

ESTUDIO DE MODOS DE OSCILACION

A. Costa\*, A. Sicardi Schifino\*\* y C. Ferro Fontán\*\*\*

\* IAFE, CONICET

\*\* FCEN (UBA)

\*\*\* CONICET

**RESUMEN:** El objeto de este trabajo es estudiar las oscilaciones y la estabilidad en la situación más general posible, es decir abarcando las oscilaciones radial y no radial en los casos adiabáticos y no adiabáticos.

Para ello se han preparado códigos computacionales, que se aplican a los modelos más sencillos de pulsaciones estelares descritos en la literatura, con el fin de ajustarlos para luego extender su aplicación a casos más complejos.

## 1. FORMULACION TEORICA

Con la intención de hacer un análisis general, nos hemos planteado un esquema de cálculo basado en una formulación variacional que originariamente ha sido planteada en la física del plasma (1), (2).

Dicho esquema permite obtener un principio variacional en todos los casos en que las ecuaciones puedan reducirse a la forma:

$$1) \quad M \ddot{\Psi} + (R + G) \dot{\Psi} + S \Psi = 0$$

donde  $\Psi$  es un vector perteneciente a un espacio vectorial y representa la magnitud perturbada. M, R, G y S son operadores lineales de ese espacio vectorial, siendo M, R y S hermíticos y G antihermítico. (M y R definidos positivos).

A los efectos de ajustar el método y los programas de cómputos se comenzó con el caso más simple, de pulsaciones radiales y adiabáticas donde la ecuación (1) es la conocida ecuación:

$$2) \quad \frac{d}{dr} \left( r^4 \gamma p \frac{d\xi}{dr} \right) + \xi \left( \sigma^2 \delta r^4 + r^3 \frac{d}{dr} \left[ (3\gamma - 4)p \right] \right) = 0 = -\mathcal{L}\xi + \sigma^2 \mu(r) \xi, \mu(r) = \rho r^2$$

donde  $\Psi = \xi$  ( $\xi$  es el desplazamiento).

$r$ , coordenada radial.

$p = p_r + p_g$ , presión del gas más presión de radiación.

$\gamma$ , coeficiente de calores específicos.

$\sigma$ , frecuencia.

$\rho$ , densidad.

En los casos más complejos  $\Psi$  es un vector donde sus componentes son las variables perturbadas del problema.

El principio variacional general que se obtiene está asociado al exceso de entropía  $\delta^2 \eta$  (1), (3), donde

$$3) \quad \delta^2 \eta = 1/2 \left[ \langle \dot{\xi}, M \dot{\xi} \rangle + \langle \xi, S \xi \rangle \right]$$

estando la estabilidad determinada por el signo de esta cantidad y donde  $\langle, \rangle$  indica el producto interior en el espacio considerado. En el caso especialmente simple de las oscilaciones radiales y adiabáticas dicho principio variacional conduce a la conocida expresión de la literatura:

$$4) \quad \sigma^2 \int_0^R \mu(r) \xi^2 dr - \int_0^R \xi^* \mathcal{L} \xi dr = 0$$

El primer miembro de esta ecuación multiplicado por  $i\sigma^*$  ( $\sigma$  es la frecuencia) coincide con el exceso de potencia (1), (3).

La 4) es una ecuación en  $\sigma^2$  y  $\xi$  que puede ser resuelta numéricamente luego de transformarlo en un problema de valores propios para lo cual debe desarrollarse  $\xi$  en una base adecuada.

En el caso no adiabático la ecuación que describe el movimiento del sistema se escribe:

$$5) \quad \mu \xi + L\xi = r^3 \phi \xi + D \int_0^t \xi dt \quad \text{donde}$$

$\phi$  es el operador de disipación.

Llamando

$$\Psi = D \int \xi dt$$

se obtiene:

$$6) \quad \mu \dot{\xi} + \mathcal{L} \xi - r^3 \phi \dot{\xi} = 0$$

$$7) \quad \dot{\Psi} - D \xi = 0 \quad \text{o bien} \quad D^{-1} \dot{\Psi} = \xi$$

y definiendo

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} L & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -r^3 \phi & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

resulta el exceso de entropía

$$8) \quad \delta^2 \eta = - \left[ \langle \dot{\xi}, M \dot{\xi} \rangle + \langle \xi, \mathcal{L} \xi \rangle - \langle \xi, \Psi \rangle - \langle \Psi, \xi \rangle \right]$$

El principio variacional derivado de esta expresión es un principio general del cual puede obtenerse, en la aproximación de pulsaciones casi adiabáticas, el principio conocido en la teoría para oscilaciones no adiabáticas. Es decir si se aproxima  $\frac{i}{\sigma} D\xi$  por la expresión  $\frac{1}{\omega^2} D\dot{\xi}$  donde  $\omega$  es la frecuencia adiabática la ecuación (equivalente a la (6) que resulta es:

$$9) \quad \mu \ddot{\xi} + \alpha \dot{\xi} = \left( r^3 \phi + \frac{D}{\omega^2} \right) \dot{\xi}$$

esta aproximación es correcta sólo en el caso en que la parte compleja de la frecuencia sea pequeña. Definiendo:

$$M = \mu \quad S = \alpha \quad R = - \left( r^3 \phi + \frac{D}{\omega^2} \right)$$

resulta que el sistema es estable ante la perturbación  $\xi$  si se cumple:

$$10) \quad - \langle \xi^* , \left( \frac{D}{\omega^2} + r^3 \phi \right) \xi \rangle \geq 0$$

que es la expresión conocida en la literatura. (5)

En casos más generales siempre es posible llegar a ecuaciones que pueden tratarse con el mismo método.

