Apuntes de Métodos variacionales

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

MÉTODOS VARIACIONALES. OPTATIVA DE SEGUNDO CICLO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE GRANADA

MÉTODOS VARIACIONALES, A. CAÑADA, CURSO 2010/11

En las notas que siguen se recogen de manera esquemática algunas de las ideas fundamentales que se explican en la asignatura "Métodos Variacionales", optativa de segundo ciclo de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada. Estas notas están en constante proceso de elaboración. Espero que cada alumno encuentre algo de utilidad en ellas.

1. Introducción, motivación y notas históricas: del problema de la braquistocrona a la teoría de puntos críticos.

1.1. Recomendaciones bibliográficas.

Los problemas de máximos y mínimos constituyeron la motivación fundamental para la creación del Cálculo Diferencial e Integral a finales del siglo XVII. El origen del Cálculo Diferencial e Integral se atribuye fundamentalmente a Newton y Leibniz.

El significativo trabajo de Leibniz titulado "Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus" que puede considerarse como el nacimiento formal del Cálculo, se publicó en 1684 y las palabras con las que Leibniz describe el título de esta obra nos dan una idea muy precisa del contenido: nuevo método para el estudio de máximos y mínimos de funciones usando la noción de tangente. En este tratado se proporciona un método muy preciso para el cálculo de máximos y mínimos de funciones concretas que surgen en las aplicaciones más diversas. Dicho método usa la noción de derivada, punto crítico, derivadas de orden superior, etc.

Un buen resumen de la evolución histórica del cálculo de variaciones se puede ver en los siguientes artículos:

Erwin Kreyszig: On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century. Part I. American Mathematical Monthly, volumen 101, no. 7, 674-678, (1994).

Erwin Kreyszig: On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century. Part II. American Mathematical Monthly, volumen 101, no. 9, 902-908, (1994).

La introducción del libro de texto recomendado [3] ofrece información histórica de interés.

Por cierto, la revista mencionada, American Mathematical Monthly, es muy recomendable para los alumnos de los últimos cursos de la licenciatura en Matemáticas. Tiene secciones muy diversas: artículos, problemas, reseñas de libros, etc. El nivel es, en general, asequible. Os animo a que la consultéis habitualmente.

Como veremos a continuación, los problemas que trata el cálculo de variaciones se formularon inemdiatamente después del nacimiento del Cálculo.

1.2. **Algunos problemas significativos del Cálculo de Variaciones.** .

Según M. Kline ([10]) el primer problema significativo del Cálculo de Variaciones fue propuesto y resuelto por Newton en el libro II de sus "Principia". Estudiando la forma que debía tener una superficie de revolución, moviéndose en el agua (o cualquier otro fluido) a velocidad constante a lo largo de su eje para ofrecer una resistencia mínima al movimiento, se planteó el estudio de mínimos de funcionales de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b \frac{y(x)(y'(x))^3}{1+(y'(x))^2} \tag{1.1}$$

donde la función $y(x)$ pertenece a un espacio apropiado de funciones de clase $C^1[a,b]$. Por ejemplo, podemos pensar que $y(\cdot) \in Y$, donde

$$Y = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : \ y \in C^1[a,b], \ y(a) = y_1, y(b) = y_2 \ \}$$

donde $(a,y_1),(b,y_2)$ son dados.

Ya apreciamos la primera diferencia fundamental respecto de los problemas de máximos y mínimos estudiados por el alumno en la licenciatura: en (1.1) la "variable independiente" $y(x)$ pertenece a un conjunto adecuado de funciones y no a un subconjunto del espacio euclídeo finito dimensional. Tengamos en cuenta que los espacios de funciones son, en general, espacios vectoriales de dimensión infinita. Os recomiendo la lectura y consulta del artículo: G. Buttazzo y B. Kawohl: On Newton's problem of minimal resistance, Mathematical Intelligencer, volumen 15, 7-12, (1992). Por cierto, esta revista, Mathematical intelligencer, es también muy recomendable para los alumnos.

De todas formas, suele considerarse que lo que se entiende hoy en día por Cálculo de Variaciones, nació con la proposición de Johann Bernoulli,en 1.696, del problema de la braquistocrona (según algunos autores, este problema fue formulado con anterioridad por Galileo en 1638). Puede describirse así: una masa puntual se desliza, por acción de la gravedad, desde un punto A del plano , hasta otro punto B, a través de alguna curva. El tiempo empleado para ir desde A hasta B depende de la curva elegida. ¿Para qué curva se tendrá que el tiempo es mínimo? Puede verse ([17]) que esto exige el estudio de funcionales de la forma

$$\int_a^b \left(\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)} \right)^{1/2} \, dx \tag{1.2}$$

donde, como en (1.1), la variable independiente $y(\cdot)$, pertenece a un conjunto adecuado de funciones.

Contrariamente a lo que puede sugerir nuestra intuición, la solución de este problema no es ni el segmento rectilíneo que une A con B, ni ningún arco de circunferencia que pase por A y B. La solución, un arco de cicloide, fue encontrada por diferentes matemáticos: Jakob Bernoulli, Newton, Leibniz, L'Hopital, etc.

En los ejemplos citados con anterioridad, la variable independiente es una función $y(x)$. Hay otros problemas, donde de manera natural surge el estudio de funcionales cuya variable independiente pueden ser varias funciones. Incluso, se pueden plantear problemas que recuerdan a los máximos y mínimos condicionados (multiplicadores de Lagrange). Por ejemplo, esto ocurre en el llamado problema isoperimétrico que describimos a continuación. Dado un número real positivo L, se trata de estudiar la cuestión siguiente: de todas las curvas cerradas del plano de longitud dada $L > 0$, ¿cuál es la que encierra mayor área?

Si escribimos la curva mediante sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(s) \tag{1.3}$$

$$y = y(s) \tag{1.4}$$

(donde s es, por ejemplo, el parámetro arco), entonces es conocido que el área encerrada por la misma viene dada por:

$$A = \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^L \big(x(s)y'(s) - x'(s)y(s) \big) \, ds \tag{1.5}$$

Por tanto, se trata de hacer máxima una expresión donde la variable es un par de funciones $x(s), y(s)$. Más precisamente, el par de funciones $x(\cdot), y(\cdot)$ pertenecen al espacio de funciones de clase $C^1[0, L]$ y, además, $x(0) = x(L), y(0) = y(L)$ (la curva es cerrada). Por otra parte, al ser s el parámetro arco se ha de cumplir la restricción

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \ \forall \ s \in [0, L].$$

Esto es pues un problema de máximos y mínimos condicionados.

Puede probarse ([7]) la relación

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \tag{1.6}$$

y que la igualdad se da sólo para cualquier circunferencia de longitud L. Un método elegante y sencillo para estudiar este problema usa algunos hechos básicos de la teoría de Series de Fourier ([5]).

El problema puede plantearse también en dimensiones superiores $n \geq 3$, probándose que si $B \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto con algunas restricciones adicionales, entonces ([7])

$$[L(\partial B)]^n - n^n \omega_n [M(B)]^{n-1} \geq 0 \tag{1.7}$$

donde ω_n es el volumen de la bola unidad $n-$dimensional, es decir, $\omega_n = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0;1)} 1$ y $[M(B)]$ es la medida de Lebesgue $n-$dimensional de B. Por su parte, $L(\partial B)$ es la medida de Lebesgue $n-1$-dimensional de la frontera de B. Además la igualdad se da en la expresión anterior si y sólo si B es una bola.

Un ejemplo de especial significación, desde el punto de vista de la física, lo constituye el principio de Hamilton. Vamos a ver que proporciona una formulación variacional (en términos de máximos y mínimos, o al menos, puntos estacionarios o críticos), de la segunda ley de Newton.

Supongamos que una partícula de masa 1 se desplaza en el espacio euclídeo tridimensional desde un punto dado p_1 a otro p_2 en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, bajo la acción de una fuerza $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que depende sólo de la posición de la partícula. En este caso, $F = F(x),\ x = (x_1, x_2, x_3)$.

Si $x : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \to x(t)$, es la trayectoria de la partícula, entonces la segunda ley de Newton ($masa \times aceleracion = fuerza$) nos proporciona la relación

$$x''(t) = F(x(t)),\ x(t_1) = p_1, x(t_2) = p_2 \tag{1.8}$$

(1.8) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

El Cálculo de Variaciones nos proporciona otra interpretación de (1.8), cercana a problemas de máximos y mínimos cuando la fuerza F es conservativa, esto es, deriva de un potencial $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Esto quiere decir que $\nabla U(y) = F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$, donde $\nabla U(y) = \left(\frac{\partial U(y)}{\partial y_1}, \frac{\partial U(y)}{\partial y_2}, \frac{\partial U(y)}{\partial y_3}\right) = (F_1(y), F_2(y), F_3(y))$.

Definamos el conjunto $\mathcal{A}$ de "trayectorias posibles entre los puntos p_1 y p_2 " de la forma siguiente:

$$\mathcal{A} = \left\{ y : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad y(t_1) = p_1, y(t_2) = p_2, y \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \right\} \tag{1.9}$$

Dado un elemento $y \in \mathcal{A}$, su energía cinética como función del tiempo t viene dada por

$$(M\dot{y})(t) = \frac{1}{2}\left(\dot{y}_1(t)^2 + \dot{y}_2(t)^2 + \dot{y}_3(t)^2\right) \tag{1.10}$$

y su energía potencial viene expresada por $-U(y(t))$ donde U es el potencial mencionado.

La lagrangiana de la trayectoria y se define como

$$L(y(t)) = M(\dot{y}(t)) + U(y(t)) \tag{1.11}$$

El funcional, llamado acción integral de Hamilton, se define como

$$\begin{gathered} \Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi(y) = \int_{t_1}^{t_2} L(y(t))\; dt \end{gathered} \tag{1.12}$$

que hace corresponder a cada trayectoria posible, y, un número real,$\Phi(y)$.

¿Qué relación existe entre el funcional dado en (1.12) y la ecuación diferencial (1.8)? Por una parte, el funcional dado hace corresponder, a cada trayectoria posible y, un número real $\Phi(y)$. Por otra, (1.8) es una ecuación diferencial ordinaria. No parece sencillo, ni intuitivo, qué relación puede haber entre ambos conceptos.

El principio de Hamilton afirma: "la trayectoria $x \in \mathcal{A}$ que sigue la partícula bajo la acción de la fuerza F para ir de p_1 a p_2 es aquella que hace estacionaria la acción integral Φ".

¿Qué es eso de hacer estacionaria la acción integral?. Recordemos que dada una función $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punto estacionario de la misma es cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n$ para el que $H'(x) = 0$ (equivalentemente, todas las derivadas parciales de H, en el punto x son cero; es decir $\frac{\partial H(x)}{\partial x_i} = 0,\ 1 \leq i \leq n$.) Ahora quizás no tenga sentido, o quizás sea un concepto nada trivial, la noción de "derivada parcial de la acción integral de Hamilton". Esto puede ser subsanado con el concepto de derivada direccional, más amplio que el de derivada parcial.

Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice estacionario cuando la primera variación de Φ en x es cero. La primera variación del funcional Φ, en el punto x y en la dirección h se define como

$$\delta\Phi(x; h) = \frac{d}{d\tau}\Phi(x + \tau h)_{|\tau=0} \tag{1.13}$$

donde

$$h \in \left\{ g : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad g(t_1) = 0, g(t_2) = 0, g \in \mathcal{C}^1[t_1, t_2] \right\} = B \tag{1.14}$$

Que la primera variación sea cero significa que

$$\delta\Phi(x;h) = 0 \quad \forall h \in B. \tag{1.15}$$

Veremos en el curso que (1.15) no es sino la la segunda ley de Newton (1.8) expresada en forma variacional. En realidad veremos que, para trayectorias $x \in C^2[t_1,t_2]$, tales que $x(t_1) = p_1, x(t_2) = p_2$, (1.8) es equivalente a (1.15).

Otras muchas leyes de la Física se expresan también en forma variacional. Todas ellas responden a la filosofía marcada por las frases siguientes:

(1) "*En la Naturaleza no se realiza ningún proceso superfluo o innecesario (Olympiodorus, siglo VI)*"
(2) "*En un medio no homogéneo, formado por dos homogéneos y separados por una recta, un rayo luminoso que va desde un punto del primer medio a otro del segundo, lo hace de tal forma que minimiza el tiempo empleado en su recorrido (Fermat, siglo XVII)*"
(3) "*Puesto que el Universo es perfecto y fue creado por el Creador más sabio, nada ocurre en él, sin que esté presente alguna ley de máximo o mínimo (Euler, siglo XVIII)*"
(4) "*Una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza conservativa, lo hace de tal forma que su trayectoria hace mínima, o al menos estacionaria, la acción integral (Hamilton, siglo XIX)*"

Detengámonos en un ejemplo concreto, la ley de la refracción que afirma lo siguiente:
Supongamos un medio no homogéneo, formado por dos medios homogéneos I y II separados por una recta r. Sean A y B dos puntos dados de I y II respectivamente. Entonces un rayo luminoso que va de A hasta B lo hace a través de una trayectoria que es rectilínea en cada medio considerado y tal que si O es el punto de la recta r por el que pasa, se tiene que el cociente entre el seno del ángulo de incidencia φ_1 y el seno del ángulo de refracción φ_2, es igual a $\frac{v_1}{v_2}$, siendo v_1 y v_2, respectivamente, las velocidades de propagación de la luz en I y II. Es decir

$$\frac{\mathrm{sen}\varphi_1}{\mathrm{sen}\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{1.16}$$

Una demostración variacional de la ley anterior, puede obtenerse usando el principio de Fermat (siglo XVII) que afirma:
en la situación anteriormente descrita, un rayo luminoso que va de A hasta B, lo hace a través de una trayectoria tal que el tiempo empleado en su recorrido es mínimo.

Usando este principio y eligiendo convenientemente los ejes de coordenadas tal que $A = (0,a), B = (d,-b)$, entonces si $O = (x,0)$, tenemos que el tiempo empleado en la trayectoria es

$$t(x) = \frac{(a^2+x^2)^{1/2}}{v_1} + \frac{(b^2+(d-x)^2)^{1/2}}{v_2}$$

Es trivial comprobar que existe un único punto $x_0 \in [0,d]$ tal que $t'(x_0) = 0$. Además, $t''(x) > 0, \ \forall \ x \in [0,d]$. Esto prueba que existe un único punto $x_0 \in [0,d]$ tal que $t(x_0) = \min_{[0,d]} \ t$. Calculando $t'(x_0)$, es trivial que la relación $t'(x_0) = 0$ es equivalente a (1.16).

Terminamos la descripción de problemas concretos, con el denominado Principio de Dirichlet, donde como variables independientes aparecen de manera natural, funciones de varias variables reales (hasta ahora sólo han aparecido funciones de una variable).

Sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{1.17}$$

donde Δ es el operador Laplaciano definido como

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} \tag{1.18}$$

Problemas del tipo anterior (estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f, en la frontera de Ω) surgen, por ejemplo, en electrostática.

Como en el caso de la segunda ley de Newton, la ecuación que aparece en (1.17) es una ecuación diferencial de segundo orden, pero en este caso se trata de una ecuación en derivadas parciales. Al tratar de conectar (1.17) con problemas de máximos y mínimos, surge de manera natural el llamado funcional de energía:

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \tag{1.19}$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), u_{|\partial\Omega} = f \right\} \tag{1.20}$$

En electrostática, u es el potencial eléctrico y $\Phi(u)$ la energía. Obsérvese la analogía entre este funcional y el funcional Φ dado por la acción integral de Hamilton en (1.12) (ahora la fuerza F y por tanto, el potencial U son las funciones idénticamente cero).

Los puntos estacionarios del funcional Φ son, en un sentido que se precisará en el curso, soluciones del problema (1.17) Este es el principio de Dirichlet.

1.3. **Las condiciones necesarias de Euler-Lagrange y Legendre.**

Como resumen de lo dicho hasta ahora, nos encontraremos con el problema de minimizar (o maximizar), o al menos encontrar puntos estacionarios (por cierto, un concepto que habrá que definir rigurosamente), de funcionales Φ de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b L(t, y(t), ..., y^{n)}(t))\ dt$$

donde $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^n[a, b]$ (sistemas con un grado de libertad). Este es el caso del problema de Newton (1.1), descrito con anterioridad, o el problema de la braquistocrona (1.2). En estos dos ejemplos $n = 1$.

De manera más general, $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ de clase $C^n[a, b]$ (sistemas con m grados de libertad). Por ejemplo, en el caso de problema isoperimétrico (1.5) tenemos $n = 1, m = 2$ y en el caso del principio de Hamilton para el funcional Φ dado en (1.12) tenemos $n = 1, m = 3$. Además, la función y y sus derivadas hasta el orden n, satisfacen en general algunas condiciones adicionales en la frontera del intervalo $[a, b]$.

Trataremos también el caso de funciones de varias variables (sistemas con infinitos grados de libertad) como en el caso del funcional (1.19), relacionado con el principio de Hamilton. Concretamente funcionales de la forma

$$\Phi(u) = \int_\Omega L(x, u(x), ..., D^\alpha u(x))\ dx,$$

siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Aquí α es un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 1 \le i \le n$ y

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Por ejemplo, en el caso del funcional (1.19) los multiíndices α vienen dados por los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Además, es usual que la función u verifique algunas condiciones en la frontera de Ω. Por ejemplo, en el principio de Hamilton $u(x) = f(x), \forall\ x \in \partial\Omega$.

Como en la teoría de máximos y mínimos para funcionales $\Phi : D \to \mathbb{R},\ y \to \Phi(y)$, donde D es un subconjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$, las principales cuestiones que hemos de resolver se centran fundamentalmente en el establecimiento de condiciones necesarias y condiciones suficientes que nos permitan reconocer un punto de mínimo o al menos un punto estacionario (si es que tiene sentido) del funcional Φ. Sabemos que esto depende no sólo del funcional Φ, sino en gran medida del subconjunto D.

En el caso finito dimensional, donde $D \subset \mathbb{R}^k$, si D es abierto, dichas condiciones se expresan en términos de $\Phi'(x)$ y de $\Phi''(x)$ (o derivadas de orden superior a dos). No obstante, en este caso el problema suele ser, con frecuencia, probar que Φ tiene mínimo. Si D es compacto, no suele ser problema probar que Φ tiene mínimo. Si, además, su frontera se expresa en términos "buenos", es útil el teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Todas estas son las ideas que flotan en el ambiente del Cálculo de Variaciones. No obstante, la situación ahora es bastante más complicada, puesto que en general tratamos con problemas donde la variable independiente pertenece a espacios de dimensión infinita. ¿Tiene sentido ahora la definición de derivada parcial, o derivada direccional?, ¿cómo podemos definir la noción de derivada, y la noción de derivadas de orden superior a uno?...

En lo que se refiere al establecimiento de condiciones necesarias, un avance fundamental fue dado por Euler (¿cómo no?) en 1744, año en que se publicó su famoso libro sobre curvas geodésicas. Para funcionales de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\ dt$$

la condición necesaria para que un elemento (en este caso una función) y_0 sea un mínimo es

$$f_y(t, y_0(t), y_0'(t)) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0(t), y_0'(t)) = 0,\ \forall\ t \in [a, b] \tag{1.21}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (como la de la segunda ley de Newton). Esta es la condición similar a que la primera derivada sea cero en el caso finito-dimensional. Dependiendo del tipo de problema que se considere la anterior ecuación ha de completarse con alguna condición sobre la función y_0 en la frontera $t = a$ y $t = b$ del intervalo $[a, b]$. Como veremos en el curso, esta condición en la frontera implica las cantidades $y_0(a), y_0(b), y_0'(a), y_0'(b)$, etc, dependiendo de que en el problema original considerado los extremos de la función se consideren fijos, variables, etc.

Algunas ideas de Euler fueron posteriormente desarrolladas en profundidad por Lagrange. En particular, en su libro de 1760-61, sobre "un nuevo método para determinar los máximos y los mínimos de fórmulas integrales" llegó a la misma conclusión que Euler, sobre la ecuación (1.21) usando un camino diferente: Lagrange consideró las variaciones

$$J(y_0, \eta, \varepsilon) = F(y_0 + \varepsilon\eta) \tag{1.22}$$

para una función η fija y ε variable. Así llegó a la misma ecuación (1.21), que por este motivo es conocida con el nombre de ecuación de Euler-Lagrange. Parece ser que el nombre "Cálculo de Variaciones" también viene de esta idea de Lagrange.

La ecuación de Euler-Lagrange es una condición necesaria de mínimo que implica la derivada de orden uno. Partiendo de (1.22) y considerando la "segunda variación" $J_{\varepsilon\varepsilon}$, introducida por Legendre en 1786 ([10], [11]), éste demostró que en un punto de mínimo y_0 ha de cumplirse la condición necesaria

$$fy'y'(t, y_0(t), y_0'(t)) \geq 0,\ \forall\ t \in [a, b]. \tag{1.23}$$

Esta es una condición similar al hecho de que la derivada segunda ha de ser semidefinida positiva en el caso finito-dimensional.

Respecto de las posibles condiciones suficientes, hubo que esperar 50 años hasta que Jacobi introdujo la llamada hoy en día condición de Jacobi, que junto con la ecuación de Euler-Lagrange y (1.23) permiten demostrar que el punto y_0 es un mínimo. No obstante, dicha condición no es fácil de comprobar, como veremos más adelante.

1.4. **Teoría de puntos críticos.**

Como hemos tenido ocasión de comentar, la segunda ley de Newton (1.8), que viene dada por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, puede expresarse en términos variacionales de la forma (1.15), que no refleja otra realidad sino que todas las derivadas direccionales del funcional Φ (definido en (1.12)) en el punto x son cero. En el caso finito dimensional, si hablamos de funcionales $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sean derivables, la manera más fácil de conseguir que todas las derivadas direccionales de Φ en x sean cero es que la derivada de Φ en x, $\Phi'(x)$ sea cero. Ahora estamos hablando no de funcionales definidos en espacios normados de dimensión finita, $\mathbb{R}^n$, sino de funcionales Φ definidos en espacios normados de dimensión infinita E. La teoría de puntos críticos trata sobre la ecuación

$$\Phi'(u) = 0$$

para funcionales derivables $\Phi : E \to \mathbb{R}$, derivables (en un sentido que se ha de precisar), donde E es cualquier espacios normado de dimensión infinita.

