OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
SAFIRA NUR AULIA PUTRI
NIM. 17610101

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
SAFIRA NUR AULIA PUTRI
NIM. 17610101

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Safira Nur Aulia Putri
NIM. 17610101

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 24 Juni 2022.

Dosen Pembimbing I

Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Dosen Pembimbing II

Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL YANG DIPERUMUM PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Safira Nur Aulia Putri
NIM. 17610101

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 27 Juni 2022

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Ach. Nasichuddin, M.A.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Safira Nur Aulia Putri
Nim	: 17610101
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains Dan Teknologi
Judul Skripsi	:Operator Integral Fraksional yang diperumum pada Ruang Morrey yang diperumum

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau fikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau fikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Juni 2022

Yang membuat pernyataan

Safira Nur Aulia Putri

NIM.17610101

MOTO DAN PERSEMBAHAN

‘’Tidak ada hal yang sia sia yang ada adalah pengalaman hidup’’

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Heri Soedarsono dan Alm. Rachmad Arijadi, ibu Nurahmawati dan Siti Aisyah selaku orang tua yang saya sayangi dan saya cintai dan almh. mba uti saya, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, materi dan kasih sayang yang tak ternilai, serta kakak adek keluarga besar dan teman-teman terdekat yang selalu membantu, mengirimkan dukungan, semangat serta doa terbaik kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Operator Integral Fraksional yang diperumum pada Ruang Morrey yang diperumum" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia dari zaman jahiliah menuju zaman islamiah.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak menerima bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu melalui halaman ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M. A. , selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan banyak ilmu, arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku Dosen Pembimbing II yang banyak memberikan ilmu, arahan dan masukan kepada penulis.
6. Semua Dosen dan civitas akademik Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim .
7. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu mengirimkan doa terbaik kepada penulis.
8. Semua teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan, yang telah ikut serta membantu menyelesaikan penyusunan skripsi, baik dukungan moril maupun materil.

   Penulis sadar tidak bisa memgungkapkan apapun selain ucapan terima kasih dan doa semoga Allah membalas kebaikan jasa dengan balasan yang sebaikbaiknya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, baik bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 27 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Putri, Safira Nur Aulia. 2022. **Operator Integral Fraksional yang diperumum pada Ruang Morrey yang Diperumum**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Operator Integral Fraksional, Ruang Morrey

Operator integral fraksional atau operator Riesz merupakan operator terbatas dari ruang Lebesgue. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional. Ruang morrey adalah kumpulan dari fungsi anggota bentuk perumuman dari ruang Lebesgue. Pada penelitian ini, akan membahas mengenai operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum. Pembuktian tersebut akan dilakukan dengan menggunakan dipartisi. Dapat disimpulkan bahwa operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum pada teorema 1 $\left\|T_\rho f\right\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ dan teorema 2 $\left|T_\rho f(x)\right|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$.

ABSTRACT

Putri, Safira Nur Aulia. 2022. **Generaized Fractional Integral Operators on a Generalized Morrey Space**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, 'Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Fractional Integral Operator, Morrey Space.

The fractional integral operator or Riesz operator is a finite operator of the Lebesgue space. This fractional integral operator maps any real-valued function into the integral form of the fractional integral function. Morrey space is a collection of general form member functions of Lebesgue space. In this study, we will discuss the generalized fractional integral operator on a generalized Morrey space. The proof will be done using partitioned. It can be concluded that the generalized fractional integral operator on Morrey space generalized to Theorem 1 $\left\|T_\rho f\right\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ and Theorems 2 $\left|T_\rho f(x)\right|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$.

مستخلص البحث

فوتري, سافيرا نور اوليا. 2022. عدم المساواة من النوع الضعيف لمشغلي التكامل الجزئي في فضاء موري معمم للمساحات المترية. البحث العلمى. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، بمالانج. المشرف: (1) الدكتور خير الرحمن, الماجستير. (2) احمد ناصح الدين , الماجستير

الكلمات المفتاحية: المشغل التكاملي الجزئي، موري سبيس.

