	1,100	2,000
	1,389	1,136	0,455	0,444
Anzahl	5	5	5	5
(arithmetischer) Mittelwert	46,6%	20,4%	6,8%	27,7%
geometrisches Mittel (der Aufzinsungsfaktoren)	20,1%	20,1%	0,0%	-4,4%
Median	38,9%	17,6%	17,6%	-35,7%
Standardabweichung	85,8%	8,5%	31,6%	95,3%
Varianz	73,6%	0,7%	10,0%	90,8%
Minimum	-50,0%	10,0%	-54,5%	-55,6%
Maximum	180,0%	30,8%	30,8%	180,0%
Schiefe	50,2%	25,9%	-191,1%	89,7%
Kurtosis	-124,6%	-280,5%	380,1%	-154,6%
Modus	nicht verfügbar	nicht verfügbar	nicht verfügbar	nicht verfügbar
0%-Quantil (Minimum)	-50,0%	10,0%	-54,5%	-55,6%
25%-Quantil (Quartil)	-35,7%	13,6%	10,0%	-50,0%
50%-Quantil (Quartil, Median)	38,9%	17,6%	17,6%	-35,7%
75%-Quantil (Quartil)	100,0%	30,0%	30,0%	100,0%
100%-Quantil (Maximum)	180,0%	30,8%	30,8%	180,0%
44%-Quantil	21,0%	16,7%	15,8%	-39,1%

C)

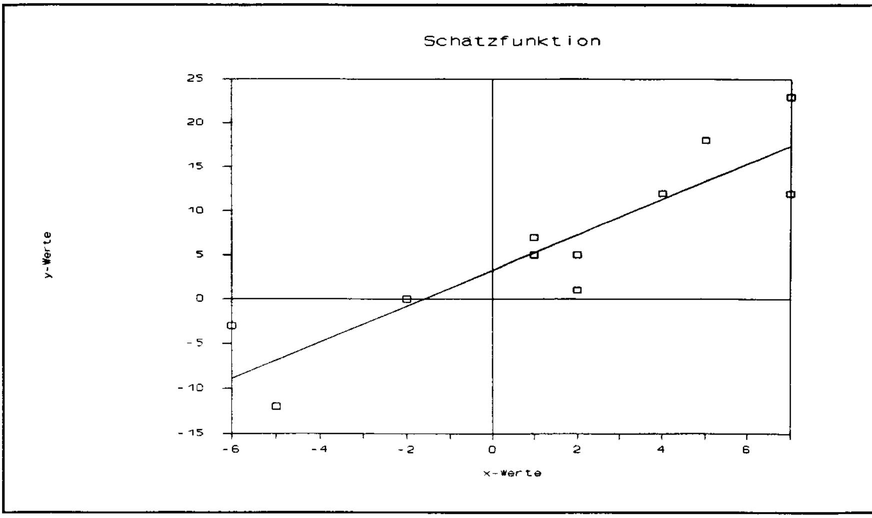
d_i	-1,5	0	1	1,78
Dichtefunktion	0,1295	0,3989	0,2418	0,0818
Verteilungsfunktion	0,0594	0,5000	0,8413	0,9625

D) - unter 10% (-41,98%)
- über 50% (80,59%)
- zwischen -10% und 10% (18,86%)
- genau bei 5% (0,00%)

- 1% Wahrscheinlichkeit (104,95%)
- 5% Wahrscheinlichkeit (79,36%)
- 20% Wahrscheinlichkeit (49,20%)
- 95% Wahrscheinlichkeit (-44,17%)
- 99% Wahrscheinlichkeit (-69,75%)
- 100% Wahrscheinlichkeit (0,00%)

E)

Jahr	Rendite Aktienindex (x-Achse)	Rendite Brau AG (y-Achse)	Index Abweichung vom Mittelwert	Brau AG Abweichung vom Mittelwert	Produkt
1985	2,00%	5,00%	0,545455%	-1,18182%	-0,0064463%
1986	1,00%	7,00%	-0,45455%	0,818182%	-0,003719%
1987	4,00%	12,00%	2,545455%	5,818182%	0,1480992%
1988	5,00%	18,00%	3,545455%	11,81818%	0,4190083%
1989	7,00%	23,00%	5,545455%	16,81818%	0,9326446%
1990	7,00%	12,00%	5,545455%	5,818182%	0,3226446%
1991	1,00%	5,00%	-0,45455%	-1,18182%	0,0053719%
1992	-6,00%	-3,00%	-7,45455%	-9,18182%	0,6844628%
1993	-2,00%	0,00%	-3,45455%	-6,18182%	0,2135537%
1994	2,00%	1,00%	0,545455%	-5,18182%	-0,0282645%
1995	-5,00%	-12,00%	-6,45455%	-18,1818%	1,173554%
Mittelwert	1,45%	6,18%		Kovarianz	0,3509917%
Varianz	0,1734%	0,8851%		Korrelationskoeffizient	89,5952%
Standardabweichung	4,16%	9,41%		Bestimmtheitsmaß	80,273%
erklärte Varianz		0,7106%		α	3,237369%
unerklärte Varianz		0,1745%		β	202,4308866%



