

ANÁLISIS DE PLACAS

Teoría estática lineal, métodos analíticos de resolución e introducción al método de Elementos Finitos

Autores:

RAFAEL GALLEGO SEVILLA

ALEJANDRO MARTÍNEZ CASTRO

MARÍA ESTHER PUERTAS GARCÍA



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

**Departamento de Mecánica de
Estructuras e Ingeniería Hidráulica**

Índice general

1. Modelo de placas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Hipótesis de comportamiento	4
1.3. Relaciones cinemáticas	6
1.4. Esfuerzos unitarios	7
1.5. Ecuaciones de Equilibrio	10
1.5.1. Forma alternativa de obtener las ecuaciones de equilibrio	14
1.6. Deformaciones del prisma	16
1.7. Momentos-curvaturas	18
1.8. Ecuación de la deformada	20
1.9. Cálculo de las tensiones	22
1.9.1. Tensiones coplanarias	23
1.9.2. Tensiones tangenciales verticales	23
1.9.3. Tensiones normales σ_z	24
1.10. Validez de la Teoría	25
2. Condiciones de contorno	29
2.1. Introducción	30
2.2. Secciones no cartesianas	30
2.2.1. Esfuerzo cortante Q_n	31
2.2.2. Flector M_n y torsor M_{nt}	31
2.3. Derivadas respecto a \mathbf{n} y \mathbf{t}	32
2.4. Cortante total	35
2.5. Esfuerzos en función de $w(x, y)$	37
2.5.1. Flector M_n en función de la flecha	37
2.5.2. Torsor M_{nt} en función de la flecha	38
2.5.3. Cortante Q_n en función de la flecha	38
2.5.4. Cortante total V_n en función de la flecha	38
2.6. Condiciones de contorno	39
2.6.1. Esfuerzos genéricos en las secciones cartesianas	39
2.6.2. Borde empotrado	39
2.6.3. Borde apoyado	40
2.6.4. Borde libre	43
2.6.5. Borde sobre apoyo elástico	45
2.6.6. Borde unido a una viga	46
3. Placas Rectangulares: Métodos armónicos de solución	51
3.1. Introducción	51
3.2. Series de Fourier	52
3.2.1. Desarrollo en serie doble con extensión impar	55
3.3. Método de Navier	55
3.3.1. Función de Green del problema de flexión de placas delgadas tetrapoyadas	57
3.4. Método de Levy	65

3.4.1. Simetrías y antimetrías	68
4. Formulario de placas rectangulares	69
4.1. Introducción	69
4.2. Placas delgadas.- Resumen de la formulación	70
4.3. Método de Navier	71
4.3.1. Carga uniforme	72
4.3.2. Carga puntual	73
4.3.3. Carga distribuida en una línea $y = \eta_0$	73
4.3.4. Carga distribuida en una línea $x = \xi_0$	74
4.3.5. Carga distribuida en una línea $y = f(x)$	74
4.3.6. Momento puntual M_x	75
4.3.7. Momento puntual M_y	75
4.3.8. Momento puntual en una dirección cualquiera M	75
4.3.9. Momento distribuido $m_y(x)$ en una línea $y = \eta_0$	76
4.3.10. Momento distribuido $m_x(x)$ en una línea $y = \eta_0$	76
4.3.11. Superficie de carga lineal	77
4.3.12. Carga constante en media placa	77
4.4. Método de Levy	78
4.4.1. Soluciones particulares para casos simples de carga	79
4.4.2. Función de carga con coeficientes constantes	80
4.4.3. Placa rectangular tetrapoyada sometida a carga uniforme	81
4.4.4. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos M_x <i>simétricos</i> en dos bordes paralelos	82
4.4.5. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos $M_x(y)$ <i>antisimétricos</i> en dos bordes paralelos	84
4.4.6. Placa rectangular tetrapoyada sometida a una ley de carga lineal	85
5. Placas Circulares	87
5.1. Introducción	87
5.2. Ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares	88
5.3. Relación esfuerzos-movimientos	90
5.4. Ecuación de la deformada	93
5.5. Condiciones de Contorno	93
5.6. Placas circulares con flexión axisimétrica	94
5.7. Placas circulares bajo carga no axisimétrica	96
6. El Método de los Elementos Finitos para placas	99
6.1. Introducción	99
6.2. El Método de los Elementos Finitos	99
6.3. Teoría de Placas de Kirchhoff	100
6.4. Elementos de placa rectangulares	102

Índice de figuras

1.1. El elemento estructural <i>placa</i>	2
1.2. Elemento estructural <i>laja</i>	2
1.3. Elemento estructural <i>lámina</i>	3
1.4. Cargas según el eje z y distribución de σ_z que producen	5
1.5. Placa en voladizo: estimación del valor de las tensiones de flexión σ_x en el empo- tramiento	5
1.6. Relación entre el desplazamiento u_x de un punto $P(x, y, z)$ y el vector desplaza- miento del punto $Q(x, y, 0)$, bajo la hipótesis de que la normal permanece recta y normal a la superficie deformada	6
1.7. El prisma diferencial	8
1.8. Esfuerzo unitario Q_x dibujado como fuerza repartida	9
1.9. Esfuerzos sobre las caras x e y frontales	10
1.10. Equilibrio en una rebanada para el caso de vigas	11
1.11. Alzados del prisma diferencial para equilibrio vertical de fuerzas	12
1.12. Alzado del prisma para equilibrio de momentos según el eje x	13
1.13. Alzado del prisma para equilibrio de momentos según el eje y	13
1.14. Prisma con las fuerzas <i>nulas</i> r_i	15
1.15. Prisma deformado: curvaturas	17
1.16. Placa circular deformada como un casquete esférico	26
2.1. Prisma triangular para el cálculo de esfuerzos en secciones no cartesianas	30
2.2. Esfuerzos unitarios sobre el prisma triangular (planta)	31
2.3. Relación entre M_n y M_{nt} con M_x , M_y y M_{xy} : <i>círculo de Mohr</i>	33
2.4. Torsor M_{nt} aplicado en un borde cualquiera	35
2.5. Fuerzas cortantes equivalentes al torsor M_{nt} aplicado en un borde cualquiera	36
2.6. Esfuerzo cortante y fuerzas concentradas equivalentes a un torsor M_{nt} aplicado en un borde cualquiera	36
2.7. Borde empotrado	40
2.8. Representación en planta de un borde empotrado	41
2.9. Borde apoyado	41
2.10. Representación en planta de un borde apoyado	42
2.11. Borde libre	43
2.12. Representación en planta de un borde libre	44
2.13. Borde sobre apoyo elástico simple	45
2.14. Esfuerzo cortante debido a un apoyo elástico simple	46
2.15. Borde unido solidariamente a una viga	47
2.16. Esfuerzos en la unión placa-viga	47
3.1. Función periódica de periodo T	53
3.2. Extensión periódica par de una función definida en el intervalo $[0, L]$	54
3.3. Extensión periódica impar de una función definida en el intervalo $[0, L]$	54
3.4. Tipo de problemas resolubles mediante el método de Navier	55
3.5. Función $\delta_{\mathcal{E}}(x)$ de área unidad	58

3.6. Placa rectangular tetrapoyada sometida a una carga puntual	59
3.7. Placa tetrapoyada sobre la que actúan dos cargas concentradas	60
3.8. Carga cualquier $p(x, y)$ considerada como suma de Deltas de Dirac	61
3.9. Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento concentrado	61
3.10. Momento concentrado como límite de dos fuerzas de valor $\frac{M_y}{\varepsilon}$ separadas una distancia ε	61
3.11. Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento concentrado según el eje x	62
3.12. Componentes de un momento cualquiera en los ejes x e y	63
3.13. Placa rectangular tetrapoyada sometida a una carga distribuida sobre una línea	63
3.14. Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento distribuido sobre una línea	65
3.15. Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento distribuido sobre una línea, dirigido según x	66
3.16. Problema general al que es aplicable el método de Levy	66
4.1. Esfuerzos sobre las caras x e y frontales	70
5.1. Coordenadas Polares	87
5.2. Elemento prismático diferencial en coordenadas Polares	89
5.3. Equilibrio del elemento prismático diferencial en coordenadas Polares	89
5.4. Desplazamiento deformada	91
5.5. Cortante efectivo	92
5.6. Cortante efectivo	94
5.7. Elemento diferencial con simetría de revolución	95
6.1. Cargas aplicadas en la placa	101
6.2. Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme	102

En este documento contiene, sin ánimo alguno de originalidad, la teoría de placas, los métodos de resolución clásicos para geometrías rectangulares y circulares, y una brevísima introducción a la resolución de estos problemas con el método de los elementos finitos. Todo ello en el rango lineal, y para problemas estáticos.

Se trata de un material docente introductorio, unos apuntes pasados a limpio con cierto esmero, corregidos de «todas» las erratas con la colaboración de generaciones de estudiantes de las diferentes asignaturas de diferentes titulaciones impartidas en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada en las que esta materia se ha incluido desde el curso 1995/1996

Las fuentes de las que nacen estos apuntes son las clases y apuntes de los maestros con los que aprendimos, y los libros bien trabajados de aquellos que los precedieron, y que se recogen, sin ánimo de exhaustividad en la breve bibliografía que cierra este «libro».

Los autores

Capítulo 1

Modelo de placas y ecuaciones generales derivadas del mismo

Índice

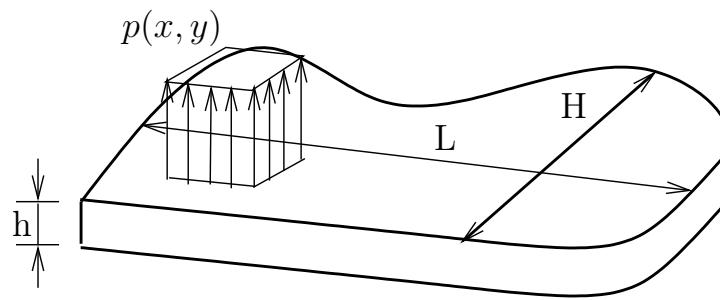
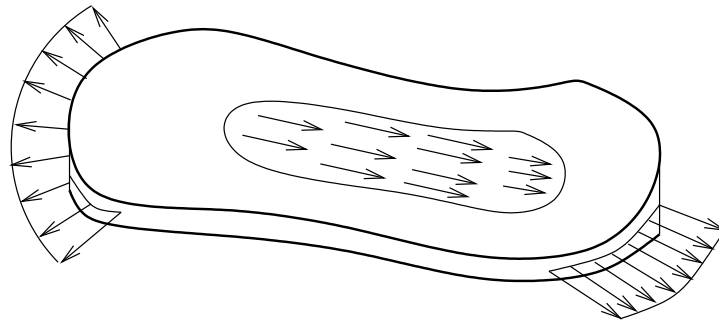
1.1. Introducción	1
1.2. Hipótesis de comportamiento	4
1.3. Relaciones cinemáticas	6
1.4. Esfuerzos unitarios	7
1.5. Ecuaciones de Equilibrio	10
1.5.1. Forma alternativa de obtener las ecuaciones de equilibrio	14
1.6. Deformaciones del prisma	16
1.7. Momentos-curvaturas	18
1.8. Ecuación de la deformada	20
1.9. Cálculo de las tensiones	22
1.9.1. Tensiones coplanarias	23
1.9.2. Tensiones tangenciales verticales	23
1.9.3. Tensiones normales σ_z	24
1.10. Validez de la Teoría	25

1.1. Introducción

Las *placas* son elementos resistentes constituidos por dos contornos planos, denominados *caras* y una superficie de cierre entre ambos planos y perpendicular a éstos, denominada *borde*. La distancia entre caras se denomina *espesor*. Además, se caracterizan por (ver figura 1.1):

1. El espesor, que denotamos con la letra h , es mucho menor que las otras dos dimensiones, ancho (H) y largo (L). Es decir $h \ll H$ y $h \ll L$.
2. El plano paralelo a las caras que divide el espesor en dos partes iguales se denomina *plano medio* y es inicialmente plano.
3. Las cargas son perpendiculares a la superficie media, pueden ser puntuales, repartidas o lineales y pueden ser momentos producidos por cargas de ese tipo, es decir, por pares de fuerzas perpendiculares a la superficie media. En todo caso, las fuerzas a las que está sometida provocan únicamente esfuerzos de flexión.

El análisis de este tipo de elemento podría hacerse considerando el caso general de cargas. Haciendo esto se comprueba que las cargas normales y las coplanarias con la superficie media producen efectos desacoplados, y que por tanto pueden analizarse de forma separada. Así las cargas normales producirán únicamente desplazamientos normales en la superficie media, y las cargas coplanarias sólo desplazamientos coplanarios.

Figura 1.1: El elemento estructural *placa*Figura 1.2: Elemento estructural *laja*

El elemento plano similar a la placa, pero sometida a cargas coplanarias se denomina *laja* y se deduce que las ecuaciones que rigen su comportamiento son las de la elasticidad bajo tensión plana (1.2).

Los elementos de pequeño espesor pero superficie media curva, se denominan *láminas* y es de gran interés estructural. Su análisis es complejo, pero en muchas ocasiones puede descomponerse en dos fases de análisis, una en la que se obtienen únicamente esfuerzos tangentes (comportamiento tipo *membrana*) y una segunda en que se incorporan efectos locales de flexión debidos a las condiciones de contorno. En cualquier caso es importante destacar que las láminas *NO* se comportan como placas, por lo que la teoría de placas no puede utilizarse como una aproximación para ese tipo de elementos.

La propiedades a flexión de una placa dependen principalmente de la relación existente entre el espesor y el resto de dimensiones. Así, las placas pueden clasificarse en tres grupos en función de la relación $\frac{h}{L}$:

1. **Placas gruesas** ($\frac{h}{L} \geq \frac{1}{5}$). En estos elementos no se puede despreciar ninguna componente de tensión y, por tanto, el análisis se realiza empleando las ecuaciones generales de la elasticidad tridimensional.
2. **Membranas** ($\frac{h}{L} \leq \frac{1}{50}$). El pequeño espesor que poseen impide que tengan rigidez a flexión y, por tanto, sólo pueden resistir tensiones de tracción.
3. **Placas delgadas** ($\frac{h}{L} \approx \frac{1}{50} - \frac{1}{10}$). Son el elemento estructural tipo placa más empleado. Se subdividen en dos grupos en función de la rigidez de las mismas, medida con el cociente entre flecha y espesor ($\frac{w}{h}$):
 - a) Placas delgadas rígidas ($\frac{w}{h} \leq 0,2$). Son aquellas en las que la deformación en el plano medio y las fuerzas de membrana se pueden despreciar. En ingeniería, salvo indicación contraria, la denominación placa se extiende a este tipo de elemento.
 - b) Placas delgadas flexibles ($\frac{w}{h} \geq 0,3$). Representan una combinación entre el comportamiento de placas delgadas rígidas y el efecto membrana. Su estudio se encuentra principalmente en la industria aeroespacial.

En estas notas se desarrollará principalmente la denominada *Teoría Clásica de placas delgadas*

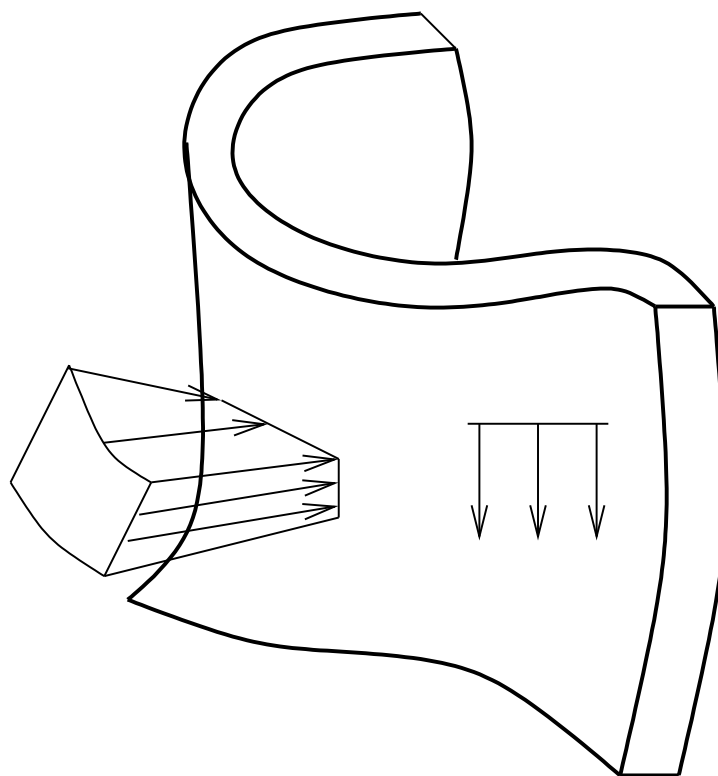


Figura 1.3: Elemento estructural *lámina*

o *Teoría de Kirchhoff*¹ correspondiente a placas delgadas rígidas. Existen teorías aplicables a un rango de espesores mayor ($\frac{h}{L} \approx \frac{1}{50} - \frac{1}{5}$), en las que algunas de suposiciones que se hacen en ésta se relajan, tales como la *teoría de Reissner*²-*Mindlin*³, que se denominan de manera genérica *teoría(s) de placas gruesas*.⁴

Hay muchas ocasiones en las que un elemento estructural puede analizarse mediante el modelo de *placa*, tanto en ingeniería civil como edificación. Ejemplos de esta situaciones serían: forjados bidireccionales, losas de cimentación, cubiertas planas, tableros de puentes, muros de contención, fondos de depósitos y paredes si son planas, etc.

Por otra parte, aunque en la teoría que se va a desarrollar se supone que son macizas, es posible aplicarla a casos tales como placas aligeradas, nervadas, etc, utilizando un espesor equivalente que tendrá que estimarse en cada caso. Este caso implica sin embargo que el comportamiento del material ha de considerarse ortótropo. En estas notas solo se van a desarrollar las ecuaciones para el caso de materiales isótropos, aunque gran parte del desarrollo es aplicable también a comportamientos lineales anisótropos, como se señalará en la sección correspondiente.

¹Gustav Robert Kirchhoff (12 de marzo de 1824 - 17 de octubre de 1887), físico alemán autor también de las conocidas *Leyes de Kirchhoff* para circuitos eléctricos. Kirchhoff fue el primero en establecer una teoría satisfactoria de placas, avanzando sobre los trabajos de Sophie German, Lagrange, Navier, Poisson y otros. También se denomina *Teoría de Kirchhoff-Love*

²Maxwell Erich Reissner, matemático e ingeniero alemán nacido en Aquisgrán en 1913, recibió su doctorado en 1935 en Mecánica Aplicada en la universidad de Berlín y se trasladó a EE.UU. en 1937, siendo profesor del Massachusetts Institute of Technology desde 1949 a 1968, y posteriormente de la University of California-San Diego, hasta su fallecimiento en 1996

³Raymond D. Mindlin, *mechanician* (especialista en mecánica aplicada) estadounidense (n. 17-9-1906, f. 22-11-1987), más conocido en el mundo de las *ciencias de la ingeniería* por su solución del problema de la carga aplicada en un semiespacio elástico, de gran aplicación en *Mecánica de Suelos*. Doctorado en la Universidad de Columbia donde recibió clases de Stephen Timoshenko, fue investigador del Laboratorio de Física Aplicada de Maryland, y más adelante volvió a la Universidad de Columbia donde fue profesor de Ciencia Aplicada hasta su jubilación en 1975.

⁴La teoría de placas gruesas más ampliamente aceptada es la de Reissner-Mindlin, que es similar, en cuanto a la aproximación que se hace para las deformaciones cortantes, al modelo de Timoshenko de vigas.

1.2. Hipótesis de comportamiento

El primer paso para el análisis de *placas*, que se lleva a cabo en esta sección, es establecer un modelo físico-mecánico que refleje de manera suficientemente aproximada el comportamiento real del elemento que queremos estudiar, pero que permita simplificar las ecuaciones generales que gobiernan su respuesta. Estas ecuaciones generales son las de la *Mecánica de Medios Continuos* aplicadas a un sólido deformables.

Aunque la resolución del problema se puede abordar con la teoría de elasticidad tridimensional, si el espesor es pequeño en comparación con las dimensiones en el plano, el problema se reduce a un análisis bidimensional. Así, las hipótesis para la resolución de estos elementos se reducen a eliminar de las ecuaciones a resolver las variables dependientes del espesor.

Supongamos unos ejes cartesianos tales que el origen se encuentra en un punto de la superficie media estando, los ejes x e y sobre la misma, y el eje z perpendicular a ésta. Un punto cualquiera P de coordenadas (x, y, z) tendrá un vector desplazamiento dado por sus componentes (u_x, u_y, u_z) . Así mismo, el tensor de tensiones en cada punto vendrá dado por sus componentes σ_{ij} . Habitualmente emplearemos como subíndices los nombres de los ejes, de modo que en vez de, por ejemplo, σ_{12} escribiremos σ_{xy} .

Veamos entonces las hipótesis adoptadas:

1. **Pequeños desplazamientos:** Suponemos que los desplazamientos δ son mucho menores que las magnitudes geométricas del elemento. En concreto $\delta \ll h$. La consecuencia de esta hipótesis es que la configuración deformada es, a efectos de establecer las ecuaciones del problema, la misma que la indeformada. Se dice que el problema tiene *linealidad geométrica*.
2. **Pequeñas deformaciones:** Esto implica que las derivadas de los desplazamientos $u_{i,j}$ son pequeñas, y por lo tanto existe una relación lineal entre estas y las deformaciones ε_{ij} que viene dada por la relación de *compatibilidad* $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$. Nótese que en un problema donde los desplazamientos sean pequeños, también lo serán las deformaciones, pero el recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, en el análisis de mallas de cables puede hacerse la hipótesis de pequeñas deformaciones, pero no la de pequeños desplazamientos. En este caso se dice que el problema tiene *linealidad mecánica*.
3. **Comportamiento elástico-lineal:** Esta hipótesis es una aproximación del comportamiento real de los materiales. En el caso de materiales metálicos es una muy buena aproximación, pero no tanto en el caso del hormigón y otros materiales cerámicos. En este caso se dice que el problema tiene *linealidad del material*. Cuando el problema tienen linealidad mecánica la linealidad del material puede ser una buena aproximación, ya que si el rango de deformaciones es pequeño la curva tensión deformación se puede linealizar si el error es del mismo orden que los de la teoría que estemos aplicando.

Estas hipótesis implican que el comportamiento del elemento es *lineal*, y que por lo tanto podremos aplicar en su análisis el principio de superposición, que de forma condensada puede expresarse así: “El resultado de la suma de acciones es igual a la suma de los resultados de cada acción”.

Además de estas hipótesis de índole general, vamos a considerar unas aproximaciones sobre los valores de distintas componentes del tensor de tensiones y deformaciones.

La tensión σ_{zz} es muy pequeña: Es evidente que esta tensión no puede ser nula en todo el elemento, ya que las están cargas aplicadas precisamente en esa dirección.

Sin embargo, es fácil comprobar que el valor de esta componente del tensor de tensiones será mucho menor que las otras componentes de la diagonal. Para ello consideremos un elemento en voladizo tal y como se ve en la figura.

Para estimar el orden de magnitud de las tensiones, consideremos una carga q distribuida sobre una área de ancho h .⁵ Es evidente que $\sigma_z \sim q$, donde \sim significa *del orden de magnitud*

⁵Este sería el caso más desfavorable: si la carga está distribuida sobre todo el elemento sale una tensión menor.

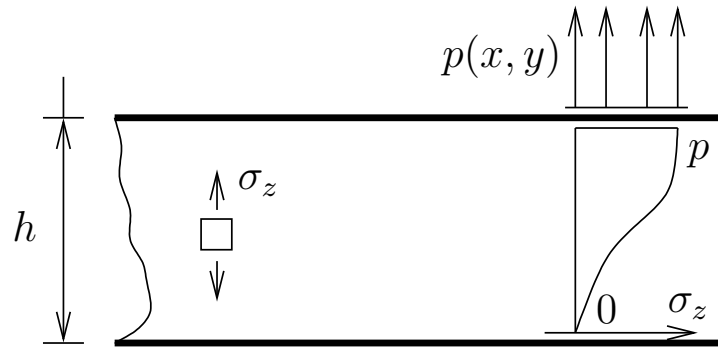


Figura 1.4: Cargas según el eje z y distribución de σ_z que producen

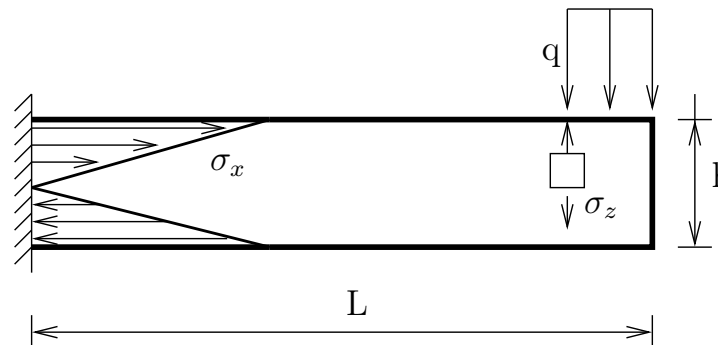


Figura 1.5: Placa en voladizo: estimación del valor de las tensiones de flexión σ_x en el empotramiento

de.⁶ Por otra parte el momento por unidad de longitud en el empotramiento será $M \sim q \times L \times h \sim \sigma_z \times L \times h$. Pero si la tensión máxima en el empotramiento es σ_x , entonces $M \sim \sigma_x \times h \times h$. Comparando ambas expresiones para el orden de magnitud del momento, $\sigma_z \times L \times h \sim \sigma_x \times h \times h$ se deduce que, $\sigma_z \sim \frac{h}{L} \sigma_x \ll \sigma_x$ ya que $\frac{h}{L} \ll 1$.

La deformación ε_z es muy pequeña: Despreciaremos la deformación de la placa en el sentido transversal producidas tanto por la tensión σ_z , como la provocada por el efecto Poisson por las tensiones σ_x y σ_y . Esto es razonable cuando el coeficiente de Poisson es bajo, pero también puede justificarse teniendo en cuenta que si $\sigma_z \sim 0$ entonces $\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$. En un problema de flexión las tensiones cambiarán de signo al movernos en la dirección z a lo largo del espesor, pasando de positivas a negativas o viceversa, de modo que lo mismo ocurrirá con la deformación ε_z , y por tanto, en la parte superior de la placa esta se adelgazará y en la inferior se elongará (o viceversa), de modo que en valor medio el cambio de espesor será nulo.

Hipótesis sobre la normal: Esta hipótesis es similar a la que se considera en la teoría de vigas sobre las secciones planas. En ese caso se afirmaba: “Las secciones planas antes de la deformación y perpendiculares a la línea media, permanecen planas y perpendiculares a éste después de dicha deformación”. En el caso de placas, en vez de secciones, hablaremos del vector normal a la superficie media y establecemos la siguiente aproximación: “Un segmento normal a la superficie media antes de la deformación, permanece recto y normal a la superficie media después de la deformación”

Si se observa la figura 1.6, esta hipótesis implica que las componentes del tensor de deformaciones ε_{yz} y ε_{xz} son nulas. Experimentalmente se comprueba que esto es más aproximado cuanto menor sea el espesor de la placa.

Nótese que al anular estas componentes del tensor de deformaciones el modelo predice un comportamiento más *rígido* que el que realmente tendrá la placa. Además, a pesar de que estas deformaciones las consideremos nulas, no podremos decir que lo sean también las

⁶Es decir, que si $q = 100 \text{ kN/m}^2$ entonces σ_z variará entre $\pm \alpha \times 10^2$ siendo $|\alpha|$ un número cercano a 1.

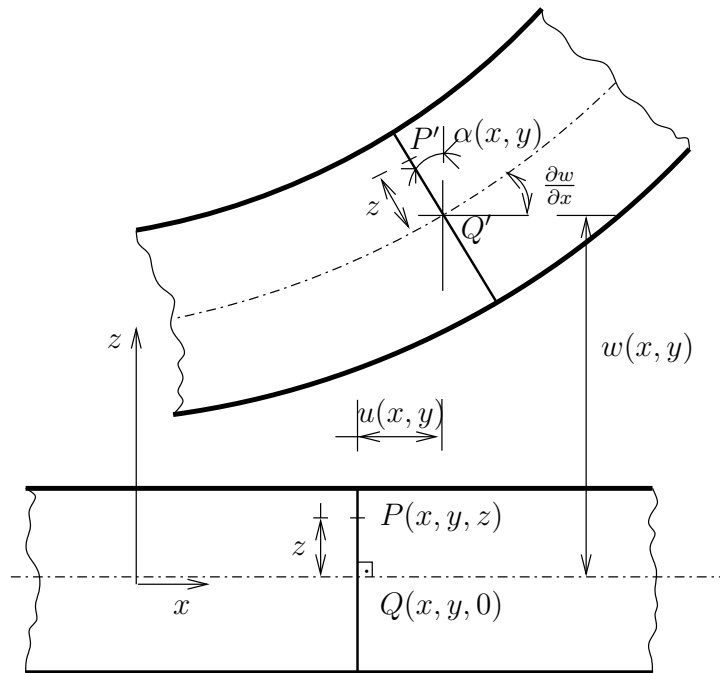


Figura 1.6: Relación entre el desplazamiento u_x de un punto $P(x, y, z)$ y el vector desplazamiento del punto $Q(x, y, 0)$, bajo la hipótesis de que la normal permanece recta y normal a la superficie deformada

tensiones correspondientes σ_{xz} y σ_{yz} pues si así fuera no se cumplirían las ecuaciones de equilibrio en el elemento diferencial, como veremos más adelante. Por tanto no podemos aplicar las relaciones $\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}$ y $\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$. Veremos más adelante que esta contradicción introduce dificultades en la teoría a la hora de aplicar ciertas condiciones de contorno.

En las teorías de placas gruesas se relaja esta condición de indeformabilidad, permitiendo que la normal gire y por tanto que existan deformaciones tangenciales, aunque éstas se consideran constantes en el espesor.

1.3. Relaciones cinemáticas

De las hipótesis anteriores pueden deducirse una serie de relaciones entre las componentes del desplazamiento en un punto cualquiera P de coordenadas (x, y, z) y las correspondientes del punto Q que se encuentra bajo este en el superficie media, es decir, de coordenadas $(x, y, 0)$. Para ello observemos la figura 1.6 en la que el segmento QP en la posición indeformada pasa a la posición $Q'P'$ en la deformada.

A la vista de la figura se deduce que $u_x(x, y, z) = u(x, y) - \text{sen } \alpha(x, y)z$ siendo $u(x, y) = u_x(x, y, 0)$ y $\alpha(x, y)$ el giro del segmento alrededor del eje y . De la misma forma se obtendría que $u_y(x, y, z) = v(x, y) - \text{sen } \beta(x, y)z$. Por otra parte, también se obtiene que $u_z(x, y, z) = w(x, y) - (1 - \cos \alpha)z - (1 - \cos \beta)z$. Considerando ahora que los giros son pequeños, entonces $\text{sen } \alpha \sim \alpha$, $\text{sen } \beta \sim \beta$, $1 - \cos \alpha \sim 0$ y $1 - \cos \beta \sim 0$. Introduciendo estas aproximaciones se obtiene,

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) - \alpha(x, y)z \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) - \beta(x, y)z \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}$$

A continuación, obsérvese que no hemos aplicado aún la condición de que el segmento $Q'P'$ sea normal a la superficie deformada. Esta condición implica que $\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ y $\beta = \frac{\partial w}{\partial y}$, ya que la

ecuación de la superficie media deformada es precisamente $w(x, y)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= u(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x} z \\u_y(x, y, z) &= v(x, y) - \frac{\partial w}{\partial y} z \\u_z(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}$$

Estas ecuaciones, deducidas a partir de las hipótesis de comportamiento establecidas, implican que el vector desplazamiento en cualquier punto puede calcularse conociendo dicho vector en los puntos de la superficie media, lo cual reduce el problema de desplazamientos a un plano.

Por último, eliminando los desplazamientos coplanarios con la superficie media que se producen en el comportamiento tipo *laja* nos queda:

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= -\frac{\partial w}{\partial x} z \\u_y(x, y, z) &= -\frac{\partial w}{\partial y} z \\u_z(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

de modo que el campo de desplazamientos por flexión puede determinarse en cualquier punto sin más que conocer la *flecha* $w(x, y)$ en la superficie media.

1.4. Esfuerzos unitarios

En la sección anterior hemos reducido el problema de desplazamientos en la placa al cálculo de la flecha en la superficie media. De la misma forma, las tensiones a lo largo del espesor vamos a reducirlas a unas magnitudes equivalentes definidas en la superficie media.

Definimos un elemento diferencial, que denominamos *prisma diferencial*, limitado por dos pares de planos perpendiculares a los ejes x e y y separados una distancia dx y dy , respectivamente, tal y como se observa en la figura 1.7. El prisma diferencial es *finito*, de longitud h , en la dirección z e infinitesimal en las direcciones x e y . La representación del prisma en la mayoría de los textos sobre placas puede ser confusa, pues se dibuja el elemento con la dimensión vertical menor que las otras dos, como si fuera un trozo finito de placa.

Sobre cada cara lateral del prisma actúan unas tensiones distribuidas. El prisma tiene cuatro caras laterales, la *frontal x*, *dorsal x*, *frontal y* y *dorsal y*. Las frontales son aquellas cuya normal va según el eje positivo correspondiente, y la dorsal la opuesta. El nombre x o y se refiere al eje que es normal a la cara considerada.

Aplicando las técnicas habituales del análisis con elementos diferenciales⁷, consideramos que las tensiones son constantes en el ancho de cada cara, pero serán variables con la altura, ya que esta dimensión es finita. Los *esfuerzos unitarios* se obtendrán a partir de las fuerzas y momentos resultantes de estas distribuciones de tensiones. Así, considerando la cara *frontal x* (1.7), vemos que sobre ella actúan las tensiones σ_x , σ_{xy} y σ_{xz} . Calculemos, por ejemplo la fuerza resultante total que estas tensiones ejercen en dirección z ,

$$dR_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz dy$$

La fuerza resultante es diferencial, y puede escribirse de la siguiente forma:

$$dR_z = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \right) dy$$

⁷Análisis no-estándar en terminología matemática

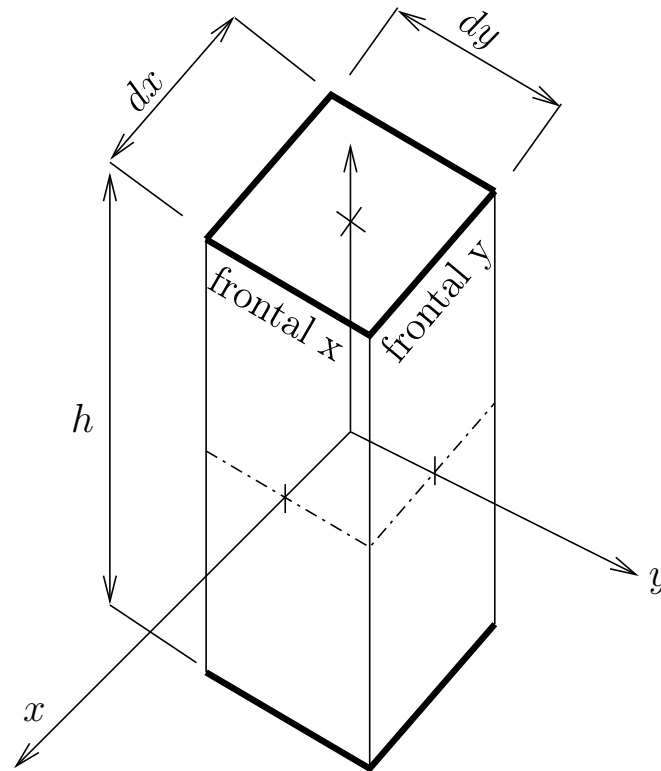


Figura 1.7: El prisma diferencial

El término entre paréntesis es finito y se denomina *cortante unitario* Q_x ,

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz$$

Las dimensiones de este valor son $[Q_x] = FL^{-1}$, es decir, fuerza por *unidad de longitud*, de ahí el nombre de esfuerzo *unitario*⁸. Otra forma de destacar este aspecto es escribiendo la expresión que relaciona el esfuerzo Q_x con la resultante total de fuerzas en la cara,

$$dR_z = Q_x dy$$

de modo que la fuerza total *no es el esfuerzo unitario*, sino el valor de este esfuerzo multiplicado por la anchura *en planta* de la cara sobre la que actúa. Véase en la figura 1.8 una representación gráfica correcta de este esfuerzo sobre la cara en la que actúa. Sin embargo, a fin de no hacer inmanejables los dibujos del prisma diferencial sometido a distintos esfuerzos unitarios, éstos se representarán habitualmente con un solo vector, como si fueran una fuerza concentrada, pero es necesario recordar en todo momento que para obtener el valor de la fuerza total (o momento) es necesario multiplicar el esfuerzo unitario por la longitud *en planta* de la cara en la que actúa.⁹ Además, en muchas ocasiones abreviaremos la expresión y obviaremos, dándolo por supuesto, el adjetivo *unitario*.

