



Equations différentielles covariantes et représentations de l'algèbre de Virasoro

C. Itzykson

► **To cite this version:**

C. Itzykson. Equations différentielles covariantes et représentations de l'algèbre de Virasoro. Colloque de Géométrie Analytique Complexe, 1993, Paris, France. <hal-00169310>

HAL Id: hal-00169310

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00169310>

Submitted on 3 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equations différentielles covariantes et représentations de l'algèbre de Virasoro

Cl. Itzykson

CEA/Saclay, Service de Physique Théorique^a
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

Colloque de Géométrie Analytique Complexe
Paris, France
29 Juin - 3 Juillet 1992.
Norguet F., Ofman S., Szczeciniarz J.-J. (eds.)

^a Unité associée CNRS/SPM/URA 2306

Equations Différentielles Covariantes et Représentations de l'Algèbre de Virasoro

Claude Itzykson

Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

1. La théorie des champs conforme s'appuie sur une grande diversité de disciplines mathématiques parmi lesquelles figure certainement la géométrie analytique. Le présent exposé est consacré à la considération d'équations différentielles covariantes qui conduisent à la construction explicite de "vecteurs singuliers" pour certains modules relatifs à l'algèbre de Virasoro. Ces termes seront précisés dans la suite. L'intérêt de cette construction est de fournir ultérieurement des équations qui déterminent les fonctions de corrélations de la théorie des champs correspondante, équations qui constituent, dans le cadre où nous nous plaçons, l'analogie des équations de Kniznik Zamolodchikov relatives aux algèbres de Lie affines. Par manque de place il n'est guère possible de développer ici tout l'appareil qui permet de préciser le contexte et les applications. On omettra aussi de donner des preuves détaillées qu'on pourra trouver dans les articles cités. Le résultat essentiel est contenu dans la proposition 6-2. dont le texte ci-dessous n'est qu'une explication.

Je remercie les organisateurs du colloque pour m'avoir donné l'occasion de présenter des travaux effectués en collaboration avec M. Bauer, P. Di Francesco et J.-B. Zuber.

2. Nous voulons donner un sens intrinsèque à un opérateur différentiel (à une seule variable) c'est-à-dire indépendant du choix de la coordonnée locale utilisée. Notre discussion étant locale, on suppose donné un ouvert relativement compact dans R ou dans C (voire sur une surface de Riemann) et on se borne à y introduire une coordonnée à changement univalent suffisamment régulier près (suivant le contexte la régularité s'entend au sens différentiable ou holomorphe). Dans ces conditions les Jacobiens ne s'annulant jamais on peut donner un sens aux espaces \mathcal{F}_λ de " λ -différentielles régulières", λ quelconque, telles que par un changement $x \longleftrightarrow \hbar$ (suffisamment régulier) on ait $f \longleftrightarrow \tilde{f}$ avec

$$\tilde{f} \underset{\hbar}{\mathcal{D}} d\hbar^\lambda \leftrightarrow f \underset{x}{\mathcal{D}} dx^\lambda$$

En pratique nous n'utiliserons que des valeurs de λ rationnelles.

Si pour un choix de coordonnée on dispose d'un opérateur différentiel Q_n normalisé d'ordre n de la forme $\underset{x}{\mathcal{D}} d \equiv \frac{d}{dx} \underset{x}{\mathcal{D}}$

$$Q_n \leftrightarrow d^n \underset{x}{\mathcal{D}} a_{n-1} \underset{x}{\mathcal{D}} d^{n-1} \underset{x}{\mathcal{D}} \dots \underset{x}{\mathcal{D}} a_1 \underset{x}{\mathcal{D}} \underset{x}{\mathcal{D}}$$

appliquant \mathcal{F}_λ dans $\mathcal{F}_{\lambda \mathbb{Z}_n}$, il ne conservera cette forme, telle que le Wronskien de n solutions linéairement indépendantes de $\mathbb{T} \setminus Q_n$ soit une constante, que si ce Wronskien appartient aux scalaires c'est-à-dire à \mathcal{F}_μ . Or on montre sans peine que le Wronskien de n éléments est une application de

$\mathcal{F}_\lambda \xrightarrow{\mathcal{F}_\lambda} \mathcal{F}_{n\lambda} \xrightarrow{\frac{n\mathcal{C}_{n-\mu}\mathcal{D}}{\mathcal{F}}}$. Le choix de cible \mathcal{F}_μ implique donc

$$\lambda \leftrightarrow \frac{\mu-n}{\mathcal{F}}$$

$$Q_n \leftrightarrow \mathcal{F}_{\mu-n} \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mu-n}} \mathcal{F}_{\mu-n} \xrightarrow{\frac{\mathcal{D}_n}{\mathcal{F}}}$$

Considérons les lois de transformation de a_μ, \dots, a_n dans un changement de coordonnée. On les obtiendra en explicitant le Wronskien

$$Q_n f \equiv W_{n\mathcal{D}\mu\mathcal{C}} f, f_{n-\mu}, \dots, f_\mu \mathcal{D} / W_{n\mathcal{C}} f_{n-\mu}, \dots, f_\mu \mathcal{D},$$

où $f, f_{n-\mu}, \dots, f_\mu$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\mu-n}$ et les n derniers constituent localement une base de $\mathcal{F} \setminus Q_n$, (bien entendu la notation W_p est pour le Wronskien). On en tire sans peine le résultat classique

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{C} \mathcal{D} d\mathcal{h}^\mu \leftrightarrow a_\mu \mathcal{C} x \mathcal{D} dx^\mu \mathcal{D} \frac{n\mathcal{C}n^\mu - \mathcal{D}}{\mathcal{F}^\mu} \{x, \mathcal{h}\} d\mathcal{h}^\mu$$

où

$$\{g \mathcal{C} x \mathcal{D}, x\} \leftrightarrow \frac{g''' \mathcal{C} x \mathcal{D}}{g' \mathcal{C} x \mathcal{D}} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{F}} \frac{g'' \mathcal{C} x \mathcal{D}}{g' \mathcal{C} x \mathcal{D}} \mathcal{D}^\mu$$

est la dérivée Schwarzienne de l'application $x \rightarrow g \mathcal{C} x \mathcal{D}$ et s'annule si g est homographique, un signal que nous décrivons un aspect de la géométrie différentielle projective. Si l'on cherche à préciser comment se transforment $a_\mu, a_\nu \dots$ on trouve des expressions de plus en plus complexes sans interprétation géométrique évidente. Ceci suggère de considérer une transformation triangulaire, donc inversible, $a_k \mathcal{C} x \mathcal{D} \leftrightarrow w_k \mathcal{C} x \mathcal{D}$ où les $w_k \mathcal{C} x \mathcal{D}$ sont des polynômes différentiels dans les $a_r \mathcal{C} x \mathcal{D}$ (c'est-à-dire polynômes dans les $a_r \mathcal{C} x \mathcal{D}$ et un nombre fini de leurs dérivées) qui jouissent des deux propriétés suivantes:

(a) les w_k engendrent le même anneau différentiel que les a_k , ce qui est acquis dès que la transformation $\mathcal{C} a_k \mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{C} w_k \mathcal{D}$ est inversible

(b) $w_k \in \mathcal{F}_k \quad \mu \leq k \leq n$.

