



Un modèle stochastique pour l'écoulement de von Kármán

N. Leprovost, L. Marié, Bérengère Dubrulle

► To cite this version:

N. Leprovost, L. Marié, Bérengère Dubrulle. Un modèle stochastique pour l'écoulement de von Kármán. Pomeau Y., Ribotta R. 2003, Non Linéaire Publications, Orsay, pp.173-178, 2003. <hal-00164183>

HAL Id: hal-00164183

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00164183>

Submitted on 19 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle stochastique pour l'écoulement de Von-Karman

N. Leprovost, L. Marié, B. Dubrulle

CNRS, Groupe Instabilité et Turbulence, CEA/DSM/DRECAM/SPEC, F-91191

Gif sur Yvette Cedex, France

`nicolas.leprovost@cea.fr`

Résumé

Un système d'équations stochastiques nous sert à décrire l'évolution de la vitesse de rotation d'un disque ainsi que le couple appliqué dans l'écoulement de Von-Karman. Ce dernier est étudié de façon analytique pour deux modes de forçage: vitesse angulaire ou couple constant. Le principal résultat est que l'on retrouve la relation expérimentale de [9]: dans la limite de l'inertie du disque nulle, la puissance injecté dans la turbulence fluctue deux fois moins lorsque l'on force à couple constant comparé au forçage à vitesse angulaire constante. Ensuite, les distributions de probabilité de la vitesse angulaire et du couple sont comparées à des données expérimentales.

1 Introduction

Le dispositif de Von-Karman est un dispositif très étudié [4, 5, 8] autant pour sa capacité à créer de la turbulence que pour ses propriétés vis-à-vis de l'effet dynamo. De par son aspect (un cylindre avec un disque en rotation à chaque extrémité), il a été surnommé "machine à laver". Dans un récent travail, Titon et Cadot ([9]) ont étudié la statistique de puissance injecté quand les disques tournent à la même vitesse mais en sens opposé dans une gamme de Reynolds comprise entre 2×10^4 et 5×10^5 . Ils se sont focalisés sur deux régimes: dans le premier, la vitesse angulaire de rotation du disque est gardé constante et dans le deuxième le couple appliqué est fixé. Pour ces deux modes d'injection d'énergie, la forme des distributions de puissance injecté s'avère indépendante du nombre de Reynolds et est globalement gaussienne avec une légère dissymétrie. Par contre, les fluctuations de cette même puissance (plus précisément l'écart type) dépendent de façon importante du mode d'injection de l'énergie: elles sont deux fois plus importantes dans le premier régime que dans le second lorsque l'inertie du disque tend vers une limite nulle.

Dans cette étude, nous proposons un modèle stochastique qui permet de reproduire ce résultat. Dans la première partie, le modèle est discuté; ensuite, on étudie analytiquement les deux modes d'injection de l'énergie et la relation liant les fluctuations de puissance est mise en évidence dans l'approximation d'un bruit de faible intensité. Finalement, le modèle est confronté à des données expérimentales .

2 Le modèle

Comme remarqué par [9], l'équation de conservation du moment cinétique pour un disque (en incluant les pales ainsi que le fluide compris entre celles-ci) s'écrit :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m(t) + \Gamma_f(t) \quad (1)$$

où Ω est la vitesse de rotation des disques, Γ_m est le moment fournie par le moteur et Γ_f est le couple dû au fluide (couple turbulent). Ce dernier peut s'écrire:

$$\Gamma_f \propto \int u_\theta(z=0)u_z(z=0)dS \quad (2)$$

Par convention, on a placé le disque en $z = 0$. u_θ et u_z sont les vitesses angulaires et axiales, quantités fluctuantes à cause du caractère turbulent de l'écoulement. D'un point de vue dimensionnel, la partie moyenne de Γ_f doit être proportionnel à Ω^2 et donc on l'écrit $\Gamma_f = c\Omega |\Omega| - \xi$ où ξ est un bruit dont les propriétés reste à déterminer. On a inclus une valeur absolue dans la définition de la partie déterministe de Γ_f afin d'introduire une dissymétrie entre $\pm\Omega$. En effet, près des disques et sans turbulence ($\xi = 0$), on doit avoir une solution stationnaire unique pour Ω . L'équation d'évolution pour Ω peut donc s'écrire:

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m(t) - c\Omega |\Omega| + \xi \quad (3)$$

Il nous reste à préciser la statistique de ξ . Tout d'abord dans un souci de simplicité, nous avons considéré le cas d'un bruit additif (ξ indépendant de Ω) mais les calculs se généralisent assez facilement au cas d'un bruit multiplicatif. Ensuite, assez naturellement en turbulence, nous avons choisi une corrélation en temps exponentielle: $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \exp(-\frac{|t-t'|}{\tau})$ où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur les réalisations du bruit. De façon équivalente, ξ peut être représenté par un processus de Ornstein-Uhlenbeck ([2]):

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau}\xi + \frac{\Gamma}{\tau}, \quad (4)$$

où Γ est un bruit gaussien de moyenne nulle et δ -corrélé en temps.

Il faut noter qu'en utilisant un modèle quasi linéaire de turbulence ([10]), il est possible de dériver le système d'équations 3 et 4 à partir de Navier-Stokes ([12]).

3 Résultats analytiques

Le système d'équations 3 et 4 peut être étudié analytiquement dans deux cas qui correspondent à ceux étudiés expérimentalement par [9]: le Ω -mode dans lequel les moteurs sont régulés à vitesse angulaire constante et le Γ -mode dans lequel le couple délivré par les moteurs est gardé constant. Nous traitons ces régimes séparément en nous concentrant sur l'étude de la puissance fournie par les moteurs: $P = \Gamma_m \Omega$.

3.1 Ω -mode

Dans ce cas, $\Omega = cte$ et l'équation pour Ω se réduit à $\Gamma_m = \Gamma_f = c\Omega^2 - \xi$. En conséquence, la statistique de P se déduit directement de celle de ξ ; c'est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $c\Omega^3$ et de variance:

$$\delta P_\Omega^2 = \Omega^2 \frac{D}{\tau}. \quad (5)$$

3.2 Γ -mode

Dans ce cas, $\Gamma_m = cte$ et le calcul est un peu plus difficile. On a à résoudre l'équations stochastique suivante pour déterminer la distribution de probabilité de Ω :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - c |\Omega| \Omega + \xi(t) \quad (6)$$

D'un point de vue technique, le problème vient de ce que ξ n'est pas un bruit δ -corrélé en temps. Cependant, cette difficulté peut être contournée en utilisant l'approximation UCNA (unified colored noise approximation) développé par [3, 7]. Sous cette approximation (valable pour des temps de corrélation du bruit très grand ou très petit), l'équation précédente peut se réécrire:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Gamma_m - c |\Omega| \Omega}{\varepsilon(\Omega)} + \frac{\Gamma(t)}{\varepsilon(\Omega)} \quad (7)$$

avec $\varepsilon(\Omega) = I + 2c\tau |\Omega|$. Cette équation étant maintenant Markovienne, on peut lui appliquer les techniques standard des processus stochastiques ([2]) et dériver la distribution de probabilité de Ω dans le cas stationnaire:

$$P_s(\Omega) = N(I + 2c\tau |\Omega|) \exp \frac{1}{D} [I\Omega(\Gamma_m - C\Omega^2\theta(\Omega)/3) + c\tau\Omega^2(\Gamma_m\theta(\Omega) - c\Omega^2/2)] \quad (8)$$

où θ est la fonction signe. Dans la perspective d'une comparaison avec l' Ω -mode, nous devons calculer le moment d'ordre 2 de cette distribution ce qui n'est pas faisable dans le cas général.

3.3 La limite du bruit de faible intensité

On réécrit la densité de probabilité pour Ω sous une forme adimensionnalisée: avec $\chi = \sqrt{\frac{c}{\Gamma_m}}\Omega$, $R^2 = \frac{2D}{\tau\Gamma_m^2}$ et $S = \frac{2I}{\sqrt{c}\Gamma_m\tau}$, on obtient pour la distribution stationnaire de χ :

$$P_s(\chi) = N(|\chi| + \frac{S}{4}) e^{-\frac{1}{R^2}[(\chi^2 - \theta(\chi))^2 - S\chi + \frac{S}{3}\theta(\chi)\chi^3]} \quad (9)$$

où N représente la normalisation.