Bestimmtheitsmaß	α	β_1	β_2
95,7	-9,146%	222,1%	0,066%

G)

	Kurse am Ende der Periode	Renditen
Erwartungswert	31.410,00	15,27%
Varianz	69.769.312,50	9,40%
Standardabweichung	8.352,80	30,65%

5.1.5. Grundlagen der Matrizenrechnung am Beispiel der Berechnung von Portefeuillerenditen

Definition von Matrizen

Als Matrix **A** wird ein System von Zahlen a_{ij} bezeichnet, in dem die Elemente in Zeilen und Spalten wie folgt angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Als Vektor **v** wird eine Reihe (Spalte) von Zahlen a_i bezeichnet, die wie folgt angeordnet sind:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \qquad z.B.: \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Von gleichem Typ sind zwei Matrizen, wenn sie die gleiche Anzahl Spalten und Zeilen aufweisen. Bei einer quadratischen Matrix sind Zeilen- und Spaltenzahl identisch. Die Elemente, die sich angefangen von der linken oberen Position schräg nach unten bis in der unteren rechten Position befinden, bilden die Hauptdiagonale der quadratischen Matrix. Sind alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen 0, so bezeichnet man die quadratische Matrix als obere Dreiecksmatrix. Entsprechend wird von einer unteren Dreiecksmatrix gesprochen, wenn die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen 0 sind. Eine Diagonalmatrix liegt vor, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, 0 sind. Sind die Elemente der Hauptdiagonalen alle 1, die anderen Elemente dagegen 0, nennt man diese Matrix Einheitsmatrix. Von einer Nullmatrix wird dann gesprochen, wenn jegliche Elemente der Matrix 0 sind.

Grundformen der Matrizenrechnung - Datei: Mat_Ex

Die Addition zweier Matrizen **A** und **B** ist komponentenweise nach folgendem Schema vorzunehmen: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Dabei gelten Kommutativ- sowie Assoziativgesetz. Gleiches gilt für die Subtraktion von Matrizen.

Beispiel:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & 9 \\ 6 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & -5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrizen **A** und **B** ist dagegen komplizierter. Voraussetzung ist, daß die Zahl der Spalten von **A** mit der Zahl der Zeilen von **B** übereinstimmt. Um das Produkt der Matrizen zu erhalten, muß jede Zeile von **A** mit jeder Spalte von **B** multipliziert werden. Das entsprechende Element ergibt sich dann aus der Addition der Produkte. Für die Multiplikation gilt nur das Assoziativgesetz.

Beispiel:

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 73 & 57 \\ 21 & 36 & 57 \\ 50 & 51 & 44 \end{pmatrix}$$

In bestimmten Fällen ist eine Transponierung einer Matrix notwendig. Um die transponierte Matrix $\mathbf{A}^T$ zu erhalten, werden einfach die Zeilen von **A** als Spalten von $\mathbf{A}^T$ dargestellt. Die Transponierung von $\mathbf{A}^T$ muß dann wieder **A** ergeben.
Beispiel:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$v^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Für die Inversion der Matrix **A** zu $\mathbf{A}^{-1}$ gibt es verschiedene Verfahren, die hier nicht dargestellt werden sollen.
Beispiel:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,181818 & -0,090909 & 0,363636 \\ -0,454545 & 1,272727 & -0,090909 \\ 0,545455 & -0,727272 & -0,090909 \end{pmatrix}$$

5.2. Ableitung der Indikatoren NIV_K, STE_K und $KRÜ_K$, $STE_{K,ne}$ und $KRÜ_{K,ne}$

Ersetzen der Regressionskoeffizienten durch die Renditen $\hat{r}_1$, $\hat{r}_5$ und $\hat{r}_9$

