



# Propriétés osmotiques et magnétiques des solutions d'hélium-3 dans l'hélium-4 superfluide

A. Ghozlan, Eric Varoquaux

► **To cite this version:**

A. Ghozlan, Eric Varoquaux. Propriétés osmotiques et magnétiques des solutions d'hélium-3 dans l'hélium-4 superfluide. *Annales de Physique*, EDP Sciences, 1979, 4, pp.239-327. <hal-01274282>

**HAL Id: hal-01274282**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01274282>**

Submitted on 15 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Propriétés osmotiques et magnétiques des solutions d'hélium-3 dans l'hélium-4 superfluide.

A. Ghozlan, E. Varoquaux

Université Paris-Sud, Institut d'Electronique Fondamentale, (L.A., C.N.R.S., n° 22) Bât. 220, F 91405 Orsay (France)

**Summary.** *Osmotic and magnetic properties of solutions of helium 3 in superfluid helium 4.*

We review in this paper recent theoretical and experimental work done at Orsay and elsewhere on  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures(\*). We start by showing that the set of thermodynamic variables ( $T, n, n_3, \mu_4$ ) is a privileged set for the description of a superfluid solution and we derive basic formulae of the statistical mechanics of boson-fermion mixtures. We insert in the formalism the equation of state, assumed to be known at the start, and the fact that  $^3\text{He}$  and  $^4\text{He}$  are isotopes. This simple approach leads in the dilute limit to the well-known theory of Bardeen-Baym-Pines that we summarize with its more recent developments. To go beyond this straight-forward construction, we parametrize the scattering amplitude of two interacting  $^3\text{He}$  quasi-particles with momenta  $\vec{p}$  and  $\vec{p}'$  in the following manner :

$$V(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}) = V_0 + V_1 q^2 + V_2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + V_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'$$

and we proceed to compute all the equilibrium thermodynamic properties of the mixtures. The derived expressions are valid at all temperatures below which the thermal excitations of  $^4\text{He}$  can be neglected ( $T < 0.5\text{K}$ ).

A thorough analysis of the experimental data obtained in our laboratory and elsewhere is given and the thermodynamic consistency of the experimental results is checked whenever possible. An extensive numerical comparison with the computed quantities is carried out with, as an outcome, the "best values" of the model parameters which are at zero pressure :

$$\begin{aligned} m_0^* &= 2.255 m_3 \\ V_0 &= -1.4 \times 10^{-38} \text{ erg cm}^3 \\ V_1 &= -1.0 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \\ V_2 &= 0.8 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \end{aligned}$$

This set of parameters gives a good description ( $\sim 1 - 2\%$ ) of the osmotic pressure, the susceptibility, the heat of mixing and a fair account ( $\sim 5\%$ ) of the specific heat. To the accuracy of existing measurements, no concentration dependence of the potential need be considered.

**Résumé.** Nous donnons, dans cet article de revue, une synthèse de travaux récents effectués à Orsay et ailleurs, tant sur le plan théorique qu'expérimental sur les mélanges d' $^3\text{He}$  dans l' $^4\text{He}$ (\*). Nous commençons par montrer que le jeu de variables thermodynamiques ( $T, n, n_3, \mu_4$ ) fournit une description privilégiée de la solution superfluide et nous rappelons quelques formules fondamentales de la mécanique statistique des mélanges fermions-bosons. A ce formalisme, nous ajoutons la connaissance de l'équation d'état d'une part, et d'autre part le fait qu' $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  sont isotopes. Cette démarche directe mène, pour les solutions diluées, à la théorie bien connue de Bardeen-Baym-Pines dont nous donnons un condensé, ainsi que de ses développements récents. Pour aller au-delà de cette construction sans complication, nous introduisons la forme paramétrée suivante de l'amplitude de collision de deux quasi-particules  $^3\text{He}$  en interaction, de moments  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  :

$$V(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}) = V_0 + V_1 q^2 + V_2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + V_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'$$

et nous continuons par le calcul de l'ensemble des propriétés thermodynamiques d'équilibre des solutions. Les expressions trouvées sont valables à toutes les températures inférieures à celle à partir de laquelle les excitations thermiques de l' $^4\text{He}$  n'interviennent plus ( $T < 0,5\text{K}$ ).

(\*) Voir la liste des principaux symboles pages 324 à 327.

Une analyse complète des données expérimentales, en provenance de notre laboratoire et d'ailleurs, est effectuée et la cohérence thermodynamique de ces résultats est vérifiée chaque fois que possible. Une comparaison numérique poussée avec les quantités calculées a été menée à bien avec, comme résultat final, les "meilleures valeurs" des paramètres du modèle qui sont, à pression nulle,

$$\begin{aligned} m_0^* &= 2,255 m_3 \\ V_0 &= -1,4 \times 10^{-38} \text{ erg cm}^3 \\ V_1 &= -1,0 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \\ V_2 &= 0,8 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \end{aligned}$$

$V_0$  a une valeur très proche de potentiel de déformation de BBP. Ce jeu de paramètres donne une bonne description ( $\sim 1-2\%$ ) de la pression osmotique, de la susceptibilité, de la chaleur de mélange et une représentation moins bonne ( $\sim 5\%$ ) de la chaleur spécifique. A ces précisions, il n'apparaît pas nécessaire de tenir compte d'une éventuelle dépendance en concentration du potentiel d'interaction.

## I. Introduction

L'hélium-4 d'abord, puis son isotope stable, l'hélium-3, ont depuis leur découverte suscité un grand intérêt qui ne se dément pas. La superfluidité de l'hélium-4 liquide ne possède toujours pas de description théorique satisfaisante. La connaissance expérimentale de l'hélium-3 en tant que liquide de Fermi-Landau normal est encore imparfaite et celle du superfluide anisotrope pratiquement dans les limbes. Les solutions diluées d'hélium-3 dans l'hélium-4 superfluide ont également fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques et expérimentales après que J.G. Daunt et D.O. Edwards [1] eurent montré qu'elles restaient stables même au zéro absolu avec une concentration molaire saturante en  $^3\text{He}$  d'environ 6,5 %. La généralisation de l'emploi des réfrigérateurs à dissolution d'hélium-3 dans l'hélium-4 leur confère une grande importance pratique. Un de leurs aspects fondamentaux le plus intéressant est que ces mélanges constituent une réalisation concrète d'un ensemble de fermions interagissants dont la densité peut être modifiée dans de larges limites. Cet article fait le point de l'état actuel de compréhension de ces solutions. Il a pour but d'exposer un modèle phénoménologique qui rend compte de leurs propriétés d'équilibre. Ce modèle est valable pour les solutions peu concentrées ( $x < 10\%$ ), à des températures telles que les excitations thermiques de l'hélium-4 puissent être négligées.

A la suite de cette *introduction*, nous construisons, de manière élémentaire, au *chapitre II* la thermodynamique et la mécanique statistique des mélanges bosons-fermions. Cette construction formelle donne les expressions des différentes dérivées des potentiels chimiques. Le jeu de variables thermodynamiques le plus favorable à une comparaison avec les théories microscopiques est  $(T, n, n_3, \mu_4)$ ,  $T$  température,  $n$  densité numérique totale, toutes espèces chimiques comprises,  $n_3$ , densité numérique de l'hélium-3 solution;  $\mu_4$ , le potentiel chimique de l'hélium-4 contient l'influence des contraintes extérieures. L'existence du spin de l'hélium-3 oblige à distinguer les populations à spin en haut,  $\uparrow$ , et en bas  $\downarrow$ . Cette distinction rendra compte des fluctuations  $\uparrow\downarrow$  du système. Ces fluctuations sont liées à l'existence d'une susceptibilité magnétique.

Le problème du choix du jeu de variables thermodynamiques et d'un modèle phénoménologique pour décrire le comportement des atomes d'hélium-3 en solution dans l'hélium-4 superfluide a été abordé par de nombreux auteurs. En 1948, Landau et Pomeranchuk [2] ont assimilé le comportement des solutions très diluées à celui d'un système de quasi-particules classiques sans interaction. Ce modèle a servi de base à l'interprétation des premières expériences qui en ont confirmé la validité et montré qu'à suffisamment basse température, bien en-dessous de 1 Kelvin, la statistique de Fermi à laquelle obéissent les quasi-particules d' $^3\text{He}$  commence à jouer un rôle important. Ces premiers tra-

vaux sur les solutions isotopiques de l'hélium ont été résumés dans un certain nombre d'études bibliographiques [3]. Il est assez vite apparu que si le concept de masse effective d'un atome d' $^3\text{He}$  se propageant dans un bain superfluide permet de rendre compte assez bien des mesures de chaleur spécifique, pression osmotique, susceptibilité magnétique, . . . , les interactions entre atomes de soluté jouent un rôle important dans des solutions où la dilution n'est pas extrême. Une étude marquante du potentiel effectif d'interaction, révélant l'origine physique de celui-ci, a été effectuée par J. Bardeen, G. Baym et D. Pines [4]. Nous conclurons notre deuxième chapitre par une brève revue du travail de ces auteurs (BBP) dont les résultats essentiels auront été établis par des méthodes élémentaires auparavant.

Le *troisième chapitre* est consacré à l'exposé détaillé du modèle de quasi-gaz en interaction que nous avons retenu. Cette interaction a un caractère non-local qui provient de la non-invariance galiléenne du quasi-gaz d'hélium-3, auquel on ne peut imprimer un mouvement de translation uniforme indépendant de celui du solvant d'hélium-4 dans lequel il se trouve. Comme nous le montrerons, à côté d'une interaction purement locale  $V(q)$  semblable à celle qui prévaut dans un gaz où les atomes interagissent par l'intermédiaire d'un potentiel indépendant des vitesses du type de Van der Waals, deux termes nouveaux apparaissent. A l'ordre le plus bas dans les moments des quasi-particules  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ , ( $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ ), ces termes prennent,

– pour le premier, une forme dipolaire hydrodynamique

$$V_{\text{dip}} \propto (\vec{p} \cdot \vec{q}) (\vec{p}' \cdot \vec{q}) / q^2 \quad (1)$$

– pour le second, une forme scalaire

$$V_s \propto \vec{p} \cdot \vec{p}', \quad (2)$$

Le premier terme a été considéré d'abord par BBP et son incidence sur les propriétés thermodynamiques a été évaluée, au zéro absolu, par Ebner et Edwards [5]. Le second terme, dont nous montrons qu'il constitue une contribution distincte mais de même importance que la première, a été introduit par Disatnik et Brücker [6] pour traduire le caractère non-local de l'interaction.

A partir de cette interaction effective, et en tenant compte d'une petite dépendance en  $\vec{p}$  de la masse effective  $m^*$  d'une quasi-particule de moment  $\vec{p}$ , nous exposons le calcul du potentiel chimique de l' $^3\text{He}$  en solution au *chapitre IV*. La connaissance de  $\mu_3$  livre celle des autres propriétés d'équilibre, la pression osmotique  $\pi$ , la susceptibilité magnétique  $\chi$ , la densité numérique en  $^4\text{He}$  de la solution  $n_4$ , son énergie libre, sa chaleur spécifique et son entropie. Nous avons d'autre part considéré les propriétés hydrodynamiques des solutions, caractérisées par la masse inertielle  $m_I$  des quasi-particules d' $^3\text{He}$ . La différence entre masse inertielle  $m_I$  et masse effective  $m^*$  provient du caractère non-local de l'interaction. La vitesse du second son est reliée d'une manière simple à  $m_I$  et à la compressibilité osmotique [7]. Les propriétés de transport des solutions ne sont pas retenues dans notre analyse. Elles ont fait l'objet d'un article de synthèse récent et très complet de G. Baym et C. Pethick [8].

Au *chapitre V*, nous passons en revue l'ensemble des résultats expérimentaux. Nous présentons une revue critique des différentes expériences publiées dans la littérature et celles effectuées au laboratoire et nous établissons leur cohérence thermodynamique. Ces différents résultats nous permettent, au *chapitre VI*, de déterminer, par une analyse numérique complète, les paramètres mis en jeu dans notre modèle.

En résumé, nous présentons ici une approche systématique [9] d'une description phénoménologique des interactions entre quasi-particules d' $^3\text{He}$  en solution. Cette approche réalise une synthèse et un prolongement des travaux de Disatnik – Brucker [6] et Ebner-

Edwards [5]. Elle rend compte de toutes les formes possibles du caractère non-local de l'interaction. La simplicité de ce modèle a permis le développement d'une paramétrisation unifiée des différentes propriétés d'équilibre des solutions. Les expressions obtenues sont valables à toute température et nous ont permis de relier l'ensemble des résultats expérimentaux entre eux à l'aide d'un petit nombre de paramètres.

## II. Thermodynamique et mécanique statistique des mélanges bosons-fermions

**II.1. La thermodynamique formelle.** — Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques formules générales de thermodynamique et de mécanique statistique appliquées au cas des solutions d'hélium-3 et d'hélium-4. L'hélium-4 est pris comme solvant, et l'hélium-3 comme soluté, mais les solutions ne sont pas nécessairement considérées comme diluées en hélium-3. Les hélium-3 de spins opposés,  $\uparrow$  et  $\downarrow$ , sont représentés par deux espèces chimiques différentes pour mettre explicitement en évidence les effets de statistique et d'échange. Cette distinction est toutefois limitée au cas des champs magnétiques appliqués évanescents et la symétrie des propriétés des deux directions de spin, implicitement admise, est utilisée pour simplifier l'écriture.

La structure formelle de la thermodynamique est construite suivant les prescriptions habituelles, données par exemple par H.B. Callen [10]. Le point de départ est l'énergie libre de Helmholtz  $F$  dont les variables naturelles sont la température  $T$ , le volume  $\Omega$ , le nombre de particules de chaque espèce chimique,  $N_\uparrow$ ,  $N_\downarrow$  et  $N_4$

$$F = E - TS = -P\Omega + \sum_i \mu_i N_i, \quad (1)$$

où les symboles utilisés ont leur signification habituelle, rappelée en appendice. La différentielle de  $F$  s'écrit

$$dF = -S dT - Pd\Omega + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont des équations fondamentales, c'est à dire ayant tout le contenu des deux principes de la thermodynamique. Il est commode, comme l'ont fait BBP [4] et de nombreux auteurs à leur suite, de passer aux variables réduites  $T$ ,  $n$ ,  $n_\uparrow$ ,  $n_\downarrow$  en divisant tous les paramètres extensifs par le volume  $\Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F} = \frac{F}{\Omega} = -P + z_\uparrow n_\uparrow + z_\downarrow n_\downarrow + \mu_4 n, \\ d\mathfrak{F} = -\mathfrak{S} dT + z_\uparrow dn_\uparrow + z_\downarrow dn_\downarrow + \mu_4 dn. \\ n = \frac{N_\uparrow + N_\downarrow + N_4}{\Omega}, \quad \mathfrak{S} = \frac{S}{\Omega} \\ z_\uparrow = \mu_\uparrow - \mu_4, \quad z_\downarrow = \mu_\downarrow - \mu_4 \end{array} \right. \quad (3)$$

Les relations de définition des grandeurs conjuguées aux variables d'état ( $T$ ,  $n$ ,  $n_\uparrow$ ,  $n_\downarrow$ ) sont les équations d'état réduites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S} = - \left. \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} \right|_{n, n_\uparrow, n_\downarrow}, \\ z_\uparrow = \left. \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial n_\uparrow} \right|_{T, n, n_\downarrow}, \quad z_\downarrow = \left. \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial n_\downarrow} \right|_{T, n, n_\uparrow} \\ \mu_4 = \left. \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial n} \right|_{T, n_\uparrow, n_\downarrow} \end{array} \right. \quad (4)$$

Les relations de Maxwell correspondantes s'écrivent, pour quelques unes d'entre elles :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, n, n_{\downarrow}} = \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial T} \Big|_{n, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} \\ -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\partial \mu_4}{\partial T} \Big|_{n, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} \\ \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\partial \mu_4}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, n} \end{array} \right. \quad (5)$$

La relation de Gibbs-Duhem, obtenue en différentiant (1) et en égalant le résultat à (2) donne la quatrième équation d'état, qui contient explicitement la pression, en fonction des trois autres (4) :

$$dP = \mathcal{S} dT + n_{\uparrow} dz_{\uparrow} + n_{\downarrow} dz_{\downarrow} + n d\mu_4, \quad (6)$$

Les relations (3) et (6) sont les relations fondamentales de la représentation  $(T, n, n_{\uparrow}, n_{\downarrow})$ . Sous forme intégrale, l'équation d'état (6) relie la pression au volume, à la température et à la concentration. Ecrivons explicitement les relations de définition des volumes partiels de l'hélium-3 et de l'hélium-4 :

$$\omega_{\uparrow} = \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial P} \Big|_{T, x_{\uparrow}, x_{\downarrow}} = \frac{\partial \Omega}{\partial N_{\uparrow}} \Big|_{T, P, N_{\downarrow}, N_4}, \quad \omega_4 = \frac{\partial \mu_4}{\partial P} \Big|_{T, P, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} = \frac{\partial \Omega}{\partial N_4} \Big|_{T, P, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}} \quad (7)$$

définitions qui entraînent les égalités suivantes :

$$n\omega_4 + n_{\uparrow}\omega_{\uparrow} + n_{\downarrow}\omega_{\downarrow} = 1, \quad \Omega = N\omega_4 + N_{\uparrow}\omega_{\uparrow} + N_{\downarrow}\omega_{\downarrow}. \quad (8)$$

La quantité  $\omega_{\uparrow}$  représente la différence de volume entre un atome d' $^3\text{He}$  et un atome d' $^4\text{He}$  dans la solution. Les changements de pression avec des variations de densité numérique totale et d'hélium-3 sont donnés par :

$$\frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\omega_4}{\kappa}, \quad \frac{\partial P}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, n, n_{\downarrow}} = \frac{\omega_{\uparrow}}{\kappa} \quad (9)$$

où  $\kappa$  est la compressibilité du mélange définie par

$$\kappa = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial P} \Big|_{T, x}, \quad (10)$$

$x$  désignant la concentration molaire de la solution.

Dans la limite des concentrations évanescentes, on retrouve la compressibilité du solvant pur :

$$\kappa_{40} = \frac{\omega_{40}}{m_4 s_{40}^2} \quad (11)$$

où  $\omega_{40}$  est le volume par atome et  $s_{40}$  la vitesse du son de  $^4\text{He}$  pur. La dilatation thermique a été négligée, ce qui est une bonne approximation en dessous de 1 K.

Terminons cette nomenclature thermodynamique en introduisant le paramètre de BBP,  $\alpha$ , défini par la relation

$$\Omega = N(1 + \alpha x) \omega_{40} \quad (12)$$

La connaissance de  $\alpha(T, P, x)$  ainsi que celui du volume par atome  $\omega_{40}$  de  ${}^4\text{He}$ -pur entraîne celle de  $\omega_4$  et  $\omega_\uparrow$  par les relations suivantes :

$$\omega_4 = \omega_{40} \left( 1 - x^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{T, P} \right), \quad \omega_\uparrow = \omega_{40} \left( \alpha + x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \Big|_{T, P} \right) \quad (13)$$

Nous étudierons les renseignements apportés par la connaissance de l'équation d'état sur les fonctions thermodynamiques des solutions plus loin.

Auparavant, et avant même de présenter la mécanique statistique formelle des solutions, examinons la question du choix du jeu de variables thermodynamiques le mieux adapté à la description de solutions de fermions dans un solvant superfluide.

**II.2. Le choix du jeu de variables thermodynamiques.** — Les différentes expressions formelles de la thermodynamique à l'aide d'autres jeux de variables que celui considéré jusqu'ici sont bien entendu équivalentes. La préférence ne peut être donnée à un jeu particulier que grâce à des informations supplémentaires sur la nature du système considéré. Prenons donc en compte le fait que l' ${}^4\text{He}$  est superfluide. La superfluidité se traduit par l'existence d'un ordre à grande distance, c'est-à-dire par une fonction d'onde s'étendant à l'échelle macroscopique. La variable thermodynamique correspondant à ce degré de liberté interne est la vitesse  $\vec{v}_s$  de la composante superfluide, distincte de la vitesse d'écoulement habituelle du fluide (11). L'introduction d'une variable thermodynamique supplémentaire complique en principe la description du système. Toutefois la contribution des termes en  $\vec{v}_s$  à l'énergie libre du système reste très faible tant que les vitesses rencontrées sont inférieures au seuil auquel la destruction de la superfluidité commence à s'établir. Il est donc licite de ne pas prendre  $\vec{v}_s$  en ligne de compte dans la construction de la thermodynamique des phénomènes d'équilibre. Par contre, comme le mouvement du superfluide est régi par l'équation (11)

$$m_4 \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} m_4 \vec{v}_s^2 + \mu_4 \right) = 0, \quad (14)$$

la condition de régime stationnaire avec des vitesses faibles se traduit par la constance de  $\mu_4$  dans la solution. Pour préciser la signification de cette constatation, invoquons un résultat [7] valable en toute généralité pour les solutions superfluides, selon lequel toute perturbation de  $\mu_4$  se propage comme une onde à la vitesse du second son, c'est-à-dire, typiquement, à 20 m/s. L'équilibre de potentiel chimique dans la solution superfluide s'établit moins vite que celui de pression hydrostatique, qui se propage à la vitesse du premier son, soit environ 240 m/s (à pression nulle), mais considérablement plus rapidement que ceux résultant des processus de diffusion dans les solutions usuelles. Sur des distances inférieures au libre parcours moyen des excitations élémentaires, l'équilibre s'établit au sein du superfluide à la vitesse du premier son.

On peut donc s'attendre à ce que  $\mu_4$  joue un rôle particulier comme variable d'état. Mais indépendamment de ceci montrons que le choix de  $\mu_4$  comme variable suggéré par l'équation (14) se traduit par une simplification formelle.