On veut calculer $\langle \chi^n \rangle = N \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \exp[-\frac{1}{R^2}\Phi(t)] dt$ avec:

$$f_n(t) = t^n (|t| + \frac{S}{4}) \quad (10)$$

$$\Phi(t) = (t^2 - \theta(t))^2 - St + \frac{S}{3}\theta(t)t^3 \quad (11)$$

En utilisant la méthode du col (cf [1]) jusqu'au second ordre en $\frac{1}{R^2}$, on obtient dans la limite $R \ll 1$:

$$\langle \chi^n \rangle = 1 - \frac{R^2}{4(4+S)} n(2-n) + O(R^4) \quad (12)$$

à partir de cette expression, on peut calculer la variance en unités adimensionnalisées, toujours dans la limite $R \ll 1$ et prendre la limite $S \rightarrow 0$ (*i.e.*, l'inertie du disque tend vers 0):

$$\frac{\langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2}{\langle \chi \rangle^2} = \frac{R^2}{2(4+S)} + O(R^4) \rightarrow \frac{R^2}{8} \quad (13)$$

Et en récrivant cette équation pour Ω , on retrouve la relation expérimentale de [9] dans la limite de l'inertie des disques nulle et du faible bruit.

$$\delta P_\Gamma^2 = \Gamma_m^2 [\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] = \Gamma_m^2 \frac{R^2}{8} \langle \Omega \rangle^2 = \frac{D}{4\tau} \langle \Omega \rangle^2 = \frac{1}{4} \delta P_\Omega^2 \quad (14)$$

Pour étudier l'influence de l'intensité du bruit sur la relation précédente, on a représenté sur la figure 1, $\alpha = \frac{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}{R^2 \langle X \rangle^2}$ calculé numériquement à partir de 9 en fonction de l'inertie adimensionalisée, S et simultanément l'expression dérivée de 12: dans la limite $R \ll 1$, $\alpha = \frac{1}{2(4+S)}$. On peut voir que pour $R < 1$, la relation précédente est en accord avec la relation numérique, alors que pour $R > 1$, les deux quantités s'écartent sensiblement l'une de l'autre. De plus, dans ce dernier cas α ne tend plus vers $\frac{1}{8}$ quand $S \rightarrow 0$. La relation 14 est donc valable sous la double condition: $R < 1$ et $I \rightarrow 0$.

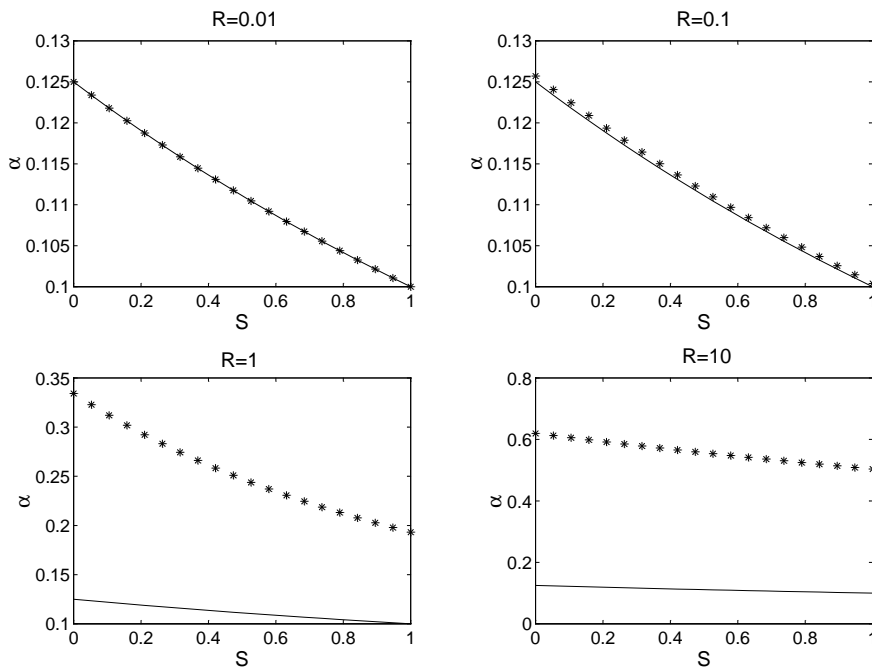


FIG. 1 – Evolution du paramètre $\alpha = \frac{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}{R^2 \langle X \rangle^2}$ avec S (i.e. l'inertie) pour différentes valeurs de R (intensité du bruit). La courbe continue correspond à l'approximation pour l'intensité du bruit faible et la courbe en pointillé aux valeurs calculées numériquement.