مشغل التكامل الجزئي أو مشغل Riesz هو مشغل محدود لمساحة Lebesgue. يقوم مشغل التكامل الكسري هذا بتخطيط أي دالة ذات قيمة حقيقية في الشكل المتكامل للدالة التكاملية الكسرية Morrey space . هي مجموعة من وظائف أعضاء الشكل العام لفضاء Lebesgue. في هذه الدراسة، سنناقش عامل التكامل الجزئي المعمم على مساحة موري المعممة .سيتم إجراء الدليل باستخدام التقسيم .يمكن استنتاج أن عامل التكامل الجزئي المعمم على فضاء موري معمم على النظرية 1 $\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \le C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ و النظرية 2 $|T_\rho f(x)|^q \le CMf(x)^p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator integral fraksional adalah bagian dari potensial Riesz. Operator integral fraksional dikenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Operator integral fraksional merupakan operator terbatas dari ruang Lebesgue. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional.

Pada Penelitian ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum.

Operator $I_\alpha f$ yang memetahkan sebarang fungsi ernilai real ke dalam bentuk integral dari pembagian fungsi tersebut.

Teorema Hardy-Littlewood-Sobolev telah dibuktikan pada integral fraksional dalam ukuran ganda (*doubling*) maupun tak ganda (*non-doubling*), di mana ruang tak homogen adalah ruang $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan ukuran tak negatif μ yang memenuhi kondisi *growth* $\left(\mu \in GC(n)\right)$. Ukuran μ dikatakan memenuhi kondisi *growth* apabila terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk semua bola $B(x,r), \mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^n$.

Operator integral fraksional mengumpamakan sebuah ketaksamaan dalam proses penyelesaiannya. Apabila syarat keterbatasan operator integral fraksional sudah terpenuhi, maka akan menghasilkan suatu kesimpulan dari pembuktian teorema di ruang tertentu. Dalam hal ini mengibaratkan bahwa manusia memiliki keterbatasan. Keterbatasan tersebut bisa dalam berbagai hal seperti keterbatasan pada ilmu pengetahuan maupun kelemahan diri. Allah SWT memiliki kemampuan tak terbatas, sehingga manusia diciptakan penuh dengan keterbatasan. Tujuan diciptakannya manusia menjadi makhluk yang memiliki keterbatasan dan kelemahan adalah supaya manusia memiliki kesadaran penuh bahwa tidak ada yang bisa menandingi kekuasaan Allah SWT dan supaya manusia bisa kembali pada Allah SWT dengan mendekatkan diri kepadanya. Keterbatasan ini dalam Alqur'an memiliki keterkaitan dengan surat An-Nisa ayat 28:

"*Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, karena manusia diciptakan(bersifat) lemah.*"

Ayat di atas menunjukkan bahwasanya manusia diciptakan dengan bersifat lemah (keterbatasan) dalam melakukan sesuatu hal antara lain seperti kemampuan, ilmu, dan lain-lainnya. Allah menciptakan sifat lemah (keterbatasan) karena Allah tidak akan membebani manusia di atas kemapuannya, maka dari itu Allah akan selalu memberi keringanan atau jalan keluar terhadap hambanya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini, yaitu "bagaimana operator fraksional yang diperumum pada ruang Morrey diperumum?"

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan operator fraksional yang diperumum pada ruang Morrey diperumum.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu untuk mengetahui operator fraksional yang diperumum pada ruang Morrey diperumum.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan uraian masalah yang disebutkan, penulis merasa perlu untuk membatasi masalah agar pembahasan tidak menyimpang dan meluas. Adapun batasan masalahnya yaitu operator fraksional yang diperumum pada ruang Morrey diperumum.

1.6 Definisi Istilah

Terdapat beberapa definisi istilah operator integral fraksional dan ruang Morrey yang diperumum. Operator integral fraksional diperkenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. f adalah fungsi terukur bernilai real pada $X, n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Operator I_α yang memetakan fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: X \to \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_x \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(x) d\mu(y), \;\; x \in X$$

Berikutnya, ruang Morrey yang diperumum Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\phi \in \mathcal{G}p$, ruang Morrey yang diperumum $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi (Ifronika, 2018).

$$\|f\| \supseteq \mathcal{M}_\phi^p = \sup_{a\in\mathbb{R}, r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue berisi kelas fungsi yang saling ekuivalen sedemikian sehingga norm fungsi itu terbatas di ruang Lebesgue terbatas.