Pour la commodité on posera

$$a_\mu \mathcal{C} x \mathcal{D} \leftrightarrow \frac{n\mathcal{C}n^\mu - \mathcal{D}}{\mathcal{A}} w_\mu \mathcal{C} x \mathcal{D}$$

et on dira que w_μ est une différentielle quadratique projective. En général le choix des w_k n'est pas unique, dès que $k > \mathcal{A}$ (ce qui suppose bien entendu $n > \mathcal{A}$) mais la construction que nous donnons ci-dessous (inspirée en partie de Drinfeld et Sokolov) est, en un sens, canonique dans la mesure où comme on va le voir elle utilise le plongement "maximal" de $\mathbb{S}\mathbb{L}_\mu$ dans $\mathbb{S}\mathbb{L}_n$.

Il est commode de substituer à Q_n opérateur différentiel linéaire du n -ième ordre, un opérateur matriciel du premier ordre, par exemple

$$\widetilde{Q}_n \leftrightarrow \begin{vmatrix} d & a_\mu & a_\mu \dots & a_n \\ -\mathcal{D} & d & \mathcal{D} \dots & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & -\mathcal{D} & d \dots & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} \dots & & -\mathcal{D} & d \end{vmatrix}$$

qu'on écrira $\widetilde{Q} \leftrightarrow d\mathcal{D} \mathcal{D} \mathcal{A}$ où \mathcal{A} appartient à l'algèbre de Lie $A_{n-\mu}$. Cette association $Q_n \leftrightarrow \widetilde{Q}_n$ est telle que la projection sur la dernière composante (des vecteurs sur lesquels agit $\widetilde{Q}_n \mathcal{D}$ assure un isomorphisme

2) Il existe un autre choix “naturel” de générateurs w_k correspondant à la formule de “transvectant” de Gordan.

3) Nous n’abordons pas ici la théorie de Gelfand-Dikey et Drinfeld et Sokolov relative à une structure symplectique sur les opérateurs différentiels Q_n par manque de place. Elle conduit à des systèmes intégrables qui trouvent aussi leur place dans le contexte des théories conformes et se généralisent aux autres algèbres de Lie que $A_{n-\mu}$.

3. Nous allons voir que la présentation précédente des opérateurs différentiels conduit à une généralisation où les coefficients sont à leur tour des opérateurs, qui permet de trouver des “vecteurs singuliers” dans les modules de plus haut poids pour l’algèbre de Virasoro. Il nous faut donc — très succinctement — en rappeler les définitions.

L’algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle (ou algèbre de Witt) peut aussi se comprendre comme celle des champs de vecteurs holomorphes sur la sphère de Riemann privée de deux points ζ et ∞ par exemple).

Dans les applications à la mécanique quantique les symétries sont réalisées projectivement, ce qui se traduit au niveau des algèbres de Lie par des extensions centrales. Dans le cas présent physiciens et mathématiciens indépendamment ont découvert que l’algèbre de Witt admet essentiellement une unique extension centrale que l’usage attribue désormais à Virasoro. Elle est engendrée par des éléments L_m , $m \in \mathbb{Z}$ et c appartenant au centre, tels que

$$\widetilde{L_m, L_n} \leftrightarrow \zeta m - n \zeta L_m \zeta_n \zeta \zeta \frac{c}{\mu \zeta} m \zeta m^\zeta - \mu \zeta \delta_m \zeta_n, \mu$$

où $\delta_{a,b}$ est le symbole de Kronecker. Dans les représentations que nous considérons c agit par multiplication par un scalaire - qu’on notera lui-même c , appelé *charge centrale*.

Soit B la sous algèbre engendrée par le scalaire c fixé et les L_m , $m \geq \mu$. On dira qu’une représentation est de plus haut poids s’il existe un vecteur f (le plus haut poids), qui engendre une représentation unidimensionnelle de B de la forme

$$\begin{aligned} L_\mu f &\leftrightarrow h f \\ L_m f &\leftrightarrow \mu \quad m > \mu \end{aligned}$$

On appellera module de Verma (pour l’algèbre de Virasoro) une représentation de plus haut poids $V_{\zeta c, h \zeta}$ librement engendrée sur le corps de définition — en pratique \mathbb{C} — par les éléments, $k \geq \mu$,

$$f_{p_\mu, p_\mu, \dots, p_k} \leftrightarrow L_{-p_\mu} L_{-p_\mu} \dots L_{-p_k} f \quad \mu \leq p_\mu \leq p_\mu \leq \dots \leq p_k$$

Notons que $L_\mu f_{p_\mu, p_\mu, \dots} \leftrightarrow \zeta h \zeta p_\mu \zeta p_\mu \zeta \dots \zeta f_{p_\mu, p_\mu, \dots}$. De tels modules peuvent être réductibles. Ceci se produit lorsqu’on peut trouver une application injective

$$V_{\zeta c, h \zeta n \zeta} \longrightarrow V_{\zeta c, h \zeta}$$

et on appelle *vecteur singulier* (au niveau $n \zeta$ l’image du vecteur de plus haut poids de $V_{\zeta c, h \zeta n \zeta}$ par cette application. C’est donc une combinaison linéaire de la forme

$$F \leftrightarrow \sum_{p_\mu, p_\mu, \dots, n} c_{p_\mu, p_\mu, \dots, p_\mu} f_{p_\mu, p_\mu, \dots} \equiv \phi \zeta L_{-\mu}, L_{-\mu} \dots \zeta f$$

satisfaisant à

$$L_{\mathcal{K}} F \leftrightarrow \zeta h \not\geq n \not\geq F$$

$$L_m F \leftrightarrow \mathcal{K} \quad m > \mathcal{K}$$

Ici ϕ est un polynôme de “degré” n (si on attribue à L_{-p} le degré p dont l’expression est unique — à facteur global près — lorsque on ordonne les monômes par indices non décroissants, (comme dans la définition de $f_{p_{\mathcal{K}}, p_{\mathcal{K}}, \dots}$).

Paramétrisons la charge centrale sous la forme

$$c \leftrightarrow \mathcal{K} \not\geq \not\geq \not\geq \theta \not\geq \theta^{-\mathcal{K}} \not\geq \not\geq \equiv \mathcal{K} \not\geq \not\geq \not\geq t \not\geq t^{-\mathcal{K}} \not\geq \quad t \leftrightarrow \theta^{\mathcal{K}}$$

et considérons pour $j, j' \geq \mathcal{K}$ entiers ou demi-entiers la suite dénombrable des poids conformes

$$h_{j', j} \leftrightarrow -\zeta j \theta \not\geq j' \theta^{-\mathcal{K}} \not\geq \zeta \zeta j \not\geq \mathcal{K} \not\geq \theta \not\geq \zeta j' \not\geq \mathcal{K} \not\geq \theta^{-\mathcal{K}} \not\geq$$

Il est clair que c et $h_{j, j'}$ ne dépendent que de t . Enfin soit $n \leftrightarrow \zeta \mathcal{K} j \not\geq \mathcal{K} \not\geq \zeta \mathcal{K} j' \not\geq \mathcal{K}$. On a le résultat fondamental suivant

Proposition 3.1 (Kac, Feigin et Fuchs)

Pour $c, h_{j, j'}, n$ définis ci-dessus, $V_{\zeta c, h}$ admet un vecteur singulier au niveau n , et tous les vecteurs singuliers sont obtenus de cette façon.