4 Confrontation à l'expérience

Dans le paragraphe précédent, nous avons tiré de notre modèle un résultat confirmant des résultats expérimentaux concernant un moment de la distribution de Ω . Un autre test peut être réalisé en utilisant les données d'une expérience de type Von-Karman avec l'eau comme fluide de travail [11]. Ce dispositif peut être réglé aussi bien en Ω -mode qu'en Γ -mode. Dans le premier cas, le couple délivré par le moteur est égal à celui de la turbulence. Sa mesure nous donne donc une information directe sur Γ_f et selon notre modèle, on devrait avoir une distribution gaussienne avec une corrélation exponentielle en temps. La figure 2 nous montre cette corrélation dans une expérience où $\Omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$. Mis à part des oscillations d'origine inconnue, une tendance linéaire se dessine qui nous donne accès au temps de corrélation de ξ et à l'intensité de ce dernier. Les valeurs obtenues sont $D = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}^2.m^4.s^{-3}$ and $\tau = 0.05 \text{ s}$. Le dernier paramètre c est obtenu à partir

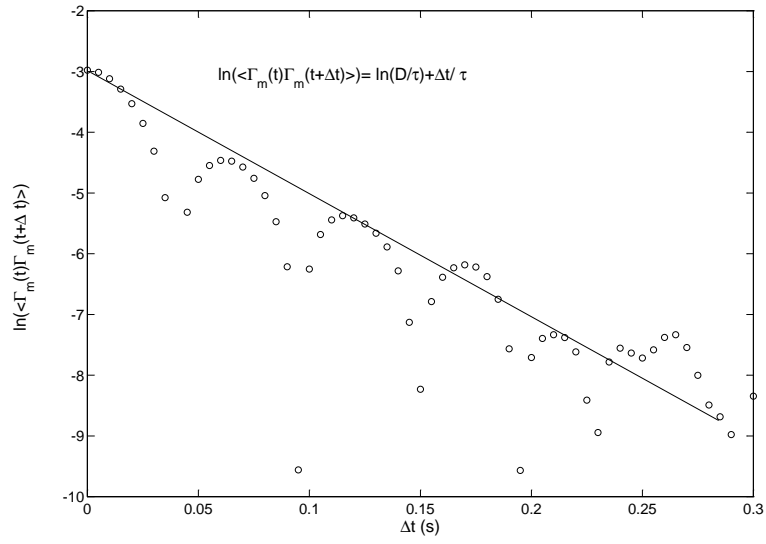


FIG. 2 – Corrélation temporelle du couple turbulent a partir de laquelle on estime la valeur du temps de corrélation et le paramètre D .