En este curso se proporcionará una introducción a la teoría de puntos críticos, y se expondrán algunos resultados importantes referentes tanto al llamado método directo (en el que se trata de probar la existencia de mínimo global del funcional Φ dado), como a los métodos min-max, de desarrollo relativamente reciente. En particular, dedicaremos una atención especial a dos teoremas relativamente modernos, pero ya clásicos: el Teorema del paso de montaña de Ambrosetti y Rabinowitz (1971) y el Teorema del punto de silla de Rabinowitz (1978).

Según mi opinión, los resultados seleccionados son ejemplos muy representativos de las diferentes posibilidades del método variacional, pudiéndose, con la ayuda de la bibliografía recomendada, estudiar otros de los muchos que se conocen en la actualidad.

Un comentario más.

En un curso de esta naturaleza, de carácter introductorio sobre métodos variacionales, pueden obtenerse los resultados fundamentales sin recurrir a nociones de diferenciabilidad en espacios de dimensión infinita (véase, por ejemplo [7], [18]). No obstante, en mi opinión, es muy instructivo hacerlo desde este punto de vista, puesto que el desarrollo del cálculo diferencial en espacios de dimensión infinita puede hacerse muy similarmente al caso de dimensión finita; eso sí hay que hacer un hincapié especial en las diferencias básicas entre ambos casos, lo que es muy instructivo para el alumno. Además, este punto de vista hace necesaria la introducción de diversos conceptos (espacios normado, de Hilbert, aplicaciones lineales, bases hilbertianas, etc.) que permite al alumno tener una formación no sólo en este tema sino también en otras disciplinas relacionadas con Ecuaciones Diferenciales y Análisis Funcional. Es indudable que estos conocimientos pueden serle de gran utilidad en otras disciplinas que curse, e incluso para su posible iniciación en la investigación actual.

2. Cálculo diferencial en espacios normados

2.1. **Derivabilidad en espacios normados de dimensión arbitraria.** A continuación introducimos brevemente algunas nociones sobre derivabilidad en espacios de dimensión arbitraria. Puede consultarse [3] y [8] para los detalles y para profundizar en el tema.

La idea básica para extender la noción de derivada a espacios de dimensión infinita está basada en las siguientes reflexiones escalonadas:

(1) Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, entonces f es derivable en x_0 si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \tag{2.1}$$

en cuyo caso, a tal límite se le llama derivada de f en x_0, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. (2.1) es equivalente a

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = 0. \tag{2.2}$$

(2) Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in (a, b)$, entonces todo es lo mismo que en el caso anterior, salvo que, ahora, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Más precisamente, f es derivable en x_0 si y solamente si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \tag{2.3}$$

en cuyo caso, a tal límite se le llama derivada de f en x_0, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$. (2.3) es equivalente a

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\| = 0. \tag{2.4}$$

donde $\| \cdot \|$ indica cualquier norma en el espacio normado finito dimensional $\mathbb{R}^m$ (recordemos que al ser $\mathbb{R}^m$ de dimensión finita, todas las normas son equivalentes).

(3) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $n > 1$, la anterior definición no es válida, puesto que no podemos dividir por $h \in \mathbb{R}^n$. La extensión adecuada de derivada no la constituye la mera existencia de derivadas parciales, puesto que es conocido que una función puede tener derivadas parciales y no ser continua.

Para proceder a la definición en este caso, es necesario obtener una caracterización de las situaciones presentadas en los dos primeros apartados, que pueda extenderse a situaciones generales. En este sentido, el límite (2.1) es un número real o más generalmente, en el caso de (2.3), un vector de $\mathbb{R}^m$. En ambos casos, el vector $f'(x_0)$ define una aplicación lineal (automáticamente continua) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

dada por $L(h) = f'(x_0)h, \ \forall \ h \in \mathbb{R}$ y, en ambos casos, podemos decir que f es derivable en x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \tag{2.5}$$

donde $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^m}$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^m$. Estos reflexiones se ven avaladas porque, como puede comprobarse fácilmente, sólo puede existir una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ que satisfaga (2.5).

De acuerdo con las anteriores ideas, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, y $x_0 \in \Omega$, diremos que f es derivable en x_0 si y solamente si existe alguna aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (automáticamente continua) tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \tag{2.6}$$

(4) En la situación general finito dimensional, donde $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, diremos que f es derivable en x_0 si y solamente si existe alguna aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (automáticamente continua) tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \tag{2.7}$$

Cuando intentemos dar el salto a dimensión infinita, la única novedad es que, ahora, una aplicación lineal no es necesariamente continua y por tanto, hemos de exigirlo en la definición (véase [4]).

Definición 2.1. (Derivada de Fréchet).
Sean $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ espacios normados reales, $\Phi : \Omega \longrightarrow Y$ donde Ω es un abierto de X y $x_0 \in \Omega$.

Se dice que Φ es derivable (según Fréchet) en el punto $x_0 \in \Omega$, si existe alguna aplicación lineal y continua $L : X \longrightarrow Y$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - L(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0 \tag{2.8}$$

Como primeras propiedades de esta definición, podemos indicar las siguientes:

Proposición 2.2. (1) *L, si existe, es única. Usaremos la notación $L = \Phi'(x_0)$.*

(2) *La derivabilidad es un concepto que no cambia, si se toman otras normas equivalente. Más precisamente, si Φ es derivable en x_0 y tomamos normas equivalentes en X e Y respectivamente, la derivada es la misma.*

(3) *Si* $\exists\ \Phi'(x_0)$, *entonces* Φ *es continua en* x_0.

(4) *Sea* $\Phi : X \longrightarrow Y$ *lineal y continua (recordemos que si* Φ *es lineal, esto es equivalente a que exista alguna constante* $k \geq 0$ *tal que* $\|\Phi(x)\|_Y \leq k\|x\|_X,\ \forall\ x \in X$*). Entonces se tiene* $\Phi'(x_0) = \Phi, \quad \forall x_0 \in X$.

(5) *Sea* $\Phi : X \times Z \to Y$ *bilineal y continua (recordemos que si* Φ *es bilineal, esto es equivalente a que exista alguna constante* $k \geq 0$ *tal que* $\|\Phi(x,z))\|_Y \leq k\|x\|_X\|z\|_Z,\ \forall\ (x,z) \in X \times Z$*). Entonces existe* $\Phi'(x_0,z_0), \quad \forall (x_0,z_0) \in X \times Z$ *y* $\Phi'(x_0,z_0)(h_1,h_2) = \Phi(x_0,h_2) + \Phi(h_1,z_0)$*. En particular, el producto escalar en cualquier espacio de Hilbert es un ejemplo de ello.*

(6) *Si* H *es un espacio de Hilbert real con producto escalar* $\langle \cdot \rangle$, $A : H \longrightarrow H$ *es lineal y continua y* $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$*, viene definida por* $\Phi(x) = \langle Ax, x\rangle$ *, entonces existe* $\Phi'(x_0),\ \forall x_0 \in H$ *y* $\Phi'(x_0)(h) = \langle Ax_0, h\rangle + \langle x_0, Ah\rangle$.

En particular, si $A = I$*, entonces* $\Phi(x) = \|x\|^2$ *y* $\Phi'(x_0)(h) = 2\langle x_0, h\rangle,\ \forall\ x_0, h \in H$.

(7) *Si* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$*, donde* Ω *es un subconjunto abierto de algún espacio de Hilbert* H*, y* Φ *es derivable en* $x_0 \in \Omega$*, entonces el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia de un único elemento* $\nabla\Phi(x_0) \in H$*, tal que* $\Phi'(x_0)(h) =< \nabla\Phi(x_0), h >,\ \forall\ h \in H$*. A* $\nabla\Phi(x_0)$ *se le denomina gradiente de* Φ *en* x_0.

Un operador $\Psi : \Omega \to H$ *se dice que es un operador gradiente si existe algún operador* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $\Psi(x) = \nabla\Phi(x),\ \forall\ x \in \Omega$*. En este caso, a* Φ *se le llama potencial de* Ψ.

Como en el caso finito dimensional (las demostraciones son idénticas), puede comprobarse inmediatamente que la derivada es un operador lineal en el siguiente sentido: la derivada de la suma es la suma de derivadas, la derivada del producto de un escalar por una función es el escalar por la derivada de la función, etc. y que es válida la regla de la cadena ([3]).

Si $\Phi : \Omega \longrightarrow Y$ es tal que existe su derivada de Fréchet en todos los puntos de Ω, entonces se puede considerar la aplicación derivada

$$\begin{aligned} \Phi' : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(X,Y) \\ x &\longrightarrow \Phi'(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aquí, $\mathcal{L}(X,Y)$ indica el espacio normado real formado por las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, dotado de la norma usual. Recordemos que si $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces existe alguna constante $k \geq 0$ tal que $\|L(x)\|_Y \leq k\|x\|_X,\ \forall\ x \in X$. En este caso, $\|L\|_{\mathcal{L}}$ es el ínfimo (mínimo) de los números k que verifican la relación anterior. También $\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x\in X, \|x\|_X \leq 1} \ \|L(x)\|_Y$.

Tiene así sentido hablar de la derivabilidad de Φ'. Si existe $(\Phi')'(x_0)$ se dirá que Φ posee derivada segunda en el punto $x_0 : \Phi''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y)$. Por ejemplo, es fácil comprobar que si $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces $L'' = 0$ en todo punto. Si $X = C([0,1],\mathbb{R})$, y $\Phi : X \to X$ está definida como $\Phi(x)(t) = x^2(t)$, entonces $(\Phi''(x))(h)(k) = 2hk$, $\forall\ h,k \in X$.

Para poder trabajar cómodamente con derivadas de orden superior, conviene hacer las identificaciones que siguen. Comencemos por un lema, de demostración sencilla, que identifica el espacio $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ con $\mathcal{L}_2(X,Y)$, donde $\mathcal{L}_2(X,Y)$ es el espacio de las aplicaciones bilineales y continuas de $X \times X$ en Y. Recordemos que si $L \in \mathcal{L}_2(X,Y)$, $\exists m \geq 0, \quad / \|L(h,k)\|_Y \leq m\|h\|_X \|k\|_X$, $\forall (h,k) \in X \times X$. Entonces $\|L\|$ es el ínfimo (mínimo) de los números m que verifican la desigualdad anterior. También, $\|L\|_{\mathcal{L}_2(X,Y)} = \sup_{\|h\|\leq 1, \|k\|\leq 1} \|L(h,k)\|_Y$.

Lema 2.3.
Sea

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y)) & \longrightarrow & \mathcal{L}_2(X,Y) \\ & A & \longrightarrow & \Gamma_A \end{array}$$

donde $\Gamma_A : X \times X \longrightarrow Y$, $\Gamma_A(h,k) = (A(h))(k)$, $\forall (h,k) \in X \times X$.

Entonces Γ *es lineal, biyectiva y* $\|\Gamma_A\|_{\mathcal{L}_2(X,Y)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))}$, $\quad \forall A \in \mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$.

Una propiedad destacable es que la derivada segunda de una función, si existe, es siempre una aplicación bilineal simétrica (véanse [2], [8]).

En general, si $\mathcal{L}_n(X,Y)$ denota el conjunto de aplicaciones multilineales y continuas L de $X \times \ldots^{n)} \times X$ en Y, con la norma usual, es decir,

$$\|L\| = \sup_{\|x_1\|\leq 1, \cdots, \|x_n\|\leq 1} \|L(x_1, \cdots, x_n)\|_Y,$$

entonces la derivada $n-$ésima puede definirse por inducción, sin más que usar la identificación

$$\mathcal{L}(X,\mathcal{L}_n(X,Y)) \simeq \mathcal{L}_{n+1}(X,Y) \tag{2.10}$$

Como en el caso de dimensión dos, una propiedad destacable es que la derivada $n-$ésima de una función, si existe, es siempre una aplicación multilineal simétrica (véanse [2], [8]).

La siguiente fórmula, conocida como fórmula de Taylor, es semejante al caso de dimensión finita, y de gran utilidad en el estudio de máximos y mínimos de funcionales. Para la demostración véanse [2], [3] o bien [8]. Como hasta ahora, Ω denota cualquier abierto de un espacio normado real X, e Y denota también cualquier espacio normado real.

Teorema 2.4. *Sea* $\Phi : \Omega \to Y$*, de clase* $C^n(\Omega)$ *(es decir, tanto* Φ *como sus derivadas hasta el orden* n *son continuas en* Ω*), y dos puntos* $u, u+h \in \Omega$

tales que el segmento $[u, u+h] \subset \Omega$. *Entonces*

$$\Phi(u+h) = \Phi(u) + \Phi'(u)(h) + \ldots + \frac{1}{(n)!}\Phi^{n)}(u)(h)^n + \omega(u,h)(h)^n, \tag{2.11}$$

donde $\omega(u,h)$ *es un aplicación multilineal de* $X \times \ldots^{n)} \times X$ *en* Y *tal que* $\lim_{h\to 0}\ \omega(u,h) = 0$. *En particular* $\lim_{h\to 0}\ \frac{\omega(u,h)(h)^n}{\|h\|_X^n} = 0$.

Aquí, la notación $\Phi^{k)}(u)(h)^k$ significa la aplicación multilineal $\Phi^{k)}(u)$ aplicada al elemento $(h, \ldots, h) \in X^k$.

Los resultados anteriores permiten demostrar los teoremas siguientes, sobre condiciones necesarias y condiciones suficientes de máximos y mínimos.

Teorema 2.5.
Sea $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset X$ *abierto, y* $x_0 \in \Omega$ *un mínimo local de* Φ.

- *Si* Φ *es derivable en* x_0, *entonces* $\Phi'(x_0) = 0$.
- *Si existe la derivada segunda de* Φ *en* x_0, *entonces* $\Phi''(x_0)(h,h) \geq 0, \quad \forall h \in X$

Teorema 2.6.
Sea $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset X$ *abierto,* $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ *y* $x_0 \in \Omega$ *tal que:*
(1) $\Phi'(x_0) = 0$
(2) $\exists K > 0 \quad / \quad \Phi''(x_0)(h,h) \geq K\,\|h\|^2, \quad \forall h \in X$

Entonces Φ *tiene un mínimo local estricto en* x_0.

Nota 1. Notemos que la condición

$$\exists K > 0 \quad / \quad \Phi''(x_0)(h,h) \geq K\,\|h\|^2, \quad \forall h \in X$$

es equivalente a

$$\exists K > 0 \quad / \quad \Phi''(x_0)(h,h) \geq K,\ \forall h \in X \text{ tal que } \|h\| = 1.$$

Si el espacio X tiene dimensión finita, esto último es claramente equivalente a que

$$\Phi''(x_0)(h,h) > 0,\ \forall h \in X \text{ tal que } \|h\| = 1.$$

En dimensión infinita no es necesariamente así, debido a la no compacidad de la bola unidad del espacio X.

Veamos un ejemplo de lo anterior, de especial significación por las aplicaciones al cálculo de variaciones. Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \to f(t,x)$, continua tal que $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x} : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y es continua.

Definimos

$$\Phi : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2.12)
$$\Phi(x) = \int_a^b f(t,x(t))dt$$

- $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ lo consideramos como espacio normado real, con la norma $\|x\|_0 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Proposición 2.7.
$\forall x_0 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad \exists\ \Phi'(x_0)$ y

$\Phi'(x_0) : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

(2.13)
$$\Phi'(x_0)(h) = \int_a^b \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t)dt,\ \forall\ h \in \mathcal{C}([a,b].$$

Principales ideas de la demostración.
Tendremos que comprobar en primer lugar que $L(h) \equiv \Phi'(x_0)(h)$ tal y como se ha definido anteriormente, es lineal y continua respecto de h.

$$L : (\mathcal{C}([a,b]),\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2.14)
$$h \longrightarrow \int_a^b \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t)dt$$

es lineal de forma trivial. Para ver que es continua hemos de demostrar que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|L(h)| \leq M \|h\|_0, \quad \forall h \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Ahora bien, como M puede tomarse $M_1(b-a)$, donde M_1 es el máximo de la aplicación de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ definida como

(2.15)
$$t \longrightarrow \left| \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} \right|$$

El siguiente paso es comprobar que se verifica la condición (2.8). Ahora bien,

$$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) - L(h) =$$

(2.16)
$$\int_a^b \left[f(t,x_0(t)+h(t)) - f(t,x_0(t)) - \tfrac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t) \right] dt = (*)$$

Ahora podemos usar el Teorema del Valor Medio, en versión integral. Este Teorema, muy útil y sencillo de usar, afirma lo siguiente:

(2.17) $$g \in \mathcal{C}^1([x,y],\mathbb{R}) \Rightarrow g(y) - g(x) = \int_0^1 g'(ty + (1-t)x)(y-x)dt$$

Pensemos que la demostración es trivial, puesto que

$$g'(ty + (1-t)x)(y-x) = \frac{d}{dt}\, g(ty + (1-t)x)$$

Usando este Teorema, la expresión (2.16), se transforma en

(2.18)
$$(*) = \int_a^b \left[\int_0^1 \frac{\partial f(t, rx_0(t) + rh(t) + (1-r)x_0(t))}{\partial x} h(t)dr - \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t) \right] dt =$$

(2.19) $$= \int_a^b \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial f(t, x_0(t) + rh(t))}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} \right) dr \right] h(t)dt =$$

Tomamos valores absolutos, y obtenemos la expresión

(2.20)
$$\begin{gathered} |\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - L(h)| \leq \\ \|h\|_0 \int_a^b \int_0^1 \left| \tfrac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x} - \tfrac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} \right| drdt \end{gathered}$$

Para concluir la demostración, bastaría comprobar que

(2.21) $$\lim_{\|h\|_0 \to 0} \int_a^b \int_0^1 \left| \frac{\partial f(t, x_0(t) + rh(t))}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} \right| drdt = 0$$

Ahora bien, tenemos que $x_0(t) + rh(t)$ converge (uniformemente respecto de r) a la función $x_0(t)$ con la norma $\|\cdot\|_0$. Además, como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua, esta función es uniformemente continua en compactos, y por ello se tiene que

(2.22)
$$\begin{gathered} \tfrac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x} \longrightarrow \tfrac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} \\ \text{con la norma } \|\cdot\|_0, \text{ uniformemente respecto de } r \in [0,1]. \end{gathered}$$

Ideas análogas pueden usarse para el estudio del siguiente funcional: Sea $X = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, con la norma dada por $\|x\| = \|x\|_0 + \|x'\|_0$.

Sea

(2.23)
$$\begin{gathered} f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x,y) \longrightarrow f(t,x,y) \end{gathered}$$

continua tal que para cualquier $t \in [a,b]$ fijo, la aplicación $f(t,x,y)$ es C^1 con respecto a $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si definimos el funcional

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

(2.24)
$$\Phi(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Entonces Φ es derivable y

(2.25)
$$\Phi'(x_0)(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))}{\partial x} h(t) + \frac{\partial f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))}{\partial \dot{x}} \dot{h}(t) \right] dt, \ \forall\, h \in X.$$

Otros ejemplos son los siguientes. Sea $X = C^k([a,b],\mathbb{R})$ con la norma $\|x\|_k = \sum_{p=0}^{k} \|x^{p)}\|_0$ y $f : [a,b] \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$, $(t, x_0, x_1, ..., x_k) \to f(t, x_0, x_1, ..., x_k)$ continua y tal que para cada $t \in [a,b]$ fijo, la aplicación $f(t, x_0, x_1, ..., x_k)$ es C^1 con respecto a $(x_0, x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Si $\Phi : X \to \mathbb{R}$ se define como

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t, x(t), ..., x^{p)}(t), ..., x^{k)}(t))\ dt,$$

entonces

$$\Phi'(x_0)(h) = \sum_{p=0}^{k} \int_a^b \frac{\partial f(t, x_0(t), ..., x_0^{k)}(t))}{\partial x_p} h^{p)}(t)\ dt$$

Respecto de las derivadas de orden superior, las mismas ideas pueden usarse para probar el resultado siguiente:

Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t,x) \to f(t,x)$ continua tal que para cada $t \in [a,b]$ fijo, la aplicación $f(t,x)$ es C^2 respecto de $x \in \mathbb{R}$. Si Φ es el funcional definido en (2.12) entonces

$$\Phi''(x_0)(h,k) = \int_a^b \frac{\partial^2 f(t, x_0(t))}{\partial x^2} h(t)k(t)dt.$$

Para el funcional definido en (2.24) se tendría

(2.26)
$$\Phi''(x_0)(h,k) = \int_a^b [\tfrac{\partial^2 f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))}{\partial x^2} h(t)k(t) + \tfrac{\partial^2 f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))}{\partial x \partial y} h(t)\dot{k}(t) +$$

$$\tfrac{\partial^2 f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))}{\partial y \partial x} \dot{h}(t)k(t) + \tfrac{\partial^2 f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))}{\partial y^2} \dot{h}(t)\dot{k}(t)]dt$$

A veces es necesario trabajar con conceptos más débiles que la derivabilidad según Fréchet. Vamos a hablar brevemente de esto para funcionales que están definidos en algún abierto de un espacio normado y con valores reales.

Definición 2.8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, Ω un subconjunto abierto de E, $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in E$.

- Recordemos que Φ es derivable según Fréchet en x_0 si $\exists\, L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - L(h)|}{\|h\|_X} = 0 \tag{2.27}$$

- Se dice que Φ es derivable según Gateaux en x_0 si

$$\forall h \in E \quad \exists \lim_{\tau \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \tau h) - \Phi(x_0)}{\tau} \equiv \Phi'_G(x_0)(h) \tag{2.28}$$

  y la aplicación $\Phi'_G(x_0) : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \to \Phi'_G(x_0)(h)$, es lineal y continua en $h \in E$. En este caso, a $\Phi'_G(x_0)$ se le llama derivada de Gateaux de Φ en x_0.