Passons des variables  $(T, n, n_\uparrow, n_\downarrow)$  aux variables  $(T, \mu_4, n_\uparrow, n_\downarrow)$ . Le potentiel chimique  $\mu_4$  étant conjugué de  $n$ , comme l'indique la dernière des relations (4) qui s'écrit

$$\mu_4 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n} \Big|_{T, n_\uparrow, n_\downarrow},$$

le potentiel thermodynamique correspondant aux nouvelles variables est déduit de  $\mathcal{F}$  par une transformation de Legendre. Ce nouveau potentiel, que nous appelons énergie libre osmotique, s'écrit :

$$\mathcal{F}^{0s}(T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) = \mathcal{F} - n \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n} \right|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = -P + \mathcal{S}T + z_{\uparrow}n_{\uparrow} + z_{\downarrow}n_{\downarrow} \quad (15)$$

Il a pour différentielle

$$d\mathcal{F}^{0s} = -\mathcal{F} dT + z_{\uparrow} dn_{\uparrow} + z_{\downarrow} dn_{\downarrow} - nd\mu_4 \quad (16)$$

Remarquons que, si l'on maintient  $\mu_4$  constant, la relation de Gibbs-Duhem [6] se réduit à :

$$dP = \mathcal{S}dT + n_{\uparrow} dz_{\uparrow} + n_{\downarrow} dz_{\downarrow} \quad (17)$$

Les relations (15) et (17) sont formellement identiques à celles qui caractérisent un système à un composant. Cette remarque serait peu significative si l'analogie ne se poursuivait plus loin.

Considérons d'abord la pression osmotique d'une solution constituée en ajoutant à un bain de  ${}^4\text{He}$  pur des atomes de  ${}^3\text{He}$  en maintenant le potentiel chimique  $\mu_4$  constant (ainsi que la température). La pression osmotique  $\Pi$ , qui sera introduite et étudiée d'une manière détaillée au chapitre IV, est une fonction des variables  $(T, n_3 = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}, \mu_4)$  caractérisant la solution. Elle est égale, par définition, à la variation de la pression du liquide résultant de l'addition des  ${}^3\text{He}$ , soit

$$\Pi = \int_0^{n_3} \left. \frac{\partial P}{\partial n'_3} \right|_{T, \mu_4} dn'_3 \quad (18)$$

L'intégrande peut être évalué à l'aide de la relation de Gibbs-Duhem, qui donne :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4} = n_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4} \quad (19)$$

Il en résulte l'expression suivante

$$\Pi = \int_0^{n_3} n'_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n'_3} \right|_{T, \mu_4} dn'_3 \quad (20)$$

Cette relation est strictement identique à celle qui relie la pression  $P$  d'un gaz au potentiel chimique  $\mu$  :

$$P = \int_0^{n_3} n' \left. \frac{\partial \mu}{\partial n'} \right|_T dn' \quad .$$

Dans la limite où les interactions sont négligeables, on retrouve la formule du gaz parfait qui, à  $T = 0$ , s'écrit :

$$\Pi(0, \mu_4, n_3) = \frac{2}{3} \mathcal{E}_F(0, n_3), \quad (21)$$

$\mathcal{E}_F$  étant l'énergie par unité de volume du gaz de Fermi idéal.

Dans ce même cas limite, les résultats obtenus à l'aide d'autres jeux de variables par C. Ebner [12], E. Varoquaux [13], J. Seiden [14], sont respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi(0, P, n_3) = \frac{2}{3} \mathcal{E}_F \left[ 1 + \frac{5 n_3}{8 n_4} (1 + \alpha_0) \right] , \\ \Pi(0, P, x) = \frac{2}{3} \mathcal{E}_F \left[ 1 + \frac{5}{8} x (1 - \alpha_0) \right] , \\ \Pi(0, n_3, n) = \frac{2}{3} \mathcal{E}_F [1 + \alpha x] \end{array} \right. \quad (22)$$

Ces différentes expressions redeviennent identiques [15] lorsque l'on fait intervenir les termes d'ordre supérieur, qui apparaissent comme des corrections aux termes d'interaction [16] et ne sont en réalité que des conséquences triviales du choix du jeu de variables décrivant la présence du solvant.

Revenons à l'expression complète (20). L'argumentation précédente amène à la question de la différence entre la pression d'un gaz et la pression osmotique d'un soluté. La première est, comme de bien entendu, une pression réelle : elle s'exerce sur les parois d'un récipient et se mesure directement à l'aide d'une capsule monométrique. La seconde est une pression fictive [17], une tension interne sur le solvant : sa mise en évidence nécessite, en principe, la présence d'une membrane semi-perméable. Si ces deux pressions correspondent à des réalités physiques différentes, leurs expressions mathématiques peuvent toutefois être mises sous des formes identiques. Ce résultat a été établi pour les systèmes obéissant à la mécanique classique par W.G. Mc Millan et J.E. Mayer [18] en 1945. On voit par le raisonnement élémentaire qui conduit à (20) qu'il s'applique en toute généralité.

Poursuivons l'analogie solution-gaz. Elle s'applique par construction aux potentiels chimiques des solutés  $z_\uparrow$  et  $z_\downarrow$ . Quant à l'entropie, elle s'écrit, dans le système  $(T, n, n_\uparrow, n_\downarrow)$ , à l'aide des relations de Maxwell (5) et de l'identité d'Euler pour une fonction homogène du premier ordre, sous la forme habituelle :

$$\mathcal{S} = n \frac{\partial \mu_4}{\partial T} \Big|_{n, n_\uparrow, n_\downarrow} - n_\uparrow \frac{\partial z_\uparrow}{\partial T} \Big|_{n, n_\uparrow, n_\downarrow} - n_\downarrow \frac{\partial z_\downarrow}{\partial T} \Big|_{n, n_\uparrow, n_\downarrow} \quad (23)$$

L'expression (23) conserve la symétrie des différents composants de la solution, au contraire de l'expression de  $\mathcal{S}$  dans le système  $(T, \mu_4, n_\uparrow, n_\downarrow)$ , obtenue de manière similaire :

$$\mathcal{S}(T, \mu_4, n_\uparrow, n_\downarrow) = \mathcal{S}(T, \mu_4, 0, 0) - \int_0^{n_\uparrow} \frac{\partial z_\uparrow}{\partial T} \Big|_{n'_\uparrow, n'_\downarrow, \mu_4} dn'_\uparrow - \int_0^{n_\downarrow} \frac{\partial z_\downarrow}{\partial T} \Big|_{n'_\uparrow, n'_\downarrow, \mu_4} dn'_\downarrow \quad (24)$$

La constante d'intégration est l'entropie de l'hélium-4 pur au potentiel chimique  $\mu_4$  et à la température  $T$ . Cette entropie est celle du gaz d'excitations élémentaires [19] existant à cette température. En dessous de 0,5 K, elle est extrêmement faible et négligeable devant celle qui provient de la présence de  $^3\text{He}$ . Si l'on n'en tient pas compte, la formule (24) se réduit à l'expression de l'entropie du gaz de fermions de spin 1/2.

Ainsi, pour la pression osmotique, le potentiel chimique et l'entropie, la solution se comporte, à  $\mu_4$  fixé, comme le gaz équivalent. On voit le caractère singulier de cette représentation de la solution à l'aide des variables,  $T, \mu_4, n_\uparrow, n_\downarrow$  qui tire le meilleur

parti de la quantité très faible d'informations ajoutée aux relations générales de la thermodynamique. Ces informations sont les suivantes : 1) l'entropie du solvant pur est négligeable, 2) l'équilibre de  $\mu_4$  s'établit suffisamment vite pour que cette quantité soit une bonne variable d'état. Elles permettent d'atteindre la conclusion qu'il est possible de décrire les propriétés de la solution dans les mêmes termes que celles d'un gaz de fermions en interaction. Les paramètres de ce gaz ne dépendent que de  $\mu_4$ . Le potentiel chimique de l'hélium-4 pur hypothétique qui sert de réservoir de particules (permettant de maintenir  $\mu_4$  constant) ne varie pratiquement pas avec la température en-dessous de  $0,5 K$  et ne dépend que de la pression. Le modèle du gaz équivalent en est d'autant plus utile. Un tel modèle a été proposé pour les solutions diluées d' $^3\text{He}$  dans l' $^4\text{He}$  superfluide par I. Pomeranchuk [2]. La discussion qui vient d'être présentée montre que ce modèle repose sur des considérations très générales et que sa validité n'est pas limitée aux solutions diluées. Quand la concentration en  $^3\text{He}$  augmente, on passe d'une situation de gaz presque parfait à celle de gaz dense et l'influence des interactions entre quasi-particules du quasi-gaz devient prépondérante. La suite logique à notre approche de la description des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  superfluides serait donc de chercher maintenant à caractériser ces interactions, qui seront prises binaires et décrites par une amplitude de collision au chapitre III. Comme nous nous restreindrons au cas de solutions pas trop concentrées et d'interactions faibles, nous allons d'abord introduire ce cas limite à partir de situations plus générales décrites par la mécanique statistique des solutions.

**II.3. La mécanique statistique formelle.** — Par lui-même, le formalisme de la mécanique statistique n'est pas un moyen d'investigation plus puissant que celui de la thermodynamique. Toutefois il donne une description différente des propriétés macroscopiques, en introduisant un certain nombre de concepts comme ceux de fonction de corrélation et de fonction de distribution de paires qui rendent plus aisé le passage aux théories microscopiques. Il permet en outre de tenir compte explicitement du fait que les quasi-particules d' $^3\text{He}$  obéissent à la statistique de Fermi.

La mécanique statistique des solutions [20] est fondée sur les liens existant entre les fluctuations de densité des différentes particules dans l'ensemble grand canonique et les dérivées des potentiels chimiques des différentes espèces par rapport aux densités. Pour établir ces liens, considérons une partie, de volume  $\Omega$ , d'un ensemble d'extension infinie, contenant  $N_\alpha, N_\beta, \dots, N_\nu$  particules d'espèces différentes. Ce système possède une collection d'états d'énergie  $E \{n, N_i\}$ ,  $n$  représentant l'ensemble des nombres quantiques désignant un état donné. A l'aide de la grande fonction de partition,

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\{n, N_\alpha\}} \exp \left[ \beta \left( \sum_\alpha \mu_\alpha - E \{n, N_\alpha\} \right) \right], \quad (25)$$

la moyenne sur l'ensemble grand canonique d'un observable  $\mathcal{O}$  s'écrit

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathfrak{Z}^{-1} \sum_{\{n, N_\alpha\}} \exp \left[ \beta \left( \sum_\alpha \mu_\alpha N_\alpha - E \{n, N_\alpha\} \right) \right] \langle n, N_\alpha | \mathcal{O} | n, N_\alpha \rangle. \quad (26)$$

En différentiant la fonction de partition (25) et en comparant à (26) on trouve que les moyennes statiques du nombre de particules  $N_\alpha$  dans le volume  $\Omega$  et du nombre de particules prises deux à deux sont représentées par :

$$\langle N_\alpha \rangle = k_B T \mathfrak{Z}^{-1} \left. \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_\alpha} \right|_{\mu_\nu, T, \Omega}, \quad (27)$$

$$\langle N_\alpha N_\beta \rangle = (k_B T)^2 \mathfrak{Z}^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mu_\alpha \partial \mu_\beta} \Big|_{\mu_\nu, T, \Omega} \quad (28)$$

Les relations (27) et (28) relient les fluctuations des densités de particules et de paires de particules aux dérivées de la fonction de partition. Elles permettent d'établir le lien entre ces fluctuations et les grandeurs thermodynamiques du système. Différentions en effet (27) par rapport à  $\mu_\beta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle N_\alpha \rangle}{\partial \mu_\beta} \Big|_{\mu_\nu, T, \Omega} &= k_B T \left[ \mathfrak{Z}^{-1} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mu_\alpha \partial \mu_\beta} - \mathfrak{Z}^{-2} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_\beta} \right] \\ &= (k_B T)^{-1} [\langle N_\alpha N_\beta \rangle - \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle] \end{aligned} \quad (29)$$

Le second membre de la relation (29) met en jeu la moyenne spatiale des fonctions de distributions radiales  $g_{\alpha\beta}(r)$ . En effet, on a [18] :

$$\langle N_\alpha N_\beta \rangle - \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle = \Omega \left\{ n_\alpha n_\beta \int d^3r [g_{\alpha\beta}(r) - 1] + n_\alpha \delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (30)$$

Un calcul exact de  $g_{\alpha\beta}(r)$  à partir des premiers principes est, en général, très difficile. Il suppose une connaissance très précise de la fonction d'onde du système à  $N$ -particules. Les théories de perturbation fournissent une bonne approximation de la valeur de l'énergie de l'état de base mais ne donnent qu'une représentation peu approchée de la fonction d'onde. Il en est de même de toute autre technique variationnelle. L'évaluation directe des fonctions de distribution radiales ne conduit pas à des résultats satisfaisants dans les expressions (30) et (29). Toute information, même seulement qualitative, sur les corrélations spatiales des atomes des différents constituants peut cependant se traduire directement, à l'aide du système d'équations (29), sur les propriétés thermodynamiques de la solution [21]. Introduisons les fonctions de corrélation réduites :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\Omega}{k_B T} \frac{\langle N_\alpha N_\beta \rangle - \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle}{\langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle} \quad (31)$$

Avec ces fonctions réduites, le système (29) se réécrit sous la forme ( $n_\nu = N_\nu/\Omega$ ) :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial \mu_\beta} \Big|_{T, \mu_\nu} = n_\alpha n_\beta \gamma_{\alpha\beta} \quad (32)$$

Les propriétés des jacobiens permettent d'inverser aisément le système (32) :

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial n_\beta} \Big|_{T, n_\nu} = \frac{1}{n_\alpha n_\beta} \frac{|\gamma_{\alpha\beta}|}{|\gamma|} \quad (33)$$

où  $|\gamma|$  et  $|\gamma_{\alpha\beta}|$  sont le déterminant et les cofacteurs des quantités  $\gamma_{\alpha\beta}$ .

La relation de Gibbs-Duhem (6), combinée aux relations (9), permet d'établir les formules qui relient les volumes partiels de la compressibilité aux quantités  $\gamma_{\alpha\beta}$

$$\omega_\alpha = \frac{\kappa}{n_\alpha} \sum_\beta \frac{|\gamma_{\alpha\beta}|}{|\gamma|} \quad (34)$$

La relation (35) est la généralisation à un système à plusieurs composants de la relation bien connue de Ornstein-Zernike entre les fluctuations de densité numérique et la compressibilité qui s'écrit, pour l'hélium-4 pur

$$\gamma_{44} = \kappa_{40} \quad (36)$$

Les relations (32) sont les règles de somme de compressibilité étendues aux systèmes à plusieurs constituants.

Dans le cas des solutions  $^3\text{He}-^4\text{He}$ , la symétrie entre directions de spin permet de réduire le nombre de fonctions de corrélation indépendantes :

$$\gamma_{\uparrow} = \gamma_{\downarrow} = \gamma', \quad \gamma_{\uparrow\uparrow} = \gamma_{\downarrow\downarrow} = \gamma_F, \quad \gamma_{\uparrow\downarrow} = \gamma_{\downarrow\uparrow} = \gamma'' . \quad (37)$$

Les dérivées thermodynamiques dans le système hybride  $T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}$ , sont obtenues par une inversion partielle du système (32). En utilisant les notations (37), elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial \mu_4} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = n^2 \frac{\gamma_t(\gamma_F + \gamma'') - 2\gamma'^2}{\gamma_F + \gamma''} , \\ \frac{\partial n}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = - \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial \mu_4} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{n}{n_{\uparrow}} \frac{\gamma'}{\gamma_F + \gamma''} , \\ \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\uparrow}} = - \frac{1}{n_{\uparrow} n_{\downarrow}} \frac{\gamma''}{\gamma_F^2 - \gamma''^2} , \\ \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = \frac{1}{n_{\uparrow}^2} \frac{\gamma_F}{\gamma_F^2 - \gamma'^2} \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\kappa = \frac{\gamma_t(\gamma_F + \gamma'') - 2\gamma'^2}{\gamma_F + \gamma'' - 4\gamma' + 2\gamma_t}, \quad \omega_4 = \frac{\kappa}{n} \frac{\gamma_F + \gamma'' - 2\gamma'}{\gamma_t(\gamma_F + \gamma'') - 2\gamma'^2}, \quad \omega_{\uparrow} = \frac{\kappa}{n_{\uparrow}} \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma_t(\gamma_F + \gamma'') - 2\gamma'^2} \quad (39)$$

**II.4. Qu'apporte la connaissance de l'équation d'état ?** — Le système (38) est d'une généralité extrême et ne représente qu'un passage des quatre dérivées thermodynamiques aux quatre fonctions de corrélation. Utilisons les expressions (39) qui, à cause de (8), ne comptent que deux relations indépendantes, pour éliminer deux des fonctions de corrélation inconnues  $\gamma'$  et  $\gamma_F + \gamma''$ . Cette opération équivaut à injecter dans le formalisme la connaissance de l'équation d'état. Les calculs sont aisés lorsqu'on a reconnu que :

$$(n\omega_4)^2 (\gamma_t - \kappa) = - 2n_{\uparrow}\omega_{\uparrow}n\omega_4(\gamma' - \kappa) = 2(n_{\uparrow}\omega_{\uparrow})^2 (\gamma_F + \gamma'' - 2\kappa) \quad (40)$$

Tout ce qu'on connaît sur les solutions  $^3\text{He}-^4\text{He}$  par la mécanique statistique et l'équation d'état est résumé dans le système d'équations auquel on aboutit et qui est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial \mu_4} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\kappa}{\omega_4^2} \left[ 1 - \frac{2\kappa}{\gamma_F + \gamma''} \right] , \\ \frac{\partial n}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = - \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial \mu_4} \Big|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\omega_{\uparrow}}{\omega_4} \left[ - 1 + \frac{\kappa}{n_{\uparrow}\omega_{\uparrow}(\gamma_F + \gamma'')} \right] , \\ \frac{\partial (z_{\uparrow} + z_{\downarrow})}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = \frac{1}{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} \frac{1}{\gamma_F + \gamma''} , \\ \frac{\partial (z_{\uparrow} - z_{\downarrow})}{\partial n_{\uparrow}} \Big|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = \frac{1}{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} \frac{1}{\gamma_F - \gamma''} . \end{array} \right. \quad (42)$$

Le système (42) met en jeu les deux fonctions de corrélation statiques  $\gamma_F$  et  $\gamma''$ . Ces fonctions sont propres au soluté et peuvent aisément être reliées à ses propriétés macroscopiques. Pour le montrer, considérons la relation de Gibbs-Duhem (6) qui, exprimée à  $T$  et  $\mu_4$  constants, conduit à l'expression suivante de la différentielle de la pression osmotique :

$$d\Pi = n_{\uparrow} dz_{\uparrow} + n_{\downarrow} dz_{\downarrow}, \quad (43)$$

ce qui se lit aussi, à l'aide de la 3<sup>e</sup> relation (42) :

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial n_{\uparrow}} \right|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = \frac{1}{n_{\uparrow}} \frac{1}{\gamma_F + \gamma''}. \quad (44)$$

Dans toutes ces expressions, comme il découle de l'hypothèse (37),  $n_{\uparrow}$  est pris égal à  $n_{\downarrow}$ . L'équation (44) établit le lien entre la quantité  $\gamma_F + \gamma''$  et la compressibilité osmotique du système. De même, conformément aux théorèmes généraux de fluctuation-dissipation [22], il existe une relation entre  $\gamma_F - \gamma''$  et la susceptibilité magnétique, dont la définition est :

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial H^2} (k_B T \text{Ln } \mathcal{Z}). \quad (45)$$

La susceptibilité s'exprime d'une manière particulièrement simple dans le cas des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  car seul l' $^3\text{He}$  possède un moment magnétique  $\mu_M$ . Un petit champ magnétique  $H$  a pour effet, au premier ordre en  $H$ , de déplacer les niveaux d'énergie des quasi-particules d' $^3\text{He}$  de la quantité  $\mu_M H$ . En incluant cet effet dans l'expression (25) de la grande fonction de partition, nous obtenons après dérivation :

$$\chi = 2 \mu_M^2 n_{\uparrow} n_{\downarrow} (\gamma_F - \gamma'') \quad (46)$$

Comme on le voit, les relations (44) et (46) décrivent des propriétés du quasi-gaz d' $^3\text{He}$  lui-même. Elles apportent une confirmation du bien-fondé de la description des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  comme un gaz, dilué ou dense, de quasi-particules d' $^3\text{He}$ , dans le superfluide qui agit comme un "vide mécanique" et dont les propriétés sont déterminées à partir de la connaissance de l'équation d'état. Les potentiels thermodynamiques des solutions sont obtenus par intégration du système (42). Les deux constantes d'intégration qui s'introduisent sont les énergies de liaison des atomes de  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  à l'hélium-4 pur.

D'autres formulations des propriétés des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  peuvent être données, dans le même cadre général de mécanique statistique. Par exemple, le choix des variables  $T$ ,  $n$ ,  $n_{\uparrow}$ ,  $n_{\downarrow}$  conduit aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \mu_4}{\partial n} \right|_{T, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} = \frac{\omega_4^2}{\kappa} + \frac{(2 n_{\uparrow} \omega_{\uparrow})^2}{n^2 (\gamma_F \kappa)}, \\ \left. \frac{\partial \mu_4}{\partial n_{\uparrow}} \right|_{T, n, n_{\downarrow}} = \left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n} \right|_{T, n_{\downarrow}, n_{\uparrow}} = \frac{\omega_4 \omega_{\uparrow}}{\kappa} - \frac{2 n_{\uparrow} \omega_{\uparrow}^2}{n (\gamma_F \kappa)}, \\ \left. \frac{\partial (z_{\uparrow} + z_{\downarrow})}{\partial n_{\uparrow}} \right|_{T, n, n_{\downarrow}} = 2 \frac{\omega_{\uparrow}^2}{\kappa} \left\{ 1 + \frac{\kappa}{\gamma_F - \kappa} \right\}, \\ \left. \frac{\partial (z_{\uparrow} - z_{\downarrow})}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{T, n, n_{\uparrow}} = \frac{1}{n_{\uparrow}^2} \frac{1}{\gamma_F - \gamma''}. \end{array} \right. \quad (47)$$

Ici, les fluctuations de densité totale interviennent par l'intermédiaire de la quantité  $\gamma_t - \kappa$ . Elles sont reliées à  $\gamma_F + \gamma''$  par les expressions (40) et sont également exprimables en fonction de quantités directement accessibles à l'expérimentation par diffusion de la lumière, comme l'ont montré L.P. Gorkov et L.P. Pitaevskii [23] et B.N. Ganguly et A. Griffin [24]. Le système (47), bien que strictement équivalent au système (42), est cependant moins commode pour l'étude des mélanges  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  superfluides car il ne met pas en relief les propriétés du soluté et l'image du quasi-gaz.