De la misma manera se calculan el resto de resultantes sobre cada una de las caras, obteniéndose la siguiente definición para los distintos esfuerzos unitarios que actúan sobre las caras

⁸Esta denominación no se usa en los textos de placas y sin embargo los autores de estas notas consideran imprescindible recalcar la diferencia de estos esfuerzos con los equivalentes que se utilizan en teoría de vigas, añadiendo para ello el adjetivo *unitario*.

⁹Si la cara es finita *en planta*, habrá que integrar el esfuerzo para obtener la resultante total a lo largo de la línea en la que actúe dicho esfuerzo unitario.

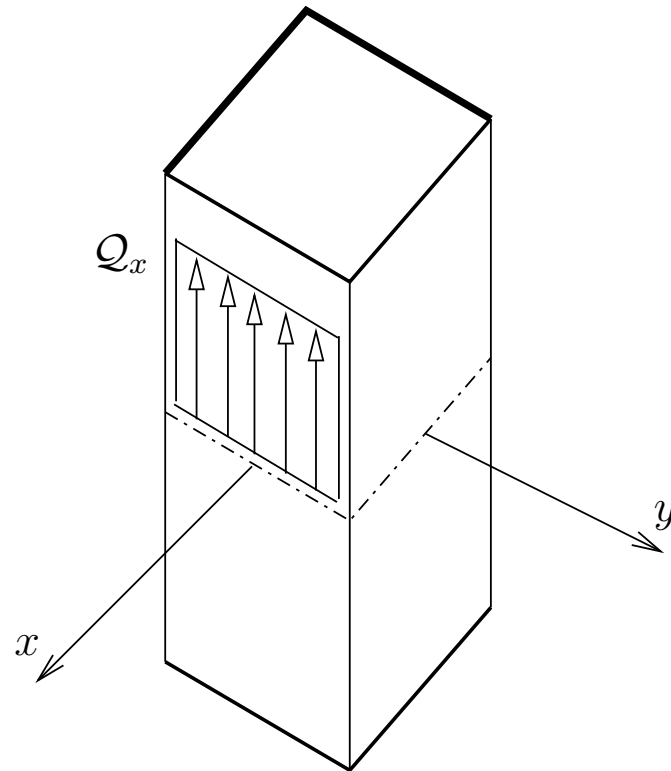


Figura 1.8: Esfuerzo unitario Q_x dibujado como fuerza repartida

laterales del prisma diferencial. Así sobre la cara x actúan,

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz$$

y sobre las caras y

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$$

$$N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yx} dz$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yx} dz$$

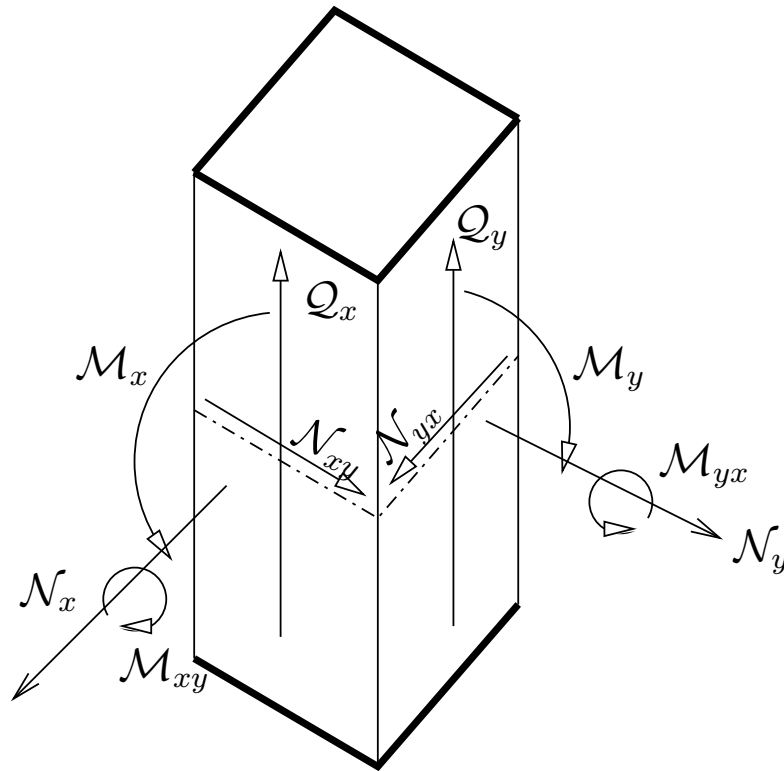


Figura 1.9: Esfuerzos sobre las caras x e y frontales

En la figura 4.1 se representan los esfuerzos definidos mediante estas ecuaciones, dibujados con valor positivo para indicar cual es el criterio de signos que se deriva de estas definiciones. Se representan los esfuerzos unitarios en las caras frontales, siendo los de las caras dorsales de igual valor y sentido contrario.

Los esfuerzos coplanarios N_x , N_y , N_{xy} y N_{yx} solo aparecerán para el caso de cargas coplanarias, y por tanto se obtienen para el comportamiento tipo *laja*, pero son nulos cuando las cargas son perpendiculares a la superficie media, por lo que no vamos a considerarlos en el resto de estas notas.

Por otra parte, por equilibrio en un cubo diferencial $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ de modo que $M_{xy} = M_{yx}$ ¹⁰ y por tanto sólo quedan como esfuerzos unitarios los dos cortantes Q_x y Q_y , los dos flexores M_x y M_y y el torsor M_{xy} .

Obsérvese que al igual que los cortantes unitarios Q_x y Q_y tienen dimensiones FL^{-1} , fuerza por unidad de longitud, los flexores unitarios M_x y M_y , y el torsor unitario M_{xy} tienen dimensiones de *momento por unidad de longitud* es decir $(FL)L^{-1} = F$.

1.5. Ecuaciones de Equilibrio

El prisma diferencial sometido a los esfuerzos unitarios en sus caras laterales y a las acciones exteriores ha de estar en equilibrio. Las cargas exteriores pueden ser de cualquier tipo, de superficie o volumen, pero vamos a reducirlas a la superficie media de la placa de modo que de forma general sobre la placa solo actuará una carga por unidad de superficie $p(x, y)$ dirigida según el eje z positivo¹¹. Para simplificar las gráficas, esta fuerza la representaremos habitualmente sobre la cara superior de la placa pero ha de recordarse que está aplicada en la superficie media si esto fuera relevante en alguna ecuación.

¹⁰Lógicamente también se cumplirá que $N_{xy} = N_{yx}$

¹¹Como veremos al resolver problemas de placas, este tipo de carga es más general de lo que parece, ya que incluye cargas concentradas, momentos concentrados, momentos repartidos por unidad de superficie, líneas de carga, etc.

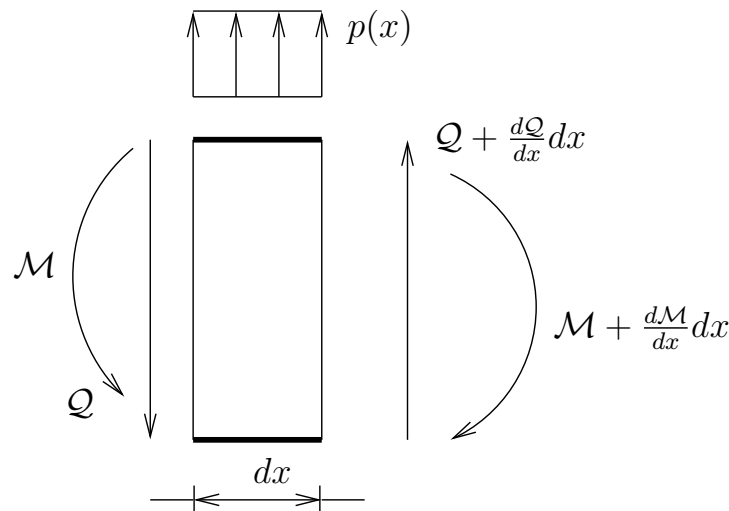


Figura 1.10: Equilibrio en una rebanada para el caso de vigas

Las ecuaciones de equilibrio sobre el prisma diferencial pueden obtenerse de diversas formas. La más intuitiva es hacerlo de manera similar a como se hace sobre una rebanada diferencial en teoría de vigas, dibujando sobre el elemento diferencial las cargas exteriores, los esfuerzos en la cara dorsal y los mismos en la cara frontal, incrementándolos en un diferencial, tal y como se muestra en la figura 1.10

El prisma ha de estar en equilibrio de fuerzas y momentos según los tres ejes coordenados. Sin embargo dadas las fuerzas exteriores consideradas, que no tenemos en cuenta los esfuerzos coplanarios¹², y que ya hemos aplicado la simetría del tensor de tensiones, es fácil comprobar que se cumplen automáticamente las ecuaciones de equilibrio de fuerzas según los ejes x e y , así como la de momentos alrededor del eje z . Por tanto sólo es necesario imponer el equilibrio según z y de momentos según x e y . Veamos cada una de ellas.

Equilibrio de fuerzas en el prisma diferencial según el eje z . En la figura 1.11 se representan los alzados del prisma diferencial con las fuerzas y esfuerzos que actúan en dirección z . En cada alzado solo se dibujan parte de las fuerzas que aparecen en el prisma para simplificar la representación.

Se utiliza la notación de *coma* para las derivadas parciales, tal y como se hace en la notación indicial pero utilizando los nombres de los ejes en vez de su número, de modo que $f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{,y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{,z} = \frac{\partial f}{\partial z}$, $f_{,xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc.

El equilibrio de fuerzas sobre el prisma en dirección z implica:

$$p \, dx \, dy - Q_x \, dy + (Q_x + Q_{x,x} \, dx) \, dy - Q_y \, dx + (Q_y + Q_{y,y} \, dy) \, dx = 0$$

eliminando términos que se cancelan,

$$p \, dx \, dy + Q_{x,x} \, dx \, dy + Q_{y,y} \, dx \, dy = 0$$

y dividiendo entre $dx \, dy$ y reordenando,

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + p = 0$$

o con la notación habitual para las derivadas parciales,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.2)$$

Esta ecuación es equivalente a la de teoría de vigas $\frac{dQ}{dx} + p = 0$ que se obtiene del equilibrio vertical de fuerzas sobre la rebanada.

¹²No es que estemos despreciándolos sino que sus ecuaciones están desacopladas de las de los esfuerzos de flexión, y habría que obtenerlas para analizar el comportamiento tipo *laja* pero no el de placa.

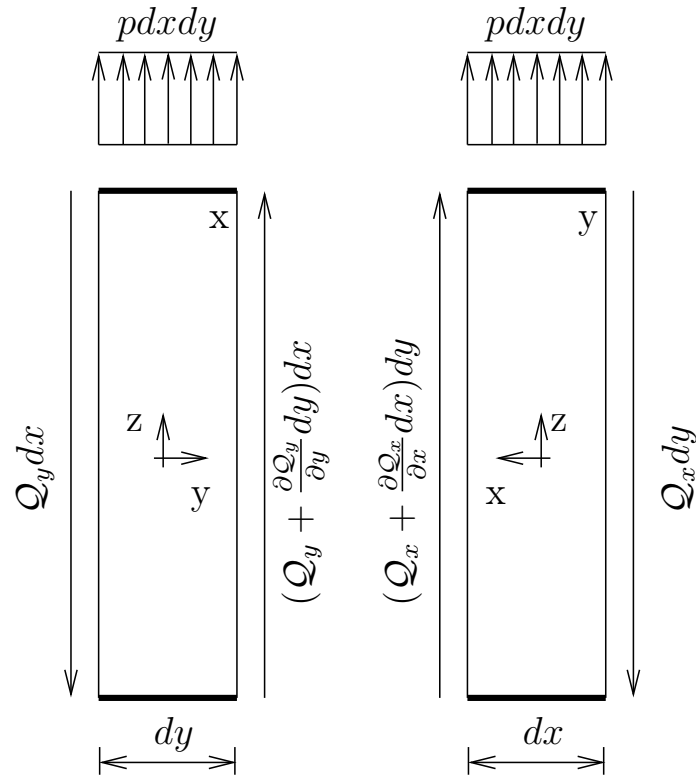


Figura 1.11: Alzados del prisma diferencial para equilibrio vertical de fuerzas

Equilibrio de momentos en el prisma diferencial según el eje x . En la figura 1.12 se representan los alzados del prisma diferencial con las fuerzas y esfuerzos que dan momento alrededor del eje x ¹³.

Realizando equilibrio de momentos según el eje x , tomando como positivo el valor antihorario:

$$(M_y + M_{y,y} dy) dx - M_y dx + (M_{xy} + M_{xy,x} dx) dy - M_{xy} dy - Q_y dx dy = 0$$

Eliminando cancelando términos, dividiendo entre el área $dx dy$ y reordenando se obtiene,

$$Q_y = M_{y,y} + M_{xy,x}$$

que es equivalente a la ecuación $\frac{dQ}{dx} = M$ de la teoría de vigas. Con la notación estándar de derivadas parciales sería:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Equilibrio de momentos en el prisma diferencial según el eje y . El proceso es exactamente igual que en caso anterior. En la figura 1.13 se representan el alzado del prisma diferencial con las fuerzas y esfuerzos que dan momento alrededor del eje y . Realizando los mismos pasos se llega a:

$$Q_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$

o de otra forma:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

¹³Entre estos no figura ahora el esfuerzo $\frac{\partial Q_y}{\partial y}$ que sí pusimos en el equilibrio anterior. Esto es así pues este esfuerzo produce un momento que será ‘despreciable’ (utilizando el lenguaje del análisis no-estándar) en comparación con el que producen los esfuerzos representados, tal y como puede comprobarse si se incluye explícitamente.

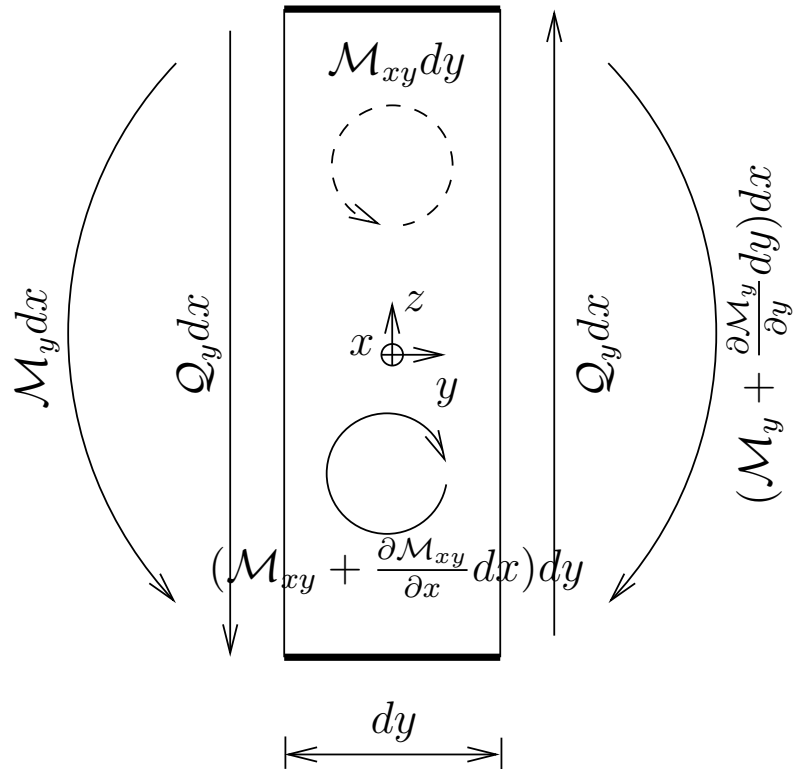


Figura 1.12: Alzado del prisma para equilibrio de momentos según el eje x

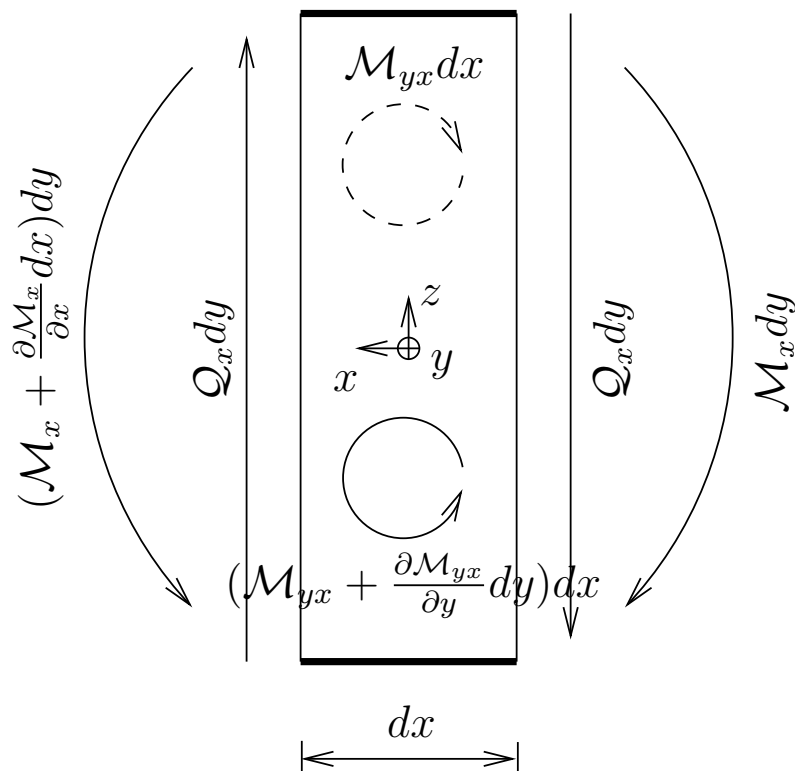


Figura 1.13: Alzado del prisma para equilibrio de momentos según el eje y

Equilibrio vertical en términos de momentos. Las ecuaciones de equilibrio de momentos según x , y , y fuerzas según z son entonces:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \end{aligned}$$

Sustituyendo los cortantes dados por las dos primeras en la última, que es el equilibrio vertical, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (1.3)$$

ecuación equivalente a $\frac{d^2 M}{dx^2} + p = 0$ de la teoría de vigas. Usaremos la ecuación de equilibrio en términos de momentos más adelante, pero hay que recalcar que esta ecuación no sustituye a las otras tres, sino que es una combinación lineal de ellas que usaremos cuando sea conveniente.

Tenemos 3 ecuaciones de equilibrio y 5 esfuerzos, por lo tanto el problema no es isostático a nivel diferencial, al contrario de lo que ocurre en la teoría de la vigas.

1.5.1. Forma alternativa de obtener las ecuaciones de equilibrio

Una forma alternativa, más rigurosa aunque menos intuitiva de obtener las ecuaciones de equilibrio es partiendo de las correspondientes a nivel de cubo diferencial que en notación indicial son:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

Estas tres ecuaciones establecen el equilibrio de fuerzas en un cubo diferencial según los tres ejes coordenados. La resultante según cada uno de los ejes es nula, pero vamos a denominar a dicha resultante r_i , de modo que

$$r_i = \sigma_{ij,j} + b_i$$

Las ecuaciones de equilibrio se reducen entonces a

$$r_i = 0$$

Para establecer las ecuaciones que buscamos a nivel del prisma diferencial bastará calcular entonces la resultante de fuerzas según z y de momentos según x e y mediante integración en el prisma, es decir según el eje z , de las fuerzas r_i que produzcan fuerzas o momentos según esas direcciones.

Así, el equilibrio del prisma en dirección del eje z será:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r_z dz = 0$$

y por tanto,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zx,x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zy,y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz,z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_z dz = 0$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{zz} \sim 0$ y llamando $p(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_z dz$ se obtiene,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zx,x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zy,y} dz + p = 0$$

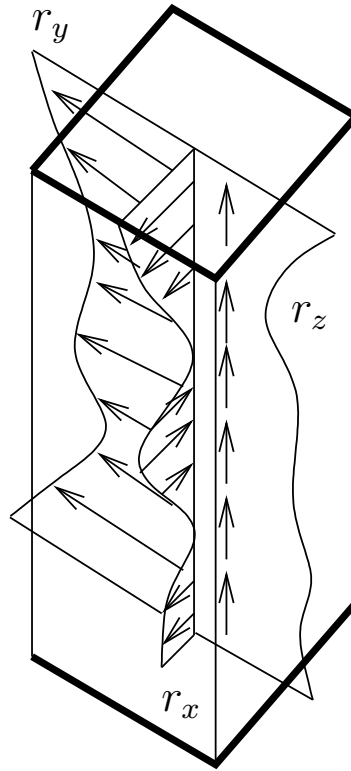


Figura 1.14: Prisma con las fuerzas *nulas* r_i

Intercambiando ahora el orden de la integración respecto a z con las derivadas respecto a x e y ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zx} dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zy} dz \right) + p = 0$$

y teniendo en cuenta finalmente la definición de los esfuerzos,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

que es la misma ecuación que obtuvimos antes.

El equilibrio de momentos según el eje x será:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z r_y dz = 0$$

y por tanto,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yx,x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy,y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yz,z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z b_z dz = 0$$

En la primera integral podemos hacer lo siguiente,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yx,x} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z \sigma_{yx}),_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yx} dz = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

teniendo en cuenta la definición del momento unitario M_{yx} .

Igualmente en la segunda,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy,y} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z \sigma_{yy}),_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz = \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

En la tercera sin embargo, como la derivada es respecto a z no podemos hacer lo mismo. A cambio, integraremos por partes,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{yz,z} dz = z\sigma_{yz}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz$$

Teniendo en cuenta que en las caras superior no habrá tensiones rasantes, entonces $\sigma_{yz}\left(x, y, \frac{h}{2}\right) = \sigma_{yz}\left(x, y, -\frac{h}{2}\right) = 0$, y por tanto la integral anterior queda,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{yz,z} dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz = -Q_y$$

Consideremos finalmente que las fuerzas exteriores no tienen resultante de momentos¹⁴, es decir $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zb_z dz = 0$.

Recopilando los valores obtenidos para las integrales y reordenando términos se obtiene finalmente,

$$Q_y = \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{M}_{yx}}{\partial x}$$

que es igual que la que se obtuvo mediante el procedimiento intuitivo, sin más que tener en cuenta que $\mathcal{M}_{yx} = \mathcal{M}_{xy}$.

De igual forma se llegaría a la ecuación de equilibrio según y partiendo de la expresión,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zr_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xx,x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xy,y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xz,z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zb_x dz = 0$$

Este procedimiento es matemáticamente más complejo pero permite destacar aspectos que quedan menos claros en el planteamiento intuitivo. Además, de manera natural se obtienen los esfuerzos unitarios, pues son las integrales de las tensiones a lo largo del espesor que aparecen en el equilibrio global del prisma diferencial.

1.6. Deformaciones del prisma diferencial

Del mismo modo que la distribución de tensiones las hemos reducido a la superficie media definiendo unos esfuerzos unitarios equivalentes, es posible definir unas magnitudes en la superficie media que describan la manera en que se deforma el prisma diferencial. Para ello vamos a calcular la distribución de deformaciones en toda la longitud del prisma, partiendo de las ecuaciones que determinan los desplazamientos dadas por 1.1, y la definición del tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -w_{,xx} z \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -w_{,yy} z \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -w_{,xy} z \end{aligned} \quad (1.4)$$

El resto de las deformaciones son nulas, por la hipótesis establecidas.

Sobre el prisma diferencial actúan tres esfuerzos que darán lugar a deformaciones: \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_{xy} .¹⁵ Vamos a denominar a las deformaciones del prisma diferencial correspondientes a estos

¹⁴Como se ha comentado más arriba, esta limitación puede más adelante eliminarse usando para $p(x, y)$ una expresión adecuada, tal y como se verá en los ejercicios

¹⁵Recuérdese que no consideramos los esfuerzos coplanarios, y que la placa es rígida a cortante, por lo que Q_x y Q_y no realizan trabajo.

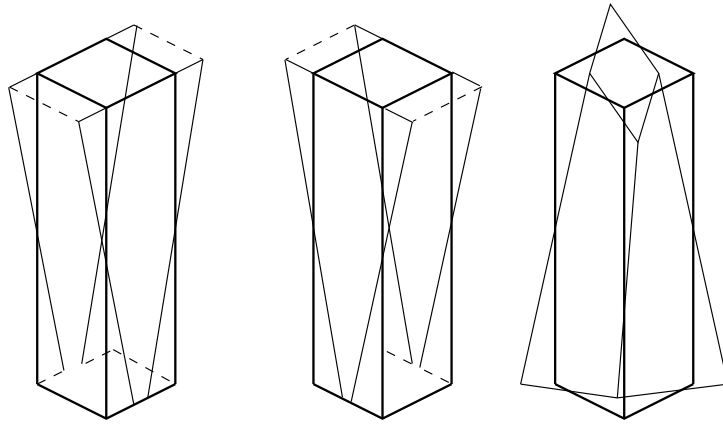


Figura 1.15: Prisma deformado: curvaturas

esfuerzos κ_x , κ_y y κ_{xy} , aunque aún no sabemos cual es su valor. Para que la definición de estas deformaciones del prisma diferencial sea congruente con los esfuerzos unitarios, el trabajo virtual que éstos hagan con dichas deformaciones en un prisma diferencial ha de ser igual al calculado sumando el trabajo de las tensiones con las deformaciones a nivel de punto.¹⁶ Por tanto,

$$\delta W^{\text{int}} = \mathcal{M}_x \delta \kappa_x + 2\mathcal{M}_{xy} \delta \kappa_{xy} + \mathcal{M}_y \delta \kappa_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy}) dz$$

Teniendo en cuenta el valor de ε_{ij} dado por las ecuaciones 1.4 se obtiene,

$$\delta W = \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz \right) (-\delta w_{,xx}) + 2 \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz \right) (-\delta w_{,xy}) + \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz \right) (-\delta w_{,yy})$$

y por tanto,

$$\delta W = \mathcal{M}_x (-\delta w_{,xx}) + 2\mathcal{M}_{xy} (-\delta w_{,xy}) + \mathcal{M}_y \delta (-\delta w_{,yy})$$

de donde se concluye que,

$$\kappa_x(x, y) = -w_{,xx}; \quad \kappa_y(x, y) = -w_{,yy}; \quad \kappa_{xy}(x, y) = -w_{,xy}$$

Los valores de κ_x , κ_y y κ_{xy} son una *medida* de como se distorsiona un prisma diferencial, tal y como se ve en la figura 1.15. Así κ_x es *aproximadamente* el valor de la curvatura de la deformada en un plano paralelo al plano xz , κ_x lo mismo para un plano paralelo al plano yz , y κ_{xy} la torsión que sufre el prisma diferencial. De manera genérica denominaremos *curvaturas* a κ_{ij} para diferenciarlas de las deformaciones a nivel de punto.¹⁷

¹⁶Recuérdese que el Principio de los Trabajos Virtuales establece que el trabajo virtual interno que realizan las tensiones con las deformaciones virtuales en un volumen Ω es de la forma $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega$

¹⁷Los valores de κ_{ij} son una aproximación de los coeficientes de la denominada *segunda forma fundamental* de la superficie deformada y que se denota mediante $\Pi(x, y)$. La expresión de Π en un punto se obtiene desarrollando en serie la superficie $w(x, y)$ en dicho punto, pero cambiando los ejes de modo que el plano xy sea tangente a la superficie w , y que el origen esté en el punto considerado. Sea \hat{w} la expresión de la flecha en los nuevos ejes. Mediante un desarrollo en serie de Taylor, $\hat{w}(x, y) \sim \frac{b_{11}}{2} x^2 + b_{12} xy + \frac{b_{22}}{2} y^2$. Se define la segunda forma fundamental como $\Pi(x, y) = b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2$. A partir de b_{ij} pueden calcularse las curvaturas principales, curvatura de Gauss, etc. Cuando las *pendientes* de w respecto a x y y son pequeñas, puede comprobarse que $b_{11} = w_{,\hat{x}\hat{x}} \sim w_{,xx}$, $b_{12} = w_{,\hat{x}\hat{y}} \sim w_{,xy}$, $b_{22} = w_{,\hat{y}\hat{y}} \sim w_{,yy}$, de modo que κ_{ij} es una aproximación de los valores de b_{ij} salvo el signo, y por lo tanto, una medida de las curvaturas de la superficie deformada.

En función de estas curvaturas del prisma pueden calcularse las componentes el tensor de deformaciones en cualquier punto:

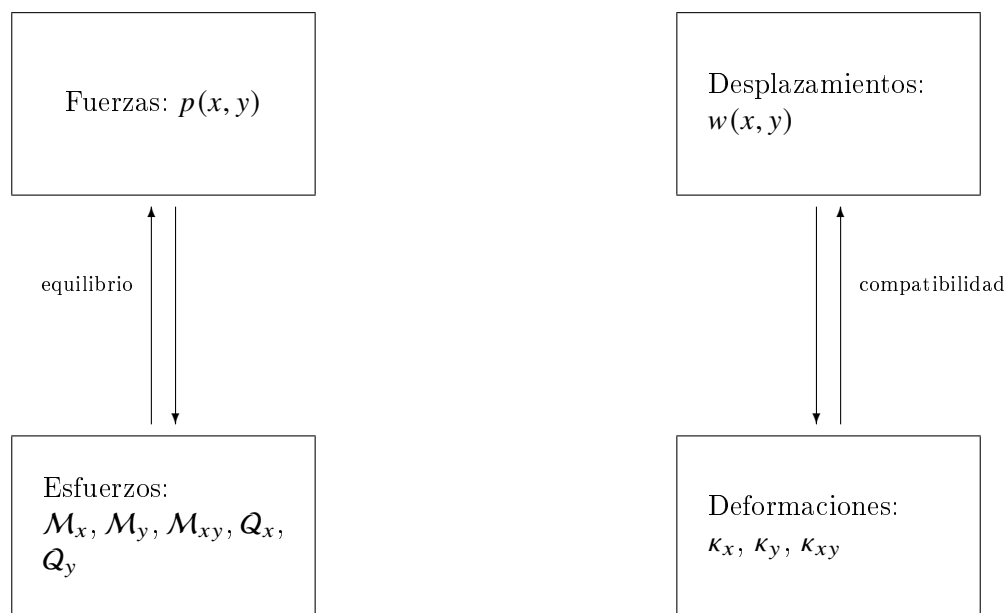
$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x, y, z) &= \kappa_x(x, y) z \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) &= \kappa_y(x, y) z \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \kappa_{xy}(x, y) z\end{aligned}\quad (1.5)$$

expresiones que utilizaremos más adelante.

1.7. Relaciones Momentos-Curvaturas

En las secciones anteriores hemos ido desarrollando diversas ecuaciones y definiendo diferentes magnitudes con el objetivo de obtener un modelo matemático derivado de las ecuaciones de la elasticidad, pero simplificado. Así, hemos reducido las cargas a su resultante $p(x, y)$, los desplazamientos en cualquier punto a la *flecha* $w(x, y)$, las tensiones a lo largo del espesor a sus resultantes, que denominamos *esfuerzos unitarios*, y por último las deformaciones a las curvaturas $\kappa_{ij}(x, y)$. Entre estas magnitudes existen relaciones derivadas del equilibrio o la cinemática. Así, la carga $p(x, y)$ se relaciona con los esfuerzos mediante las *ecuaciones de equilibrio*, mientras que la flecha $w(x, y)$ se relaciona con las curvaturas mediante las ecuaciones 1.5, que podemos denominar *ecuaciones de compatibilidad*.

Gráficamente las magnitudes y sus relaciones pueden representarse mediante un *Diagrama de Tonti* de la siguiente forma:¹⁸



Las magnitudes *externas*, fuerzas por unidad de superficie $p(x, y)$ y flecha en la superficie media $w(x, y)$ no pueden relacionarse directamente, ya que dicha relación es muy compleja y dependerá de la forma de la placa, de su espesor y de las condiciones de contorno. Para las magnitudes *internas*, esfuerzos unitarios y curvaturas, variables correspondientes a las anteriores pero definidas sobre un elemento muy simple, el *prisma diferencial*, sí va a ser fácil establecer la relación que las liga, partiendo de la *ley de comportamiento* a nivel de punto. Esta relación la denominaremos también *ley de comportamiento* o *relaciones momentos-curvaturas*.

¹⁸Denominado así en honor del profesor de Enzo Tonti del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Trieste que lo propuso en un esquema general para la clasificación de magnitudes en cualquier teoría físico-matemática [8]

Todo lo desarrollado en las secciones anteriores es independiente del comportamiento del material. Las magnitudes definidas y las relaciones que las ligan son por tanto totalmente generales, bajo las hipótesis de placas delgadas, pero independientes de las ecuaciones constitutivas del material. Las *relaciones momento-curvatura* sin embargo, se derivan directamente de las ecuaciones constitutivas del material a nivel de punto, y por tanto, serán distintas según sean éstas. En estas notas sólo van a desarrollarse para el caso de un material elástico e isótropo, pero la extensión a casos más complejos es inmediata. En las aplicaciones prácticas, por ejemplo, son de mucho interés el caso de placas ortótropas como elemento equivalente a los emparrillados.

Partimos de la ley de Hooke que relaciona las deformaciones con las tensiones en un punto cualquiera. La expresión general para un material isótropo es la siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

siendo E el módulo de elasticidad del material y ν el coeficiente de Poisson.

En la placa estamos asumiendo que es nula la componente σ_{zz} del tensor de tensiones y las deformaciones ε_{xz} y ε_{yz} ¹⁹. Por tanto, las 6 ecuaciones anteriores se reducen a 3:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}\end{aligned}$$

y agrupando términos,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}\end{aligned}$$

Despejando las tensiones se llega a,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\end{aligned}$$

A continuación vamos a sustituir las deformaciones por su expresión en función de las curvaturas, dadas por 1.5

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y)z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x)z \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\kappa_{xy}z\end{aligned}$$

Por último, a partir de esta expresión de las tensiones, calculamos los momentos \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_{xy} por integración de las mismas en el espesor, multiplicadas por el brazo z . Así para el momento \mathcal{M}_x tendremos,

$$\mathcal{M}_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y)z^2 \right] dz = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

¹⁹También estamos asumiendo que $\varepsilon_{zz} = 0$, pero esto es contradictorio con $\sigma_{zz} = 0$, si insistimos en que ambas magnitudes estén relacionadas mediante la ley de Hooke. Esta discrepancia implica que no podemos usar aquí más que una de estas dos suposiciones. Vamos a usar aquí la segunda.

ya que κ_x y κ_y no son funciones de z . La integral de z^2 la denominamos I , y su valor es,

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

de modo que finalmente,

$$\mathcal{M}_x = D (\kappa_x + \nu\kappa_y)$$

siendo,

$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Con el mismo procedimiento se obtienen las relaciones para \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_{xy} . Las tres ecuaciones resultantes son:

$$\mathcal{M}_x = D (\kappa_x + \nu\kappa_y)$$

$$\mathcal{M}_y = D (\kappa_y + \nu\kappa_x)$$

$$\mathcal{M}_{xy} = D(1 - \nu)\kappa_{xy}$$

que son las ecuaciones que relacionan los momentos unitarios y las curvaturas. Podemos escribirlas directamente en función de las segundas derivadas de los desplazamientos,

$$\mathcal{M}_x = -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \tag{1.6}$$

$$\mathcal{M}_y = -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \tag{1.7}$$

$$\mathcal{M}_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \tag{1.8}$$

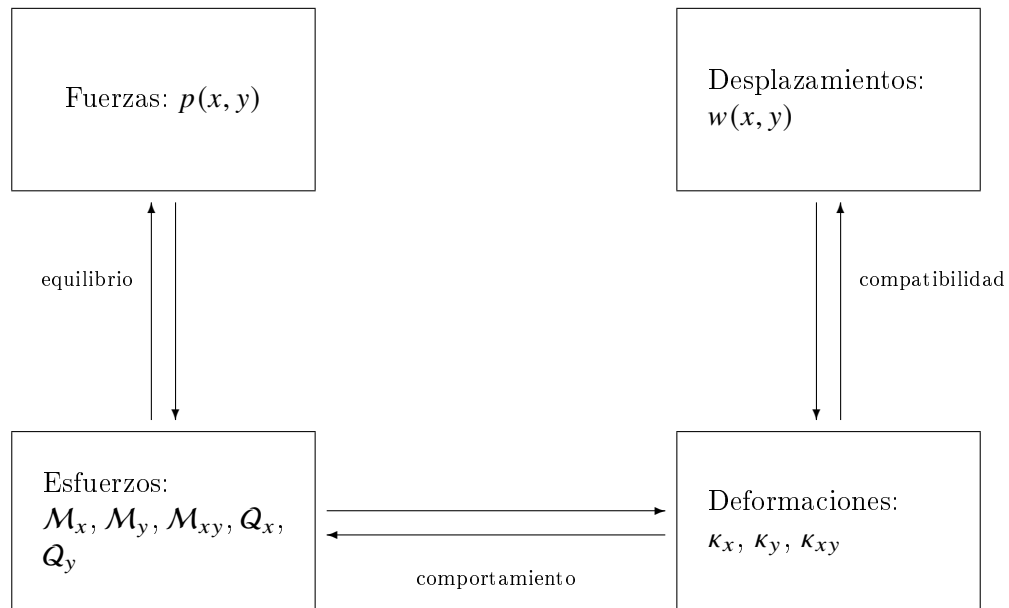
Los cortantes pueden obtenerse a partir de los momentos mediante las ecuaciones de equilibrio. Sustituyendo en dichas ecuaciones los valores de los momentos se obtiene,

$$Q_x = -D (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \tag{1.9}$$

$$Q_y = -D (w_{,yyy} + w_{,xxy}) \tag{1.10}$$

1.8. Ecuación de la deformada

Las ecuaciones obtenidas en la sección anterior cierran el *Diagrama de Tonti* del problema de placas:



Vamos a resumir las ecuaciones de las que disponemos para resolver el problema:

Equilibrio Las ecuaciones de equilibrio ligan los esfuerzos unitarios con las cargas externas y son las siguientes:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \end{aligned}$$

Comportamiento Son las *relaciones momentos-curvaturas* desarrolladas en la sección anterior:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ M_{xy} &= D(1 - \nu)\kappa_{xy} \end{aligned}$$

Compatibilidad Son simplemente las ecuaciones que definen las curvaturas κ_{ij} :

$$\kappa_x(x, y) = -w_{,xx}; \quad \kappa_y(x, y) = -w_{,yy}; \quad \kappa_{xy}(x, y) = -w_{,xy}$$

Nótese que hemos planteado algunas otras ecuaciones, como las que da los cortantes en función de las terceras derivadas (1.9 y 1.10) o la de equilibrio en función de los momentos (1.3), pero todas ellas se han obtenido combinando varias de las anteriores, por lo que no son ecuaciones independientes adicionales.