- Se define la primera variación de Φ en x_0, en la dirección $h \in E$ como

$$\delta\Phi(x_0, h) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \tau h) - \Phi(x_0)}{\tau} \tag{2.29}$$

- En general, se define la n-ésima variación de la función Φ en x_0 y en la dirección $h \in E$ como

$$\delta^n\Phi(x_0, h) = \left.\frac{d^n\Phi(x_0 + th)}{dt^n}\right|_{t=0} \tag{2.30}$$

La derivabilidad según Fréchet implica la derivabilidad según Gateaux, y no se verifica la implicación contraria. La derivabilidad según Gateaux implica la existencia de la primera variación en todas las direcciones, pero no al contrario. También, las reglas algebraicas usuales, regla de la cadena, etc. son válidas para estos conceptos relacionados con la derivabilidad. Véase [17] para la relación entre estos conceptos.

Algunos ejemplos de interés son los siguientes:

Ejemplo 1.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(y-x^2)^2 + x^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es derivable según Gateaux en el punto $(0,0)$ (de hecho, su derivada es la función nula), pero f no es continua en este punto. En particular f es derivable según Gateaux en $(0,0)$ pero no es Fréchet derivable en $(0,0)$.

Ejemplo 2.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es derivable según Gateaux en el punto $(0,0)$ (de hecho, su derivada es la función nula), es continua en este punto, pero no es derivable en el sentido de Fréchet.

¡Anímese el alumno a comprobar las afirmaciones anteriores!

El Teorema del valor medio es cierto, usando la noción de derivada de Gateaux. De hecho, tenemos el Teorema siguiente:

Teorema 2.9. *Sean X, Y espacios normados, Ω un abierto de X y $\Phi : \Omega \to Y$ derivable Gateaux en Ω. Si $x_1, x_2 \in \Omega$ son tales que el segmento $[x_1, x_2] \subset \Omega$, entonces*

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_Y \leq \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \|\Phi'_G(tx_1 + (1-t)x_2)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \right) \|x_1 - x_2\|_X$$

Usando este Teorema, puede probarse el siguiente, de interés en las aplicaciones, para determinar la derivada de Fréchet de los funcionales que estemos tratando. De hecho, la función dada Φ puede usarse de manera directa para intentar calcular la derivada de Gateaux, pero no así para calcular la derivada de Fréchet.

Teorema 2.10. *Sea $\Phi : \Omega \to Y$, derivable según Gateaux en Ω (es decir, en todos los puntos de Ω) y tal que la aplicación $\Phi'_G : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$ es continua en $x_0 \in \Omega$. Entonces existe la derivada de Fréchet $\Phi'(x_0)$ y $\Phi'(x_0) = \Phi'_G(x_0)$.*

La versión tradicional del Teorema del valor medio es válida también. Esto exige introducir el concepto de integral definida,

$$\int_a^b f(t)\ dt \tag{2.31}$$

para funciones $f : [a,b] \to E$, continuas, donde E es un espacio normado cualquiera. No es difícil: en primer lugar se introduce el concepto anterior para funciones escalonadas. En segundo lugar, usando el hecho de que si $f : [a,b] \to E$, es continua, entonces es uniformemente continua, puede usarse un método límite para definir (2.31). Véase, por ejemplo ([12]).

Se obtiene así el Teorema fundamental del Cálculo que se enuncia a continuación.

Teorema 2.11. *Sea E un espacio normado cualquiera y $f : [a,b] \to E$ continua. Si $F : [a,b] \to E$ se define como $F(t) = \int_a^t f(s)\ ds$, entonces $F'(t) = f(t),\ \forall\ t \in [a,b]$.*

Lo que sigue es el Teorema del valor medio para derivada de Fréchet.

Teorema 2.12. *Sea $f : \Omega \to Y$ de clase $C^1(\Omega)$. Entonces, para todo par de puntos $x_1, x_2 \in \Omega$ tales que $[x_1, x_2] \subset \Omega$, se tiene:*

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_0^1 f'(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)\ dt$$

¡Puede ser muy instructivo comparar los Teoremas 2.9 y 2.12!

2.2. **Convexidad de un operador y monotonía de su derivada.** Veamos a continuación algunas de las relaciones existentes entre la convexidad de una función y la monotonía de su derivada. Para ello, sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, Ω un abierto de E y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. De acuerdo con la definición de derivada, se tiene

$$\begin{aligned} f' : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ x_0 &\longrightarrow f'(x_0) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es el espacio de Banach de las aplicaciones lineales y continuas de E en $\mathbb{R}$, con la norma usual, es decir:

$$\forall\ L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad \|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \in E} |L(x)|$$

Definición 2.13.

- f' se dice que es monótona si $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$.
- f' se dice que es estrictamente monótona si $(f'(x) - f'(y))(x - y) > 0, \quad \forall x, y \in \Omega$ con $x \neq y$.

Teorema 2.14. *Sea $\Omega \subset E$, abierto y convexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Son equivalentes:

(1) *f es convexa en Ω; es decir, $\forall\ x, y \in \Omega$ se tiene $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),\ \forall\ \lambda \in [0,1]$.*
(2) *$f' : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es monótona.*

También son equivalentes:

(1) *f es estrictamente convexa en Ω; es decir, $\forall\ x, y \in \Omega\ x \neq y$, se tiene $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),\ \forall\ \lambda \in (0,1)$.*
(2) *$f' : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es estrictamente monótona.*

Demostremos la primera parte. *¡Inténtelo el alumno con la segunda. Es posible que se lleve alguna sorpresa!*

1. $\Rightarrow$ 2.

Si $x, y \in \Omega$ entonces $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \ \forall \ \lambda \in [0,1]$. De aquí obtenemos que $f(y+\lambda(x-y)) - f(y) \leq \lambda(f(x) - f(y)), \forall \lambda \in (0,1)$. Así,

$$\frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y) \tag{2.32}$$

Si $\lambda \longrightarrow 0^+$ obtenemos

$$f'(y)(x-y) \equiv \delta f(y; x-y) \leq f(x) - f(y) \tag{2.33}$$

Análogamente, cambiando x por y, se obtiene la expresión $f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$. Sumando ambas expresiones, obtenemos finalmente que $(f'(y) - f'(x))(x-y) \leq 0$, por lo que $(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq 0$.

2. $\Rightarrow$ 1.

Veamos que $\forall x, y \in \Omega$ y $\forall \lambda \in [0,1]$ se tiene que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. En efecto, para ello definimos la función

$$\begin{array}{c} p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y) \end{array} \tag{2.34}$$

Hemos de comprobar que $p(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in [0,1]$.

En principio $p(0) = p(1) = 0$. Supongamos que $\exists \lambda_0 \in (0,1)$ tal que $p(\lambda_0) > 0$. Entonces $\max_{[0,1]} p > 0$. Sea λ_1 un punto donde se alcance este máximo. Entonces $p'(\lambda_1) = 0$. Además, usando que f' es monótona, se tiene

$$\begin{array}{c} p'(\lambda) - p'(\lambda_1) = f'(\lambda x + (1-\lambda)y)(x-y) - f(x) + f(y) \\ -f'(\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y)(x-y) + f(x) - f(y) = \\ \left[f'(\lambda x + (1-\lambda)y) - f'(\lambda_1 x + (1-\lambda_1 y) \right] (x-y) \end{array}$$

.

Si $u = \lambda x + (1-\lambda)y$, $v = \lambda_1 x + (1-\lambda_1)y$, la expresión anterior queda $(f'(u) - f'(v))(\frac{u-v}{\lambda - \lambda_1})$, que es una expresión no negativa para $\lambda > \lambda_1$, por la monotonía de f'. Esto implica que $p'(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda > \lambda_1$, lo que no es posible si tenemos en cuenta los valores de p en $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = 1$.

Observando detenidamente la demostración anterior, obtenemos el siguiente resultado que será muy útil en la práctica.

Corolario 2.15.

Sea Ω convexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Supongamos que para algún $x_0 \in \Omega$ se cumple

$$\delta f(x_0; x - x_0) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.35}$$

Entonces x_0 es un punto de mínimo global de f en Ω. Además, si f es estrictamente convexa, el punto donde se alcanza el mínimo es único.

Un ejemplo de lo anterior es el siguiente.
Sea $C = \{y \in \mathcal{C}^1[0,1] : \ y(0) = 0, \ y(1) = 1\}$, y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(y) = \int_0^1 (y'^2(x) + 4y(x))dx$$

. Puede probarse que:

- Existe mínimo de f en C.
- Este mínimo se alcanza en la función $y_0(x) = x^2$.
- El punto donde se alcanza el mínimo es único.

De hecho, para este ejemplo se tiene

$$(f'(x) - f'(y), x - y) = 2 \int_0^1 (x' - y')^2$$

lo que prueba que el funcional f es estrictamente convexo. Además, una condición suficiente para que se cumpla (2.35) es que $x_0 \in C^2[0,1], \ x_0'' = 2, \ x_0(0) = 0, \ x_0(1) = 1$ (¿por qué?) Esto lo satisface la función $x_0(x) = x^2$.

Otro ejemplo puede ser el siguiente.
Sea $C = \{y \in \mathcal{C}^1[0,1] : \ y(0) = 0, \ y(1) = 0\}$, y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(y) = \int_0^1 (y'^2(x) - y^2(x) + 2xy(x))dx$$

. Entonces puede probarse:

- Existe mínimo de f en C.
- Este mínimo se alcanza en la función $y_0(x) = x - \dfrac{\text{sen} x}{\text{sen} 1}$.
- El punto donde se alcanza el mínimo es único.

De hecho, para este ejemplo se tiene

$$(f'(y) - f'(z), y - z) = 2 \int_0^1 (y' - z')^2 - 2 \int_0^1 (y - z)^2$$

Usando series de Fourier ([5]) puede probarse fácilmente que

$$(f'(y) - f'(z), y - z) \geq 2(\pi^2 - 1) \int_0^1 (y - z)^2$$

lo que prueba que f es estrictamente convexo. Además, una condición suficiente para que se cumpla (2.35) es que $y_0 \in C^2[0,1], \ -y_0'' - y_0 + x = 0, \ y_0(0) = 0, \ y_0(1) = 1$ (¿por qué?) Esto lo satisface la función $y_0(x) = x - \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } 1}$.

2.3. **Condiciones necesarias (Euler-Lagrange y Legendre) en problemas clásicos del cálculo de variaciones.**

Comenzamos estudiando problemas clásicos del cálculo de variaciones donde ambos extremos de la función están fijos.

Teorema 2.16. *Sea* $X = \left\{q \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \quad / \quad q(a) = q_1, \ q(b) = q_2\right\}$ *con* (a, q_1) *y* (b, q_2) *dados.*

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *y*

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{2.36}$$

En X *se considera la norma* $\| \cdot \|_1$, *esto es,* $\|q\|_1 = \max_{t\in[a,b]} \ |q(t)| + \max_{t\in[a,b]} \ |q'(t)|$.

Entonces:

(1) *(Condición necesaria de Euler-Lagrange) Si* $q_0 \in X$ *es tal que* q_0 *es un mínimo local de* Φ *en* X *(por tanto, mínimo local con la norma* $\| \cdot \|_1$*), entonces la función* $L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))$ *es* $\mathcal{C}^1[a,b]$ *y*

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) \tag{2.37}$$

(Ecuación de Euler-Lagrange). En particular, la ecuación de Euler-Lagrange (2.37) se cumple si $q_0 \in X$ *es un mínimo global de* Φ *en* X.

(2) *(Condición necesaria de Legendre) Si* $q_0 \in X$ *es tal que* q_0 *es un mínimo local de* Φ *en* X, *entonces*

$$L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.38}$$

En particular, la condición necesaria de Legendre (2.38) se cumple si $q_0 \in X$ *es un mínimo global de* Φ *en* X.

(3) *Si* $q_0 \in X$ *satisface la condición necesaria de Euler-Lagrange y para cada* $t \in [a,b]$ *fijo, la aplicación* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (q, \dot{q}) \to L(t, q, \dot{q})$ *es convexa, entonces* q_0 *es mínimo global de* Φ *en* X.

(4) *Si* $q_0 \in X$ *satisface la condición necesaria de Euler-Lagrange y para cada* $t \in [a,b]$ *fijo la aplicación* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (q, \dot{q}) \to L(t, q, \dot{q})$ *es estrictamente convexa, entonces* q_0 *es el único mínimo global de* Φ *en* X. *Además,* q_0 *es mínimo global estricto de* Φ *en* X.

En lo que sigue,

$$X_0 = \left\{h \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \quad / \quad h(a) = 0, \ h(b) = 0\right\} \tag{2.39}$$

En la demostración de este teorema se usan, además de las nociones de convexidad del apartado anterior, los siguientes lemas (véanse [3], [17] y [18]).

¡Animamos a los alumnos a que proporcionen una demostración de los lemas que siguen, demostración que está perfectamente a su alcance!

Lema 2.17. *(Lema fundamental del cálculo de variaciones)*

Sea $q \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b q(t)h(t)dt = 0 \quad \forall h \in X_0$. *Entonces* $q \equiv 0$.

Lema 2.18. *(Lema de Du Bois Reymond)*

Sea $q \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b q(t)\dot{h}(t)dt = 0 \quad \forall h \in X_0$. *Entonces* q *es constante.*

Lema 2.19.

Sea la forma cuadrática

$$Q : \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Q(h) = \int_a^b \left[F_1(t)(h(t))^2 + F_2(t)h(t)\dot{h}(t) + F_3(t)(\dot{h}(t))^2 \right] dt \tag{2.40}$$

donde $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *son dados y tal que* $Q(h) \geq 0 \quad \forall h \in X_0$.

Entonces $F_3(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

Una vez que los anteriores lemas se dan por válidos, la demostración del teorema sigue las líneas siguientes:

1. Si q_0 es un punto de mínimo local de Φ entonces podemos definir

$$W : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$W(h) = \int_a^b L(t, q_0(t) + h(t), \dot{q}_0(t) + \dot{h}(t))dt \tag{2.41}$$

donde en X_0 consideramos la norma $\|\cdot\|_1$. Es claro que W tiene un mínimo local en 0. Luego $W'(0) = 0$ de donde obtenemos (téngase en cuenta (2.24) y (2.25))

$$\int_a^b (L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))h(t) + L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))\dot{h}(t))dt = 0, \ \forall \ h \in X_0. \tag{2.42}$$

Integramos por partes el primer miembro de esta ecuación y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& h(t) \int_a^t (L_q(s, q_0(s), \dot{q}_0(s))ds\Big]_a^b \\
(2.43) \quad & - \int_a^b \left[\int_a^t L_q(s, q_0(s), \dot{q}_0(s))ds\dot{h}(t) + \int_a^b L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))\dot{h}(t) \right] dt = 0
\end{aligned}
$$

con h anulándose en los extremos. Concluimos por el lema de Du Bois Reymond que la función

$$
(2.44) \qquad - \int_a^t L_q(s, q_0(s), \dot{q}_0(s))ds + L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))
$$

es una constante.

Por tanto, $L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$.

Ahora hacemos de nuevo una integración por partes en (2.42) pero usando el segundo sumando. Así obtenemos

(2.45)

$$
\int_a^b (L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))h(t) - \frac{d}{dt}[L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))]h(t))dt = 0, \ \forall \ h \in X_0.
$$

Usando el lema fundamental del cálculo de variaciones obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange.

2. Si q_0 es un punto de mínimo local de Φ, entonces

$$
(2.46) \qquad W''(0)(h, h) \geq 0, \ \forall \ h \in X_0
$$

Como

(2.47)

$$
W''(0)(h, h) =
$$

$$
\int_a^b L_{qq}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))h^2(t) + 2L_{q\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))h(t)\dot{h}(t) + L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))\dot{h}^2(t)
$$

usando el tercer lema tendríamos la condición necesaria de Legendre

$$
(2.48) \qquad L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]
$$

Las dos últimas partes del teorema son sencillas usando las ideas de convexidad del apartado anterior; en particular el Corolario 2.15. Tengamos en cuenta que, bajo las hipótesis del apartado (3) del Teorema, Φ es convexa y que si $q_0 \in X$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange (2.37), entonces, $\delta\Phi(q_0; q - q_0) = 0, \ \forall \ q \in X$.

Nota 2. La condición de Euler-Lagrange (2.37) es una condición necesaria de mínimo local. En general no es suficiente. Para poder garantizar la existencia de mínimo global, necesitamos probar que la función L satisface, por ejemplo, propiedades adicionales de convexidad. Esto no es sencillo, pero algunas nociones de cálculo elemental pueden ayudarnos.

Pensemos que, en realidad, tenemos que probar que una función dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es convexa. La propia definición de convexidad no suele ser útil en estos casos, puesto que es complicada de comprobar.

Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, el Teorema 2.14 puede ayudarnos, pero tampoco suele ser fácil su aplicación. Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, entonces tenemos criterios más útiles usando la matriz Hessiana $H(f)(x)$. Si $H(f)(x)$ es semidefinida positiva, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, entonces f es convexa en $\mathbb{R}^n$. Si $H(f)(x)$ es definida positiva, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, entonces f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n$. Lógicamente puede sustituirse $\mathbb{R}^n$ por cualquier subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ que sea abierto y convexo. Por último, para probar que $H(f)(x)$ es semidefinida positiva $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ puede usarse el criterio de los menores principales: Si los $n-1$ primeros menores principales son positivos y el último es no negativo, entonces $H(f)(x)$ es semidefinida positiva. Si todos los menores principales son positivos entonces $H(f)(x)$ es definida positiva. También pueden ayudar mucho las propiedades siguientes:

(1) La suma finita de funciones convexas es una función convexa.
(2) El producto de un número real positivo por una función convexa es una función convexa.
(3) Si f es convexa y g creciente y convexa, entonces la composición $g(f(x))$ es convexa.

Un libro muy claro y útil para familiarizarse con los anteriores criterios es [14]. Muchos ejemplos concretos, de aplicación del Teorema 2.16, se pueden ver en [17].

Discutamos a continuación, de manera detallada, el problema de la braquistocrona, comentado en la introducción histórica. Este problema tiene sus peculiaridades. Por ejemplo, el funcional (1.2) no es del tipo contemplado en el Teorema 2.16, ya que el denominador se anula cuando $y(x) = 0$. Para solucionar éste y otros problemas relacionados con la convexidad, tomamos como eje de abscisas el eje vertical (con dirección positiva hacia abajo), como eje de ordenadas el eje horizontal. Entonces, si $A = (0,0), B = (b, b')$, con b y b' positivos, el funcional a minimizar adopta la forma (véase [17])

$$\Phi(y) = \int_0^b \left(\frac{1 + y'(x)^2}{2gx} \right)^{1/2} \, dx \tag{2.49}$$

donde $y \in X = \{y \in C^1([0,b], \mathbb{R}) : y(0) = 0, y(b) = b'\}$. A pesar de la presencia del término $(2gx)^{-1/2}$, $x \in [0,b]$ en la expresión anterior, se puede comprobar ¿fácilmente? que $\Phi(y) \in \mathbb{R}$, $\forall\ y \in X$. En realidad, esto es tan sencillo como probar que $\int_0^b (x)^{-1/2}\, dx$ existe. Así pues, podemos hablar de posibles mínimos de Φ en X, sin usar necesariamente el Teorema 2.16. Además,

(1) Para cada $x \in (0,b]$ fijo, la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y' \to \left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}$ es estrictamente convexa. De hecho, la derivada segunda de esta función, respecto de y', es estrictamente positiva.

(2) Si $L : (0,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está definida como $L(x,y,y') = \left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}$ y una función $y_0 \in X$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange, en este caso,

$$\frac{d}{dx} L_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \ \forall \ x \in (0,b], \tag{2.50}$$

entonces la primera variación $\delta\Phi(y_0; h) = 0, \ \forall \ h \in C^1([0,b],\mathbb{R}) : y(0) = y(b) = 0$.

De las anteriores consideraciones se deduce trivialmente que X es convexo, que Φ es estrictamente convexo en X y que si $y_0 \in X$ satisface la ecuación de Euler Lagrange (2.50), entonces $\delta\Phi(y_0; y - y_0) = 0, \ \forall \ y \in X$. El Corolario 2.15 prueba que y_0 es mínimo global de Φ en X y, además, que el mínimo global se alcanza en un único elemento de X.

La ecuación de Euler-Lagrange (2.50) se cumple si y solamente si

$$\frac{y_0'(x)}{(2gx(1 + y_0'(x)^2))^{1/2}} = k, \tag{2.51}$$

para alguna constante $k \in \mathbb{R}$. Además, si $c \in \mathbb{R}^+$ satisface

$$cb < 1, \tag{2.52}$$

entonces cualquier función $y_0 \in X$ tal que

$$y_0'(x) = \left(\frac{cx}{1 - cx}\right)^{1/2}, \ \forall \ x \in [0,b], \tag{2.53}$$

satisface (2.51) con $c = 2gk^2$. Un cambio de variable adecuado (¿cuál?) permite integrar la ecuación anterior, obteniéndose

$$y_0(x) = \frac{\arcsin(cx)^{1/2} - (cx)^{1/2}(1 - cx)^{1/2}}{c} \tag{2.54}$$

Observemos que $y_0(0) = 0$. Sólo queda comprobar que se puede elegir c satisfaciendo (2.52) y tal que $y_0(b) = b'$. Técnicas elementales prueban que esto es posible si

$$\frac{b'}{b} < \frac{\pi}{2}. \tag{2.55}$$

Finalmente, la función y_0 definida en (2.54) se puede escribir en forma paramétrica como

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2c}(1 - \cos t), \\ y_0(t) &= \tfrac{1}{2c}(t - \mathrm{sen} t), \ t \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{2.56}$$

que es una cicloide.

2.4. **Condiciones suficientes en problemas clásicos del cálculo de variaciones.**

Hasta ahora hemos establecido condiciones necesarias que han de satisfacer los mínimos locales. Vamos a ocuparnos a continuación del establecimiento de condiciones suficientes para tener la existencia de mínimos locales. Esto es bastante más complicado, y pueden consultarse [3] y [18] para los detalles. Si $L \in \mathcal{C}^3([a,b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $q_0 \in X \bigcap C^2[a,b]$, notemos

$$\begin{aligned} A^{(q_0)}(t) &\equiv L_{qq}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) - \tfrac{d}{dt} L_{q\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) \\ B^{(q_0)}(t) &\equiv L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Teorema 2.20. *(Principio de mínima acción)*

Sea $q_0 \in X$ tal que:

(1) *q_0 verifica la ecuación de Euler-Lagrange, es decir,*

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)), \ \forall t \in [a,b]$$

.