Ausgangsfunktion: $\hat{r}_T = b_0 + b_1\,T + b_2 \ln T + b_K$

$$\hat{r}_1 = b_0 + b_1 + b_2 \ln 1 + b_K$$
$$\hat{r}_5 = b_0 + b_1\,5 + b_2 \ln 5 + b_K$$
$$\hat{r}_9 = b_0 + b_1\,9 + b_2 \ln 9 + b_K$$

$$b_0 = \hat{r}_1 - b_1 - b_K$$

$$\hat{r}_5 = \hat{r}_1 - b_1 - b_K + b_1\,5 + b_2 \ln 5 + b_K$$
$$\hat{r}_5 = \hat{r}_1 + 4\,b_1 + b_2 \ln 5$$
$$b_1 = (\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - b_2 \ln 5)\,/\,4$$

$$\hat{r}_9 = \hat{r}_1 - b_1 - b_K + b_1 \cdot 9 + b_2 \ln 9 + b_K$$
$$\hat{r}_9 = \hat{r}_1 + b_1 \cdot 8 + b_2 \ln 9$$
$$\hat{r}_9 = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - b_2 \ln 5)\,/\,4 \cdot 8 + b_2 \ln 9$$
$$\hat{r}_9 = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - b_2 \ln 5)\,2 + b_2 \ln 9$$
$$\hat{r}_9 = \hat{r}_1 + 2\,\hat{r}_5 - 2\,\hat{r}_1 - 2\,b_2 \ln 5 + b_2 \ln 9$$
$$\hat{r}_9 = 2\,\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - b_2\,3{,}218876 + b_2{,}197225$$
$$\hat{r}_9 = 2\,\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - 1{,}021651\,b_2$$
$$b_2 = (2\,\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - \hat{r}_9)\,/\,1{,}021651$$

$$\hat{r}_T = b_0 + b_1\,T + b_2 \ln T + b_K$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 - b_1 + b_1\,T + b_2 \ln T$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + b_1\,(T-1) + b_2 \ln T$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - b_2 \ln 5)\,/\,4\,(T-1) + b_2 \ln T$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1)\,(T-1)\,/\,4 - (b_2 \ln 5\,(T-1))\,/\,4 + b_2 \ln T$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1)\,(T-1)\,/\,4 + b_2\,(\ln T - \ln 5\,(T-1)\,/\,4)$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + (\hat{r}_5 - \hat{r}_1)\,(T-1)\,/\,4 + (2\,\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - \hat{r}_9)\,/\,1{,}021651\,(\ln T - \ln 5\,(T-1)\,/\,4)$$
$$\hat{r}_T = \hat{r}_1 + \hat{r}_5\,(T-1)\,/\,4 - \hat{r}_1\,(T-1)\,/\,4 + 2\,\hat{r}_5 - \hat{r}_1 - \hat{r}_9\,(\ln T - 0{,}40236\,(T-1))\,/\,1{,}021651$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = {} & \hat{r}_1 - \hat{r}_1\,(T-1)\,/\,4 - \hat{r}_1\,(\ln T - 0{,}40236\,(T-1))\,/\,1{,}021651 \\ & + \hat{r}_5\,0{,}25\,(T-1) + 2\,\hat{r}_5\,(\ln T - 0{,}40236\,(T-1))\,/\,1{,}021651 \\ & - \hat{r}_9\,(\ln T - 0{,}40236\,(T-1))\,/\,1{,}021651\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = {} & \hat{r}_1 - 0{,}25\,\hat{r}_1\,(T-1) - \hat{r}_1 \ln T\,/\,1{,}021651 + \hat{r}_1\,0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651 \\ & + 0{,}25\,\hat{r}_5\,(T-1) + 2\,\hat{r}_5 \ln T\,/\,1{,}021651 - 2\,\hat{r}_5\,0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651 \\ & - \hat{r}_9 \ln T\,/\,1{,}021651 + \hat{r}_9\,0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = {} & \hat{r}_1\,(1 - 0{,}25\,(T-1) - \ln T\,/\,1{,}021651 + 0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651) \\ & + \hat{r}_5\,(0{,}25\,(T-1) + 2 \ln T\,/\,1{,}021651 - 2 \cdot 0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651) \\ & + \hat{r}_9\,(-\ln T\,/\,1{,}021651 + 0{,}40236\,(T-1)\,/\,1{,}021651)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = {} & \hat{r}_1\,(1 - 0{,}25\,T + 0{,}25 - 0{,}9788078 \ln T + 0{,}393833\,(T-1)) \\ & + \hat{r}_5\,(0{,}25T - 0{,}25 + 1{,}9576160 \ln T - 0{,}787665\,(T-1)) \\ & + \hat{r}_9\,(-0{,}9788078 \ln T + 0{,}393833\,(T-1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = {} & \hat{r}_1\,(0{,}856167 + 0{,}143833\,T - 0{,}9788078 \ln (T)) \\ & + \hat{r}_5\,(0{,}537665 - 0{,}537665\,T + 1{,}9576160 \ln (T)) \\ & + \hat{r}_9\,(-0{,}393833 + 0{,}393833\,T - 0{,}9788078 \ln (T))\end{aligned}$$