Pour tout triplet $\zeta t, j, j'$ notre but est d’obtenir un algorithme fournissant le polynôme $\phi_{\zeta L}$ dont on verra d’ailleurs qu’il est défini sur $\mathbb{Q}_{\zeta t}$.

Remarques.

1) Les valeurs limites θ (ou t égal à 0 ou ∞ sont inclus dans un sens limite pour $j' \leftrightarrow \mathcal{K}$ et $j \leftrightarrow \mathcal{K}$ respectivement, cas où la charge centrale tend vers l’infini. En un sens qui mériterait d’être précisé ceci correspond à une limite classique.

2) Les notations ci-dessus pour c et h sont commodes pour la discussion qui va suivre. Les notations plus standard sont telles que (pour m générique)

$$\begin{aligned} r &\leftrightarrow \mathcal{K} j' \not\geq \mathcal{K} & s &\leftrightarrow \mathcal{K} j \not\geq \mathcal{K} & t &\leftrightarrow \theta^{\mathcal{K}} \leftrightarrow -\frac{m}{m \not\geq \mathcal{K}} \\ c &\leftrightarrow \mathcal{K} - \frac{\not\geq}{m \not\geq m \not\geq \mathcal{K} \not\geq} & h &\leftrightarrow \frac{\zeta r \zeta m \not\geq \mathcal{K} \not\geq - s m \not\geq \mathcal{K} - \mathcal{K}}{\not\geq m \not\geq m \not\geq \mathcal{K} \not\geq} & n &\leftrightarrow r s \end{aligned}$$

En particulier (Friedan et Shenker) les seules représentations unitarisables (après réduction des modules de Verma correspondants) pour $c < \mathcal{K}$ correspondent à m entier non négatif et r et s entiers positifs respectivement inférieurs à m et $m \not\geq \mathcal{K}$.

3) Pour des petites valeurs n on peut obtenir $\phi_{\zeta L}$ en utilisant directement sa définition. Les premiers à avoir donné une formule générale pour une sous-famille de vecteurs singuliers dans le cas $j j' \leftrightarrow \mathcal{K}$ sont Benoît et Saint Aubin.

Avant de poursuivre il est bon de mentionner trois propriétés générales des polynômes $\phi_{\zeta L}$ obtenues par Feigin et Fuchs.

(i) $\phi_{\zeta L}$ est une série de Laurent finie dans la variable t et l’on a

apparaître de manière frappante si nous envisageons d'abord le cas traité par Benoît et Saint Aubin où $jj' \leftrightarrow \mathcal{K}$. On se contentera de présenter le cas $j' \leftrightarrow \mathcal{K} \subsetneq r \leftrightarrow \mathcal{K} \supseteq$, l'autre s'en déduisant simplement en changeant $j \rightarrow j'$ et $t \rightarrow t^{-\mathcal{K}}$. On a donc

$$c \leftrightarrow \mathcal{K} \mathcal{K} \not\subseteq \not\subseteq \not\subseteq t^{-\mathcal{K}} \supseteq \quad h \leftrightarrow -j - tj \subsetneq j \not\subseteq \mathcal{K} \supseteq \quad n \leftrightarrow \mathcal{K} j \not\subseteq \mathcal{K},$$

où $j \leftrightarrow \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}}, \mathcal{K}, \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}}, \dots$. Nous allons définir dans $V \subsetneq c, h \supseteq$ une suite de vecteurs $f \equiv f_{-j}, f_{-j} \not\subseteq \mathcal{K}, \dots, f_j, f_j \not\subseteq \mathcal{K} \equiv F$ où f_{-j} est le vecteur de plus haut poids et $f_j \not\subseteq \mathcal{K}$ est le vecteur singulier F , tels que

$$L_{\mathcal{K}} f_M \leftrightarrow \subsetneq h \not\subseteq j \not\subseteq M \supseteq f_M$$

Groupons ces éléments de $V \subsetneq c, h \supseteq$ en deux colonnes

$$\mathbf{f} \equiv \subsetneq f_j, f_{j-\mathcal{K}}, \dots, f_{-j} \supseteq^T$$

$$\mathbf{F} \equiv \subsetneq F, \mathcal{K}, \dots, \mathcal{K} \supseteq^T$$

Alors

Proposition 4.1

(1) L'équation

$$\mathbf{F} \leftrightarrow \subsetneq -J_{-} \not\subseteq \sum_{k \leftrightarrow \mathcal{K}}^{n-\mathcal{K}} L_{-k-\mathcal{K}} t^k J_{\not\subseteq}^k \supseteq \mathbf{f}$$

définit $F \leftrightarrow f_j \not\subseteq \mathcal{K}$ en termes de $f \equiv f_{-j}$, où F est un vecteur singulier non nul de $V \subsetneq c, h \supseteq$ au niveau $n \leftrightarrow \mathcal{K} j \not\subseteq \mathcal{K}$, c'est-à-dire

$$p > \mathcal{K} \quad L_p F \leftrightarrow \mathcal{K} \quad L_{\mathcal{K}} F \leftrightarrow \subsetneq h \not\subseteq n \supseteq F$$

(ii) En outre pour tout $p > \mathcal{K}$

$$L_p \mathbf{f} \leftrightarrow \left[\subsetneq J_{\mathcal{K}} - \frac{\mathcal{K} p \not\subseteq \mathcal{K}}{\mathcal{K}} \supseteq - t^{-\mathcal{K}} \frac{\mathcal{K} p \not\subseteq \mathcal{K}}{\not\subseteq} \right] \subsetneq t J_{\not\subseteq} \supseteq^p \mathbf{f}$$

En résolvant explicitement la récurrence impliquée par la proposition on obtient la formule de Benoît Saint-Aubin

$$\phi_{\mathcal{K}, j} \subsetneq L \supseteq \leftrightarrow \sum_{\substack{\text{id} \sim \dots \supseteq \supseteq \supseteq \times \mathcal{K} \sim \mathcal{K} \\ n \leftrightarrow p_{\mathcal{K}} \not\subseteq \dots p_r \not\subseteq r, p_i > \mathcal{K}}} t^{n-r} \frac{\subsetneq n - \mathcal{K} \supseteq \not\subseteq^{\mathcal{K}}}{\prod_{i \leftrightarrow \mathcal{K}}^{r-\mathcal{K}} [\subsetneq p_{\mathcal{K}} \not\subseteq \dots \not\subseteq p_i \supseteq \subsetneq n - p_{\mathcal{K}} - \dots - p_i \supseteq]} L_{-p_{\mathcal{K}}} \dots L_{-p_r}$$

où les p_i ne sont pas ordonnés.

La preuve est une vérification directe. En outre, on peut montrer que ϕ possède les trois propriétés générales attendues.

Quoiqu'on observe un parallélisme frappant avec la discussion de la section 2 sous la substitution $d \rightarrow L_{-\mathcal{K}}, w_k \rightarrow t^{k-\mathcal{K}} L_{-k}, k \geq \mathcal{K}$, il reste à en trouver l'origine. C'est ce que va éclairer la formulation de la "fusion" des modules, substitut dans ce contexte de la décomposition des produits tensoriels. En effet d'une part la connaissance de toutes les applications $V \subsetneq c, h \not\subseteq n \supseteq \rightarrow V \subsetneq c, h \supseteq$

permet par passage au quotient de construire les modules irréductibles de plus haut poids. Par ailleurs connaissant par la méthode précédente une sous famille de tels modules il est naturel d'essayer d'en engendrer d'autres par réduction de produits. Cependant on se heurte d'emblée à une difficulté. La charge centrale relative à un tel produit est la somme des charges des facteurs. La fusion est précisément une construction qui conserve la charge centrale et permet la construction des vecteurs singuliers généraux. Comme on va le voir elle s'appuie sur la signification géométrique de l'algèbre de Virasoro.