Comprobemos que el número de ecuaciones obtenidas es igual al número de incógnitas:

Incógnitas Flecha (1) $w(x, y)$, momentos (3) M_x, M_y, M_{xy} , cortantes Q_x, Q_y (2), curvaturas (3) $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$, lo cual hace un total de 9 incógnitas.

Ecuaciones Equilibrio (3), Comportamiento (3), Compatibilidad (3), que también son 9 ecuaciones.

Resolver este problema de 9 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de manera directa es muy difícil, por lo que vamos a reducirlas a continuación a una sola, sin más que eliminar todas las incógnitas del sistema salvo una, la flecha $w(x, y)$. En primer lugar, los cortantes pueden eliminarse sin más que reducir las ecuaciones de *equilibrio* a una sola, dada por 1.3 y que era:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0$$

A continuación eliminamos los momentos sustituyéndolos por su valor en función de las curvaturas (*comportamiento*) y se llega fácilmente a la expresión

$$D\left(\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial y^2}\right) + p = 0$$

ya que los términos que multiplican a ν se cancelan. Por último se sustituyen las curvaturas por su expresión en función de las segundas derivadas de la flecha (*compatibilidad*):

$$-D\left(\frac{\partial^2 w_{,xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w_{,xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_{,yy}}{\partial y^2}\right) + p = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

que es la ecuación diferencial que gobierna la flecha en la placa, y que se denomina *ecuación biarmónica*. Este operador diferencial puede factorizarse fácilmente,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w = \frac{p}{D}$$

que de forma más compacta se escribe,

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad \text{ó} \quad \Delta \Delta w = \frac{p}{D}$$

o bien

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad \text{ó} \quad \Delta^2 w = \frac{p}{D}$$

siendo $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ el operador laplaciano.

A esta ecuación habrá que añadir las condiciones de contorno adecuadas en los bordes para que el problema tenga solución única.

La ecuación diferencial biarmónica no es posible resolverla de manera analítica más que en contados casos de geometría, cargas y condiciones de contorno muy simples. Estudiaremos casos particulares con soluciones analíticas o semi-analíticas siguientes:

- Placas rectangulares con los cuatro bordes apoyados (método de Navier ²⁰).
- Placas rectangulares con dos bordes paralelos apoyados (método de Levy ²¹).

Otro caso simple es el de placas circulares con condiciones de contorno axilsimétricas y carga axilsimétrica o general, aunque no se va a incluir en estas notas.

1.9. Cálculo de las tensiones en el espesor

La resolución de la ecuación biarmónica permitirá calcular la flecha en cualquier punto de la superficie media de la placa. A partir de esta magnitud se pueden obtener los esfuerzos en cualquier punto aplicando las relaciones momentos-curvaturas, y las derivadas de ellas para los cortantes. Se repiten a continuación esas cinco ecuaciones.

$$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (1.11)$$

$$M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (1.12)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \quad (1.13)$$

para los momentos, y

$$Q_x = -D(w_{,xxx} + w_{,xyy}) \quad (1.14)$$

$$Q_y = -D(w_{,yyy} + w_{,xxy}) \quad (1.15)$$

para los cortantes.

²⁰Claude-Louis Navier (n. 10-2-1785, f. 21-8-1836), ingeniero y físico francés especialista en mecánica aplicada. Inició sus estudios superiores en 1802 en la *École polytechnique*, donde fué alumno de Jean Baptiste Joseph Fourier, entre otros, y continuó en 1804 en la *École Nationale des Pons et Chaussées*. Además de sus contribuciones en el campo de la ingeniería y la administración del Estado, formuló por primera vez la *Teoría de la Elasticidad* de manera satisfactoria así como la *Mecánica de Fluidos*, a través de las conocidas *ecuaciones de Navier-Stokes*

²¹Maurice Lévy, (n. 28-2-1838, f. 30-9-1910) ingeniero francés educado en la *École polytechnique* y en la *École Nationale des Pons et Chaussées*, fue profesor de la *École Centrale* y del *Collège de France*. Publicó su solución en 1899, "*Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire*" *Comptes Rendus*, vol 129. Escribió sobre otros aspectos aplicados, tales como estática gráfica, mecánica, geometría, geodesia, etc.

1.9.1. Tensiones coplanarias

Las tensiones σ_x , σ_y y σ_{xy} se obtienen fácilmente a partir de los momentos. Para ello solo hay que observar las ecuaciones que obtuvimos para las tensiones en función de las curvaturas, que pueden escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) z \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) z \\ \sigma_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} w_{,xy} z\end{aligned}\quad (1.16)$$

Si despejamos las curvaturas en función de los momentos de las ecuaciones 1.12 se obtiene,

$$\begin{aligned}(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) &= -\frac{1-\nu^2}{EI} \mathcal{M}_x \\ (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) &= -\frac{1-\nu^2}{EI} \mathcal{M}_y \\ w_{,xy} &= -\frac{1+\nu}{EI} \mathcal{M}_{xy}\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $D = \frac{EI}{1-\nu^2}$, siendo $I = \frac{1}{12} h^3$.

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones 1.16 se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\mathcal{M}_x}{I} z \\ \sigma_y &= \frac{\mathcal{M}_y}{I} z \\ \sigma_{xy} &= \frac{\mathcal{M}_{xy}}{I} z\end{aligned}$$

que permiten calcular las tensiones coplanarias de manera inmediata.

1.9.2. Tensiones tangenciales verticales

Veamos a continuación como obtener los valores de σ_{xz} y σ_{yz} . El procedimiento no puede ser el mismo que para las otras tensiones, ya que hemos considerado nula la deformación correspondiente a las mismas (hipótesis de la normal). La única opción por tanto es obtenerlas de las ecuaciones de equilibrio, de la misma manera que los cortantes se obtienen por equilibrio a partir de los momentos.

El equilibrio de tensiones en las direcciones x e y en un punto cualquiera de la placa puesto que no existen fuerzas volumétricas se reduce a $\sigma_{ij,j} = 0$, $i = 1, 2$.

Si escribimos en concreto la ecuación de equilibrio según el eje x tenemos,

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0$$

de donde se deduce que,

$$\sigma_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^z (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y}) dz$$

integrando desde la base de la placa, donde las tensiones tangenciales son nulas, hasta una altura z cualquiera.

Sustituyendo ahora los valores de σ_{xx} y σ_{xy} dados por 1.16 se obtiene,

$$\sigma_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^z \left[\frac{E}{1-\nu^2} (w_{,xxx} + \nu w_{,xyy}) + \frac{E}{1+\nu} w_{,xyy} \right] z dz$$

que simplificando se reduce a,

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \int_{-\frac{h}{2}}^z z dz$$

sacando de la integral las magnitudes que no dependen de z . Realizando la integral elemental que queda se obtiene,

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right]$$

Por último, teniendo en cuenta la ecuación 1.14 se llega a,

$$\sigma_{xz} = \frac{6Q_x}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right]$$

La expresión es igual a la que se obtendría con el *teorema de Colignon* aplicado a una viga de sección rectangular de canto h y ancho unidad.

Esta tensión tangencial alcanza su máximo en $z = 0$ y su valor es,

$$\sigma_{xz}^{\text{máx}} = \sigma_{xz}(x, y, 0) = \frac{Q_x}{\frac{2}{3}h}$$

Del mismo modo se obtiene,

$$\sigma_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right]$$

y

$$\sigma_{yz}^{\text{máx}} = \sigma_{yz}(x, y, 0) = \frac{Q_y}{\frac{2}{3}h}$$

1.9.3. Tensiones normales σ_z

Aunque hemos supuesto que las tensiones normales σ_z son muy pequeñas respecto a las otras, y de hecho hemos desarrollado la teoría basándonos en que sus efectos son despreciables, podemos evaluarlas a posteriori utilizando la ecuación de equilibrio de la elasticidad en dirección z , de manera equivalente a como se ha hecho para las tensiones tangenciales.

La ecuación de equilibrio es,

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + b(x, y, z) = 0$$

de donde se deduce que,

$$\sigma_z(x, y, z) = -\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz + \sigma_z\left(x, y, -\frac{h}{2}\right) - \int_{-\frac{h}{2}}^z (\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y}) dz$$

Teniendo en cuenta ahora el valor de las tensiones tangenciales obtenidas en el apartado anterior se obtiene,

$$\sigma_z(x, y, z) = -\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz + \sigma_z\left(x, y, -\frac{h}{2}\right) - \frac{6(Q_{x,x} + Q_{y,y})}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^z \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right] dz$$

integrando y teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio vertical del prisma diferencial 1.2 se obtiene,

$$\sigma_z(x, y, z) = -\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz + \sigma_z\left(x, y, -\frac{h}{2}\right) + \frac{6p(x, y)}{h^3} \left\{ \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(z + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(z^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3\right) \right\}$$

de modo que la variación de σ_z es cúbica en el el espesor. Utilizando la variable adimensional $\eta = \frac{z}{h}$ la expresión queda más simple,

$$\sigma_z(x, y, z) = - \int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz + \sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) + \frac{3}{4} p(x, y) \left[(\eta + 1) - \frac{1}{3} (\eta^3 + 1) \right]$$

Obsérvese que los valores de η igual a 1, 0 y -1 corresponden con la superficie inferior, media y superior, respectivamente.

Para obtener un valor concreto de $\sigma_z(x, y, z)$ hay que precisar el valor de $\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right)$, y cómo están aplicadas las cargas externas de volumen $b(x, y, z)$ a fin de establecer el valor de su integral.

Veamos cuatro casos concretos:

Cargas en la superficie inferior: La carga total $p(x, y)$ está concentrada en la superficie inferior, de modo que $\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) = -p(x, y)$ y $\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz = 0$ y por tanto,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = -\frac{1}{4} p(x, y) [2 - 3\eta + \eta^3]$$

Es fácil comprobar que en este caso las tensiones en la superficie superior son nulas, y que la tensión máxima (en valor absoluto) se alcanza en la superficie inferior y es $-p(x, y)$

Cargas en la superficie superior: Ahora $\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) = 0$ y de nuevo la integral de las cargas volumétricas es nula de modo que,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{4} p(x, y) [2 + 3\eta - \eta^3]$$

Ahora el máximo se alcanza en la superficie superior y vale $p(x, y)$

Cargas en la superficie media: En este caso $\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) = 0$, pero la integral toma diferentes valores según sea z menor o mayor que cero debido a que la carga está concentrada en $z = 0$. Así, $\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz = 0$ si $z < 0$ e $\int_{-\frac{h}{2}}^z b(x, y, z) dz = p(x, y)$ si $z > 0$. Por tanto,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4} p(x, y) [2 + 3\eta - \eta^3] & \text{Para } z < 0 \\ \frac{1}{4} p(x, y) [6 + 3\eta - \eta^3] & \text{Para } z > 0 \end{cases}$$

Cargas constantes en el espesor: De nuevo $\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) = 0$. La carga constante $b(x, y, z) = b_0(x, y)$ ha de ser tal que $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_0(x, y) dz = p(x, y)$ por definición de $p(x, y)$ de modo que $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_0(x, y) dz = b_0(x, y) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = hb_0(x, y) = p(x, y)$ y por tanto, $b_0(x, y) = \frac{1}{h} p(x, y)$. Entonces $\int_{-\frac{h}{2}}^z b_0(x, y) dz = b_0(x, y) \left(z + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} p(x, y) (\eta + 1)$. En conclusión la distribución de tensiones σ_z será, agrupando términos,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{4} p(x, y) (\eta - \eta^3)$$

En este caso los máximos, positivo y negativo, se dan en $\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ y valen $\frac{1}{6\sqrt{6}} p(x, y) = 0,0962 p(x, y) \simeq 10\% p(x, y)$

1.10. Validez de la Teoría

La teoría desarrollada en las secciones anteriores se basa en una serie de hipótesis sobre la distribución de tensiones y deformaciones en la placa, que son aproximaciones al comportamiento real de la misma, es decir, simplificaciones respecto al comportamiento predicho por la teoría de la elasticidad tridimensional. En función de esas simplificaciones la teoría predice una respuesta

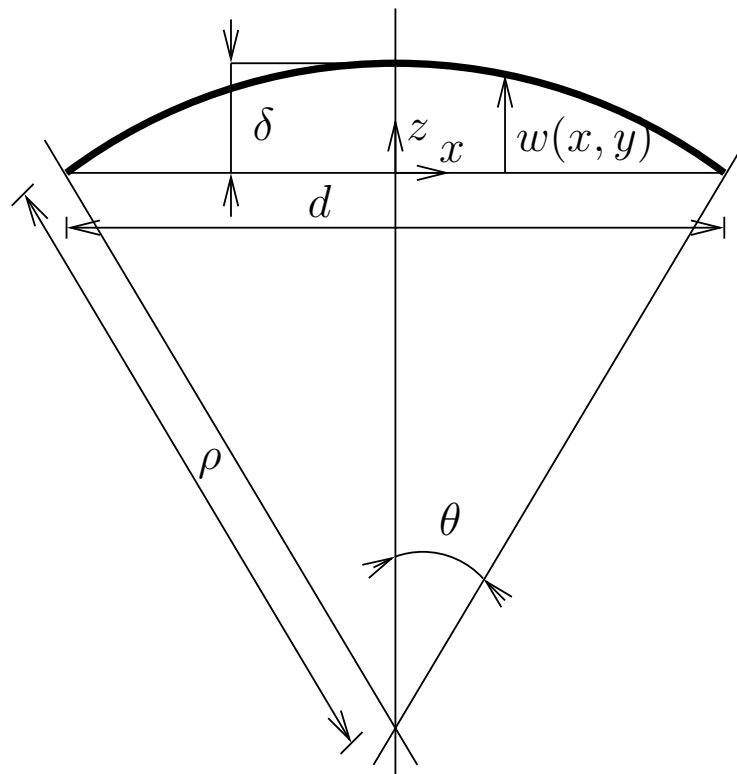


Figura 1.16: Placa circular deformada como un casquete esférico

de la placa, que se alejará más o menos de la “exacta” según se cumplan o no las hipótesis en que se basa. A continuación vamos a valorar cómo de relevante es una deformación que según esta teoría es despreciable, comparándolo con la deformación de flexión que se obtiene de la misma.

Según este modelo las cargas perpendiculares a la superficie media de la placa producen deformaciones de flexión que varían linealmente con la coordenada z , siendo nulas en la superficie media. Sin embargo, para obtener una superficie media deformada que no sea desarrollable²², que será el caso general, es necesario estirar o comprimir la superficie media. Vamos a denominar ε_L a esta deformación.

Para un caso simple vamos a estimar el valor de ε_L mediante relaciones geométricas simples, y por otra parte vamos a calcular la deformada de flexión, ε_f , que calculada con la teoría de placas. Si $\varepsilon_L \ll \varepsilon_f$ entonces la deformación que esta teoría no calcula, ε_L , será despreciable respecto a la que se obtiene ε_f , de modo que los resultados obtenidos mediante la teoría de placas serán válidos. En caso contrario será necesario recurrir a teorías más avanzadas de placas, o incluso a un cálculo elástico completo.

Consideremos una placa circular de diámetro d que se ha deformado por efecto de las cargas hasta adoptar la forma de un casquete esférico de radio ρ , de modo que la flecha en el centro de la misma sea δ , tal y como se muestra en la figura 1.16. En ese caso la flecha sería,

$$w(x, y) = \delta - \rho + \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}$$

Un diámetro que inicialmente tiene una longitud d , se alarga en esta deformada hasta una longitud $d' = 2\rho\theta$ siendo,

$$\text{sen } \theta = \frac{d}{2\rho}$$

y por tanto $d = 2\rho \text{sen } \theta$.

²²Una superficie desarrollable es aquella que puede “aplanarse” sin deformación, como por ejemplo un cilindro o un cono. Una esfera sin embargo no es desarrollable. En general para que una superficie sea desarrollable a de cumplir que en todo punto su curvatura mínima, sin signo, sea cero

La deformación longitudinal que sufre esa línea será entonces, $\varepsilon_L = \frac{d'-d}{d}$, y por tanto

$$\varepsilon_L = \frac{2\rho\theta - d}{d} = \frac{2\rho\theta - 2\rho \operatorname{sen} \theta}{2\rho \operatorname{sen} \theta} = \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

El ángulo θ será pequeño si la flecha lo es, y por tanto en primera aproximación, para valores pequeños de la flecha $\operatorname{sen} \theta \sim \theta$ de modo que *en primera aproximación*, $\varepsilon_L \sim 0$, que es lo que predice la *teoría de placas delgadas*. Sin embargo, tomando el siguiente término no nulo del desarrollo ε_L para valores pequeños de θ tenemos que²³

$$\varepsilon_L = \frac{\theta - (\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^4))}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^4)} = \frac{\frac{1}{6}\theta^2 + O(\theta^3)}{1 - \frac{1}{6}\theta^2 + O(\theta^3)} = \frac{1}{6}\theta^2 + O(\theta^3) \sim \frac{1}{6}\theta^2$$

de modo que la deformación longitudinal *que la teoría de placas desprecia*, es de orden θ^2 .

Veamos ahora cuánto vale la deformación de flexión que predice esta teoría para esta deformada. La deformación máxima se alcanzará en la cara superior, $z = \frac{h}{2}$. Vamos a calcular, por ejemplo, la deformación según x , en el centro de la placa:

$$\varepsilon_f = \kappa_x(0, 0) \frac{h}{2}$$

siendo,

$$\kappa_x(0, 0) = -w_{,xx}(0, 0) = \frac{1}{\rho}$$

y por tanto,

$$\varepsilon_f = \frac{h}{2\rho}$$

Para comparar ε_L y ε_f , vamos a escribir θ en función de la flecha. Para ello usamos la relación,

$$\delta = (1 - \cos \theta)\rho$$

y teniendo en cuenta que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O[x^3]$ podemos escribir,

$$\delta = \left(\frac{1}{2}\theta^2 + O[\theta^3] \right) \rho \sim \frac{1}{2}\theta^2 \rho$$

y despejando,

$$\theta^2 \sim \frac{2\delta}{\rho}$$

Utilizando estas relaciones veamos cual es el cociente entre ε_L (el valor de la deformación que la teoría desprecia) y ε_f (el valor de la deformación predicho por la teoría),

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_f} \sim \frac{\frac{1}{6}\theta^2}{\frac{h}{2\rho}} \sim \frac{\frac{\delta}{3\rho}}{\frac{h}{2\rho}} = \frac{2\delta}{3h} = O\left(\frac{\delta}{h}\right)$$

y por tanto,

$$\varepsilon_L = \varepsilon_f \times O\left(\frac{\delta}{h}\right)$$

Esta ecuación indica que la deformación que estamos despreciando (ε_L) es del orden de la que calculamos (ε_f), multiplicada por un número del orden de $\frac{\delta}{h}$. Por tanto, la aproximación de la *teoría de placas delgadas* será tanto más aproximada cuanto más pequeña sea la flecha en comparación con el espesor. Por ejemplo, si $\delta \sim \frac{1}{10}h$, los errores en las deformaciones, y por tanto en las tensiones, serán también del 10%.

Hay que tener en cuenta que este límite de validez de la teoría compara deformaciones de membrana con las de flexión, por lo que no se refiere a otra limitación de la misma que es la de despreciar la deformación por cortante.

²³Recuérdese que $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ y que $\frac{1}{1+x} = 1 - x^2 + x^3 + O(x^4)$.

Capítulo 2

Esfuerzos en secciones no cartesianas y condiciones de contorno

Índice

2.1. Introducción	30
2.2. Secciones no cartesianas	30
2.2.1. Esfuerzo cortante Q_n	31
2.2.2. Flector M_n y torsor M_{nt}	31
2.3. Derivadas respecto a n y t	32
2.4. Cortante total	35
2.5. Esfuerzos en función de $w(x, y)$	37
2.5.1. Flector M_n en función de la flecha	37
2.5.2. Torsor M_{nt} en función de la flecha	38
2.5.3. Cortante Q_n en función de la flecha	38
2.5.4. Cortante total V_n en función de la flecha	38
2.6. Condiciones de contorno	39
2.6.1. Esfuerzos genéricos en las secciones cartesianas	39
Esfuerzos en una sección frontal x	39
Esfuerzos en una sección dorsal x	39
Esfuerzos en una sección frontal y	39
Esfuerzos en una sección dorsal y	39
2.6.2. Borde empotrado	39
2.6.3. Borde apoyado	40
Borde apoyado recto	42
Borde apoyado recto normal al eje x	43
Borde apoyado recto normal al eje y	43
2.6.4. Borde libre	43
Borde libre en sección frontal x	44
Borde libre en sección dorsal x	44
Borde libre en sección frontal y	45
Borde libre en sección dorsal y	45
2.6.5. Borde sobre apoyo elástico	45
Apoyo elástico más general	45
Apoyo elástico general	46
2.6.6. Borde unido a una viga	46
Borde unido a una viga con deslizamiento completo	50

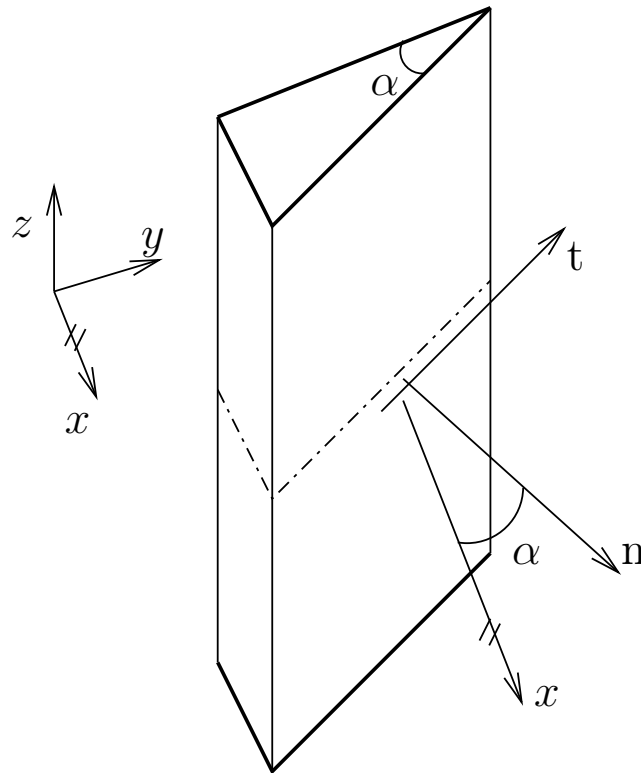


Figura 2.1: Prisma triangular para el cálculo de esfuerzos en secciones no cartesianas

2.1. Introducción

Para completar la formulación del problema es necesario establecer las condiciones de contorno que ha de cumplir la flecha $w(x, y)$ en los bordes de la placa. En la teoría desarrollada hemos obtenido que la ecuación diferencial que gobierna ha de cumplir la flecha es una ecuación de cuarto orden. Para que la solución tenga una única solución es necesario y suficiente que conozcamos dos condiciones sobre el valor de la flecha o sus derivadas en cada punto del borde de la placa.

Para poder imponer condiciones en aquellos bordes que no sean paralelos a los ejes cartesianos, veremos en primer lugar como podemos obtener los esfuerzos en los mismos.

Más adelante veremos que en muchas ocasiones los apoyos imponen más condiciones de las que puede cumplir la solución, de modo que va a ser necesario eliminar alguna de las condiciones extra. Para ello juntaremos el cortante y el torsor en un único esfuerzo, el cortante total, que es estáticamente equivalente.

2.2. Esfuerzos en secciones no cartesianas

Para obtener los esfuerzos en una sección que no sea paralela a los ejes cartesianos consideremos un prisma triangular extraído de la placa como el que se muestra en la figura 2.1.

El prisma tiene tres caras laterales: una cara dorsal x sobre la que actúan el cortante Q_x los momentos M_x y M_{xy} , una cara dorsal y sobre la que actúan Q_y , M_y y M_{xy} y una cara inclinada sobre la que actúan un cortante Q_n , un flector M_n y un torsor que denominamos M_{nt} . En la figura 2.2 se representan estos esfuerzos unitarios con su valor positivo, dibujados como vectores. Sobre dicho prisma también actúan la carga repartida $p(x, y)$, pero puede comprobarse que no influye en las ecuaciones de equilibrio vamos a realizar en esta sección.

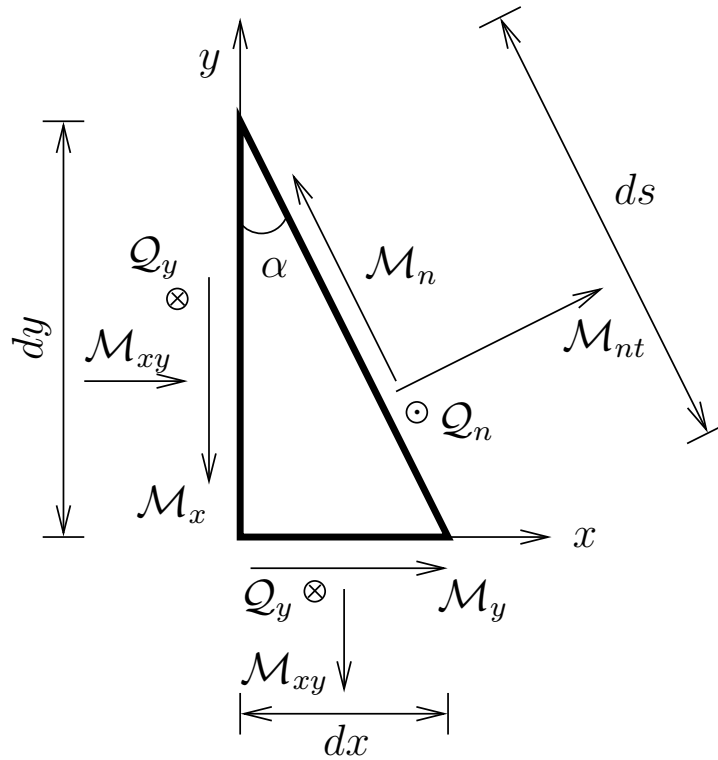


Figura 2.2: Esfuerzos unitarios sobre el prisma triangular (planta)

2.2.1. Esfuerzo cortante Q_n

La expresión del cortante en función de Q_x y Q_y se obtiene de forma simple realizando el equilibrio vertical. Así,

$$-Q_y dx - Q_x dy + Q_n ds = 0$$

ya que ds es la longitud de la hipotenusa del triángulo, y dx y dy los catetos. Por tanto,

$$Q_n = Q_x \frac{dy}{ds} + Q_y \frac{dx}{ds}$$

de modo que,

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha$$

2.2.2. Flector M_n y torsor M_{nt}

Para obtener los valores de M_n y M_{nt} en función de los esfuerzos unitarios conocidos tomamos momentos respecto al eje \mathbf{n} y el \mathbf{t} . En este caso, puede también comprobarse fácilmente, los cortantes producen momentos infinitesimales con relación a los producidos por flectores o torsores, por lo que no los consideramos.¹

Proyectando según la normal \mathbf{n} se obtiene:

$$M_{nt} ds + M_{xy} dy \cos \alpha - M_x dy \sin \alpha + M_y dx \cos \alpha - M_{xy} dx \sin \alpha = 0$$

El ángulo α es el que forma la normal \mathbf{n} a la cara con el eje x positivo. Dividiendo entre ds , despejando y agrupando términos se llega a la expresión,

$$M_{nt} = (M_x - M_y) \cos \alpha \sin \alpha + M_{xy} \{(\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2\}$$

¹Conviene que el lector compruebe lo afirmado aquí incorporando todas las fuerzas, y comprobando que efectivamente son infinitesimales

Utilizando ahora las fórmulas trigonométricas del ángulo doble $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$ y $\cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$ se obtiene finalmente,

$$\mathcal{M}_{nt} = \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \sin 2\alpha - \mathcal{M}_{xy} \cos 2\alpha$$

De igual modo, proyectando sobre el vector tangente \mathbf{t} ,

$$\mathcal{M}_n ds - \mathcal{M}_{xy} dy \sin \alpha - \mathcal{M}_x dy \cos \alpha - \mathcal{M}_y dx \sin \alpha - \mathcal{M}_{xy} dx \cos \alpha = 0$$

y por tanto,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_x (\cos \alpha)^2 + \mathcal{M}_y (\sin \alpha)^2 + 2\mathcal{M}_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

Usando ahora las relaciones $(\cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, $(\sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, y de nuevo la del seno del ángulo doble, se llega a,

$$\mathcal{M}_n = \frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y}{2} + \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \cos 2\alpha + \mathcal{M}_{xy} \sin 2\alpha$$

Hemos obtenido las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathcal{M}_n = \frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y}{2} + \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \cos 2\alpha + \mathcal{M}_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.1)$$

$$\mathcal{M}_{nt} = \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \sin 2\alpha - \mathcal{M}_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.2)$$

Si representamos en unos ejes coordenados estos valores, tomando como eje horizontal los valores de \mathcal{M}_n y como eje vertical los de \mathcal{M}_{nt} , para distintos valores de α , es fácil comprobar que se obtiene un círculo de radio $\frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2}$ y centro $\left(\frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y}{2}, 0\right)$, tal y como se muestra en la figura 2.3. Las ecuaciones que ligan \mathcal{M}_n y \mathcal{M}_{nt} con \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_{xy} , y la representación gráfica correspondiente, son exactamente las mismas que relaciona las tensiones normales y tangenciales σ y τ en un plano cualquiera, con las tensiones σ_x , σ_y y σ_{xy} , y que se denomina *círculo de Mohr*. Por tanto, todo lo estudiado en *Mecánica de Medios Continuos* sobre este círculo es aplicable a este caso.

Obsérvese que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entonces,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_y; \quad \mathcal{M}_{nt} = \mathcal{M}_{xy}$$

pero para $\alpha = 0$,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_x; \quad \mathcal{M}_{nt} = -\mathcal{M}_{xy}$$

El cambio de signo es debido a que el criterio positivo para el torsor \mathcal{M}_{xy} en una cara x es contrario al escogido para \mathcal{M}_{nt} en una cara que forma un ángulo genérico α .

2.3. Derivadas respecto a los vectores normal y tangencial

En la sección anterior los hemos escrito los esfuerzos unitarios en una sección cualquiera en función de los esfuerzos unitarios en las secciones cartesianas sobre el mismo punto.

Para aplicar algunas condiciones de contorno será necesario calcular los giros de la deformada en las direcciones normal y tangencial, lo que implica derivar la flecha respecto a estas direcciones. Además, como veremos en la próxima sección, también tendremos que encontrar la expresión de la derivada del torsor \mathcal{M}_{nt} en la dirección tangente al borde de la placa.

Recordemos entonces las expresiones para calcular la derivada de una función $f(x, y)$ en una dirección cualquiera dada por un vector \mathbf{v} de componentes cartesianas (v_x, v_y) .

Por la definición de derivada,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v_x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y)}{v \varepsilon}$$

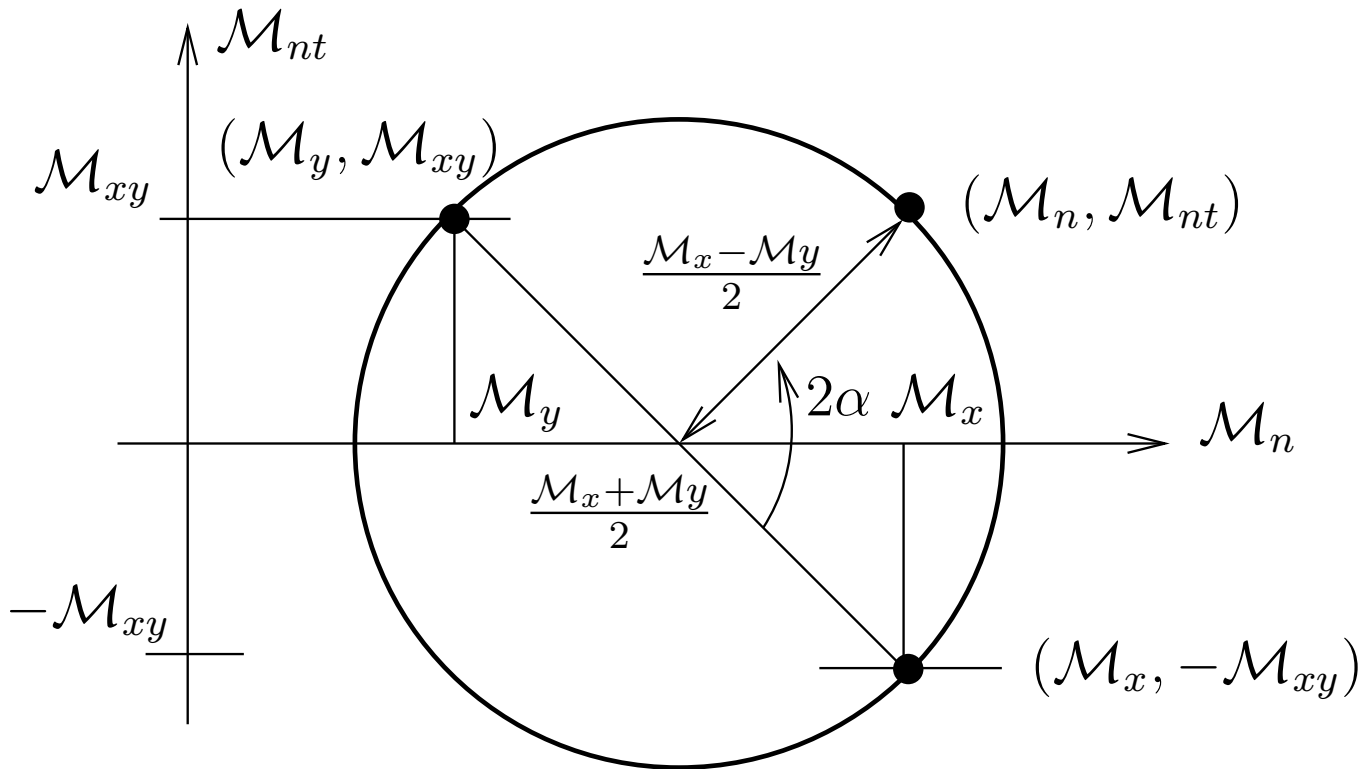


Figura 2.3: Relación entre M_n y M_{nt} con M_x , M_y y M_{xy} : círculo de Mohr

siendo $v = |\mathbf{v}|$ el módulo del vector. Sumando y restando $f(x, y + \varepsilon v_y)$ y agrupando términos tenemos²,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v_x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y + \varepsilon v_y)}{v \varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y)}{v \varepsilon}$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{v_x}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v_x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y + \varepsilon v_y)}{v_x \varepsilon} + \frac{v_y}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y)}{v_y \varepsilon}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{v_x}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon} + \frac{v_y}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon v_y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

de modo que finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{v_x}{v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v_y}{v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Otra forma de escribir esta expresión es la siguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{v} \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

Para \mathbf{n} y \mathbf{t} que son vectores unitarios quedaría,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= n_x \frac{\partial f}{\partial x} + n_y \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} &= t_x \frac{\partial f}{\partial x} + t_y \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

²El mismo resultado se obtiene si se suma y resta $f(x + \varepsilon v_x, y)$. Suponemos que $v_x \neq 0$, y $v_y \neq 0$, aunque el resultado final es independiente de esta asunción

Teniendo en cuenta que $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ y $\mathbf{t} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ se llega a,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} &= -\sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

En concreto, los giros de la flecha en la dirección \mathbf{n} y \mathbf{t} serán,

$$\theta_n = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$\theta_t = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}} = -\sin \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4)$$

En algunos casos será necesario calcular la derivada respecto a la dirección tangente de las componentes del propio vector tangente, es decir, de las magnitudes $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$. Si el contorno es recto, es evidente que

$$\frac{d \cos \alpha}{dt} = 0; \quad \frac{d \sin \alpha}{dt} = 0$$

puesto que la inclinación del contorno es constante. Sin embargo en un punto donde el contorno sea curvo, a partir de las fórmulas de Frenet para curvas planas se obtiene,

$$\frac{d \cos \alpha}{dt} = \frac{d \cos \alpha}{ds} = -\kappa(s) \sin \alpha \quad (2.5)$$

$$\frac{d \sin \alpha}{dt} = \frac{d \sin \alpha}{ds} = \kappa(s) \cos \alpha \quad (2.6)$$

siendo s la variable *longitud de arco* y $\kappa(s)$ la curvatura del borde en el punto considerado. La variable *longitud de arco* está definida de modo que al movernos en dirección positiva de s la placa queda a la izquierda. Por otra parte es necesario definir la curvatura con el signo adecuado para que estas fórmulas sean válidas. En este caso $\kappa(s) = \frac{1}{\cos \alpha} n'_y = -\frac{1}{\sin \alpha} n'_x$ siendo $n_x = \frac{dy}{ds}$ y $n_y = -\frac{dx}{ds}$.