Revenons au système (42), auquel s'ajoutent les équations (44) et (46), et, pour conclure ce paragraphe sur la mécanique statistique des solutions, introduisons les hypothèses supplémentaires suivantes : 1) le spectre d'excitations d'une quasi-particule isolée est parabolique, 2) l'interaction effective entre atomes d' $^3\text{He}$  en solution est faible. Nous entendons par là que la pression osmotique peut se mettre sous la forme :

$$\Pi = \frac{2}{3} \mathcal{E}_F + \Pi_{\text{int}} , \quad (48)$$

où  $2/3 \mathcal{E}_F$  est la pression cinétique du gaz idéal, et  $\kappa_{\text{int}}$  est une pression due aux forces entre quasi-particules en solution. De même la susceptibilité magnétique s'écrira :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_F} + \frac{1}{\chi_{\text{int}}} , \quad (49)$$

où  $(\chi_F)^{-1} = \mu_M^{-2} \partial \mu_F / \partial n_3$  est la susceptibilité magnétique du gaz idéal et  $(\chi_{\text{int}})^{-1}$  le terme d'interaction. On suppose que  $m_0^*$  est le même pour  $\mathcal{E}_F$  et  $\chi_F$ . Si l'on s'en tient à la théorie habituelle [25] des gaz imparfaits de Fermi à température basse devant la température de dégénérescence, on obtient  $\Pi_{\text{int}}$  et  $\chi_{\text{int}}$  en fonction de la longueur de diffusion,  $a$ , caractérisant l'interaction à deux corps :

$$\Pi_{\text{int}} = - \frac{2 \pi \hbar^2 a}{m_0^*} (n_{\uparrow}^2 + n_{\downarrow}^2) + \epsilon_1(T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) , \quad (50)$$

$$\frac{1}{\chi_{\text{int}}} = \frac{2 \pi \hbar^2 a}{m_0^* \mu_M^2} + \epsilon_2(T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}) \quad (51)$$

$m_0^*$  est la masse effective des fermions, telle que  $k_B T_F = \hbar^2 k_F^2 / 2 m_0^*$  et  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des quantités petites, d'ordre supérieur en  $k_F a$  ou tout autre paramètre petit caractérisant le potentiel à deux corps. Ces termes tiennent compte du caractère approché de la description des interactions par une longueur de collision. En posant

$$V_{\text{int}} = - \frac{4 \pi \hbar^2 a}{m_0^*} , \quad (52)$$

nous pouvons exprimer les fonctions de corrélation sous la forme simple suivante

$$\frac{1}{\gamma_F + \gamma''} = n_{\uparrow} n_{\downarrow} \left( \frac{\partial \mu_{F\uparrow}}{\partial n_{\uparrow}} + V_{\text{int}} + \frac{1}{n_{\uparrow}} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial n_{\uparrow}} \right) , \quad (53)$$

$$\frac{1}{\gamma_F - \gamma''} = n_{\uparrow} n_{\downarrow} \left( \frac{\partial \mu_{F\uparrow}}{\partial n_{\uparrow}} - V_{\text{int}} + 2 \epsilon_2 \right) , \quad (54)$$

où  $\mu_{F\uparrow} = \hbar^2 / 2 m_0^* (6 \pi^2 n_{\uparrow})^{2/3}$  à  $T = 0$ . Le potentiel chimique est obtenu par intégration des relations (42), qui prennent la forme

$$\left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\uparrow}} \right|_{T, \mu_4, n_{\downarrow}} = \frac{\partial \mu_{F\uparrow}}{\partial n_{\uparrow}} + \text{termes petits}, \quad (55)$$

$$\left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{T, \mu_4, n_{\uparrow}} = V_{\text{int}} + \text{termes petits}, \quad (56)$$

$$z_{\uparrow} = \mu_{\uparrow} - \mu_4 = e_{30} + \mu_{F\uparrow} + n_{\downarrow} V_{\text{int}} + \delta \mu_{\uparrow}(T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}). \quad (57)$$

L'énergie de liaison  $e_{30}$  est l'énergie qu'il faut fournir à un atome d'hélium-3 pour le substituer à un atome d'hélium-4 dans le superfluide pur. La quantité  $\delta \mu_{\uparrow}(T, \mu_4, n_{\uparrow}, n_{\downarrow})$  symbolise l'existence de termes petits (d'une puissance en  $n_{\downarrow}$  ou  $n_{\uparrow}$  supérieure à 1). Le résultat exprimé par (57) est que le potentiel chimique du quasi-gaz,  $z_{\uparrow}$ , est de même forme que celui du gaz imparfait de Fermi. Au vu de la discussion du § II, un tel résultat ne surprend pas. Il est, rappelons-le, fondé sur la validité des expressions (48) et (49) de la pression osmotique et de potentiel chimique, expressions très bien confirmées par l'expérience [26, 27] même pour des concentrations assez élevées ( $x \sim 6-8\%$ ).

Nous avons illustré sur cet exemple comment les propriétés du soluté se trouvent décrites de manière formellement identique à celle d'un quasi-gaz en interaction faible. Ce modèle de quasi-gaz, dit de Landau-Pomeranchuk, sera formulé au chapitre III de manière plus détaillée, en approfondissant les propriétés du spectre à une quasi-particule d'une part, et en prenant une représentation très générale des interactions effectives entre quasi-particules d'autre part. Les expressions complètes des fonctions thermodynamiques sont établies au chapitre IV. Le couplage soluté-solvant, donné par les deux premières équations du système (42), met en jeu la compressibilité  $\kappa$  de la solution, le volume d'excès  $\omega_{\uparrow}$  et la compressibilité osmotique  $\partial \Pi / \partial n_{\uparrow} |_{T, \mu_4, n_{\downarrow}}$ . Ce couplage disparaît lorsque  $\kappa$  et  $\omega_{\uparrow}$  tendent à la fois vers zéro. Le superfluide n'est plus perturbé par la présence de l'hélium-3. Pareille indépendance se retrouve également sur les propriétés hydrodynamiques : les mouvements du fluide normal et du superfluide se séparent lorsque la densité de la solution est supposée ne dépendre ni de la pression ( $\kappa = 0$ ) ni de la concentration ( $\omega_{\uparrow} = 0$ ). Cette séparation des mouvements se démontre, pour les mélanges, de manière semblable au cas de l'hélium-4 pur, traité par Landau et Lifchitz [28]. Cette situation de découplage total correspond au cas envisagé par I. Pomeranchuk [2] et ne s'applique qu'aux solutions très diluées en  ${}^3\text{He}$  car  $\omega_{\uparrow} / \omega_4 = \alpha_0 = 0,29$  n'est pas une quantité très petite.

Une fois ce découplage réalisé ( $\omega_{\uparrow}$  et  $\kappa \rightarrow 0$ ), on constate sur le système II.42 que le quasi-gaz conserve un comportement de caractère général et qu'il n'y a en particulier aucune contrainte sur les interactions entre solutés, données par exemple par (52). Cette situation correspond au cas d'une solution arbitraire, que nous avons envisagé jusqu'à maintenant. Elle ne prend pas en compte le fait que pour des solutions isotopiques, les champs de force autour de chaque atome sont identiques. Dans ce cas, solvants et solutés ne sont discernables que par leur statistique. Si celle-ci est mise de côté pour les besoins du raisonnement, il reste que, dans le cas envisagé, l'interaction effective  $V_{\text{int}}$  entre solutés doit s'annuler. Ce raisonnement nous montre que la description des propriétés thermodynamiques donnée par le système II-42 est trop générale pour des solutions isotopiques et que nous pouvons chercher, en mettant en évidence le caractère spécial de ces solutions, à en donner une représentation plus fine.

**II.5 Les solutions isotopiques.** — Au paragraphe précédent, nous avons montré que la connaissance de l'équation d'état permet d'éliminer deux des quatre fonctions de

corrélation  $\gamma, \gamma_F, \gamma', \gamma''$  qui régissent le comportement du système. Ensuite, pour des solutions où les interactions entre atomes de soluté sont faibles, ce qui est le cas pour un mélange d'une dilution suffisante, les deux fonctions de corrélation restantes se réduisent à la combinaison d'un terme de gaz de Fermi idéal ( $\partial \mu_{F\uparrow} / \partial n_{\uparrow}$ ) et une constante d'interaction effective  $V_{\text{int}}$ . Les termes résiduels des expressions (53) et (54) sont, dans ce cas, petits et négligés. Dans ce paragraphe, nous cherchons à introduire dans les expressions de mécanique statistique le caractère isotopique de la solution. Pour les solutions en interaction faible, cette condition isotopique doit déterminer la seule inconnue restante,  $V_{\text{int}}$ .

Dans une solution isotopique, tous les atomes possèdent un cortège électronique identique et créent donc, autour d'eux, le même champ de force électrique. En particulier, le cœur dur de l'interaction à deux corps est absolument semblable pour les deux isotopes. Ils diffèrent par leur masse et par leur statistique. Le problème des solutions isotopiques au voisinage du zéro absolu a été considéré par G.V. Chester [29] et I. Prigogine et son école [30, 31]. Ces auteurs ont cherché à relier les propriétés des mélanges à celles des constituants purs. Notre approche est différente. Elle a pour point de départ les fonctions  $\gamma_{\alpha\beta}$ , introduite en II.31, qui traduisent les corrélations entre atomes d'espèces  $\alpha$  et  $\beta$  dans la solution. Nous nous intéressons aux propriétés particulières de ces corrélations de densité des différentes particules lorsque les différents constituants sont isotopés les uns des autres.

Considérons donc, au voisinage du zéro absolu, un ensemble de Gibbs de  $N$  atomes dans un volume  $\Omega$ , avec  $N_{\uparrow} = 1$  et  $N_{\downarrow} = 1$ . Lorsqu'un seul fermion d'une espèce donnée est présent, il se comporte comme une entité classique et il n'y a pas de difficulté avec la répulsion de Pauli. Nous ignorerons également la condensation de Bose des  $^4\text{He}$ . La justification dont nous nous contenterons ici en est que l'état condensé est considérablement dépeuplé. Seule une fraction très faible, quelques pour cent, des atomes d' $^4\text{He}$  se trouvent dans l'état de moment nul en raison de l'existence d'interactions fortes dues au cœur dur. L'incidence de la condensation de Bose sur le facteur de structure du liquide est faible [32] et le superfluide est assez bien décrit par un modèle cellulaire dans lequel les atomes sont partiellement localisés [33]. En bref, nous négligeons l'attraction entre bosons. Une telle approximation, valable quand le solvant est le superfluide ne l'est plus dans le cas du liquide de Fermi-Landau : nos conclusions sur les solutions isotopiques de l'hélium ne s'appliqueront pas aux solutions riches en  $^3\text{He}$  dans lesquelles l' $^4\text{He}$  est le soluté.

L'élimination, que nous venons d'effectuer, de l'incidence des statistiques quantiques sur les fluctuations de composition des solutions très diluées d' $^3\text{He}$  dans He II nous ramène à un problème classique de recherche de la probabilité d'observation d'écartés simultanés des grandeurs  $N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  par rapport à leurs valeurs moyennes. Nous suivons le traitement donné dans l'ouvrage de Landau et Lifchitz [34]. Le volume  $\Omega$  est pris égal à l'unité. Dans ce paragraphe, les densités numériques  $n_{\alpha}$  sont des grandeurs fluctuantes ; les valeurs moyennes sont notées  $\langle n_{\alpha} \rangle$  et les écarts  $\delta n_{\alpha}$ . Comme on le sait [34], la probabilité  $w$  d'observer un état présentant  $N$  atomes dans le volume  $\Omega$ , dont  $N_{\uparrow}$  et  $N_{\downarrow}$  quasi-particules  $\uparrow$  et  $\downarrow$ , est proportionnelle à l'exponentielle de l'entropie :

$$\omega(N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}) \propto \exp S(N, N_{\uparrow}, N_{\downarrow}) \quad (57)$$

L'entropie présente un maximum au voisinage de l'équilibre :

$$S = S_0 - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \beta_{ik} \delta n_i \delta n_k \quad (58)$$

On tire de (57) et (58) le résultat général suivant :

$$\langle \delta n_i \delta n_k \rangle = \langle n_i n_k \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_k \rangle = \frac{|\beta_{ik}|}{|\beta|} , \quad (59)$$

où, comme précédemment,  $|\beta|$  est le déterminant de la matrice  $\beta_{ik}$  et  $|\beta_{ik}|$  le cofacteur de l'élément  $\beta_{ik}$ . Les matrices  $\beta_{ik}$  et  $n_\alpha n_\beta \gamma_{\alpha\beta}$  sont inverses l'une de l'autre ; les  $\beta_{ik}$  sont reliés aux  $\partial \mu_i / \partial n_k |_{T, n_j}$ . La densité de probabilité s'écrit :

$$w(n_i) = |\beta|^{1/2} (2\pi)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \beta_{ik} \delta n_i \delta n_k \right\} . \quad (60)$$

Imposons maintenant des conditions sur les fluctuations des différents atomes. Exprimons d'abord le fait que les quasi-particules d' $^3\text{He}$  occupent un volume supérieur d'une quantité  $\omega_\uparrow$  à celui,  $\omega_4$ , des atomes d' $^4\text{He}$  :

$$w(N, 0, 0) = w\left(N - \frac{\omega_\uparrow}{\omega_4}, 1, 0\right) = w\left(N - \frac{\omega_\uparrow}{\omega_4}, 0, 1\right) . \quad (61)$$

L'égalité (61) traduit le fait qu'il faut retirer  $(\omega_4 + \omega_\uparrow)/\omega_4$  atome d' $^4\text{He}$  pour faire la place à un atome d' $^3\text{He}$  en maintenant  $\mu_4$  constant. Demandons finalement que cette propriété soit encore vraie lorsqu'on injecte deux atomes d' $^3\text{He}$ , de spins opposés  $\uparrow$  et  $\downarrow$  :

$$w\left(N - \frac{\omega_\uparrow}{\omega_4}, 1, 0\right) = w\left(N - 2\frac{\omega_\uparrow}{\omega_4}, 1, 1\right) . \quad (62)$$

Cette relation signifie qu'un  $^3\text{He} \downarrow$  ne fait aucune distinction entre un bain d' $^4\text{He}$  pur et un autre au même potentiel chimique (ou, ce qui revient au même pour les concentrations évanescentes, à la même pression) contenant déjà un  $^3\text{He} \uparrow$ . Les forces s'exerçant sur un  $^3\text{He} \uparrow$  dépendent uniquement de la pression locale et non du fait que ce soit un  $^3\text{He} \downarrow$  et non un  $^4\text{He}$  qui la cause.

Un calcul simple montre que les conditions (61) et (62) conduisent respectivement à :

$$\frac{\gamma'}{\gamma''} = -\frac{n_\uparrow \omega_\uparrow}{n \omega_4} , \quad (63)$$

$$\gamma_t \gamma'' = \gamma'^2 . \quad (64)$$

D'après (53) et (54),  $\gamma_F$  est nul si la solution est d'une dilution telle que  $\partial \mu_F / \partial n_\uparrow = 0$ . Cette égalité résulte du fait qu'un atome d' $^3\text{He}$  isolé au repos, dans le bain superfluide, possède une énergie cinétique de translation nulle. A l'aide de (40), nous obtenons finalement les expressions des fonctions de corrélation  $\gamma_t$ ,  $\gamma'$  et  $\gamma''$  issues des conditions (61) et (62) [ $n\omega_4 = 1$ ] :

$$\gamma_t = -\kappa , \quad \gamma' = \frac{\kappa}{n_\uparrow \omega_\uparrow} , \quad \gamma'' = -\frac{\kappa}{(n_\uparrow \omega_\uparrow)^2} . \quad (65)$$

Il en résulte, par explicitation des coefficients  $\beta_{ik}$ , que :

$$w \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{k_B T} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{n^2} \left[ \langle \delta n^2 \rangle + 2 \frac{\omega_\uparrow}{\omega_4} \langle \delta n (\delta n_\uparrow + \delta n_\downarrow) \rangle \right] \right\} . \quad (66)$$

On voit aisément, en transformant la forme quadratique en une somme de carrés parfaits, que les modes propres de fluctuations se réduisent à  $\delta n + (\omega_\uparrow/\omega_4) (\delta n_\uparrow + \delta n_\downarrow)$

et  $\delta n_{\uparrow} + \delta n_{\downarrow}$ , c'est-à-dire à des fluctuations de volume et des fluctuations de concentration. Le terme  $\langle \delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow} \rangle$  est absent. Ceci est dû à la relation (64) et traduit le fait que les fluctuations des  ${}^3\text{He}_{\uparrow}$  et  ${}^3\text{He}_{\downarrow}$  sont indépendantes. Une conséquence immédiate de (65) est que

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{n_{\uparrow} n_{\downarrow} \gamma''} = -\frac{\omega_{\uparrow}^2}{\kappa} = -\frac{\alpha^2 m_4 s^2}{n_4} \quad (67)$$

Il existe ainsi une interaction effective moyenne attractive entre quasi-particules d' ${}^3\text{He}$  dans la solution. Comme le paramètre  $\alpha \sim \omega_{\downarrow}/\omega_4$  vaut  $\sim 0,29$ , cette interaction, mesurée dans une échelle fixée par  $m_4 s^2/n_4 = \omega_4^2/\kappa = \partial\mu_4/\partial n_4$ , est assez faible. Le potentiel d'interaction (67) provient de la déformation de la matrice par l'impureté : le résultat (67) est d'autant plus exact que les déformations causées par la substitution isotopique sont plus faibles. Une telle conclusion a déjà été formulée par *I. Prigogine et al* [31] en 1954, et *G. Scatchard* [35] en 1937. Introduite ici à l'aide de la condition d'indépendance statistique entre  ${}^3\text{He}_{\uparrow}$  et  $\downarrow$ , l'interaction [67] a été considérée par un certain nombre d'auteurs [36, 37] à la suite de *BBP* [4].

**II.6. La théorie phénoménologique de BBP.** — Exposons brièvement dans ce paragraphe l'explication que donnent *J. Bardeen, G. Baym et D. Pines* [4] du résultat (67). Comme nous l'avons déjà exprimé par la formule (56), l'énergie d'interaction de deux  ${}^3\text{He}$  de spins opposés est la modification du potentiel chimique de l'un des spins,  $\uparrow$  par exemple, lors d'une variation de la densité de l'autre spin,  $\downarrow$ . Les déplacements du superfluide sont supposés instantanés et l'hélium-4 se réarrange à potentiel chimique constant :

$$V_{\text{int}} = \left. \frac{\partial \mu_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{\mu_4} = \left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{\mu_4} \quad (56)$$

Un retour aux variables thermodynamiques ( $T, n, n_{\uparrow}, n_{\downarrow}$ ) conduit à :

$$V_{\text{int}} = \left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{n, n_{\uparrow}} - \left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n} \right|_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} + \left. \frac{\partial z_{\downarrow}}{\partial n} \right|_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} + \left. \frac{\partial n}{\partial \mu_4} \right|_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} \quad (68)$$

Examinons d'abord le dernier terme de cette équation. A concentration évanescence, le produit de trois facteurs se décompose comme suit :

$$\left. \frac{\partial \mu_4}{\partial n} \right|_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow} \rightarrow 0} = \frac{\omega_{40}^2}{\kappa_{40}} = \frac{m_4 s_{40}^2}{n_{40}} \quad (69)$$

$$\left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n} \right|_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow} \rightarrow 0} = \frac{\omega_{\uparrow} \omega_{40}}{\kappa_{40}} = \alpha \frac{m_4 s_{40}^2}{n_{40}} \quad (70)$$

Le terme (70) exprime la variation d'énergie d'une quasi-particule  $\uparrow$  due à une petite fluctuation de densité totale. Il contient le couplage quasi-particule-phonon.