Definisi 2.1

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ termasuk ruang fungsi, misalkan $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan terukur dan ada sebarang nilai $1 \leq p < \infty$ yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L^p}$ merupakan ruang bernorma, dengan

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(Limanta, 2014)

Definisi 2.2

ruang Lebesgue lemah $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty$$

Untuk setiap subhimpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$. (Mu'tazili,2019)

2.2 Ruang Lebesgue Lokal

Ruang Lebesgue lokal $L^p_{loc} = L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ adalah kumpulan kelas-kelas ekeuivalen f sedemikian sehingga untuk setiap sub himpunan kompak $s \in \mathbb{R}^n$ berlaku $\int_S |f|^p < \infty$. (Bartle,1995).

2.3 Ruang Morrey

Ruang Morrey merupakan kumpulan dari fungsi anggota bentuk perumunan dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.3

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan semua fungsi $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$|B(a,r)|$ meyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di a dan berjari-jari r. Jika p=q, maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$. (Mu'tazili, 2019)

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} |B(a,r)|^{0} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{L^p}\end{aligned}$$

2.4 Perumum Ruang Morrey

Ruang Morrey yang diperumum dinotasikan sebagai $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$. Sebelum membahas mengenai definisi ruang Morrey yang diperumum, terlebih dahulu di misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\mathcal{G}p$ adalah himpunan semua fungsi $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ sedimikian sehingga ϕ hampir menurun yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\phi(r) \geq C\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$ dan $r^{\frac{n}{p}}\phi$ hampir naik (yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $r^{\frac{n}{p}}\phi(r) \leq Cs^{\frac{n}{p}}\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$). Perhatian jika $\phi \in \mathcal{G}p$, maka ϕ memenuhi *doubling condition*, yang berarti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\frac{1}{c} \leq \frac{\phi(r)}{\phi(s)} \leq C$ ketika $1 \leq \frac{r}{s} \leq 2$.

Definisi 2.4

Misalkan $1 \leq \mathrm{p} < \infty$ dan $\phi \in \mathcal{G}p$, ruang Morrey yang diperumum $\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ yang memenuhi (Ifronika, 2018).

$$\|f\| \supseteq \mathcal{M}_{\phi}^{p} = \sup_{a \in \mathbb{R}, r > 0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

2.5 Operator Integral Fraksional

Operator integral fraksional diperkenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Operasi integral fraksional itu sendiri didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $X, n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < \mathrm{n}$. Operator I_α yang memetakan fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: X \to \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(X) := \int_x \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(X) d\mu(y), \ \ x \in X$$

Adalah operator integral fraksional (Gunawan, H, 2004: 1).

2.6 Operator Maksimal Hardy-Littlewood

Pembuktian keterbatasan perumum operator integral fraksional diperumum membuktikan operator maksimal yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.6

Operator maksimal Hardy-Littlewood, dilambangkan M^n

$$M^n f(x) := \sup_{B_{r>0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y)$$

Dalam hal ini $B(x,r)$ adalah bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$ dan $\mu\big(B(x,r)\big)$ adalah ukuran Lebesgue (Eridani, dkk, 2004).

2.7 *Doubling Condition*

Salah satu kondisi dalam pengerjaan operator integral fraksional yaitu kondisi *doubling*. didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.7

Misalkan $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dan asumsikan φ memenuhi syarat berikut yaitu terdapat $C_1 > 1$ sedemikian hingga untuk setiap $s, v > 0$ berlaku:

$$\frac{1}{C_1} \le \frac{\phi(s)}{\phi(v)} \le C_1 \text{ , untuk } s \in \left[\frac{v}{2}, 2v\right]$$

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)}{s} ds \le C_1 \phi(v)$$

Maka fungsi ϕ dikatakan memenuhi kondisi *doubling*. (Menurut Eridani, dkk, 2004).

2.8 *Growth Condition*

Biarkan μ menjadi ukuran Borel positif pada $\mathbb{R}^n$. Kita katakan bahwa ruang $(\mathbb{R}^n, \mu)$ adalah tidak homogen jika μ memenuhi kondisi pertumbuhan orde n dengan $0 \leq n \leq d$, yaitu konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga

$$\mu\big(B(a,r)\big) \leq C\, r^n$$

untuk sembarang bola $B(a,r)$ yang berpusat di $a \in \mathbb{R}^n$ dengan radius $r > 0$.