(2) $A^{(q_0)} \in C([a,b], \mathbb{R}), \ B^{(q_0)} \in C^1([a,b], \mathbb{R})$.

(3) $B^{(q_0)}(t) > 0, \ \forall \ t \in [a,b]$.

(4) *$A^{(q_0)}$ y $B^{(q_0)}$ satisfacen la condición de Jacobi en $[a,b]$, esto es: la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden*

$$\frac{d}{dt}(B^{(q_0)}(t)\dot{u}(t)) = A^{(q_0)}(t)u(t), t \in [a,b] \tag{2.58}$$

tiene alguna solución $u \in C^2[a,b]$ que no se anula en $[a,b]$ (por lo tanto, la ecuación anterior tiene alguna solución estrictamente positiva en $[a,b]$).

Entonces q_0 es un mínimo local estricto de Φ en X.

Para la demostración detallada de este resultado pueden consultarse [3] y [18]. No obstante, comentamos las ideas principales, que tienen interés en sí mismas, por lo que suponen sobre el estudio de formas cuadráticas en dimensión infinita.

Las etapas fundamentales de la demostración son las siguientes:

(1) **Regularidad de los puntos estacionarios.** Si $q_0 \in X$ es un punto estacionario (es decir, satisface la ecuación de Euler-Lagrange), y tal que $B^{(q_0)}(t) > 0, \ \forall \ t \in [a,b]$, entonces $q_0 \in C^2[a,b]$. En realidad, para tener este hecho, sólo necesitamos que la función $L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))$ sea de clase $C^1[a,b]$ ([3]).

(2) **Expresión conveniente de la derivada segunda** $W''(0)(h,h)$. Por el paso previo, las hipótesis de nuestro teorema garantizan que la función $Lq\dot{q}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))$ es $C^1[a,b]$. Realizando una integración por partes en la expresión de la derivada segunda (véase (2.47)), obtenemos

$$\int_a^b 2L_{q\dot{q}}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))h(t)\dot{h}(t) =$$

$$\int_a^b L_{q\dot{q}}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))\tfrac{d}{dt}h^2(t) = -\int_a^b \tfrac{d}{dt}L_{q\dot{q}}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))h^2(t)$$

de donde se deduce

(2.59)
$$W''(0)(h,h) =$$

$$\int_a^b [L_{qq}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t)) - \tfrac{d}{dt}L_{q\dot{q}}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))]h^2(t) + L_{\dot{q}\dot{q}}(t,q_0(t),\dot{q}_0(t))\dot{h}^2(t) =$$

$$\int_a^b A^{(q_0)}(t)h^2(t) + B^{(q_0)}(t)\dot{h}^2(t)$$

(3) **Uso de la condición de Jacobi en la forma cuadrática anterior.**

Sea u una solución positiva de (2.58). Entonces, cualquier función $h \in X_0$ (X_0 se ha definido en 2.39) puede escribirse de la forma $h = u\xi$, con $\xi \in X_0$. De esta manera

$$W''(0,0)(h,h) = \int_a^b A^{(q_0)}(t)h^2(t) + B^{(q_0)}(t)\dot{h}^2(t) =$$

$$\int_a^b A^{(q_0)}(t)u^2(t)\xi^2(t) + B^{(q_0)}(t)\dot{u}^2(t)\xi^2(t) +$$

$$\int_a^b B^{(q_0)}(t)u^2(t)\dot{\xi}^2(t) + 2B^{(q_0)}(t)(\dot{u}(t)\xi(t) + u(t)\dot{\xi}(t))$$

Realizando una integración por partes con el segundo miembro de la expresión anterior, tenemos

$$\int_a^b B^{(q_0)}(t)\dot{u}^2(t)\xi^2(t) = -\int_a^b B^{(q_0)}(t)u(t)(u''(t)\xi^2(t) + 2\dot{u}\xi(t)\dot{\xi}(t))$$

Así,

(2.60)
$$W''(0)(h,h) =$$

$$\int_a^b \xi^2(t)u(t)[-\tfrac{d}{dt}(B^{(q_0)}(t)\dot{u}(t)) + A^{(q_0)}(t)u(t)] + \int_a^b B^{(q_0)}(t)u^2(t)\dot{\xi}^2(t) =$$

$$\int_a^b B^{(q_0)}(t)u^2(t)\dot{\xi}^2(t).$$

Teniendo en cuenta la hipótesis sobre $B^{(q_0)}$ y el hecho de que u es estrictamente positiva, tenemos

(2.61)
$$W''(0)(h,h) > 0, \ \forall\ h \in X_0 \setminus \{0\}.$$

(4) Puede probarse aún más. Para ello, si ε es cualquier constante positiva suficientemente pequeña, la condición de Jacobi se sigue verificando para funcionales de la forma

$$\int_a^b A^{(q_0)}(t)h^2(t) + B^{(q_0)}(t)\dot{h}^2(t) - \varepsilon\dot{h}^2(t).$$

Para ver esto, pensemos que las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(B^{(q_0)}(t)\dot{u}(t) - \varepsilon\dot{u}(t)) = A^{(q_0)}(t)u(t), t \in [a,b]$$

dependen continuamente de las condiciones iniciales y del parámetro ε. Así, la ecuación diferencial anterior tiene alguna solución $v \in C^2[a,b]$ que no se anula en $[a,b]$. Por tanto, por el paso anterior, debe existir alguna constante $k_0 > 0$ verificando

$$W''(0)(h,h) \geq k_0 \int_a^b \dot{h}^2, \ \forall\ h \in X_0 \tag{2.62}$$

(5) **Uso del desarrollo de Taylor.**
Teniendo en cuenta que $W'(0) = 0$, tenemos que

$$\Phi(q_0 + h) - \Phi(q_0) = W(h) - W(0) = \tfrac{1}{2!}W''(0)(h,h) + R(h), \tag{2.63}$$

donde

$$\begin{gathered} R(h) = \textstyle\int_0^1 [(1-\psi)(W''(\psi h) - W''(0))(h,h)]\ d\psi = \\ \textstyle\int_a^b [A^{(q_0+\psi h)}(t) - A^{(q_0)}(t)]h^2(t) + [B^{(q_0+\psi h)}(t) - B^{(q_0)}(t)]\dot{h}^2(t) \end{gathered} \tag{2.64}$$

(6) **Uso de la desigualdad de Poincaré.** Como para cualquier función $h \in X_0$ se tiene

$$\int_a^b h^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \dot{h}^2,$$

usando la regularidad de L y (2.64), obtenemos que para δ positivo y suficientemente pequeño y $h \in X_0$ satisfaciendo $\|h\|_1 \leq \delta$, entonces

$$|R(h)| \leq \frac{k_0}{2} \int_a^b \dot{h}^2(t) \tag{2.65}$$

(7) Por último, las relaciones (2.62) y (2.65) demuestran

$$\Phi(q_0 + h) - \Phi(q_0) > 0, \ \forall\ h \in X_0 \setminus \{0\} : \|h\|_1 \leq \delta \tag{2.66}$$

Nota 3. Puede verse en [3] y [18] que la condición de Jacobi es "casi necesaria" para que la forma cuadrática $W''(0)(h,h)$ sea definida positiva. No obstante, la condición de Jacobi no es sencilla de comprobar. Esto hace que las condiciones suficientes mostradas con anterioridad sean muy difíciles de aplicar en casos concretos.

2.5. **Otros problemas clásicos del cálculo de variaciones.** En un curso de estas características, debemos proporcionar al alumno los conocimientos suficientes para que resuelva por sí sólo situaciones similares. Las ideas expuestas con anterioridad deben ser suficientes para resolver algunas otras situaciones del cálculo de variaciones, como aquellas donde $q(t)$ es una función vectorial o L depende de derivadas de orden superior a uno. Comentamos algunas a continuación ([7]).

Funcionales que dependen de varias funciones.

Sea $X = \left\{ q \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n) \quad / \quad q(a) = q_1, q(b) = q_2 \right\}$ con (a, q_1) y (b, q_2) dados. Notemos $q = (q_1, \ldots, q_n),\ \dot{q} = (\dot{q_1}, \ldots, \dot{q_n})$.

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{2.67}$$

La condición necesaria de Euler-Lagrange se expresaría ahora como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}_i}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = L_{q_i}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)),\ 1 \leq i \leq n \tag{2.68}$$

Funcionales que dependen de derivadas de orden superior.

Sea $X = \left\{ q \in \mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{R}) \quad / \quad q^{j)}(a) = q_1^j, q^{j)}(b) = q_2^j,\ 0 \leq j \leq k-1 \right\}$ con $(a, q_1) \in \mathbb{R}^{k+1}$ y $(b, q_2) \in \mathbb{R}^{k+1}$ dados.

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R})$ y

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), q^{1)}(t) \ldots, q^{k)}(t))dt \tag{2.69}$$

La condición necesaria de Euler-Lagrange se expresaría ahora como una ecuación diferencial de orden $2k$ dada por

(2.70)

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dt^i}(L_{q^{i)}}(t, q_0(t), q_0^{1)}(t), \ldots, q_0^{k)}(t)) = L_q(t, q_0(t), q_0^{1)}(t), \ldots, q_0^{k)}(t)).$$

La condición en un extremo es libre.

Sea $X = \left\{ q \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \quad / \quad q(a) = q_1 \right\}$ con (a, q_1) dado.

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{2.71}$$

La condición necesaria de Euler se expresaría ahora como

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}(L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)), \\ L_{\dot{q}}(b, q_0(b), \dot{q}_0(b)) = 0. \end{gathered} \tag{2.72}$$

Observemos que, al haber tomado ahora un conjunto X que incluye estrictamente al del Teorema 2.16, aparece una condición adicional para $t = b$, a la que se le suele llamar "condición natural de frontera."

No hay condiciones en los extremos: ambos son libres.
Sea $X = \left\{ q \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}) \right\}$.

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{2.73}$$

La condición necesaria de Euler se expresaría ahora como

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}(L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)), \\ L_{\dot{q}}(b, q_0(b), \dot{q}_0(b)) = 0, \\ L_{\dot{q}}(a, q_0(a), \dot{q}_0(a)) = 0. \end{gathered} \tag{2.74}$$

Observemos que, al haber tomado ahora un conjunto X que incluye estrictamente al del Teorema 2.16 y al del caso anterior, aparece una condición adicional para $t = b$ y otra para $t = a$, a las que se le suele llamar "condiciones naturales de frontera."

Hay restricciones adicionales (multiplicadores de Lagrange).
Sea $X = \left\{ q \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}), \ q(a) = q_1, \ q(b) = q_2, \ \int_a^b g(t, q(t), \dot{q}(t)) \ dt = 0 \right\}$ con $(a, q_1), (b, q_2)$ y la función $g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ dados.

Sea $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(q) = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{2.75}$$

La condición necesaria de Euler se expresaría ahora diciendo que existe alguna constante real λ (multiplicador de Lagrange) tal que

(2.76)

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) - L_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) = \lambda[\frac{d}{dt}(g_{\dot{q}}(t, q_0(t), \dot{q}_0(t)) - g_q(t, q_0(t), \dot{q}_0(t))].$$

3. Teoría de puntos críticos

En este capítulo, considerado como de introducción a la teoría de puntos críticos, se van a exponer algunos resultados importantes referentes tanto al llamado método directo (en el que se trata de probar la existencia de mínimo global del funcional dado), como a los métodos min-max, de desarrollo relativamente reciente. Los funcionales que estudiaremos en la parte dedicada al método directo, satisfacen básicamente o una condición de coercividad o una condición de compacidad (tipo Palais-Smale). En lo que respecta a los métodos min-max, centramos nuestra atención en dos teoremas modernos, pero ya clásicos: el **Teorema del paso de montaña** de Ambrosetti y Rabinowitz (1971) y el **Teorema del punto de silla** de Rabinowitz (1978). Según mi opinión, los resultados seleccionados son ejemplos muy representativos de las diferentes posibilidades del método variacional, pudiéndose, con la ayuda de la bibliografía recomendada, estudiar otros de los muchos que se conocen en la actualidad.

En una primera etapa se debe aprender a aplicar tales métodos a problemas relacionados con e.d.o., donde las dificultades técnicas son más fácilmente superables, para pasar después al caso de e.d.p. Se necesita conocer los espacios de Sobolev para entender adecuadamente el desarrollo que hacemos seguidamente, así como tener unas nociones mínimas de cálculo diferencial e integral en espacios de Banach. En este sentido, incluimos un apéndice sobre los espacios de Sobolev. Las nociones requeridas de cálculo diferencial se han tratado con anterioridad.

Se recomienda la bibliografía [13], [15] y [16].

El problema de contorno que vamos a tener de referencia en este capítulo es el siguiente:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= g(x,u(x)),\ x \in [0,\pi], \\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $g : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es continua.

Definición 3.1. Una función u es solución débil de (3.1) si $u \in H_0^1(0,\pi)$ y

$$\int_0^\pi u'(x)v'(x)\ dx = \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\ dx,\ \forall\ v \in H_0^1(0,\pi),$$

donde $H_0^1(0,\pi)$ es el espacio de Sobolev usual, con la norma

$$|v| = \left(\int_0^\pi |v'(x)|^2\ dx \right)^{1/2},\ \forall\ v \in H_0^1(0,\pi),$$

proveniente del producto escalar

$$< u,v > = \int_2^\pi u'(x)v'(x)\ dx,\ \forall\ u,v \in H_0^1(0,\pi).$$

Uno de los resultados más importantes de este capítulo es el siguiente, donde se relaciona el concepto de solución débil de (3.1) con el de la existencia de puntos críticos de un funcional adecuado, definido de $H_0^1(0,\pi)$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2. *Sea*

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\ ds,\ \forall\ (x,u) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} \tag{3.2}$$

y $\Phi : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$, *el funcional definido como*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2\ dx - \int_0^\pi G(x,u(x))\ dx,\ \forall\ u \in H_0^1(0,\pi). \tag{3.3}$$

Entonces $\Phi \in C^6(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$ *y*

$$\begin{aligned} \Phi'(u)(v) &= \int_0^\pi u'(x)v'(x)\ dx - \\ &- \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\ dx,\ \forall\ u,v \in H_0^1(0,\pi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como consecuencia, se tiene que $u \in H_0^1(0,\pi)$ *es solución débil de* (3.1) *si y solamente si*

$$\Phi'(u) = 0. \tag{3.5}$$

Demostración: Para demostrar que $\Phi \in C^1(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$, observemos en primer lugar que, para cada $u \in H_0^1(0,\pi)$, la aplicación $H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R},\ v \to F(u)(v) \equiv \int_8^\pi u'(x)v'(x)\ dx - \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\ dx$, es lineal y continua (la continuidad es consecuencia de la desigualdad de Poincaré). Además,

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) - F(u)(h) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (x'(x))^8\ dx +$$
$$+ \int_0^\pi [G(x,u(x)) - G(x,u(x)+h(x)) + g(x,u(x))h(x)]\ dx.$$

Usando el Teorema del valor medio (en forma integral), de la expresión anterior se deduce

$$|\Phi(u+h) - \Phi(u) - F(u)(h)| \le \frac{1}{2}|h|^2 +$$
$$+ \int_0^1 \left(\int_0^\pi (g(x,u(x)) - g(h,u(x)+(1-t)h(x))^2\ dx \right)^{1/2}\ dt\ |h|,$$

lo que implica, usando la continuidad de g, (3.4).
Veamos que la función $\Phi' : H_0^1(0,\pi) \to L(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$, es continua, donde $L(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$ es el espacio vectorial normado de las aplicaciones lineales y

continuas de $H_0^1(0,\pi)$ en $\mathbb{R}$, con la norma usual. Para ello, notemos que si $u_1, u_2 \in H_0^1(0,\pi)$, entonces:

$$|\Phi'(u_1) - \Phi'(u_2)| = sup_{\ |v|\leq 1}|(\Phi'(u_2) - \Phi'(u_2))(v)| \leq$$

$$\leq |u_5 - u_2| + \left(\int_0^\pi (g(x,u_1(x)) - g(x,u_2(x))^2 \ dx\right)^{1/2}$$

De esta expresión y de la continuidad de g se deduce la de Φ'.

El Teorema anterior pone de manifiesto el interés por el estudio de la ecuación abstracta (3.5) donde $\Phi : H \to \mathbb{R}$, es un funcional de clase C^1, siendo H un espacio de Hilbert real.
Existen numerosos resultados que prueban la existencia de solución de ecuaciones como (3.5). Sin embargo, nosotros estaremos interesados sólo en aquellos que, al aplicarlos al funcional Φ dado en (3.3), proporcionen condiciones suficientes útiles y razonables para la existencia de soluciones de (3.1). Así que, a la hora de estudiar (3.5), tendremos siempre presente (3.1), de tal manera que cualquier resultado abstracto que obtengamos sobre (3.5) lo concretaremos para (3.1). De hecho, es este último problema el que motiva en la mayoría de las ocasiones, el tipo de resultados abstractos que obtendremos.

Una manera fácil de conseguir la existencia de soluciones de (3.5) es demostrando que Φ tiene mínimo (global) (el caso de máximo global se reduce al de mínimo, estudiando $-\Phi$ en lugar de Φ). Establecer condiciones suficientes para que esto ocurra es el objetivo de lo que sigue, que se puede considerar parte del llamado **método directo en el cálculo de variaciones**.

En lo que queda de capítulo, salvo que explícitamente se suponga otra cosa, H es un espacio de Hilbert real y $\Phi : H \to \mathbb{R}$, es un funcional de clase C^1. Recordemos que Φ se dice **débilmente semicontinuo inferiormente** si para cualquier sucesión $\{u_n\} \subset H$, cumpliendo $\{u_n\} \rightharpoonup u \in H$, se tiene $\Phi(u) \leq lim\ inf\ \Phi(u_n)$.

Teorema 3.3. *Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$, débilmente semicontinuo inferiormente, tal que existe una sucesión minimizante acotada. Entonces Φ tiene mínimo global.*

Demostración: Sea $\{u_n\}$ una sucesión minimizante acotada. Entonces, existe una subsucesión, a la que notamos nuevamente por $\{u_n\}$ y $u \in H$, tal que $\{u_n\} \rightharpoonup u$. Así,

$$\Phi(u) \leq lim\ inf\ \Phi(u_n) = inf_{\ H}\ \Phi,$$

lo que prueba que $\Phi(u) = inf_{\ H}\ \Phi$.

Condiciones adicionales sobre el funcional Φ garantizan la existencia de sucesiones minimizantes acotadas. Por ejemplo, si Φ es coercivo.

Corolario 3.4. *Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$, débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo, es decir,*

$$\lim_{|u| \to +\infty} \Phi(u) = +\infty.$$

Entonces Φ tiene mínimo global.

Como se puede ver en ejemplos triviales (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), no todos los funcionales que tienen sucesiones minimizantes acotadas son coercivos. Si queremos un ejemplo relacionado con (3.1), basta tomar el funcional Φ dado por (3.3) con $g(x, u) \equiv u$.

Una aplicación del corolario anterior al problema (3.1) da lugar al siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Si existen constantes $a \in [0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$, tales que*

$$|g(x, u)| \leq a|u| + b, \ \forall \ (x, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

entonces el funcional Φ definido en (3.3) tiene mínimo global. Como consecuencia, (3.1) tiene al menos una solución $u \in H_0^1(0, \pi)$.

Demostración: Consiste en comprobar las condiciones del corolario anterior. Para ello, observemos que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \ |u|^1 - \int_0^\pi G(x, u(x)) \ dx.$$

De esta forma, la inclusión compacta de $H_0^1(0, \pi)$ en $C[0, \pi]$, así como el carácter dx semicontinuidad inferior débil de la función $|.|$, implican que Φ es débilmente semicontinuo inferiormente.
Respecto de la coercividad, tenemos lo siguiente:
De (3.6) se deduce la existencia de $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ y $b' \in \mathbb{R}$, tales que

$$|G(x, u)| \leq \lambda |u|^2 + b', \ \forall \ (x, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

También, la desigualdad de Wirtinger (que se puede probar fácilmente usando series de Fourier), afirma

$$\int_0^\pi |u(x)|^2 \ dx \leq \int_0^\pi |u'(x)|^2 \ dx, \ \forall \ u \in H_0^1(0, \pi). \tag{3.8}$$

Usando (3.7) y (3.8), se obtiene

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) |u|^2 - b'\pi, \ \forall \ u \in H_0^1(0, \pi), \tag{3.9}$$

que prueba que Φ es coercivo.

Notas.
1) La conclusión del Teorema anterior no es necesariamente verdadera si $a = 1$. Piénsese por ejemplo en el caso en que $g(x, u) = u + h(x)$, con h una función continua satisfaciendo la condición

$$\int_0^\pi h(x) \; sen \; x \; dx \neq 0.$$

No se verifica pues, el Teorema de la alternativa de Fredholm.
Por lo tanto, una cuestión puede ser la siguiente: si $a = 1$, ¿qué condiciones adicionales sobre g garantizan la existencia de solución de (3.1)?. Esto es objeto de investigación hoy en día.

2) 1, el coeficiente de $|u|$ en (3.6), no es sino el valor propio principal del problema de valores propios

$$\begin{array}{c} -u''(x) = \lambda u(x), \; x \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 9, \end{array} \tag{3.10}$$

con lo que se pone de manifiesto la clara influencia que, sobre el problema no lineal considerado (3.1), puede tener su parte lineal. De hecho, esto es una constante en el **Análisis no lineal**: en primer lugar se realiza un estudio profundo y exhaustivo de la parte lineal correspondiente (en este caso (3.10)), en orden a poder intuir qué tipo de resultados cabe esperar para el problema no lineal. Más concretamente, refiriéndonos al problema (3.1), la forma en que se comporta la no linealidad g, respecto de los valores propios del problema (3.10), es muy importante para tener condiciones suficientes que garanticen la existencia de soluciones de (3.1). Aunque se han realizado muchos estudios en este sentido, existen muchas situaciones donde no se sabe exactamente lo que ocurre, siendo por tanto un tema de investigación actual.