Ersetzen der Renditen $\hat{r}_1$, $\hat{r}_5$ und $\hat{r}_9$ durch die Indikatoren NIV, STE und KRÜ (auf die Indexierung der Indikatoren mit K wird verzichtet.)

$$NIV = \hat{r}_1$$

$$STE = \frac{\hat{r}_9 - \hat{r}_1}{8} \qquad \text{bzw.: } \hat{r}_9 = NIV + 8\ STE$$

$$KRÜ = \hat{r}_5 - \hat{r}_1 - 4\ STE \qquad \text{bzw.: } \hat{r}_5 = NIV + KRÜ + 4\ STE$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = &\ \hat{r}_1\ (0{,}85617 + 0{,}14383\ T - 0{,}978808\ \ln(T))\\ &+ \hat{r}_5\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln(T))\\ &+ \hat{r}_9\ (-0{,}39383 + 0{,}39383\ T - 0{,}978808\ \ln(T))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = &\ NIV\ (0{,}85617 + 0{,}14383\ T - 0{,}978808\ \ln(T))\\ &+ (KRÜ + NIV + 4\ STE)\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln(T))\\ &+ (NIV + 8\ STE)\ (-0{,}39383 + 0{,}39383\ T - 0{,}978808\ \ln(T))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_T = &\ (0{,}85617\ NIV + 0{,}14383\ T\ NIV - 0{,}978808\ \ln(T)\ NIV)\\ &+ (0{,}53767\ NIV - 0{,}53767\ T\ NIV + 1{,}957616\ \ln(T)\ NIV)\\ &+ (-0{,}39383\ NIV + 0{,}39383\ T\ NIV - 0{,}978808\ \ln(T)\ NIV)\\ &+ (0{,}53767 \cdot 4\ STE - 0{,}53767\ T\ 4\ STE + 1{,}957616\ \ln(T)\ 4\ STE)\\ &+ (-0{,}39383 \cdot 8\ STE + 0{,}39383\ T\ 8\ STE - 0{,}978808\ \ln(T)\ 8\ STE)\\ &+ KRÜ\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln(T))\end{aligned}$$

$$\hat{r}_T = NIV - STE + STE\ T + KRÜ\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln(T))$$

$$\hat{r}_T = NIV + STE(T-1) + KRÜ\ (0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616\ \ln(T))$$

Ersetzen der Indikatoren STE und KRÜ durch STE_{ne} und $KRÜ_{ne}$ (auf die Indexierung der Indikatoren mit K wird verzichtet.)

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + KRÜ (0,53767 - 0,53767 T + 1,957616 ln (T))

<u>Def.:</u> STE = STE_{ne} + 0,00524367 - 0,057760 NIV
KRÜ = $KRÜ_{ne}$ + 0,00054836 + 2,215452 STE
<u>Def.:</u> D = 0,537665 - 0,537665 T + 1,957616 ln T

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + KRÜ D
$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + ($KRÜ_{ne}$ + 0,00054836 + 2,215452 STE) D
$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + (0,00054836 + 2,215452 STE) D + $KRÜ_{ne}$ D

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + 0,00029483 - 0,00029483 T + 0,00107349 ln T + 1,191170 STE - 1,191170 T STE + 4,337004 ln T STE + $KRÜ_{ne}$ D

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T-1) + 0,00029483 - 0,00029483 T + 0,00107349 ln T + STE (1,191170 - 1,191170 T + 4,337004 ln T) + $KRÜ_{ne}$ D

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (T - 1 + 1,191170 - 1,191170 T + 4,337004 ln T) + 0,00029483 - 0,00029483 T + 0,00107349 ln T + $KRÜ_{ne}$ D

<u>Def.:</u> X = 0,00029483 - 0,00029483 T + 0,00107349 ln T + $KRÜ_{ne}$ D

$\hat{P}_T$ = NIV + STE (0,191170 - 0,191170 T + 4,337004 ln T) + X

<u>Def.:</u> C = 0,191170 - 0,191170 T + 4,337004 ln T

$\hat{P}_T$ = NIV + STE C + X
$\hat{P}_T$ = NIV + (STE_{ne} + 0,00524367 - 0,05776 NIV) C + X
$\hat{P}_T$ = NIV + (0,00524367 - 0,05776 NIV) C + STE_{ne} C + X

$\hat{P}_T$ = NIV + 0,00100243 - 0,01104 NIV - 0,00100243 T + 0,01104 NIV T + 0,02274183 ln T - 0,25051 NIV ln T + STE_{ne} C + X