2.9 Ketaksamaan Chybesev

Ketaksamaan yang membahas tentang operator integral fraksional I_α adalah ketaksamaan Chebyshev. Teorema mengenai ketaksamaan Chebyshev sebagai berikut:

Teorema 2.9 Misalkan μ adalah ukuran Borel pada $\mathbb{R}^n$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan yang terukur. Jika f adalah fungsi yang terintegralkan pada E, maka untuk setiap $\gamma > 0$ berlaku

$$\mu(\{x \in E :\ |f(x)| > \gamma\}) \leq \frac{1}{\gamma}\int_E |f(x)| d\mu(x)$$

Salah satu yang membahas ketaksamaan ini dalam buku (Royden, 2010).

2.10 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Qur'an/Hadist

Operator integral fraksional mengumpamakan sebuah keterbatasan dalam proses penyelesaiannya. Apabila syarat keterbatasan operator integral fraksional sudah terpenuhi, maka akan menghasilkan suatu kesimpulan dari pembuktian teorema di ruang tertentu. Dalam hal ini mengibaratkan bahwa manusia memiliki keterbatasan. Keterbatasan tersebut bisa dalam berbagai hal seperti keterbatasan pada ilmu pengetahuan maupun kelemahan diri. Allah SWT memiliki kemampuan tak terbatas, sedangkan manusia diciptakan penuh dengan keterbatasan. Tujuan diciptakannya manusia menjadi makhluk yang memiliki keterbatsan dan kelemahan adalah supaya manusia memiliki kesadaran penuh bahwa tidak ada yang bisa menandingi kekuasaan Allah SWT dan supaya manusia bisa kembali pada Allah SWT dengan mendekatkan diri kepada-nya. Keterbatasan ini dalam Alqur’an memiliki keterkaitan dengan surat An-Nisa’ ayat 28:

“*Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, karena manusia diciptakan(bersifat) lemah.*”

Ayat di atas menunjukkan bahwasanya manusia diciptakan dengan bersifat lemah (keterbatasan) dalam melakukan sesuatu hal antara lain seperti kemampuan, ilmu dan lain-lainnya. Allah menciptakan sifat lemah(keterbatasan) karena Allah tidak akan membebani manusia di atas kemapuannya, maka dari itu Allah akan selalu memberi keringanan atau jalan keluar terhadap hambanya.

2.11 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung Al-Qur’an/Hadist

Keterbatasan dalam kamus besar bahasa Indonesia diartikan sebagai keadaan terbatas, yakni suatu hal yang masih berada dalam suatu batasan yang memiliki batasan penyelesaiannya. Manusia memiliki keterbatasan dalam melakukan sesuatu hal, antara lain seperti kemampuan, ilmu pengetahuan dan lain-lainnya Keterbatasan adalah rahmat Allah SWT yang akan selalu ditemukan di setiap ciptaanNya.

Sebagaimana difirmankan dalam Al-Qur’an surat An-nisa ayat 28,

“*Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, karena manusia diciptakan(bersifat) lemah.*”

Pada ayat ini berdasarkan tafsir al-mukhtashar menjelaskan bahwa Allah memberikan keringanan syariat yang sudah ditetapkan untuk manusia. Allah tidak akan membebani manusia dengan sesuatu yang di luar kemampuan manusia karena Allah mengetahui sifat kelemahan manusia, baik dalam jasad maupun akhlaknya (Khalawaih, 2017). Manusia memiliki sifat terbatas dan lemah, salah satunya yaitu lemah dalam mengendalikan diri dalam melawan hawa nafsu. Oleh karena itu Allah memperbolehkan kepada mereka yang tidak sanggup membelanjakan perempuan merdeka untuk menikahi shamba sahaya. Maka dari itu manusia harus selalu menjaga dirinya dan selalu mendekatkan diri kepada Allah dan menjauhi larangan tersebut supaya tidak jatuh pada hal yang buruk seperti berzina dan lain sebagainya. Hal ini untuk membentengi manusia dari pengaruh setan dan hawa nafsu yang dapat menjerumuskannya. Manusia perlu membentengi diri dengam iman yang kuat karena manusia penuh dengan kelemahan.