## 2. METODO NUMERICO

El método numérico consiste en la diagonalización de la forma cuadrática dada en el primer miembro de la ecuación 4) para  $\sigma^2$  variable, hallándose luego los valores de  $\sigma^2$  que anulan algún autovalor. En el cálculo se utiliza una base de funciones, llamadas "esplines", que permite mejorar los cálculos debido a su mejor ajuste con las condiciones de contorno y al menor número de elementos de la base que se precisan para dicho ajuste.

Para resolver las ecuaciones es usual proponer una base de funciones adecuada a la geometría del problema que ajusta las condiciones de contorno. Generalmente es necesario tomar un número grande de elementos de la base para ajustar dichas condiciones de contorno, y esto es debido a que tales funciones son distintas de cero en todo el rango de variación de las coordenadas. En cambio, debido a que los "esplines" toman valores distintos de cero solamente en un intervalo de dicho rango de variación es posible ajustar las condiciones de contorno con los elementos de la base de "esplines" correspondientes a los intervalos cercanos al contorno. Como consecuencia de esto es posible describir el problema usando en el cálculo un número menor de elementos de la base.

Las funciones utilizadas en el trabajo son los "esplines" de cuarto orden, que son polinomios continuos de tercer grado que tienen primera y segunda derivada continua.

Los "esplines" se definen como:

$$N_{i,k}(r) = \frac{(r - r_i)}{r_{i+k-1} - r_i} N_{i,k-1}(r) + \frac{r_{i+k} - r}{r_{i+k} - r_{i+1}} N_{i+k,k-1}(r)$$

donde  $i$  indica el elemento de base  $i$ , y  $k$  indica el orden del "esplin", y donde el "esplin"  $i$  de orden uno es:

$$N_{i.1} = \begin{cases} 1 & T_i \leq T \leq T_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los "esplines" de orden uno son las funciones utilizadas en el clásico tratamiento de estratificación por capas, que consiste en dividir al sistema en intervalos en los que las magnitudes toman un valor medio constante para todo el intervalo.

Debido a la discontinuidad de estas funciones y sus derivadas es posible introducir efectos espureos en las ecuaciones de movimiento, que incluyen hasta la derivada segunda. La utilización de "esplines" de cuarto orden, que tienen continuas hasta la segunda derivada impide que esto suceda.

### 3. APLICACION A CASOS SENCILLOS

Con el fin de ajustar los códigos computacionales correspondientes al método numérico al que nos hemos referido se han estudiado los siguientes casos sencillos con solución analítica que permiten la comparación de resultados.

a) Modelo de densidad uniforme (4):

$$(1-x^2) \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{(4-6x^2)}{x} \frac{d\xi}{dx} + \mathcal{J}\xi = 0; \quad x = \frac{r}{R}; \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}(\sigma^2)$$

b) Modelo con densidad  $\rho = 1/x^2$  (4):

$$(1-x^2) \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{(2-4x^2)}{x} \frac{d\xi}{dx} + \mathcal{J}(x^2-2/\gamma) \frac{\xi}{x^2} = 0$$

Este análisis se extenderá aplicándose a modelos más realistas y que contemplen situaciones de mayor complejidad como

la de las pulsaciones no radiales y no adiabáticas. Los principios que se utilizarán serán los que derivan de la formulación variacional general que hemos expuesto.

TABLA DE AUTOVALORES

MODELO	NUMERO DE SLINES		
	A	6	8
0.0	0.1	0.08	0.6
14.0	14.5	14.6	15.0
36.0	40.5	40.2	37.5
66.0	67.0	68.5	67.0
B			
15.4	17.2	18.0	19.4
46.2	46.5	42.8	45.0
120.8	121.6	135.0	127.1

## REFERENCIAS

- (1) Sicardi Schifino, A.C.; Ferro Fontán, C. 1985: Phys. Lett. 113A(5), 263.
- (2) Lavenda, B.H. Thermodynamics of Irreversible Processes.
- (3) González, R.; Sicardi Schifino, A.C. y Ferro Fontán, C. 1985: comunicación a la 4 ICENES, Madrid.
- (4) Sterne, T.E. 1936: Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 97, 552.
- (5) Ledoux, P.; Walraven, Th. 1958: Hdb. d. Phys. 51, 353.