$\hat{P}_T$ = 0,00100243 - 0,00100243 T + 0,02274183 ln T + STE_{ne} C + X + NIV (0,988957 + 0,01104 T - 0,25051 ln T)

<u>Def.:</u> B = 0,988957 + 0,01104 T - 0,25051 ln T

$\hat{P}_T$ = 0,00029483 - 0,00029483 T + 0,00107349 ln T + $KRÜ_{ne}$ D + 0,00100243 - 0,00100243 T + 0,02274183 ln T + STE_{ne} C + NIV B

$\hat{P}_T$ = 0,00129727 - 0,00129727 T + 0,02381532 ln T + $KRÜ_{ne}$ D + STE_{ne} C + NIV B

<u>Def.:</u> A = 0,00129727 - 0,00129727 T + 0,02381532 ln T

$\hat{P}_T$ = A + NIV B + STE_{ne} C + $KRÜ_{ne}$ D

<u>mit:</u> A = 0,00129727 - 0,00129727 T + 0,02381532 ln T
B = 0,988957 + 0,011040 T - 0,250510 ln T
C = 0,191170 - 0,191170 T + 4,337004 ln T
D = 0,537665 - 0,537665 T + 1,957616 ln T

5.3. Aufgaben aus alten Klausuren und Lösungshinweise

Die laufend aktualisierten Aufgaben und Lösungshinweise stehen über das Internet bereit.

5.4. Hinweise zur Examensvorbereitung "Wertpapiermanagement"

Im Rahmen der Vorbereitung zum Examen werden häufig die Fragen gestellt, welche der im Skript und in der Vorlesung behandelten Inhalte "examensrelevant seien" und welche Formeln man "(auswendig) wissen müsse". Grundsätzlich ist der gesamte im Skript enthaltene und in der Vorlesung "Wertpapiermanagement" behandelte Stoff relevant (von Abgrenzungen im Rahmen der Vorlesung sei hier abgesehen). Selbstverständlich ist es aber weder sinnvoll noch möglich, jedes Detail und jede Formel zu wissen, geschweige denn, auswendig zu lernen. Hingegen sind andere Formeln so grundlegend, daß eine Herleitung aus dem finanzmathematisch-logischen Zusammenhang möglich sein sollte. Für einige Sachverhalte gilt darüber hinaus, daß - u.a. aufgrund technischer und zeitlicher Beschränkungen - im Examen "lediglich" das Prinzip relevant sein kann. Hier kann es also erforderlich sein, auf der Grundlage von Zwischenergebnissen weiterrechnen und argumentieren zu können. Grundsätzlich kommt es eher darauf an, die wesentlichen finanzwirtschaftlichen Zusammenhänge zu verstehen und interpretieren zu können als die Details auswendig zu lernen. **Um das Gesagte zu konkretisieren, werden im weiteren einige ausgrenzende Beispiele genannt.**

Auf der Grundlage des ersten Kapitels sollten Sie einen Überblick über die Finanzmärkte und die Finanztitel gewinnen. Ein Erlernen der Details erscheint wenig sinnvoll.

Selbstverständlich ist nicht relevant, wo welche Verfahren der Zinsberechnung eingesetzt werden (vgl. die Tabelle AIBD, Moosmüller usw.). Bezüglich dieser vier Arten der Zinsberechnung brauchen Moosmüller und Braeß/Fangmeyer im Examen nicht gerechnet werden zu können.

Zeitraubende Regressionsanalysen (beispielsweise zur Ermittlung der optimalen Hedge Ratio, zur Schätzung der Renditenstrukturkurve, zur Schätzung der Parameter für die Portfoliotheorie, das CAPM, das Marktmodell, das Indexmodell und die APT) werden im Examen selbstverständlich nicht erwartet. Ggf. würden Zwischenergebnisse vorgegeben, auf deren Grundlage dann Folgerechnungen vorzunehmen wären.

Die mathematische Überführung der Renditenstrukturkurve der Deutschen Bundesbank in die auf der Grundlage ökonomisch interpretierbarer Indikatoren NIV usw. braucht nicht geleistet zu werden (vgl. den Anhang). Im Examen würden vorgegeben:

$$\hat{r}_{T,K} = NIV_K + STE_K\,(T - 1) + KRÜ_K\,(0{,}53767 - 0{,}53767\ T + 1{,}957616 \ln T)$$

$$STE_{ne,\bar{K}} = STE_{\bar{K}} - 0{,}00524367 + 0{,}05776\ NIV_{\bar{K}} = -0{,}0000272$$

$$KRÜ_{ne,\bar{K}} = KRÜ_{\bar{K}} - 0{,}00054836 - 2{,}215452\ STE_{\bar{K}} = -0{,}0035287$$