Berdasarkan tafsir as-Sa’adi bahwa Allah memberikan keringanan pada hambanya yang memiliki kemampuan terbatas. Seperti halnya ketika manusia dalam masa kesulitan diperbolehkan memakan makanan yang tidak halal seperti halnya memakan bangkai bagi orang yang kelaparan, maka hukumnya menjadi halal. Allah juga memberikan keringanan atas beban yang dipikul oleh manusia (As-Sa'adi, 2014).

2.12 Kajian Topik dan Teori Pendukung

Penelitian ini dilakukan dengan cara penelitian kualitatif yang membutuhkan beberapa penelitian. Terdapat beberapa penelitian terkait topik judul yang telah diteliti sebelumnya. Salah satunya adalah Hendra Gunawan yang membahas tentang operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum. Dalam jurnal tersebut ada beberapa teorema yang digunakan di antaranya kondisi growth. Kondisi doubling merupakan ruang tak homogen yang terdefinisi jika μ memenuhi kondisi doubling yang di jelaskan pada definisi Misalkan ρ dan ϕ memenuhi kondisi doubling. Misalkan bahwa himpunan kosong surjektif dan memenuhi $\int_r^\infty \frac{\phi(t)^\rho}{t}dt \leq C\phi(r)^\phi$ dan

$$\phi(r)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}dt + \phi(r)\int_r^\infty \frac{\rho(t)\,\phi(t)}{t}dt \leq C\phi(r)^{p/q},$$

Untuk semua $r > 0$,

Maka terdapat $C_{p,q} > 0$ sedemikian hingga

$$\left\|T_\rho f\right\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$$

Dengan kata lain sebelum memuktikan teorema di atas perhatikan ahwa jika T_ρ terbatas dari $\mathcal{M}_{p,\phi}$ ke $\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}$, untuk $1 < p < q < \infty$.

Dengan catatan ρ memenuhi kondisi doubling maka untuk setiap bilangan bulat k dan $r > 0$ didapat

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}dt \sim \rho(2^k r).$$

Leih jauh lagi, berdasarkan kondisi doubling didapatkan

$$\rho(r) \leq C \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt,$$

Untuk semua $r > 0$,

Selanjutnya akan digunakan O.M.Hardy-Littlewood operator itu didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{B \in x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Diketahui Operator $\mathcal{M}$ bahwa terbatas pada L^p untuk $1 < p \leq \infty$ karena memenuhi kondisi doubling dan

$1 < p \leq \infty, \int_r^\infty \frac{\rho(t)\ \phi(t)}{t} dt \ \leq C\phi(r)^p$, untuk semua $r > 0$,

maka terdapat $C_p > 0$ sedemikian hingga

$$\|\mathcal{M}f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \leq C_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}},$$

Ini berarti bahwa M terbatas pada $\mathcal{M}_{p,\phi}$. pada pembuktian teorema di atas, C dinotasikan sebagai konstanta positif, yang nilainya bisa berbeda-beda untuk setiap barisnya.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

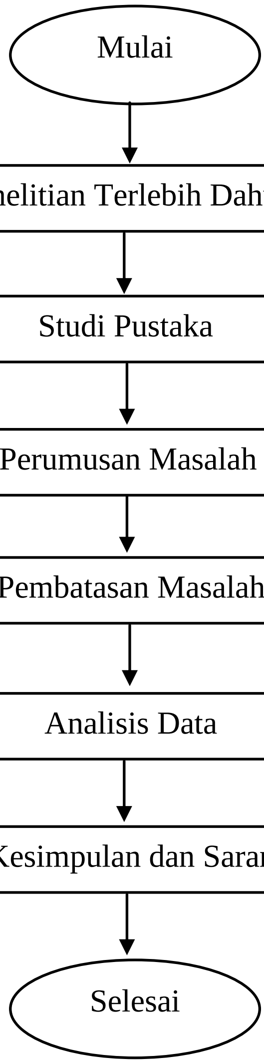
Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif adalah peneitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang di alami oleh subjek penelitian misalnya perilaku, persepsi, motivasi, tindakan, secara holistik, dan dengan cara deskripsi dalam bentuk kata-kata dan bahasa, pada suatu konteks khusus yang alamiah dan dengan memanfaatkan berbagi metode alamiah.