Ce couplage entre phonons et  ${}^3\text{He}$  peut être représenté par un hamiltonien d'interaction de la forme suivante [38] :

$$\mathcal{H} = \sum_q U_q \rho_{4q}^+ \rho_{3q} \quad (71)$$

où  $\rho_{3q}$ , et  $\rho_{4q}$  sont les opérateurs fluctuation de densité définis dans l'ouvrage classique de *Nozières et Pines* [39]. La quantité  $U_q$  est l'élément de matrice du couplage entre une

fluctuation de densité de  ${}^3\text{He}$  de moment  $q$  et un phonon de même moment : c'est un couplage de déformation, de compression. Un atome de  ${}^3\text{He}$  voyageant lentement dans le bain n'aura pas assez d'énergie pour exciter des phonons réels : la conservation du moment demande que  $q = m_0^*s$ , condition qui ne peut être vérifiée à basse température. Les phonons émis et absorbés par  ${}^3\text{He}$  sont donc virtuels. La situation qui se présente alors est l'analogie pour un système neutre de celle qui donne lieu à l'effet d'écran de l'interaction coulombienne dû à l'interaction électron-phonon dans les milieux cristallins conducteurs [39]. Cette analogie fera dire que l' ${}^3\text{He}$  est entouré d'un "nuage de polarisation" de phonons. En transposant les résultats obtenus pour les systèmes chargés au cas de  ${}^3\text{He}$  dans un bain de  ${}^4\text{He}$ , la "constante diélectrique" du système est reliée à l'opérateur de réponse densité-densité [39] du milieu par la relation :

$$\epsilon(q, \omega) = [U_q \chi(q, \omega)]^{-1}, \quad (72)$$

et l'hamiltonien effectif d'interaction  ${}^3\text{He}$ - ${}^3\text{He}$  induit par l'échange de phonons virtuels s'écrit :

$$V_{\text{comp}} = \frac{U_q}{\epsilon(q, \omega)} = |U_q|^2 \chi(q, \omega). \quad (73)$$

L'opérateur réponse  $\chi(q, \omega)$  du milieu est, pour des solutions diluées, peu différent de celui de  ${}^4\text{He}$  pur. Il a été déterminé par J. Gavoret et P. Nozières [40].

$$\chi(q, \omega) = \frac{n_{40} q^2}{m_4 (\omega^2 - s^2 q^2)}. \quad (74)$$

Comme les vitesses de propagation des  ${}^3\text{He}$  sont très lentes devant celle du son ( $q/m_0^* \ll s$ ), la réponse du milieu à une excitation de densité peut être considérée, comme instantanée. Il n'y a pas d'effet de retard dû au temps de propagation :  $\omega$  est pris nul dans (74). C'est donc la limite thermodynamique  $\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q, \omega = 0)$  qui intervient dans le potentiel (73). Cette limite s'écrit :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q, \omega = 0) = -\frac{n_{40}}{m_4 s^2} = -\left. \frac{\partial n}{\partial \mu_4} \right|_{T, z_\uparrow, z_\downarrow} = -\left. \frac{\partial n}{\partial \mu_4} \right|_{T, n_\uparrow = 0} \quad (75)$$

D'autre part, BBP ont montré que, dans la limite  $n_\uparrow, n_\downarrow \rightarrow 0$  et pour les grandes longueurs d'onde,

$$U_{q=0} = \left. \frac{\partial \mu_4}{\partial n_\uparrow} \right|_{n, n_\uparrow} = \frac{\omega_4 \omega_\rho}{\kappa}, \quad (76)$$

ce qui justifie l'appellation de couplage de compressibilité donnée à  $U_q$ . En utilisant les relations (75) et (76), la partie (73) du potentiel induite par les phonons entre deux  ${}^3\text{He}$  de spins opposés, ou potentiel de compression, se réécrit :

$$V_{\text{comp}} = -\frac{\partial \mu_4}{\partial n_\uparrow} \frac{\partial \mu_4}{\partial n_\downarrow} \frac{\partial n}{\partial \mu_4}. \quad (77)$$

$\partial \mu_4 / \partial n_\uparrow$  décrit l'émission d'un phonon par  ${}^3\text{He} \uparrow$ ,  $\partial n / \partial \mu_4$  la propagation de ce phonon dans  ${}^4\text{He}$ ,  $\partial \mu_4 / \partial n_\downarrow$  l'absorption de ce phonon par  ${}^3\text{He} \downarrow$ .

En utilisant les expressions (69) et (70) qui donnent les limites de  $\partial \mu_4 / \partial n_\uparrow$  et  $\partial \mu_4 / \partial n$  aux concentrations nulles, l'interaction induite par les phonons se met sous la forme :

$$V_{\text{comp}} = -\omega_\uparrow^2 / \kappa = -\alpha^2 m_4 s_{40}^2 / n, \quad (78)$$

Notons que le résultat (78) n'est pas exactement celui de BBP [41] : il inclut à la fois la contribution phonique retenue par BBP et la partie attribuée par ces auteurs à une interaction "directe" entre  $^3\text{He}$ . En fait, les phonons de BBP couplent entre eux deux trous de densité numérique, c'est-à-dire deux "manques" d'atome de  $^4\text{He}$  ; la contribution "directe" est celle des  $^3\text{He}$  qui viennent partiellement combler ces trous. Le résultat (77) décrit l'interaction résultant de l'échange de phonons virtuels entre deux quasi-particules formées chacune de l'association d'un atome de  $^3\text{He}$  (qui occupe un volume  $\omega_3$ ) et d'un trou de  $^4\text{He}$  (qui libère un volume  $\omega_4$ ). Comme le notent BBP (et D. Pines et P. Nozières [42] dans le cas des systèmes chargés), l'équation (78) ne comprend pas nécessairement toutes les contributions à l'interaction effective entre  $^3\text{He}$  en solution, mais seulement celles qui proviennent d'un couplage densité-densité, via phonons induits, dans la limite statique et aux grandes longueurs d'onde, et dans le cadre d'une réponse linéaire du système aux excitations de densité.

Un autre couplage possible provient de la réponse du milieu à l'excitation de vitesse produite par un atome de  $^3\text{He}$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v} = \vec{p}/m^*$ . Ce couplage est analysé par BBP de la même manière que le couplage de compression (77). Il met en jeu des fonctions de réponse densité-vitesse et vitesse-vitesse de  $^4\text{He}$  pur qui sont, selon J. Gavoret et P. Nozières [40],

$$\Phi(\vec{q}, \omega) = \frac{\omega \vec{q}}{m_4(\omega^2 - s^2 q^2)}, \quad \overline{\Psi}(\vec{q}, \omega) = \frac{s^2 \vec{q} \otimes \vec{q}}{m_4 n_4 (\omega^2 - s^2 q^2)}, \quad (79)$$

où  $\vec{q} \otimes \vec{q}$  représente le produit tensoriel du vecteur  $\vec{q}$  par lui-même.

L'hamiltonien effectif décrivant la diffusion mutuelle de deux quasi-particules *complètement habillées* du nuage de polarisation, c'est-à-dire de masse effective  $m_0^*$ , de moments initiaux  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  dans des états finals  $\vec{p} - \vec{q}$  et  $\vec{p}' + \vec{q}$  contient, en plus de (77), un terme provenant du couplage des champs de vitesse et qui est le suivant :

$$V_{\text{dip}}(q) = \frac{s^2 \omega}{m_4 n_4 (\omega^2 - s^2 q^2)} [m_4(1 + \alpha) + m_0^* - m_3]^2. \quad (80)$$

Les processus de diffusion conservant l'énergie sont tels que :

$$\omega = \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{q})}{2 m_0^*} = \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}' + \vec{q})}{2 m_0^*}. \quad (81)$$

L'équation (80) donnant  $V_{\text{dip}}(\vec{q})$  se met donc, en négligeant  $\omega$  devant  $sq$ , sous la forme suivante :

$$V_{\text{dip}}(q) = - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2 m_4 n_4} \left[ \frac{(1 + \alpha) m_4 + m_0^* - m_3}{m^*} \right]^2 \quad (82)$$

L'expression (82), bien qu'issue de (80), est plus générale et susceptible d'une interprétation en termes classiques, donnée pour la première fois par BBP. La transformée de Fourier inverse de  $V_{\text{dip}}(\vec{q})$  a pour forme à large distance :

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = - \frac{1}{2 \pi^2 m_4 n_4} \left[ \frac{(1 + \alpha) m_4 + m_0^* - m_3}{m_0^*} \right]^2 \left[ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{p}' \cdot \vec{r})}{r^5} \right]. \quad (83)$$

C'est l'interaction dipôle-dipôle de deux sphères immergées dans un liquide incompressible, en hydrodynamique classique. Cette interaction dipolaire détermine la dépendance en  $q$  du potentiel effectif d'interaction. Pas plus que pour le terme de compression (77), le raisonnement semi-macroscopique de BBP ne permet d'établir que le terme (82)

soit le seul qui résulte de l'interaction  $^3\text{He}$ -champ de vitesse  $^4\text{He}$  ni qu'aucun autre terme, issu d'effets non linéaire ou de diffusion multiple, n'intervienne. Mais nous avons la certitude de l'existence du terme dipolaire (82). Ainsi qu'on le verra au chapitre VI, ce terme a une importance certaine et est décelable expérimentalement.

Revenons à l'expression (68) du potentiel effectif d'interaction. Nous avons, à la suite de BBP, donné une signification physique au dernier terme du second membre de cette expression, qui représente l'interaction induite par phonons. Considérons maintenant le premier terme,  $\partial z_{\uparrow} / \partial n_{\downarrow}$  à  $n$  et  $n_{\uparrow}$  constants, qui exprime la variation du potentiel chimique d'un  $^3\text{He}_{\uparrow}$  due à une fluctuation de densité d' $^3\text{He}$  de spin opposé. Ce terme est supposé nul par BBP en vertu de l'argument suivant. Comme il s'agit de deux isotopes, les champs de force produits par des atomes d' $^3\text{He}$  et d' $^4\text{He}$  sont identiques. Dans la solution les champs de force moyens subis par ces atomes sont également identiques. Le fait de modifier  $n_{\downarrow}$  à  $n$  constant (ce qui revient à remplacer un atome de  $^4\text{He}$  par un atome  $^3\text{He}_{\downarrow}$ ) n'altère en rien ce champ moyen. Il n'y a donc aucun changement à l'énergie potentielle d'un atome d' $^3\text{He}_{\uparrow}$ . Comme l'énergie cinétique ne dépend, quant à elle, que du volume moyen par particule, elle n'est fonction que de la densité totale  $n$ . Il en résulte que  $z_{\uparrow} = \mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}$  ne dépend que de  $n$  (et  $n_{\uparrow}$ ) :

$$\left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{n, n_{\uparrow}} = 0 . \quad (84)$$

L'égalité (84) constitue l'approximation isotopique de BBP qui trouve ainsi son origine dans des considérations très générales mais assez intuitives.

Une autre justification en a été donnée par G. Baym [36] dont l'argument peut se résumer comme suit. Puisque  $m_3 = 3 m_4/4$ ,  $m_3$  et  $m_4$  étant les masses nues de  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$ , l'hamiltonien d'un système de  $N_3$  atomes de  $^3\text{He}$  dissous dans  $N_4$  atomes de  $^4\text{He}$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2 m_4} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N V(r_i - r_j) + \sum_{j=1}^{N_3} \frac{p_j^2}{6 m_4} , \quad (85)$$

où  $N = N_3 + N_4$  est le nombre total d'atomes. Le terme d'énergie potentielle porte sur les  $N(N-1)/2$  paires de particules puisque  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  possèdent le même potentiel interatomique  $V(r)$ .

Les deux premiers termes de (85) sont formellement identiques à l'hamiltonien de  $N$  atomes de  $^4\text{He}$  pur, dont l'énergie de l'état fondamental serait  $E_0(N)$ . Le dernier terme de (85) est une somme de termes à un corps. Pour un calcul de perturbation au premier ordre, on peut prendre comme fonction d'onde approchée du système à  $N_3$  atomes de  $^3\text{He}$  et  $N_4$  atomes de  $^4\text{He}$ , celle de l'état fondamental du système à  $N$  atomes de  $^4\text{He}$ .

On aboutit au résultat suivant pour l'énergie :

$$E = E_0(N) + N_3 K_0(N) , \quad (86)$$

où  $K_0(N) = \langle p^2 \rangle / 6 m_4$  et vaut le tiers de l'énergie cinétique moyenne par particule dans  $^4\text{He}$  pur.

La forme de  $E$ , qui ne contient pas de terme en  $N_3^2$ , entraîne que :

$$\left. \frac{\partial z_{\uparrow}}{\partial n_{\downarrow}} \right|_{n, n_{\uparrow}} = \left. \frac{\partial^2 E}{\partial n_{\uparrow} \partial n_{\downarrow}} \right|_n = 0 \quad (87)$$

L'approximation isotopique (87) provient de la forme (86) de l'énergie de l'état fondamental du système à  $N_3$ - $^3\text{He}$  et  $N_4$ - $^4\text{He}$ . Cette forme résulte elle-même du choix

de la fonction d'onde. Force est de remarquer que ce choix est assez frustré : rien n'indique l'importance des termes en  $N_3^2$  qui proviennent des changements de propriétés de symétrie de la fonction d'onde, et surtout de la perturbation de la fonction de distribution radiale. De plus, l'expression (86) est issue d'un calcul de perturbation au premier ordre et il importe d'évaluer la contribution des termes du deuxième ordre. Ce calcul a été effectué récemment par G. Baym [43] qui a conclu que les corrections du second ordre sont effectivement très petites.

Les tentatives de justification de l'approximation isotopique par des théories microscopiques [44] n'ont, il faut le constater, pas abouti à des conclusions parfaitement convaincantes. Mentionnons l'approche très élégante effectuée par W.L. Mc Millan [45]. Cet auteur réalise une diagonalisation approximative de l'hamiltonien (85) à l'aide d'un système de fonctions de base corrélées [46]. Ce système est construit, suivant une prescription de R.P. Feynman [47] en appliquant à la fonction d'onde de l'état fondamental, prise sous la forme de Bijl - Jastrow - Feynman, l'opérateur fluctuation de densité. La base ainsi obtenue n'est cependant pas orthogonale. Elle permet néanmoins le calcul de l'énergie d'un système d' $^4\text{He}$  contenant une quasi-particule  $^3\text{He}$  de moment  $p$ , ce qui fournit une valeur de la masse effective. Cette valeur  $- 1,8 m_3$  à pression nulle - n'est qu'en accord approximatif avec l'expérience ( $2,25 m_3$ ). La prise en considération d'un système à deux quasi-particules de moment  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  conduit à une évaluation de l'énergie d'interaction effective qui prend la forme de BBP :

$$V_{\text{BBP}}(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}') = - \frac{\alpha^2 m_4 s_{40}^2}{n} - \left[ \frac{(1 + \alpha) m_4 + m_0^* - m^3}{m_0^*} \right]^2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2 m_4 n_4} \quad (88)$$

Ce résultat, obtenu par Mc Millan, exprime le fait que le couplage  $^3\text{He}$  phonon ne comprend que deux termes, le terme de compressibilité (couplage densité-densité) et le terme dipolaire hydrodynamique dû aux champs de vitesse induits (couplages densité-vitesse et vitesse-vitesse). La théorie de BBP, qui ne retient que ces deux mécanismes s'en trouve ainsi justifiée. Il faut toutefois remarquer :

- 1) que le seul mécanisme élémentaire inclus dans la théorie de Mc Millan est le couplage  $^3\text{He}$ -phonon à l'exclusion de termes directs  $^3\text{He}$ - $^3\text{He}$ ,
- 2) qu'il est difficile de bien cerner l'incidence quantitative des approximations effectuées dans la diagonalisation approchée de l'hamiltonien.

Des calculs plus complets, à partir des premiers principes, ont été tentés par Chia-Wei Woo, Hing-Tat Tan et W.E. Massey [48]. Ces auteurs partent de la solution du problème à  $N_4$  bosons de masse 4 et  $N_3$  bosons de masse 3, qu'ils obtiennent par une méthode variationnelle très élaborée. Les facteurs de structure du mélange,  $S_{44}$ ,  $S_{34}$  et  $S_{33}$  sont déterminés par une méthode semblable à celle qui mène aux équations BBGKY en mécanique classique. A partir de la solution du problème à  $N_4 + N_3$  bosons, ces auteurs construisent une base de fonctions corrélées, qu'ils orthogonalisent. Les phonons sont ensuite éliminés par des transformations canoniques appropriées pour ne plus trouver que l'hamiltonien effectif des  $^3\text{He}$ . La masse effective d'une quasi-particule est trouvée égale à  $2,37 m_3$ , très proche de la valeur expérimentale. Le potentiel chimique  $\mu_3$  au zéro absolu est également en très bon accord avec l'expérience. L'interaction effective, par contre, n'est pas obtenue avec une bonne précision en raison du fait qu'elle provient d'une compensation d'interactions fortes [49].

Nous nous trouvons donc, à la fin de ce chapitre, avec une description qualitative des interactions au sein du quasi-gaz  $^3\text{He}$  suggérée d'une part par l'application de la mécanique statistique aux solutions isotopiques super-fluides, d'autre part par la considération du mécanisme de couplage entre  $^3\text{He}$  par échange de phonons virtuels. Cette description qualitative nous servira de point de départ pour l'établissement du modèle de solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  que nous allons exposer au chapitre suivant.

### III. Le modèle du quasi-gaz.

Entreprenons, dans ce chapitre, la construction d'un modèle analytique décrivant le comportement des quasi-particules d' $^3\text{He}$  en solution dans l' $^4\text{He}$  superfluide dans son état fondamental. Ce modèle se fonde sur des considérations générales de symétrie d'invariance de translation. Il est phénoménologique dans le sens où il vise à décrire au mieux la situation expérimentale connue à ce jour et où les différents paramètres mis en jeu, masse effective, composantes de l'amplitude de diffusion. . . sont ajustés et non calculés a priori. La détermination numérique des paramètres du modèle sera effectuée au chapitre VI sur des résultats expérimentaux présentés au chapitre V. Les différentes grandeurs macroscopiques seront exprimées analytiquement au chapitre IV.

**III.1. Spectre d'une quasi-particule isolée.** — Envisageons, pour commencer, une solution très diluée dans laquelle les quasi-particules peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres. Ces quasi-particules possèdent une énergie de liaison au bain  $e_{30}$  positive. Cette énergie de liaison, dont la valeur expérimentale par rapport au vide est environ  $2,8 K$  à pression nulle, dépend de la pression et, en principe, de la température. Toutefois la dépendance en température de cette propriété est de même nature que celle des propriétés du solvant, c'est à dire insignifiante en-dessous de  $0,5 K$ .

Quand la concentration en  $^3\text{He}$  croît, cette énergie de liaison, qui n'est autre alors que le potentiel chimique, décroît en raison de la répulsion de Pauli. A une concentration molaire d'environ  $6,5 \%$  elle devient comparable à celle de l' $^3\text{He}$  pur et il se produit une démixtion isotopique. Le diagramme de phase des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  à pression nulle tel qu'il résulte des travaux d'un grand nombre d'auteurs [50, 51], est représenté en *figure 1*. L'existence de mélanges d' $^3\text{He}$  dilués dans l' $^4\text{He}$  stables au zéro absolu, reconnue pour la première fois par J.G. Daunt et D.O. Edwards [1], n'est en rien contraire au théorème de Nernst. Il n'y a pas d'entropie de mélange au zéro absolu pour des mélanges liquides car les atomes n'ont pas d'individualité propre. Bosons et fermions possèdent une fonction d'onde commune et unique et sont ordonnés dans l'espace des moments.

Revenons à l'impureté isolée qui possède un spectre d'excitation parabolique comme l'a postulé Pomeranchuk [2]. Feynman [47] a montré, par un raisonnement simple, que la conservation du flux de masse exige la présence, autour d'une quasi-particule en mouvement, d'un rétro-courant d' $^4\text{He}$ . Ce rétrocourant induit un accroissement de la masse apparente de la quasi-particule qui, pour un fluide idéal classique, serait égal à la moitié de la masse du fluide déplacé. Dans ce cas hypothétique, comme la masse déplacée est  $1 + \alpha_0 = 1,29$  fois la masse d'un atome d' $^4\text{He}$ , la masse effective de l' $^3\text{He}$ ,  $m_0^*$ , serait  $1,86$  fois la masse nue  $m_3$ . L'hydrodynamique classique n'est pas valable à l'échelle atomique et le calcul plus raffiné qui est nécessaire [48] conduit, comme nous l'avons vu, à  $m_0^* = 2,37 m_3$ .

Le fait que le spectre d'une quasi-particule soit en première approximation parabolique et l'ordre de grandeur de la valeur de la masse effective sont bien vérifiés dans les expériences de calorimétrie de D.O. Edwards *et al.* [51] et de A.C. Anderson *et al.* [52]. Nous reviendrons par la suite sur les expériences, dont les résultats sont illustrés en *figure 2* :

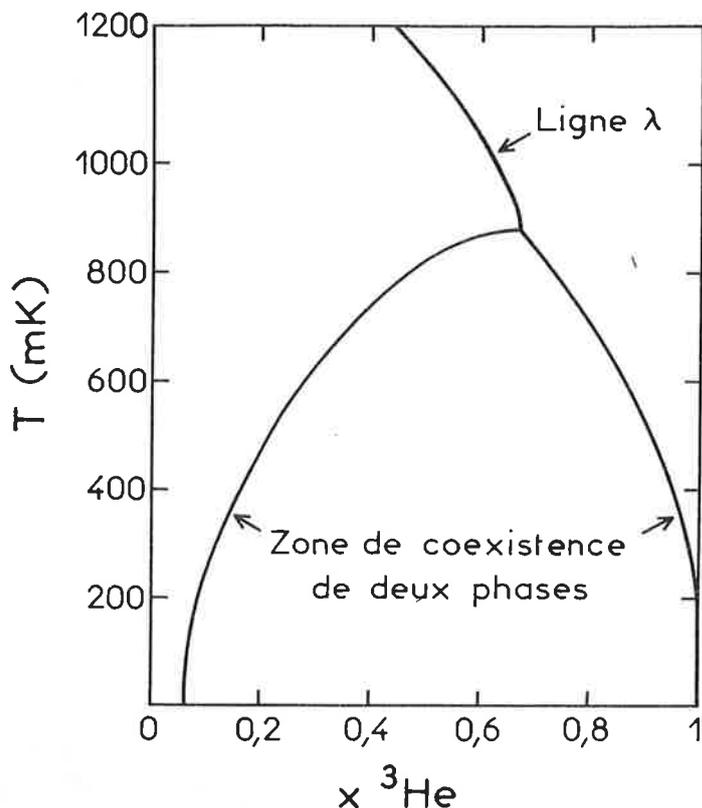


FIG. 1. — Diagramme de phase des solutions isotopiques de l'hélium sous pression de vapeur saturante ( $P \approx 0$ ), d'après les auteurs de la référence [50]. La ligne  $\lambda$  sépare la zone superfluide (à gauche) de la zone normale. Elle rejoint la courbe de séparation de phase à un point "tricritique" au-dessous duquel les solutions peuvent se séparer en deux phases, l'une riche en  $^3\text{He}$ , non superfluide, l'autre pauvre en  $^3\text{He}$ , superfluide.