$$\hat{r}_{T,\bar{K}} = A + NIV_{\bar{K}}\,B + STE_{ne,\bar{K}}\,C + KRÜ_{ne,\bar{K}}\,D$$

mit:

$$A = 0{,}001297 - 0{,}001297\ T + 0{,}023815 \ln T$$
$$B = 0{,}988957 + 0{,}011040\ T - 0{,}250510 \ln T$$

$$C = 0{,}191170 - 0{,}191170\ T + 4{,}337004 \ln T$$
$$D = 0{,}537665 - 0{,}537665\ T + 1{,}957616 \ln T$$

$$GEM_{er} = -0{,}0045 + NIV_{\bar{K}}\ 0{,}99 + STE_{ne,\bar{K}}\ (-1{,}88) + KRÜ_{ne,\bar{K}}\ (-2{,}08)$$

Die Berechnung des Wertes der Option im Rahmen der Bewertung von Bundesschatzbriefen ist nicht relevant.

Die Berechnung des Wertes von FRA und die Abwicklung von FRA sind lediglich in Grundzügen relevant. Gegeben würden im Examen die Formeln:

$$R_{FRA} = \frac{R_L\ L_L - R_K\ L_K}{(L_L - L_K)\left(1 + \frac{R_K\ L_K}{360}\right)}$$

$$SetSum = \frac{(R_M - R_{FRA})\ L_{FRA}\ KB}{360}\ \frac{1}{1 + \frac{R_M\ L_{FRA}}{360}}$$

(Nur) Das Prinzip zur Berechnung der CTD-Anleihe sollte wiedergegeben werden können. Bezüglich des BUND-Futures würden folgende Formeln gegeben:

VM = Kontraktzahl · Kursdifferenz in Ticks (Pfennige) · Wert pro Tick (DM 25,--)

$$PF = \frac{1}{1{,}06^{\frac{m}{12}}}\left(\frac{K}{6}\left(1{,}06 - \frac{1}{1{,}06^{i}}\right) + \frac{1}{1{,}06^{i}}\right) - \frac{K\left(1 - \frac{m}{12}\right)}{100}$$

Bezüglich der Immunisierung eines Depots festverzinslicher Wertpapiere mittels der Duration sollte (nur) das Prinzip der Ermittlung der Duration-Gap und in der Folge der Umschichtungsmaßnahmen verstanden worden sein.

Das Konzept zur Immunisierung eines Depots mit Zins-Futures auf der Grundlage empirischer und modelltheoretischer Daten braucht (nur) vom Prinzip beschrieben werden zu können.

Gegeben würden im Rahmen der Portfoliotheorie die Formeln:

$$w_{1,MVP} = \frac{\sigma_{r_2}^2 - \sigma_{r_1}\ \sigma_{r_2}\ \rho_{r_1 r_2}}{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2 - 2\ \sigma_{r_1}\ \sigma_{r_2}\ \rho_{r_1 r_2}}$$

$$0 = w_1^2 + w_1\ \frac{2\ \sigma_{r_1 r_2} - 2\ \sigma_{r_2}^2}{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2 - 2\ \sigma_{r_1 r_2}} + \frac{\sigma_{r_2}^2 - \sigma_{r_P}^2}{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2 - 2\ \sigma_{r_1 r_2}}$$

$$w_1 = \frac{-\theta\ (\mu_{r_1} - \mu_{r_2}) - 2\ \sigma_{r_2}^2 + 2\ \sigma_{r_1 r_2}}{-2\ \sigma_{r_1}^2 - 2\ \sigma_{r_2}^2 + 4\ \sigma_{r_1 r_2}}$$

$$w_1 = \frac{-\theta\,(\mu_{r_1} - \mu_{r_2})}{-2\,\sigma^2_{r_1}}$$

Aufwendige Matrizenoperationen sind nicht erforderlich; invertierte Matrizen würden beispielsweise vorgegeben. Vorgegeben würden auch:

$$\mu_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I} c_i\,\mu_{r_i} = (c_1 \;\dots\; c_I)\begin{pmatrix}\mu_{r_1}\\ .\\ .\\ .\\ \mu_{r_I}\end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{r_{MVP}} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} c_i\,c_j\,\sigma_{r_i r_j} = (c_1 \;\dots\; c_I)\begin{pmatrix}\sigma_{r_1 r_1} & \dots & \sigma_{r_1 r_I}\\ . & & .\\ . & & .\\ . & & .\\ \sigma_{r_I r_1} & \dots & \sigma_{r_I r_I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ .\\ .\\ .\\ c_I\end{pmatrix}$$