3.2 Pra Penelitian

Pada saat pra penelitian, langkah awal pada penelitian ini melakukan beberapa persiapan di antaranya dengan mencari beberapa literatur berupa buku, jurnal, dan beberapa referensi lainnya yang berkaitan dengan penelitian yang berkaitan. Kemudian mengajukan judul penelitian beserta pembimbing kepada program studi sehingga penelitian ini bisa dilakukan dengan arahan dari pembimbing.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab II telah dijelaskan mengenai operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum.

4.1 Teorema 1

Bukti.

Karena ρ memenuhi kondisi doubling, maka untuk setiap $k, r > 0$ didapat

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} dt \sim \rho(2^k r)$$

Misal

Untuk setiap $x \in R^n$ dan $R > 0$, dapat ditulis

$$T_\rho f(x) = \int_{|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy + \rho(r)^{q/(q-p)} \int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy \leq \sum_{k=-\infty}^{1} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)|dy$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1} R} |f(y)|dy$$

$$\leq CM$$

$$|I_1(x)| \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}\phi(R)^{p/q}}$$

$$\|T_\rho f(x)\| \leq CMf(x)\phi(R)^{(p-q)/m} + C\rho$$

$$\rho(r)^{q/(q-p)} \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)(2^q)^{1/2}$$

$$\frac{\rho(r)^{q/(q-p)}}{C} \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)$$

$$\frac{\rho(r)^{q/(q-\rho)}}{C}\int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt \le C\rho(r)$$

$$\int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt \ \le \rho(r)$$

$$(|I_2(x)|) \le \int_{|x-y|\ge R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\le \rho(r)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^kR\le|x-y|<2^{k+1}R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\le C.\rho(r)^{q/(q-p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^kR)}{(2^kR)^n}\int_{|x-y|<2^{k+1}}|f(y)|dy$$

$$\le C.\rho^{q/(q-p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^kR)}{(2^kR)^{n/p}}\left(\int_{|x-y|<2^{k+1}}|f(y)|dy\right)^{1/p}$$

4.2 Teorema 2

Bukti.

Untuk setiap $x \in R^n$ dan $R > 0$,

$$T_\rho f(x) = \int_{|x-y|<R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}f(y)dy + \int_{|x-y|\ge R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}f(y)dy$$

$$= I_1(x) + I_2(x).$$

Selanjutnya,

$$|I_1(x)| \qquad \le \int_{|x-y|<R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{1}\int_{2^kR\le|x-y|<2^{k+1}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{1}\frac{\rho(2^kR)}{(2^kR)^n}\int_{|x-y|<2^{k+1}R}|f(y)|dy$$

$$\leq CMf(x)\sum_{k=-\infty}^{1}\rho(2^kR)$$

$$\leq CMf(x)\sum_{k=-\infty}^{1}\int_{2^k}^{2^{k+1}R}\frac{\rho(t)}{t}dt$$

$$= CMf(x)\int_{0}^{R}\frac{\rho(t)}{t}dt$$

$$\leq CMf(x)\phi(R)^{(p-q)/q}.$$

Sementara itu untuk $I_2(x)$

$$|I_2(x)| \qquad \leq \int_{|x-y|\geq R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^kR\leq|x-y|<2^{k+1}R}\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}|f(y)|dy$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^kR)}{(2^kR)^n}\int_{|x-y|<2^{k+1}R}|f(y)|dy$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^kR)}{(2^kR)^{n/p}}\left(\int_{|x-y|<2^{k+1}R}|f(y)|^pdy\right)^{1/p}$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^{k+1}R)\phi(2^{k+1})\phi(2^{k+1}R)$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}R}\frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt$$

$$= C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}\int_{2^k}^{2^{k+1}R}\frac{\rho(t)\phi(t)}{t}dt$$

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}(R)^{p/q}.$$

Tambahkan keduanya, didapat

$$|T_\rho f(x)| \leq C\left[Mf(x)\phi(R)^{(p-q)/q} + \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}(R)^{p/q}\right].$$