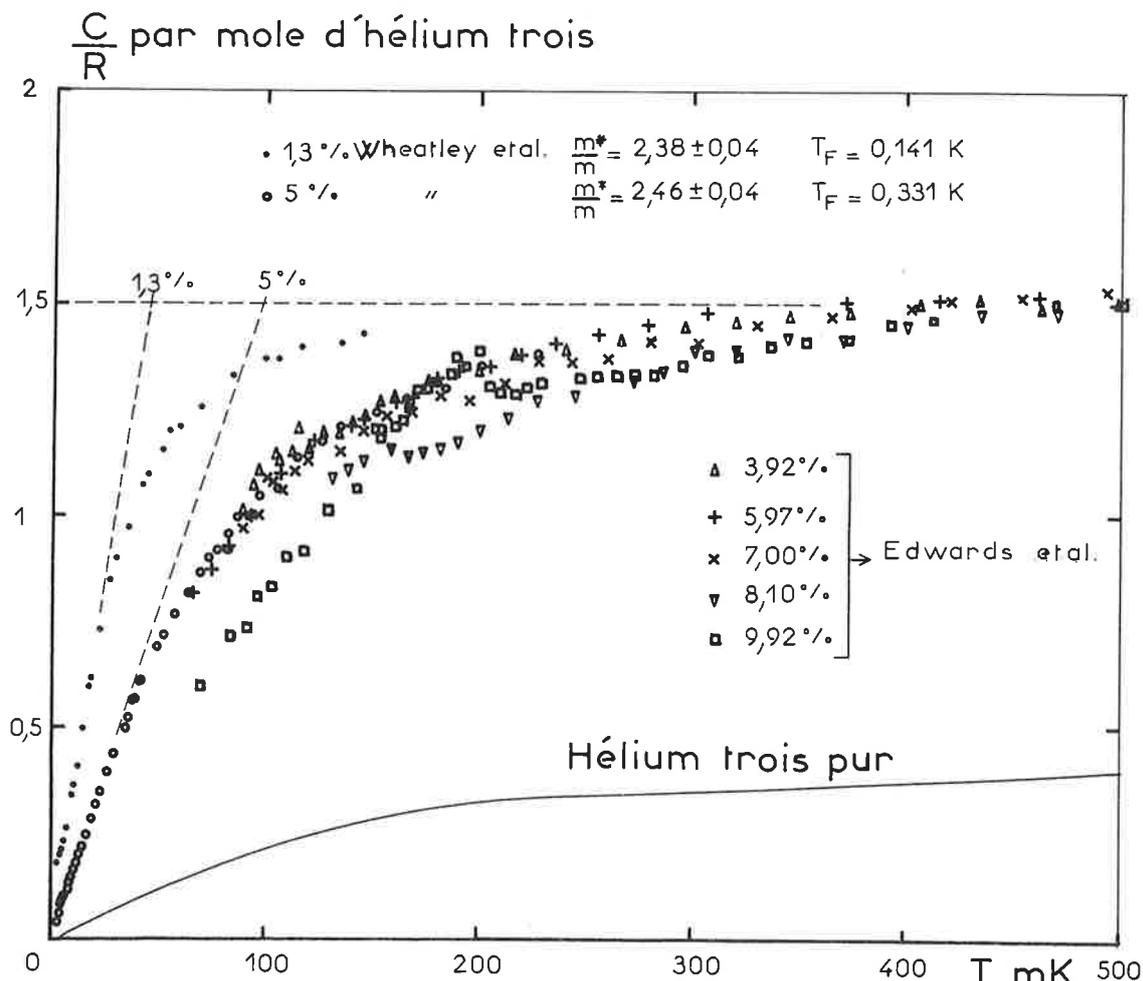


FIG. 2. — Chaleur spécifique de l' $^3\text{He}$  pur en solution selon D.O. Edwards et al. [51] et J.C. Wheatley et al. [52]. A haute température, la chaleur spécifique de l' $^3\text{He}$  en solution tend vers  $3/2 R$  par mole, comme pour un gaz parfait à volume constant. A basse température, elle décroît linéairement avec la température, la pente étant inversement proportionnelle à la température de Fermi.

on y voit que les degrés de liberté du système sont bien ceux d'un gaz de Boltzmann à haute température, et d'un gaz de Fermi dégénéré au voisinage du zéro absolu. Pour la solution saturante à 6,5 % à pression nulle, la température de Fermi avoisine 400 mK. La masse effective dépend faiblement de la concentration et vaut environ  $2,5 m_3$  (pour  $x = 6,5 \%$ ). Le vecteur d'onde de Fermi  $k_F = (3 \pi^2 n_3)^{1/3}$  dans la même situation, est de l'ordre de  $0,35 \text{ \AA}^{-1}$ , la vitesse de Fermi, 28 m/s. En comparant ces deux derniers chiffres à la vitesse du son dans  $^4\text{He}$  pur, 238 m/s, et au minimum des rotons,  $1,8 \text{ \AA}^{-1}$ , on se rend compte que la structure du solvant doit apparaître sur le spectre d'énergie des quasi-particules aux moments élevés. Il existe plusieurs manières d'introduire cet effet. Nous allons brièvement en rendre compte. Elles ne constituent que des éclairages différents d'une même réalité physique et ne font que traduire les déviations du spectre des quasi-particules par rapport à une loi parabolique qui peuvent se mettre sous la forme

$$\epsilon(p) - e_{30} = \frac{p^2}{2 m_0^*} (1 + \gamma p^2 + \dots) \quad (1)$$

Le terme  $p^2$  représente une petite correction.

La relation de dispersion (1) a été considérée pour la première fois par N.R. Brubaker *et al.* [53]. Ces auteurs ont mesuré la vitesse du second son dans les mélanges en-dessous de 0,6 K, et ont observé une petite variation en température de la masse inertielle. Nous reviendrons sur le concept de masse inertielle au chapitre IV et sur ces mesures au chapitre V. Cette variation peut s'expliquer par la présence du terme en  $\gamma p^2$  dans (1) avec  $\gamma \cong -0,062 \pm 0,022 \text{ \AA}^2$ . Il n'est pas clair que la forme de la déviation à la loi parabolique exprimée par (1) soit la plus appropriée. Une autre possibilité a été suggérée par L.P. Pitaevski [54] pour rendre compte des mesures de densité de fluide normal effectuées par B.N. Esel'son et ces collaborateurs à l'aide de différentes techniques [55, 56]. Ces derniers auteurs avaient cru pouvoir tirer de leurs expériences la conclusion que le spectre des excitations élémentaires de  $^4\text{He}$  était fortement perturbé par la présence d' $^3\text{He}$ . Cette conclusion a été contredite par la mesure de l'énergie de création de paires de rotons par effet Raman dans les mélanges  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  superfluides [57, 58] qui ont au contraire montré que l'énergie des rotons est très peu perturbée par  $^3\text{He}$ . Des mesures de diffusion de neutrons ont confirmé ce résultat [59]. La suggestion de Pitaevski, pour clarifier cette situation, est fondée sur l'idée qu'un atome d' $^3\text{He}$  peut être diffracté, au cours de son mouvement par le pseudo-réseau constitué par  $^4\text{He}$  avoisinant. La courbe de dispersion présenterait, comme le montre la *figure 3*, un minimum analogue à celui des rotons. Cette idée, reprise et amplifiée par différents auteurs [60, 61, 62], n'a pas toutefois été confirmée par les analyses plus fines effectuées par J. Ruvalds *et al.* [63, 64] et, très récemment par R.N. Bhatt [65]. Dans un travail très pénétrant, ce dernier auteur montre, sous réserve de la validité de certaines approximations simplificatrices,

1) que la renormalisation de la masse d'une quasi-particule  $^3\text{He}$  de moment nul est due pour l'essentiel à la possibilité de transformation virtuelle de cette quasi-particule en un roton de moment  $p_0$  et une quasi-particule de moment opposé,

2) que ce même processus d'émission de roton virtuel détermine la déviation du spectre des quasi-particules par rapport à la parabole  $\epsilon = p^2/2 m_0^*$ .

L'élément de matrice mis en jeu est déterminé à l'aide de la valeur expérimentale de la masse effective  $m_0^* \sim 2,3 m_3$ . Il est alors possible d'évaluer le paramètre  $\gamma$  qui figure dans l'expression (1). Deux hypothèses de calcul différentes conduisent aux valeurs  $-0,098$  et  $0,069 \text{ \AA}^2$  respectivement. Le spectre d'excitation des quasi-particules

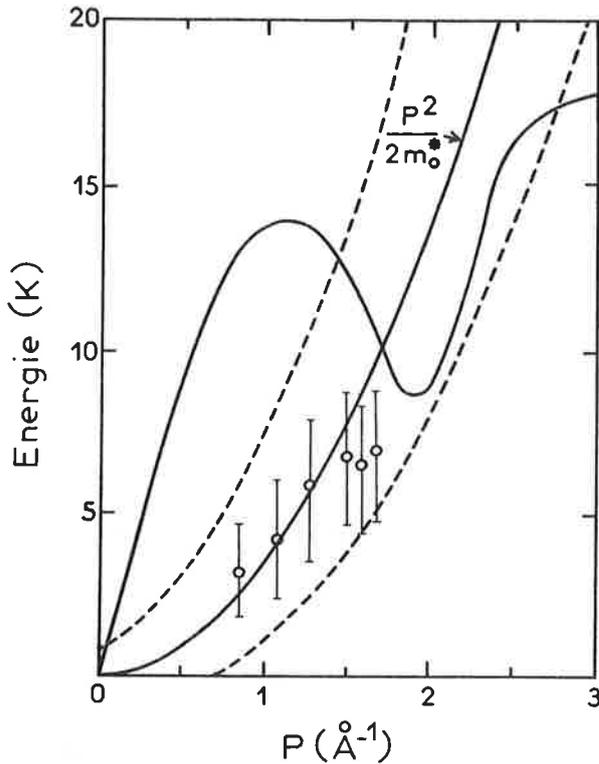


FIG. 3. — Spectre des excitations élémentaires dans les solutions  ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$  diluées. Les excitations d' ${}^4\text{He}$ , qui donnent la courbe en S habituelle, sont très peu perturbées par la présence de l' ${}^3\text{He}$ . La parabole  $p^2/2m_0^*$  correspond au spectre de Landau-Pomeranchuk. Les pointillés délimitent l'élargissement du spectre dû, à concentration finie, à l'existence de la sphère de Fermi. Les points expérimentaux présentent les résultats des mesures aux neutrons effectuées à l'Ill [66] qui montrent clairement une déviation par rapport au spectre parabolique.

qui correspond à ces valeurs est en accord raisonnable avec les mesures de diffusion de neutrons, effectuées récemment par P.A. Hilton, R. Scherm et W.G. Stirling [66], comme le montre la *figure 3*. L'imprécision expérimentale, due à la largeur du pic d'énergie transférée par les fermions, ne permet pas une meilleure détermination de  $\gamma$ . R.N. Bhatt est également capable de rendre compte correctement, avec  $m_0^* \sim 2,15$  à  $2,25 m_3$  et  $\gamma \sim 0,086 \text{ \AA}^2$ , des mesures de densité de fluide normal [55, 56] et des mesures de second sont les plus récentes effectuées aux laboratoires de la Bell [67] par propagation d'impulsions thermiques. Ces mesures seront décrites plus loin. Nous avons mentionné que celles de l'*Université de l'Ohio* [53], réalisées à l'aide d'une technique différente de transducteurs acoustiques, peuvent s'interpréter à l'aide des valeurs suivantes de  $m_0^*$  et  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} m_0^* &= 2,28 \pm 0,04 m_3 \quad , \\ \gamma &= 0,062 \pm 0,022 \text{ \AA}^2 \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

Ces valeurs sont proches de celles utilisées par R.N. Bhatt et, en l'absence d'autre détermination empirique plus précise de  $\gamma$ , nous retiendrons la valeur (2) dans la suite de notre analyse. Par contre,  $m_0^*$  sera ajusté aux données thermodynamiques expérimentales d'une manière indépendante. La valeur obtenue sera de  $2,255 \pm 0,015 m_3$ , en bon accord avec (2).

La forme du spectre d'excitation des quasi-particules que nous adoptons est donc représentée par (1). Comme on le voit sur la *figure 3*, les mesures aux neutrons indiquent que cette forme est valable jusqu'à des vecteurs d'onde de  $1,5 \text{ \AA}^{-1}$ . A présent, l'existence d'un creux de roton pour les quasi-particules  ${}^3\text{He}$  postulée par Pitaevski n'est ni confirmée ni infirmée par l'expérience, la conclusion négative de la référence [67] n'étant pas corroborée par les calculs de R.N. Bhatt [65].

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons deux images physiques avancées pour interpréter les écarts par rapport au comportement de particule libre représenté par (1). La première approche résulte directement de la considération des spectres des excitations de l' ${}^4\text{He}$  et de l' ${}^3\text{He}$  illustrés *figure 3* où l'on voit que la branche des fermions coupe celle des bosons. A concentration finie, la diffusion des fermions par les neutrons (ou d'autres

excitations comme les rotons) peut s'effectuer d'un point quelconque de la sphère de Fermi à un autre ce qui donne une largeur apparente de  $2 k_F$  au spectre mesuré. Il est permis de penser qu'une répulsion s'exerce au voisinage de la zone d'intersection. Il en résulte une distorsion des niveaux d'énergie et une réduction du temps de vie des quasi-particules, évaluées d'abord par Bartley *et al* [68], puis par J. Ruvalds *et al* [63, 64].

Une deuxième manière de voir, adoptée par C. Ebner [69], provient d'une application de l'hydrodynamique classique au problème d'une impureté dans l'hélium superfluide. Cette impureté est considérée comme une sphère de rayon  $a_0$  immergée dans un milieu continu compressible qui simule l'hélium-4 superfluide. Le rayon  $a_0$  est déterminé par le volume déplacé :

$$\frac{4\pi}{3} a_0^3 = \omega_4 + \omega_{\uparrow}$$

On sait que ce modèle classique, qui conduit à une valeur de la masse inertielle de  $1,86 m_3$ , est assez grossier. Il est néanmoins qualitativement valable et peut s'appliquer au cas où la sphère immergée est compressible et se déforme, lorsqu'elle est mise en mouvement, sous l'effet de la pression d'arrêt. La compressibilité des impuretés est tirée des mesures de volume molaire des solutions diluées d' $^3\text{He}$  dans l' $^4\text{He}$  sous pression. Le modèle conduit à  $\gamma = 0,080$ , valeur en accord très raisonnable avec le chiffre expérimental (2).

Pour résumer ce paragraphe, on retiendra que le spectre des quasi-particules n'est pas strictement parabolique. Les déviations, dues aux mêmes causes hydrodynamiques que la renormalisation de la masse de l' $^3\text{He}$ , sont assez faibles pour les vecteurs d'onde rencontrés dans des mélanges peu concentrés ( $x < 10\%$ ) en-dessous de  $0,6\text{ K}$ . Nous allons maintenant nous tourner vers le problème de la description des interactions entre quasi-particules.

**III.2. Amplitude de diffusion de deux quasi-particules.** — Considérons le processus au cours duquel deux quasi-particules de moments  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  entrent en collision et se trouvent dotées, dans l'état final, des moments  $\vec{p} + \vec{q}$  et  $\vec{p}' - \vec{q}$ . Soit  $t(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q})$  l'amplitude de collision correspondante. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux processus de diffusion vers l'avant caractérisés par la "limite  $k$ " dans laquelle

- on fait tendre vers zéro l'énergie transférée lors de la collision,
- on fait tendre ensuite vers zéro le moment  $\vec{q}$  échangé entre les deux quasi-particules.

Si nous introduisons les spins  $\sigma$  et  $\sigma'$  des deux quasi-particules, l'amplitude de diffusion vers l'avant est définie par la relation suivante :

$$t_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}') = t(\vec{p}, \vec{p}'; 0) - \delta_{\sigma\sigma'} t(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}') \quad (3)$$

Nous avons supposé implicitement que la seule dépendance en spin est celle qui est requise par le principe de Pauli. Nous nous proposons de construire maintenant l'amplitude de diffusion  $t(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}')$  en nous fondant sur des arguments généraux. Mais auparavant précisons les approximations que nous allons utiliser.

L'hamiltonien d'un système de quasi-particules en interaction comporte deux sortes de termes :

- les *termes cinétiques*, correspondant à des opérateurs à une particule,
- les *termes d'interaction*, qui mettent en jeu les collisions à deux, trois et  $n$  corps.

Nous allons comparer, dans la limite  $T \rightarrow 0$ , la contribution de ces différents opérateurs au potentiel chimique  $\mu_3$  de l'hélium-3 en solution. Pour ce qui va suivre, la forme II.57 du  $\mu_3$  suffira.

Considérons d'abord les opérateurs à un corps.

Le spectre d'énergie des quasi-particules libres est représenté par la formule (1) :

$$\epsilon_0(p) - e_{30} = \frac{p^2}{2 m_0^*} + \frac{\gamma p^4}{2 m_0^*} + \dots$$

Les contributions des deux premiers termes sont proportionnelles à  $n_3^{2/3}$  et  $n_3^{4/3}$  : elles représentent le potentiel chimique  $\mu_F$  du gaz de fermions libres de masse  $m_0^*$  et le terme correctif  $\mu_F^\gamma$  dû à la présence du terme en  $p^4$  dans le spectre des quasi-particules libres. La contribution du terme suivant dans le développement de  $\epsilon_0(p)$  serait en  $n_3^{6/3}$ .

Venons-en aux opérateurs à deux corps.

Pour évaluer l'ordre de grandeur de leur contribution nous représentons l'amplitude de diffusion par le développement formel suivant :

$$t(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{q}) = t_0 + t_1 q^2 + t_2 \vec{p} \cdot \vec{p}' + t_3 q^4 + t_4 q^2 \vec{p} \cdot \vec{p}' \quad (3.4)$$

Nous savons déjà que les deux premiers termes de (4) fournissent, à l'ordre le plus bas en  $n_3$ , des contributions au potentiel chimique en  $n_3$  et  $n_3^{5/3}$ . Le troisième terme n'exerce aucune influence sur  $\mu_3$  [70, 71] ce que nous vérifierons plus loin. Les contributions des termes en  $q^4$  et  $q^2 \vec{p} \cdot \vec{p}'$  sont en  $n_3^{7/3}$  et  $n_3^{9/3}$ . A l'ordre le plus bas en  $n_3$ , les opérateurs à trois corps sont à l'origine de termes en  $n_3^{6/3}$ . Leur contribution est d'ailleurs du même ordre de grandeur que celle résultant d'un calcul de perturbation au second ordre en  $t(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{q})$  [72].

Résumons, l'ensemble de ces résultats sur le tableau suivant, où nous avons symbolisé par la lettre  $f$  les différents opérateurs :

$f(i)$	$n_3^{2/3}$	$n_3^{4/3}$	$n_3^{6/3}$	$n_3^{8/3}$	
$f(ii)$		$n_3$	$n_3^{5/3}$	$n_3^{7/3}$	$n_3^{9/3}$
$f(ii)^2$			$n_3^{6/3}$	$n_3^{8/3}$	
$f(ijk)$			$n_3^{6/3}$	$n_3^{8/3}$	

Nous voyons que si nous représentons l'amplitude  $t(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{q})$  par un développement limité aux termes du second ordre dans les moments, ce choix est compatible avec les approximations suivantes :

– Représenter l'énergie d'une quasi-particule libre par la formule (1), où l'on se limite aux termes d'ordre 4 en  $p$ .

– Evaluer les propriétés des solutions au premier ordre dans les interactions ; plus précisément nous négligerons les contributions en  $(V)^2$ , et  $(V\gamma)$  et  $(\gamma)^2$ .

– Négliger l'influence des collisions qui mettent en jeu plus de deux quasi-particules. Cette approximation est d'ailleurs étayée par un argument donné par Emery [73] : si  $n_3$  désigne la densité numérique de l'hélium-3 et  $R$  l'ordre de la force d'interaction alors, pour des solutions de concentrations  $x \lesssim 6\%$ ,  $n_3^{1/3} R$  est inférieur à  $1/3$  et les propriétés des solutions peuvent être évaluées dans l'approximation des collisions à deux corps.

Nous nous plaçons dans le cadre de ces approximations pour chercher maintenant la forme générale que doit avoir l'amplitude de diffusion  $t(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}')$  que nous supposons indépendante de la concentration en  $^3\text{He}$ . Nous nous limiterons aux termes en  $n_3^{5/3}$  dans l'expression du potentiel chimique.

L'amplitude de diffusion doit satisfaire aux propriétés suivantes :

– Elle doit être invariante par symétrie dans l'espace des moments :

$$t(\vec{p}, \vec{p}') = t(\vec{p}', \vec{p}) \quad (5)$$

– Elle doit être invariante par rapport au renversement du temps :

$$t(\vec{p}, \vec{p}') = t(\vec{p}, -\vec{p}')$$

– Elle doit être invariante par rotation dans l'espace des moments. Cette dernière propriété nous amène à chercher une amplitude de diffusion qui soit de nature tensorielle.

Prenons maintenant en compte le fait que le système des quasi-particules de  ${}^3\text{He}$  n'est plus invariant dans une transformation de Galilée. La présence du superfluide, dont le mouvement est caractérisé par sa vitesse  $\vec{v}_s$ , a détruit cette propriété en privilégiant un système de référence, celui où  $\vec{v}_s = 0$ . L'amplitude de diffusion doit donc être un scalaire d'origine tensorielle et dépendre explicitement de deux moments  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ . Le développement en  $\vec{q}$  peut en être limité au deuxième ordre car nous ne nous intéressons pas aux termes d'ordre  $n_3^2$  et de puissances supérieures dans  $\mu_3$ .

La prise en considération des différentes formes possibles nous autorise à écrire l'amplitude de diffusion sous la forme du développement suivant :

$$t(p, p'; q) = t_0 + t_1 q^2 + t_2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + t_3 \vec{p} \cdot \vec{p}' \quad (7)$$

Nous allons nous attacher maintenant à la signification physique des différents termes de la forme (7).

1) Le premier terme est de même nature que ceux introduits aux paragraphes II.5 et II.6.

2) La présence du second terme dans l'amplitude de diffusion est justifiée par de nombreuses considérations. En particulier les expériences ont montré que le potentiel d'interaction effectif à grande distance et répulsif à courte distance. La partie répulsive de ce potentiel est généralement représentée par un cœur dur du rayon  $r_c = 2,6 \text{ \AA}$ . Comme le signe de l'interaction change de signe avec la distance, le potentiel doit donc dépendre de  $r$  et par conséquent de  $q$ .

3) La troisième contribution est proportionnelle aux moments des deux quasi-particules et elle est de la forme dipôle-dipôle [157] :

$$V_{dip} \propto \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} \quad (8)$$

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe III.6, cette forme de potentiel a été introduite pour la première fois par BBP [4] qui ont toutefois jugé que la contribution correspondante était négligeable devant le terme de compression  $-\alpha^2 m_4 s^2 / n_4$ . Comme nous le verrons, l'influence du terme dipolaire, bien que faible, est néanmoins décelable sur les propriétés des mélanges  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ .

La forme même du potentiel dipolaire est à l'origine de deux questions :

- Quelle valeur prend ce potentiel lorsque l'on fait tendre  $q$  vers zéro ?
- Comment est-il affecté par une transformation de Galilée ?

Commençons par étudier le premier point et pour cela considérons la transformée de Fourier de  $V_{dip}$  :

$$V(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{r}) \propto \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{p}' \cdot \vec{r})}{r^5} \right] \quad (9)$$

L'expression (9) représente l'interaction de deux sphères immergées dans un liquide incompressible en hydrodynamique classique, due à la superposition de leurs rétro-courants. La définition de la transformée de Fourier nous indique que :

$$V_{dip}(\vec{p}, \vec{p}'; q = 0) = \int V_{dip}(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{r}) d^3 r . \quad (10)$$

Remplaçons  $V_{dip}(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{r})$  par l'expression correspondante (9). L'intégration sur les angles conduit à la valeur suivante :

$$V_{dip}(\vec{P}, \vec{P}'; q = 0) = 2\pi \int r^2 dr \left\{ -\frac{P^2 \cos \theta}{r^3} + \frac{P^2 r^2 \cos^3 \theta}{3 r^5} \right\} \Big|_0^\pi = 0 . \quad (11)$$

La valeur du potentiel dipolaire est donc nulle dans la limite  $q \rightarrow 0$ . Ce résultat a également été obtenu par C Ebner et D. Edwards [5] qui, pour le justifier ont avancé l'argument suivant : la présence du terme dipolaire est due à l'échange de phonons entre les quasi-particules. Comme il ne peut y avoir d'échange d'un phonon de moment nul, la valeur du potentiel dipolaire, doit donc être nulle dans ce cas. Cet argument imagé a cependant peu de vertu démonstrative.

Passons maintenant au second point, c'est-à-dire, envisageons l'influence d'une transformation de Galilée sur le potentiel  $V_{dip}$  (8).

Introduisons le moment du centre de masse  $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{p}')$  dans la formule (8) qui se met alors sous la forme :

$$V_{dip} = \frac{(\vec{P} \cdot \vec{q})^2}{q^2} - \frac{q^2}{4} = \frac{(p^2 - p'^2)^2}{4q^2} - \frac{q^2}{4} . \quad (12)$$

Le potentiel dipolaire comporte ainsi deux contributions :

– La *première* traduit la non-invariance du système dans une transformation de Galilée : elle est de ce fait *non-locale*. Nous verrons ultérieurement que le premier terme de (12) contribue aussi bien aux propriétés thermodynamiques qu'aux propriétés hydrodynamiques.

– la *seconde* contribution est purement "locale" : elle n'interviendra que dans les propriétés thermodynamique des solutions.

Cette décomposition permet de retrouver immédiatement le résultat établi par W.L.Mc Millan [45] et selon lequel, à très basse température et sur la surface de Fermi, le potentiel dipolaire est localisé. En effet, si  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = p_F$ , alors (12) se réduit à :

$$V_{dip} = -q^2/4 \quad (13)$$

4) Nous venons de montrer que les trois premiers termes de l'amplitude  $t(\vec{p}, \vec{p}'; \vec{q})$  (7) possédaient une signification physique. Qu'en est-il du dernier, le terme scalaire  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$  ?

a) Correspond-il à une représentation formelle ou peut-il être rattaché à un potentiel effectif ? Notons d'abord que, en raison de sa présence, l'interaction de deux quasi-particules de même moment  $\vec{p}$  et de spins opposés dépendra de ce moment  $\vec{p}$  :

$$t(\vec{p}, \vec{p}; 0) = t_0 + t_3 p^2$$

On peut penser que l'interaction "effective" entre les quasi-particules dépend du rapport  $(p/m_4s)$  où  $m_4s$  désigne un moment typique de l'hélium-4. En effet l'interaction effective ne peut être considérée comme instantanée que si la condition  $p \ll m_4s$  est satisfaite sinon des effets dus au temps apparaissent et l'on a affaire à un potentiel retardé. Une autre raison pour que les propriétés d'un atome de  ${}^3\text{He}$  dépendent du rap-

port ( $p/m_4s$ ) est la suivante. Si  $|\vec{p}|$  devient de l'ordre de  $m_4s$ , la quasi-particule pourra exciter des phonons réels et le concept d'habillage des quasi-particules par les phonons virtuels disparaît. La déformation progressive de l'habillage des quasi-particules avec sa vitesse a été étudiée par C. Ebner [69] comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. On est donc en droit de s'attendre à la présence, dans l'amplitude de diffusion, de termes ayant la même origine qui donneront une dépendance en  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$  dans l'interaction effective entre quasi-particules. Pour une solution au repos, elle fournira aux propriétés du système des contributions en  $(p_F/m_4s)^2$  : celles-ci ont a priori la même influence que la partie dipolaire de l'amplitude de diffusion.

b) Nous nous proposons d'étayer maintenant cette dernière assertion en étudiant le couplage  $^3\text{He}$ -phonon dans le cadre d'un modèle introduit par Baym et Pethick [8].

Les déviations basse-fréquence de l'hélium-4 à partir de l'équilibre peuvent être représentées par une variation de la densité  $\rho_4(r, t)$  de l'hélium-4 et par une vitesse superfluide locale  $\vec{v}_s(r, t)$ . L'interaction entre un phonon de grande longueur d'onde et une quasi-particule de  $^3\text{He}$  est déterminée par la dépendance de l'énergie  $\epsilon(p)$  de la quasi-particule en  $\rho_4$  et  $v_s$ . La variation correspondante  $\delta\epsilon_p(r, t)$  s'écrit :

$$\delta\epsilon_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\partial e_{30}}{\partial n_4} + \frac{p^2}{2} \frac{\partial(1/m_0^*)}{\partial n_4} \right) \rho_4(r, t) + \frac{\delta m}{m_0} \vec{p} \cdot \vec{v}_s(\vec{r}, t) \quad (14)$$

+ termes quadratiques en  $\rho_4$  et  $v_s$ ,

où  $\delta m = m_0^* - m_3$ .

$\delta\epsilon_p$  (14) représente l'hamiltonien de l'interaction effective. Les termes linéaires en  $\rho_4$  et  $v_s$  correspondent à l'absorption ou à l'émission d'un phonon par une quasi-particule. Ils sont à l'origine de l'interaction de deux quasi-particules  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$  par échange d'un phonon de moment  $\vec{q}$ . Baym et Pethick ont calculé cette interaction en négligeant l'influence du terme en  $p^2/2 \partial(1/m_0^*)/\partial n_4$  dans (14) qui est de l'ordre de  $(p/m_4s)^2$  fois plus petit que le terme principal  $\partial e_{30}/\partial n_4$ . La contribution de l'interaction par échange de phonon obtenue dans ces conditions par Baym et Pethick est représentée par la formule :

$$- \frac{m_4s^2}{n_4} \left[ (1 + \alpha)^2 (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) + \delta_{\sigma\sigma'} \frac{\omega^2}{s^2q^2} \left( 1 + \alpha + \frac{\delta m}{m_4} \right)^2 \right] \quad (15)$$

Si nous effectuons le calcul en tenant compte de l'influence des termes en  $p^2$ , le résultat est le suivant :

$$- \frac{m_4s^2}{n_4} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \left[ (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha) \frac{n_4}{m_0^*} \frac{\partial m_0^*}{\partial n_4} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{m_0^* m_4 s^2} + (1 + \alpha) \left( \frac{n_4}{m^*} \frac{\partial m_0^*}{\partial n_4} \right) \frac{q^2}{2} \right] \quad (16)$$

$$- \delta_{\sigma\sigma'} \frac{m_4s^2}{n_4} \left[ \frac{\omega^2}{\omega^2 - s^2q^2} \left( 1 + \alpha + \frac{\delta m}{m_4} \right)^2 \right]$$

Précisons d'abord que le terme en  $\omega^2$  est à l'origine de la contribution dipolaire de ce potentiel d'interaction. En effet :

$$\omega^2 = \frac{1}{2m_0^*} \vec{q} \cdot (2\vec{p} + \vec{q}) = \frac{1}{2m_0^*} \vec{q} \cdot (\vec{q} - 2\vec{p}')$$

Dans la limite  $q \ll p$ ,  $p' \ll m_4 s$ , le terme en  $\omega^2$  devient :

$$\frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} \frac{m_4}{n_4 m_0^{*2}} \left(1 + \alpha + \frac{\delta m}{m_4}\right)^2 \quad (17)$$

Pour discuter la différence qui sépare le résultat (16) de celui établi par Baym et Pethick, en particulier la présence du terme en  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$ , comparons les contributions respectives de ce terme et du potentiel dipolaire à la masse inertielle  $m_I$  dont l'expression, justifiée au prochain chapitre, s'écrit :

$$\frac{1}{m_I} = \frac{1}{m_0^*} \left[ 1 - m_0^* n_3 (1 + \alpha) \frac{\partial(1/m_0^*)}{\partial n_4} - \frac{1}{6} \frac{n_3}{n_4} \frac{m_4}{m_0^*} \left(1 + \alpha + \frac{\delta m}{m_4}\right)^2 \right]$$

Les effets du potentiel scalaire  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$  et du potentiel dipolaire apparaissent respectivement dans le second membre de (18). Une application numérique simple conduit à :

$$\frac{1}{m_I} = \frac{1}{m_0^*} [1 - 1,12 x (1 + \alpha x) - 0,5 x]$$

où  $x$  désigne la concentration de la solution. L'influence des termes en  $p^2$  y est comparable à celle du potentiel dipolaire. L'importance du terme scalaire est également attestée par la forme même de la formule (16) : les deux contributions scalaires et dipolaires sont d'ordre comparable et  $(p/m_4 s)^2$  fois plus petites que le terme d'ordre 0 en  $p$  ; ce dernier devient finalement  $-\alpha^2 m_4 s^2 / n_4$  quand on tient compte de la contribution directe de l'interaction effective entre les quasi-particules de  ${}^3\text{He}$ .

c) Le calcul précédent montre que le mécanisme d'interaction par échange de phonon est à l'origine de contributions à  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Les corrections au terme d'ordre 0 en  $p$ ,  $p'$  et  $q$  correspondent aux facteurs de forme considérés par W.L. Mc Millan [45] et vont comme  $(p/m_4 s)^2$ . Ces corrections donnent des contributions aux mêmes ordres que ceux qui sont responsables de  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  dans (7). Il est illusoire de chercher à calculer exactement tous ces termes étant donné l'incertitude qui subsiste dans ce modèle sur les contributions autres que celles résultant de l'échange de phonons virtuels.

d) Terminons cette étude sur le sens physique de la contribution scalaire  $t_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'$  par la remarque suivante : un précédent travail [70, 71] sur le modèle de Disatnick et Brücker [6] nous a permis d'établir que ce terme n'exerçait aucune influence sur les propriétés thermodynamiques des solutions diluées. Il n'apparaît que dans les expressions des propriétés hydrodynamiques telles que la masse inertielle. Nous ne tiendrons donc pas compte dans le chapitre suivant de cette contribution sauf lorsque nous traiterons de la masse inertielle des quasi-particules de  ${}^3\text{He}$ .

Nous venons de construire, sur la base d'arguments généraux de symétrie et d'invariance, l'amplitude de collision de deux quasi-particules de  ${}^3\text{He}$ . Les paramètres  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  mis en jeu doivent être déterminés empiriquement.

**III.3. Le modèle du quasi-gaz.** — Résumons brièvement les résultats que nous avons obtenus et que nous utiliserons au chapitre IV :

1) Dans la limite d'extrême dilution, le spectre d'une quasi-particule de  ${}^3\text{He}$  est représenté par la formule :

$$\epsilon_0(P) = e_{30} + \frac{p^2}{2m_0^*} + \gamma \frac{p^4}{2m_0^*} \quad (1)$$

2) L'amplitude de collision de deux quasi-particules de moments  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ , échangeant le moment  $\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}'$  lors de leur collision, est définie par le développement suivant :

$$t(\vec{p}, \vec{p}' ; \vec{q}) = t_0 + t_1 q^2 + t_2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + t_3 \vec{p} \cdot \vec{p}' . \quad (7)$$

Les paramètres de Landau, caractérisant le potentiel effectif d'interaction entre les quasi-particules, sont reliés à l'amplitude de diffusion par la formule habituelle [75] :

$$f_{p\sigma, p'\sigma'} = t(p, p' ; 0) - \delta_{\sigma\sigma'} t(p, p' ; q) = t_{\sigma\sigma'} t(p, p' ; q) = t_{\sigma\sigma', pp'}$$

Notons que la théorie de Landau peut être appliquée au système de  ${}^3\text{He}$  en solution dans le superfluide si l'hélium-4 est caractérisé par son potentiel chimique  $\mu_4$  [76] :

$$f_{p\sigma p'\sigma'} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{0s}}{\partial n_{p\sigma} \partial n_{p'\sigma'}} \right|_{\mu_4}$$

Dans ce système de variables, la thermodynamique de la solution se ramène à celle d'un composant ; le développement de l'énergie osmotique est le suivant :

$$\mathcal{E}^{0s} = \mathcal{E}_{40}^{0s} + \sum_{p\sigma} \epsilon_{0\sigma}(p) n_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p\sigma, p'\sigma'} f_{p\sigma p'\sigma'} n_{p\sigma} n_{p'\sigma'} \quad (22)$$

L'expression (22) met en jeu les fonctions de distribution  $n_{p\sigma}$  et non leur variation  $\delta n_{p\sigma}$ . Ce développement représente une extension de la théorie de Landau qui n'est valable que pour des solutions diluées. Nous avons également fait l'hypothèse que les différentes quantités  $\mathcal{E}_0^{0s}$ ,  $\epsilon_{0\sigma}(p)$  et  $f_{p\sigma, p'\sigma'}$  étaient indépendantes de la concentration de la solution. Le développement (22) nous permet de relier les expressions de l'amplitude de diffusion et de l'interaction effective. En effet, dans le cadre de l'approximation de Born, l'amplitude de diffusion est égale à l'élément de matrice de l'interaction entre l'état initial et l'état final. D'autre part, considérons un système fictif simple constitué d'un gaz de fermions en interaction. Si l'interaction entre deux fermions est de la forme  $V(\vec{p}, \vec{p}' ; r)$  où  $r$  est la distance séparant les deux particules, et si cette interaction possède une transformée de Fourier

$$V(\vec{p}, \vec{p}' ; \vec{q}) = \int d^3r e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} V(\vec{p}, \vec{p}' ; \vec{r}),$$

alors l'énergie du système s'écrit, dans l'approximation de Hartree-Fock ;

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{0s} = & \mathcal{E}_{40}^{0s} + \sum_{p\sigma} \epsilon_{0\sigma}(p) n_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p\sigma p'\sigma'} [V_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}' ; 0) \\ & - \delta_{\sigma\sigma'} V_{\sigma\sigma'}(p, p' ; p - p')] n_{p\sigma} n_{p'\sigma'} \end{aligned} \quad (23)$$

La comparaison des expressions (22) et (23) montre que :

$$f_{p\sigma p'\sigma'} = V_{\sigma\sigma'}(p, p' ; 0) - \delta_{\sigma\sigma'} V_{\sigma\sigma'}(p, p' ; p - p') . \quad (24)$$

Dans le cadre des deux approximations exposées ci-dessus, les identifications (21) et (24) des paramètres de Landau sont donc équivalentes ; nous utiliserons indistinctement dans la suite les termes d'amplitude de diffusion  $t(\vec{p}, \vec{p}' ; \vec{q})$  ou d'interaction effective  $V(\vec{p}, \vec{p}' ; \vec{q})$ .

Terminons ce troisième chapitre en établissant les relations qui existent entre composantes symétriques et antisymétriques de spin de l'interaction. Celles-ci sont définies de la manière suivante :

$$f^s = \frac{1}{2}(f^{\uparrow\uparrow} + f^{\uparrow\downarrow}), f^a = \frac{1}{2}(f^{\uparrow\uparrow} - f^{\uparrow\downarrow}). \quad (25)$$

Ecrivons-les sous la forme :

$$\begin{aligned} f^s &= V_0^s + V_1^s q^2 + V_2^s \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + V_3^s \vec{p} \cdot \vec{p}', \\ f^a &= V_0^a + V_1^a q^2 + V_2^a \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + V_3^a \vec{p} \cdot \vec{p}'. \end{aligned} \quad (26)$$

Pour une interaction de la forme (24) comportant un terme d'échange mais pas de couplage spin-spin direct, nous obtenons les relations suivantes entre parties symétriques et antisymétriques du potentiel effectif :

$$\left\{ \begin{aligned} V_0^s &= -V_0^a = \frac{1}{2} t_0 \\ V_1^s &= V_1^a = \frac{1}{2} t_1 \\ V_2^s &= V_2^a = \frac{1}{2} t_2 \\ V_3^s &= -V_3^a = \frac{1}{2} t_3 \end{aligned} \right. \quad (27)$$

La simplicité du modèle que nous venons de présenter va permettre le développement d'une paramétrisation unifiée des différentes propriétés thermodynamiques des solutions. Ces propriétés étant déterminées au chapitre qui va suivre, nous pourrons ensuite analyser les valeurs mesurées des propriétés d'équilibre en dehors de la courbe de séparation de phase et sur la courbe de séparation de phase. Nous montrerons qu'à l'intérieur du cadre de notre théorie, ces valeurs sont cohérentes les unes avec les autres.

**IV – Expressions des propriétés d'équilibre des solutions de  $^3\text{He}$  dans  $^4\text{He}$  superfluide**  
Nous avons introduit et justifié au paragraphe précédent le modèle phénoménologique caractérisé par les paramètres  $m_0^*$ ,  $V_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) et  $\gamma$  dans le cadre duquel nous allons maintenant nous placer pour déterminer les propriétés thermodynamiques des mélanges  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  II.

Le premier paragraphe sera consacré à l'évaluation du potentiel chimique de  $^3\text{He}$ ,  $\mu_3$ , dont la connaissance nous permettra de calculer toutes les propriétés des solutions ; la première grandeur que nous déterminerons est la masse effective  $m_{c.s.}^*$  des quasi-particules de  $^3\text{He}$  ;  $m_{c.s.}^*$  peut être également déduite expérimentalement des mesures de chaleur spécifique, ce qui nous amènera à évaluer également cette grandeur physique.

Les autres propriétés physiques que nous considérerons sont : la susceptibilité magnétique de  $^3\text{He}$  en solution, l'énergie osmotique de la solution et la pression osmotique qu'exercent les atomes de  $^3\text{He}$  dissous dans l' $^4\text{He}$  superfluide. Rappelons que nous négligerons, dans nos calculs, la contribution des excitations de  $^4\text{He}$  (phonons et rotons) aux propriétés thermodynamiques du mélange ; cette approximation est licite pour des valeurs

de la température et de la concentration molaire en  ${}^3\text{He}$  telles que  $x \gtrsim 1\%$  et  $T \lesssim 0,5\text{ K}$  ; — dans le cadre du présent modèle le potentiel d'interaction est représenté par un développement limité aux termes du second ordre dans les moments ; cette approximation revient à négliger les effets dus aux corrélations qui mettent en jeu plus de deux atomes de  ${}^3\text{He}$ . Pour être donc conforme à l'esprit de ce modèle, nous évaluerons les propriétés des solutions de  ${}^3\text{He}$  dans He II en nous limitant aux termes du premier ordre en  $V_i$  ; nous négligerons les termes correctifs supplémentaires, ceux-ci faisant intervenir les collisions à trois corps ; nous nous limiterons également aux termes du premier ordre en  $\gamma$  : comme l'indiquent les expériences, leur contribution est au plus du même ordre de grandeur que celui de la partie quadratique du potentiel d'interaction ; — nous exprimerons par unité de volume les grandeurs physiques extensives qui interviennent dans les propriétés des mélanges.

**IV.1. Evaluation du potentiel chimique  $\mu_3$ .** — Déterminons d'abord, à l'aide de la mécanique statistique, l'énergie  $\epsilon(\vec{p})$  d'une quasi-particule de moment  $\vec{p}$  soumise aux interactions binaires des autres quasi-particules ; ensuite la connaissance de  $\epsilon(\vec{p})$  nous livrera celle de  $\mu_3$ .

*A. Détermination de l'énergie d'une quasi-particule  $\epsilon(\vec{p})$*

Les états faiblement excités du système peuvent être décrits, dans l'esprit de la théorie de Landau [75], en termes de quasi-particules en interaction faible. L'énergie osmotique de la solution, dérivée de (II.15), est, dans un état peu excité, une fonctionnelle de la fonction de distribution  $n_p$  des excitations et du potentiel chimique de l' ${}^4\text{He}$  en solution :

$$\mathcal{E}^{0s} = \mathcal{E}^{0s} \{n_p, \mu_4\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{E}^{0s} = \mathcal{F}^{0s} + T, \quad .$$

L'énergie d'une quasi-particule de moment  $p$  est, par définition, la dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{E}^{0s}$  par rapport à  $n_p$  :

$$\epsilon(p) = \left. \frac{\delta \mathcal{E}^{0s}}{\delta n_p} \right|_{\mu_4} \quad (1)$$

Les interactions conservent le nombre de particules pour un liquide de Fermi normal [39]. Le nombre d'atomes de  ${}^3\text{He}$  est égal au nombre de quasi-particules de  ${}^3\text{He}$  :

$$n_3 = \sum_p n_p \quad (2)$$

La variation totale d'énergie osmotique (par unité de volume) est donc :

$$\delta \mathcal{E}^{0s} = \sum_p \epsilon_p \delta n_p - n_4 \delta \mu_4 \quad (3)$$

L'entropie de l'état macroscopique considéré ne dépend que du nombre de possibilités de répartition d'un nombre donné d'excitations élémentaires entre les états des différents moments possibles. Pour un gaz de Fermi, on a :

$$\mathcal{S} = -k_B \sum \{n_p \text{Log } n_p + (1 - n_p) \text{Log } (1 - n_p)\}$$

Cette forme *particule-libre* de l'entropie est compatible avec le fait que les énergies des excitations dépendent de la température d'une part [76] et de l'existence d'interactions faibles d'autre part. Les états du système en interaction sont en correspondance univoque avec ceux du gaz de fermions libres : l'entropie a donc la même forme dans les deux cas.