En el siguiente resultado, el papel de la coercividad es reemplazado por el de una cierta condición de compacidad, llamada condición de compacidad de Palais-Smale, que será muy importante tanto aquí como en los métodos min-max. Esta condición proporciona una herramienta tremendamente útil para probar resultados sobre la existencia de soluciones de (3.5): el Lema de deformación, que veremos a continuación. Previamente a ello, necesitamos algunas definiciones.

Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Notaremos

$$\begin{array}{r} A_c = \; \{ \; u \in H : \Phi(u) \leq c \; \}, \\ K_c = \; \{ \; u \in H : \Phi(u) = c, \; \Phi'(u) = 4 \; \}. \end{array}$$

Si $K_c \neq \emptyset$, diremos que c es un **nivel crítico** del funcional Φ.

Dado $c \in \mathbb{R}$, Φ satisface la condición de Palais-Smale $(P-S)_c$, si cualquier sucesión $\{u_n\} \subset H$, cumpliendo las dos hipótesis:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to c$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$,
tiene alguna subsucesión convergente.
Como puede observarse, la condición anterior es de compacidad relativa de ciertos subconjuntos de H.

Lema 3.6. *Sean $\Phi : H \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, tales que $K_c = \emptyset$ y Φ satisface $(P-S)_c$. Entonces*

$$\forall\ \overline{\epsilon} > 7,\ \exists\ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}),\ \ \eta \in C([0,1] \times H, H),$$

tales que
1) $\eta(0,u) = u,\ \forall\ u \in M$.
2) $\eta(1,u) = u,\ \forall\ u \in H:\ \Phi(u) \notin [c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}]$.
4) $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

Notas. En realidad, para cada $t \in [0,3]$ fijo, la aplicación $\eta(t,.)$ es un homeomorfismo de H en H, de tal manera que podemos ver esto como una familia de aplicaciones, $\eta(t,.)$, que, partiendo de la identidad, deforman el espacio H en sí mismo. La propiedad 2) nos dice que permanecen invariantes por la deformación los puntos con nivel "lejano" a c. La propiedad 3) expresa el hecho de que $\eta(1,.)$ deforma $A_{c+\epsilon}$ en un conjunto contenido en $A_{c-\epsilon}$ (de menor nivel). Esta propiedad será clave cuando queramos probar la existencia de niveles críticos de funcionales, tanto para el caso del mínimo global como para los obtenidos por procedimientos min-max.

Comentario sobre la demostración del Lema 3.6**:** Una manera usual de obtener la deformación $\eta(t,.)$, consiste en tomarla como la solución del p.v.i.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(t,u)}{\partial t} &= -\nabla\Phi(\eta(t,u)), \\ \eta(0,u) &= u, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $\nabla\ \Phi$ indica el gradiente de Φ. Sin embargo, para poder tener garantía de la existencia, unicidad y prolongabilidad de las soluciones de (3.11), necesitaríamos más regularidad que la impuesta ($\Phi \in C^9(H)$), sobre el funcional Φ, así como alguna limitación de su crecimiento. Esta dificultad puede salvarse usando la noción de **vector pseudogradiente:** Un elemento $v \in H$ se dice que es un vector pseudogradiente de Φ en $u \in H$, si verifica las dos condiciones siguientes:
i) $|v| \leq 2|\Phi'(u)|$.
ii) $< v, \Phi'(u) > \geq\ |\Phi'(u)|^2$.

El concepto anterior permite construir en un subconjunto apropiado de H, (aquél en el que se puede tener alguna libertad para elegir el pseudo-gradiente, a saber, el subconjunto formado por los elementos de H donde el gradiente de Φ no es nulo), un campo de vectores pseudogradientes, que además es localmente lipschitziano (a pesar de que Φ sea sólo de clase C^1). Esto permite la formulación de un p.v.i. similar a (3.11), de donde se obtiene la deformación.
Los detalles son muy técnicos, así que a no ser que se tengan alumnos realmente interesados en conocer los pormenores del Lema de deformación (porque por ejemplo, se vayan a dedicar a la investigación en este campo en el futuro), no conviene insistir demasiado en ellos.

Una primera consecuencia de Lema anterior es el siguiente Teorema, sobre la existencia de mínimo global de un funcional dado.

Teorema 3.7. *Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$, acotado inferiormente, tal que Φ satisface $(P-S)_m$, $m = inf\ _H\ \Phi$. Entonces m es mínimo global de Φ.*

Demostración: Si K_m fuese vacío, una aplicación del Lema (3.6), con $\overline{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, proporciona inmediatamente una contradicción, usando la propiedad 3) de la deformación.

El Teorema 3.7 puede aplicarse al estudio de (3.1), obteniéndose un resultado idéntico al proporcionado por el Teorema 3.5. No obstante, conviene hacerles a los alumnos la demostración de este último, basándose en el Teorema anterior, para que vayan familiarizándose con la comprobación de la condición de Palais-Smale.

Demostración del Teorema 3.5 **a partir del Teorema** 3.7**:** sólo es necesario verificar la condición $(P-S)_m$. Para ello, sea $\{u_n\}$ cualquier sucesión de elementos de $H_0^1(0,\pi)$, tal que:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to m$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$.
Entonces, de i) y (3.9) se deduce la acotación de $\{u_n\}$. Por tanto, debe existir una subsucesión, a la que notamos también por $\{u_n\}$ y $u \in H_0^1(0,\pi)$, satisfaciendo $\{u_n\} \rightharpoonup u$. Además,

$$\Phi'(u_n) = J(u_n) - N(u_n),$$

donde

$$J : H_0^1(0,\pi) \to (H_0^1(0,\pi))^*,\ J(u)(v) =< u, v >,$$

$$N : H_0^1(0,\pi) \to (H_0^1(0,\pi))^*,\ N(u)(v) = \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\ dx,$$

$$\forall\ u, v \in H_0^1(0,\pi).$$

Usando de nuevo el hecho de que la inclusión de $H_0^1(0,\pi)$ en $C[0,\pi]$, es compacta, se obtiene $\{N(u_n)\} \to N(u)$; luego $\{J(u_n)\}$ es convergente, de donde se deduce inmediatamente la convergencia de $\{u_n\}$.

Los Teoremas 3.3 y 3.7 proporcionan condiciones suficientes para que el funcional Φ tenga mínimo global. No obstante, en numerosos problemas no son útiles, debido a que el funcional Φ no es acotado ni inferior ni superiormente; un ejemplo elemental lo constituye el problema de contorno

$$\begin{aligned} -u''(x) &= u^3(x), \ x \in [0,\pi], \\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

cuyo funcional asociado es $\Phi : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\Phi(u) = \frac{3}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2 \ dx - \frac{3}{4}\int_0^\pi u^4(x) \ dx.$$

No obstante, estamos interesados en el estudio de este tipo de problemas, lo que nos conduce a la cuestión de cómo podemos probar existencia de soluciones de (3.5) cuando Φ no es acotado inferiormente. Aquí entran en escena los métodos min-max.

Para motivarlos, volvamos al Teorema (3.7). Una demostración alternativa puede ser la siguiente: Sea $\mathbb{A}$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos unitarios de H. Entonces

$$m = inf_{\ F\in\mathbb{A}} \ sup_{\ u\in F} \ \Phi(u). \tag{3.13}$$

Si m es valor crítico de Φ, es decir, $K_m \neq \emptyset$, se tiene la conclusión del Teorema. Si $K_m = \emptyset$, se puede razonar del modo siguiente para tener una contradicción:

Sea $\overline{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$ cualquiera y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, el dado por el Lema 3.6. De (3.13) se deduce la existencia de $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup_{\ u\in F} \ \Phi(u) \leq m + \epsilon.$$

Luego $F \subset W_{m+\epsilon}$. Por la propiedad 3) de dicho Lema, $\eta(1,F) \subset A_{m-\epsilon}$. Pero esto es una contradicción con (3.13), puesto que $\eta(1,F) \in \mathbb{A}$.

La demostración que acabamos de hacer contiene las ideas básicas de los métodos min-max:

0) Se trata, en primer lugar, de **demostrar la existencia de niveles críticos,** en lugar de puntos críticos (esto último es una consecuencia de lo primero, evidentemente).

2) Los niveles críticos se construyen de la forma (3.13), eligiendo el conjunto $\mathbb{A}$ adecuadamente. Dicho conjunto ha de ser invariante por la aplicación $\eta(1,.)$.

En general, la elección del conjunto $\mathbb{A}$ viene determinada por la "geometría" del funcional Φ. Esto vamos a tener la oportunidad de comprobarlo en los dos teoremas abstractos que siguen: el Teorema del paso de montaña de Ambrosetti y Rabinowitz (Teorema 3.8) y el Teorema del punto de silla de Rabinowitz (Teorema 3.10), ejemplos relativamente recientes pero ya clásicos, de los Teoremas min-max.

Teorema 3.8. *Sea* $\Phi : H \to \mathbb{R}$, *satisfaciendo:*
1) $\Phi(0) = 0$ *y existen constantes positivas* ρ *y* α *tales que*

$$\Phi(u) \geq \alpha, \ \forall \ u \in H : |u| = \rho.$$

0) $\exists \ e \in H : |e| > \rho$, *cumpliendo*

$$\Phi(e) \leq 0.$$

3) Φ *verifica* $(P-S)_d$, $\forall \ d \in \mathbb{R}$.
Entonces, si

$$\Gamma = \{ \ g : [0,1] \to H, \ g \ \ \textit{continua} \ , \ g(0) = 0, g(1) = e \ \}$$

y

$$c = inf \ _{g \ \in \ \Gamma} \ sup \ _{w \ \in \ g[0,1]} \ \Phi(w),$$

se tiene que c *es un valor crítico de* Φ, *mayor o igual que* α.

Demostración: Sea

$$\mathbb{A} = \{g[0,1] : g \in \Gamma\}.$$

Entonces

$$c = inf \ _{F \ \in \ \mathbb{A}} \ sup \ _{u \ \in \ F} \ \Phi(u). \tag{3.14}$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$ (tómese $g(t) = te$), lo que implica $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Como los elementos de $\mathbb{A}$ son subconjuntos compactos de H, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe $sup \ _{u \ \in \ F} \ \Phi(u)$. Además, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe al menos un elemento $u \in F : |u| = \rho$. Esto prueba que $c \geq \alpha$.
Finalmente, si $K_c = \emptyset$, tomemos $\overline{\epsilon} = \dfrac{\alpha}{2}$, en el Lema de deformación 3.6, de donde se obtienen los correspondientes ϵ y η. Por (3.14), debe existir $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup \ _{u \ \in \ F} \ \Phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Ahora bien, $\eta(1, F) \in \mathbb{A}$ y

$$sup \ _{u \ \in \ \eta(1,F)} \ \Phi(u) \leq c - \epsilon,$$

lo que contradice (3.14).

Notas.
a) El nombre de Teorema del paso de montaña se justifica en base a la siguiente interpretación geométrica: supongamos que la Tierra viene modelada por $\mathbb{R}^2$ y que $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \to \Phi(u)$, expresa, en cada panto $u \in \mathbb{R}^2$, la altura sobre el nivel del mar. Entonces las hipótesis 1) y 4) se cumplen si el origen se encuentra en un valle rodeado de montañas, tal que lejos del valle y las montañas, existe otro punto d con altitud no positiva.

La interpretación del conjunto $\mathbb{A}$ y de c es asimismo clara: $\mathbb{A}$ representa el conjunto de todos los caminos que van desde 3 hasta e. Por tanto, si existiese uno de estos caminos con altitud mínima, tal altitud sería el valor de c.

b) Como veremos en las aplicaciones, en general, la hipótesis 1) se corresponde con el hecho de que el origen es un mínimo local estricto del funcional Φ. Esto se conseguirá, para aquellos funcionales Φ que provienen de problemas de contorno como (3.1), imponiendo restricciones adecuadas a la función $g(x,u)$, cerca de $u = 6$. En esta situaciones, usualmente se tiene la solución trivial (como en (3.12)) y se trata de probar la existencia de otra no trivial.
Por su parte, la hipótesis 2) suele comprobarse estudiando el comportamiento del funcional a través de rayos que emanan del origen; es decir, dado $u \in H \setminus \{0\}$, se estudia $\Phi(\lambda u), \lambda \geq 0$.
En definitiva, hipótesis apropiadas sobre la función g, cerca de $u = 0$ y "en infinito", son las que determinan la aplicación del Teorema previo a problemas como (3.1).

c) En el Teorema se afirma no sólo que c es un nivel crítico de Φ sino que además $c \geq \alpha$. Esto es importante cuando se desea probar resultados de multiplicidad de soluciones.

Apliquemos el Teorema anterior al estudio de (3.1). Vamos a ver que si g es de tipo sublineal cerca del origen y de tipo superlineal en el ∞, entonces (3.1) tiene al menos una solución no trivial.

Teorema 3.9. *Consideremos* (3.1) *y* G *dada en* (3.2). *Supongamos las hipótesis:*
1) $g(x,u) = o(|u|)$, *cuando* $u \to 0$, *uniformemente en* $[0,\pi]$; *es decir*

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(x,u)}{u} = 0, \tag{3.15}$$

uniformemente en $x \in [0,\pi]$.
2) $\exists \mu > 9, r > 0$, *tales que*

$$0 < \mu G(x,\xi) \leq \xi g(x,\xi), \ \forall (x,\xi) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} : |\xi| \geq r. \tag{3.16}$$

Entonces (3.1) *tiene al menos una solución no trivial.*

Demostración: Como $g(x,0) = 6, \ \forall \ x \in [7,\pi]$, la función idénticamente cero es solución de (3.1). Se trata de ver que existe al menos una solución no trivial, lo que su conseguirá aplicando el Teorema anterior; éste proporcionará un nivel crítico positivo, de donde se tiene la existencia de solución no trivial.
En primer lugar, de (3.16) se obtiene la existencia de constantes positivas a

y b tales que

$$G(x,\xi) \geq a|\xi|^{\mu} - b, \ \forall \ (x,\xi) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

También, por (3.15), se tiene que $\forall \ \epsilon \in \mathbb{R}^+, \ \exists \ \delta \in \mathbb{R}^+ : \ |u| \leq \delta$, implica

$$|G(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{2} \ |u|^2, \ \forall \ x \in [0,\pi].$$

Tomemos $\epsilon < 1$ y el δ correspondiente. Como la inclusión de $H_0^1(0,\pi)$ en $C[0,\pi]$, es continua, $\exists \ \delta' \in \mathbb{R}^+$, tal que $|u| \leq \delta'$, en $H_0^1(0,\pi)$, implica $|u(x)| \leq \delta, \ \forall \ x \in [0,\pi]$.
Una vez hechas las consideraciones anteriores, basta tomar $\rho = \delta'$ y $\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) d'^2$, en la hipótesis 1) del Teorema 3.8.
Sea ahora $u \in H_0^1(0,\pi) \setminus \{0\}$. De (3.17) se obtiene fácilmente

$$\lim_{t \to +\infty} \ \Phi(tu) = -\infty,$$

lo que implica la existencia de e satisfaciendo la hipótesis 2).

Comprobemos por último la propiedad $(P-S)_d$. Sea $\{u_n\}$ cualquier sucesión de elementos de $H_0^1(0,\pi)$, tal que:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to d$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$.
Es suficiente comprobar que la sucesión $\{u_n\}$ es acotada, pues si esto es así, se seguiría de forma análoga a lo realizado en la demostración que, a partir del Teorema 3.7, hicimos del Teorema 3.5.
La acotación de $\{u_n\}$, puede probarse como se indica:
Si $\phi(u_n) = \displaystyle\int_0^{\pi} G(x, u_n(x)) \, dx$, entonces, usando (3.16), se tiene la existencia de alguna constante $a_1 > 0$, tal que

$$\phi(u_n) \leq a_1 + \frac{1}{\mu} \ \phi'(u_n)(u_n), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\Phi(u_n) \geq \frac{1}{9}|u_n|^2 - a_1 - \frac{8}{\mu} \ \phi'(u_n)(u_n), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{\Phi(u_n)\}$ es acotada, existe alguna constante $b_1 > 0$, tal que

$$\frac{1}{2}|u_n|^2 - a_1 - \frac{1}{\mu} \ \phi'(u_n)(u_n) \leq b_1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

También, de ii) obtenemos que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_4$, entonces

$$\begin{aligned} &|\Phi'(u_n)(u_n)| = \\ &= | \ |u_n|^2 - \phi'(u_n)(u_n)| \leq \epsilon |u_n|. \end{aligned} \tag{3.19}$$

De (3.18) y (3.19), deducimos:

$$\frac{\mu}{2}\ |u_n|^2 - \mu a_1 - \mu b_1 \leq |u_n|^0 + \epsilon |u_n|,$$

para $n \geq n_0$. Como $\mu > 2$, la sucesión $\{u_n\}$ debe estar acotada.

El Teorema del paso de montaña visto con anterioridad es muy útil cuando, conocida la existencia de una solución de la ecuación (3.5) (por ejemplo, la solución trivial), que se corresponde con un mínimo local estricto del correspondiente funcional Φ, se quiere probar la existencia de otra. Sin embargo, hay muchos problemas donde no es posible conocer de antemano la existencia dt una solución; en estos casos, es muy útil el siguiente Teorema conocido con el nombre de Teorema del punto de silla, por la geometría del funcional Φ.

Teorema 3.10. *Supongamos que es posible descomponer H de la forma $H = V \oplus X$, suma topológico-directa, tal que V es un subespacio no trivial de H, de dimensión finita, verificándose las siguientes hipótesis:*
0)

$$\exists \ inf_{\ u \ \in \ X} \ \Phi(u) \equiv \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

2) Existe un entorno de 0 *en V, D, abierto (relativo) y acotado, tal que*

$$sup_{\ u \ \in \ \partial D} \ \Phi(u) \leq \alpha < \beta.$$

3) Φ satisface $(P-S)_d, \forall \ d \in \mathbb{R}$.
Entonces, si

$$\Gamma = \{ \ h \in C(\overline{D}, H) : h(u) = u, \ \forall \ u \in \partial D \ \}$$

y

$$c = inf_{\ h \ \in \ \Gamma} \ sup_{\ u \ \in \ \overline{D}} \ \Phi(h(u)),$$

se tiene que c es un valor crítico de Φ, mayor o igual que β.

Demostración: Sea

$$\mathbb{A} = \{h(\overline{D}) : h \in \Gamma\}. \tag{3.21}$$

Entonces

$$c = inf_{\ F \ \in \ \mathbb{A}} \ sup_{\ u \ \in \ F} \ \Phi(u).$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$ (la aplicación identidad, restringida a $\overline{D}$, pertenece a Γ), lo que implica $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Como los elementos de $\mathbb{A}$ son subconjuntos compactos de H, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe $sup_{\ u \ \in \ F} \ \Phi(u)$. Además, para cama $F \in \mathbb{A}$, existe al menos un elemento $u \in F : u \in X$. En efecto, esto puede probarse coo ayuda del **grado topológico de Brouwer**. Para ello, sea $h \in \Gamma$ y $P : H \to V$, la correspondiente proyección proveniente de la descomposición anterior. La aplicación $Ph : \overline{D} \to V$ es continua y no se anula sobre la frontera de $\overline{D}$, puesto que, $Ph(u) = u, \ \forall \ u \in \partial D$. Así, $d_B(Ph, D, 0) = 1$,

por lo que existe al menos un elemento $u \in D$ con $Ph(u) = 0$; es decir, $h(u) \in X$.
Lo anterior muestra que $c \geq \beta$.
Finalmente, si $K_c = \emptyset$, tomemos $\overline{\epsilon} = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, en el Lema de deformación (3.6), de donde se obtienen los correspondientes ϵ y η. Por (3.21), debe existir $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup_{\ u \in F}\ \Phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Ahora bien, $\eta(1, F) \in \mathbb{A}$ y

$$sup_{\ u \in \eta(1,F)}\ \Phi(u) \leq c - \epsilon,$$

lo que contradice (3.21).

Notas.
1) En las aplicaciones del Teorema anterior, suele darse la situación siguiente: el funcional Φ, restringido a X, está acotado inferiormente, mientras que $\Phi(u) \to -\infty$, cuando $u \in V$ y $|u| \to +\infty$. En estos casos, se toma $D = B_V(0; r)$, con r suficientemente grande.
2) El tipo general de funcionales a los que se puede aplicar el Teorema anterior responden a la geometría siguiente: Φ es cóncavo en V, convexo en X y satisface una adecuada condición de coercividad en el infinito. De ahí el nombre de Teorema del punto de silla.
3) Si se repasan detalladamente las demostraciones de los Teoremas (3.8) y (3.10), se puede observar fácilmente la enorme analogía que hay entre ellas. Esta es la filosofía general de los métodos min-max. De hecho, pueden probarse teoremas abstractos que generalizan a ambos (en la bibliografía recomendada se encuentran algunos de ellos) y que son útiles en las aplicaciones. Conviene pues insistir al alumno en el método de demostración empleado, que es el mismo en la mayoría de los casos.
4) Es típico aplicar el Teorema anterior a **problema resonantes,** donde la elección de los espacios V y X viene automáticamente sugerida, como vamos a ver en el ejemplo siguiente.

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{array}{c} -u''(x) - u(x) = g(x, u(x)),\ x \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array} \tag{3.22}$$

donde $g : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función continua.
Observemos que el "problema lineal asociado"

$$\begin{array}{c} -u''(x) - u(x) = 0,\ x \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}$$

tiene como conjunto de soluciones al espacio vectorial real, de dimensión uno, engendrado por la función $sen\ x$, así que (3.22) no tiene necesariamente solución, aunque g sea acotada (piénsese en el caso $g(x, u) = f(x)$

y el Teorema de la alternativa de Fredholm). Veamos que añadiendo una condición sobre la primitiva de g, G, se tiene la existencia de soluciones de (3.22).