Vamos a obtener la expresión de $\frac{d^2 w}{ds^2}$ que nos será útil más adelante.

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (-\sin \alpha w_{,x} + \cos \alpha w_{,y})$$

Derivando otra vez, teniendo en cuenta las derivadas de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$,

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = -\sin \alpha \frac{dw_{,x}}{ds} + \cos \alpha \frac{dw_{,y}}{ds} - \kappa(s) (\cos \alpha w_{,x} + \sin \alpha w_{,y})$$

Por último, puesto que $\frac{dw_{,x}}{ds} = -\sin \alpha w_{,xx} + \cos \alpha w_{,xy}$ y $\frac{dw_{,y}}{ds} = -\sin \alpha w_{,xy} + \cos \alpha w_{,yy}$, agrupando términos se obtiene,

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \sin^2 \alpha w_{,xx} - 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} + \cos^2 \alpha w_{,yy} - \kappa(s) (\cos \alpha w_{,x} + \sin \alpha w_{,y})$$

En el caso particular de que *el borde sea recto*, entonces $\kappa = 0$, y la expresión se simplifica a,

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \sin^2 \alpha w_{,xx} - 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} + \cos^2 \alpha w_{,yy}$$

expresión esta última que usaremos más adelante.

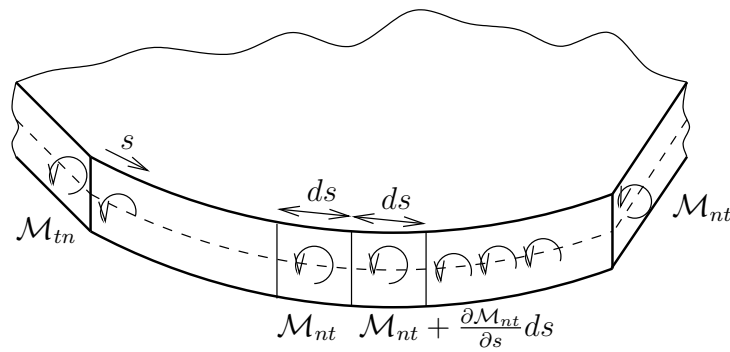


Figura 2.4: Torsor M_{nt} aplicado en un borde cualquiera

2.4. Esfuerzo cortante total en una sección

Como veremos más adelante, las condiciones de apoyo habituales imponen más de dos restricciones en el valor de la flecha o sus derivadas. En algunos casos las condiciones extra se cumplen automáticamente al imponer alguna de las otras dos, de modo que no existe problema en que la solución cumpla todas las condiciones. Sin embargo, en algunos tipos de apoyo se imponen condiciones sobre el cortante y el torsor simultáneamente, y no es posible cumplir ambas condiciones.

Para eliminar este problema vamos a obtener un esfuerzo conjunto, el *cortante total* \mathcal{V}_n , que es estáticamente equivalente a una distribución de cortantes y torsores. Aplicar el cortante total, cuya expresión vamos a obtener, será equivalente a aplicar de manera independiente el cortante y el torsor, pero solo desde el punto de vista estático. Por tanto, por el principio de Saint Venant, lejos del borde la solución obtenida será muy similar a la que obtendríamos aplicando ambos esfuerzos, pero en el borde la solución calculada con esta reducción no cumple estrictamente las condiciones de contorno impuestas.

Consideremos un borde cualquiera sobre el que actúa un torsor M_{nt} , tal y como se muestra en la figura 2.4

En cada elemento diferencial de longitud ds actúa un torsor total de valor $M_{nt} ds$ que es equivalente a un par de fuerzas M_{nt} separadas una distancia ds . Tal y como se observa en la figura 2.5, en elementos diferenciales contiguos se cancela el valor de M_{nt} y queda en cada extremo del diferencial de borde una fuerza cortante de valor $-\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} ds$. Puesto que esto son fuerzas cortantes, el esfuerzo cortante unitario equivalente será $-\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$. La cancelación de las fuerzas M_{nt} ocurre en todos los puntos, salvo al principio y final del borde, si este acaba en una esquina. En estos puntos, el torsor en el borde contiguo, llamémosle M_{tn} no cancela al torsor M_{nt} . Por el contrario, en las esquinas se sumará el torsor de un lado y del otro, dando lugar a una fuerza concentrada de valor $M_{nt} - M_{tn}$. En el caso de esquinas de 90° $M_{tn} = -M_{nt}$ de modo que aparece una fuerza de valor $2M_{nt}$.

Por lo tanto, un torsor repartido en un borde que acaba en dos esquinas, es *estáticamente* equivalente a un cortante de valor $-\frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$ más dos fuerzas concentradas de valor $M_{nt} - M_{tn}$, tal y como se muestra en la figura 2.6.

En resumen, cuando tengamos que imponer condiciones sobre el cortante Q_n y el torsor M_{nt} y ello no sea posible, impondremos una única condición sobre el *esfuerzo cortante total* \mathcal{V}_n dado por la expresión,

$$\mathcal{V}_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}$$

siendo s la variable *longitud de arco*.

Podemos particularizar esta expresión para las caras x e y frontales. Para una cara x frontal $Q_n = Q_x$ y $s = y$, pero $M_{nt} = -M_{xy}$, de modo que,

$$\mathcal{V}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

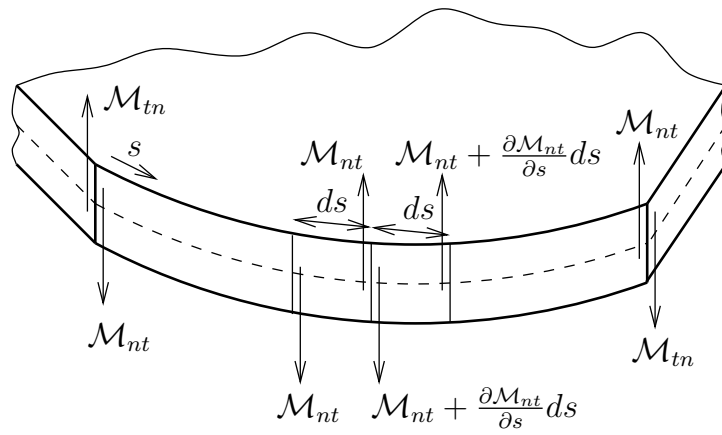


Figura 2.5: Fuerzas cortantes equivalentes al torsor \mathcal{M}_{nt} aplicado en un borde cualquiera

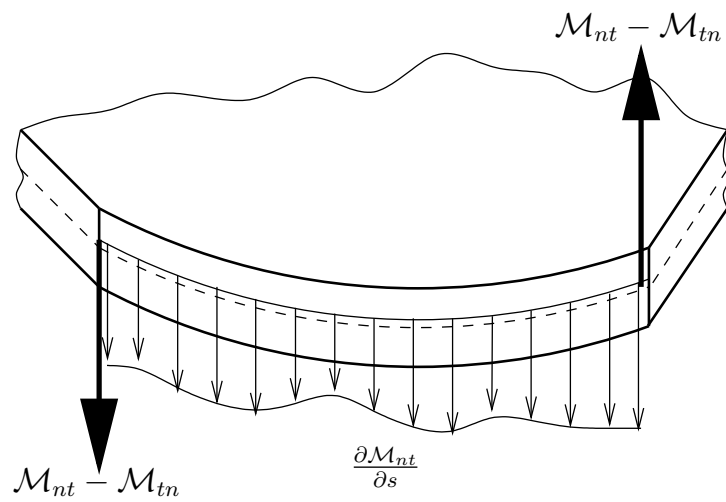


Figura 2.6: Esfuerzo cortante y fuerzas concentradas equivalentes a un torsor \mathcal{M}_{nt} aplicado en un borde cualquiera

y para una cara y frontal $Q_n = Q_y$ y $M_{nt} = M_{xy}$, pero ahora $s = -x$, de modo que,

$$\mathcal{V}_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

2.5. Esfuerzos en una sección cualquiera en función de la flecha

Conocidos los esfuerzos en una sección cualquiera en función de los definidos sobre las secciones cartesianas es fácil, aunque laborioso, encontrar las relaciones entre aquéllos y las derivadas de la flecha. Para ello recordemos en primer lugar las relaciones momento-curvatura y las de los cortantes que derivan de ellas,

$$\mathcal{M}_x = -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (2.7)$$

$$\mathcal{M}_y = -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (2.8)$$

$$\mathcal{M}_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \quad (2.9)$$

$$Q_x = -D (w_{,xxx} + w_{,xyy}) \quad (2.10)$$

$$Q_y = -D (w_{,yyy} + w_{,xxy}) \quad (2.11)$$

A partir de ellas y de la definición del cortante total se obtiene,

$$\mathcal{V}_x = -D (w_{,xxx} + (2 - \nu)w_{,xyy}) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{V}_y = -D (w_{,yyy} + (2 - \nu)w_{,xxy}) \quad (2.13)$$

Puesto que conocemos de las secciones anteriores los valores de los esfuerzos \mathcal{M}_n , \mathcal{M}_{nt} , Q_n y \mathcal{V}_n , en función de estos esfuerzos en secciones cartesianas, basta sustituir estas ecuaciones para encontrar las expresiones buscadas.

2.5.1. Flector \mathcal{M}_n en función de la flecha

Tenemos por una parte que,

$$\mathcal{M}_n = \frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y}{2} + \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \cos 2\alpha + \mathcal{M}_{xy} \sin 2\alpha$$

y por otra las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9. Sustituyendo éstas en aquella, y volviendo a poner el ángulo doble en términos del ángulo α , se obtiene,

$$\mathcal{M}_n = -D \left[(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)w_{,xx} + (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha)w_{,yy} + 2(1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} \right] \quad (2.14)$$

Para $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obtienen las ecuaciones 2.7 y 2.8, evidentemente, ya que $\mathcal{M}_n(\alpha = 0) = \mathcal{M}_x$ y $\mathcal{M}_n(\alpha = \pi/2) = \mathcal{M}_y$. Obsérvese también, que por los criterios de signos utilizados, $\mathcal{M}_n(\alpha = \pi) = \mathcal{M}_x$ y $\mathcal{M}_n(\alpha = -\pi/2) = \mathcal{M}_y$.

Es interesante escribir el momento \mathcal{M}_n agrupando los términos de la siguiente forma,

$$\mathcal{M}_n = -D \left[\cos^2 \alpha w_{,xx} + \sin^2 \alpha w_{,yy} + 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} + \nu (\sin^2 \alpha w_{,xx} - 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} + \cos^2 \alpha w_{,yy}) \right] \quad (2.15)$$

Tal y como se vio en la sección anterior, el término entre paréntesis que multiplica a ν es precisamente $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ en el caso de que el borde sea recto. Veremos más adelante que esto puede utilizarse para simplificar algunas condiciones de contorno.

2.5.2. Torsor \mathcal{M}_{nt} en función de la flecha

El torsor en función de los esfuerzos en secciones cartesianas viene dado por,

$$\mathcal{M}_{nt} = \frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - \mathcal{M}_{xy} \cos 2\alpha$$

Sustituyendo de nuevo los momentos en las secciones cartesianas en función de la flecha dados por las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9, se llega a,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{nt} &= -D(1-\nu) \left[\frac{w_{,xx} - w_{,yy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - w_{,xy} (\cos 2\alpha) \right] = \\ &= -D(1-\nu) \left[\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha (w_{,xx} - w_{,yy}) - (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) w_{,xy} \right] \end{aligned}$$

Para obtener el cortante total \mathcal{V}_n hará falta calcular la derivada de \mathcal{M}_{nt} con respecto al arco, o lo que es lo mismo, en la dirección \mathbf{t} . Teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial t} = -\operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial y}$$

Si consideramos únicamente el caso de *un borde recto*, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} &= D(1-\nu) \left\{ \cos \alpha \left(\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha w_{,yyy} + (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) w_{,xyy} \right) + \right. \\ &\quad \left. \operatorname{sen} \alpha \left((\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) w_{,xxy} + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha w_{,xxx} \right) \right\} \end{aligned}$$

Si el borde no es recto es necesario tener en cuenta la variación del ángulo α con el arco s , en cuyo caso aparecerán términos adicionales debidos a la curvatura que tenga el borde en el punto considerado. Es laborioso pero sencillo obtener en ese caso el valor de $\frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s}$, y se deja como ejercicio.

2.5.3. Cortante Q_n en función de la flecha

Este caso es más simple. Partiendo de las ecuaciones 2.10 y 2.11, y de la relación,

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \operatorname{sen} \alpha$$

se obtiene directamente,

$$Q_n = -D \left[\cos \alpha (w_{,xyy} + w_{,xxx}) + \operatorname{sen} \alpha (w_{,yyy} + w_{,xxy}) \right]$$

2.5.4. Cortante total \mathcal{V}_n en función de la flecha

Teniendo en cuenta que el cortante total viene dado por la expresión

$$\mathcal{V}_n = Q_n - \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s}$$

basta agrupar las expresiones obtenidas para cada uno de los términos de la derecha.

Para el caso de un *borde recto* se llega a la expresión,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= -D \left\{ \cos \alpha (w_{,xxx} + w_{,xyy}) + \operatorname{sen} \alpha (w_{,yyy} + w_{,xxy}) + \right. \\ &\quad (1-\nu) \left[\cos \alpha \left(\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha w_{,yyy} + (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) w_{,xyy} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. \operatorname{sen} \alpha \left((\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) w_{,xxy} + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha w_{,xxx} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

2.6. Condiciones de contorno

Un apoyo o sujeción impone sobre la flecha, giros o esfuerzos ciertas restricciones. Veamos a continuación, para un borde de normal cualquiera \mathbf{n} , que ecuaciones imponen los apoyos habituales. Cuando sea necesario, para recalcar que la ecuaciones se imponen en los puntos del borde, denominamos a las coordenadas de estos puntos x_b e y_b . El conjunto de puntos que forma parte de un borde cualquiera en que apliquemos las condiciones de contorno lo denominaremos \mathbf{B} .

2.6.1. Esfuerzos genéricos en las secciones cartesianas

Las ecuaciones que imponen los apoyos vamos a deducirlas para puntos del borde con un normal \mathbf{n} cualquiera, aunque luego las particularizaremos para el caso de las secciones cartesianas. Para aplicar las ecuaciones genéricas en el caso de las secciones cartesianas basta con tomar el valor adecuado del ángulo α . Sin embargo, las ecuaciones genéricas pueden aplicarse directamente si se identifican correctamente los esfuerzos \mathcal{M}_n , \mathcal{M}_{nt} , \mathcal{Q}_n y \mathcal{V}_n genéricos, y los correspondientes en las secciones cartesianas, *teniendo en cuenta que se utilizan criterios de signos distintos en cada caso*. Veamos los cuatro casos posibles: sección frontal x , dorsal x , frontal y y dorsal y .

Esfuerzos en una sección frontal x

En este caso el criterio de signos para \mathcal{M}_{xy} es opuesto al del \mathcal{M}_{nt} , pero es igual para los otros esfuerzos. Además, la variable longitud de arco coincide con y . Entonces,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_x; \quad \mathcal{M}_{nt} = -\mathcal{M}_{xy}; \quad \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_x; \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_x = \mathcal{Q}_x + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y}$$

Esfuerzos en una sección dorsal x

De nuevo el criterio de signos para \mathcal{M}_{xy} es opuesto al del \mathcal{M}_{nt} , pero también es opuesto para \mathcal{Q}_n y \mathcal{Q}_x , y por tanto para \mathcal{V}_n y \mathcal{V}_x . Para esta sección la variable longitud de arco será $-y$. Entonces,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_x; \quad \mathcal{M}_{nt} = -\mathcal{M}_{xy}; \quad \mathcal{Q}_n = -\mathcal{Q}_x; \quad \mathcal{V}_n = -\mathcal{V}_x = -\mathcal{Q}_x - \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y}$$

Esfuerzos en una sección frontal y

Los criterios de signos son iguales para todos los esfuerzos, pero la variable s es $-x$. Entonces,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_y; \quad \mathcal{M}_{nt} = \mathcal{M}_{xy}; \quad \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_y; \quad \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_y = \mathcal{Q}_y + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial x}$$

Esfuerzos en una sección dorsal y

En este caso, el criterio de signos para \mathcal{Q}_n es opuesto al del \mathcal{Q}_y , y por tanto también para \mathcal{V}_n y \mathcal{V}_y , pero ahora la variable longitud de arco coincide con x . Entonces,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_y; \quad \mathcal{M}_{nt} = \mathcal{M}_{xy}; \quad \mathcal{Q}_n = -\mathcal{Q}_y; \quad \mathcal{V}_n = -\mathcal{V}_y = -\mathcal{Q}_y - \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial x}$$

2.6.2. Borde empotrado

En este caso, el apoyo impide el movimiento vertical de la placa, y los giros en cualquier sentido. Entonces las condiciones serían,

$$\begin{aligned} w(x_b, y_b) &= 0 \\ \frac{\partial w(x_b, y_b)}{\partial \mathbf{t}} &= 0 \\ \frac{\partial w(x_b, y_b)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned}$$

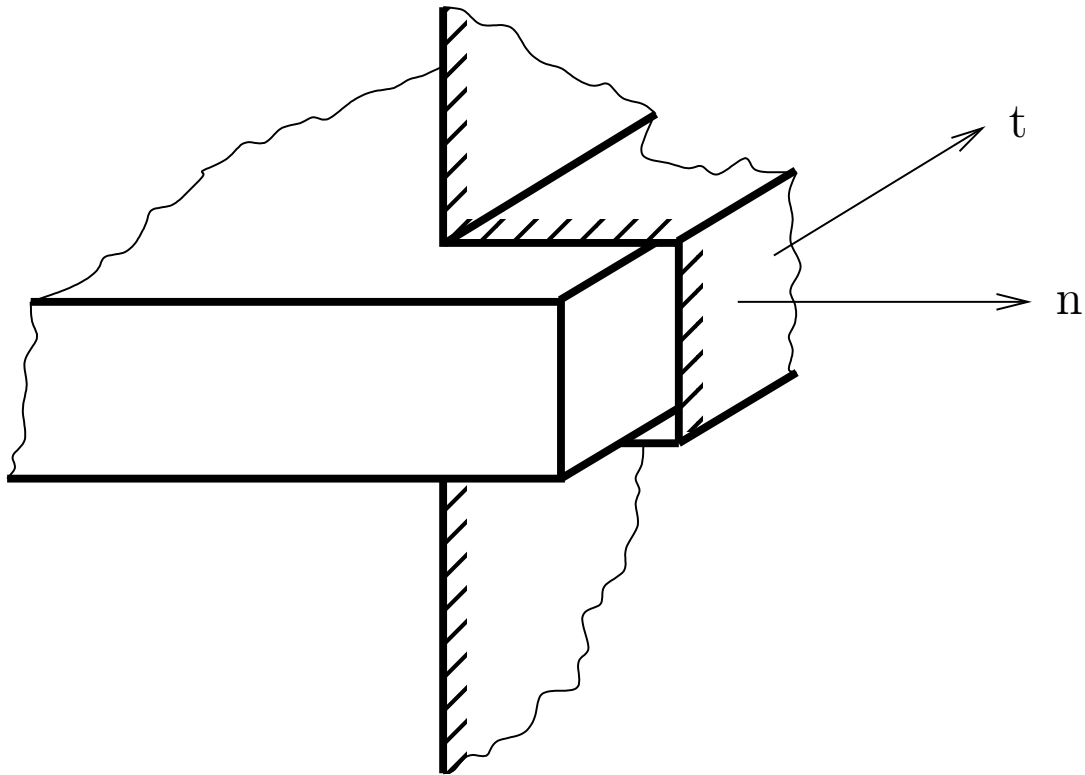


Figura 2.7: Borde empotrado

Se trata de 3 condiciones de contorno. Sin embargo si imponemos la primera $\forall(x_b, y_b) \in \mathbf{B}$ entonces se cumple también automáticamente la segunda. Por tanto, para un borde empotrado sólo es necesario imponer,

$$\begin{aligned} w(x_b, y_b) &= 0 \\ \frac{\partial w(x_b, y_b)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned}$$

En términos de las derivadas respecto a x e y tendríamos,

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ w_{,x}n_x + w_{,y}n_y &= 0 \end{aligned}$$

En planta, este tipo de apoyo se representa de manera similar a como se hace en vigas, tal y como se muestra en la figura 2.8.

2.6.3. Borde apoyado

En este caso el borde impone de nuevo que la flecha y la pendiente en dirección \mathbf{t} son nulas, y por otra parte que el flector \mathcal{M}_n es nulo. La segunda se cumple al imponer la primera de modo que queda,

$$\begin{aligned} w(x_b, y_b) &= 0 \\ \mathcal{M}_n(x_b, y_b) &= 0 \end{aligned}$$

Para imponer la segunda condición en un caso general sustituimos \mathcal{M}_n por su valor en función de las derivadas de la flecha, dado por 2.14, de modo que las condiciones generales para un borde apoyado serían,

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)w_{,xx} + (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha)w_{,yy} + 2(1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} &= 0 \end{aligned}$$

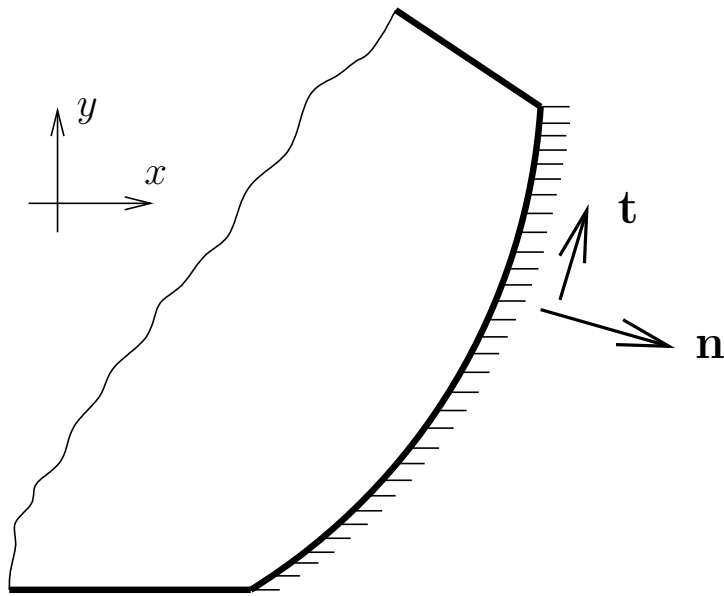


Figura 2.8: Representación en planta de un borde empotrado

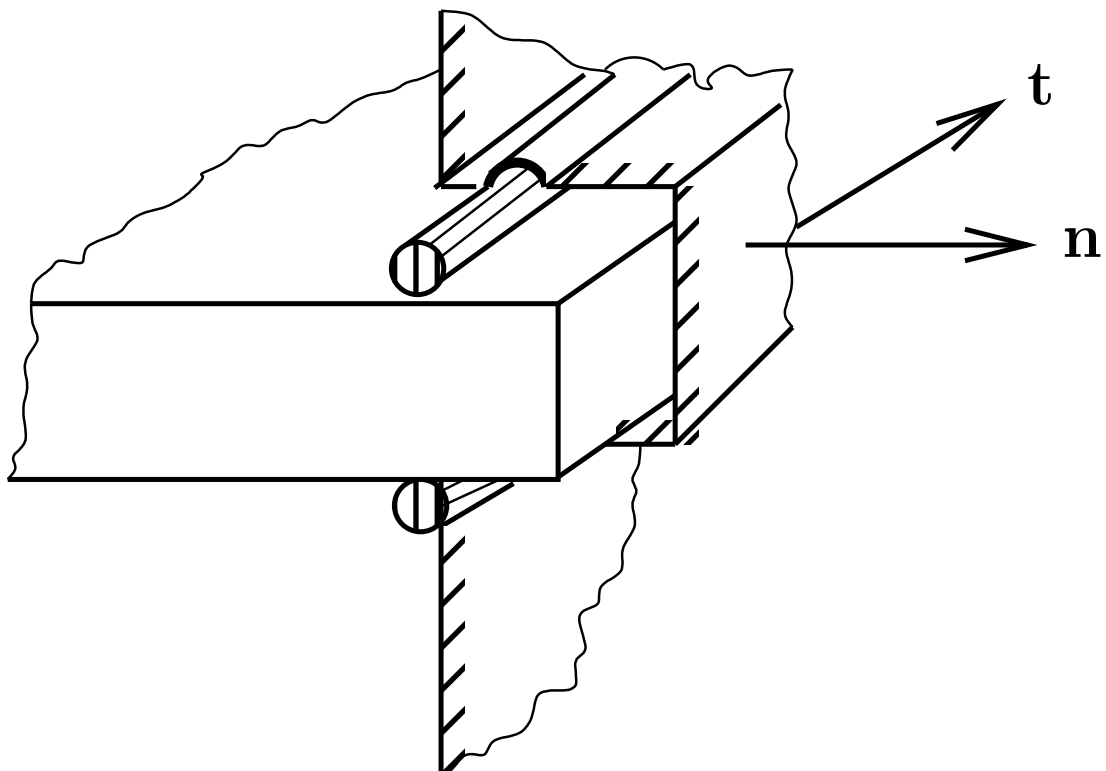


Figura 2.9: Borde apoyado

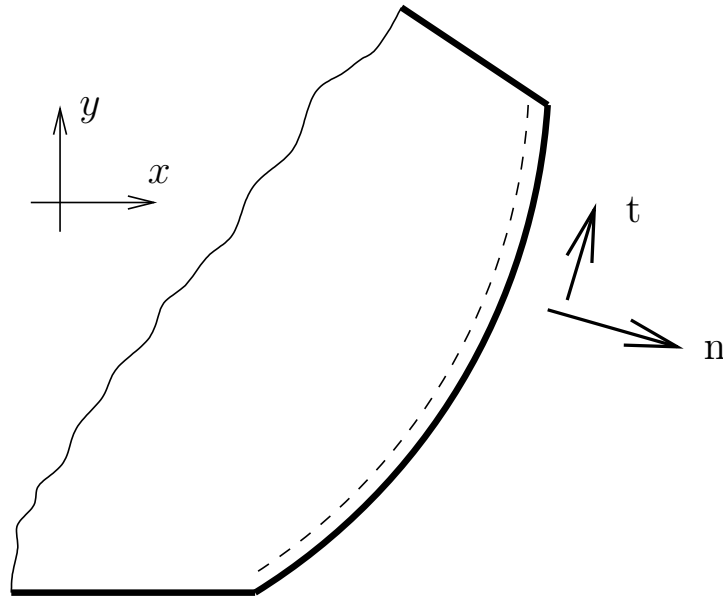


Figura 2.10: Representación en planta de un borde apoyado

Obsérvese que si sobre el borde actúa un momento flector conocido de valor M las condiciones a aplicar serían,

$$\begin{aligned}
 w &= 0 \\
 (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)w_{,xx} + (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha)w_{,yy} + \\
 2(1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} &= -\frac{M}{D}
 \end{aligned}$$

En planta, este tipo de apoyo se representa mediante una línea discontinua junto al borde, tal y como se muestra en la figura 2.10.

Veamos algunos casos particulares de interés.

Borde apoyado recto

Si el borde apoyado B es recto entonces $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ (que se cumple al imponer que $w(x_b, y_b) = 0$ en B) implica también que $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$. Pero para este caso, recuérdese que,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sin^2 \alpha w_{,xx} + \cos^2 \alpha w_{,yy} - 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy}$$

Teniendo ahora en cuenta que el flector puede escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_n = -D \left[\cos^2 \alpha w_{,xx} + \sin^2 \alpha w_{,yy} + 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} + \right. \\
 \left. \nu (\sin^2 \alpha w_{,xx} + \cos^2 \alpha w_{,yy} - 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy}) \right]
 \end{aligned}$$

según se mostró en la 2.15, vemos que el paréntesis que multiplica a ν se anula al imponer que $w(x_b, y_b) = 0$ de modo que las condiciones de contorno quedarían,

$$\begin{aligned}
 w &= 0 \\
 \cos^2 \alpha w_{,xx} + \sin^2 \alpha w_{,yy} + 2 \sin \alpha \cos \alpha w_{,xy} &= -\frac{M}{D}
 \end{aligned}$$

si existiera un momento flector M aplicado en el apoyo.

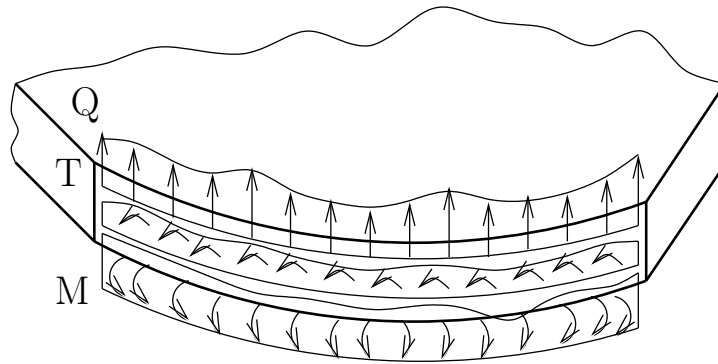


Figura 2.11: Borde libre

Borde apoyado recto normal al eje x

En este caso será un borde recto donde $\alpha = 0$ de modo que las condiciones de contorno se simplifican a,

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ w_{,xx} &= -\frac{M}{D} \end{aligned}$$

Borde apoyado recto normal al eje y

Igual que el caso anterior, pero ahora $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ w_{,yy} &= -\frac{M}{D} \end{aligned}$$

2.6.4. Borde libre

En un borde libre son conocidos los esfuerzos flector, cortante y torsor. Si suponemos que las fuerzas externas aplicadas son M , Q y T , respectivamente, entonces las condiciones aplicar en un borde libre serían,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= M \\ \mathcal{Q}_n &= Q \\ \mathcal{M}_{nt} &= T \end{aligned}$$

El criterio de signos para M , T y Q es el que se muestra en 2.11, es decir, M positivo dirigido según \mathbf{t} (como vector), T positivo dirigido según \mathbf{n} (como vector) y Q positivo dirigido según z .

En planta un borde libre se representa sin añadir marca alguna al borde, tal y como se muestra en la figura 2.12.

En este caso nos encontramos en la situación de no poder aplicar todas las condiciones de contorno, ya que ninguna de ellas se reduce a las anteriores. Entonces, unimos las condiciones de cortante y torsor en una estáticamente equivalente, aplicada sobre el cortante total.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= M \\ \mathcal{V}_n &= Q - \frac{\partial T}{\partial s} \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{V}_n = Q_n - \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s}$ como se dedujo anteriormente.

Para obtener las expresiones generales de la segunda condición para un borde cualquiera habría que tener en cuenta la variación de la inclinación α con la coordenada de arco s . Vamos a recoger aquí únicamente el caso particular en que el borde sea recto, de modo que $\alpha = \text{cte}$.

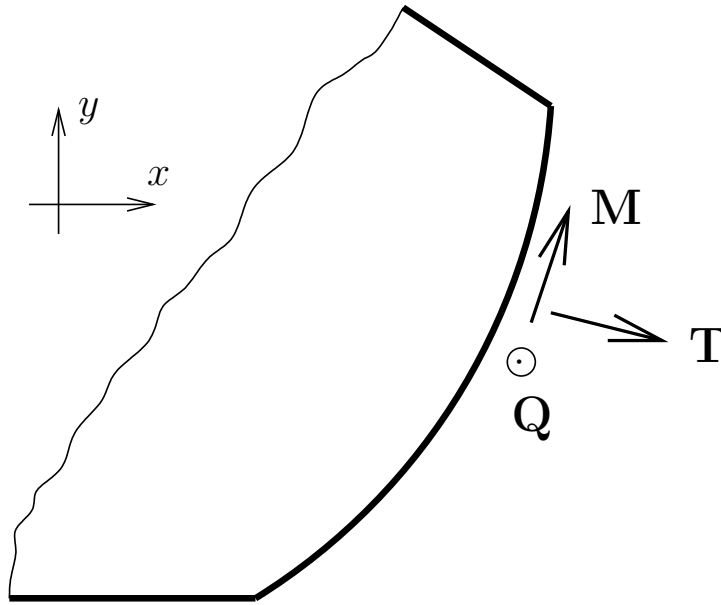


Figura 2.12: Representación en planta de un borde libre

Por una parte tenemos que,

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha$$

como se dedujo por equilibrio vertical en el prisma triangular. Por otra parte a partir de 2.2 puede obtenerse fácilmente que,

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = D(1 - \nu) \left\{ \cos \alpha \left(\cos \alpha \sin \alpha w_{,yyy} + (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) w_{,xyy} \right) + \right. \\ \left. \sin \alpha \left((\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) w_{,xxy} + \cos \alpha \sin \alpha w_{,xxx} \right) \right\}$$

para $\alpha = \text{cte}$. Uniendo ambas expresiones se obtiene,

$$\mathcal{V}_n = -D \left\{ \cos \alpha (w_{,xxx} + w_{,xyy}) + \sin \alpha (w_{,yyy} + w_{,xyy}) + \right. \\ \left. (1 - \nu) \left[\cos \alpha \left(\cos \alpha \sin \alpha w_{,yyy} + (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) w_{,xyy} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \sin \alpha \left((\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) w_{,xxy} + \cos \alpha \sin \alpha w_{,xxx} \right) \right] \right\}$$

Particularicemos estas condiciones para secciones cartesianas.

Borde libre en sección frontal x

En este caso $\alpha = 0$ y $s = y$. Las condiciones serán:

$$\begin{aligned} -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) &= M \\ -D(w_{,xxx} + (2 - \nu)w_{,xyy}) &= Q - \frac{dT}{dy} \end{aligned}$$

Borde libre en sección dorsal x

En este caso $\alpha = \pi$ y $s = -y$. Las condiciones serán:

$$\begin{aligned} -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) &= M \\ -D(w_{,xxx} + (2 - \nu)w_{,xyy}) &= -Q - \frac{dT}{dy} \end{aligned}$$

Téngase en cuenta que el criterio de signos para Q y T es siempre el mismo. Para Q positivo hacia arriba, y para T , positivo antihorario.