5. La fusion des modules de plus haut poids a été introduite dans le travail fondamental de Belavin Polyakov et Zamolodchikov comme transcription dans le cadre conforme du produit à courte distance des opérateurs de champs. Nous allons en donner ici une version précise adaptée à notre problème.

Dans tout ce qui suit la charge centrale c est fixée et à tout point d'un ouvert de la sphère de Riemann nous attachons une algèbre de Virasoro (de charge $c_{\mathcal{D}}$ et l'ensemble de ses modules irréductibles. Ces données "adéliques" sont codées dans des champs, le tenseur impulsion énergie $T_{\mathcal{D}}x_{\mathcal{D}}$ et les champs "primaires" $\varphi_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}$. Ces quantités sont à interpréter comme des symboles figurant dans des fonctions de corrélation (que nous considérons dans tout ce qui suit sur la sphère de Riemann mais les propriétés locales que nous développons seraient inchangées sur une surface de Riemann quelconque). Pour alléger les notations nous désignons toute suite finie non décroissante d'entiers positifs $\mathcal{K} \leq r_{\mathcal{K}} \leq r_{\mathcal{K}+1} \leq \dots \leq r_k$ par le symbole Y , avec $|Y| \leftrightarrow r_{\mathcal{K}} \not\leq \dots \not\leq r_k$ et nous posons $L_{-r_{\mathcal{K}}} \dots L_{-r_k} \equiv L_{-Y}$. Soit $f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}$ un champ primaire "évalué au point $x_{\mathcal{D}}$ ". Nous l'associons au vecteur de plus haut poids d'un module $V_{\mathcal{D}}c, h_{\mathcal{D}}$ associé au point x et nous associons de même ses "descendants" $L_{-Y} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}$ à l'action de l'algèbre de Virasoro, où il est entendu qu'on opère avec l'algèbre de Virasoro en x . Cette action est engendrée par l'itération du produit à courte distance avec le tenseur impulsion énergie

$$T_{\mathcal{D}} \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \leftrightarrow \sum_{n \in \mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}^{-n} L_{-n} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}$$

où

$$L_{\mathcal{K}} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \leftrightarrow h f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \quad L_{-\mathcal{K}} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \leftrightarrow \frac{d}{dx} f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}}$$

et la définition précédente implique la propriété de plus haut poids $L_p f_h \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \leftrightarrow \mathcal{K}$ pour $p > \mathcal{K}$. La caractéristique à noter est que $L_{-\mathcal{K}}$ agit comme dérivation et relie donc les propriétés en des points voisins. Ceci fournit donc une condition de cohérence entre modules attachés à des points distincts.

Soient maintenant trois champs $f_{\mathcal{K}}$, $f_{\mathcal{K}}$ et f de poids respectifs $h_{\mathcal{K}}$, $h_{\mathcal{K}}$, et h , la fusion des modules correspondants sera définie s'il est possible de trouver une fonction de corrélation

$$\langle f_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} f \mathcal{D}x_{\mathcal{D}} \rangle \leftrightarrow \frac{g_{\mathcal{D}} h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - x_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}}^{h_{\mathcal{K}}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - h \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - x_{\mathcal{D}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}}^{h_{\mathcal{K}}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - h_{\mathcal{K}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - x_{\mathcal{D}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}}^{h_{\mathcal{K}}} \mathcal{D}x_{\mathcal{K}} - h_{\mathcal{K}}}$$

non nulle, c'est-à-dire telle que $g_{\mathcal{D}} h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{D}} \not\leftrightarrow \mathcal{K}$. Un lecteur scrupuleux observera que fixant $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{K}}$ par exemple la quantité ci-dessus est en réalité définie sur le recouvrement universel de l'ouvert moins les points $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{K}}$. Comme nous allons le voir les "règles de fusion" vont en fait émerger de la théorie.

Pour être précis nous distinguerons le module de Verma $V_{\mathcal{D}}c, h_{\mathcal{D}}$ de son quotient irréductible $M_{\mathcal{D}}c, h_{\mathcal{D}}$ (qui peut ou non se confondre avec $V_{\mathcal{D}}c, h_{\mathcal{D}}$) et nous définirons la fusion entre modules irréductibles comme une application linéaire *covariante*

$$\mathcal{F} \quad M_{\underline{c}, h_{\nu} \ni x_{\nu} \underline{\supset}} \otimes M_{\underline{c}_{\mathcal{H}}, h_{\mathcal{H}} \ni x_{\mathcal{H}} \underline{\supset}} \longrightarrow M_{\underline{c}, h \ni x \underline{\supset}}$$

La nécessité de prendre des modules irréductibles découlera par la suite de la condition de rendre \mathcal{F} bien défini. La fusion se différencie de la décomposition du produit tensoriel par l'introduction des arguments $x_{\nu}, x_{\mathcal{H}}, x$ de sorte que nous traitons des algèbres isomorphes mais non pas identiques. En plus de la linéarité, le mot clef de la définition, que nous allons étudier en détail, est "covariant". Ceci signifie que notre application doit être indépendante du choix du paramètre local utilisé (à transformation univalente près). On va voir que cette contrainte est si forte qu'elle détermine entièrement la fusion (à un facteur global près). C'est à ce point que nous retrouverons le rôle de la géométrie comme dans la section 2.

Par linéarité l'image du produit des vecteurs de plus haut poids a le développement

$$\mathcal{F} \sim f_{\nu} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} \otimes f_{\mathcal{H}} \underline{\supset} x_{\mathcal{H}} \underline{\supset} \sim \leftrightarrow \sum_Y z^{|Y| - \underline{c}_{h_{\nu}} \ni h_{\nu} - h} \beta_Y L_{-Y} f \underline{\supset} x \underline{\supset}$$