$$KE = \sum_{i=1}^{I} \mu_{r_i}\,d_i = (\mu_{r_1} \;\dots\; \mu_{r_I})\begin{pmatrix}d_1\\ .\\ .\\ .\\ d_I\end{pmatrix} = (\mu_{r_1} \;\dots\; \mu_{r_I})\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1I}\\ . & & .\\ . & & .\\ . & & .\\ a_{I1} & \dots & a_{II}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{r_1}\\ .\\ .\\ .\\ \mu_{r_I}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}w_1\\ .\\ .\\ .\\ w_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ .\\ .\\ .\\ c_I\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}d_1\\ .\\ .\\ .\\ d_I\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}d_1\\ .\\ .\\ .\\ d_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1I}\\ . & & .\\ . & & .\\ . & & .\\ a_{I1} & \dots & a_{II}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{r_1}\\ .\\ .\\ .\\ \mu_{r_I}\end{pmatrix}$$

$$\mu_{r_P} = \mu_{r_{MVP}} + \Theta\,KE$$

$$\sigma^2_{r_P} = \sigma^2_{r_{MVP}} + \theta^2\,\frac{KE}{2}$$

Hinsichtlich der allgemeinen Faktormodelle würden folgende Formeln gegeben:

$$\sigma_{r_i r_j} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

$$\sigma_{r_i r_j} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{jk}\, \sigma^2_{F_k} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1 \text{ für } k \neq l}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_i} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{il}\, \sigma_{F_k F_l} + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2 \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_i} = \sum_{k=1}^{K} \beta^2_{ik}\, \sigma^2_{F_k} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1 \text{ für } l \neq k}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{il}\, \sigma_{F_k F_l} + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2 \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_p} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i} \right)$$

$$\sigma^2_{r_p} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j\, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{jk}\, \sigma_{F_k \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_p} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jk}\, \sigma^2_{F_k} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1 \text{ für } l \neq k}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \beta_{jl}\, \sigma_{F_k F_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i\, w_j\, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} w_i\, w_j\, \beta_{ik}\, \sigma_{F_k \varepsilon_j}$$

$$\sigma_{r_i r_j} = \beta_i\, \beta_j\, \sigma^2_F + \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + \beta_i\, \sigma_{F \varepsilon_j} + \beta_j\, \sigma_{F \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_i} = \beta^2_i\, \sigma^2_F + \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2\, \beta_i\, \sigma_{F \varepsilon_i}$$

$$\sigma^2_{r_p} = \sigma^2_F \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j\, \beta_i\, \beta_j + \sum_{i=1}^{I} w_i^2\, \sigma^2_{\varepsilon_i} + 2 \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} w_i\, w_j\, \sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} + 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} w_i\, w_j\, \beta_i\, \sigma_{F \varepsilon_j}$$

Die Anteile/Gewichte für Arbitrage- und Mimicking Portefeuilles können in einem Examen selbstverständlich nicht berechnet werden. Die für die Faktorenanalyse relevanten Werte können ebenso nicht ohne PC-Unterstützung bestimmt werden.

Die Modelle zur Optionswertbestimmung brauchen mathematisch nicht hergeleitet werden zu können. Folgende Formeln würden gegeben:

$$(4a) \qquad n = \frac{K_{1u} - K_{1d}}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{(u - d)\, K_0}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{\Delta K_1}{\Delta C_1}$$

$$(4b) \quad n = \frac{(u - d)\, K_0}{C_{1u} - C_{1d}} = \frac{(u - d)\, K_0}{\max[0;\, uK_0 - B] - \max[0;\, dK_0 - B]}$$

$$(8) \quad C_0 = \frac{p'\, \max[0;\, uK_0 - B] + (1 - p')\, \max[0;\, dK_0 - B]}{(1+r)^t}$$

$$mit \;\; p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$

$$C_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p'^{j} (1 - p')^{n-j} \max[0;\ u^j d^{n-j} K_0 - B]}{(1+r)^t}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\, j!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

$$n = -\frac{(u-d)\, K_0}{\max[0;\ B - uK_0] - \max[0;\ B - dK_0]}$$

$$p_0 = \frac{p' \max[0;\ B - uK_0] + (1 - p') \max[0;\ B - dK_0]}{(1+r)^t}$$

$$mit \quad p' = \frac{(1+r)^t - d}{u - d}$$

$$C = K\, N(d_1) - B\, e^{-r_k t}\, N(d_2)$$

$$mit \quad d_1 = \frac{\ln\frac{K}{B} + (r_k + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$e = 2{,}71828...$$

$$p = B\, e^{-r_k t}\, N(d_2) - K\, N(d_1)$$

$$mit \quad d_1 = \frac{\ln\frac{B}{K} - (r_k + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{t}$$

Die Formeln im Zusammenhang mit der Rentenrechnung würden vorgegeben. Es mag allerdings sinnvoll sein, die Ausgangsform

$$P_0 = RZ_n \frac{(1+r)^T - 1}{r\,(1+r)^T}$$

zu kennen, da diese bestimmte Rechnungen vereinfacht.