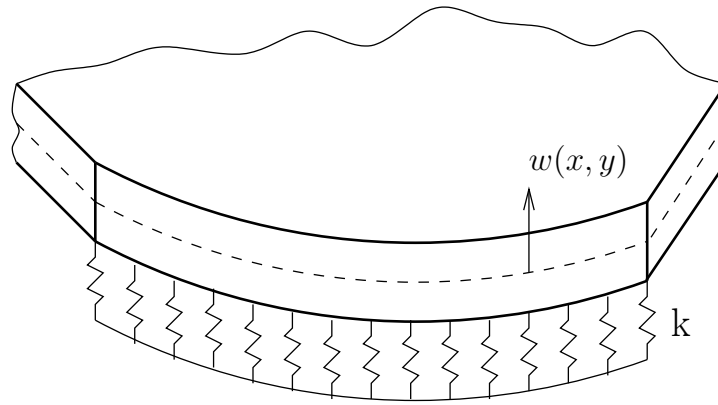


Figura 2.13: Borde sobre apoyo elástico simple

Borde libre en sección frontal y

En este caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $s = -x$. Las condiciones serán:

$$\begin{aligned} -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) &= M \\ -D(w_{,yyy} + (2 - \nu)w_{,xxy}) &= Q + \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

Borde libre en sección dorsal y

En este caso $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ y $s = x$. Las condiciones serán:

$$\begin{aligned} -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) &= M \\ -D(w_{,yyy} + (2 - \nu)w_{,xxy}) &= -Q + \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

2.6.5. Borde sobre apoyo elástico

En muchas ocasiones podemos simular un apoyo elástico mediante una rigidez vertical por unidad de longitud de valor k (2.13). En ese caso el apoyo reacciona cuando la placa sufre una flecha w , con una fuerza vertical por unidad de longitud de valor kw , opuesta al movimiento, tal y como se muestra en la figura 2.14. Por otra parte, si el apoyo no restringe el movimiento en ningún otro sentido, las condiciones de contorno serían:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= 0 \\ \mathcal{V}_n &= -kw \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= 0 \\ \mathcal{V}_n + kw &= 0 \end{aligned}$$

Apoyo elástico más general

Podemos considerar un caso más general de un apoyo el cual sea elástico tanto a movimientos como a giros según la dirección normal y tangencial. Si denominamos a las rigideces de este apoyo k , k_n y k_t , respectivamente, tendremos que la flecha w produce un cortante $-kw$, el giro $w_{,t}$ un torsor $-k_t w_{,t}$ y el giro $w_{,n}$ un flector $k_n w_{,n}$, de modo que las condiciones de contorno serían,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= k_n w_{,n} \\ \mathcal{M}_{nt} &= -k_t w_{,t} \\ \mathcal{Q}_n &= -kw \end{aligned}$$

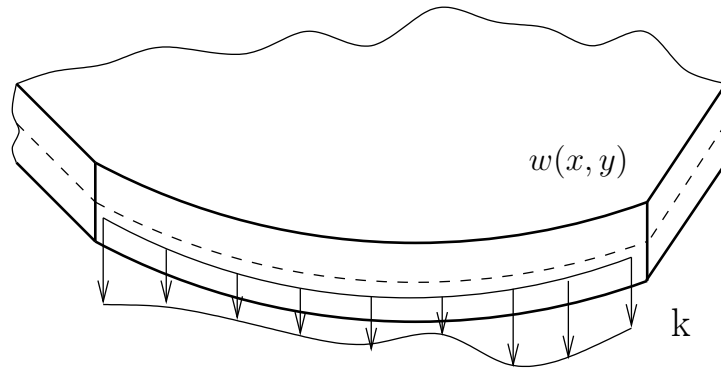


Figura 2.14: Esfuerzo cortante debido a un apoyo elástico simple

Nótese que el flector \mathcal{M}_n es positivo, por el criterio de signos que hemos introducido para éste. Puesto que hay un exceso de condiciones de contorno, reducimos las dos últimas a una sola, quedando de este modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n - k_n w_{,n} &= 0 \\ \mathcal{V}_n + kw - \frac{\partial}{\partial s}(k_t w_{,t}) &= 0\end{aligned}$$

Si la rigidez k_t es constante y el borde es recto se reducen a,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n - k_n w_{,n} &= 0 \\ \mathcal{V}_n + kw - k_t w_{,tt} &= 0\end{aligned}$$

Apoyo elástico general

Es posible plantear un caso aún más general de apoyo, en el que los movimientos del mismo y las fuerzas necesarias para provocarlos estén relacionados a través de una matriz, de la forma,

$$\begin{pmatrix} M \\ T \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} \\ -k_{31} & -k_{32} & -k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \\ w \end{pmatrix}$$

siendo, $\mathbf{k} = k_{ij}$ la matriz de rigidez del apoyo. Las fuerzas y momentos son en esta expresión *los aplicados sobre la placa* que son iguales y contrarios a los aplicados sobre el apoyo. En la primera fila no hay que cambiar el signo pues, según los criterios utilizados en este documento, el signo positivo para M es opuesto al de $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Las condiciones de contorno serían $\mathcal{M}_n = M$, $\mathcal{M}_{nt} = T$ y $\mathcal{Q}_n = Q$, y a continuación haría falta reducir los valores de Q y T al esfuerzo equivalente $V = Q - \frac{\partial T}{\partial s}$.

2.6.6. Borde unido a una viga

Consideremos el apoyo *recto* que se representa en la figura 2.15. Si el borde de la placa sufre una flecha w y giros $\frac{\partial w}{\partial n}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ positivos, aparecerán en la unión placa-viga los esfuerzos q , m y r , que se representan, sobre la viga, en la figura 2.16. Los esfuerzos están dibujados en la unión viga-placa, pero suponemos que los valores q , m y r están reducidos a la superficie media en la vertical de la línea de centros de gravedad de la viga. Sobre la placa los esfuerzos aplicados tendrán el mismo valor pero signo contrario de modo que las condiciones de contorno serán,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= r \\ \mathcal{M}_{nt} &= -m \\ \mathcal{Q}_n &= -q\end{aligned}$$

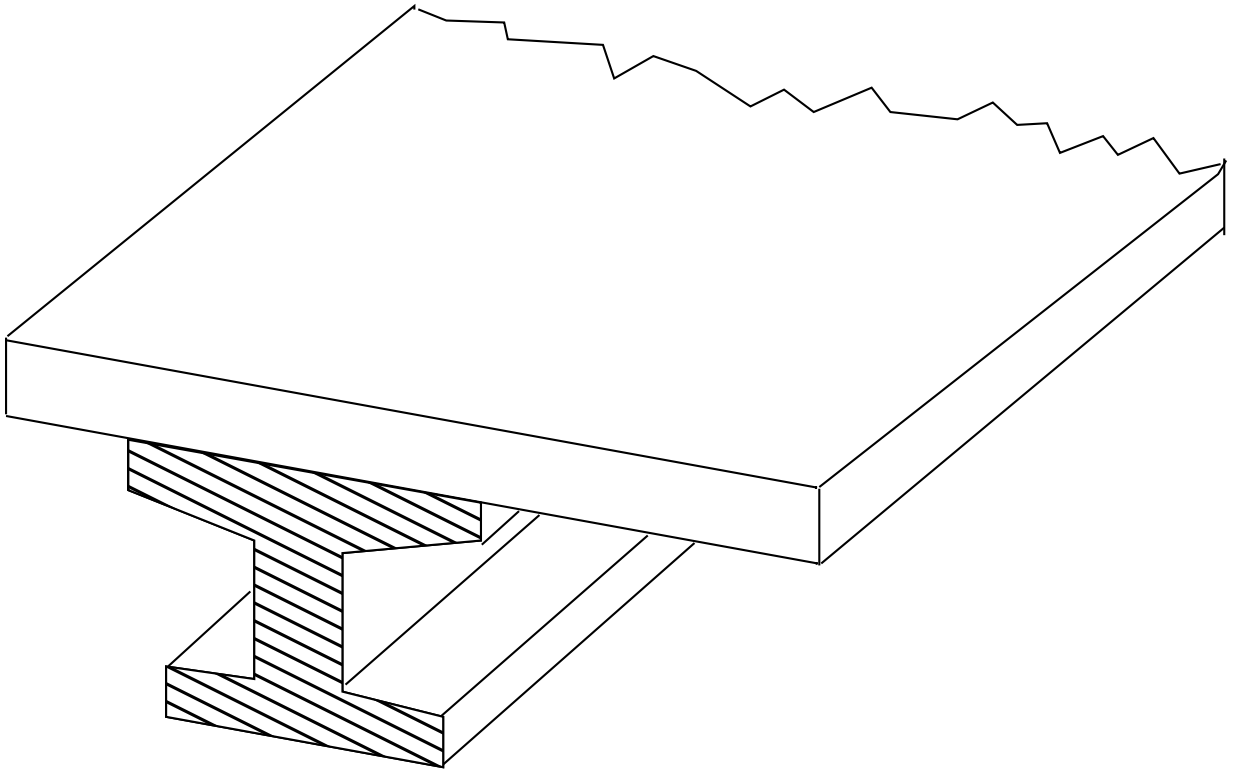


Figura 2.15: Borde unido solidariamente a una viga

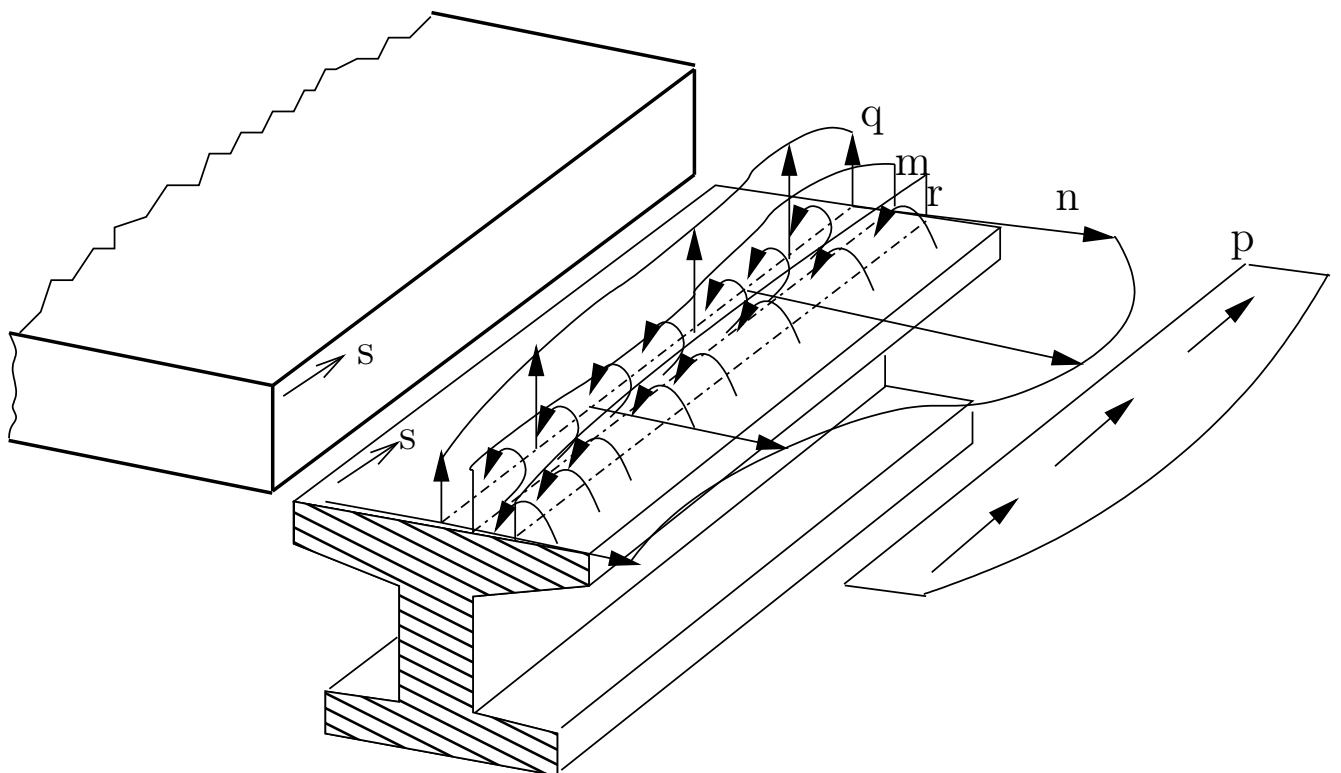


Figura 2.16: Esfuerzos en la unión placa-viga

y por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= r \\ \mathcal{V}_n &= -q + \frac{\partial m}{\partial s}\end{aligned}$$

Existirán además unos esfuerzos rasantes n y p , tal y como se ve en la misma figura. Supondremos despreciable la deformación coplanaria que producen dichos esfuerzos sobre la placa, lo cual es una hipótesis razonable, aunque habrá que tenerlos en cuenta en las ecuaciones de deformación longitudinal, flexión y torsión de la viga, como veremos a continuación.

En la viga, llamamos $E_f A$ a su rigidez a axil, $G_f J$ a su rigidez torsional, y $E_f I_v$ y $E_f I_h$ a las rigideces a flexión en dirección vertical y horizontal, respectivamente. Consideramos, por simplicidad, que los ejes vertical y horizontal son ejes principales de inercia de la sección de la viga. Denominamos l , u , v y θ a los desplazamientos longitudinal (según el vector tangente \mathbf{t} a la placa), horizontal (según la normal \mathbf{n}), vertical (según el eje z) y giro torsional de la viga, respectivamente, y p_f , q_f , n_f y m_f y r_f a las cargas longitudinal (dirección \mathbf{t}), vertical (dirección \mathbf{n}), horizontal (dirección z), momento flector vertical y torsor que actúan en la línea de centros de gravedad de la viga. Si la distancia vertical entre la superficie media de la placa y la línea de centros de gravedad de la viga es L entonces se cumplirán las relaciones cinemáticas siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \mathbf{t}} &= L \frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}} \\ u &= L \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \\ v &= w \\ \theta &= \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\end{aligned}$$

ya que suponemos la placa indeformable en su plano.

Por otra parte tenemos las siguientes relaciones estáticas,

$$\begin{aligned}p_f &= p \\ q_f &= q \\ n_f &= n \\ m_f &= m - Lp \\ r_f &= r - Ln\end{aligned}$$

trasladando las fuerzas y momentos desde la superficie media de la placa a la línea de centros de gravedad de la viga.

Veamos ahora las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la viga. Para un momento de torsión r_f se produce un giro θ relacionado con este mediante la ecuación,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{r_f}{G_f J}$$

de modo que despejando y teniendo en cuenta las relaciones cinemáticas y estáticas anteriores,

$$r - Ln = G_f J \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right)$$

En cuanto a la flexión en dirección horizontal, se cumplirá que

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(E_f I_h \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) - n_f = 0$$

y por tanto,

$$n = L \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[E_f I_h \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) \right]$$

suponiendo L constante a lo largo de la unión.

Sustituyendo este valor de n en la ecuación de la torsión se obtiene finalmente,

$$r = G_f J \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) + L^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[E_f I_h \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) \right]$$

En cuanto al axil, la ecuación que gobierna el comportamiento de la viga será:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial s^2} = \frac{p_f}{E_f A} = \frac{p}{E_f A}$$

de modo que,

$$p = L E_f A \frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}}$$

Por otra parte si sobre la viga actúa una fuerza por unidad de longitud $q_f = q$ y un momento repartido $m_f = m - Lp$, entonces se cumple que,

$$\frac{dQ_v}{ds} + q = 0; \quad \frac{dM_v}{ds} + Q_v + m - Lp = 0$$

y por otra parte, $M_v = E_f I_v \frac{d^2 v}{ds^2}$, siendo Q_v y M_v el cortante y el flector en la viga, y $v = w$ la flecha vertical de la viga. Despejando Q_v de la primera, sustituyéndolo en la derivada de la segunda, y poniendo finalmente en la ecuación resultante el valor de M_v en función de la flecha, se obtiene,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(E_f I_v \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + \frac{dm}{ds} - L \frac{dp}{ds} - q = 0$$

y por tanto,

$$-q + \frac{dm}{ds} - L \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(E_f I_v \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)$$

Teniendo en cuenta finalmente la ecuación del axil,

$$-q + \frac{dm}{ds} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(E_f I_v \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + L \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left(E_f A \frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}} \right)$$

Sustituyendo los valores obtenidos de r y $-q + \frac{dm}{ds}$ en la condiciones de contorno de la placa se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n - G_f J \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{n}} - L^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t}^2} \left[E_f I_h \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t}^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] &= 0 \\ \mathcal{V}_n + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t}^2} \left(E_f I_v \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{t}^2} \right) - L \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left(E_f A \frac{\partial w}{\partial \mathbf{t}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Si la viga es de sección constante se simplifica ligeramente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n - G_f J \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{n}} - L^2 E_f I_h \frac{\partial^5 w}{\partial \mathbf{t}^4 \partial \mathbf{n}} &= 0 \\ \mathcal{V}_n + E_f I_v \frac{\partial^4 w}{\partial \mathbf{t}^4} - L E_f A \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{t}^2} &= 0 \end{aligned}$$

Veamos a continuación algunos casos más simples.

Borde unido a una viga con deslizamiento completo

Supongamos que la viga y la placa están unidas de modo que solo se transmiten las cargas verticales q . En este caso la viga no flexa en horizontal ni se torsiona ni elonga, de modo que las condiciones de contorno se simplifican a:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= 0 \\ \mathcal{V}_n + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(E_f I_v \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

y si la viga es de sección constante,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= 0 \\ \mathcal{V}_n + E_f I_v \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= 0 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Placas Rectangulares: Métodos armónicos de solución

Índice

3.1. Introducción	51
3.2. Series de Fourier	52
3.2.1. Desarrollo en serie doble con extensión impar	55
3.3. Método de Navier	55
3.3.1. Función de Green del problema de flexión de placas delgadas tetrapoyadas	57
Función Delta de Dirac	58
Función de Green	59
Momento concentrado	60
Carga distribuída en una línea $y = \eta_0$	62
Momento distribuido en una línea $y = \eta_0$	64
3.4. Método de Levy	65
3.4.1. Simetrías y antimetrías	68
Problema con antimetría	68
Problema general	68

3.1. Introducción

La solución del problema general de flexión de placas de Kirchhoff se reduce a resolver la ecuación de gobierno de la flecha $w(x, y)$, sometida a unas determinadas condiciones de contorno. En general, no es posible resolver de forma analítica este problema para cualquier geometría, siendo los métodos numéricos la única vía para encontrar soluciones en los problemas prácticos generales.

Cuando la geometría y condiciones de contorno presentan determinadas particularidades es posible obtener soluciones en formato de serie armónica infinita. Este tipo de métodos de solución son los denominados *clásicos*, por ser los métodos que existían para resolver ciertos casos hasta la llegada de los métodos numéricos.

En este capítulo se describirán dos métodos de solución: métodos de Navier y Levy. Existen otros casos más resolubles mediante métodos clásicos que como los que se presentan aquí se basan en la representación en serie de Fourier. En este sentido, los métodos armónicos constituyen soluciones analíticas que requieren un estudio de convergencia ya que no están exentos de ciertos problemas asociados a la aproximación de la respuesta como suma de armónicos. Cuando se emplean estos métodos, el analista debe considerar los siguientes aspectos:

- Representación y falta de convergencia. Asumimos que la respuesta puede expandirse en serie armónica. ¿Es esto cierto?. ¿Qué condiciones debe cumplir la solución?. ¿Qué errores cometemos en tal representación?. En las series armónicas se produce el denominado *fenómeno de Gibbs*, y requiere un tratamiento específico para evitar errores de representación.
- Es necesario analizar el número de términos a considerar. Las magnitudes derivadas (giros, momentos, cortantes) requieren mayor número de términos para converger. ¿Converge siempre?.
- ¿Es el coste computacional bajo?. Aun programando estas series, en ocasiones el número de operaciones para evaluar un resultado concreto es excesivo. En tales casos, un método numérico aproximado, como el *Método de los Elementos Finitos*, garantiza la convergencia y permite obtener resultados con menor número de operaciones.

A pesar de estos inconvenientes, los métodos clásicos han aportado soluciones muy valiosas, imprescindibles para desarrollar métodos numéricos pues permiten calibrar los resultados aproximados. En estas notas se han enunciado algunos de sus inconvenientes, para que no se idealicen los resultados obtenidos con métodos armónicos. Es necesario observar que las soluciones vienen dadas en forma de serie infinita, y desde ese punto de vista, son soluciones analíticas, pero no son soluciones analíticas finitas. Toda solución no evaluable mediante un número de términos finito, requiere ser tratada de forma especial, pues aun si la convergencia puede estar asegurada, es necesario truncar la evaluación en un número finito de términos, por lo que es necesario controlar el error que se produce.

La información de este capítulo se desarrolla como sigue: inicialmente se introducirá el concepto de *serie de Fourier* en una y dos dimensiones. A continuación, se mostrará el método de Navier, basado en una serie armónica doble, aplicable a placas con 4 apoyos simples. Dentro del mismo, se mostrará la representación de cargas puntuales mediante la función Delta de Dirac, y algunos casos especiales derivados del mismo. Finalmente, se desarrollan los fundamentos del método de Levy.

3.2. Desarrollo en series de Fourier

Sea I el intervalo $[0, T]$; sea $f(x)$ una función periódica de periodo T . La función $f(x)$ puede representarse en la base funcional:

$$\{\Psi_m(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right\} \quad n \in \mathbb{N}$$

Es fácil comprobar que esta base es ortonormal respecto al siguiente producto escalar:

$$\int_0^T \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{ij}$$

siendo δ_{ij} la Delta de Kronecker.

Una función periódica cualquiera $f(x) = f(x+T)$ puede proyectarse sobre esa base, constituyendo su *mejor aproximación* en la base $\Psi_m(x)$ mediante la siguiente *serie de Fourier*.

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right\}$$

siendo,

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} f(x) dx \\ a_n &= \int_0^T \frac{2}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx \\ b_n &= \int_0^T \frac{2}{\sqrt{T}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx \end{aligned}$$

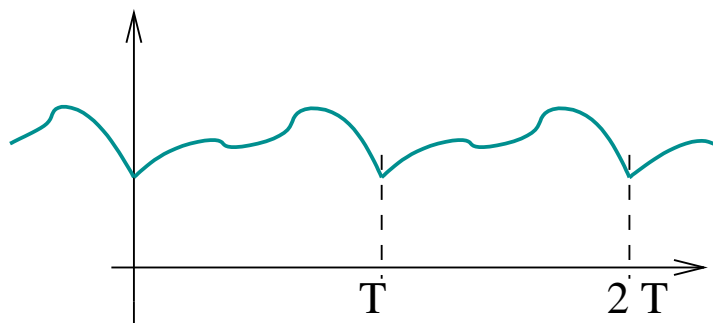


Figura 3.1: Función periódica de periodo T

Esta representación permite una expresión más sencilla redefiniendo los coeficientes a_0 , a_n y b_n , como sigue:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right\}$$

con

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx$$

con $n \in \mathbb{N}$. Nótese que las integrales anteriores pueden escribirse también de la forma,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) f(x) dx$$

puesto que tanto la función $f(x)$ como las funciones trigonométricas tienen periodo T o submúltiplo de T .

La serie de Fourier converge a la función $f(x)$ para todo x donde ésta sea continua. En un punto $x = \eta$ donde la función tenga un valor distinto a izquierda y derecha, sean $f(\eta^-)$ y $f(\eta^+)$, la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2} [f(\eta^-) + f(\eta^+)]$.

Si la función $f(x)$ no es periódica pero estamos interesados únicamente en sus valores dentro de un intervalo finito $[0, L]$, es posible utilizar la representación en serie de Fourier considerando una *extensión periódica* de $f(x)$, tal y como se muestra en la figura 3.1. La idea es considerar una función periódica $\hat{f}(x)$ tal que $\hat{f}(x) = f(x)$ para $x \in [0, L]$ y $\hat{f}(x + kL) = \hat{f}(x) = f(x)$, $\forall k \in (\mathbb{Z})$. Esta extensión de $f(x)$ puede desarrollarse en serie de Fourier, de modo que la serie converge a la función original $f(x)$ dentro del intervalo de interés.

Existen otras posibilidades para realizar la extensión de la función y considerarla periódica: extensiones *par* o *impar*. En ambos casos, el intervalo $[0, L]$ se amplía con una extensión al $[-L, L]$, y el periodo de la nueva función extendida pasa a ser $2L$.

- En la *extensión par*, se considera una función $\hat{f}(x)$ tal que $\hat{f}(-x) = \hat{f}(x) = f(x)$ para $x \in [-L, L]$, y a continuación se repite con periodo $2L$, es decir, $\hat{f}(x + k2L) = \hat{f}(x) = f(x)$, $\forall k \in (\mathbb{Z})$. Puesto que la función periódica $\hat{f}(x)$ es par, en el desarrollo en serie desaparecen los términos impares. Es fácil comprobar que en efecto los coeficientes b_n son nulos en este caso,

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx = 0$$

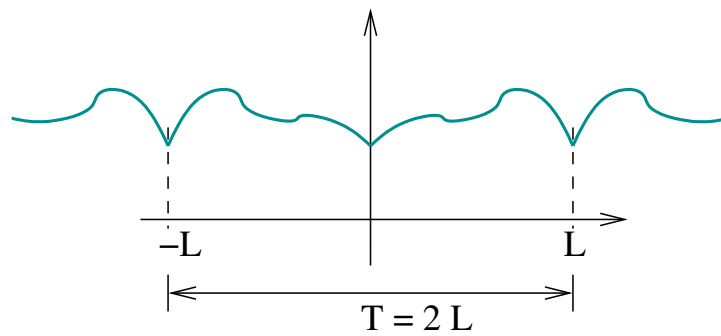


Figura 3.2: Extensión periódica par de una función definida en el intervalo $[0, L]$

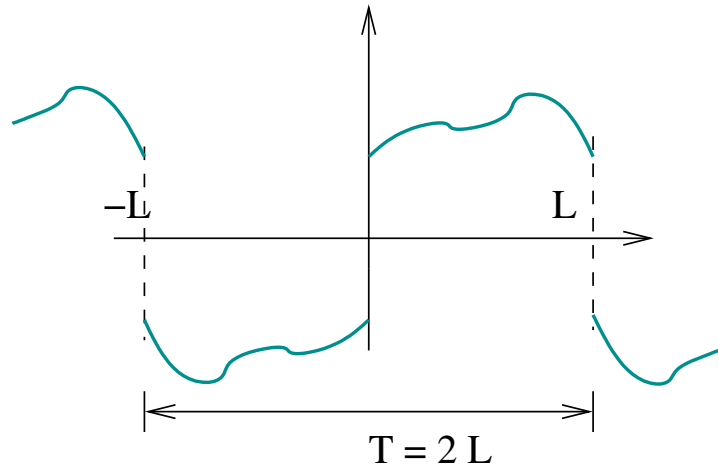


Figura 3.3: Extensión periódica impar de una función definida en el intervalo $[0, L]$

puesto que el integrando es impar. Por otra parte,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx$$

teniendo en cuenta que el integrando es par en este caso.

- En la *extensión impar*, se considera una función $\hat{f}(x)$ tal que $\hat{f}(-x) = -\hat{f}(x) = -f(x)$ para $x \in [-L, L]$, y a continuación se extiende esta función de forma periódica, con periodo $2L$. Puesto que la función es ahora impar, es fácil comprobar que,

$$a_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx = 0$$

ya que el integrando es impar. Con la extensión impar de la función $f(x)$ el desarrollo en serie queda como sigue:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

siendo,

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Es importante destacar que esta extensión implica $\hat{f}(0^-) = -f(0)$ y $\hat{f}(-L) = -f(L)$. Si $f(0) \neq 0$, la extensión periódica impar es discontinua en $x = 0$ y la serie de Fourier convergerá a la semisuma de los valores de la función a ambos lados de la discontinuidad, que en este caso es $\frac{1}{2}(\hat{f}(0^+) + \hat{f}(0^-)) = 0$. Lo mismo ocurre en el extremo $x = L$ si $f(L) \neq 0$.

Este desarrollo armónico en serie *seno* será empleado en los métodos armónicos para placas estudiados en el presente capítulo.

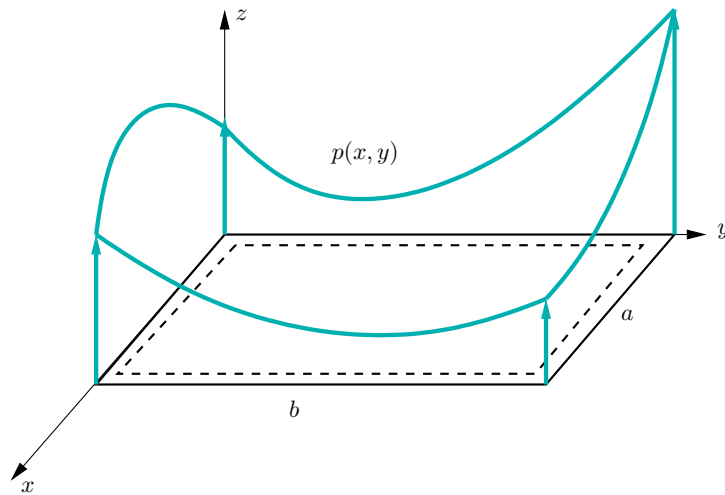


Figura 3.4: Tipo de problemas resolubles mediante el método de Navier

3.2.1. Desarrollo en serie doble con extensión impar

Sea $f(x, y)$ una función definida en $[0, a] \times [0, b]$. Realizando una extensión impar en x e y , es decir,

$$f(-x, y) = -f(x, y); f(x, -y) = -f(x, y); f(-x, -y) = f(x, y)$$

podemos desarrollar $f(x, y)$ en serie armónica doble de senos de la siguiente forma,

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

siendo

$$f_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy$$

3.3. Método de Navier

El método de Navier es aplicable en las siguientes condiciones:

1. Placa rectangular, de dimensiones $a \times b$.
2. Condición de apoyos simples en los cuatro bordes.
3. Carga cualquiera $p(x, y)$.

Considérese la referencia $\mathcal{R}(O; x, y, z)$, situada en *una esquina de la placa*, con $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$. La ecuación de gobierno de flexión de placas delgadas que ha de cumplir la flecha es:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b] \quad (3.1)$$

siendo la constante $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, donde E es el módulo de elasticidad del material, ν el de Poisson y h el espesor de la placa.

Las condiciones de contorno que han de cumplirse son:

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0; \forall y & \quad \begin{cases} w(0, y) = 0 \\ \mathcal{M}_x(0, y) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } x = a; \forall y & \quad \begin{cases} w(a, y) = 0 \\ \mathcal{M}_x(a, y) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } \forall x; y = 0 & \quad \begin{cases} w(x, 0) = 0 \\ \mathcal{M}_y(x, 0) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } \forall x; y = b & \quad \begin{cases} w(x, b) = 0 \\ \mathcal{M}_y(x, b) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puesto que se trata de bordes rectos apoyados las condiciones sobre el momento se simplifican de modo que queda,

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0; \forall y & \quad \begin{cases} w(0, y) = 0 \\ w_{,xx}(0, y) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } x = a; \forall y & \quad \begin{cases} w(a, y) = 0 \\ w_{,xx}(a, y) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } \forall x; y = 0 & \quad \begin{cases} w(x, 0) = 0 \\ w_{,yy}(x, 0) = 0 \end{cases} \\ \text{Para } \forall x; y = b & \quad \begin{cases} w(x, b) = 0 \\ w_{,yy}(x, b) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El método de Navier se fundamenta en buscar una solución en desarrollo en serie de armónicos, tal que término a término verifican las condiciones de contorno en los cuatro bordes. Para ello consideramos una solución de la forma,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (3.2)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que para que la serie anterior cumpla las condiciones de contorno, es necesario que el origen de coordenadas se encuentre en una esquina de la placa, tal que el eje x varía desde 0 hasta a y el eje y desde 0 hasta b . En este caso es fácil comprobar que efectivamente se cumplen estas condiciones, ya que las funciones seno son nulas para $x = 0$ y $x = a$ o $y = 0$ e $y = b$, respectivamente, y la segunda derivada del seno vuelve a ser el seno, de modo que también se anulan estas en los bordes.

Para que esta expresión de la flecha sea la solución buscada es necesario que cumpla también la ecuación diferencial que gobierna la flecha. Si sustituimos la expansión 3.2 en la ecuación 3.1 se obtiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi^4 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]^2 w_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = \frac{p(x, y)}{D}$$

ecuación de la que hemos de obtener los valores de w_{nm} . Para ello la carga $p(x, y)$ se desarrolla igualmente en serie doble de senos,

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

siendo,

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy$$

Sustituyendo esta expansión de la carga en la ecuación diferencial e igualando término a término se obtiene,

$$\pi^4 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 w_{nm} = \frac{p_{nm}}{D}$$

Despejando w_{nm} se obtiene el término general de la serie,

$$w_{nm} = \frac{p_{nm}}{\pi^4 D F_{nm}} \quad (3.3)$$

siendo

$$F_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2$$

con lo cual se obtiene la flecha $w(x, y)$,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{\pi^4 D F_{nm}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

Como $|\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a})| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(\frac{m\pi y}{b})| \leq 1$ para todo x, y, n y m , la serie dada es convergente.

Sustituyendo $w(x, y)$ en las ecuaciones 1.12 y 1.14 se obtienen las expresiones de los momentos y de los cortantes. Así como podríamos obtener las expresiones de las tensiones en el espesor sustituyendo en las ecuaciones 1.16.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{F_{nm}} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \\ \mathcal{M}_y &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{F_{nm}} \left[\left(\frac{m}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \\ \mathcal{M}_{xy} &= 1 \frac{1-\nu}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{F_{nm}} \frac{nm}{ab} \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \end{aligned}$$

En lo que sigue, y para simplificar la notación, denominaremos

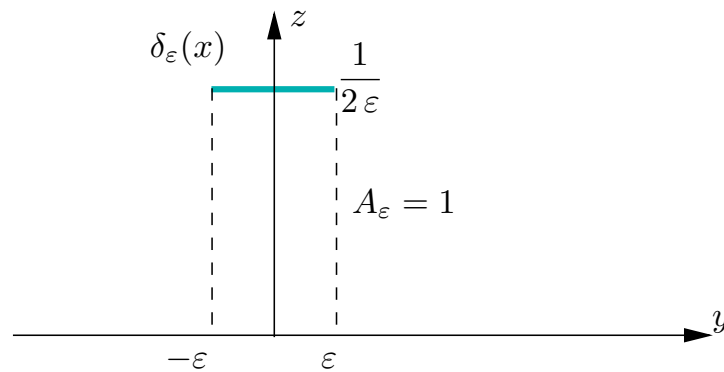
$$s_n(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right); \quad s_m(y) = \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

También, cuando sea necesario, utilizaremos las abreviaturas

$$c_n(x) = \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right); \quad c_m(y) = \cos \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

3.3.1. Función de Green del problema de flexión de placas delgadas tetrapoyadas

En física matemática, es necesario en ocasiones representar cargas concentradas. En el caso que nos ocupa, $p(x, y)$ representa una *presión*, es decir, tiene dimensiones de fuerza por unidad de área; la carga puntual es una resultante de presiones sobre un área muy pequeña. La resultante es finita, pero el valor de la presión es infinito ya que se considera nula el área en que está aplicada la fuerza. Para representar cargas puntuales, se emplea una función especial, conocida como la *Delta de Dirac*. Esta función puede emplearse para obtener soluciones para casos de cargas concentradas. Concretamente, cuando la carga es unitaria, la solución obtenida se denomina *función de Green del problema*. También esta solución es conocida como *solución fundamental* y a partir de la misma es posible construir cualquier solución para la misma placa con las mismas condiciones de contorno, pero con una carga cualquiera.

Figura 3.5: Función $\delta_\varepsilon(x)$ de área unidad

Función Delta de Dirac

No se va a aportar en estas notas una definición rigurosa de la función Delta de Dirac, ya que excede los objetivos de las mismas. La función Delta es, hablando con mayor rigor, un *funcional*, es decir, una aplicación entre un espacio de funciones y los números reales. Veamos unas ideas heurísticas sobre la misma.

Consideremos la función $\delta_\varepsilon(x)$ definida de la siguiente forma,

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } x \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{Para } x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

que se muestra en la figura 3.5.

Esta función cumple,

$$\int_a^b \delta_\varepsilon(x) dx = 1$$

para cualquier intervalo (a, b) , tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (a, b)$. Podemos tomar el límite en la expresión anterior de modo que, evidentemente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \delta_\varepsilon(x) dx = 1$$

ya que el miembro de la derecha es constante. Conforme ε tiende a 0 la función $\delta_\varepsilon(x)$ va tomando valores cada vez mayores, y reduciéndose el intervalo en que su valor es no nulo, pero manteniéndose siempre su *resultante*, es decir, el área bajo la misma, constante e igual a 1. Físicamente, en el contexto que nos ocupa, $\delta_\varepsilon(x)$ representa una fuerza distribuida de valor $1/(2\varepsilon)$ aplicada sobre el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. La carga lineal cambia con ε , hasta hacerse infinita cuando se aplica sobre una línea de longitud nula, pero la resultante de las fuerzas es siempre la misma, y vale la unidad. Este es el sentido físico de una fuerza aplicada en un punto. Representa la resultante de unas fuerzas distribuidas, sobre una línea en este caso, aplicadas en un área muy pequeña.

La ‘función’ límite es lo que se denomina *función delta de Dirac* y se denota mediante $\delta(x)$, y cumplirá,

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1$$

para todo intervalo (a, b) tal que $0 \in (a, b)$. Definida como función,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } x \neq 0 \\ \infty & \text{Para } x = 0 \end{cases}$$

La función delta de Dirac puede aplicarse sobre un punto distinto del origen sin más que considerar $\delta(x - \eta)$ que representa una carga puntual aplicada en la abscisa $x = \eta$.