On a supposé pour simplifier que $x_{\nu} \leftrightarrow x \underline{\supset} \frac{z}{\underline{c}}$, $x_{\mathcal{H}} \leftrightarrow x - \frac{z}{\underline{c}}$. Ce choix n'est en rien indispensable et l'on pourra s'en affranchir en tenant compte de $f \underline{\supset} x \underline{\supset} \leftrightarrow e^{x' L_{\mathcal{H}}} f \underline{\supset} x \underline{\supset}$. Le facteur en puissance de z résulte de la propriété d'échelle globale. Supposant connus les coefficients numériques β_Y , l'application \mathcal{F} sera entièrement définie par la donnée de l'action de $\mathcal{F} \underline{\supset} L_{-p} \otimes \mathcal{H} \underline{\supset}$ et $\mathcal{F} \underline{\supset} \mathcal{H} \otimes L_{-p} \underline{\supset}$. Cette dernière résulte "d'identités de Ward" satisfaite par les corrélations qui expriment que les champs primaires $f_i \underline{\supset} x \underline{\supset}$ appartiennent aux espaces \mathcal{F}_{h_i} et que le tenseur impulsion énergie est le générateur des transformations infinitésimales de coordonnées. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \underline{\supset} L_{-p} \otimes \mathcal{H} \underline{\supset} &\leftrightarrow \frac{\underline{c} - \mathcal{H} \supset p}{z^p} [h_{\mathcal{H}} \underline{\supset} p - \mathcal{H} \underline{\supset} \ni \frac{z}{\underline{c}} L_{-\mathcal{H}} - z \frac{d}{dz}] \ni \sum_{k \geq \nu} \underline{c} \frac{z}{\underline{c}} \underline{\supset}^k \binom{k \supset p - \mathcal{H}}{k} L_{-p-k} \\ \mathcal{F} \underline{\supset} \mathcal{H} \otimes L_{-p} \underline{\supset} &\leftrightarrow \frac{\mathcal{H}}{z^p} [h_{\nu} \underline{\supset} p - \mathcal{H} \underline{\supset} - \frac{z}{\underline{c}} L_{-\mathcal{H}} - z \frac{d}{dz}] \ni \sum_{k \geq \nu} \left(\frac{-z}{\underline{c}} \right)^k \binom{k \supset p - \mathcal{H}}{k} L_{-p-k} \end{aligned}$$

Remarques

1) Pour $p \leftrightarrow \mathcal{H}$ les sommes sur k se réduisent à leur premier terme (formellement $\binom{-\mathcal{H}}{\nu} \leftrightarrow \mathcal{H} \underline{\supset}$ donc $\mathcal{F} \underline{\supset} L_{-\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H} \underline{\supset} \leftrightarrow \frac{d}{dz} \ni \frac{\mathcal{H}}{\underline{c}} L_{-\mathcal{H}}$ et $\mathcal{F} \underline{\supset} \mathcal{H} \otimes L_{-\mathcal{H}} \underline{\supset} \leftrightarrow -\frac{d}{dz} \ni \frac{\mathcal{H}}{\underline{c}} L_{-\mathcal{H}}$).

2) Les identités de Ward auxquelles on a fait allusion prennent la forme

$$\langle \underline{c} L_{-p_{\mathcal{H}}} \dots L_{-p_r} f_{\nu} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} \ni f_{\mathcal{H}} \underline{\supset} x_{\mathcal{H}} \underline{\supset} \dots \rangle \leftrightarrow \mathcal{L}_{-p_{\mathcal{H}}} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} \mathcal{L}_{-p_{\mathcal{H}}} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} \dots \langle f_{\nu} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} f_{\mathcal{H}} \underline{\supset} x_{\mathcal{H}} \underline{\supset} \dots \rangle$$

où

$$\mathcal{L}_{-p} \underline{\supset} x_{\nu} \underline{\supset} \leftrightarrow \sum_{i > \nu} \left(\frac{\underline{c} p - \mathcal{H} \supset h_i}{\underline{c} x_i - x_{\nu} \supset^p} - \frac{\mathcal{H}}{\underline{c} x_i - x_{\nu} \supset^{p-\mathcal{H}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

ce qui, entre parenthèse, montre comment, lorsqu'on aura l'expression d'un vecteur singulier sous la forme $\phi \underline{\supset} L \supset f$, on obtiendra en l'annulant (dans un module irréductible) des équations différentielles pour les corrélations du champ correspondant.

Pour x_{ν} voisin de x on obtient un développement

$$\mathcal{L}_{-p} \subset x_{\mathcal{K}} \supset \leftrightarrow \subset -\frac{\mathcal{K}}{z} \supset^p \left[\subset p - \mathcal{K} \supset h_{\mathcal{K}} \not\supset \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}} z \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$\not\supset \sum_{k \geq \mathcal{K}} \subset \frac{z}{\mathcal{K}} \supset^k \subset \supset^p \not\supset \frac{k - \mathcal{K}}{\mathcal{K}} \supset \sum_{i > \mathcal{K}} \subset -\mathcal{K} \supset^p \not\supset k \left[\frac{h_i \subset p \not\supset k - \mathcal{K} \supset}{\subset x - x_i \supset^p \not\supset k} \not\supset \frac{\mathcal{K}}{\subset x - x_i \supset^p \not\supset k - \mathcal{K}} \partial_i \right]$$

Identifiant $\frac{\partial}{\partial x}$ à l'action de $L_{-\mathcal{K}}$ et la dernière somme à celle de L_{-p-k} sur le champ obtenu par fusion de $f_{\mathcal{K}} \subset x_{\mathcal{K}} \supset \otimes f_{\mathcal{K}} \subset x_{\mathcal{K}} \supset$ on obtient l'expression de $\mathcal{F}_{\subset} L_{-p} \otimes \mathcal{K} \supset$ et de même pour $\mathcal{F}_{\subset} \mathcal{K} \otimes L_{-p} \supset$. On vérifiera que l'on a bien

$$\left[\mathcal{F}_{\subset} L_{-m} \otimes \mathcal{K} \supset, \mathcal{F}_{\subset} L_{-n} \otimes \mathcal{K} \supset \right] \rightsquigarrow \subset n - m \supset \mathcal{F}_{\subset} L_{-m-n} \otimes \mathcal{K} \supset$$

pour $m, n > \mathcal{K}$ et de même lorsque on échange les rôles des deux facteurs.

3) On passe de $\mathcal{F}_{\subset} L_{-p} \otimes \mathcal{K} \supset$ à $\mathcal{F}_{\subset} \mathcal{K} \otimes L_{-p} \supset$ par l'échange $h_{\mathcal{K}} \longleftrightarrow h_{\mathcal{K}} z \longleftrightarrow -z$. Cette symétrie résulte du choix du point de fusion.

4) Dans la limite $z \rightarrow \mathcal{K}$ on obtient

$$\langle \supset \rangle_{z \rightarrow \mathcal{K}} z^{-h} \mathcal{F}_{\subset} z^{h_{\mathcal{K}}} f_{\mathcal{K}} \subset x_{\mathcal{K}} \supset \otimes z^{h_{\mathcal{K}}} f_{\mathcal{K}} \subset x_{\mathcal{K}} \supset \rightarrow f_{\subset} x \supset$$

vecteur de plus haut poids dans $M_{\subset} c, h \not\supset x \supset$, ce qui est compatible avec le fait que dans la limite considérée $\subset x_{\mathcal{K}} - x_{\mathcal{K}} \supset^h f_{\subset} \frac{x_{\mathcal{K}} \not\supset x_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \supset$ se comporte comme $dx^h f_{\subset} x \supset$. En outre nous voyons que le terme dominant dans le développement à courte distance du produit de deux champs primaires est toujours un champ primaire, remarque utile dans la suite.