Teorema 3.11. *Supongamos:*
i) g es acotada.
ii) Si G es cualquier primitiva de g, respecto de u, se cumple que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} G(x,\xi) = +\infty. \tag{3.23}$$

Entonces, (3.22) *tiene al menos una solución.*

Demostración: Veamos que se verifican todas las hipótesis del Teorema 3.10. Para ello, tomemos $H = H_0^1(0,\pi)$ y los subespacios V y X como

$$V = \{ \ a sen x, \ a \in \mathbb{R} \ \},$$

$$X = \left\{ \ u \in H_0^1(0,\pi) : \int_0^\pi u(x) sen x \ dx = 0 \right\}.$$

De esta forma, cada $u \in H_0^1(0,\pi)$, puede escribirse (de manera única) como $u = u_1 + u_2$, donde $u_1 \in V$ y $u_2 \in X$, vienen dados por

$$u_1(x) = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) sen x \ dx \right) sen x,$$

$$u_2 = u - u_1.$$

Comprobemos que $\Phi : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$, definido como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (u'(x))^2 \ dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x))^2 \ dx - \int_0^\pi G(x,u(x)) \ dx,$$

satisface (3.20).
Usando la acotación de g, el Teorema del valor medio y realizando algunas operaciones elementales se prueba que para cualquier $u_2 \in X$,

$$\Phi(u_2) \geq \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_2'(x))^2 \ dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_2(x))^2 \ dx - a|u_2|, \tag{3.24}$$

para alguna constante $a > 0$.
Por otra parte, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Fourier de las funciones de X, se tiene la existencia de una constante positiva $\lambda < 1$, tal que

$$\int_0^\pi (u_2(x))^2 \ dx \leq \lambda \int_0^\pi (u_2'(x))^2 \ dx, \ \forall \ u_2 \in X. \tag{3.25}$$

Así, de (3.24) y (3.25), se deduce

$$\Phi(u_2) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) |u_2|^2 - a|u_2|,$$
$$\forall \ u_2 \in X.$$

Luego Φ, restringido a X, tiene ínfimo, al que llamamos β.
De (3.23) se obtiene

$$\lim_{|a|\to+\infty} -\int_0^\pi G(x, asenx)\ dx = -\infty,$$

lo que prueba la hipótesis 2) del Teorema (3.10).
Comprobemos por último la condición $(P-S)_d$: sea $\{u_n\}$ una sucesión de elementos de $H_0^1(0,\pi)$, cumpliendo las dos condiciones:

$$i)\{\Phi(u_n)\} \to d,$$
$$ii)\{\Phi'(u_n)\} \to 0.$$

Como en los casos anteriores, es suficiente con verificar que $\{u_n\}$ es acotada, lo que se hará viendo que tanto $\{(u_n)_1\}$ como $\{(u_n)_2\}$ lo son.
De ii) se obtiene la existencia de $r_1 > 0$, tal que

$$|\int_0^\pi u_n'(x)v'(x)\ dx - \int_0^\pi u_n(x)v(x)\ dx| \le r_1,$$

$$\forall\ v \in H_0^1(0,\pi) : |v| = 1,$$

que realizando operaciones elementales proporciona

$$|\int_0^\pi (u_n)_2'(x)v'(x)\ dx - \int_0^\pi (u_n)_2(x)v(x)\ dx| \le r_1,$$

$$\forall\ v \in H_0^1(0,\pi) : |v| = 1,$$

Tomando $v = \dfrac{(u_n)_2}{|(u_n)_2|}$, para aquellos $n \in \mathbb{N}$, tales que $(u_n)_2 \neq 0$, de la desigualdad (3.25) se deduce

$$|(u_n)_2| \le \frac{r_1}{1-\lambda},\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Por otra parte, por i), la sucesión $\{\Phi(u_n)\}$ es acotada y como

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_n')_2^2(x)\ dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi (u_n)_2^2(x)\ dx - \int_0^\pi G(x, u_n(x))\ dx,$$

(3.26) implica que la sucesión

$$\left\{\int_0^\pi G(x, u_n(x))\ dx\right\},$$

es acotada. Finalmente, por (3.23), la sucesión $\{(u_n)_1\}$ debe estar acotada.

Notas complementarias

- Uno de los objetivos de este capítulo debe ser que el alumno se familiarice con los operadores que usualmente aparecen en el tratamiento variacional de problemas de contorno, tanto para e.d.o. como para e.d.p. El estudio de las propiedades de regularidad de ellos, debe ser profundo y detallado. Quizás, el más importante sea el operador de Nemytskii, asociado a una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}$. Dicho operador está definido de la forma siguiente: a cualquier función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, se le hace corresponder la función $N_f u$, donde $(N_f u)(x) = f(x, u(x)),\ \forall x \in \Omega$.
Así, $N_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es el conjunto de funciones reales definidas en Ω. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{F}$, se trataría de encontrar condiciones suficientes sobre f que garanticen $N_f(A) \subset B$, así como propiedades de regularidad de N_f. Especialmente, como A o B, pueden tomarse el subconjunto de las funciones medibles, funciones continuas en $\overline{\Omega}$, espacios $L^p(\Omega)$, etc.
En particular, los alumnos suelen mostrar extrañeza y admiración al estudiar las condiciones para que

$$N_f(L^p(\Omega)) \subset L^q(\Omega),$$

con $p, q \geq 1$, pues basta que se cumpla la inclusión anterior, para que el operador $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, sea continuo.

- Aquellos que piensen dedicarse a la investigación en e.d.p., deberían extender a este tipo de ecuaciones, los resultados que aquí hemos presentado para e.d.o. En este sentido es conveniente la consulta de la bibliografía recomendada.
La relación general existente entre el estudio de las soluciones débiles de problemas de contorno para e.d.p y la ecuación (3.5) puede establecerse con el siguiente ejemplo concreto: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio acotado con frontera regular y $p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada. Consideremos el problema de contorno

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & p(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array} \tag{3.27}$$

Una solución débil de (3.27) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ (donde $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual) tal que

$$\int_\Omega < \nabla u(x), \nabla v(x) > dx = \int_\Omega p(x, u(x)) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

($< .,. >$ indica el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ y ∇u el gradiente de la función u).

Como hemos mencionado con anterioridad, el planteamiento del problema de contorno (3.27) en "forma débil" es necesario cuando p no es lo suficientemente regular como para poder estudiar soluciones clásicas del mismo, pero incluso en muchos casos en que p es lo suficientemente regular como para poder estudiar (3.27) desde el punto de vista clásico, el planteamiento débil del problema puede facilitar enormemente su estudio.

Si se satisfacen las hipótesis:
i) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
ii) $\exists\ a_1, a_2 \geq 0\ /\ |p(x,u)| \leq a_1 + a_2|u|^s, \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},\ 0 \leq s < \dfrac{n+2}{n-2}$, para $n > 2$
(cuando $n = 1$, la hipótesis ii) no es necesaria y si $n = 2$, esta hipótesis puede sustituirse por la acotación $|p(x,u)| \leq a_1 e^{\varphi(u)} / \lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{\varphi(u)}{u^2} = 0$),
y $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, se define como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega P(x, u(x)) dx \tag{3.28}$$

(donde $P(x,u) = \displaystyle\int_0^u p(x,s)ds$), entonces $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (3.27) si y solamente si

$$\Phi'(u) = 0$$

De hecho

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega < \nabla u(x), \nabla v(x) > dx - \int_\Omega p(x, u(x)) v(x) dx$$

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$.
A la ecuación anterior se le llama ecuación de Euler del funcional Φ y en particular dicha ecuación se cumple para los puntos u de $H_0^1(\Omega)$ donde Φ tiene un extremo global (caso de que lo tenga).

Los teoremas que se han probado en el capítulo para el problema de contorno (3.1), tienen su correspondiente versión en e.d.p., prácticamente sin cambios. A título de ejemplo, el Teorema 3.5 quedaría así:

Teorema 3.12. *Si existen constantes* $a \in [0, \lambda_1)$, $b \in \mathbb{R}$, *tales que*

$$|p(x,u)| \leq a|u| + b,\ \forall\ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces el funcional Φ *definido en* (3.28) *tiene mínimo global. Como consecuencia,* (3.27) *tiene al menos una solución* $u \in H_0^1(0, \pi)$.

Obviamente, λ_1 indica el valor propio principal del problema de valores propios

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x),\ x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

- Una herramienta básica usada en el capítulo, para demostrar, tanto teoremas que prueban la existencia de mínimo global del funcional Φ, como teoremas min-max, ha sido el Lema de deformación 3.6. Una alternativa a esto lo constituye el **principio variacional de Ekeland**, cuyo enunciado (no ciertamente el más general) es el siguiente:

Teorema 3.13. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, un funcional semicontinuo inferiormente. Entonces, si existe $inf\ _X \Phi \equiv m \in \mathbb{R}$, se tiene que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe al menos un elemento $u_\epsilon \in X$, tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq m + \epsilon,$$
$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + \epsilon\ d(u, u_\epsilon),\ \forall\ u \in X, u \neq u_\epsilon.$$

Para funcionales Φ que son además derivables (según Gateaux), se tiene la siguiente consecuencia:

Corolario 3.14. *Si además de las hipótesis del Teorema 3.13, con X un espacio de Banach, Φ es derivable Gateaux en X, entonces para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe al menos un elemento $u_\epsilon \in X$, tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq m + \epsilon,$$

$$|\Phi'(u_\epsilon)| \leq \epsilon.$$

El anterior corolario permite tomar sucesiones minimizantes que verifican las hipótesis de la condición de Palais-Smale, $(P - S)_d$, pudiéndose por tanto dar otras demostraciones de las aquí expuestas, sobre los teoremas del método directo del cálculo de variaciones. También puede usarse el principio variacional de Ekeland para demostrar teoremas min-max como el Teorema 3.8. La utilidad de tal principio rebasa las fronteras de las ecuaciones diferenciales y se puede usar, por ejemplo, en el estudio de algunos problemas de **geometría de los espacios de Banach**.

- En lo que respecta a la multiplicidad de puntos críticos, dos de las teorías clásicas más potentes son la **teoría de Lusternik-Schnirelman** y la **teoría de Morse**. En la primera, la noción de **categoría** de un subconjunto de un espacio topológico, puede usarse para encontrar distintos niveles críticos de tipo min-max. En cuanto a la segunda, los puntos críticos se distinguen atendiendo a su índice de Morse.
Realmente, profundizar en ambas es una apasionante y agradable tarea, para aquellos alumnos que se quieran especializar en este campo de la investigación. Consúltese para ello la bibliografía recomendada.

- Otros temas complementarios de gran interés en el cálculo de variaciones y la teoría de puntos críticos, lo constituyen el **Análisis convexo** y el

método de los multiplicadores de Lagrange en dimensión infinita. Particularmente, el estudio de problemas de minimización de funcionales convexos, así como el papel desempeñado por los funcionales conjugados, proporciona numerosos ejemplos elementales (**líneas geodésicas sobre un cilindro, el problema de la braquistocrona, problemas de Economía, el cable colgante**, etc.), donde el alumno puede ver claramente la utilidad de los métodos variacionales. En cuanto a lo segundo, es evidentemente más especializado y muestra su utilidad cuando se está interesado en soluciones del problema de contorno planteado, que verifican algunas restricciones adicionales (por ejemplo, soluciones de sistemas Hamiltonianos con energía determinada de antemano).

4. Métodos de compacidad y semicontinuidad inferior para la existencia de mínimo global

Recordemos que el problema general que estamos tratando considera una función

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Se trata de establecer condiciones sobre $\mathcal{M}$ y f para garantizar la existencia de mínimo (global). En este sentido, recordemos el resultado siguiente: si $\mathcal{M} = (X, \tau)$, es un espacio topológico compacto y f es continua, tendremos garantizada la existencia de mínimo (los espacios topológicos que consideremos siempre serán separados). Este resultado es muy útil cuando $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado y acotado de un espacio euclídeo $n-$ dimensional, por ejemplo cualquier bola cerrada, de radio arbitrario. Sin embargo, es de difícil aplicabilidad en el caso de espacios normados de dimensión infinita. En efecto, es conocido que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado real de dimensión infinita, la bola cerrada unidad no es compacta, por lo que cualquier subconjunto de X con interior no vacío no puede ser compacto. A este respecto, en [8] puede verse un ejemplo (ejercicio 6.2.23) significativo, donde para cada espacio de Hilbert separable H, de dimensión infinita, se construye explícitamente una función continua de la bola cerrada unidad en $\mathbb{R}$, que no tiene máximo.

Otra observación que podemos hacer es que la longitud de una curva no es continua respecto de la distancia uniforme, hecho que se puede intuir si uno lo piensa un poco. En efecto, considérense

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$C_n = \{(x, f_n(x)) \quad / \quad x \in [0, \pi]\}$$

Entonces se puede probar fácilmente que:

(1) $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente en $[0, \pi]$.
(2) la longitud de la curva C_n no converge a π.

Las anteriores reflexiones motivan las definiciones siguientes, donde se generaliza el concepto de aplicación continua:

Sea (X, τ) un espacio topológico, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $x_0 \in X$ t.q. $f(x_0) \in \mathbb{R}$.

- f es continua en x_0 si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \mathcal{U}$ entorno de x_0 en X / $\quad f(\mathcal{U}) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, +\infty) \cap (-\infty, f(x_0) + \varepsilon)$.
- f es semicontinua inferiormente (sci) en x_0 si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \mathcal{U}$ entorno de x_0 en X / $\quad f(\mathcal{U}) \subset (f(x_0) - \varepsilon, +\infty)$.
- f es semicontinua superiormente en x_0 si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \mathcal{U}$ entorno de x_0 en X / $\quad f(\mathcal{U}) \subset (-\infty, f(x_0) + \varepsilon)$.

El Teorema siguiente caracteriza la semicontinuidad inferior.

Teorema 4.1. *([3]) Sea* $f : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- *Si* f *es sci en* x_0*, entonces* $\forall\ \{x_n\} \longrightarrow x_0$ *se tiene que* $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.
- *Si* (X, τ) *satisface en* x_0 *el primer axioma de numerabilidad (existe una base numerable de entornos de* x_0 *) y* $\forall\ \{x_n\} \longrightarrow x_0$ *se tiene que* $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$*, entonces* f *es sci en* x_0*. Recordemos que los espacios métricos verifican el primer axioma de numerabilidad.*
- f *es sci en* X *(es decir, en todo punto de* X*) si y sólo si* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*, el conjunto* $\{x \in X :\ f(x) \leq \lambda\}$ *es cerrado en* X.

Puede aplicarse el teorema anterior a la función
$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (1 + x^2)\mathrm{sen}\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Entonces f es sci si y sólo si $a \leq -1$. En este caso f alcanza su mínimo en $[0, 1]$. Otra cuestión distinta es calcular el valor de este mínimo para $a = -1$ (*se atrevería el alumno con esto?*).

Una propiedad muy útil, cuando trabajamos con familias de funciones que son sci, es la siguiente:

Proposición 4.2.
Sea (X, τ) *un espacio topológico y* $f_i : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una familia arbitraria de aplicaciones, con* $i \in I$*, tal que cada* f_i*,* $i \in I$ *es semicontinuas inferiormente. Entonces la aplicación*

$$f : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$

es semicontinua inferiormente.

Uno de los principales resultados de esta parte del curso viene dado por el teorema siguiente:

Teorema 4.3.
Sea (X, τ) *un espacio topológico compacto y* $f : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, semicontinua inferiormente y no idénticamente* $+\infty$*. Entonces* $\exists\ \min_X f$

Las principales ideas de la demostración son las siguientes:
Sea $\lambda = inf\, \{f(x),\ x \in X\}$ y $\{\lambda_n\} \longrightarrow \lambda$, estrictamente decreciente.

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$X_{\lambda_n} = \{x \in X :\ f(x) \leq \lambda_n\} \tag{4.2}$$

Cada uno de estos conjuntos es:

- Distinto del conjunto vacío.
- Cerrado en X.

Tenemos así una sucesión $X_{\lambda_1} \supset X_{\lambda_2} \supset \ . \ . \ . \ \supset X_{\lambda_n} \ . \ . \ .$ sucesión decreciente de cerrados no vacíos. Como X es compacto se tiene que la intersección de todos ellos es no vacía. Ahora bien, si $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{\lambda_n} \Rightarrow f(x_0) \leq \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_0) \leq \lambda \Rightarrow f(x_0) = \lambda$

El Teorema anterior tienen un enunciado sencillo, y su demostración es elemental. No obstante, mostramos su potencia y aplicabilidad en un teorema muy general de existencia de geodésicas.

Sea (E, d) un espacio métrico. Una curva continua en E, denotada por C_f, viene dada por cualquier función $f : [a, b] \longrightarrow E$ continua, de tal forma que $C_f = \{f(x) : \ x \in [a, b]\}$. Si $P : a = t_0 < t_1 < \ . \ . \ . \ < t_{n-1} < t_n = b$ es una partición cualquiera de $[a, b]$, podemos definir

$$V_P C_f = \sum_{i=1}^{n} d(f(t_i), f(t_{i-1})) \tag{4.3}$$

Definimos la longitud de la curva C_f como

$$L \ C_f = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V_P C_f \tag{4.4}$$

Nótese que LC_f puede ser $+\infty$ (piénsese por ejemplo en la curva de Peano, que se puede ver en http://mathworld.wolfram.com/Plane-FillingFunction.html).

Si la curva C_f viene dada por una función lipschitziana f ($\exists K \geq 0$: $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$), entonces claramente C_f tiene longitud finita. En general, el cálculo de la longitud de una curva no es una tarea sencilla, aunque la función f sea lipschitziana. Ahora bien, para el caso en que E es un espacio normado y f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces tenemos el resultado siguiente:

Si $f : [a, b] \longrightarrow X$, X espacio vectorial real normado y $f \in \mathcal{C}^1([a, b], X)$, entonces

$$L(C_f) = \int_a^b \left\| f'(t) \right\| dt \tag{4.5}$$

Mencionar finalmente, antes de enunciar el teorema, que una curva rectificable es la que tiene longitud finita.

Teorema 4.4. ([6]) *Sea (E, d) un espacio métrico compacto y A, B dos subconjuntos de E cerrados, disjuntos y no vacíos. Supongamos que existe alguna curva rectificable contenida en E, y que conecta A con B (es decir, existe alguna aplicación continua $f : [0, 1] \to E$, tal que $f(0) \in A$, $f(1) \in B$ y tal que C_f tiene longitud finita. Entonces, de entre todas las curvas* *rectificables contenidas en E y que conectan A con B, hay alguna (llamada geodésica) con longitud mínima.*

El Teorema anterior es de una gran generalidad. Por ejemplo, podemos observar que este teorema sirve para el caso particular en el que A y B sean conjuntos formados por un sólo punto cada uno. En segundo lugar, pensemos que podemos tomar como espacio métrico válido para el teorema cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$. Se aseguraría así la existencia de geodésicas en este tipo de subconjuntos del espacio euclídeo que incluyen como casos particulares a subconjuntos de cilindros, conos, esferas, etc. El gran inconveniente que presenta el teorema es que no es constructivo: no nos informa de cómo calcular la geodésica mencionada. Una segunda observación es que si sustituimos la condición de compacidad por la de completitud, el teorema no es cierto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ se puede tomar como A una rama de hipérbola, y como B cualquiera de los ejes cartesianos.

Principales ideas de la demostración.

Sea L la función longitud:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}([0,1], E) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ f &\longrightarrow L(f) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dadas $f, g \in \mathcal{C}([0,1], E)$, definimos su distancia como

$$d(f,g) = \max_{t \in [0,1]} d_E(f(t), g(t)) \tag{4.7}$$

Entonces tenemos que:

- En general, L no es continua (este hecho fue observado ya por Lebesgue). Para ver esto, se sugiere la sucesión de curvas C_n definidas por
$$C_n = \{(x, n^{-1}\text{sen}(nx)),\ 0 \le x \le \pi\ \}$$
Puede probarse que la longitud de C_n es independiente de n. Obsérvese además que C_n converge uniformemente a la curva
$$C = \{(x, 0),\ 0 \le x \le \pi\ \}$$
- L es semicontinua inferiormente.

Veamos más detalladamente esta última propiedad. Fijemos $P \in \mathcal{P}([0,1])$ una partición de $[0,1]$ y consideremos la aplicación.

$$\begin{aligned} L_P : \mathcal{C}([0,1], E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longrightarrow L_P(f) &= \sum_{i=1}^{n} d(f(t_i), f(t_{i-1})) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Esta aplicación es continua. En particular, es semicontinua inferiormente. Ahora L es semicontinua inferiormente por la proposición 4.2.

Consideremos ahora el subconjunto

$$Z = \{f \in X = C([0,1],E) : \ f(0) \in A, \ f(1) \in B, \ L(f) < +\infty\} \tag{4.9}$$

Lo que pretendemos es demostrar que L tiene mínimo global en el conjunto Z.

En primer lugar, por hipótesis, Z es no vacío. Si Z fuese compacto (con la distancia uniforme), en virtud del teorema 4.3 ya se tendría la existencia del mínimo. Ahora bien, Z no es compacto, en general.

Hemos de encontrar un subconjunto Z' de Z, que sea compacto y de tal forma que los ínfimos de L en Z y Z' coincidan. Para ello haremos uso del teorema de Ascoli-Arzela, que nos caracteriza los compactos de $X = \mathcal{C}([0,1],E)$: Dado $M \subset X$, $\overline{M}$ es compacto $\Longleftrightarrow M$ es equicontinuo (pensemos que $[0,1]$ y E son espacios compactos). Por otra parte, recordemos que M es equicontinuo si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \quad / \quad \forall x, y \in [0,1]$ con $|x-y| \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon, \quad \forall f \in M$

Sea $K_0 = \inf_Z L$, y tomemos $K > K_0$. Definimos

$$Z' = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow E, \ \text{continua} \ \begin{array}{c} f(0) \in A, f(1) \in B \\ f \ \text{lipschitziana con constante de Lipschitz} \ \leq K \end{array} \right\} \tag{4.10}$$

También haremos uso del siguiente lema fundamental (véase [6]):

Sea $f \in X : \ L(f) < +\infty$. Entonces $\forall K > L(f)$ existe un homeomorfismo creciente $\alpha : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que

- La aplicación $f \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow E$ es lipschitziana con constante de Lipschitz K.
- $L(f \circ \alpha) = L(f)$

Haciendo uso de este lema, tenemos que el conjunto Z' que hemos definido, es distinto del vacío, y además $\inf_Z L = \inf_{Z'} L = K_0$. Por último, como Z' es cerrado y equicontinuo, se tiene que Z' es compacto, con lo que finalizaría la demostración.