Folgende Formeln im Rahmen der Statistik würden gegeben:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\beta = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \mu_x \mu_y}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \mu_x^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \mu_x \mu_y}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \mu_x^2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 + b_4 d^4 + b_5 d^5)$$

b_1 = 0,319381530; b_2 = -0,356563782; b_3 = 1,781477937
b_4 = -1,821255978; b_5 = 1,330274429; d = 1 /(1 + 0,2316419 x)

Die in dieser "Ausgrenzung" nicht genannten Aspekte sind grundsätzlich examensrelevant.

Diese "Ausgrenzung" gilt nur für die Veranstaltung "Wertpapiermanagement".

Darüberhinaus sind selbstverständlich auch die Hinweise in der Vorlesung und der dort behandelte ggf. über das Skript hinausgehende Stoff examensrelevant!

IFBG-STUDIEN

HERAUSGEBER: PROF. DR. WOLFGANG BENNER

Nr. 1/Apr 1995	**Patrick Navatte/Marco Wilkens** Bewertung und Eigenschaften von Rainbow-Optionen
Nr. 2/Jul 1995	**Gerhard Emmerich/Peter Reus [vergriffen]** Zur Vorsorge für „allgemeine Bankrisiken". Handelsrechtliche Gestaltungswahlrechte und ökonomische Implikationen
Nr. 3/Jun 1996	**Peter Reus/Martin Prinz [vergriffen]** Banken und elektronische Märkte. Entwicklungen und Perspektiven unter besonderer Berücksichtigung des Internet
Nr. 4/Dez 1996	**Marco Wilkens/Frank Borrmann** Darstellung und Systematisierung jüngerer Finanzinnovationen am deutschen Geld- und Kapitalmarkt
Nr. 5/Feb 1997	**Tobias Schmidt/Marco Wilkens** Einfluß von Inflation und Besteuerung auf Investitionsentscheidungen mit der Kapitalwertmethode
Nr. 6/Mai 1997	**Peter Reus/Jochen Bernd Kuhlhoff** Konzepte für den Internet-Zahlungsverkehr Überblick und Vergleich
Nr. 7/Mrz 1998	**Peter Reus/Bernhard Vollmar** Digitales Geld und elektronischer Geldtransfer im Internet
Nr. 8/Mrz 1998	**Marco Wilkens/Reinhard Müller-Schotte** Systematisierung und Darstellung sogenannter „Renditeanomalien" deutscher Aktien
Nr. 9/Sep 1998	**Jonny Holst** Risikomanagement im Lichte des KonTraG
Nr. 10/Dez 1998	**Jonny Holst/Olaf Wall** Realoptionen - Zur kapitalmarkttheoretischen Einzelbewertung und Analyse grundsätzlicher Interaktionen

Nr. 11/Sep 1999 **Marco Wilkens/Armin Graßhoff**
Das Underpricing-Phänomen bei Aktienneuemissionen – Systematisierung von Erklärungsansätzen und Überblick über empirische Untersuchungen

Nr. 12/Nov 1999 **Jonny Holst/Stephan Jortzik**
Zur arbitragefreien Bewertung von Volatilitätsfutures – Theoretische und empirische Analysen anhand des VOLAX

Nr. 13/Apr 2000 **Marco Wilkens/Hendrik Scholz**
Gesamtrisiko versus Marktrisiko in der Performancemessung – Für individuelle Anlageentscheidungen sind häufig beide Risikomaße relevant

Nr. 14/Mai 2001 **Gerhard Emmerich/Bernhard H. Vollmar**
Finanzmärkte und Vertrauen –
Aufgaben und Herausforderungen für die Institution der Wirtschaftsprüfung

Die IFBG-Studien (ISSN 1431-8210) sind ausschließlich über das Sekretariat des Instituts für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft (Anschrift siehe unten) für jeweils 10 € (zzgl. Versandkosten) zu erhalten.

Ein Bestellformular für Bestellungen per Brief oder Fax finden Sie unter der Adresse: http://www.gwdg.de/~ifbg/ifbgstud.html zum Ausdrucken.
Sie können auch per e-mail: ifbg@uni-goettingen.de bestellen.

Anschrift:
Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft, Platz der Göttinger Sieben 5, 37073 Göttingen
Telefon: 0551/39-7262; **Fax:** 0551/39-7665.