Considérons maintenant le système dans un état d'équilibre thermodynamique caractérisé par une certaine valeur  $T$  de la température. Si l'on écarte peu le système de cet état, la variation correspondante de l'énergie osmotique est :

$$\delta \mathcal{E}^{0s} = T \delta \mathcal{S} + \mu_3 \delta n_3 - n_4 \delta \mu_4 \quad (5)$$

Notons le changement de variables  $n \rightarrow n_4, z_3 \rightarrow \mu_3$  [77].

La fonction de distribution  $n_p$  à l'équilibre thermique est donnée par la formule habituelle :

$$n_p = \{ \exp [ (\epsilon_p - \mu_3) / k_B T ] + 1 \}^{-1}$$

Le potentiel chimique  $\mu_3$  caractérise la densité du système  $n_3$ .

La fonction  $n_p$  rentre dans l'expression de l'énergie osmotique (III.22) qui est la suivante :

$$\mathcal{E}^{0s} = \mathcal{E}_{40}^{0s} + \sum_p \epsilon_p^0 n_p + \frac{1}{2} \sum_p \sum_{p'} V^s(\vec{p}, \vec{p}') n_p n_{p'} \quad (6)$$

$V^s(\vec{p}, \vec{p}')$  y désigne la composante symétrique de  $V_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}')$ , définie au chapitre III par la relation (III.26) :

$$V^s(p, p') = V_0^s + V_1^s q_1^2 + V_2^s \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} + V_3^s \vec{p} \cdot \vec{p}'$$

L'expression (6) représente le développement fonctionnel au second ordre de la densité d'énergie osmotique en termes de fonction de distribution  $n_p$ . Ce développement est effectué au voisinage de la densité de  ${}^4\text{He}$  pur dont le potentiel chimique  $\mu_4$  est le même que celui de la solution :

$$\mathcal{E}_{40}^{0s} = -P_0 \Omega / \Omega = -P_0 \quad (7)$$

Cette quantité varie très peu avec la température ; nous la prendrons donc constante.  $P_0$  est la pression à laquelle serait soumise la solution si l'on en extrayait les atomes de  ${}^3\text{He}$  en maintenant  $\mu_4$  constant.

Les paramètres  $\mathcal{E}_{40}^{0s}$ ,  $\epsilon_p^0$  et  $V_p^s(\vec{p}, \vec{p}')$  ne dépendent que de  $\mu_4$ .

Pour obtenir l'énergie d'une quasi-particule  $\epsilon(p)$ , nous différencions l'énergie osmotique (6) par rapport à  $n_p$  :

$$\epsilon(p) = \epsilon_p^0 + \sum_{p'} n_{p'} V^s(\vec{p}, \vec{p}')$$

Remplaçons l'expression de  $\epsilon_p^0$  et  $V^s(\vec{p}, \vec{p}')$  par les relations correspondantes (III.1) (III.26) nous obtenons l'expression de  $\epsilon(p)$  dans le modèle que nous avons adopté :

$$\begin{aligned} \epsilon(p) = e_{30} + \frac{p^2}{2 m_0^*} + V_0^s n_3 + \gamma \frac{p^4}{2 m_0^*} + p^2 n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{4} \right) \\ + \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{4} \right) \sum_{p'} p'^2 n_{p'} - V_2^s I(p) \end{aligned} \quad (8)$$

$\epsilon(p)$  ne dépend que du module de  $\vec{p}$  en raison du caractère isotrope du système. L'intégrale  $I(p)$  représente la contribution non-locale du potentiel dipolaire :

$$I(p) = \frac{1}{8 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p' (p^2 - p'^2)^2 \text{Log} \left| \frac{p - p'}{p + p'} \right| n(p') dp' \quad (9)$$

Montrons brièvement l'origine de cette intégrale. Nous avons indiqué au chapitre précédent que l'interaction dipolaire pouvait être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} = -\frac{q^2}{4} + \frac{(p^2 - p'^2)^2}{4q^2} \quad (10)$$

Cette décomposition fait clairement apparaître la dualité de cette interaction qui possède ainsi deux contributions de natures différentes :

– La *première*  $-\frac{q^2}{4}$  – reste invariante dans une transformation de Galilée ; son effet sera simplement superposé à celui du terme en  $V_1 q^2$  : le groupement  $q^2 \left( V_1 - \frac{V_2}{4} \right)$  représente donc la partie “locale” globale du potentiel.

– La *seconde* contribution  $-\frac{(p^2 - p'^2)^2}{4q^2}$  – est en revanche essentiellement non-invariante dans une telle transformation. Elle est entièrement responsable de la présence de  $I(p)$  dans l'expression de  $\epsilon(p)$ .

Nous verrons, au paragraphe suivant, comment évaluer simplement et à toute température l'influence de cette intégrale sur l'expression du potentiel chimique  $\mu_3$  et par conséquent sur les expressions des propriétés des mélanges.

### B. Détermination du potentiel chimique $\mu_3$

Nous venons d'introduire le groupement  $V_L = V_1^s - \frac{V_2^s}{4}$ , représentant la partie locale du potentiel. Nous allons, pour simplifier les calculs et l'écriture, lui associer une masse “locale”  $m_L$ , correspondant à une renormalisation de  $m_0^*$  par le potentiel  $V_L$  :

$$m_L = m_0^* \left[ 1 - 2 m_0^* n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{4} \right) \right] \quad (11)$$

En effet ceci permet de regrouper les termes en  $p^2$  dans l'expression de l'énergie d'une quasi-particule qui devient :

$$\epsilon(p) = e_{30} + \frac{p^2}{2 m_L} + V_0^s n_3 + 2 m_0^* \mathcal{E}_F V_L + \gamma \frac{p^4}{2 m_0^*} - V_2^s I(p) \quad (12)$$

Cette formule est de la forme suivante :

$$\epsilon(p) = \bar{\epsilon}_0(p) + \delta \epsilon(p) \quad \text{avec} \quad \bar{\epsilon}_0(p) = e_{30} + \frac{p^2}{2 m_L} \quad (13)$$

$\bar{\epsilon}_0(p)$  représente l'énergie d'une quasi-particule libre de masse  $m_L$  dans un puits de potentiel  $-e_{30}$  ; désignons par  $\mu_F(m_L)$  le potentiel chimique du système de fermions libres de même masse et de densité numérique égale à  $n_3$ . Le potentiel chimique de  ${}^3\text{He}$  en solution, dont nous cherchons l'expression, ne différera de  $\mu_F = e_{30} + \mu_F(m_L)$  que par la présence de termes correctifs induits par  $\delta \epsilon(p)$  où :

$$\delta \epsilon(p) = V_0^s n_3 + V_L \sum_{p'} p' 2 \dot{n}_p + \frac{\gamma p^4}{2 m_0^*} - V_2^s I(p) \quad (14)$$

$\delta \epsilon(p)$  traduit d'une part l'influence des interactions entre les quasi-particules, d'autre part la déviation de  $\epsilon_0(p)$  par rapport au spectre parabolique de Landau-Pomeranchuk [2].

La variation correspondante de  $\mu_3$  est telle que :

$$\mu_3 = e_{30} + \mu_F(m_L) + \delta\mu_3 \quad (15)$$

La quantité  $\delta\mu_3$  est déterminée par la conservation de la densité numérique de  ${}^3\text{He}$  :

$$n_3 = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu_3)} + 1} - \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\bar{\epsilon}_{0p} - \bar{\mu}_F)} + 1},$$

où

$$\beta = 1/k_B T.$$

Développons la fonction de distribution  $n(\epsilon)$  au voisinage de  $(\bar{\epsilon}_{0p} - \bar{\mu}_F)$  en nous limitant aux termes du premier ordre en  $\delta\epsilon$  et  $\delta\mu_3$ . Nous pouvons alors en déduire l'expression de  $\delta\mu_3$  :

$$\delta\mu_3 = V_0^s n_3 + 2m_0^* V_L \mathcal{E}_F + \mu_F^\gamma + \delta\mu_3(I) .$$

Quatre contributions figurent dans  $\delta\mu_3$  :

–  $V_0^s n_3$  traduit l'influence de la moyenne spatiale du potentiel effectif d'interaction (ceci suppose que  $V^s(\vec{p}, \vec{p}')$  possède une transformée de Fourier dans l'espace de configuration)

–  $2m_0^* V_L \mathcal{E}_F$  doit son existence à la partie locale  $V_L$  du potentiel ;  $\mathcal{E}_F$  est la densité d'énergie du système de fermions libres de masse  $m_0^*$  et de même densité  $n_3$ .

–  $\mu_F^\gamma$  est liée au terme non parabolique présent dans le spectre d'énergie des quasi-particules libres :

$$\mu_F^\gamma = \frac{5\gamma}{2m_0^*} (2m_0^* k_B T)^2 \frac{F_{3/2}(\eta)}{F_{1/2}(\eta)}, \quad \eta = \beta\mu_F .$$

– La dernière contribution participe de la partie "non-locale" du potentiel dipolaire [10] :

$$\delta\mu_3(I) = V_2^s \frac{m_0^*(k_B T)^{1/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^2} \left[ F_{3/2} - \frac{F_{1/2}^2}{F_{-1/2}} \right]. \quad (17)$$

Les fonctions de Fermi  $F_k(\eta)$  sont définies par la relation :

$$F_k(\eta) = \int_0^\infty \frac{t^k dt}{e^{t-\eta} + 1} .$$

Elles ont été tabulées par Mc Dougall et Stoner [78]. Ces fonctions sont directement reliées aux grandeurs d'équilibre caractérisant le système de fermions libres de potentiel chimique  $\mu_F = k_3 T \eta$  ; utilisant ces relations nous pouvons finalement mettre l'expression du potentiel chimique de  ${}^3\text{He}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu_3 = e_{30} + \mu_F(m_L) + V_0^s n_3 + \frac{50}{9} \frac{m_0^* \gamma}{n_3} \mathcal{E}_F \left( \mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F \right) \\ + 2m_0^* \mathcal{E}_F V_L + \frac{2m_0^* V_2^s}{9} \left( \mathcal{E}_F + \frac{T \mathcal{C}_F}{2} \right) \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_F$  est la chaleur spécifique (exprimée par unité de volume) du gaz idéal de fermions de masse  $m_0^*$  et de densité  $n_3$ . Une représentation polynomiale de ces fonctions de Fermi est donné dans la référence [74].

Insistons sur le fait suivant :  $m_L$  n'a été introduit que comme un intermédiaire de calcul. En effet si le potentiel était purement local,  $m_L$  serait égal à la masse effective du système de quasi-particules de  $^3\text{He}$  ; mais dans le cas présent, où le potentiel d'interaction possède aussi une contribution non-locale,  $m_L$  n'est relié à aucune quantité physique directement mesurable. La seule masse ayant une signification physique bien précise est la masse effective  $m_{c.s.}^*$  reliée à la chaleur spécifique de la solution et que l'on peut déduire expérimentalement des mesures de cette propriété. Nous allons maintenant l'évaluer et nous exprimerons ensuite  $\mu_3$  en fonction de  $m_{c.s.}^*$ .

**IV.2. Détermination de la masse effective.** — Dans la théorie de Landau le concept de masse effective traduit une renormalisation de la masse  $m_0^*$  des quasi-particules libres par le potentiel d'interaction ;  $m_{c.s.}^*$  est défini au voisinage de la surface de Fermi par la relation (39) :

$$\left[ \frac{\partial \epsilon(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m_{c.s.}^*} \right]_{p=p_F} \quad (19)$$

L'application, dans notre modèle, de la formule (19) constituera la première détermination de la masse effective. La seconde détermination sera effectuée en partant de l'expression de la chaleur spécifique, qui, lorsque le système des quasi-particules est très dégénéré ( $T \ll T_F$ ), s'écrit :

$$c_F = m_{c.s.}^* \frac{p_F k_B T}{3\hbar^3}$$

$p_F$  désignant comme dans (19), le moment d'une quasi-particule sur la surface de Fermi.

Nous comparerons les deux expressions ainsi obtenues de la masse effective et nous montrerons qu'elles sont identiques dans la limite  $T \ll T_F$ .

#### A. Détermination de la masse effective "densité d'état"

Différentions l'énergie d'une quasi-particule  $\epsilon(p)$ , donnée par l'expression (12), par rapport à  $n_p$ . Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right|_{p=p_F} &= \frac{p_F}{m_0^*} + \frac{2 \gamma p_F^3}{m_0^*} + 2 p_F n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{4} \right) \\ &+ \frac{V_2^s}{8\pi^2 \hbar^3} \left[ \frac{1}{p_F^2} \int_0^\infty \left( g(p_F, p') - \frac{1}{p_F} \left. \frac{\partial g(p, p')}{\partial p} \right|_{p=p_F} \right) dp' \right], \quad (20) \end{aligned}$$

où

$$g(p, p') = p' (p^2 - p'^2)^2 \text{Ln} \left| \frac{p - p'}{p + p'} \right|.$$

Le dernier terme de (20) traduit l'influence de l'intégrale  $I(p)$  (9), c'est-à-dire de la contribution non-locale du potentiel dipolaire (10).

Appliquons maintenant la relation de définition (19) ; nous obtenons l'expression suivante de la masse effective :

$$m_{c.s.}^* = m_0^* \left[ 1 - 2 m_0^* n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{12} \right) - 2 \gamma p_F^2 \right]. \quad (21)$$

Nous constatons que le groupement  $\left(V_1^s - \frac{V_2^s}{12}\right)$  est différent de celui qui apparaît dans l'expression de la masse locale  $V_L = V_1^s - \frac{V_2^s}{4}$ . Ce résultat montre bien que le terme purement non-local du potentiel dipolaire (10) contribue à la masse effective ; il interviendra également dans les expressions des autres propriétés d'équilibre des mélanges  $^3\text{He-He II}$ . La relation (21) montre également que la masse effective est affectée par la présence du terme en  $p^4$  dans le spectre des quasi-particules libres.

### B. Détermination de la masse effective "Chaleur spécifique"

La chaleur spécifique de la solution par unité de volume est donnée par la relation suivante :

$$c_{\mu_4} = T \left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \right|_{\mu_4, n_3} = -T \int_0^{n_3} \left. \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial T^2} \right|_{\mu_4, n'_3} dn'_3. \quad (22)$$

Exprimons maintenant le potentiel chimique  $\mu_3$  en fonction de la masse effective  $m_{c.s.}^*$ .

1) *Expression du potentiel chimique  $\mu_3(m_{c.s.}^*)$ .* — Dans le cadre de notre modèle les expressions que nous obtenons sont exactes jusqu'aux termes du premier ordre dans le potentiel d'interaction. Dans cette approximation, développons l'expression  $\mu_F(m_L)$  (18) au voisinage de  $m_0^*$  :

$$\mu_F(m_L) = \mu_F(m_0^*) + (m_L - m_0^*) \left. \frac{\partial \mu_F}{\partial m} \right|_{m=m_0^*} \quad (23)$$

où  $m_L$  est définie par (11).

Pour évaluer  $\partial \mu_F / \partial m$ , considérons un système de fermions libres de masse  $m_0^*$ , de densité numérique  $n_3$  ; son potentiel chimique,  $\mu_F = kT\eta$ , est relié à la densité  $n_3$  par la formule suivante (79) :

$$n_3 = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} (m_0^* k_B T)^{3/2} F_{1/2}(\eta).$$

Dérivons  $\eta$  par rapport à  $m_0^*$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial m_0^*} = -\frac{3}{m_0^*} \frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}. \quad (24)$$

Nous remplaçons alors les fonctions de Fermi  $F_{1/2}$  et  $F_{-1/2}$  par les expressions correspondantes [78] en fonction de l'énergie et de la chaleur spécifique de ce système. Nous trouvons que :

$$\frac{\partial \mu_F}{\partial m_0^*} = -\frac{5}{3 m_0^* n_3} \left( \mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F \right) \quad (25)$$

Introduisons les relations (23), (25) et (21) dans (18) ; l'expression du potentiel chimique en fonction de la masse effective s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mu_3(T, n_3, \mu_4) = & e_{30} + V_0^s n_3 + \mu_F(m_{c.s.}^*) + \bar{\mu}_F^\gamma + \\ & + 2 m_0^* \mathcal{E}_F \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{12} \right) - \frac{2}{3} m_0^* V_2^s \left( \mathcal{E}_F - \frac{T \mathcal{C}_F}{2} \right), \quad (26) \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\overline{\mu}_F^\gamma = \frac{50}{9} \frac{m_0^* \gamma}{n_3^2} \mathcal{E}_F \left( \mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F \right) + \frac{10}{3} \frac{\gamma p_F^2}{n_3} \left( \mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F \right)$$

Cette contribution du terme en  $\gamma$  a déjà été écrite par Disatnik et Brucker[6].

2) *Détermination de la chaleur spécifique.* — L'expression de la chaleur spécifique, que nous obtenons en remplaçant dans (22)  $\mu_3$  par la formule (26), est la suivante :

$$\mathcal{C}_{\mu_4} = \mathcal{C}_F(m_{c.s.}^*) - \frac{m_0^* V_2^s T^2}{3} \int_0^{n_3} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_F}{\partial T^2} dn'_3 + \mathcal{C}_F^\gamma. \quad (27)$$

$\mathcal{C}_F(m_{c.s.}^*)$  désigne la chaleur spécifique du système de fermions libres de densité numérique  $n_3$  et de masse effective  $m_{c.s.}^*$  ; lorsque l'énergie d'une particule libre  $\epsilon_0(p)$  possède un terme en  $p^4$  alors  $\mathcal{C}_F$  est affectée d'un terme correctif  $\mathcal{C}_F^\gamma$  ; l'expression de  $\mathcal{C}_F^\gamma$  est la suivante :

$$\mathcal{C}_F^\gamma = -T \int_0^{n_3} \frac{\partial^2 \overline{\mu}_F^\gamma}{\partial T^2} dn'_3. \quad (28)$$

Le second terme de la relation (27) représente l'influence de la contribution non-locale du potentiel d'interaction.

La relation (27) permet de calculer la contribution des quasiparticules de  $^3\text{He}$  à la chaleur spécifique de la solution à toute température. Dans la limite basse température, l'expression (27) de la chaleur spécifique s'écrit :

$$\mathcal{C}_{\mu_4} = \mathcal{C}_F(m_{c.s.}^*) + \mathcal{O}(T^3)$$

Cette relation indique que la quantité  $m_{c.s.}^*$  est bien la masse effective "chaleur spécifique",  $\mathcal{O}(T^3)$  symbolisant les termes d'ordre supérieur.

Ainsi, même en présence d'un potentiel non-local, la chaleur spécifique (à  $T \rightarrow 0$ ) du système correspond bien à sa densité d'états à la surface de Fermi.

*C. Analogie masse cristalline-masse inertielle.* — La masse effective des quasiparticules est reliée au paramètre de la théorie de Landau  $F_1^s$  par la formule [39] :

$$m_{c.s.}^* = m_0^* \left[ 1 + \frac{F_1^s}{3} \right] \quad (29)$$

L'établissement de cette relation requiert la propriété d'invariance du système dans une transformation de Galilée. La formule (29) ne pourra pas être appliquée puisque le potentiel d'interaction possède une contribution non-locale (10). Pour trouver le lien qui unit  $m_{c.s.}^*$  à  $F_1^s$ , remarquons qu'il existe une analogie entre notre système et celui des électrons dans les métaux ; dans ce dernier cas les électrons sont soumis à l'influence du potentiel périodique créé par les ions. Il en résulte que le potentiel d'interaction effectif entre deux électrons dépend de leurs moments respectifs  $p$  et  $p'$  et le système perd alors sa propriété d'invariance dans une transformation de Galilée. Dans la théorie de Landau-Silin [80] relative aux électrons dans les métaux apparaît un paramètre supplémentaire : la masse cristalline  $m_c$  ; elle rend compte de la non-invariance du système et remplace  $m_0^*$  dans la formule reliant  $m_{c.s.}^*$  et  $F_1^s$  :

$$m_{c.s.}^* = m_c \left[ 1 + \frac{F_1^s}{3} \right] \quad (30)$$

Nous allons déterminer  $m_c$  dans notre modèle et montrer quel concept physique, caractéristique des mélanges  $^3\text{He-He II}$ , lui est équivalent. Mais auparavant, il nous faut évaluer  $F_1^s$ . Les paramètres de Landau  $F_\ell^s$  sont définis par la relation suivante [39] :

$$F_\ell^s = \frac{m_0^* P_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{(2\ell + 1)}{4} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) P_\ell(\cos \theta) V^s. \quad (31)$$

$V^s$  désigne la composante symétrique de spin du noyau  $V_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}')$  et  $P_\ell$  le polynôme de Legendre de degré  $\ell$ .

Remplaçons  $V^s$  par l'expression qui lui correspond dans notre modèle (6). Nous trouvons pour  $F_1^s$  le résultat suivant :

$$F_1^s = 3 m_0^* n_3 \left[ -2 V_1^s + \frac{V_2^s}{2} + V_3^s \right]. \quad (32)$$

La connaissance de  $F_1^s$  permet de déduire aisément celle de  $m_c$  en comparant les expressions (21) et (30), dans lesquelles nous avons remplacé  $F_1^s$  par (31) ; le résultat que nous obtenons est le suivant :

$$m_c = m_0^* \left[ 1 - \frac{m_0^* V_2^s n_3}{3} - 2 \gamma P_F^2 - m_0^* V_3^s n_3 \right] \quad (33)$$

Cette expression est identique à celle de la masse inertielle [53], quantité définie par la relation  $\rho_n = m_I n_3$  :  $\rho_n$  représente la densité de fluide normal de la solution. Ce résultat possède un explication simple : dans un cas comme dans l'autre, l'existence de ces masses est due à la non-invariance du système dans une transformation de Galilée. Il est clair que si nous exigeons du système qu'il soit invariant dans une telle transformation, alors ces masses sont identiques :

$$m_I = m_c = m_0^*$$

Ayant clarifié les différents concepts de masse effective du système, nous allons considérer maintenant les différentes propriétés d'équilibre de la solution. Toutefois, pour des raisons de simplicité des expressions, à partir de maintenant et dans tout ce qui suivra la contribution des termes en  $\gamma$  à la masse effective  $m_{c,s}^*$ , sera traitée séparément ; introduisons donc une masse effective :

$$m^* = m_0^* \left[ 1 - 2 m_0^* n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{12} \right) \right]$$

traduisant la renormalisation de  $m_0^*$  par les interactions entre quasiparticules.