Hemos visto en el teorema 4.3 que las condiciones de compacidad y de semicontinuidad inferior implican la existencia de mínimo. La pregunta que nos planteamos a continuación es sobre la (posible) unicidad de los puntos donde el mínimo se alcanza, y sobre la aproximación de dicho mínimo.

Recordemos previamente dos definiciones:

Definición 4.5.

- Un subconjunto X de un espacio vectorial se dice convexo si $\forall x_1, x_2 \in X$ se verifica que $[x_1, x_2] = \{tx_1 + (1-t)x_2 : \ t \in [0,1]\} \subset X$.

- Una aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial, se dice estrictamente convexa si verifica que $f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall t \in (0,1)$.

Teorema 4.6. *Sea X un subconjunto convexo de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente convexa. Entonces existe a lo sumo un punto de X donde f alcanza su ínfimo.*

Teorema 4.7.

Sea $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ con H espacio de Hilbert real separable (admite un conjunto denso numerable) verificando:

- *f continua*
- *f coerciva ($\lim_{\|u\|\to+\infty} f(u) = +\infty$)*
- *f es débilmente inferiormente semicontinua.*
  (si $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow f(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n)$)

Entonces existe $\min_H f$.

Además, si $\{e_1, \ldots e_n, \ldots\}$ es una base ortonormal de H, y llamamos $H_n = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ se verifica:

- $\exists \min_{H_n} f$
- *Si $x_n \in H_n :\ f(x_n) = \min_{H_n} f$, entonces $f(x_n) \longrightarrow \min_H f$*

5. Apéndice: funciones generalizadas y espacios de Sobolev

La teoría de funciones generalizadas (o distribuciones), vino motivada por los trabajos de diversos investigadores, entre ellos Dirac y Heaviside, en Mecánica Cuántica y Electromagnetismo, que manejaron con profusión las llamadas hoy en día función δ de Dirac y función de Heaviside. Al estudiar diversas leyes de la física, expresadas por ecuaciones en derivadas parciales, trabajaron con funciones que no eran derivables, pero que sí eran soluciones, en un cierto sentido, de las ecuaciones consideradas. Por ejemplo, se daba por cierto que, de alguna forma, la "función" δ era la derivada de la función de Heaviside $\theta(x)$, que es igual a 1 para $x \geq 0$ y 0 para $x < 0$.

Tales investigaciones crearon la necesidad de rigorizar los desarrollos formales que en ellas aparecían. Surge así una doble posibilidad: o bien se expresan las leyes de la física de una manera más general donde aparezcan identidades integrales en lugar de diferenciales, o bien se generaliza el concepto de derivada, ampliándolo para que se pueda aplicar a funciones que no son derivables en el sentido clásico. Como los científicos prefieren, en general, conservar la expresión diferencial en lugar de la integral, se impuso el segundo punto de vista, motivando así la generalización de la noción de derivada clásica.

La fundamentación matemática de la teoría de funciones generalizadas fue hecha, de manera independiente, por Sobolev y Schwartz. Esto proporcionó no sólo rigor matemático para una serie de métodos que llevaban tiempo usándose en física, sino también una herramienta útil y potente para la teoría de ecuaciones diferenciales y de transformada de Fourier. Posteriormente, ha habido un gran desarrollo de este tema, debido fundamentalmente a los problemas planteados en física matemática y ecuaciones diferenciales, siendo muchos los matemáticos de prestigio que tienen importantes contribuciones en este campo.

En la actualidad, la teoría de funciones generalizadas ha llegado a ser una herramienta esencial para los matemáticos, físicos e ingenieros, aplicándose no sólo a ecuaciones diferenciales sino también a numerosas disciplinas, como teoría de representación de grupos localmente compactos, teoría de la probabilidad, homología en variedades, etc.

Este apéndice comienza con la exposición de algunos de los principales hechos de la teoría de funciones generalizadas, en orden a su aplicación a problemas de contorno planteados para ecuaciones en derivadas parciales.

La segunda parte la dedicamos a los espacios de Sobolev. Los espacios de funciones regulares clásicos, esto es, los espacios $C^m(\Omega)$, $C^m(\overline{\Omega})$, etc., donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, no son adecuados para el estudio de muchos problemas de contorno. En este sentido, los **espacios de Sobolev**, introducidos por éste en los años treinta, proporcionan un marco adecuado para el tratamiento de tales problemas, por dos motivos fundamentales: en primer lugar, porque en su definición entra en juego la noción de **derivada débil,** concepto más restringido que el de **derivada distribucional**, definida con anterioridad, pero suficientemente amplio como para permitir el estudio de numerosos e interesantes problemas; en segundo lugar, las propiedades analítico-topológicas satisfechas por los **espacios de Sobolev**, permiten el uso de muchas técnicas de **Análisis Funcional,** que facilitan enormemente el estudio de los problemas planteados y arrojan luz sobre muchos aspectos que, aunque importantísimos, son un caso particular de resultados establecidos en un marco general.

La introducción de los espacios de Sobolev puede hacerse desde diferentes puntos de vista: usando la noción de derivada distribucional; como la completación, con normas adecuadas, de algunos espacios clásicos de funciones; mediante la transformada de Fourier, etc. Yo he preferido el primer punto de vista.

Numerosas generalizaciones existen en la actualidad de los espacios de Sobolev, muy útiles para el estudio de diferentes problemas en e.d.o. y en e.d.p.: los espacios de Orlicz-Sobolev, los espacios de Sobolev con peso, etc. No obstante, un alumno que entienda los hechos fundamentales que aquí exponemos, estará en buena disposición para, en caso necesario, profundizar en el conocimiento y uso de los espacios de funciones mencionados. La bibliografía recomendada es: [1], [4] y [19].

En lo que sigue, $D = D(\mathbb{R}^n)$, denotará al **conjunto de las funciones test**: funciones complejas, definidas en $\mathbb{R}^n$, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y con soporte compacto.

Si $K \subset \mathbb{R}^n$, es compacto, $D(K)$ denotará al subconjunto de funciones de D, cuyo soporte está incluido en K.
En $D(K)$ se puede considerar la sucesión de seminormas

$$p_m(\phi) = sup_{\ x \in K, \ |\alpha| \leq m} \ |D^\alpha \ \phi(x)|, \quad m \in \mathbb{N},$$

donde usamos la notación de multiíndices.
$D(K)$, con la topología derivada de la anterior sucesión de seminormas, es un espacio localmente convexo metrizable.

Sea ahora $\{K_j\}$ una sucesión de compactos tal que

$$\begin{array}{c} K_j \subset K_{j+1}, \ \forall \ j \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{R}^n = \cup_{j \in \mathbb{N}} \ K_j. \end{array} \tag{5.1}$$

Es claro que la aplicación inclusión $i_j : D(K_j) \to D(K_{j+1})$, es continua y que

$$D = \cup_{j\in\mathbb{N}} D(K_j),$$

con lo que se puede considerar en D la topología límite inductivo de los espacios $D(K_j)$. Esta topología no depende de la sucesión particular de compactos tomada satisfaciendo (5.1).

La convergencia en D, derivada de la anterior topología, se expresa de la forma siguiente: si $\{\phi_k\}$ es una sucesión de elementos de D y $\phi \in D$, se tiene $\phi_k \to \phi$ si y solamente si, existe algún compacto K tal que se cumplen las dos condiciones siguientes:
i) *sop* $\phi_k \subset K, \ \forall\ k \in \mathbb{N}$,
ii) Para cualquier multiíndice α, se tiene $D^\alpha \phi_k \to D^\alpha \phi$, uniformemente en K.

Definición 5.1. Una **función generalizada (o distribución)** (en el sentido de Sobolev-Schwartz), es un funcional lineal y continuo de D en $\mathbb{C}$.

Al espacio vectorial complejo de funciones generalizadas, lo notaremos por D'. Si $f \in D'$ y $\phi \in D$, escribiremos (f, ϕ) en lugar de $f(\phi)$.

En D' consideraremos la topología $\sigma(D', D)$, que es la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas $\{p_\phi, \ \phi \in D\}$, donde

$$p_\phi : D' \to \mathbb{R}, \ p_\phi(f) = |(f, \phi)|, \ \forall\ f \in D'.$$

De esta topología deriva la siguiente convergencia: si $\{f_k\}$ es una sucesión de elementos de D' y $f \in D'$, entonces $f_k \to f$, si y solamente si, para cualquier $\phi \in D$ se tiene $(f_k, \phi) \to (f, \phi)$.

Ejemplos de funciones generalizadas.
1) El ejemplo más simple de función generalizada lo constituye la generada por una función localmente integrable, de la manera siguiente: si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función localmente integrable, definimos la distribución (a la que notamos también por f)

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)\ dx, \ \forall\ \phi \in D. \tag{5.2}$$

Las funciones generalizadas que se definen de la manera anterior, a partir de funciones localmente integrables, se llamarán **regulares**. En otro caso, diremos que son **singulares**.
Cada función localmente integrable, define, de acuerdo con (5.2), una función generalizada. Se sigue del lema de Du Bois Reymond que cada función generalizada regular está definida a partir de una única función localmente integrable. Así pues, existe una correspondencia biyectiva entre las funciones generalizadas regulares y las funciones localmente integrables, lo que

lleva a identificarlas, hablándose de propiedades de tal función localmente integrable (como por ejemplo la diferenciabilidad), cuando en realidad lo son de la función generalizada regular asociada.

Las funciones localmente integrables suelen describir las **distribuciones** (o densidades) de masas, cargas, fuerzas, etc. De ahí que a las funciones generalizadas (Sobolev) se les llame también distribuciones (Schwarz).

2) El ejemplo más simple de función generalizada singular lo constituye la función δ de Dirac:

$$(\delta, \phi) = \phi(0), \ \forall \ \phi \in D.$$

A pesar de que las funciones generalizadas son funcionales lineales y continuos de D en $\mathbb{C}$, y que no tiene sentido, rigurosamente hablando, la expresión $f(x)$, para $f \in D'$ y $x \in \mathbb{R}^n$, es posible definir una noción sumamente útil, la de soporte de una distribución. Esto lo hacemos a continuación.

Si Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, $D(\Omega)$ es el subconjunto de D formado por aquellas funciones test cuyo soporte está contenido en Ω.
Si $f \in D'$ y Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, se dice que f es cero en Ω si $(f, \phi) = 0, \ \forall \ \phi \in D(\Omega)$. En este caso escribiremos $f(x) = 0, \ \forall x \in \Omega$. Como una consecuencia lógica, si $f_1, f_2 \in D'$, diremos que $f_1 = f_2$ en Ω si $f_1 - f_2 = 0$ en Ω.
- Si $f \in D'$, $f \in C^p(\Omega)$ significa que existe alguna función $f_0 \in C^p(\Omega)$ tal que

$$(f, \phi) = \int f_0(x)\phi(x) \ dx, \ \forall \ \phi \in D(\Omega).$$

Definición 5.2. Si $f \in D'$, el conjunto de todos aquellos puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que f no es nula en ningún entorno de tales puntos, es el **soporte** de f, que se denotará por *sop* f.

Se deduce de la definición anterior que

$$(f, \phi) = 0, \ \forall \ f \in D', \ \forall \ \phi \in D, \ t.q. \ sop \ f \cap sop \ \phi = \emptyset.$$

Hablemos a continuación de la derivación de funciones generalizadas. Para ello, pensemos que si $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in D$, entonces para cada multiíndice α, con $|\alpha| \leq p$, la fórmula de integración por partes proporciona

$$(D^\alpha f, \phi) = \int (D^\alpha f(x))\phi(x) \ dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int f(x)(D^\alpha \phi(x)) \ dx = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \phi).$$

La anterior relación puede aprovecharse para definir la derivada, de cualquier orden, de cualquier función generalizada.

Definición 5.3. Si $f \in D'$ y α es un multiíndice cualquiera, se define $D^\alpha f \in D'$, como

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \phi), \ \forall \ \phi \in D.$$

Si notamos por $\{D^\alpha f(x)\}$ a la derivada clásica de la función f, cuando exista, entonces si $f \in D'$, satisface $f \in C^p(\Omega)$, se cumple que

$$D^\alpha f(x) = \{D^\alpha f(x)\}, \ \forall \ x \in \Omega, \ |\alpha| \le p.$$

Las principales propiedades de la derivación de funciones generalizadas están en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Se cumplen:*
1) Cualquier función generalizada admite derivadas de cualquier orden. En particular, la función generalizada definida a través de una función localmente integrable, admite derivadas de todos los órdenes (de ahí que se diga que, en el sentido de las distribuciones, cualquier función localmente integrable puede derivarse indefinidamente).
Además, para cualquier $f \in D'$ y cualquier par de multiíndices α, β, se tiene

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f).$$

2) Si $f \in D'$ y $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces la función generalizada af se define como

$$(af, \phi) = (f, a\phi), \ \forall \ \phi \in D.$$

Pues bien, la fórmula de Leibniz para la derivación del producto af es válida. Así, por ejemplo

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1}\ f + a\ \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

3) Para cada $f \in D'$ y cada multiíndice α, se tiene sop $D^\alpha f \subset$ sop f.
4) Si $f_k \to f$, en D', entonces $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$, en D', para cualquier multiíndice α.

Usando las anteriores propiedades, se tienen los siguientes ejemplos significativos, relacionados con la derivación de funciones generalizadas.

1) Si $f \in D'(\mathbb{R})$ es tal que $f \in C^1(-\infty, x_0]$ y $f \in C^1[x_0, +\infty)$, entonces

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0),$$

donde

$$[f]_{x_0} = f(x_0+) - f(x_0-)$$

y

$$(\delta(x - x_0), \phi) = (\delta, \phi(x + x_0)), \ \forall \ \phi \in D.$$

Como caso particular, obtenemos

$$\theta'(x) = \delta(x),$$

donde θ es la función de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Más generalmente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es tal que f y f' son continuas, excepto en un conjunto finito de puntos $x_1 < x_2 < ... < x_k$, donde f tiene una discontinuidad de salto $h_j,\ 1 \leq j \leq k$, y f' es localmente integrable, entonces, en el sentido de las funciones generalizadas, se obtiene

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_{j=1}^{k} h_j \delta(x - x_j),$$

2) Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ cos\ nx,$$

entonces, en el sentido de las funciones generalizadas, se tiene

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ sen\ nx,$$
$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} cos\ nx,$$
$$.......$$

3) La solución general de la ecuación

$$x^m u = 0$$

en $D'(\mathbb{R})$, está dada por la fórmula

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$$

donde $c_k,\ 0 \leq k \leq m-1$, son constantes arbitrarias.

4) La solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$u^{(m)} = 0$$

en $D'(\mathbb{R})$, es un polinomio arbitrario de grado $m-1$.

5) $\dfrac{d}{dx}\ ln\ |x| = P(\dfrac{1}{x})$, donde

$$(P(\frac{1}{x}), \phi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{\phi(x)}{x}\ dx,\ \forall\ \phi \in D.$$

6) Para $n = 2$,
$$\Delta\ ln\ |x| = 2\pi\delta(x).$$

7) Si $n \geq 3$, entonces
$$\Delta\ \frac{1}{|x|^{n-2}} = \ -(n-2)\sigma_n\delta(x),$$
donde σ_n es el área de la superficie dada por la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$.

8) Cuando $n = 3$, las funciones
$$E(x) = -\ \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|},\ \overline{E}(x) = -\ \frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|},$$
satisfacen la ecuación
$$\Delta E + k^2 E = \delta(x).$$

9) Si
$$E_1(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a(\pi t)^{1/2})^n}\ \ exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right),$$
entonces
$$\frac{\partial E_1}{\partial t} - a^2\Delta E_1 = \delta(x,t).$$

10) Si
$$E_2(x,t) = \frac{1}{2a}\ \theta(at - |x|),$$
entonces
$$L_a E_1 = \delta(x,t),$$
donde L_a es el operador de ondas, $L_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$.

Nos ocupamos a continuación de la noción de **producto directo** de funciones generalizadas.

Si $f(x)$ y $g(y)$ son funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, la función $f(x)g(y)$ es también localmente integrable en $\mathbb{R}^{n+m}$. Por tanto, define una función generalizada regular perteneciente a $D'(\mathbb{R}^{n+m})$, mediante la fórmula
$$\begin{aligned}(f(x)g(y),\phi) &= \int f(x)g(y)\phi(x,y)\ dy\ dx = \\ &= (f(x),(g(y),\phi(x,y))).\end{aligned}$$
para cualquier $\phi \in D(\mathbb{R}^{n+m})$. La fórmula anterior puede aprovecharse para definir el producto directo de dos funciones generalizadas de la forma siguiente:

Definición 5.5. Si $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $g(y) \in D'(\mathbb{R}^m)$, se define el **producto directo** de f y g, $f(x).g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n+m})$, como
$$(f(x).g(y), \phi) = (f(x), (g(y), \phi(x, y))), \ \forall \ \phi \in D(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Las propiedades del producto directo quedan reflejadas en el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *1)* **Conmutatividad:** *Si* $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ *y* $g(y) \in D'(\mathbb{R}^m)$, *entonces*
$$f(x).g(y) = g(y).f(x)$$
2) **Continuidad:** *Si* $f_k \to f$, *en* $D'(\mathbb{R}^n)$, *entonces*
$$f_k(x).g(y) \to f(x).g(y),$$
en $D'(\mathbb{R}^{n+m})$.
3) **Asociatividad:** *Si* $f \in D'(\mathbb{R}^n), \ g \in D'(\mathbb{R}^m), h \in D'(\mathbb{R}^k)$, *entonces*
$$f(x).(g(y).h(z)) = (f(x).g(y)).h(z)$$
4) **Derivación del producto directo:**
$$D_x^\alpha(f(x).g(y)) = D^\alpha f(x).g(y)$$
5) **Multiplicación por funciones regulares:** *Si* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *entonces*
$$a(x)(f(x).g(y)) = (a(x)f(x)).g(y).$$
6) **Traslación de la variable independiente:**
$$(f.g)(x+h, y) = f(x+h).g(y)$$

Tratamos seguidamente la noción y principales propiedades de la **convolución de funciones generalizadas.** Como hemos hecho previamente en más de una ocasión, partimos del caso de funciones generalizadas regulares, para posteriormente considerar la situación general.

Sean f y g funciones localmente integrables definidas en $\mathbb{R}^n$, tal que la función
$$h(x) = \int |g(y)f(x-y)| \ dy,$$
es también localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. En este caso, a la función
$$(5.3) \qquad \begin{aligned} (f * g)(x) &= \int f(y)g(x-y) \ dy = \\ &= \int g(y)f(x-y) \ dy = (g * f)(x), \end{aligned}$$
se le llama **convolución** de f por g.

Algunas condiciones suficientes para que la función h anterior, sea localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, son:

1) Una de las funciones f o g tiene soporte compacto.
2) Si $n = 1$, las funciones f y g son nulas cuando $x < 0$.
3) Las funciones f y g son integrables en $\mathbb{R}^n$. Además, en este caso, la convolución de f por g, es también integrable en $\mathbb{R}^n$.

Como la función (5.3) es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, define una función generalizada regular, de la forma usual. Utilizando el Teorema de Fubini, puede probarse:

$$(f * g, \phi) = \int \int f(x)g(y)\phi(x + y)\ dx\ dy,\ \forall\ \phi \in D. \tag{5.4}$$

Usando sucesiones que en D converjan a 1, noción que vamos a definir inmediatamente, se puede expresar la convolución de una forma más conveniente. En efecto, diremos que la sucesión $\{\eta_k\}$, de elementos de D, converge a 1 en $\mathbb{R}^n$, si para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existe un natural n_0, tal que $\eta_k(x) = 1,\ \forall\ k \geq n_0,\ \forall\ x \in K$, y para cualquier multiíndice α, existe una constante c_α, tal que $|D^\alpha \eta_k(x)| < c_\alpha,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
Es fácil probar que siempre existen sucesiones del tipo anterior. Además, si $\{\eta_k\}$, es cualquier sucesión convergente a 1 en $\mathbb{R}^{2n}$, entonces la expresión (5.4) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}(f * g, \phi) = \lim_{k \to \infty} &(f(x)g(y), \eta_k(x; y)\phi(x + y)),\\ &\forall\ \phi \in D.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ahora, pueden aprovecharse las expresiones (5.4) y (5.5), para dar la siguiente definición, así como para el teorema que enunciamos a continuación:

Definición 5.7. Sean $f, g \in D'$, teniendo g soporte compacto. Se define la **convolución** de f por g, $f * g \in D'$, como

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \phi(x + y)),\ \forall\ \phi \in D.$$

Teorema 5.8. *En las condiciones de la definición anterior, se tiene*

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \eta(y)\phi(x + y)),\ \forall\ \phi \in D,$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de g.

Nota. La convolución puede definirse en situaciones más generales que las contempladas en la definición (5.7). Por ejemplo, sean $f, g \in D'$, tales que cumplen lo siguiente: para cualquier sucesión $\{\eta_k\}$, de elementos de $D(\mathbb{R}^{2n})$, convergente a 1 en $\mathbb{R}^{2n}$, se tiene la existencia del límite

$$\lim_{k \to \infty} (f(x).g(y), \eta_k(x; y)\phi(x + y))$$

y este límite es independiente de la sucesión $\{\eta_k\}$ considerada. En este caso, al funcional (lineal)

$$\begin{gathered}(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \phi(x+y)) = \\ = \lim_{k\to\infty} (f(x).g(y), \eta_k(x;y)\phi(x+y)), \\ \forall\ \phi \in D,\end{gathered}$$

se le llama convolución de f por g, si dicho funcional es continuo en D.
Es fácil probar que si la convolución $f*g$ existe, también existe la convolución $g * f$ y

$$f * g = g * f.$$

Además, de la continuidad del producto directo, respecto de f y g, se sigue la continuidad de la convolución $f * g$, respecto de f y g.