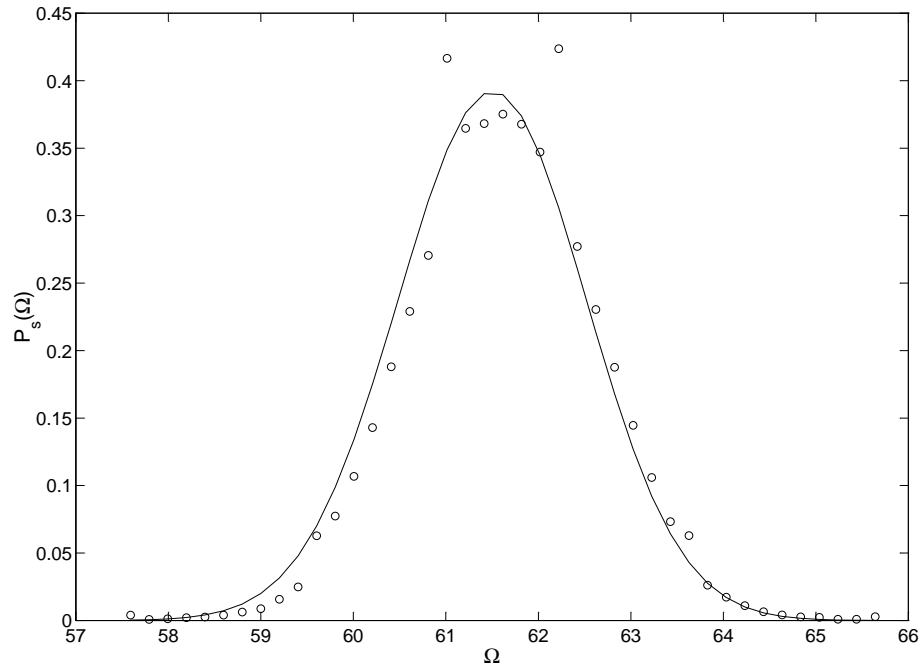


FIG. 3 – **Points:** PDF de la vitesse angulaire quand le système est forcé à couple constant ($\Gamma_m = 2.8 \text{ Kg.m}^2.\text{s}^{-2}$) et **ligne continue:** la prédiction construite à partir des paramètres déterminés en Ω -mode

de la valeur moyenne de Γ_f , qui nous donne $c = 7.39 \cdot 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$. L'observation de l' Ω -mode nous permet de déterminer l'ensemble des paramètres de notre modèle et donc de prédire sans degré de liberté supplémentaire quelle sera la distribution de Ω lorsque l'on forcera à couple constant: une distribution dont la forme est donnée par l'équation 6. La figure 3 montre les données expérimentales dans une expérience à couple constant ($\Gamma_m = 2.8 \text{ Kg.m}^2.s^{-2}$) et telle que la vitesse angulaire moyenne soit la même que celle de l' Ω -mode, 50 rad.s^{-1} . Comme on peut le constater, l'accord entre la courbe expérimentale et la prédiction est très bon.

5 Conclusion

Grâce à un modèle stochastique de la turbulence dans le dispositif de Von-Karman que nous avons testé sur des données expérimentales, nous avons été capable de retrouver quelques caractéristiques de cet écoulement. Plus précisément, nous avons retrouvé une observation expérimentale reliant les fluctuations de puissance injecté entre 2 modes d'injection (équation 14). De plus, le modèle une fois calibré grâce aux données d'un mode de forçage (Ω -mode) a permis la prédiction de la forme de la distribution de probabilité de Ω dans l'autre mode de forçage sans recours à aucun paramètre ajustable.

Références

- [1] C.M. Bender and S.A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mc Graw Hill,
- [2] N.G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, North-Holland, 1981,
- [3] P. Jung et P. Hänggi, *Dynamical systems: a unified colored-noise approximation*, Physical review A, **Vol. 35**, No.10, pp. 4464-4466, 1987,
- [4] R. Labbé et al., *Power Fluctuations in turbulent swirling flows*, Jour. Phys. II, **Vol. 6**, pp. 1099-1110, 1996,
- [5] O. Cadot et al., *Energy injection in closed turbulent flows: stirring through boundary layers versus inertial stirring*, Phys. Rev. E, **Vol. 56**, pp. 427-433, 1997,
- [6] J-F. Pinton et al., *Power Fluctuations in a closed turbulent shear flow*, Phys. Rev. E, **Vol. 60**, pp. R2452-R2455, 1999,
- [7] S.Z. Ke et al., *Phase transitions in a bistable system driven by two colored noises*, Eur. Phys. J. B, **Vol. 12**, pp. 119-122, 1999,
- [8] S. Aumaitre et al., *Large scale correlations for energy injection mechanisms in swirling turbulent flows*, Eur. Phys. J. B, **Vol. 16**, pp. 563-567, 2000,
- [9] J.H.C. Titon et O. Cadot, *The statistics of power injected in a closed turbulent flow: constant torque forcing vs constant velocity forcing*, unpublished,
- [10] J.-P. Laval et al., *Langevin models of turbulence: RG, DSTA or RDT?*, à paraître dans Phys. Fluids
- [11] L. Marié et al., *Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von-Karman type flows*, submitted to EpJ B,
- [12] N. Leprovost, L. Marié et B. Dubrulle, *A turbulent model of torques in von Karman swirling flow*, submitted to To EpJ B,