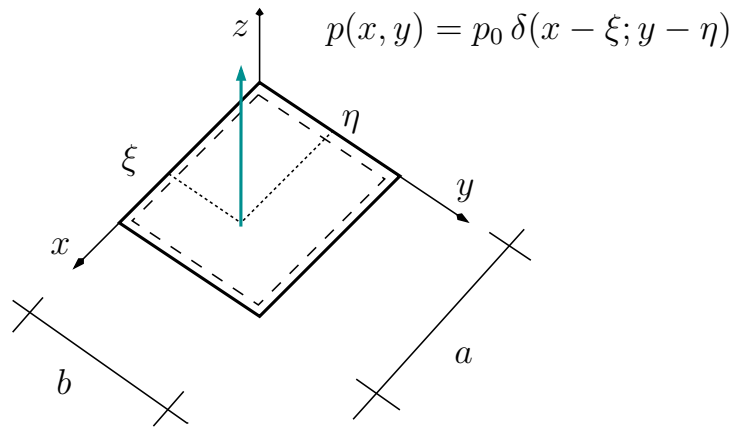


Figura 3.6: Placa rectangular tetrapoyada sometida a una carga puntual

La propiedad fundamental de la función delta de Dirac es la siguiente. Consideremos la siguiente integral,

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx$$

siendo $\xi \in (a, b)$ y $f(x)$ una función continua en $x = \xi$. Puesto que la función delta es nula para $x \neq \xi$, entonces $f(x) \delta(x - \xi) = f(\xi) \delta(x - \xi)$ de modo que,

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi) \int_a^b \delta(x - \xi) dx$$

y puesto que el área de la delta es unidad,

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi)$$

Esta representación unidimensional de las fuentes puntuales puede extenderse a dos dimensiones, $\delta(x - \xi, y - \eta)$, o a n dimensiones. Para el caso bidimensional, la integral de una función $f(x, y)$ multiplicada por una Delta aplicada en el punto de coordenadas (ξ, η) queda:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \delta(x - \xi, y - \eta) dx dy = f(\xi, \eta)$$

siendo Ω una superficie cualquiera tal que $(\xi, \eta) \in \Omega$

Función de Green

Se considera una placa rectangular, tal y como se muestra en la figura 3.6, de dimensiones $a \times b$ simplemente apoyada en sus cuatro bordes. La placa está sometida a una carga puntual de valor P aplicada en el punto de coordenadas (ξ, η) .

La delta de Dirac en dos dimensiones permite representar la carga concentrada como distribuida.

$$p(x, y) = P \delta(x - \xi, y - \eta)$$

Aplicando el método de Navier, el primer paso consiste en calcular el coeficiente p_{nm} de la carga. Por tanto:

$$p_{nm} = \frac{4P}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x - \xi, y - \eta) s_n(x) s_m(y) dx dy = \frac{4P}{ab} s_n(\xi) s_m(\eta)$$

El segundo paso consiste en calcular w_{nm} a partir de p_{nm} aplicando la relación 3.3, obteniéndose,

$$w_{nm} = \frac{4P}{ab\pi^4 D F_{nm}} s_n(\xi) s_m(\eta)$$

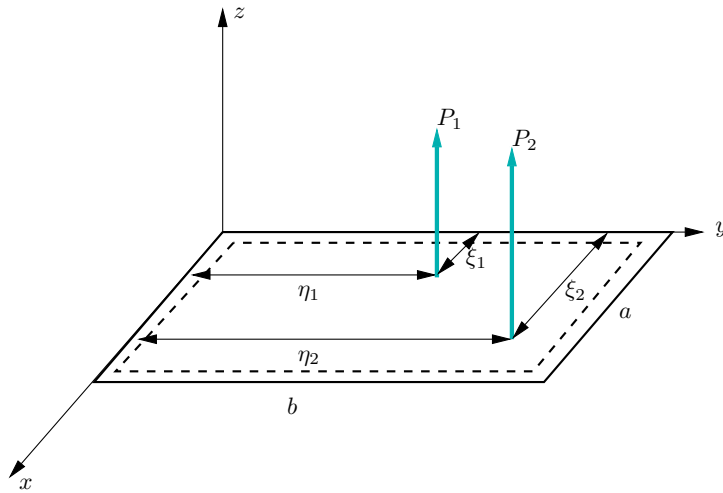


Figura 3.7: Placa tetrapoyada sobre la que actúan dos cargas concentradas

Por tanto, la solución para $w(x, y)$ queda como sigue:

$$w(x, y) = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s_n(\xi)s_m(\eta)}{F_{nm}} s_n(x)s_m(y)$$

A esta solución, para el caso $P = 1$, se la denomina *Función de Green* del problema de flexión de placas de Kirchhoff tetrapoyadas. Esta función la notaremos como $K(x, y; \xi, \eta)$, y representa el desplazamiento en el punto (x, y) cuando hay aplicada una carga unidad en (ξ, η) ,

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4s_n(\xi)s_m(\eta)}{ab\pi^4 D F_{nm}} s_n(x)s_m(y)$$

Esta función permite construir la solución para cualquier caso de carga, simplemente considerando que la solución se construye sumando las soluciones individuales para cargas puntuales. Así, si hay dos cargas, de valor P_1 en (ξ_1, η_1) y P_2 en (ξ_2, η_2) , la solución para el campo de desplazamientos queda como sigue:

$$w(x, y) = P_1 K(x, y; \xi_1, \eta_1) + P_2 K(x, y; \xi_2, \eta_2)$$

Si la carga es una superficie de carga $p(x, y)$, basta considerar la integración en lugar de la suma. Cada fuerza equivalente será de la forma $dF = p(\xi, \eta)d\xi d\eta$, es decir, una fuerza aplicada en el rectángulo $d\xi d\eta$. Por tanto:

$$w(x, y) = \int_0^a \int_0^b K(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

El interés de esta expresión es principalmente teórico ya que su aplicación es equivalente a calcular el valor de p_{nm} mediante integración, y a partir del mismo, el término general de la flecha w_{nm} .

Momento concentrado

Considérese una placa rectangular de dimensiones $a \times b$ sometida a la acción de un M_y puntual, aplicado en el punto (ξ, η) , tal y como se muestra en la figura 3.9.

En este caso no hay una forma directa de representar $p(x, y)$ ¹. La idea a aplicar es la siguiente: un momento como el descrito en la figura 3.9 es equivalente al momento de un par de fuerzas puntuales, de valor M_y/ε , separadas entre sí la distancia ε en la variable y , tal y como se observa en la figura 3.10. El punto de aplicación de la fuerza M_y/ε será $(\xi, \eta + \varepsilon/2)$; en el punto $(\xi, \eta - \varepsilon/2)$ se aplica la fuerza concentrada $-M_y/\varepsilon$.

¹Podría hacerse considerando la derivada de la delta de Dirac, pero es un artificio innecesario

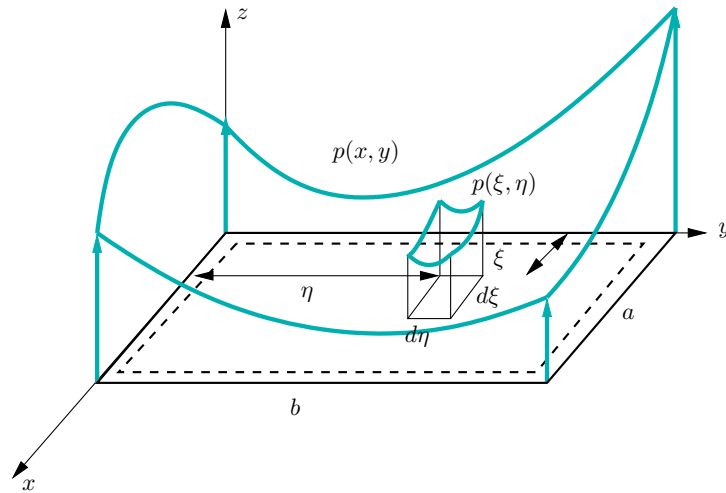


Figura 3.8: Carga cualquier $p(x, y)$ considerada como suma de Deltas de Dirac

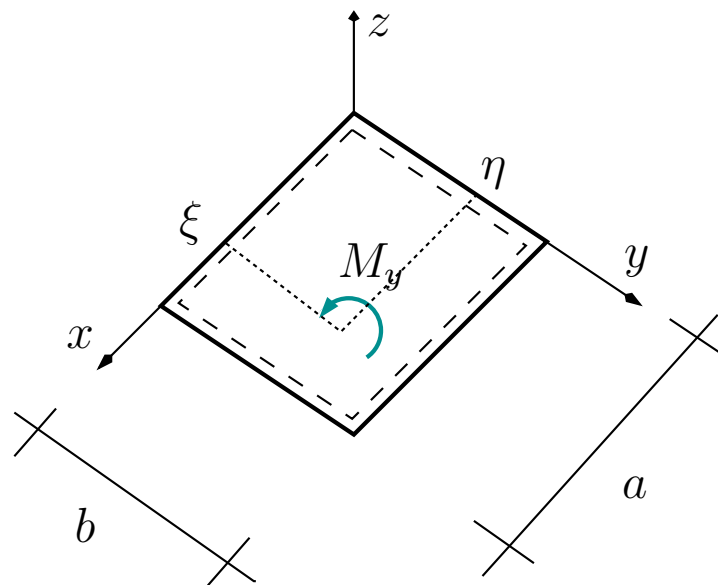


Figura 3.9: Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento concentrado

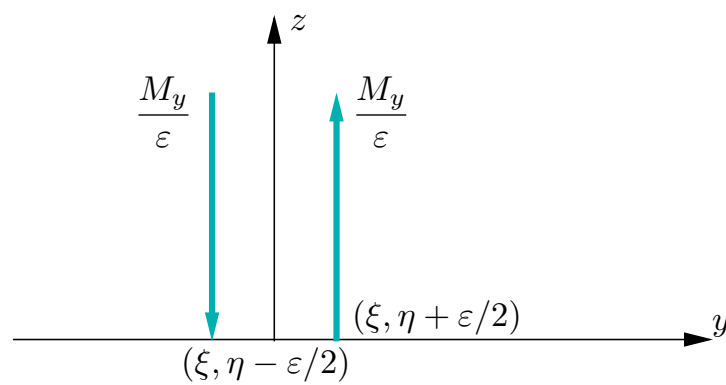


Figura 3.10: Momento concentrado como límite de dos fuerzas de valor $\frac{M_y}{\varepsilon}$ separadas una distancia ε

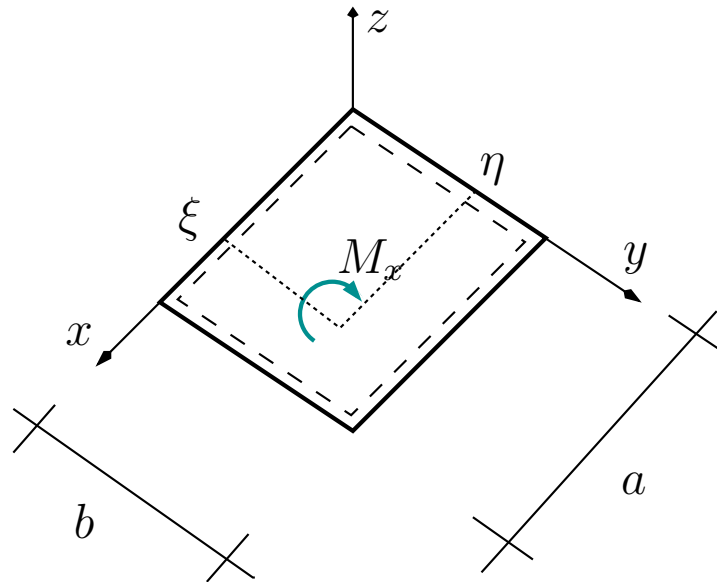


Figura 3.11: Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento concentrado según el eje x

Con estas dos fuerzas, puede construirse la función $w_\varepsilon(x, y)$ utilizando la función de Green. Así:

$$w_\varepsilon(x, y) = \frac{M_y}{\varepsilon} K(x, y; \xi, \eta + \varepsilon/2) - \frac{M_y}{\varepsilon} K(x, y; \xi, \eta - \varepsilon/2)$$

La respuesta al momento concentrado será:

$$w(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(x, y) = M_y \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K(x, y; \xi, \eta + \varepsilon/2) - K(x, y; \xi, \eta - \varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

Teniendo en cuenta la definición de *derivada parcial*, dicho límite vale:

$$w(x, y) = M_y \frac{\partial K(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta}$$

y realizando esta operación

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4M_y s_n(\xi) c_m(\eta) m}{ab^2 \pi^3 D F_{nm}} s_n(x) s_m(y) \quad (3.4)$$

Igualmente podemos obtener la flecha debida a un momento concentrado M_x , tal y como se muestra en la figura 3.11, obteniéndose,

$$w(x, y) = M_x \frac{\partial K}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4M_x c_n(\xi) s_m(\eta) n}{a^2 b \pi^3 D F_{nm}} s_n(x) s_m(y) \quad (3.5)$$

Si tenemos un momento M que forma un ángulo α con el eje x , tal y como se muestra en 3.12, entonces la flecha resultante será

$$w(x, y) = M \cos \alpha w^{M_y}(x, y) - M \operatorname{sen} \alpha w^{M_x}(x, y)$$

siendo $w^{M_x}(x, y)$ la flecha dada por 3.5 para $M_x = 1$, y $w^{M_y}(x, y)$ la flecha dada por 3.4 para $M_y = 1$.

Carga distribuída en una línea $y = \eta_0$

Sea una placa tetrapoyada, de dimensiones $a \times b$, sometida a una carga lineal de valor $q(x)$ por unidad de longitud, definida sobre la recta $y = \eta_0$, tal y como se muestra en la figura 3.13.

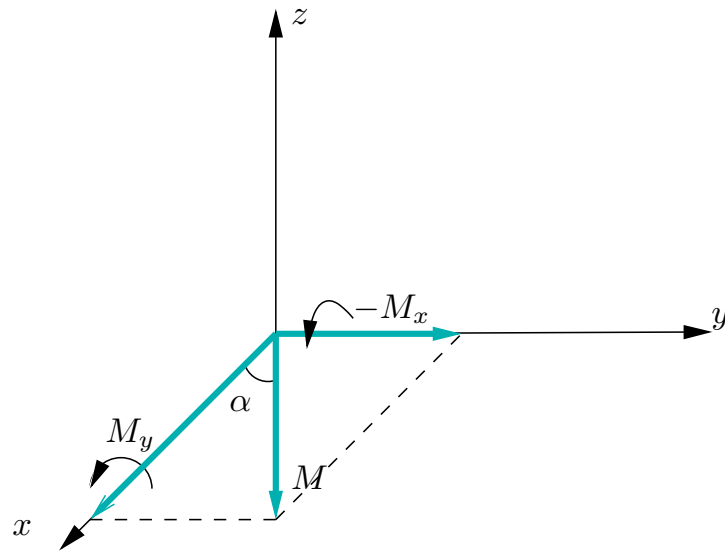


Figura 3.12: Componentes de un momento cualquiera en los ejes x e y

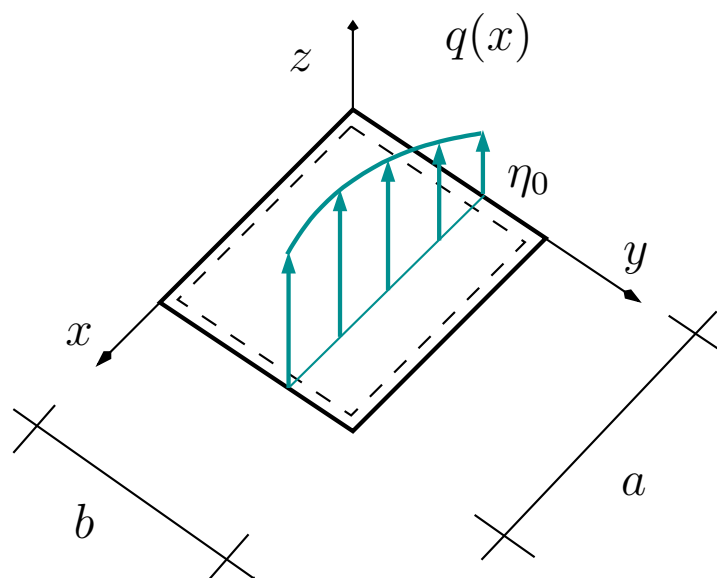


Figura 3.13: Placa rectangular tetrapoyada sometida a una carga distribuida sobre una línea

Representaremos esta carga mediante la función delta de Dirac como sigue:

$$p(x, y) = q(x)\delta(y - \eta_0)$$

Con la expresión de la carga calculamos su expansión en serie de senos mediante,

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x)\delta(y - \eta_0)s_n(x)s_m(y) dx dy$$

y teniendo en cuenta la propiedad de la delta de Dirac,

$$p_{nm} = \frac{2}{b} s_m(\eta_0)q_n$$

siendo,

$$q_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x)s_n(x) dx$$

Conocido el término general de la carga se obtiene el de la flecha,

$$w_{nm} = \frac{2q_n s_m(\eta_0)}{b\pi^4 DF_{nm}} \quad (3.6)$$

Es interesante señalar que la definición de q_n permite escribir $q(x)$ de la forma,

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Es decir, que q_n es el término de la expansión en senos de la función $q(x)$.

Este caso de carga se puede emplear para introducir una fuerza de reacción de una línea de apoyo como incógnita. La reacción depende de los coeficientes q_n de la serie.

Para el caso particular de una fuerza constante $q(x) = q_0$, se obtiene,

$$q_n = \frac{2}{a} \int_0^a q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2q_0}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4q_0}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto,

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8q_0 s_m(\eta)}{nb\pi^5 DF_{nm}} s_n(x)s_m(y)$$

Momento distribuido en una línea $y = \eta_0$.

Se considera una placa de dimensiones $a \times b$ tetrapoyada, sometida a las cargas que se muestran en la figura 3.14. En la línea $y = \eta_0$ está aplicado un momento variable distribuido $m_y(x)$. Consideremos la expansión de dicho momento en serie de senos:

$$m_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Aplicando la misma idea que la vista anteriormente para el momento puntual, reemplazamos este momento distribuido por un par de fuerzas distribuidas, de la forma

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\varepsilon} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Al sumar ambas y tomar el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtendrá que la función desplazamiento $w(x, y)$ es la derivada parcial en la variable η_0 de la solución para carga lineal variable obtenida en el apartado anterior y dada por 3.6. Se obtiene así

$$w_{nm} = \frac{2mm_n}{b^2\pi^3 DF_{nm}} c_m(\eta_0)$$

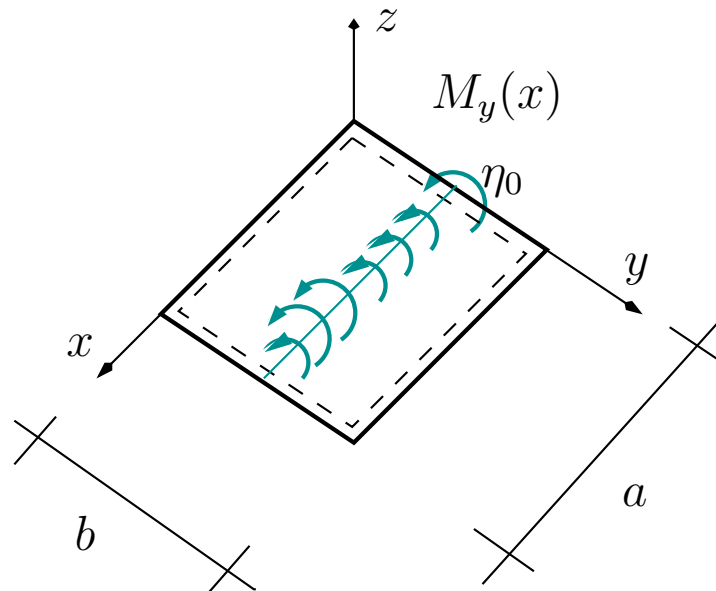


Figura 3.14: Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento distribuido sobre una línea

de modo que,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2mm_n c_m(\eta_0)}{b^2 \pi^3 D F_{nm}} s_n(x) s_m(y)$$

Esta solución puede aplicarse para obtener el campo de desplazamientos cuando se impone un momento en un borde de la placa. Es aquí uno de los casos donde se observa la falta de representación de la serie armónica. Si se calculan las derivadas segundas para obtener el momento, se observa que es un momento nulo, pero basta cambiar el punto de cálculo a uno inmediatamente interior a la placa en ese borde para que el momento cambie bruscamente de valor. Lo que ocurre en tales casos es que la serie trigonométrica trata de representar un salto en el valor de una función que vale (por construcción) cero en los bordes.

Si el momento distribuido en la línea $y = \eta_0$, que denominamos ahora $m_x(x)$, está orientado en la otra dirección, tal y como se muestra en la figura 3.15, no podemos emplear el procedimiento anterior. En este caso podemos calcular la solución considerando la distribución de momentos como una suma de momentos diferenciales de valor $m_x(\xi) d\xi$ y obtener la respuesta como suma (integral) de las respuestas para el momento concentrado, dado por la ecuación 3.5. Así, para un momento $m_x(\xi) d\xi$ aplicado en el punto (ξ, η_0) la flecha será,

$$dw_{nm} = m_x(\xi) d\xi \frac{4c_n(\xi) s_m(\eta_0) n}{a^2 b \pi^3 D F_{nm}}$$

Integrando ahora para toda la línea $y = \eta_0$,

$$w_{nm} = \frac{2m_n s_m(\eta_0) n}{ab \pi^3 D F_{nm}}$$

siendo ahora,

$$m_n = \frac{2}{a} \int_0^a m_x(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi$$

que es el término general del desarrollo en serie de *cosenos* del momento.

3.4. Método de Levy

El método de Levy es aplicable a problemas del siguiente tipo:

1. Placa rectangular de dimensiones $a \times b$.

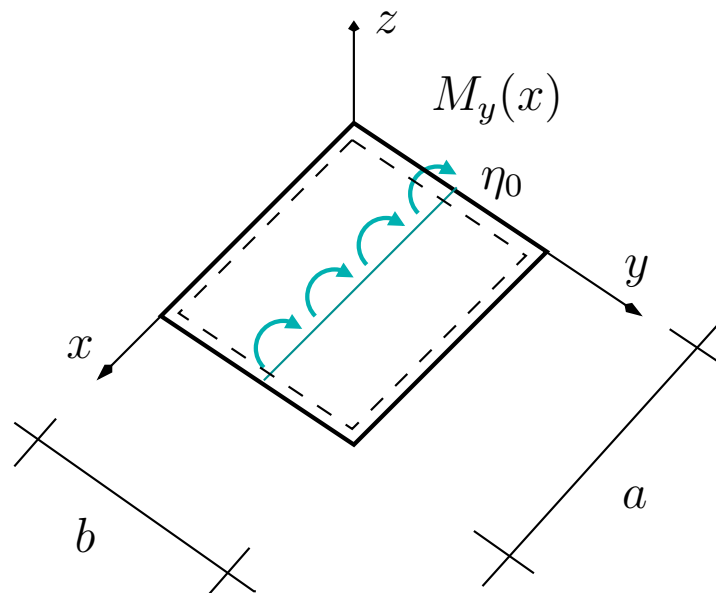


Figura 3.15: Placa rectangular tetrapoyada sometida a un momento distribuido sobre una línea, dirigido según x

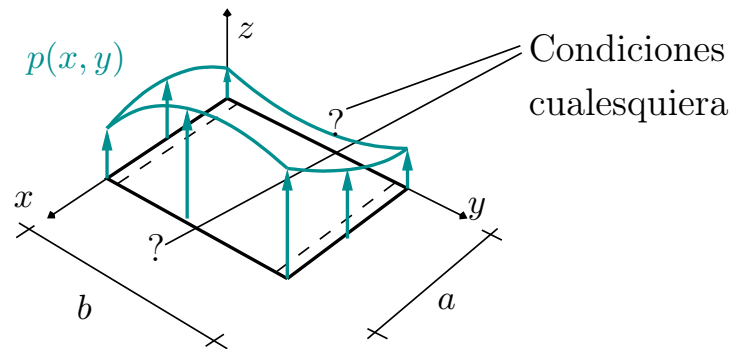


Figura 3.16: Problema general al que es aplicable el método de Levy

2. Condición de apoyos simples en dos bordes paralelos.
3. Condiciones de contorno cualesquiera en los otros dos bordes.
4. Carga $p(x, y)$ cualquiera.

En la figura 3.16 se representa un problema general de placas resoluble mediante esta técnica.

El método de Levy presenta ventajas sobre el método de Navier, en general, pues las series resultantes convergen más rápido, y son computacionalmente menos costosas ya que se trata de un sumatorio simple.

El método de Levy se fundamenta, igual que en el caso anterior, en construir una solución en serie de senos que cumple directamente las condiciones de contorno en los bordes apoyados. Esto obliga a que el sistema de referencia tenga su origen en uno de los dos bordes apoyados. Si consideramos que este eje es el y , se introducen soluciones en series de $\text{sen}(n\pi y/b)$. Los coeficientes de la serie, sin embargo, no son ahora constantes, sino funciones de la variable x , cuya solución se obtendrá en forma finita obligando a que la serie cumpla la ecuación biarmónica de gobierno, y las condiciones de contorno en los otros bordes.

Colocando el eje y como se ha descrito, o lo que es lo mismo el eje x en uno de los bordes apoyados, se considera para la flecha una expresión de la forma:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \text{sen}(\lambda_n y) \quad (3.7)$$

con $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$.

Se observa que:

1. Los coeficientes $w_n(x)$ son funciones de x , no constantes, como en el método de Navier.
2. Por construcción, la serie cumple las condiciones de contorno en $y = 0$ e $y = b$.

Para calcular los coeficientes $w_n(x)$ sustituimos la solución propuesta en la ecuación de gobierno dada en 3.1. Para ello calculemos las derivadas de $w(x, y)$ dada por 3.7 que aparecen en la ecuación biarmónica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{IV}(x) \operatorname{sen}(\lambda_n y) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} w_n^{II}(x) \lambda_n^2 \operatorname{sen}(\lambda_n y) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \lambda_n^4 \operatorname{sen}(\lambda_n y)\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión de la ecuación de gobierno conduce a,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{w_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 w_n^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n(x)\} \operatorname{sen}(\lambda_n y) = \frac{p(x, y)}{D}$$

Para poder establecer condiciones sobre cada uno de los términos del sumatorio del miembro de la izquierda, desarrollamos en una serie del mismo tipo el miembro de la derecha, de la forma,

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(x) \operatorname{sen}(\lambda_m y)$$

siendo

$$p_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen}(\lambda_m y) dy$$

Incorporando esta expansión en la ecuación diferencial,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{w_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 w_n^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n(x)\} \operatorname{sen}(\lambda_n y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{D} \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

Como la igualdad ha de cumplirse *para todo* y , han de ser iguales los coeficientes de los senos, término a término, de modo que los coeficientes $w_n(x)$ han de cumplir la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) siguiente:

$$w_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 w_n^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n(x) = \frac{p_n(x)}{D}$$

Se trata de una E.D.O. lineal de coeficientes constantes, cuya solución puede encontrarse fácilmente en la forma,

$$w_n(x) = w_n^p(x) + w_n^h(x)$$

siendo $w_n^p(x)$ una solución particular cualquiera de la ecuación, y $w_n^h(x)$ la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

La solución de la homogénea la obtenemos probando soluciones de la forma $e^{\mu x}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene,

$$\left(\mu^4 - 2\lambda_n^2 \mu^2 + \lambda_n^4\right) e^{\mu x} = 0$$

y por tanto el coeficiente μ del exponente ha de ser solución del polinomio característico,

$$\mu^4 - 2\lambda_n^2 \mu^2 + \lambda_n^4 = \left(\mu^2 - \lambda_n^2\right)^2 = 0$$

cuyas raíces son,

$$\mu = \pm \lambda_n$$

ambas dobles.

En conclusión, la solución general de la homogénea tendrá la forma,

$$w_n^h(x) = (A'_n + B'_n \lambda_n x) e^{-\lambda_n x} + (C'_n + D'_n \lambda_n x) e^{\lambda_n x}$$

Es conveniente sin embargo expresar la solución en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas $\sinh \lambda_n x = \frac{1}{2} (e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x})$ y $\cosh \lambda_n x = \frac{1}{2} (e^{\lambda_n x} + e^{-\lambda_n x})$ en vez de las exponenciales, llegándose a la expresión general,

$$w_n^h(x) = (A_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)$$

Los coeficientes A_n , B_n , C_n , y D_n se calcularán imponiendo las condiciones de contorno en los bordes $x = 0$, $x = a$.

3.4.1. Simetrías y antimetrías

Para la aplicación del método de Levy, uno de los ejes ha de ir desde un borde apoyado hasta el otro, por ejemplo el eje y . Esto es equivalente a decir que el eje x ha de localizarse en uno de los bordes apoyados. Sin embargo, el origen de coordenadas no ha de colocarse en una esquina, como ocurría en el método de Navier. Por el contrario, en el caso de que los apoyos en los bordes paralelos al eje y sean iguales conviene colocar el eje y en el centro de la placa, a fin de aprovechar las posibles simetrías de las cargas respecto a este eje, y por tanto de la solución.

Con los ejes colocados en dicha posición, si la carga es simétrica se cumplirá que $p(x, y) = p(-x, y)$, es decir, que se trata de una función par en x . Si las condiciones de contorno son también simétricas, entonces la flecha $w(x, y)$ ha de ser también simétrica y por tanto par respecto a x . Si esto es así, entonces los coeficientes de la serie $w_n(x)$ han de cumplir $w_n(x) = w_n(-x)$. Eligiendo una solución particular que sea par, también ha de serlo la solución de la homogénea y por tanto podemos eliminar los términos $\sinh(\lambda_n x)$ y $\lambda_n x \cosh(\lambda_n x)$ puesto que son impares, de modo que los coeficientes quedarán de la forma,

$$w_n(x) = w_n^p(x) + B_n \lambda_n x \sinh(\lambda_n x) + C_n \cosh(\lambda_n x)$$

Para determinar B_n y C_n basta imponer las condiciones de contorno en $x = \frac{a}{2}$, ya que, por simetría, se cumplirán automáticamente las impuestas en $x = -\frac{a}{2}$.

Problema con antimetría

Si la carga es antisimétrica respecto al eje central perpendicular a los bordes apoyados, colocando el origen de coordenadas en el centro de uno de ellos, la carga $p(x, y)$ será impar respecto a la variable x , es decir $p(x, y) = -p(-x, y)$. De nuevo, si las condiciones de contorno son iguales en los bordes paralelos al eje y entonces la flecha será antisimétrica y por lo tanto impar en la variable x . En este caso, tomando una solución particular impar, desaparecen en la solución de la homogénea los términos $\lambda_n x \sinh(\lambda_n x)$ y $\cosh(\lambda_n x)$, puesto que son pares, de modo que los coeficientes de la serie quedarán de la forma,

$$w_n(x) = w_n^p(x) + A_n \sinh(\lambda_n x) + D_n \lambda_n x \cosh(\lambda_n x)$$

De forma análoga, A_n y D_n se obtendrán imponiendo las condiciones de contorno en $x = \frac{a}{2}$.

Problema general

Un problema con carga cualquiera, pero en el que los bordes paralelos al eje y sean iguales, es posible, y conveniente, descomponerlo en suma de un problema simétrico y otro antisimétrico. Colocando el eje y en el centro de la placa, la carga se descompondrá en sus componentes simétrica y antisimétrica,

$$p(x, y) = p^S(x, y) + p^A(x, y)$$

siendo,

$$p^S(x, y) = \frac{1}{2} \{p(x, y) + p(-x, y)\}; \quad p^A(x, y) = \frac{1}{2} \{p(x, y) - p(-x, y)\}$$

Capítulo 4

Formulario y ejercicios de placas rectangulares mediante métodos armónicos

Índice

4.1. Introducción	69
4.2. Placas delgadas.- Resumen de la formulación	70
4.3. Método de Navier	71
4.3.1. Carga uniforme	72
4.3.2. Carga puntual	73
4.3.3. Carga distribuida en una línea $y = \eta_0$.	73
4.3.4. Carga distribuida en una línea $x = \xi_0$.	74
4.3.5. Carga distribuida en una línea $y = f(x)$.	74
4.3.6. Momento puntual M_x	75
4.3.7. Momento puntual M_y	75
4.3.8. Momento puntual en una dirección cualquiera M	75
4.3.9. Momento distribuido $m_y(x)$ en una línea $y = \eta_0$	76
4.3.10. Momento distribuido $m_x(x)$ en una línea $y = \eta_0$	76
4.3.11. Superficie de carga lineal	77
4.3.12. Carga constante en media placa	77
4.4. Método de Levy	78
4.4.1. Soluciones particulares para casos simples de carga	79
4.4.2. Función de carga con coeficientes constantes	80
4.4.3. Placa rectangular tetrapoyada sometida a carga uniforme	81
4.4.4. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos M_x <i>simétricos</i> en dos bordes paralelos	82
4.4.5. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos $M_x(y)$ <i>antimétricos</i> en dos bordes paralelos	84
4.4.6. Placa rectangular tetrapoyada sometida a una ley de carga lineal	85

4.1. Introducción

En este formulario se muestra el resultado de la flecha para algunos problemas básicos de placas resueltos mediante los métodos armónicos expuestos en el desarrollo de la asignatura. Se añaden también las fórmulas principales para el cálculo de magnitudes derivadas de la flecha, tales como los giros y esfuerzos.

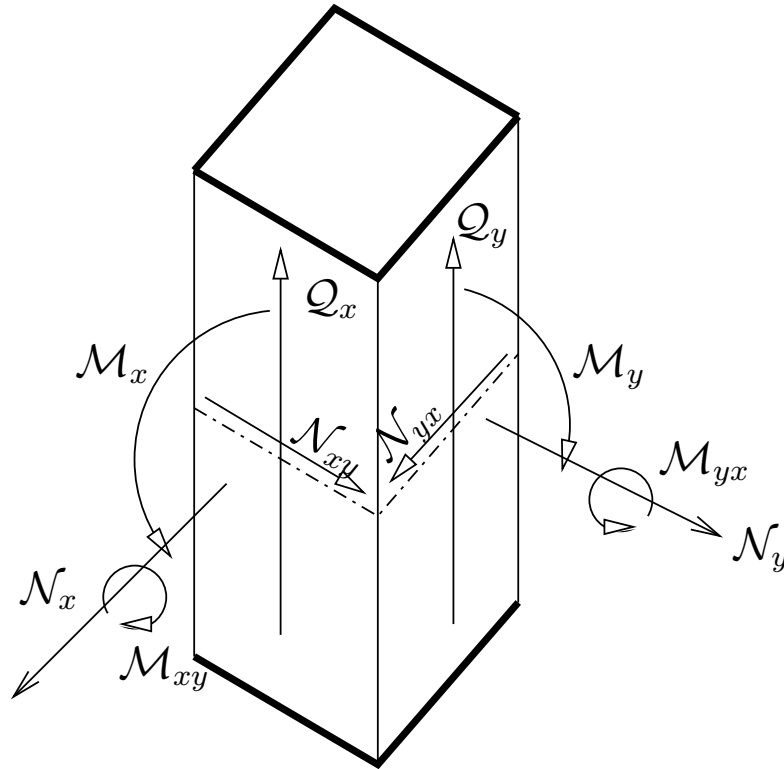


Figura 4.1: Esfuerzos sobre las caras x e y frontales

4.2. Placas delgadas.- Resumen de la formulación

Ecuación de gobierno:

$$w_{,xxxx} + 2 \cdot w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{p(x, y)}{D}$$

donde $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$.

A partir del campo de desplazamientos verticales, $w(x, y)$, se obtienen:

- Giros:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y} \quad (4.1)$$

- Momentos unitarios:

$$M_x = -D [w_{,xx} + \nu w_{,yy}] \quad (4.2)$$

$$M_y = -D [w_{,yy} + \nu w_{,xx}] \quad (4.3)$$

$$M_{xy} = -2 G I w_{,xy} = -D (1 - \nu) w_{,xy} \quad (4.4)$$

siendo $G = E/2(1 + \nu)$ e $I = h^3/12$.