Pour déterminer les coefficients β_Y nous exprimons que la fusion est indépendante du choix de coordonnée. Soit donc $x \rightarrow \hbar$ un tel changement, on doit donc avoir

$$\sum z^{|Y| - \subset h_{\mathcal{K}} \not\supset h_{\mathcal{K}} - h \supset} \beta_Y \subset L_{-Y} f \supset \subset x \supset \leftrightarrow \subset \frac{d\hbar_{\mathcal{K}}}{dx_{\mathcal{K}}} \supset^{h_{\mathcal{K}}} \subset \frac{d\hbar_{\mathcal{K}}}{dx_{\mathcal{K}}} \supset^{h_{\mathcal{K}}} \times$$

$$\sum_Y \subset \hbar_{\mathcal{K}} - \hbar_{\mathcal{K}} \supset^{|Y| - \subset h_{\mathcal{K}} \not\supset h_{\mathcal{K}} - h \supset} \beta_Y \subset L_{-Y} \not\supset \supset \frac{\hbar_{\mathcal{K}} \not\supset \hbar_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \supset$$

Comme précédemment $x_{\mathcal{K}} \leftrightarrow x \not\supset \frac{z}{\mathcal{K}}$, $x_{\mathcal{K}} \leftrightarrow x - \frac{z}{\mathcal{K}}$ et

$$\subset L_{-Y} \not\supset \supset \frac{\hbar_{\mathcal{K}} \not\supset \hbar_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \supset \leftrightarrow L_{-Y} \curvearrowleft \left[\subset \frac{\hbar_{\mathcal{K}} \not\supset \hbar_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} \supset - \hbar \supset L_{-\mathcal{K}} \right] \not\supset \subset \hbar \supset$$

Si y désigne la coordonnée générique et si on pose

$$\hbar \leftrightarrow y - \epsilon \subset y \supset$$

la condition précédente se traduit sous forme infinitésimale par

$$\left\{ h_{\mathcal{K}} \epsilon' \subset x_{\mathcal{K}} \supset \not\supset \epsilon \subset x_{\mathcal{K}} \supset \frac{\partial}{\partial x_{\mathcal{K}}} \not\supset h_{\mathcal{K}} \epsilon' \subset x_{\mathcal{K}} \supset \not\supset \epsilon \subset x_{\mathcal{K}} \supset \frac{\partial}{\partial x_{\mathcal{K}}} \right\} \sum_Y z^{|Y| - \subset h_{\mathcal{K}} \not\supset h_{\mathcal{K}} - h \supset} \beta_Y L_{-Y} f \supset \subset x \supset$$

$$\leftrightarrow \sum_Y z^{|Y| - \subset h_{\mathcal{K}} \not\supset h_{\mathcal{K}} - h \supset} \beta_Y \delta_{\epsilon} \left[L_{-Y} f \supset \subset x \supset \right]$$

Choisissons alors

$$\epsilon \subset y \supset \leftrightarrow \epsilon_k \subset y - x \supset^k \not\supset \mathcal{K} \quad k \not\supset \mathcal{K} \geq \mathcal{K}$$

de telle sorte que

$$\delta_\epsilon \underline{L}_{-Y} f \underline{\supset} \underline{c}_k \underline{\supset} L_k L_{-Y} f \underline{\supset} \underline{c}_k \underline{\supset}$$

Nous obtenons alors pour tout $k \geq -\mathcal{K}$

$$\left[L_k - \frac{z}{\mathcal{K}} \underline{\supset}^k \underline{c}_k \underline{\supset} \mathcal{K} \underline{\supset} \underline{c}_k h_{\mathcal{K}} \underline{\supset} - \frac{z}{\mathcal{K}} \underline{\supset}^k \underline{c}_k \underline{\supset} \left\{ \frac{\mathcal{K} \underline{\supset} \underline{c}_k - \mathcal{K} \underline{\supset}^k \underline{c}_k}{\mathcal{K}} \frac{\partial}{\partial x} \underline{\supset} \underline{c}_k \underline{\supset} - \mathcal{K} \underline{\supset}^k \underline{c}_k \underline{\supset} \frac{\partial}{\partial z} \right\} \right] \times \sum_Y z^{|Y|} \underline{c}_k h_{\mathcal{K}} \underline{\supset} h_{\mathcal{K}} - h \underline{\supset} \beta_Y L_{-Y} f \underline{\supset} \underline{c}_k \underline{\supset} \leftrightarrow \mathcal{K}$$

Il suffit d'écrire la condition précédente pour $L_{\mathcal{K}}$ et $L_{-\mathcal{K}}$ puisqu'on peut engendrer tous les L_k , $k > \mathcal{K}$ par commutation

$$L_k \underline{\supset} \underline{c}_k \underline{\supset} \leftrightarrow \frac{\underline{c}_k - \mathcal{K} \underline{\supset}^k}{k \underline{\supset}} \underline{c}_k \underline{\supset} L_{\mathcal{K}} \underline{\supset}^k L_{-\mathcal{K}}$$

Si on note pour simplifier

$$f \underline{\supset}^p \underline{\supset} \equiv \sum_{|Y| \leftrightarrow p} \beta_Y L_{-Y} f \quad p \geq \mathcal{K}$$

avec $f \underline{\supset}^{\mathcal{K}} \underline{\supset} \leftrightarrow f$ et la convention que $f \underline{\supset}^p \underline{\supset}$ s'annule pour $p < \mathcal{K}$, on aboutit aux conditions récursives qui achèvent de déterminer la fusion

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{K}} f \underline{\supset}^p \underline{\supset} &\leftrightarrow \underline{c}_k h_{\mathcal{K}} - h_{\mathcal{K}} \underline{\supset} f \underline{\supset}^{p-\mathcal{K}} \underline{\supset} \underline{\supset} \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}} L_{-\mathcal{K}} f \underline{\supset}^{p-\mathcal{K}} \underline{\supset} \\ L_{-\mathcal{K}} f \underline{\supset}^p \underline{\supset} &\leftrightarrow \frac{h \underline{\supset}^p \underline{\supset} \underline{c}_k h_{\mathcal{K}} \underline{\supset} h_{\mathcal{K}} - \mathcal{K} \underline{\supset}}{\mathcal{K}} f \underline{\supset}^{p-\mathcal{K}} \underline{\supset} \end{aligned}$$

Si $p \leftrightarrow \mathcal{K}$ on retrouve le fait que f doit être de plus haut poids. En décomposant $f \underline{\supset}^p \underline{\supset}$ sur la base des $L_{-Y} f$ et en utilisant les équations de commutation de l'algèbre de Virasoro on constate que ces équations déterminent récursivement $f \underline{\supset}^p \underline{\supset}$ en résolvant à chaque étape un système linéaire $P \underline{\supset}^p \underline{\supset} \times P \underline{\supset}^p \underline{\supset}$ où $P \underline{\supset}^n \underline{\supset}$ est le nombre de partitions de n . Le déterminant de ce système est le déterminant de Kac à ce niveau. Si aucun déterminant de Kac ne s'annule $V \underline{\supset}^c, h \underline{\supset} \equiv M \underline{\supset}^c, h \underline{\supset}$ est irréductible, c'est-à-dire ne possède aucun vecteur singulier. En revanche supposons $V \underline{\supset}^c, h \underline{\supset}$ réductible, c'est-à-dire que $M \underline{\supset}^c, h \underline{\supset}$ est obtenu en quotientant $V \underline{\supset}^c, h \underline{\supset}$ par des sous-modules engendrés par des vecteurs singuliers. En cherchant à résoudre le système ci-dessus de manière récursive on atteindra un niveau n supérieur ou égal à p où p est le niveau d'un vecteur singulier, et le mieux qu'on puisse espérer est que $f \underline{\supset}^n \underline{\supset}$ soit déterminé modulo des "descendants" du vecteur singulier, en sorte que le déterminant de Kac doit s'annuler. Ceci justifie le fait que pour rendre la fusion bien définie il faut donc quotienter par les sous-modules invariants. Reste encore à s'assurer que lorsqu'on est dans le cas décrit ci-dessus le système linéaire admet des solutions, c'est-à-dire que le membre de droite est dans l'image de l'opérateur linéaire du membre de gauche. Ceci engendre les règles de fusion qui imposent des conditions algébriques sur les quadruplets $\underline{c}_c, h_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{K}}, h \underline{\supset}$.