En particular, se tiene la siguiente fórmula, de gran interés en la resolución de problemas no homogéneos:

$$f * \delta = \delta * f = f,\ \forall\ f \in D'.$$

La relación entre la convolución y diferenciación de funciones generalizadas, es la siguiente:

Teorema 5.9. *Si la convolución $f*g$ existe, entonces, para cualquier multiíndice α, existen las convoluciones $D^\alpha f * g$, $f * D^\alpha g$ y*

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

Una de las utilidades del producto de convolución es la "regularización de funciones generalizadas", que precisamos a continuación.

Sea $f \in D'$ y $\phi \in D$. Como ϕ tiene soporte compacto, la convolución $f * \phi$ existe y además,

$$f * \phi = (f(y), \phi(x-y)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Tomemos ahora las funciones test siguientes: para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, defínase

$$\omega_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon exp\left(-\dfrac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x|^2}\right),\ |x| < \epsilon, \\ 0,\ |x| \geq \epsilon, \end{cases}$$

donde la constante c_ϵ se elige para que

$$\int \omega_\epsilon(x)\ dx = 1.$$

A las funciones

$$f_\epsilon(x) = f * \omega_\epsilon \tag{5.6}$$

se les llama "regularizantes" de la función generalizada f. El nombre se justifica en base a que son funciones pertenecientes a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y al siguiente resultado:

Teorema 5.10. *Sea $f \in D'$ y para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, f_ϵ, definida en* (5.6)*. Entonces*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} f_\epsilon(x) = f(x), \quad en \ \ D'.$$

Usando el resultado anterior, puede probarse que D es denso en D', en el sentido de que cada función generalizada $f \in D'$, es límite débil de funciones test. En efecto, sea $f \in D'$ y f_ϵ los regularizantes de f. Si tomamos, para $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\eta_\epsilon(x)$, una función test que sea igual a 1 en la esfera de centro 0 y radio $\dfrac{1}{\epsilon}$, entonces se puede demostrar que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (\eta_\epsilon f_\epsilon, \phi) = (f, \phi), \ \forall \ \phi \in D.$$

Uno de los métodos más efectivos que existen para demostrar la existencia de soluciones de problemas muy diversos que se plantean en ecuaciones en derivadas parciales, es el método de las transformadas. Éstas, al relacionar de manera directa la derivación y la multiplicación (véanse las propiedades 2) y 3) de los Teoremas 5.14 y 5.16, reducen muchos problemas de e.d.p. lineales con coeficientes constantes, a problemas algebraicos o bien a problemas de e.d.o. con parámetros.
Seguidamente describimos la noción de **transformada de Fourier de funciones generalizadas de crecimiento lento,** especialmente apropiadas para el uso de dicha transformada, por las propiedades que se verán posteriormente.

Definición 5.11. Una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se dice **rápidamente decreciente en infinito**, si

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0,$$

para cualquier par de multiíndices α, β.

El subconjunto de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, formado por aquellas funciones rápidamente decrecientes en infinito, es un espacio vectorial complejo al que denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o simplemente por S.

Si α, β, son multiíndices cualesquiera, podemos considerar, en S, las seminormas

$$p_{\alpha,\beta} \ \phi = sup_{\ x \in \mathbb{R}^n} \ |x^\alpha D^\beta \ \phi(x)|.$$

Tenemos así una familia numerable de seminormas en S, que define una topología localmente convexa metrizable.
La convergencia en S, derivada de la topología anterior, puede expresarse de la forma siguiente: si $\{\phi_k\}$ es una sucesión de elementos de S y $\phi \in S$, entonces $\phi_k \to \phi$, si y solamente si, para cualquier par de multiíndices α, β, se tiene

$$x^\alpha D^\beta \phi_k(x) \to x^\alpha D^\beta \phi(x),$$

de manera uniforme en $\mathbb{R}^n$.

Es claro que $D \subset S$, de manera continua. Además, puede mostrarse fácilmente que la anterior inclusión es estricta (la función $exp\ (-|x|^2)$ pertenece a S pero no a D). No obstante, D es denso en S.

Definición 5.12. Una función generalizada de crecimiento lento es un funcional lineal y continuo de S en $\mathbb{C}$.

Al espacio vectorial complejo de funciones generalizadas de crecimiento lento lo notamos por S'. En S', consideraremos la topología débil $\sigma(S', S)$, de la que deriva la convergencia siguiente: si $\{f_k\}$ es una sucesión de elementos de S' y $f \in S'$, entonces $f_k \to f$ si y solamente si
$(f_k, \phi) \to (f, \phi), \ \forall \ \phi \in S.$
De lo anterior se sigue que $S' \subset D'$, de manera continua.

Ejemplos de funciones generalizadas de crecimiento lento.
a) Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, tal que, para algún $m \geq 0$, se tiene que

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}\ dx \ < \ +\infty \tag{5.7}$$

entonces f define un elemento de S', de la manera usual, es decir,

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)\ dx, \ \forall \ \phi \in S. \tag{5.8}$$

A tales elementos de S', se les llama **funciones generalizadas regulares de crecimiento lento**. Sin embargo, conviene recalcar que no toda función localmente integrable define, a través de (5.8), un elemento de S' (por ejemplo $f(x) = e^x$, en $\mathbb{R}$). También, no toda función localmente integrable perteneciente a S', satisface (5.7).
Es posible (pero no elemental), probar que cualquier elemento de S' es una derivada (distribucional) de una función continua satisfaciendo (5.7). Esta es la razón por la que a los elementos de S' se les llama funciones generalizadas de crecimiento lento.

b) Si $f \in S'$, entonces $D^\alpha f \in S'$, para cada multiíndice α.

c) Cada función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, define una función generalizada de crecimiento lento a través de la fórmula usual

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)\ dx,\ \forall\ \phi \in S.$$

También, de la misma manera, cualquier polinomio con coeficientes constantes, define un elemento de S'.

El producto directo y el producto de convolución de los elementos de S', se define de manera análoga al caso de D'. De hecho, si $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $g \in S'(\mathbb{R}^m)$, entonces, puesto que $S' \subset D'$, se tiene que $f(x).g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n+m})$, y puede demostrarse que $f(x).g(y) \in S'(\mathbb{R}^{n+m})$.
El producto directo de funciones generalizadas de crecimiento lento es conmutativo, asociativo y continuo en $S'(\mathbb{R}^{n+m})$, con respecto de f o g. Por ejemplo, esto significa que si $f_k \to f$ en $S'(\mathbb{R}^n)$, entonces $f_k(x).g(y) \to f(x).g(y)$, en $S'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Si $f \in S'$ y $g \in D'$, con soporte compacto, entonces $f * g \in S'$ y se puede escribir de la forma

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \eta(y)\phi(x+y)),\ \forall\ \phi \in S,$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de g.

Dedicamos la parte que sigue de este apéndice al tema de la transformada de Fourier. Comenzamos con dicho concepto en el espacio S.

Definición 5.13. Si $\phi \in S$, se define su transformada de Fourier, $F(\phi)$, como la función

$$F(\phi)(\xi) = \int \phi(x) e^{i<\xi, x>}\ dx,$$

donde $< \xi, x >$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

Las principales propiedades se ponen de manifiesto en el Teorema siguiente:

Teorema 5.14. *Se cumplen:*
1) Para cada $\phi \in S$, su transformada de Fourier, $F(\phi)$, es una función acotada y continua.
2) $D^\alpha F(\phi)(\xi) = F((ix)^\alpha \phi)(\xi)$, para cada multiíndice α y cada $\phi \in S$.
3) $F(D^\alpha \phi)(\xi) = (-i\xi)^\alpha F(\phi)(\xi)$, para cada multiíndice α y cada $\phi \in S$.
4) $F(\phi) \in S$, $\forall\ \phi \in S$.
5) $F : S \to S$, es biyectiva y continua. Además, para cada $\phi \in S$, se cumple

$$\phi = F^{-1}(F(\phi)) = F(F^{-1}(\phi)),$$

donde, para cada $\psi \in S$,

$$F^{-1}(\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i<\xi,x>} \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F(\psi)(-x).$$

Sea ahora $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Su transformada de Fourier, $F(f)$, es una función acotada y continua en $\mathbb{R}^n$ y por tanto define un elemento de S', a través de la fórmula

$$(F(f), \phi) = \int F(f)(\xi)\phi(\xi) \, d\xi, \ \forall \ \phi \in S.$$

Mediante el Teorema de Fubini, se prueba que

$$(F(f), \phi) = (f, F(\phi)),$$

que puede usarse para dar la definición de transformada de Fourier de un elemento de S'.

Definición 5.15. Si $f \in S'$, se define $F(f) \in S'$, como

$$(F(f), \phi) = (f, F(\phi)), \ \forall \ \phi \in S.$$

Enunciamos el Teorema siguiente, sobre las propiedades más importantes de F.

Teorema 5.16. *1) $F : S' \to S'$ es biyectiva y continua. Además,*

$$F^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} F(f(-x)), \ \forall \ f \in S'.$$

2) Si $f \in S'$, entonces

$$D^\alpha F(f) = F((ix)^\alpha f),$$

para cada multiíndice α.
3)

$$F(D^\alpha f) = (-i\xi)^\alpha F(f),$$

para cada $f \in S'$ y cada multiíndice α.
4)

$$F(f(x - x_0)) = exp \ (i < \xi, x_0 >) F(f),$$

para cada $f \in S'$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
5) Si $f \in S'$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$F(f)(\xi + \xi_0) = F(e^{i<\xi_0,x>} f)(\xi).$$

6) Si $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $g \in S'(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$F(f(x).g(y)) = F(f)(\xi).F(g)(\eta).$$

7) Si $f \in D'$ tiene soporte compacto, entonces su transformada de Fourier se puede expresar de la forma

$$F(f)(\xi) = (f(x), \eta(x) e^{i<\xi,x>}),$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de f.
8) Si $f \in S'$ y $g \in D'$ tiene soporte compacto, entonces

$$F(f * g) = F(f)F(g).$$

Seguidamente, consideramos los espacios de Sobolev. En lo que sigue, Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y las funciones que aparezcan se considerarán con valores reales.

Comenzamos con la definición del espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, que es el conjunto de funciones de $L^p(\Omega)$ tales que todas las derivadas, en el sentido distribucional, hasta el orden m, pertenecen también a $L^p(\Omega)$.

Definición 5.17. Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y p tal que $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \; \forall \; \alpha \; / \; |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u$ se entiende en el sentido distribucional, es decir,

$$\int_\Omega u(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)\phi, \; \forall \; \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

($C_0^\infty(\Omega)$ denota al subconjunto de funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto).

Claramente $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$.
En $W^{m,p}(\Omega)$ consideraremos la norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{5.9}$$

o, cuando $1 \leq p < \infty$, la norma equivalente (a la que notamos igual)

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}. \tag{5.10}$$

A veces se usará la seminorma

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Un caso especialmente significativo es cuando $p = 2$. Denotaremos por $H^m(\Omega)$ al espacio $W^{m,2}(\Omega)$ y por $\|.\|_{m,\Omega}$ la correspondiente norma $\|.\|_{m,2,\Omega}$.

Ésta deriva del producto escalar

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v, \ \forall\, u,v \in H^m(\Omega). \tag{5.11}$$

Las propiedades algebraico-topológicas de los espacios definidos, las enunciamos en el siguiente Teorema.

Teorema 5.18. *El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach real, con la norma* (5.9) *(o* (5.10)*). Si $1 < p < \infty$, es además reflexivo y si $1 \le p < \infty$, separable. También, $H^m(\Omega)$, con el producto escalar* (5.11)*, es un espacio de Hilbert separable.*

Introducimos a continuación un subespacio importante de $W^{m,p}(\Omega)$.

Definición 5.19. $W_0^{m,p}(\Omega)$ denotará la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

En general, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio (cerrado) estricto de $W^{m,p}(\Omega)$, salvo cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, en cuyo caso, ambos espacios coinciden. Además, si $1 \le p < \infty$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable, con la norma (5.9) (o (5.10)), reflexivo si $1 < p < \infty$. También, $W_0^{m,2}(\Omega)$, con el producto escalar (5.11) es un espacio de Hilbert separable, al que notaremos por $H_0^m(\Omega)$.

Cuando $n = 1$ y $\Omega = (a,b)$, un intervalo acotado, se tienen caracterizaciones muy útiles de los espacios anteriormente definidos, que ayudan a entender la naturaleza de sus elementos. Por ejemplo, para los espacios de Hilbert $H^m(a,b)$, se tendría:

$H^m(a,b)$ está formado por aquellas funciones tales que ellas y sus derivadas (en el sentido clásico), hasta el orden $m-1$, son absolutamente continuas, perteneciendo además la derivada de orden m al espacio $L^2(a,b)$. Son este tipo de caracterizaciones las que facilitan el estudio de los problemas de contorno en dimensión uno.

Muchas veces, cuando se quiera probar un resultado determinado, se prueba éste para funciones suficientemente regulares y después se trata de extender el mismo para funciones del espacio de Sobolev correspondiente. Para ello es muy importante conocer las posibles propiedades de aproximación de éstas, por funciones regulares. En este sentido, el siguiente Teorema es de gran utilidad:

Teorema 5.20. *Si $1 \le p < \infty$, $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.*

Se ha de destacar que la conclusión del Teorema anterior es falsa si $p = \infty$.

Resultados como el anterior permiten demostrar otros muy interesantes tales como los siguientes:
a) Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tal que u es nula en $\Omega \setminus K$, con $K \subset \Omega$, compacto. Entonces $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.
b) Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana tal que $G(0) = 0$. Entonces, si Ω es acotado, $1 < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene que $G \ o \ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como consecuencia, si Ω es acotado y $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que las funciones $|u|$, u^+ y u^- pertenecen a $H_0^1(\Omega)$, donde

$$u^+(x) = max \ \{u(x), 0\},$$
$$u^-(x) = max \ \{-u(x), 0\}.$$

c) Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Otro resultado básico en el estudio de problemas de contorno de tipo elíptico es la siguiente desigualdad, conocida con el nombre de desigualdad de Poincaré. Hay otras muchas desigualdades importantes, como las de Poincaré-Wirtinger, de Hardy, o las de Gagliardo-Nirenberg. Son muy útiles en el estudio de problemas no lineales.

Teorema 5.21. *Sea Ω acotado y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante positiva $C(\Omega, p)$, tal que*

$$|u|_{0,p,\Omega} \leq C(\Omega, p) \ |u|_{1,p,\Omega}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.12}$$

Como consecuencia, la aplicación $u \to |u|_{1,p,\Omega}$, define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{1,p,\Omega}$. Por tanto, sobre $H_0^1(\Omega)$, la forma bilineal

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

define un producto escalar que da lugar a la norma $|.|_{1,\Omega}$, equivalente a $\|.\|_{1,\Omega}$.

Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{m-1,p}(\Omega)$. Usando este hecho, puede probarse una desigualdad de Poincaré, más general que (5.12), obteniéndose que, en $W_0^{m,p}(\Omega)$, $|.|_{m,p,\Omega}$ es una norma equivalente a $\|.\|_{m,p,\Omega}$.

En la definición que se da de espacio de Sobolev no se pone de manifiesto, de manera explícita, si sus elementos han de satisfacer condiciones de regularidad. Sin embargo, ya hemos comentado que en dimensión uno, existen caracterizaciones muy útiles de ellos, donde se ve que las funciones pertenecientes a dichos espacios han de satisfacer condiciones de regularidad apropiadas. No existen resultados tan claros en dimensiones superiores, pero sí que se puede probar la existencia de inclusiones continuas de los espacios de Sobolev en espacios del tipo $L^q(\Omega)$, e incluso a veces en espacios de funciones regulares, lo que es muy importante a la hora de establecer resultados de regularidad de las soluciones débiles. Tales inclusiones serán a veces compactas, facilitando enormemente el uso de técnicas del Análisis Funcional.

Dados espacios normados X e Y, diremos que X está inmerso en Y, si existe una aplicación $I : X \to Y$, lineal, inyectiva y continua. En este caso, escribiremos

$$X \hookrightarrow Y.$$

Si, además, I es compacta, es decir, I aplica subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y, se dice que X está inmerso de manera compacta en Y y se notará

$$X \hookrightarrow \hookrightarrow Y.$$

En los teoremas que siguen aparecen los siguientes espacios:
- $C^j_B(\Omega)$. Es el espacios de funciones de clase $C^j(\Omega)$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, están acotadas en Ω. Es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^j_B(\Omega)} = \ max_{\ |\alpha| \ \leq \ j} \ sup_{\ x \ \in \ \Omega} \ |D^\alpha u(x)|.$$

- $C^j(\overline{\Omega})$. Es el espacio de funciones de clase $C^j(\Omega)$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, están acotadas y son uniformemente continuas en Ω. Es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} = \ max_{\ |\alpha| \leq j} \ \ sup_{\ x \ \in \ \Omega} \ |D^\alpha \phi(x)|$$

- Si $0 < \lambda \leq 1$, $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ es el espacio de funciones de clase $C^j(\overline{\Omega})$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, son Hölder-continuas, con exponente λ. Es decir, para cada α, $|\alpha| \leq j$, la cantidad

$$sup_{\ x,y \ \in \ \Omega, \ x \neq y} \ \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

es finita. Es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})} = \ \|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} \ +$$

$$+ \ max_{\ |\alpha| \leq j} \ sup_{\ x,y \ \in \Omega, \ x \neq y} \ \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

Los teoremas de inmersión necesitan además una condición de tipo geométrico sobre el dominio Ω. Esta condición puede ser muy variada; por ejemplo, se puede suponer que la frontera de Ω es Lipschitziana, o que se verifica la propiedad del cono. Aquí asumiremos en adelante, salvo que explícitamente se diga otra cosa, que Ω es acotado y con frontera de clase C^1; equivalentemente, diremos que Ω es un dominio regular.

Teorema 5.22. *Sea Ω un abierto acotado y regular de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces se tienen las siguientes inmersiones:*
1) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, si $k < \frac{n}{p}$, $q \in [p, \frac{np}{n-kp}]$.
2) Si $k = \frac{n}{p}$, entonces $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, para cualquier $q \in [p, +\infty)$.
Además, si $p = 1$, entonces $W^{m+n,1} \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$.
3) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, si $k > \frac{n}{p}$.
4) Si $\frac{n}{p} < k < 1 + \frac{n}{p}$, entonces $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, para $\lambda \in (0, k - \frac{n}{p}]$.
5) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, si $k = 1 + \frac{n}{p}$ y $\lambda \in (0,1)$.

Teorema 5.23. *Sea Ω un abierto acotado y regular de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces se tienen las siguientes inmersiones compactas:*
1) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, si $k < \frac{n}{p}$ y $q \in [1, \frac{np}{n-kp})$.
2) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, si $k = \frac{n}{p}$ y $q \in [1, +\infty)$.
3) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, si $k > \frac{n}{p}$.
Si además, $\frac{n}{p} > k - 1$, entonces $W^{m+k,p} \hookrightarrow \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, para cualquier $\lambda \in (0, k - \frac{n}{p})$.

Respecto de las inmersiones satisfechas por los espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$, se tiene que son válidas todas las de los dos teoremas anteriores, reemplazando los correspondientes espacios $W^{m+k,p}(\Omega)$ por $W_0^{m+k,p}(\Omega)$, sin necesidad de suponer regularidad del abierto y acotado Ω. Además, la acotación de Ω no es necesaria para las inmersiones continuas (Teorema (5.22)); en cambio, es imprescindible para las inmersiones compactas, como se puede comprobar con ejemplos fáciles en dimensión uno. Para el caso de dominios no acotados, son necesarias condiciones adicionales a las de tipo geométrico aquí impuestas, para tener inmersiones compactas; por ejemplo, la llamada "casiacotación" del dominio Ω.

References

[1] R. Adams, *Sobolev spaces,* Academic press, 1975.

[2] A. Ambrosetti y G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Cambridge University Press, 1993.
[3] P. Blanchard y E. Brüning, *Variational methods in Mathematical Physics,* Springer-Verlag, Berlín, 1.992.
[4] H. Brezis, *Análisis Funcional,* Alianza Editorial, 1984.
[5] A. Cañada, *Series de Fourier y aplicaciones,* Pirámide, Madrid, 2002.
[6] G. Choquet, *Topology,*Academic Press, New York and London, 1966.
[7] B. Dacorogna, Introduction to the Calculus of Variations, Imperial College Press, 2004.
[8] P. Drábek y J. Milota, *Lectures on Nonlinear Analysis,* Pavel Drábek y Jaroslav Milota, editores, Plzen, Czech Republic, 2004.
[9] S. Hildebrandt y A. Tromba, *Matemáticas y formas óptimas,*Prensa Científica, Barcelona, 1990.
[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford University Press, New York, 1972. Traducción al castellano en Alianza Editorial, Madrid, 1992.
[11] E. Kreyszig, On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the first Half of Our Century. Part I, Amer. Math. Monthly, 101, (1994), 674-678.
[12] S. Lang, Real Analysis, ¿?
[13] J. Mawhin y M. Willem, *Critical point theory and Hamiltonian systems,* Springer-Verlag, 1989.
[14] A.L. Peressini, F.E. Sullivan y J.J. Uhl, The Mathematics of Nonlinear Programming, Springer-Verlag, 1988.
[15] P. Rabinowitz, Minimax methods in critial point theory with applications to differential equations, AMS, American Mathematical Society, 1986.
[16] M. Struwe, Variational methods, Springer-Verlag, 1990.
[17] J.L. Troutman, *Variational calculus and optimal control,* Springer-Verlag, New York, 1996.
[18] B. Van Brunt, *The Calculus of Variations,* Springer, New york, 2006.
[19] V.S. Vladimirov, Equations of Mathematical physics, Marcel Dekker, Inc., 1971.

Las siguientes direcciones de internet pueden ser útiles:

(1) http://www.ugr.es/∼acanada/
Aquí se puede encontrar información sobre el programa del curso, método de evaluación, resumen de los contenidos fundamentales, etc.
(2) http://mathworld.wolfram.com/
Muy útil para consultar temas de Matemáticas.
(3) http://scienceworld.wolfram.com/physics/
Como la anterior pero para temas de física.
(4) http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html
Para consultar temas sobre historia de las Matemáticas.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain.
E-mail address: `acanada@ugr.es`