- Cortantes unitarios:

$$Q_x = -D [w_{,xxx} + w_{,xyy}] \quad (4.5)$$

$$Q_y = -D [w_{,yyy} + w_{,yxx}] \quad (4.6)$$

- Cortante generalizado en bordes:

$$V_x = -D [w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy}] \quad (4.7)$$

$$V_y = -D [w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,yxx}] \quad (4.8)$$

4.3. Formulario para el método de Navier

Mediante el método de Navier se obtiene la flecha en forma de serie doble,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

siendo,

$$w_{nm} = \frac{P_{nm}}{\pi^4 D F_{nm}} \quad (4.9)$$

donde,

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy$$

El término general de la flecha se obtiene mediante la ecuación 4.9 a partir del correspondiente término de la carga p_{nm} . A partir de la flecha, mediante derivación, pueden obtenerse los giros y esfuerzos también en forma de serie doble de senos y/o cosenos. Así,

$$\theta_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_x^{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_y^{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{M}_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{M}_x^{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{M}_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{M}_y^{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{M}_{xy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{M}_{xy}^{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{Q}_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_x^{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{Q}_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_y^{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{V}_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_x^{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\mathcal{V}_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_y^{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Así, los giros se obtienen directamente mediante derivación de acuerdo con 4.1, de modo que se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_x^{nm} &= w_{nm} \frac{n\pi}{a} \\ \theta_y^{nm} &= w_{nm} \frac{m\pi}{b} \end{aligned}$$

Los momentos se calculan a partir de la flecha con las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4 y por tanto los términos generales serán,

$$\mathcal{M}_x^{nm} = D w_{nm} \left\{ \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right\}$$

$$\mathcal{M}_y^{nm} = D w_{nm} \left\{ \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \nu \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right\}$$

$$\mathcal{M}_{xy}^{nm} = -D(1 - \nu) w_{nm} \frac{n\pi}{a} \frac{m\pi}{b}$$

Los cortantes se obtienen por derivación mediante 4.5 y 4.6. El término general que se obtiene es,

$$Q_x^{nm} = Dw_{nm} \frac{n\pi}{a} \left\{ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right\}$$

$$Q_y^{nm} = Dw_{nm} \frac{m\pi}{b} \left\{ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right\}$$

Finalmente, para los cortantes totales, que se obtienen con las ecuaciones 4.7 y 4.8, el término general será,

$$V_x^{nm} = Dw_{nm} \frac{n\pi}{a} \left\{ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + (2 - \nu) \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right\}$$

$$V_y^{nm} = Dw_{nm} \frac{m\pi}{b} \left\{ \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + (2 - \nu) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right\}$$

Para las fórmulas que se exponen a continuación, recuérdese la siguiente notación abreviada,

$$F_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2$$

y

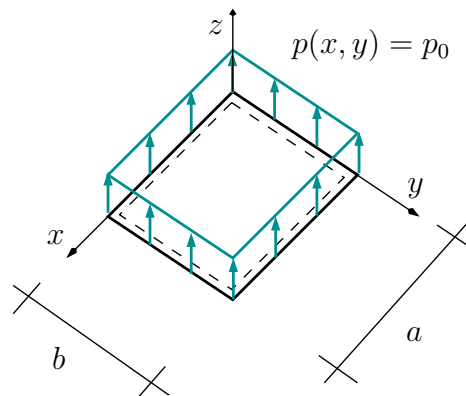
$$s_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right); \quad s_m(y) = \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

$$c_n(x) = \text{cos} \left(\frac{n\pi x}{a} \right); \quad c_m(y) = \text{cos} \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

4.3.1. Carga uniforme

Para una placa rectangular tetrapoyada bajo carga constante $p(x, y) = p_0$ el término general de la expansión doble de senos de la flecha es,

$$w_{nm} = \begin{cases} \frac{16p_0}{nm\pi^6 DF_{nm}} & \text{Si ambos } n \text{ y } m \text{ son impares} \\ 0 & \text{Si } n \text{ o } m \text{ es par} \end{cases}$$



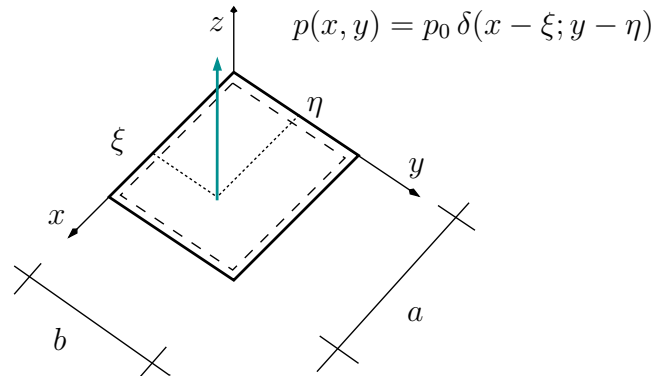
y por tanto

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16p_0}{nm\pi^6 DF_{nm}} s_n(x) s_m(y)$$

4.3.2. Carga puntual

Para una carga puntual de valor P aplicada en el punto (ξ, η) , el término general de la flecha es,

$$w_{nm} = \frac{4Ps_n(\xi)s_m(\eta)}{ab\pi^4 DF_{nm}}$$



4.3.3. Carga distribuida en una línea $y = \eta_0$.

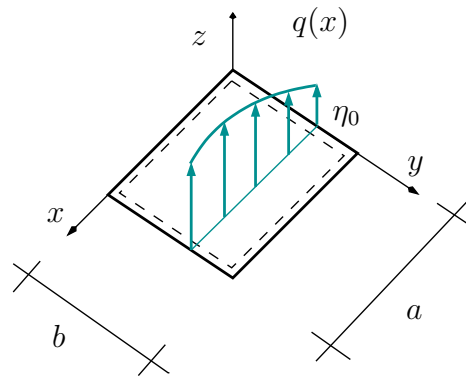
Para una carga distribuida sobre la línea $y = \eta_0$ de valor $q(x)$ la flecha que se obtiene es,

$$w_{nm} = \frac{2q_n s_m(\eta_0)}{b\pi^4 DF_{nm}}$$

siendo,

$$q_n = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) s_n(x) dx$$

Recuérdese con esta definición de q_n , $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n s_n(x)$.



Para carga distribuida constante $q(x) = q_0$

$$q_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ \frac{4q_0}{n\pi} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y por tanto,

$$w_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8q_0 s_m(\eta_0)}{n\pi^5 b DF_{nm}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

de modo que,

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8q_0 s_m(\eta_0)}{n\pi^5 b DF_{nm}} s_n(x) s_m(y)$$

4.3.4. Carga distribuida en una línea $x = \xi_0$.

Si la carga $q(y)$ está distribuida en la línea $x = \xi_0$ entonces,

$$w_{nm} = \frac{2q_m s_n(\xi_0)}{a\pi^4 DF_{nm}}$$

siendo ahora,

$$q_m = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) s_m(y) dy$$

y en este caso $q(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m s_m(y)$.

Para carga distribuida constante $q(y) = q_0$ la flecha es,

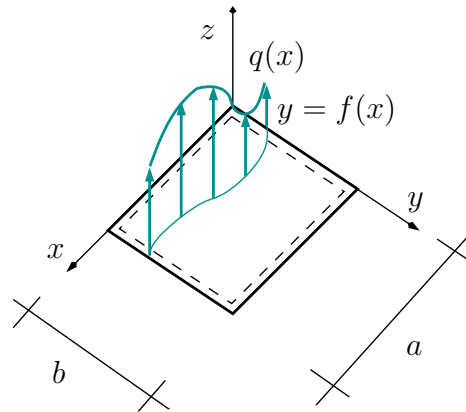
$$w_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{Si } m \text{ es par} \\ \frac{8q_0 s_n(\xi_0)}{m\pi^5 a DF_{nm}} & \text{Si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

y por tanto,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8q_0 s_n(\xi_0)}{m\pi^5 a DF_{nm}} s_n(x) s_m(y)$$

4.3.5. Carga distribuida en una línea $y = f(x)$.

Consideremos ahora un caso más general de una carga lineal distribuida según la función $q(x)$ en una línea definida en el plano xy según la función $y = f(x)$.



La definición de la carga será,

$$p(x, y) = q(x) \delta(y - f(x))$$

de modo que los coeficientes de la expansión de la carga serán

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a q(x) s_n(x) s_m(f(x)) dx$$

y por tanto,

$$w_{nm} = \frac{p_{nm}}{\pi^4 DF_{nm}}$$

Para el caso particular en que la carga sea constante $q(x) = q_0$, y esté aplicada en la diagonal de la placa, es decir, $f(x) = \frac{b}{a}x$,

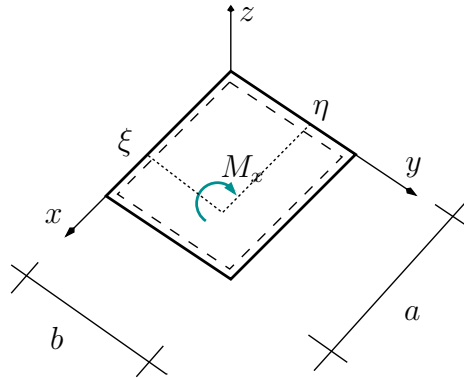
$$p_{nm} = \frac{2q_0}{b} \delta_{nm}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker y por tanto,

$$w_{nm} = \frac{2q_0 \delta_{nm}}{b\pi^4 DF_{nm}}$$

4.3.6. Momento puntual M_x

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$. La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es h . Los parámetros del material son E y ν . En el punto de coordenadas (ξ, η) actúa un momento M_x .

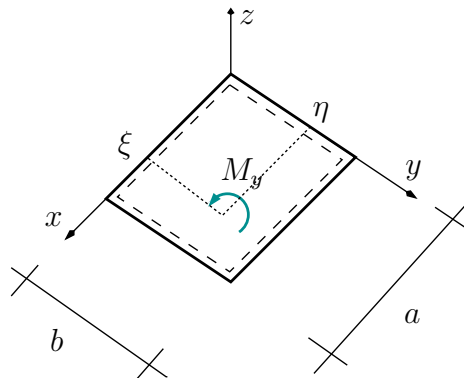


En este caso,

$$w_{nm} = \frac{4nM_x c_n(\xi) s_m(\eta)}{\pi^3 a^2 b D F_{nm}}$$

4.3.7. Momento puntual M_y

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$. La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es h . Los parámetros del material son E y ν . En el punto de coordenadas (ξ, η) actúa un momento M_y .

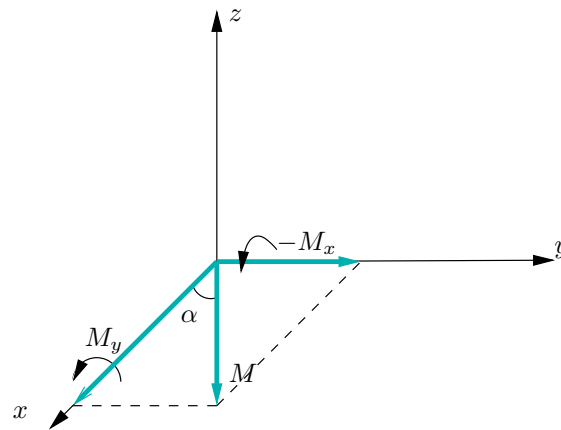


En este caso,

$$w_{nm} = \frac{4mM_y s_n(\xi) c_m(\eta)}{\pi^3 a b^2 D F_{nm}}$$

4.3.8. Momento puntual en una dirección cualquiera M

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$. La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es h . Los parámetros del material son E y ν . En el punto de coordenadas (ξ, η) actúa un momento M alrededor de una dirección que forma un ángulo α con el eje x .

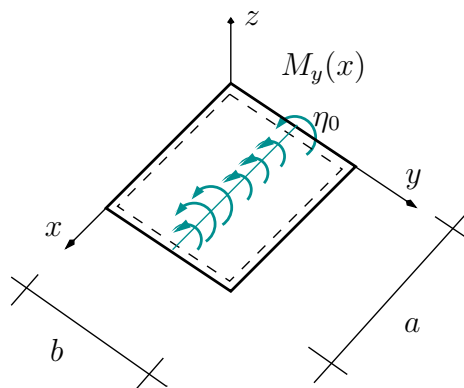


En este caso,

$$w(x, y) = M \cos \alpha w^{M_y}(x, y) - M \sin \alpha w^{M_x}(x, y)$$

4.3.9. Momento distribuido $m_y(x)$ en una línea $y = \eta_0$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$. La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es h . Los parámetros del material son E y ν . En la línea $y = \eta_0$ se aplica un momento $m_y(x)$ distribuido que podrá expresarse mediante la serie $m_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n s_n(x)$, y por tanto, $m_n = \frac{2}{a} \int_0^a m_y(x) s_n(x) dx$.

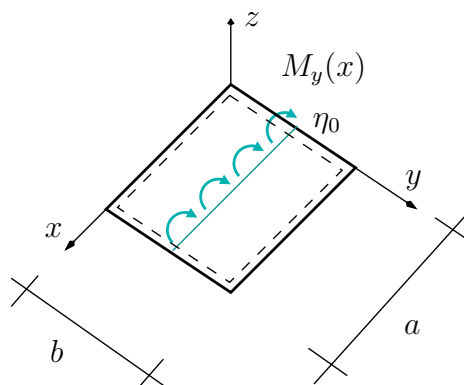


El término general es en este caso:

$$w_{nm} = \frac{2mm_n c_m(\eta_0)}{b^2 \pi^3 D F_{nm}}$$

4.3.10. Momento distribuido $m_x(x)$ en una línea $y = \eta_0$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$. La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es h . Los parámetros del material son E y ν . En la línea $y = \eta_0$ se aplica un momento $m_x(x)$ distribuido.



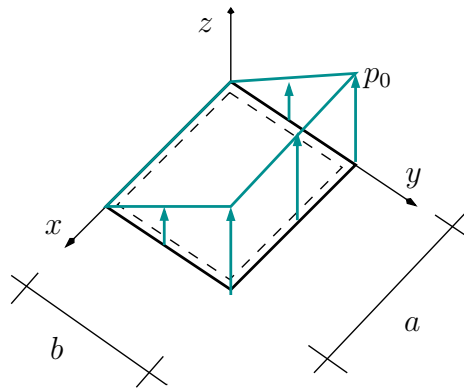
El término general es en este caso:

$$w_{nm} = \frac{2mm_n s_m(\eta_0)}{ab\pi^3 DF_{nm}}$$

siendo $m_n = \frac{2}{a} \int_0^a m_x(\xi) c_m(\xi) d\xi$

4.3.11. Superficie de carga lineal

Para una carga de la forma $p(x, y) = \frac{p_0}{b}y$, triangular en y , se obtiene,



$$w_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{8p_0(-1)^m}{nm\pi^6 DF_{nm}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

de modo que,

$$w(x, y) = -\frac{8p_0}{\pi^6 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{nmF_{nm}} s_n(x)s_m(y)$$

De igual forma para una carga triangular en x , $p(x, y) = \frac{p_0}{a}x$,

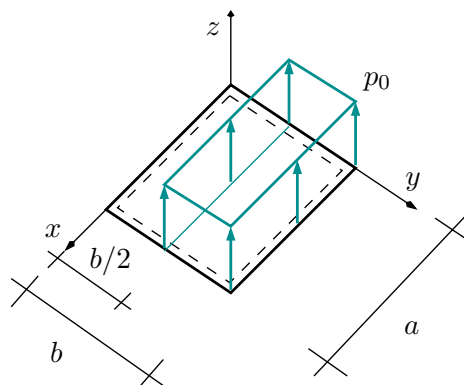
$$w_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{Si } m \text{ es par} \\ -\frac{8p_0(-1)^n}{nm\pi^6 DF_{nm}} & \text{Si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

y por tanto,

$$w(x, y) = -\frac{8p_0}{\pi^6 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nmF_{nm}} s_n(x)s_m(y)$$

4.3.12. Carga constante en media placa

La carga es constante $p(x, y) = p_0$, para $x \in [0, a]$ e $y \in [b/2, b]$.



Operando se obtiene,

$$w_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ par} \\ \frac{8p_0}{\pi^6 D_{nm} F_{nm}} & \text{Si ambos } n \text{ y } m \text{ son impares} \\ \frac{8p_0 [1 - (-1)^{m/2}]}{\pi^6 D_{nm} F_{nm}} & \text{Si } n \text{ es impar y } m \text{ par} \end{cases}$$

4.4. Formulario para el método de Levy

Como ya hemos visto, el método de Levy es aplicable para casos más generales que el de Navier, ya que es aplicable a placas rectangulares donde sólo dos de sus bordes, paralelos, estén apoyados, pudiendo ser las condiciones de apoyo en los otros bordes cualesquiera. A cambio, es más complicado encontrar soluciones por lo que, como norma general, aplicaremos el método de Navier si es factible.

Mediante el método de Levy, suponiendo que el eje x está sobre uno de los bordes apoyados la flecha tiene la forma,

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \text{sen}(\lambda_n y)$$

siendo, $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$. El término general de la serie se obtiene con el procedimiento expuesto en la sección 3.4.

Igual que en el caso del método de Navier, a partir de la expresión de la flecha es posible obtener la otras magnitudes de interés derivando la fórmula anterior. Ahora tendremos,

$$\begin{aligned} \theta_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_x^n \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \theta_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_y^n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{M}_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_x^n \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{M}_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_y^n \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{M}_{xy}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{xy}^n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{Q}_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_x^n \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{Q}_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_y^n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{V}_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_x^n \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \mathcal{V}_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_y^n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned}$$

siendo ahora los términos generales de estas magnitudes,

$$\begin{aligned}
\theta_x^n &= w_n'(x) \\
\theta_y^n &= \lambda_n w_n(x) \\
\mathcal{M}_x^n &= -D [w_n''(x) - \nu \lambda_n^2 w_n(x)] \\
\mathcal{M}_y^n &= -D [-\lambda_n^2 w_n(x) + \nu w_n''(x)] \\
\mathcal{M}_{xy}^n &= -D(1 - \nu) \lambda_n w_n'(x) \\
\mathcal{Q}_x^n &= -D [w_n'''(x) - \lambda_n^2 w_n'(x)] \\
\mathcal{Q}_y^n &= D \lambda_n [\lambda_n^2 w_n(x) - w_n''(x)] \\
\mathcal{V}_x^n &= -D [w_n'''(x) - (2 - \nu) \lambda_n^2 w_n'(x)] \\
\mathcal{V}_y^n &= D \lambda_n [\lambda_n^2 w_n(x) - (2 - \nu) w_n''(x)]
\end{aligned}$$

Es muy útil, a fin de aplicar las condiciones de contorno, disponer de estos términos en función de las constantes A_n , B_n , C_n y D_n de las que depende la expresión general de la flecha, dada por,

$$w_n(x) = w_n^p(x) + (A_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)$$

Sustituyendo esta expresión en las anteriores, se obtendría una componente derivada de la solución particular y otra de la general de la homogénea. La primera dependerá de la carga concreta del problema de que se trate, mientras que la segunda puede calcularse para aplicarla a todos los problemas, obteniéndose,

$$\begin{aligned}
\theta_x^{hn} &= \lambda_n [(B_n + C_n + D_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (A_n + D_n + B_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)] \\
\theta_y^{hn} &= \lambda_n [(A_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{M}_x^{hn} &= -D \lambda_n^2 [(1 - \nu) A_n + 2D_n + (1 - \nu) B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + \\
&\quad (2B_n + (1 - \nu) C_n + (1 - \nu) D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{M}_y^{hn} &= -D \lambda_n^2 [(-A_n(1 - \nu) + 2D_n \nu - (1 - \nu) B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + \\
&\quad (2B_n \nu - C_n(1 - \nu) - (1 - \nu) D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{M}_{xy}^{hn} &= -D(1 - \nu) \lambda_n^2 [(B_n + C_n + D_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + \\
&\quad (A_n + D_n + B_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{Q}_x^{hn} &= -D \lambda_n^3 [2B_n \sinh(\lambda_n x) + 2D_n \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{Q}_y^{hn} &= -D \lambda_n^3 [2D_n \sinh(\lambda_n x) + 2B_n \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{V}_x^{hn} &= -D \lambda_n^3 [(B_n(1 + \nu) - (1 - \nu) C_n - (1 - \nu) D_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + \\
&\quad (-A_n(1 - \nu) + D_n(1 + \nu) - B_n \lambda_n x(1 - \nu)) \cosh(\lambda_n x)] \\
\mathcal{V}_y^{hn} &= -D \lambda_n^3 [(1 - \nu) A_n + 2(2 - \nu) D_n + (1 - \nu) B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + \\
&\quad (2(2 - \nu) B_n + (1 - \nu) C_n + (1 - \nu) D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)]
\end{aligned}$$

También es útil la expresión de la derivada segunda $w_n^{hII}(x)$ para aplicar directamente algunas condiciones de contorno, como se verá más adelante,

$$w_n^{hII}(x) = \lambda_n^2 [(A_n + 2D_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (2B_n + C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)]$$

4.4.1. Soluciones particulares para casos simples de carga

La solución particular depende de como sean los términos generales del desarrollo en serie de la carga, $p_n(x)$. Se muestran a continuación las soluciones particulares para algunos casos

simples.

$$\begin{aligned}
 p_n(x) = 1 &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{1}{D\lambda_n^4} \\
 p_n(x) = x &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{1}{D\lambda_n^4}x \\
 p_n(x) = x^2 &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{1}{D\lambda_n^6} (4 + \lambda_n^2 x^2) \\
 p_n(x) = x^3 &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{1}{D\lambda_n^6} (12x + \lambda_n^2 x^3) \\
 p_n(x) = x^4 &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{1}{D\lambda_n^8} (72 + 24\lambda_n^2 x^2 + \lambda_n^4 x^4) \\
 p_n(x) = \text{sen}(kx) &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{\text{sen}(kx)}{D(k^2 + \lambda_n^2)^2} \\
 p_n(x) = \text{cos}(kx) &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{\text{cos}(kx)}{D(k^2 + \lambda_n^2)^2} \\
 p_n(x) = e^{kx} &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{e^{kx}}{D(k^2 - \lambda_n^2)^2} \\
 p_n(x) = \text{senh}(kx) &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{\text{senh}(kx)}{D(k^2 - \lambda_n^2)^2} \\
 p_n(x) = \text{cosh}(kx) &\longrightarrow w_n^p(x) = \frac{\text{cosh}(kx)}{D(k^2 - \lambda_n^2)^2}
 \end{aligned}$$

Nótese que si $p(x, y) = f(x)g(y)$ entonces,

$$p_n(x) = g_n f(x)$$

siendo,

$$g_n = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

4.4.2. Función de carga con coeficientes constantes

Un caso particular que vamos a desarrollar en más detalle es aquel en que la carga es constante en x , es decir, solo depende de la variable y . Entonces el término general de su desarrollo en senos es constante, es decir, $p_n(x) = p_n$, de modo que

$$p(x, y) = p(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{sen}(\lambda_n y)$$

siendo,

$$p_n(x) = p_n = \frac{2}{b} \int_0^b p(y) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Para este caso de carga la solución particular es la constante $w_n^p(x) = \frac{p_n}{D\lambda_n^4}$.

La solución completa de la ecuación será,

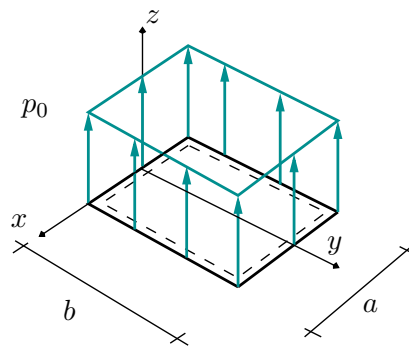
$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p_n}{D\lambda_n^4} + (A_n + B_n \lambda_n x) \text{senh}(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \text{cosh}(\lambda_n x) \right] \text{sen}(\lambda_n y)$$

Los giros y esfuerzos correspondientes a esta solución particular son:

$$\begin{aligned}\theta_x^{pn} &= 0; & \theta_y^{pn} &= \frac{p_n}{D\lambda_n^3} \\ \mathcal{M}_x^{pn} &= \nu \frac{p_n}{\lambda_n^2}; & \mathcal{M}_y^{pn} &= \frac{p_n}{\lambda_n^2}; & \mathcal{M}_{xy}^{pn} &= 0 \\ \mathcal{Q}_x^{pn} &= 0; & \mathcal{Q}_y^{pn} &= \frac{p_n}{\lambda_n} \\ \mathcal{V}_x^{pn} &= 0; & \mathcal{V}_y^{pn} &= \frac{p_n}{\lambda_n}\end{aligned}$$

4.4.3. Placa rectangular tetrapoyada sometida a carga uniforme

Se considera una placa rectangular, de dimensiones $a \times b$, simplemente apoyada en sus cuatro bordes y sometida a una carga uniforme de valor p_0 .



El desarrollo de la carga es,

$$p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b p_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

que operando conduce a,

$$p_n(x) = p_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ \frac{4p_0}{b\lambda_n} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Puesto que el término de la carga es nulo para n par, y puesto que no existen cargas en los apoyos, los términos pares de la flecha también son nulos, de modo que solo es necesario calcular los términos impares.

Si considera la referencia $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ mostrada en la figura entonces la flecha es par en x y por lo tanto su término general será de la forma,

$$w_n(x) = \frac{4p_0}{Db\lambda_n^5} + B_n\lambda_n x \operatorname{senh}(\lambda_n x) + C_n \operatorname{cosh}(\lambda_n x)$$

Las condiciones de contorno en los bordes $x = \pm \frac{a}{2}$ son las de apoyo simple, es decir,

$$w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0; \quad \mathcal{M}_x\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0$$

que puesto que el borde es recto se reducen a,

$$w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0; \quad w_{,xx}\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de la flecha y de su derivada segunda, estas condiciones sobre la flecha implican las siguientes condiciones sobre su término general,

$$w_n\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0; \quad w_n''\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$$

Sustituyendo aquí el valor de $w_n(x)$ se obtiene, tras algunas simplificaciones,

$$\begin{aligned}\frac{4p_0}{Db\lambda_n^5} + B_n\alpha_n \sinh(\alpha_n) + C_n \cosh(\alpha_n) &= 0 \\ B_n\alpha_n \sinh(\alpha_n) + (2B_n + C_n) \cosh(\alpha_n) &= 0\end{aligned}$$

siendo $\alpha_n = \frac{n\pi a}{b}$. Esta condición solo es necesario aplicarla en uno de los bordes, ya que se obtienen las mismas ecuaciones en ambos. Restando estas ecuaciones se elimina la incógnita C_n ,

$$\frac{4p_0}{Db\lambda_n^5} - 2B_n \cosh(\alpha_n) = 0$$

de donde se obtiene,

$$B_n = \frac{2p_0}{Db\lambda_n^5 \cosh(\alpha_n)}$$

A partir de este valor, de la primera ecuación se obtiene,

$$C_n = -\frac{2p_0}{Db\lambda_n^5 \cosh(\alpha_n)} (2 + \alpha_n \tanh(\alpha_n))$$

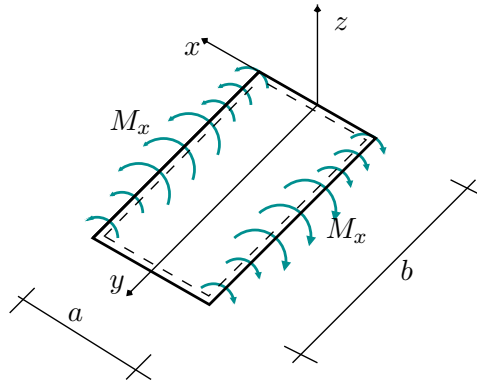
y por tanto el término general de la flecha es, para n impar,

$$w_n(x) = \frac{2p_0}{bD\lambda_n^5 \cosh(\alpha_n)} [2 \cosh(\alpha_n) + \lambda_n x \sinh(\lambda_n x) - (2 + \alpha_n \tanh(\alpha_n)) \cosh(\lambda_n x)]$$

y $w_n(x) = 0$ para n par, siendo $\alpha_n = \frac{n\pi a}{b}$

4.4.4. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos M_x simétricos en dos bordes paralelos

La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes, pero en dos bordes paralelos actúa una distribución de momentos simétrica, $M_x(y)$.



Se considera la referencia $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ mostrada en la figura de modo que la solución será par, ya que los momentos son iguales y de sentido contrario, tal y como se muestra en la figura: $M_x(y, b/2) = M_x(y, -b/2)$. Obsérvese que los momentos son positivos considerando su signo como momentos flectores \mathcal{M}_x .

Desarrollando el momento en serie como:

$$M_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin(\lambda_n y)$$

siendo $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$, los coeficientes M_n se obtienen integrando:

$$M_n = \frac{2}{b} \int_0^b M_x(y) \sin(\lambda_n y) dy$$

En este problema no hay cargas $p(x, y)$ aplicadas, de modo que $p_n(x) = 0$ y por tanto $w_n''(x) = 0$, y teniendo en cuenta la simetría,

$$w_n(x) = B_n \lambda_n x \sinh(\lambda_n x) + C_n \cosh(\lambda_n x)$$

Para este problema las condiciones de contorno en $x = \pm \frac{a}{2}$ son,

$$w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0; \quad \mathcal{M}_x\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = M_x(y)$$

Veamos la última de estas ecuaciones. Sustituyendo las expresiones de \mathcal{M}_x y $M_x(y)$ en términos de series de senos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_x^n\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad \forall y \in [0, b]$$

de donde se deduce que ha de cumplirse la igualdad término a término,

$$\mathcal{M}_x^n\left(\frac{a}{2}\right) = M_n$$

y por tanto,

$$w_n''\left(\frac{a}{2}\right) - \nu \lambda_n^2 w_n\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{M_n}{D}$$

Teniendo en cuenta que la primera ecuación de contorno se reduce a $w_n\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, la ecuación de momentos queda,

$$w_n''\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{M_n}{D}$$

Solo es necesario aplicar la condición en uno de los bordes, ya que al imponer que la función sea par, la condición de contorno en el otro borde se cumple automáticamente.

Utilizando las expresiones de la flecha y su segunda derivada se llega a las siguientes ecuaciones para las constantes B_n y C_n ,

$$\begin{aligned} C_n \cosh(\alpha_n) + \alpha_n B_n \sinh(\alpha_n) &= 0 \\ (2B_n + C_n) \cosh(\alpha_n) + \alpha_n B_n \sinh(\alpha_n) &= -\frac{M_n}{D\lambda_n^2} \end{aligned}$$

Restando a la segunda la primera se llega a,

$$2B_n \cosh(\alpha_n) = -\frac{M_n}{D\lambda_n^2}$$

y por tanto,

$$B_n = -\frac{M_n}{2D\lambda_n^2 \cosh(\alpha_n)}$$

y sustituyendo en la primera ecuación,

$$C_n = \frac{M_n \alpha_n \tanh(\alpha_n)}{2D\lambda_n^2 \cosh(\alpha_n)}$$

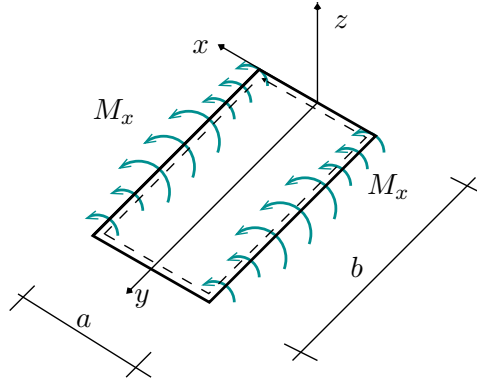
y en conclusión,

$$w_n(x) = \frac{M_n}{2\lambda_n D \cosh(\alpha_n)} \left[\frac{a}{2} \tanh(\alpha_n) \cosh(\lambda_n x) - x \sinh(\lambda_n x) \right]$$

siendo $\alpha_n = \frac{n\pi a}{b}$

4.4.5. Placa rectangular tetrapoyada sometida a momentos distribuidos $M_x(y)$ *antimétricos* en dos bordes paralelos

En este caso en dos bordes paralelos actúa una distribución de momentos antisimétrica, $M_x(y)$.



Se considera la referencia $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ mostrada en la figura. Los momentos aplicados en los bordes son antimétricos, de modo que con la referencia escogida la flecha será impar en x . Obsérvese que el momento aplicado en el borde $x = \frac{a}{2}$ es un flector M_x positivo, y negativo en el borde $x = -\frac{a}{2}$.

Desarrollando de nuevo en serie el momento:

$$M_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

siendo $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$, los coeficientes M_n se obtienen integrando:

$$M_n = \frac{2}{b} \int_0^b M_x(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Las condiciones de contorno en el borde $x = \frac{a}{2}$, igual que en el caso anterior, se reducen a,

$$\begin{aligned} w_n\left(\frac{a}{2}\right) &= 0 \\ w_n''\left(\frac{a}{2}\right) &= -\frac{M_n}{D} \end{aligned}$$

pero ahora la flecha es,

$$w_n(x) = A_n \operatorname{senh}(\lambda_n x) + D_n \lambda_n x \operatorname{cosh}(\lambda_n x)$$

puesto que los términos pares desaparecen. Las ecuaciones que han de cumplir entonces las constantes A_n y D_n son,

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{senh}(\alpha_n) + \alpha_n D_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) &= 0 \\ \alpha_n D_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) + (A_n + 2D_n) \operatorname{senh}(\alpha_n) &= -\frac{M_n}{D\lambda_n^2} \end{aligned}$$

cuya solución es,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_n M_n \operatorname{coth}(\alpha_n)}{2D\lambda_n^2 \operatorname{senh}(\alpha_n)} \\ D_n &= -\frac{M_n}{2D\lambda_n^2 \operatorname{senh}(\alpha_n)} \end{aligned}$$

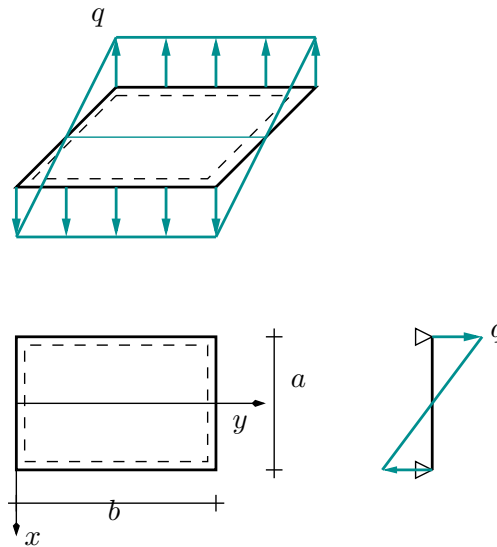
y finalmente el coeficiente general de la flecha que se obtiene en este caso es,

$$w_n(x) = \frac{M_n}{2D\lambda_n \operatorname{senh}(\alpha_n)} \left[\frac{a}{2} \operatorname{coth}(\alpha_n) \operatorname{senh}(\lambda_n x) - x \operatorname{cosh}(\lambda_n x) \right]$$

con $\alpha_n = \frac{n\pi}{b} \frac{a}{2}$.

4.4.6. Placa rectangular tetrapoyada sometida a una ley de carga lineal

Se aplica una carga distribuida lineal en la variable x , de valor máximo q , tal y como se muestra en la figura.



Para la carga la expresión es,

$$p(x, y) = \frac{2qx}{a}$$

de modo que su término general del desarrollo en serie es,

$$p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{2qx}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

que operando da,

$$p_n(x) = \frac{8qx}{ab\lambda_n^5}$$

para n impar, y $p_n(x) = 0$ para n par. De nuevo, puesto que los términos pares de la carga son nulos, también lo serán los de la flecha.

Para la carga lineal una solución particular será también lineal $w_n^p(x) = \frac{8qx}{Dab\lambda_n^5}$. Puesto que la carga es antisimétrica la solución buscada será de la forma,

$$w_n(x) = \frac{8qx}{Dab\lambda_n^5} + A_n \operatorname{senh}(\lambda_n x) + D_n \lambda_n x \operatorname{cosh}(\lambda_n x)$$

Las condiciones de contorno en los bordes son,

$$w\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = 0; \quad \mathcal{M}_x\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = 0$$

que se reducen a,

$$w_n\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0; \quad w_n''\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0$$

y que en términos de las constantes quedan,

$$\begin{aligned} \frac{4q}{Db\lambda_n^5} + A_n \operatorname{senh}(\alpha_n) + D_n \alpha_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) &= 0 \\ (A_n + 2D_n) \operatorname{senh}(\alpha_n) + D_n \alpha_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) &= 0 \end{aligned}$$

y reordenando y agrupando términos,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(\alpha_n) A_n + \alpha_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) D_n &= -\frac{4q}{Db\lambda_n^5} + \\ \operatorname{senh}(\alpha_n) A_n + (\alpha_n \operatorname{cosh}(\alpha_n) + 2 \operatorname{senh}(\alpha_n)) D_n &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene fácilmente restando ambas ecuaciones,

$$A_n = -\frac{2q}{bD\lambda_n^5 \sinh(\alpha_n)} [2 + \alpha_n \coth(\alpha_n)]$$

$$D_n = \frac{2q}{bD\lambda_n^5 \sinh(\alpha_n)}$$

y se obtiene para la flecha,

$$w_n(x) = \frac{2q}{bD\lambda_n^5 \sinh(\alpha_n)} \left[\frac{4}{a} \sinh(\alpha_n)x - [2 + \alpha_n \coth(\alpha_n)] \sinh(\lambda_n x) + \lambda_n x \cosh(\lambda_n x) \right]$$

para n impar, y $w_n(x) = 0$ para n par, de modo que,

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2q}{bD\lambda_n^5 \sinh(\alpha_n)} \left[\frac{4}{a} \sinh(\alpha_n)x - [2 + \alpha_n \coth(\alpha_n)] \sinh(\lambda_n x) + \lambda_n x \cosh(\lambda_n x) \right] \sin(\lambda_n y)$$

siendo $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ y $\alpha_n = \frac{n\pi}{b} \frac{a}{2}$.