Donnons un exemple élémentaire. On trouve aisément $f \underline{\supset}^{\mathcal{K}} \underline{\supset} \leftrightarrow \frac{h_{\mathcal{K}} - h_{\mathcal{K}}}{\mathcal{K} h} L_{-\mathcal{K}} f$ si $h \neq \mathcal{K}$. Au niveau 1 le déterminant de Kac est proportionnel à h . Si $h \leftrightarrow \mathcal{K}$ on en déduit qu'on doit avoir $h_{\mathcal{K}} \leftrightarrow h_{\mathcal{K}}$. Donc deux modules ne peuvent contenir le module du "vide" $\underline{c}_h \leftrightarrow \mathcal{K} \underline{\supset}$ que s'ils sont de poids égaux, condition nécessaire pour que la fonction de corrélation à deux points correspondante puisse être différente de zéro. On peut en général analyser niveau par niveau ces règles de fusion.

6. Avec les données précédentes nous sommes maintenant en mesure de donner une construction générale des vecteurs singuliers. Considérons la fusion $\mathcal{F} \underline{\supset} M \underline{\supset}^c, h_{\mathcal{K}} \underline{\supset} \otimes M(c, h_{\mathcal{K}}) \underline{\supset}$ dans le cas où l'un au moins des modules de Verma correspondant possède un vecteur singulier. Par exemple $\phi_{\mathcal{K}} \underline{\supset} L \underline{\supset} f_{\mathcal{K}}$

Dans $V_{\mathbb{C}c, h_{\mathbb{K}}}$ il existe d'après la théorie générale un vecteur singulier au niveau 2 et c'est un exercice élémentaire que de l'expliciter, sans même faire appel à la section 4. On trouve

$$\phi_{\mathbb{K}, \mathbb{K}} \leftrightarrow L_{-\mathbb{K}} \not\cong \frac{\mathbb{K}}{t} L_{-\mathbb{K}}$$

Il est commode dans ce cas de choisir le point de fusion en $x_{\mathbb{K}}$ plutôt que $\frac{x_{\mathbb{K}}}{\mathbb{K}}$. On a alors

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}L_{-\mathbb{K}}} \otimes \mathbb{K} \not\cong \frac{\partial}{\partial z} \quad \mathcal{F}_{\mathbb{C}L_{-\mathbb{K}}} \otimes \mathbb{K} \not\cong \frac{h_{\mathbb{K}}}{z^{\mathbb{K}}} - \frac{\mathbb{K}}{z} \frac{\partial}{\partial z} \not\cong \sum_{k \leftrightarrow \mathbb{K}}^{\infty} z^{k-\mathbb{K}} L_{-k}$$

Demandons que $M_{\mathbb{C}c, h_{\mathbb{K}}}$ soit irréductible $\mathbb{C}\phi_{\mathbb{K}} f_{\mathbb{K}} \cong \mathbb{K}$ et transférons l'action de $\phi_{\mathbb{K}}$ dans le membre de droite de la fusion, il vient

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{\mathbb{K}} \not\cong \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} \frac{h_{\mathbb{K}}}{z^{\mathbb{K}}} - \frac{\mathbb{K}}{z} \frac{\partial}{\partial z} \not\cong \sum_{k \leftrightarrow \mathbb{K}}^{\infty} z^{k-\mathbb{K}} L_{-k} \right\} \sum_{p \geq \mathbb{K}} z^{p-\mathbb{C}h_{\mathbb{K}}} \not\cong h_{\mathbb{K}} - h \not\cong j - \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} f_{\mathbb{C}p} \not\cong \mathbb{K}$$

Le membre de gauche est un opérateur différentiel linéaire du second ordre, régulier, à coefficients opérateurs! Nous lui cherchons une solution en série de Puiseux. Comme $h_{\mathbb{K}} \not\cong h_{\mathbb{K}} - h \not\cong j - \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}}$ nous obtenons une relation de récurrence

$$p \not\cong \mathbb{C}\mathbb{K}j \not\cong \mathbb{K} \not\cong p \not\cong f_{\mathbb{C}p} \not\cong \frac{\mathbb{K}}{t} \sum_{k \geq \mathbb{K}} L_{-k} f_{\mathbb{C}p-k}$$

Rappelons que $f_{\mathbb{C}p}$ s'annule pour $p < \mathbb{K}$ et vaut f pour $p \leftrightarrow \mathbb{K}$. Comme nous nous y attendions par construction, nous obtenons une identité si $p \leftrightarrow \mathbb{K}$, tandis que pour $p \leftrightarrow \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots, \mathbb{K}j$ nous obtenons une relation de récurrence simple. Enfin lorsque $p \leftrightarrow \mathbb{K}j \not\cong \mathbb{K}$ le membre de gauche s'annule ce qui est une contrainte qui revient à annuler le vecteur singulier $\phi_{\mathbb{K}, j} \mathbb{C}L_{\mathbb{K}} f$ dans le module cible. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que l'algorithme qui nous produit $\phi_{\mathbb{K}, j}$ est identique à celui décrit dans la proposition 4.1 à une transformation d'équivalence près $J_{\pm} \rightarrow \mathbb{C}J_{\mp}^T$.

Nous obtenons le cas général par la fusion d'un produit de modules dont l'un au moins a un vecteur singulier. L'un des cas les plus économiques est la fusion

$$\mathbb{C}\mathbb{K}, j \not\cong \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} \otimes \mathbb{C}\mathbb{C}j', -\frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{C}j', j$$

où le premier module de Verma a un vecteur singulier de type connu au niveau $\mathbb{K}j \not\cong \mathbb{K}$ et où nous cherchons dans le module cible le vecteur singulier de type général au niveau $n \leftrightarrow \mathbb{C}\mathbb{K}j \not\cong \mathbb{C}\mathbb{K}j' \not\cong \mathbb{K}$. Quant à la notation $\mathbb{C}\mathbb{C}j', -\frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}}$ elle désigne comme précédemment le module de Verma génériquement irréductible $V_{\mathbb{C}c \mathbb{C}t, h_{\mathbb{K}}} \not\cong \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} \not\cong \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}} - tj \not\cong \mathbb{K} \not\cong \mathbb{K}$. Ceci nous conduit au résultat final.

Proposition 6.2

(i) Paramétrisant la charge centrale par $c \leftrightarrow \mathbb{K} \not\cong \mathbb{C}\theta \not\cong \theta^{-\mathbb{K}}$, $t \leftrightarrow \theta^{\mathbb{K}}$, les modules de Verma ayant des vecteurs singuliers ont un plus haut poids indexé par 2 "spins" j', j prenant les valeurs $\mathbb{K}, \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{K}}, \mathbb{K}, \dots$ selon

$$h_{j', j} \not\cong -\mathbb{C}j\theta \not\cong j'\theta^{-\mathbb{K}} \not\cong \mathbb{C}\mathbb{C}j \not\cong \mathbb{K} \not\cong \theta \not\cong \mathbb{C}j' \not\cong \mathbb{K}, \theta^{-\mathbb{K}}$$

Le vecteur singulier apparaît au niveau $n \leftrightarrow \mathbb{C}\mathbb{K}j \not\cong \mathbb{C}\mathbb{K}j' \not\cong \mathbb{K}$. Si $jj' \leftrightarrow \mathbb{K}$ le vecteur singulier est donné par la proposition 4.1 et est de la forme $F \not\cong \phi_{\mathbb{K}, j} \mathbb{C}L_{\mathbb{K}} f$ ou $F \not\cong \phi_{j', \mathbb{K}} \mathbb{C}L_{\mathbb{K}} f$.