Asumsikan bahwa f tidak identik 0 dan bahwa Mf terbatas di mana-mana. karena ϕ surjektif dapat dipilih $R > 0$ sedemikian hingga $\phi(R) = Mf(x). \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{-1}$, Karena itu, untuk setiap $x \in R^n$, didapat

$$|T_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}.$$

Ketaksamaan yang diinginkan mengikuti dari ini dan operator maksimal terbatas pada $\mathcal{M}_{p,\phi}$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil penelitian di bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum pada Teorema 1 $\left\|T_\rho f\right\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ dan Teorema 2 $\left|T_\rho f(x)\right|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya yaitu dengan menggunakan ruang fungsi yang lainnya sebagai contoh ruang Morrey tak homogen yang diperumum atau ruang grand Morrey atau ruang Banach atau ruang lainnya. Penulis juga menyarankan ketaksamaan bisa juga ketaksamaan tipe kuat ataupun ketaksamaan tipe lainnya sebagai bahan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur’an Terjemahan. 2015. *Departemen Agama RI*. Bandung. CV Darus Sunnah.

Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Willey & Sans, Inc.

Eridani, H. Gunawan dan E. Nakai. 2004. *On generalized fractional integral operators.* Scientiac Mathematicae Japonicae Online, vol. 10. 307-318
.

Gunawan, H., Sihwaningrum, I. 2016. *A weak* (p,q) *Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey spaces of Non-Homogeneous. Type.* vol.3. no.3. p. 161-168.

Ifronika, Idris, Masta, dan Gunawan. 2018. *Generalized Hölder’s Inequality in Morrey Spaces*. *Matematički Vesnik*, 70 (4): 326-337.

Limanta, Kevin mandira 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*, Program Studi Sarjana Matematika.FMIPA, Institut Teknologi Bandung.

Mu'tazili, A. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil*. Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Quthb, Sayyid. 2003. *Tafsir Fi Zhilail Qur’an dibawah naungan Al-Qur’an Jilid 4*. Jakarta : gema Insani Press.

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M. 2010. *Real Analysis Fourth Edition.* Republic of China: Pearson Eduational Asia Limited and China Machine Press.

RIWAYAT HIDUP

Safira Nur Aulia Putri, Lahir di Surabaya 02Juni 1999, tinggal di Kota Surabaya, Kecamatan Tambaksari, Jawa Timur. Anak ke tiga dari empat bersaudara, putri Alm Bapak Rachmad Arijadi dan Ibu Siti Aisyah. Pendidikan Taman kanak-kanak di tempat TK Triguna Bhakti, kemudian melanjutkan pendidikan dasar di SDN Tanah Kali Kedinding IV dan lulus pada tahun pada tahun 2011. Selanjutnya melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Taruna Jaya I dan lulus tahun 2014. Kemudian melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di SMA 17 Agustus 1945 dan lulus pada tahun 2017. Kemudian melanjutkan pendidikan perguruan tinggi pada tahun 2017 di Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi melalui email mbaksyafira31@gmail.com

KEMENTERIAN AGAMA RI UNIVERSITAS
ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Safira Nur Aulia Putri
NIM : 17610101
Judul Skripsi : Operator Integral Fraksional yang diperumum pada Ruang Morrey yang Diperumum
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	**Tanggal**	**Hal**	**Tanda Tangan**	
1.	26 Oktober 2021	Setor dan Konsultasi Judul	1.	
2.	30 Januari 2021	Konsultasi BAB I		2.
3.	16 Maret 2021	Revisi BAB I	3.	
4.	25 Maret 2021	Konsultasi dan Revisi Kajian Agama		4.
5.	1 April 2022	Konsultasi Agama	5.	
6.	14 April 2022	Revisi BAB II dan Konsultasi BAB III		6.
7.	3 Mei 2022	Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV	7.	
8.	6 Mei 2022	ACC Kajian Agama		8.
9.	7 Mei 2022	ACC Bab I, Bab II, dan Bab III	9.	
10.	25 Mei 2022	Revisi Bab IV dab konsultasi BAB V		10.
11.	10 Juni 2022	ACC keseluruhan	11.	
12.	18 Juni 2022	Revisi setelah semhas		12.
13	21 Juni 2022	ACC BAB V dan konsultasi	13.	

Malang, 21 Juni 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129200012 2 005