Capítulo 5

Placas Circulares

Índice

5.1. Introducción	87
5.2. Ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares	88
5.3. Relación esfuerzos-movimientos	90
5.4. Ecuación de la deformada	93
5.5. Condiciones de Contorno	93
5.6. Placas circulares con flexión axisimétrica	94
5.7. Placas circulares bajo carga no axisimétrica	96

5.1. Introducción

En ingeniería existen muchas situaciones que corresponden al comportamiento tipo placa en elementos de geometría circular (fondos de depósitos, tapaderas, diafragmas de bombas, discos de turbinas, compuertas de submarinos y aviones, etc.).

Es conveniente realizar el estudio de placas circulares en coordenadas polares. Este estudio se reduce a transformar el problema de coordenadas cartesianas a polares, cuyas relaciones básicas se expresan a continuación

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

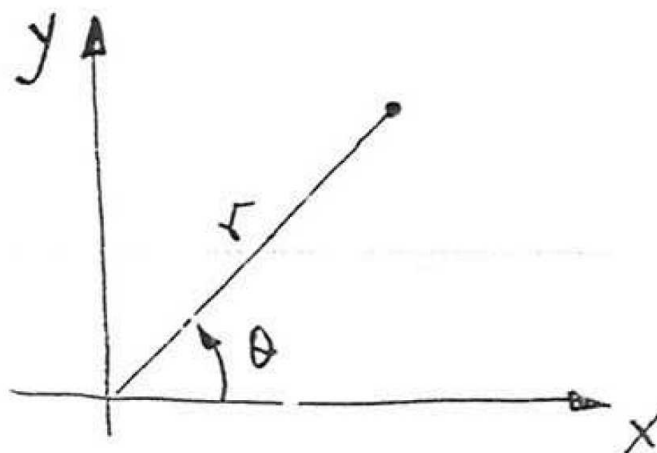


Figura 5.1: Coordenadas Polares

En referencia a las ecuaciones anteriores, se obtienen las expresiones derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}$$

Estas expresiones permiten obtener las derivadas de la flecha.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta\end{aligned}$$

Dichas derivadas al sustituirlas en la ecuación homogénea obtenida en coordenadas cartesianas permiten obtener la ecuación diferencial en coordenadas polares. A continuación, para una mayor comprensión se van a desarrollar todas las ecuaciones siguiendo la metodología que se realizó anteriormente para placas en coordenadas cartesianas.

5.2. Ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares

Las placas circulares siguen las hipótesis de Kirchhoff para estudiar su comportamiento (Sección 1.2). Se definen los esfuerzos a partir de las tensiones:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_r dz \\ \mathcal{M}_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_\theta dz \\ \mathcal{M}_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{r\theta} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\theta r} dz = \mathcal{M}_{\theta r} \\ Q_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz \\ Q_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} dz\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen estableciendo el equilibrio en un elemento diferencial de placa en coordenadas polares. En este caso, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el plano de la placa estarán desacopladas de las demás y no será necesario tenerlas en cuenta ya que describen el comportamiento tipo laja.

Equilibrio según la dirección z

$$\left(Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - Q_r r d\theta + \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - Q_\theta dr + p r dr d\theta = 0$$

simplificando

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} + p = 0$$

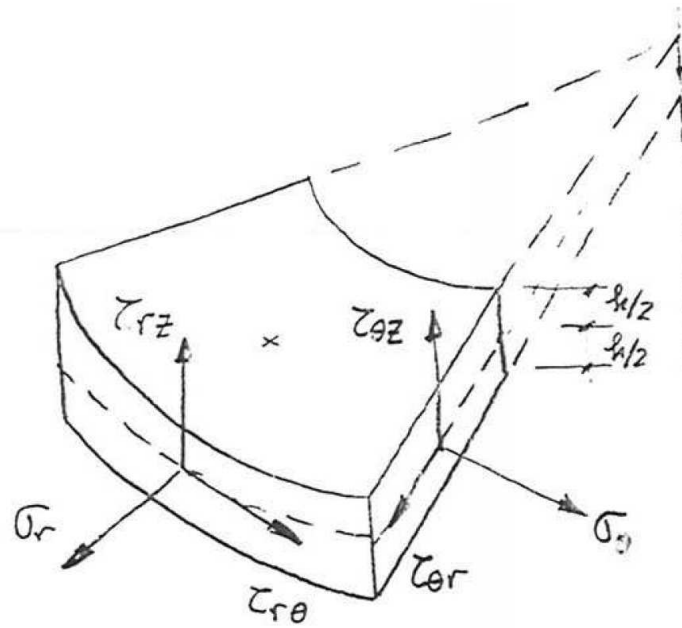


Figura 5.2: Elemento prismático diferencial en coordenadas Polares

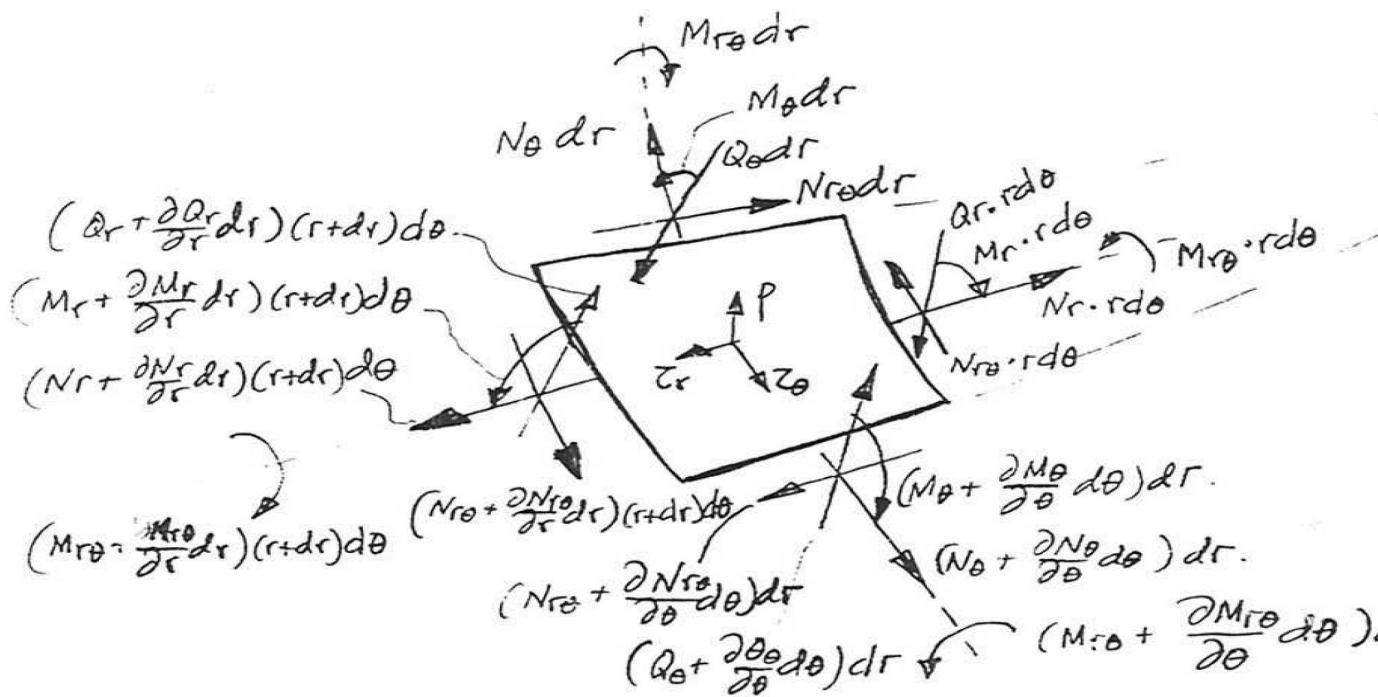


Figura 5.3: Equilibrio del elemento prismático diferencial en coordenadas Polares

Equilibrio de momentos alrededor del eje circunferencial

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{M}_r + \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \mathcal{M}_\theta r d\theta - Q_r r d\theta dr \\ & + \left(\mathcal{M}_{r\theta} + \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \mathcal{M}_{r\theta} dr - \mathcal{M}_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} - \left(\mathcal{M}_\theta + \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$\frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_\theta}{r} - Q_r = 0$$

Equilibrio de momentos alrededor del eje radial

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{M}_\theta + \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \mathcal{M}_\theta dr + \left(\mathcal{M}_{r\theta} + \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \\ & - \mathcal{M}_{r\theta} r d\theta - Q_\theta r d\theta dr + \left(\mathcal{M}_{r\theta} + \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \mathcal{M}_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\mathcal{M}_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones de momentos en la cortantes se obtiene una ecuación única de momentos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{M}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} (\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} (\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_\theta) + p = 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} + p = 0$$

5.3. Relación esfuerzos-movimientos

Las hipótesis respecto a la norma implican:

$$\gamma_{\theta z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \beta \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial r} = \alpha \end{aligned}$$

siendo $-\alpha = \frac{\partial u_r}{\partial z}$ la pendiente en dirección radial y $-\beta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$ la pendiente en dirección circunferencial.

Los movimientos, de acuerdo con las hipótesis de Kirchhoff de la normal permanezca recta son

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= u_r^0(r, \theta) - \alpha z = u_r^0(r, \theta) - z \frac{\partial w}{\partial r} \\ u_\theta(r, \theta, z) &= u_\theta^0(r, \theta) - \beta z = u_\theta^0(r, \theta) - z \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ u_z(r, \theta, z) &= w(r, \theta) \end{aligned}$$

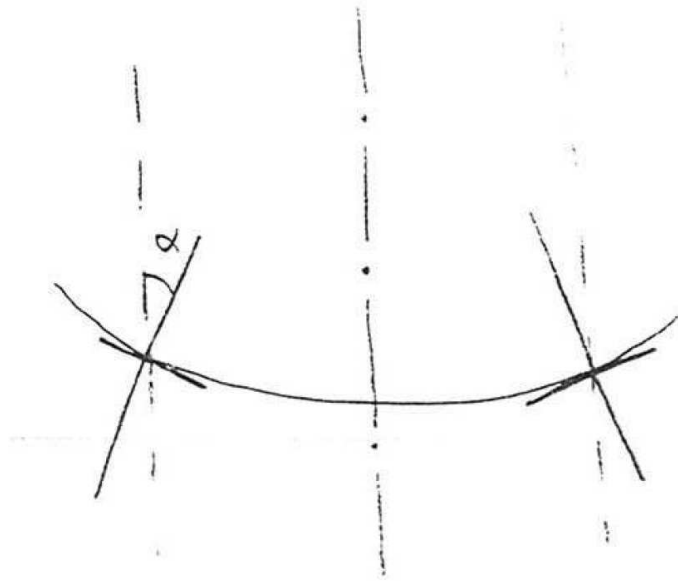


Figura 5.4: Desplazamiento deformada

Las deformadas en coordenadas polares son

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r(r, \theta, z) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_r^0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
 \varepsilon_\theta(r, \theta, z) &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \left(\frac{u_r^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^0}{\partial \theta} \right) - \frac{z}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 \varepsilon_z(r, \theta, z) &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{r\theta}(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} \right) - \frac{z}{r} \left(\frac{2\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\
 \gamma_{\theta z}(r, \theta, z) &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -w_{,\theta y} z \\
 \gamma_{rz}(r, \theta, z) &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = -w_{,xy} z
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las relaciones tensión-deformación son

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\
 \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \sigma_{r\theta}
 \end{aligned}$$

La relación inversa es

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\
 \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \\
 \sigma_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta}
 \end{aligned}$$



Figura 5.5: Cortante efectivo

Sustituyendo las expresiones de las deformaciones 5.1 en éstas se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_r^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^0}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu z}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{u_r^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^0}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial u_r^0}{\partial r} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ \sigma_{r\theta} &= G \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} \right) - \frac{z}{r} \left(\frac{2 \partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]\end{aligned}$$

Los esfuerzos pueden obtenerse integrando en el espesor las tensiones

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \, dz &= 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \, dz &= I = \frac{h^3}{12}\end{aligned}$$

Se obtiene

$$\mathcal{M}_r = -D \left[w_{,rr} + \frac{\nu}{r} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\mathcal{M}_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) + \nu w_{,rr} \right] \quad (5.3)$$

$$\mathcal{M}_{r\theta} = -D(1-\nu) \left[\frac{1}{r} w_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \right] \quad (5.4)$$

siendo $D = \frac{EI}{1-\nu^2}$ y $2GI = \frac{2EI}{2(1+\nu)} = D(1-\nu)$

Los esfuerzos cortantes se calculan a partir de las ecuaciones de equilibrio sustituyendo en dichas ecuaciones las expresiones obtenidas para los momentos:

$$\mathcal{Q}_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right] = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad (5.5)$$

$$\mathcal{Q}_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{,r} \right] = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (5.6)$$

El cortante efectivo

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_r &= \mathcal{Q}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial \theta} = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + (1-\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - (1-\nu) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ \mathcal{V}_\theta &= \mathcal{Q}_\theta + \frac{\partial \mathcal{M}_{r\theta}}{\partial r} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) + (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} w_{,\theta} \right) \right]\end{aligned}$$

5.4. Ecuación de la deformada

Sustituyendo los momentos en función de la flecha en la ecuación de equilibrio y después de agrupar términos se obtiene

$$-D \left[w_{,rrrr} + \frac{2}{r^2} w_{,rr\theta} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta\theta\theta} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{2}{r^3} w_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{4}{r^4} w_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \right] + p = 0$$

que puede expresarse de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D}$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad \text{ó} \quad \Delta \Delta w = \frac{p}{D}$$

o bien

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad \text{ó} \quad \Delta^2 w = \frac{p}{D}$$

siendo $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ el operador laplaciano en coordenadas polares.

5.5. Condiciones de Contorno

Las condiciones de contorno en coordenadas polares son

Borde empotrado en $r = cte$

$$w = 0 \quad w_{,r} = 0$$

Borde apoyado en $r = cte$

$$w = 0 \quad \mathcal{M}_r = 0$$

o lo que es lo mismo

$$w = 0 \quad w_{,rr} + \frac{\nu}{r} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) = 0$$

Borde libre en $r = cte$ Imponemos que el cortante efectivo deberá ser cero además del momento flector

$$\mathcal{M}_r = 0 \quad \mathcal{V}_r = 0$$

Por tanto, las condiciones sobre el contorno serán

$$w_{,rr} + \frac{\nu}{r} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla^2 w \right) + (1 - \nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - (1 - \nu) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0$$

Apoyo elástico en $r = cte$ La condición de cortante efectivo será:

$$\mathcal{V}_r + kw = 0$$

donde k es la constante del muelle repartido equivalente

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla^2 w \right) + (1 - \nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - (1 - \nu) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{k}{D} w = 0$$

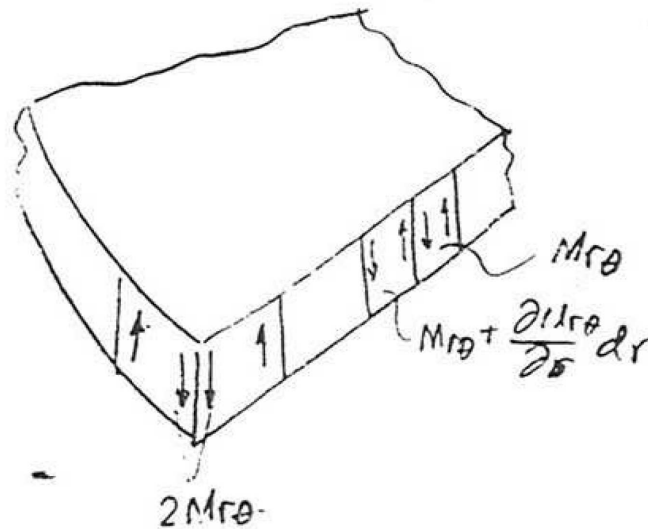


Figura 5.6: Cortante efectivo

Borde empotrado en $\theta = cte$ La formulación de coordenadas polares es útil no sólo para placas circulares completas sino para aquellas placas que tienen forma de corona circular, sector circular o sector de corona circular. En estos dos últimos casos existen bordes que tienen coordenada θ constante y en las que varía la coordenada r . Las condiciones de contorno para esos casos se describen a continuación.

$$w = 0 \quad w_{,\theta} = 0$$

Borde apoyado en $\theta = cte$

$$w = 0 \quad \mathcal{M}_{\theta} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$w = 0 \quad w_{,\theta\theta} = 0$$

En las esquinas a 90° de un borde apoyado hay unas cargas concentradas de valor $2\mathcal{M}_{r\theta}$ de forma semejante al caso de placas rectangulares.

Borde libre en $\theta = cte$

$$\mathcal{M}_{\theta} = 0 \quad \mathcal{V}_{\theta} = 0$$

que se representa por

$$\frac{1}{r} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) + \nu w_{,rr} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) + (1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^3} w_{,\theta} \right) = 0$$

Apoyo elástico en $\theta = cte$

$$\mathcal{V}_{\theta} + kw = 0$$

5.6. Placas circulares con flexión axisimétrica

En placas con geometría, cargas y condiciones de contorno con simetría de revolución, las relaciones estudiadas se simplifican notablemente.

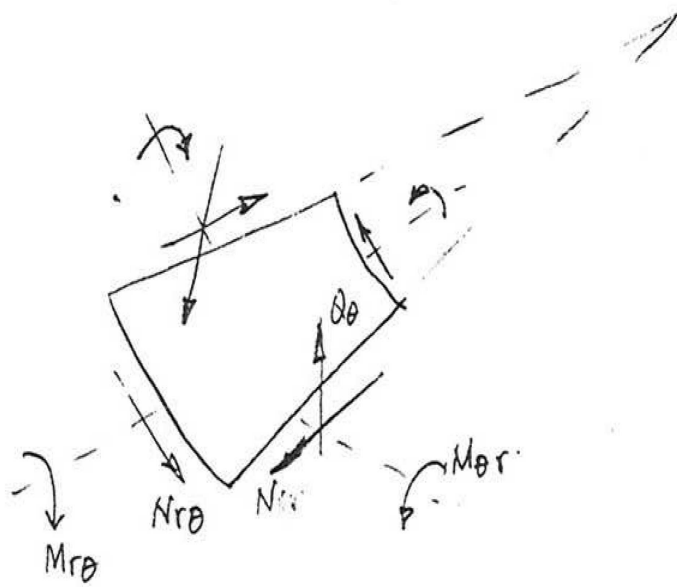


Figura 5.7: Elemento diferencial con simetría de revolución

En las expresiones estudiadas todas las derivadas $\frac{\partial}{\partial \theta}$ son nulas y u_θ^0 , además algunos esfuerzos son también nulos.

$$Q_\theta = 0 \quad M_{r\theta} = 0$$

Las ecuaciones más importantes estudiadas hasta ahora quedan

Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} + p &= 0 \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r &= 0 \end{aligned}$$

Despejando el cortante Q_r en la segunda expresión y sustituyendo en la primera se obtiene

$$\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + p = 0$$

Deformaciones y tensiones

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r^0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r^0}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \nu \frac{u_r^0}{r} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_r^0}{r} + \nu \frac{\partial u_r^0}{\partial r} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\frac{z}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Esfuerzos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r &= -D \left[w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} \right] \\ \mathcal{M}_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} w_{,r} + \nu w_{,rr} \right] \\ \mathcal{M}_{r\theta} &= 0 \\ \mathcal{Q}_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right] \\ \mathcal{Q}_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación de la deformada

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}$$

siendo $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$

Por lo que podemos escribir la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}$$

La solución de la ecuación deformada es de la forma

$$w = w_h + w_p$$

siendo w_h la solución de la ecuación homogénea y w_p una solución particular de la ecuación diferencial.

La ecuación homogénea es fácilmente integrable

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_h}{dr} \right) \right] \right\} = 0$$

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_h}{dr} \right) \right] = C_0$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_h}{dr} \right) \right] = \frac{C_0}{r}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_h}{dr} \right) = r C_0 \ln r + r C_1$$

$$\frac{dw_h}{dr} = \frac{1}{r} \left[\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right] C_0 + \frac{r}{2} C_1 + \frac{C_2}{r}$$

$$w_h = \frac{C_0}{2} \left[\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right] + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

Estas expresiones normalmente se expresan por

$$w_h = A + B \ln r + Cr^2 + Er^2 \ln r$$

5.7. Placas circulares bajo carga no axisimétrica

En este caso se debe resolver la ecuación biarmónica general

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}$$

Para buscar la solución general de la ecuación homogénea $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$, dado lo difícil del problema, tendremos un desarrollo en serie de Fourier en sentido circunferencial

$$w_h = \sum_{m=0}^{\infty} (R_m \cos m\theta + R'_m \sin m\theta)$$

donde R_m y R'_m son funciones de r

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_m \right) \cos m\theta \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R'_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR'_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R'_m \right) \sin m\theta = 0 \end{aligned}$$

Dada la ortogonalidad de las funciones trigonométricas, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_m \right) &= 0 \quad \forall m = 0, 1, \dots \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R'_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR'_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R'_m \right) &= 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen soluciones generales de la forma

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + E_0 r^2 \ln r \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + E_1 r \ln r \\ &\dots \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{m+2} + C_m r^{-m} + E_m r^{-m+2} \quad \forall m > 1 \end{aligned}$$

La expresión para R'_m es idéntica para $m \geq 1$ (no teniendo sentido para $m = 0$).

Las soluciones de R_m y R'_m se sustituyen en w_h y $w = w_h + w_p$ obteniéndose las constantes de las condiciones de contorno.

Como puede verse R_0 produce w_h que no depende de θ y representa la respuesta a la parte uniforme de la carga sobre la placa. Es además evidente que R_0 tiene la misma expresión obtenida para w_h en el caso de carga uniforme.

El uso de una descomposición en serie de Fourier según θ permite obtener la solución para muchos tipos de carga.

El proceso será: Descomposición de p en serie de Fourier

$$p = p_0(r) + \sum_1^{\infty} p_m(r) \cos m\theta + \sum_1^{\infty} p'_m(r) \sin m\theta$$

A lo que le corresponde una solución de la forma

$$\begin{aligned} w = w_h + w_p &= \sum_0^{\infty} (R_m \cos m\theta + R'_m \sin m\theta) + \sum_0^{\infty} (R_m^p \cos m\theta + R'_m{}^p \sin m\theta) \\ w &= \sum_0^{\infty} (R_m + R_m^p) \cos m\theta + (R'_m + R'_m{}^p) \sin m\theta \end{aligned}$$

Para cada término del desarrollo ya sabemos como son R_m y R'_m . Las partes correspondientes a la solución particular se obtendrán de

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_m^p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m^p}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_m^p \right) &= 0 \quad \forall m = 0, 1, \dots \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R'_m{}^p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR'_m{}^p}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R'_m{}^p \right) &= 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Las constantes se calcularán imponiendo las condiciones de contorno sobre cada término de la serie, por lo que estas condiciones también deberán desarrollarse en serie de senos y cosenos.

El método es válido también para sectores circulares.

Capítulo 6

El Método de los Elementos Finitos para placas

Índice

6.1. Introducción	99
6.2. El Método de los Elementos Finitos	99
6.3. Teoría de Placas de Kirchhoff	100
6.4. Elementos de placa rectangulares	102

6.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han presentado métodos clásicos de resolución de placas aplicables a geometrías simples y bajo ciertos tipos de cargas y condiciones de contorno. Pero no es siempre posible utilizar estos métodos en la resolución de problemas de placas más complejos. En esos casos se recurre al empleo de métodos aproximados para la resolución del problema.

Los métodos aproximados más empleados en la resolución de placas se pueden dividir en dos grandes grupos:

1. **Métodos indirectos:** Estos métodos permiten obtener valores de funciones desconocidas mediante la discretización de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de contorno. Dentro de estos métodos destacan el *Método de las Diferencias Finitas*, el *Método de los Elementos de Contorno* y el *Método de Galerkin*.
2. **Métodos directos:** Estos métodos emplean métodos variacionales para determinar los campos numéricos de funciones desconocidas evitando las ecuaciones diferenciales. Entre estos métodos destaca el *Método de los Elementos Finitos* (el más extendido actualmente y el que vamos a estudiar a continuación), aunque también encontramos el *Método de Ritz*

6.2. El Método de los Elementos Finitos

El *Método de los Elementos Finitos* (MEF) se basa en discretizar el continuo en elementos más simples y ensamblarlos. Así, una placa se discretizará en un número finito de elementos que se conectan en sus nodos y sobre sus bordes. Las variables a calcular en el problema (flechas, esfuerzos unitarios, tensiones) se asignan a los nodos. Las condiciones de equilibrio y compatibilidad se deben satisfacer en cada nodo y sobre los contornos entre los elementos finitos. Para determinar las variables incógnita del problema se emplean principios variacionales dando como resultado un sistema de ecuaciones.

Existen múltiples referencias para el cálculo mediante el MEF entre las que destaca la referencias de Zienkiewicz¹ y Hughes²

6.3. Teoría de Placas de Kirchhoff

Toda la teoría estudiada en los capítulos iniciales sobre la teoría de placas de Kirchhoff es válida. En estas notas se recogen los principales aspectos que permiten describir el MEF.

Campo de desplazamientos

Se denomina *vector de movimientos* a aquel que contiene los desplazamientos y giros de un punto del plano medio de la placa. Estos desplazamientos se basan en la hipótesis de deformación recta de la normal que sólo se cumple para placas de pequeño espesor. Para placas de moderado y gran espesor ($\frac{h}{L} \geq 0,10$) la distorsión de la sección aumenta con la deformación de forma que se pierde dicha ortogonalidad entre la normal y el plano medio. En esos casos es necesario aplicar otras teorías como la de *Reissner-Mindlin* o incluso hay que aplicar la teoría de elasticidad tridimensional para los casos más acusados.

$$\mathbf{u} = \left[w, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^T$$

Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos

Se define el vector de deformaciones independientes de la placa como

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]^T = \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T = \mathbf{S} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f$$

donde

$$\mathbf{S} = -z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -z \mathbf{I}_3, \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T$$

siendo $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f$ es el vector de deformaciones generalizadas de flexión y \mathbf{S} es la matriz que relaciona la curva en la superficie media en la deformación en cualquier punto sobre el espesor.

El vector de deformaciones tiene asociado el vector de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]^T$$

La relación general entre tensiones y deformaciones es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$$

siendo la matriz constitutiva \mathbf{D} para un material isótropo

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que la matriz constitutiva coincide con la obtenida para un problema de tensión plana debido a que en ambas teorías se tiene la hipótesis de tensión normal nula a través del espesor.

El vector de esfuerzos se define integrando las tensiones sobre el espesor de la placa

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_f = [\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_{xy}]^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz$$

¹Zienkiewicz, O., The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 1977.

²Hughes, T.J.R., The Finite Element Method, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.

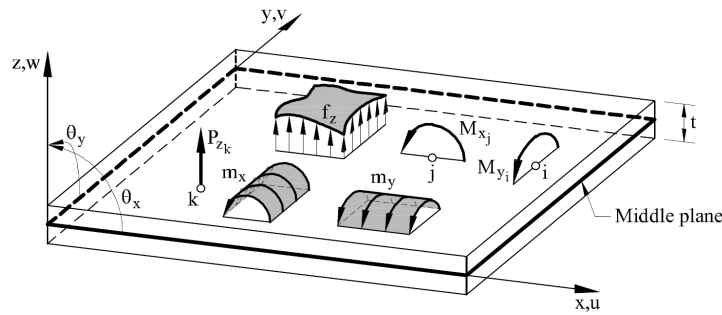


Figura 6.1: Cargas aplicadas en la placa

Sustituyendo en esta expresión la relación entre tensiones y deformaciones se tiene

$$\widehat{\sigma}_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f dz = \widehat{\mathbf{D}}_f \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f$$

donde $\widehat{\mathbf{D}}_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{D} dz$ es la matriz constitutiva a flexión generalizada.

Principio de los Trabajos Virtuales

El Principio de los Trabajos Virtuales para el caso de una placa que está sometida a cargas distribuidas constantes \mathbf{t} y fuerzas puntuales \mathbf{p}_i en superficie se escribe

$$\int \int \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \int_A \mathbf{t} \delta \mathbf{u}^T dA + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (6.1)$$

con

$$\delta \mathbf{u} = \left[\delta w, \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^T, \quad \delta \mathbf{u}_i = \left[\delta w_i, \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T$$

$$\mathbf{t} = [f_z, m_x, m_y]^T, \quad \mathbf{p}_i = [P_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}]^T$$

siendo $\delta \mathbf{u}$ el vector de desplazamientos virtuales, \mathbf{t} el vector de cargas distribuidas y \mathbf{p}_i el vector de fuerzas puntuales.

Las características del problema de flexión de placas permiten simplificar la integral de volumen en otra sobre el plano medio de la placa en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \int \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \int \int_V [\mathbf{S} \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f]^T \boldsymbol{\sigma} dV = \\ &= \int \int_A \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f^T \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dz \right] dA = \int \int_A \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_f dA \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión dada para el PTV queda

$$\int \int_A \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_f dA = \int \int_A \mathbf{t} \delta \mathbf{u}^T dA + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i$$

También podemos escribir el trabajo de deformación virtual de la placa

$$\delta U = - \int \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} M_y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} M_{xy} \right] dA$$

Analizando el integrando de esta expresión vemos que aparecen las segundas derivadas de la flecha, lo que exige que tanto w como su primera derivada sean funciones continuas (de clase C^1).

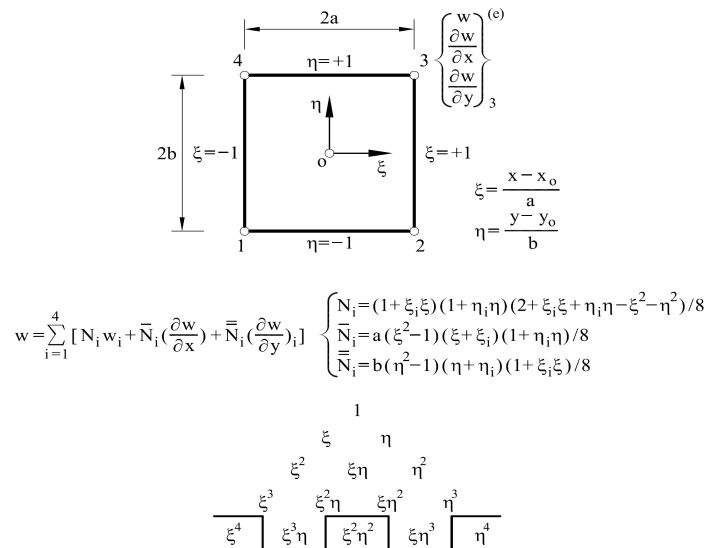


Figura 6.2: Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme

6.4. Elementos de placa rectangulares

Se considera un elemento de placa rectangular (figura 6.2). En cada nodo existirán tres variables denominadas *desplazamientos nodales* que están definidas en su plano medio. Estas variables son la flecha w_i y los giros sobre los ejes x e y , $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$, respectivamente. Estas variables se expresan en forma matricial

$$\mathbf{u}_i = \left[w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \right]^T$$

El elemento está sometido a una carga $p(x, y)$ en su superficie y a fuerzas puntuales y momentos externos P_i , M_{xi} , M_{yi} en sus nodos.

Al considerar que el elemento es rectangular, estará definido por cuatro nodos y como es necesario definir tres variables para nodo, habrá que establecer un polinomio de 12 términos para definir la aproximación de la flecha. Al analizar los polinomios completos, los de tercer grado tienen 10 términos por lo que son insuficientes mientras que los de cuarto grado tienen 15 términos, siendo necesario omitir algunos de sus términos. *Melosh*³ y *Zienkiewicz* y *Cheung*⁴ desarrollaron el elemento rectangular de cuatro nodos no conforme que tiene la siguiente aproximación

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

Los parámetros α_i se obtienen imponiendo la flecha y giros en los nodos del elemento.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(e)} &= \left[w_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1, \dots, w_4, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4 \right] = \\ &= \mathbf{A} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}]^T = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

Y por tanto

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}^{(e)}$$

³Melosh, R.J., Structural analysis of solids. J. Structural Engineering, ASCE, 4, 205-223, August 1963.

⁴Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K., Finite element procedures in the solution of plate and shell problems. In Stress Analysis, O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister (Eds.), Chapter 8. John Wiley & Sons, Chichester, 1965.

$$\text{con } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2 y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 2x_1 y_1^2 \\ & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 2x_4 y_4^2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que la flecha la podemos escribir a partir de las funciones de forma

$$w = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

Combinando ambas ecuaciones de obtiene

$$w = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

De donde se obtienen la matriz de funciones de forma que permiten aproximar los desplazamientos

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1}$$

siendo $\mathbf{P} = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3]^T$

Las funciones de forma escritas de forma explícita son

$$w = \sum_{i=1}^4 \left[N_i w_i + \bar{N}_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \overline{\bar{N}}_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right] = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

siendo

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]; \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{Bmatrix};$$

y

$\mathbf{N}_i = [N_i, \bar{N}_i, \overline{\bar{N}}_i]; \mathbf{a}_i^{(e)} = [w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i]^T$ son la matriz de funciones de forma y el vector de movimientos de un nodo i del elemento.

La matriz de deformación generalizada de flexión se obtiene

$$\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{f_i} \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{B}_f \mathbf{a}^{(e)}$$

con

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_{f_1}, \mathbf{B}_{f_2}, \mathbf{B}_{f_3}, \mathbf{B}_{f_4}], \mathbf{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \overline{\bar{N}}_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \overline{\bar{N}}_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \overline{\bar{N}}_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

El cálculo de las segundas derivas de las funciones de forma en \mathbf{B}_{f_i} se obtienen a partir de

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta^2}$$

El vector de esfuerzos en este caso será

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_f = \widehat{\mathbf{D}}_f \mathbf{B}_f \mathbf{a}^{(e)}$$

Para obtener el sistema de ecuaciones a resolver aplicamos el método de Galerkin. Discretizamos los desplazamientos virtuales

$$\delta w = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f = \mathbf{B}_f \delta \mathbf{a}^{(e)}$$

El PTV para un elemento puede escribirse

$$\int \int_{A^{(e)}} \delta \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_f^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_f dA = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{t} \delta \mathbf{u}^T dA + \sum_{i=1}^3 \left[\delta \mathbf{a}_i^{(e)} \right]^T \mathbf{q}_i^{(e)}$$

donde

$$\delta \mathbf{a}_i^{(e)} = \left[\delta w_i, \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T, \mathbf{q}_i^{(e)} = [F_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}]^T$$

siendo $\mathbf{q}_i^{(e)}$ el vector de fuerzas nodales.

Sustituyendo las expresiones dadas para los desplazamientos virtuales en la ecuación del PTV, se obtiene la ecuación matricial del elemento

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

La matriz de rigidez es

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{fi}^T \widehat{\mathbf{D}}_f \mathbf{B}_{fj} dx dy$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{z_i} \\ m_{x_i} \\ m_{y_i} \end{Bmatrix} = \int \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} N_i & N_{i,x} & N_{i,y} \\ \overline{N}_i & \overline{N}_{i,x} & \overline{N}_{i,y} \\ \overline{\overline{N}}_i & \overline{\overline{N}}_{i,x} & \overline{\overline{N}}_{i,y} \end{bmatrix} \{f_z, m_x, m_y\} dx dy$$

Bibliografía

- [1] DOMÍNGUEZ ABASCAL, J. *Cálculo de Placas*. Universidad de Sevilla, 1986. Apuntes de la asignatura “Cálculo de estructuras” de la titulación de Ingeniero Industrial (no publicados).
- [2] HERNÁNDEZ, S., AND JURADO, J. Á. *Análisis estructural de placas y láminas*. Tórculo Ediciones, 2004.
- [3] JAEGER, L. G. *Elementary Theory of Elastic Plates*. Prentice, 1964.
- [4] OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA, E. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis elástico lineal / Eugenio Oñate*, 1^a ed. ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1992.
- [5] PILKEY, W. D. *Formulas for stress, strain and structural matrices*. John-Wiley and Sons, 1994.
- [6] PILKEY, W. D., AND WUNDERLICH, W. *Mechanics of Structures: variational and computational methods*. CRC Press, 1994.
- [7] TIMOSHENKO, S. P., AND WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Teoría de Placas y Láminas*. Urmo, 1975.
- [8] TONTI, E. *The mathematical structure of classical and relativistic physics a general classification diagram*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser, New York, 2013.
- [9] TUMA, J. J. *Teoría y problemas de análisis estructural : con una introducción a las matrices de transporte, flexibilidad y rigidez*. McGraw-Hill, 1973.
- [10] ZIENKIEWICZ, O. C. *El método de los elementos finitos [Recurso Electrónico] / O.C. Zienkiewicz.*, 1a ed. Reverté, Barcelona, 1982.