(ii) Si $jj' > k$, soit $f \equiv f^{\zeta k \zeta}$ le vecteur de plus haut poids dans $V_{\zeta c}$, $h \equiv h_{j', j \zeta}$. Posons $h_k \leftrightarrow h_{j', j \zeta} \frac{k}{z^k} h_k \leftrightarrow \mathbb{1} \mathbb{1} h_{-k, k} \frac{k}{z^k}$ comme ci-dessus et

$$\frac{k}{z^k} \leftrightarrow \phi_{j', j \zeta} \frac{k}{z^k} L_{-p} \rightarrow \frac{\zeta - k \zeta^p}{z^p} \left[h_k \zeta^p - k \zeta \frac{\partial}{\partial z} \zeta L_{-k} - \frac{\partial}{\partial z} \zeta \right] \frac{\partial}{\partial z} \sum_{k \geq k} z^k \zeta^k \frac{\partial^{p-k}}{\partial z^{p-k}} \zeta L_{-p-k} \zeta$$

Alors l'équation

$$\frac{k}{z^k} \sum_{k \geq k} z^{k-\zeta} h_k \frac{\partial}{\partial z} h_k - h_k \zeta f^{\zeta k \zeta} \leftrightarrow k$$

détermine récursivement $f^{\zeta k \zeta}$ pour $k < k < n \leftrightarrow \zeta k j \frac{\partial}{\partial z} k \zeta \zeta k j' \frac{\partial}{\partial z} k \zeta$ en terme de f et donne au niveau n à un facteur près

$$\phi_{j', j \zeta} L_{\zeta} f \leftrightarrow k$$

où $\phi_{j', j \zeta} L_{\zeta} f$ est le vecteur singulier au niveau n de $V_{\zeta c}$, $h_{j', j \zeta}$

Exemple: Construisons $\phi_{\frac{k}{z^k}, \frac{k}{z^k}} L_{\zeta}$ partant de

$$\begin{aligned} \phi_{k, k} &\leftrightarrow L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} L_{-k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} L_{-k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} L_{-k} \\ h_k &\leftrightarrow \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} - \frac{k}{z^k} t \\ L_{-k} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \quad L_{-k} \rightarrow \frac{h_k}{z^k} - \frac{k}{z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{k \geq k} z^{k-z} L_{-k} \\ L_{-k} &\rightarrow -\frac{k h_k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{k \leftrightarrow k} z^{k-k} \zeta k - k \zeta L_{-k} \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation différentielle du troisième ordre à coefficients opérateurs

$$\left\{ \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} h_k \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{k}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{p \geq k} z^{p-k} L_{-p} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right. \\ \left. \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} \zeta - \frac{k h_k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{p \geq k} z^{p-k} \zeta p - k \zeta L_{-p} \zeta \right\} \sum_{k \geq k} z^{k-k} \frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{\zeta k \zeta} \leftrightarrow k$$

Ceci est équivalent à la relation de récurrence

$$k \leftrightarrow k \zeta k - \frac{\partial}{\partial z} \zeta k - k - t^{-k} \zeta f^{\zeta k \zeta} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} t^{-k} \sum_{p \geq k} [k \zeta k - k - p \frac{\partial}{\partial z} t^{-k} \zeta \frac{\partial}{\partial z} \zeta p - k \zeta \zeta k \frac{\partial}{\partial z} t^{-k} \zeta] L_{-p} f^{\zeta k-p \zeta}$$

et nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} f^{\zeta k \zeta} &\leftrightarrow \frac{k}{z^k} L_{-k} f \\ f^{\zeta k \zeta} &\leftrightarrow \left[\frac{k}{z^k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \zeta k - t^{-k} \zeta L_{-k} \right] f \\ f^{\zeta k \zeta} &\leftrightarrow \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} \left[\frac{k}{z^k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \zeta k - t^{-k} \zeta L_{-k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{z^k} L_{-k} L_{-k} \frac{\partial}{\partial z} \zeta t^{-k} - k \zeta L_{-k} \right] f \end{aligned}$$

Arrive alors l'équation au niveau 4 qui nous fournit le vecteur singulier cherché

$$k \leftrightarrow \frac{k}{z^k} \phi_{\frac{k}{z^k}, \frac{k}{z^k}} L_{\zeta} f$$

avec

$$\phi_{\frac{p_k}{2}, \frac{p_k}{2}} \leftrightarrow L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} \int_{\mathbb{C}} t^{-p_k} \int_{\mathbb{C}} \frac{L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} \int_{\mathbb{C}} t^{\frac{p_k}{2}}}{t} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} \int_{\mathbb{C}} \frac{L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} - t^{\frac{p_k}{2}}}{t} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} - \int_{\mathbb{C}} t^{-p_k} \int_{\mathbb{C}} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}} L_{-p_k}^{\frac{p_k}{2}}$$

qu'on pourrait bien entendu réordonner en monômes $L_{-p_k} L_{-p_k} \dots$ où $p_k \leq p_k \leq \dots$

En matière d'épilogue nous nous bornerons à quelques remarques générales. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus on peut traduire l'existence de vecteurs singuliers par celle d'équations différentielles satisfaites par les fonctions de corrélation des champs correspondants. On connaît par ailleurs, au moins sur la sphère de Riemann, des expressions intégrales de ces corrélations qui généralisent celles des fonctions hypergéométriques. Il serait intéressant de parvenir à un formalisme unifié qui associe naturellement les aspects différentiels et intégraux. A ma connaissance ce programme reste à ce jour un vœu pieux.

Nous nous sommes bornés à l'algèbre de Virasoro. Il existe une extension de ce travail au produit semi-direct de l'algèbre de Virasoro par une algèbre de Kac Moody. On a aussi considéré l'extension "superconforme" de la précédente discussion.

Quelques références

Théorie conforme

- A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **241** (1983) 333–380.
et pour le contexte
- C. Itzykson, J.-M. Drouffe “*Théorie statistique des champs*” Interditions Paris (1989), édition anglaise “*Statistical field theory*” Cambridge University Press (1989).

Représentations de l’algèbre de Virasoro

- V. Kac, *Lect. Notes in Math.* **94** (1979) 441–445.
- B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Funct. Anal. Appl.* **17** (1982) 114–126.
- *Lect. Notes in Math.* **1060** (1984) 230–245.

Systèmes intégrables

- V.G. Drinfeld and V.V. Sokolov, *J. Sov. Math.* **30** (1985) 1975–2036.

Vecteurs singuliers

- L. Benoît, Y. Saint-Aubin, *Phys. Lett.* **215B** (1988) 517–522.
- M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson, J.B. Zuber, *Nucl. Phys.B* **362** (1991) 515–562.