**IV.3. Propriétés thermodynamiques des solutions de  $^3\text{He}$  dans He II.** — Nous déterminerons d'abord la susceptibilité magnétique de  $^3\text{He}$  en solution. Nous nous intéresserons ensuite à l'énergie osmotique de la solution, son entropie et nous terminerons ce paragraphe par l'évaluation de la pression osmotique exercée par les atomes de  $^3\text{He}$  en solution dans He II. Comme nous le verrons, les expressions de ces propriétés, déterminées à toute température, seront sensibles à la présence du terme non-local dipolaire dans le potentiel d'interaction mais non à celle du terme scalaire  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$ .

#### A. Détermination de la susceptibilité magnétique

La susceptibilité magnétique  $\chi$  est une propriété caractérisant le comportement du système de  $^3\text{He}$  en solution comme nous l'avons vu au paragraphe II.4, elle est donc sensible à l'influence des interactions entre les atomes de  $^3\text{He}$  et l'analyse des mesures

de  $\chi$  [27] a permis de conclure que l'interaction effective entre les  $^3\text{He}$  en solution devait être attractive.

Nous nous limiterons dans le calcul de  $\chi$ , défini par II.45, aux termes du premier ordre en  $H$  ce qui permet d'écrire :

$$\chi = \mu_M \frac{n_{\uparrow} - n_{\downarrow}}{H} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} n_{\uparrow} &= n_0 + \delta n \\ n_{\downarrow} &= n_0 - \delta n \quad \text{avec} \quad n_0 = n_3/2 \end{aligned} \quad (35)$$

$n_0$  représente la densité de quasiparticules ayant un spin donné ( $\pm 1/2$ ) en l'absence de champ magnétique ;  $\delta n$  traduit la variation de cette densité lorsque le champ magnétique est appliqué : dans l'approximation considérée ci-dessus, elle est linéaire en  $H$ . En ce qui concerne le potentiel chimique  $\mu_3$ , il est clair que sa variation ne dépend pas de la direction du champ mais seulement de son intensité. Elle est donc de second ordre en  $H$  [81] et nous la négligerons dans le calcul de la susceptibilité. Le calcul des contributions d'ordre 3 supérieur en  $H$  a été effectué [82] : ces contributions sont extrêmement faibles même dans les champs très élevés de 100 kG.

En présence d'un champ magnétique l'expression de l'énergie osmotique de la solution devient :

$$\mathcal{E}^{os} = \mathcal{E}_{40}^{os} + \sum_{p\sigma} \epsilon_{o\sigma}(p) n_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p\sigma p'\sigma'} V_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}') n_{p\sigma} n_{p'\sigma'} - \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{H} \quad (36)$$

Comme nous l'avons précisé au premier chapitre, l'interaction entre les quasiparticules est une interaction d'échange et peut être écrite sous la forme :

$$V_{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}') = V^s(\vec{p}, \vec{p}') + (2\delta_{\sigma\sigma'} - 1) V^a(\vec{p}, \vec{p}') \quad (38)$$

$V^s$  et  $V^a$  désignent respectivement les composantes symétrique et antisymétrique de spin.

Nous obtenons l'expression de  $\epsilon_{p\sigma}$  en différentiant  $\mathcal{E}^{os}$  par rapport à  $n_{p\sigma}$  ; dans le cas où les directions du spin et du champ sont parallèles nous trouvons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_{p\uparrow} &= \epsilon_p^0 + V_0^s n_3 + V_0^a (n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) + p^2 V_1^s n_3 + p^2 V_1^a (n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) \\ &+ 2m_0^* \mathcal{E}_F V_1^s + V_1^a \sum p'^2 (n_{p'\uparrow} - n_{p'\downarrow}) - \mu_M H \\ &+ V_2^s \sum \frac{(\vec{p}' \cdot \vec{q})(\vec{p} \cdot \vec{q})}{q^2} (n_{p'\uparrow} + n_{p'\downarrow}) \\ &+ V_2^a \sum \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} (n_{p'\uparrow} - n_{p'\downarrow}) \end{aligned} \quad (39)$$

En l'absence de champ magnétique, l'expression correspondante de l'énergie d'une quasiparticule se met sous la forme :

$$\epsilon_p = \epsilon_p^0 + V_0^s n_3 + p^2 V^s n_3 + 2m_0^* \mathcal{E}_F V_1^s + V_2^s \sum \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{q^2} n_{p'} \quad (40)$$

Connaissant les expressions de  $\epsilon_{p\uparrow}$  (39) et  $\epsilon_p$  (40) on peut, par une méthode décrite dans un précédent article [82], obtenir  $\delta n$  sous la forme d'une équation du premier ordre ; la résolution de cette équation requiert l'évaluation de plusieurs intégrales, dont

l'exposé serait fastidieux [83]. Ces intégrales font intervenir les fonctions de Fermi ainsi qu'une fonction particulière  $\psi(\eta)$  définie par la relation :

$$\psi(\eta) = \frac{1}{F_{1/2} F_{-1/2}} \int_{-\infty}^{\eta} F_{-1/2}^2(\eta') d\eta' \quad (41)$$

et  $\psi(\eta)$  vaut 3/2 à  $T = 0$ .

L'expression de la susceptibilité à laquelle nous aboutissons est la suivante :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{V_0^a}{\mu_M^2} + \frac{1 + 6 m_0^* n_3 V_1^a - V_2^a m_0^* n_3 \psi(\eta)}{\chi_F} \quad (42)$$

$\chi_F$  désigne la susceptibilité magnétique du gaz idéal de fermions de masse  $m^*$  et de densité numérique  $n_3$  :

$$\chi_F = \frac{9}{10} \frac{n_3^2 \mu_M^2}{\mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F} \quad (43)$$

L'expression (42) se réduit à celle donnée par A. Yaniv [84] dans le cas d'une interaction purement locale. Dans la théorie des liquides de Fermi dégénérés [39] la susceptibilité magnétique  $\chi$  du système en interaction est reliée au paramètre de Landau  $F_0^a$  par la formule :

$$\chi = \chi_F / (1 + F_0^a) \quad (44)$$

L'expression du paramètre  $F_0^a$  est par conséquent :

$$F_0^a = \frac{V_0^a \chi_F}{\mu_M^2} + 6 m_0^* n_3 V_1^a - \psi(\eta) m_0^* n_3 V_2^a \quad (45)$$

### B. Détermination de l'énergie osmotique de la solution. —

Pour déterminer l'énergie osmotique, nous utilisons la relation de définition de  $\mu_3$  :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}^{\text{os}}}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4} = \mu_3 + T \left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4} \quad (46)$$

Introduisons dans (46) une des relations de Maxwell (II.5). L'intégration de l'expression ainsi obtenue nous conduit au résultat suivant :

$$\mathcal{E}^{\text{os}}(T, \mu_4, n_3) = \mathcal{E}^{\text{os}}(T, \mu_4, n_3 = 0) + \int_0^{n_3} \left( \mu_3 - T \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial T} \right|_{\mu_4, n_3'} \right) dn_3' \quad (47)$$

La constante d'intégration qui apparaît dans la relation (47) n'est autre que la densité d'énergie de  ${}^4\text{He}$  pur (7) :

$$\mathcal{E}^{\text{os}}(T, \mu_4, n_3 = 0) = -P_0 \Omega / \Omega = -P_0. \quad (48)$$

Cette approximation (excitations de  ${}^4\text{He}$  négligées) est conforme à l'esprit de notre modèle puisque nous avons négligé la variation très petite de  $\mathcal{E}_{40}^{\text{os}}$  avec la température.

Introduisons (26) dans (47) ; après avoir effectué l'intégration, nous obtenons la densité d'énergie osmotique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{os}} = & -P_0 + e_{30} n_3 + \mathcal{E}_F(m^*) + \frac{1}{2} V_0^s n_3^2 + \mathcal{E}_F^\gamma \\ & - \frac{2}{3} m_0^* V_2^s \int_0^{n_3} \left( \mathcal{E}_F - T \mathcal{C}_F + \frac{T^2}{2} \frac{\partial \mathcal{C}_F}{\partial T} \right) dn_3' \end{aligned} \quad (49)$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_F^\gamma &= \frac{3}{2} \mu_F^\gamma n_3 - \frac{5}{2} \int_0^{n_3} \mu_F^\gamma dn'_3, \\ \mu_F^\gamma &= \frac{50}{9} \frac{m_0^*}{n_3} \mathcal{E}_F \left( \mathcal{E}_F - \frac{2}{5} T \mathcal{C}_F \right).\end{aligned}\quad (50)$$

- Parmi les différentes contributions à  $\mathcal{E}^{\text{os}}$  nous pouvons distinguer les termes suivants :
- $P_0$  est la densité d'énergie de la solution dans son état initial caractérisé par son potentiel chimique  $\mu_4$ , et sa concentration nulle en  ${}^3\text{He}$  : c'est l'énergie de  ${}^4\text{He}$  pur en équilibre osmotique avec la solution.
  - $\mathcal{E}_F(m^*)$  est la densité d'énergie d'un système de fermions libres de masse  $m^*$  et de densité  $n_3$ .
  - $\mathcal{E}_F^\gamma$  – cette contribution provient de l'existence d'un terme en  $(p^4)$  dans le spectre des quasiparticules libres. On remarquera que l'effet de la contribution non-locale du potentiel d'interaction est nul dans la limite des très basses températures ; on peut également vérifier que l'expression de la chaleur spécifique, obtenue en dérivant  $\mathcal{E}^{\text{os}}$  par rapport à la température, est identique à celle qui a été précédemment déterminée [27].

Nous avons évalué l'énergie osmotique  $\mathcal{E}^{\text{os}}$  de la solution en ne tenant compte que des termes du premier ordre en  $V_i^s$  et  $\gamma$  ; il en résulte qu'à  $T = 0$  cette expression est exacte jusqu'aux termes d'ordre  $8/3$  en  $n_3$  inclus.

### C. Détermination de l'entropie de la solution

L'entropie de la solution est reliée au potentiel chimique par la relation suivante :

$$\mathcal{S}(T, n_3, \mu_4) = \mathcal{S}(T, 0, \mu_4) - \int_0^{n_3} \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial T} \right|_{n'_3, \mu_4} dn'_3 \quad (51)$$

obtenue en intégrant une des relations de Maxwell (II.5).

Comme nous avons négligé la contribution des excitations de  ${}^4\text{He}$  aux propriétés de la solution, la constante d'intégration est nulle :  $(T, 0, \mu_4) = 0$ .

Remplaçons  $\mu_3$  par son expression (26). Nous obtenons la densité d'entropie de la solution sous la forme suivante :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_F(m^*) + \mathcal{S}_F^\gamma + \frac{1}{2} m_0^* V_2^s \int_0^{n_3} \left( \mathcal{C}_F - T \frac{\partial \mathcal{C}_F}{\partial T} \right) dn'_3 \quad (52)$$

$$\text{où } \mathcal{S}_F^\gamma = \frac{3}{2} \mu_F^\gamma n_3 - \frac{7}{2} \int_0^{n_3} \mu_F^\gamma dn'_3 \quad (53)$$

Le premier terme de l'expression précédente correspond à l'entropie d'un gaz idéal de fermions de masse  $m^*$  et de densité  $n_3$ .

La seconde contribution à l'entropie de la solution représente une correction à  $\mathcal{S}_F(m^*)$  due à la présence du terme non-parabolique dans le spectre d'énergie des quasiparticules.

Le troisième terme traduit l'influence de la partie non-locale du potentiel : à très basse température ( $T \ll T_F$ ), il ne contribue pas à l'entropie de la solution ( $\mathcal{C}_F - T \partial \mathcal{C}_F / \partial T = 0$ ) ; les paramètres d'interaction qui interviennent dans l'expression de l'entropie sont également ceux qui renormalisent la masse effective :  $\mathcal{S}$  ne dépend pas de  $V_0^s$ .

#### D. Détermination de la pression osmotique de la solution

Revenons sur la manière dont a été construite la solution afin d'introduire la notion de pression osmotique  $\Pi$  et de trouver la relation thermodynamique qui permet son calcul.

Dans l'état initial du système un récipient I dont le volume a une valeur fixée  $\Omega$  contient  ${}^4\text{He}$  pur à la pression  $P_0$  et à la température  $T$ ; une superfuite le relie à un second récipient II rempli de  ${}^4\text{He}$  pur, à la température  $T$  et dont la pression est maintenue constante et égale à  $P_0$ . Grâce à la superfuite l'hélium-4 superfluide peut circuler d'un récipient à l'autre : le potentiel chimique de ce composant doit donc avoir la même valeur de part et d'autre de la superfuite. Ajoutons maintenant  $N_3$  atomes de  ${}^3\text{He}$  dans I en maintenant la température constante ; le potentiel chimique de  ${}^4\text{He}$  dans la solution ainsi constituée est toujours égal à sa valeur initiale  $\mu_4(P_0)$  ; mais la pression  $P$  régnant au sein de la solution n'est plus égale à  $P_0$  ; la différence représente la pression osmotique  $\Pi$  exercée par les atomes de  ${}^3\text{He}$  dissous dans He II :  $\Pi = \Pi(T, \mu_4, n_3)$ .

La relation de Gibbs-Duhem permet de trouver la variation de pression  $\delta P$  consécutive à une variation  $\delta n_3$  de la densité numérique de  ${}^3\text{He}$ , dans les conditions expérimentales décrites plus haut :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4} = n_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right|_{T, \mu_4}$$

La pression osmotique est donc simplement égale à la variation totale de la pression lorsque la densité numérique de  ${}^3\text{He}$  varie d'une valeur initiale nulle à sa valeur finale  $n_3$  :

$$\Pi(T, \mu_4, n_3) = \int_0^{n_3} n'_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n'_3} \right|_{T, \mu_4} dn'_3$$

Pour déterminer la pression osmotique nous remplaçons  $\mu_3$  par l'expression correspondante (26) et nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Pi(T, n_3, \mu_4) = & \frac{2}{3} \mathcal{E}_F(m^*) + \frac{1}{2} V_0^s n_3^2 + \left[ \mu_F^\gamma n_3 - \int_0^{n_3} \mu_F^\gamma dn'_3 \right] \\ & + 2 m_0^* n_3 \left( V_1^s - \frac{V_2^s}{12} \right) \mathcal{E}_F + \Pi_{N.L.} \end{aligned} \quad (54)$$

La dernière contribution est celle qui est due à la partie non-locale du potentiel d'interaction :

$$\Pi_{N.L} = -\frac{1}{6} m_0^* V_2^s n_3 (\mathcal{E}_F - 2 T \mathcal{C}_F) - \frac{2}{3} m_0^* V_2^s \int_0^{n_3} \mathcal{E}_F dn'_3 \quad (55)$$

La première contribution à la pression osmotique est appelée pression "cinétique" : c'est la pression d'un gaz idéal de fermions de masse  $m^*$  ; la seconde contribution représente l'effet de la moyenne spatiale du potentiel d'interaction. La troisième contribution,

$$\Pi_F^\gamma = \mu_F^\gamma n_3 - \int_0^{n_3} \mu_F^\gamma dn'_3, \quad (56)$$

est une correction dont l'existence est due à la déviation de l'énergie des quasiparticules libres par rapport au spectre de Landau-Pomeranchuk. L'influence de la partie quadratique du potentiel d'interaction se manifeste dans les deux derniers termes. L'expression de la pression osmotique est valable à toute température ; dans la limite  $T = 0$ , elle est exacte jusqu'aux termes d'ordre  $8/3$  en  $n_3$  inclus.

La connaissance de la pression osmotique (54) et celle de la densité de fluide normal,  $\rho_n = m_I n_3$  où la masse inertielle est donnée par la relation IV.32 livre celle de la vitesse du second son  $s_{II}$ . Nous avons en effet établi dans un travail antérieur [7] [102] l'expression suivante :

$$s_{II}^2 = \frac{c}{\rho^*} \left. \frac{\partial (\Pi + P_F)}{\partial c} \right|_{P, S/c} \quad (57)$$

qui exprime que la pression osmotique totale par rapport au superfluide,  $\Pi + P_F$ , où  $P_F$  est la pression fontaine, se propage adiabatiquement (à entropie par quasiparticule  $\bar{S}/c$  constante,  $\bar{S}$  est l'entropie par unité de masse de solution). La dérivée de la pression est prise par rapport à la concentration massique  $c$ . Le paramètre  $\rho^*$  est relié à la densité de fluide normal :

$$\rho^* = \frac{\rho_n}{\rho_s \omega_{40}} \left( 1 + b^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \right), \quad (58)$$

où  $b$  est le coefficient de couplage entre premier et second sons, coefficient qui n'est négligeable que pour les solutions très diluées :

$$b = \frac{1}{\rho} \left[ \bar{S} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{S}} \right)_{P,c} + c \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{P,\bar{S}} \right] \quad (59)$$

Les expressions qui viennent d'être obtenues permettent d'évaluer les propriétés thermodynamiques des mélanges  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  à toute température. Nous nous sommes limités, dans les développements obtenus, aux termes du premier ordre en  $V_i$  et  $\gamma$ . Ceci est conforme à l'hypothèse que nous avons introduite d'une solution peu concentrée à interaction faible entre solutés.

Les résultats donnés ici [85] regroupent ceux obtenus à  $T = 0$  par Ebner et Edwards [5] à partir d'un potentiel effectif dipolaire et ceux trouvés par Disatnik et Brucker [6] avec la partie scalaire  $\vec{p} \cdot \vec{p}'$  uniquement, dans un jeu de variable  $(T, n_3, n_4)$ .

## V. Présentation des résultats expérimentaux

Nous considérons, au premier paragraphe de ce chapitre sur l'analyse des résultats expérimentaux, les mesures relatives au paramètre  $\alpha$  de *BBP* et à la courbe de séparation de phase  $x_s(T)$ . Au second paragraphe, nous exposons l'ensemble des résultats expérimentaux que nous utiliserons pour déterminer les paramètres du modèle au chapitre VI.

**V.I. Les paramètres d'état de la solution.** — Une solution de  ${}^3\text{He}$  dans He II est d'abord caractérisée par sa concentration et son volume, à température et à pression données, c'est-à-dire par son équation d'état que nous allons considérer maintenant.

### A. Le paramètre de *BBP*

Le volume molaire  $\Omega_M$  d'une solution diluée peut être mis sous la forme :

$$\Omega_M(x, P, T) = \Omega_{40}(P, T) [1 + x \alpha(x, P, T)]. \quad (1)$$

$\Omega_{40}$  désigne le volume molaire de  ${}^4\text{He}$  pur et a été mesuré par E.C. Kerr et R.D. Taylor [86] :  $\Omega_{40}(0,0) = 27,58 \text{ cm}^3/\text{mole}$  à pression nulle.

Le paramètre  $\alpha_0 = \alpha(0, 0, 0)$  caractérise l'augmentation relative de volume molaire à pression nulle et dans la limite  $T = 0, x = 0$ . Il joue comme nous l'avons vu au para-

graphe II.6 un rôle important dans la théorie des solutions développées par Bardeen, Baym et Pines. L'excès d'énergie de point zéro correspondante varie d'une manière très peu sensible avec la température au-dessous de 1 K ; sa variation en fonction de la pression est, par contre, importante [87, 88].

$\alpha_0$  a été mesuré par C. Boghosian et H. Meyer [88], D.O. Edwards *et al.* [89, 51], B.M. Abraham *et al.* [90]. Les résultats sont les suivants :

Références	$\alpha$
(88)	$0,308 \pm 0,01$
(51) – (89)	$0,284 \pm 0,005$
(90)	$0,286 \pm 0,001$

Ce tableau appelle deux remarques :

1) C. Boghosian et H. Meyer [88] ont mesuré l'accroissement relatif du volume molaire d'une solution de concentration  $x = 6 \%$ . Le chiffre cité dans le tableau ne comporte pas de correction pour  $x \rightarrow 0$ .

2) B.M. Abraham *et al.* ont mesuré la variation de  $\alpha$  en fonction de la température pour une solution de concentration  $x = 5,5 \%$  et à pression nulle. Nous avons réanalysé leurs mesures et nous trouvons  $\alpha_0 = 0,290$ . Ce résultat est différent de celui qui figure dans l'article de ces auteurs :  $\alpha_0 = 0,286$ . La différence se trouve dans l'évaluation des corrections en concentration apportées à la valeur mesurée. Les détails du calcul sont exposés dans la référence [74].

Nous avons effectué l'analyse numérique de l'ensemble des résultats expérimentaux en prenant la valeur  $\alpha(6,5 \%) = 0,286$  car nous ne disposions pas encore du résultat plus exact  $\alpha(6,5 \%) = 0,284$  qui correspond à la valeur à concentration nulle  $\alpha_0 = 0,290$ .

Les conclusions exposées à la fin de cette analyse et ayant trait aux valeurs des paramètres du modèle n'en seront pas affectées ; en effet, une variation de  $0,7 \%$  sur  $\alpha$  entraîne une variation négligeable,  $5 \times 10^{-4}$ , de  $n_3$ . Nous avons également utilisé la valeur  $\alpha_0 = 0,286$  pour étudier les propriétés des mélanges le long de la courbe de séparation de phase en négligeant les petites variations du paramètre  $\alpha$  avec la température.

### B. La courbe de séparation de phase

Lorsque la température d'une solution de  $^3\text{He}$  dans  $^4\text{He}$  devient inférieure à 0,87 K, deux phases distinctes apparaissent comme le montre la *figure 1* : une phase concentrée en  $^3\text{He}$  et une phase diluée en  $^3\text{He}$ . Les méthodes utilisées pour mesurer le diagramme de phase peuvent être classées en deux catégories :

– Dans la première se trouvent les expériences effectuées sur les phases séparées après que la séparation de phase ait eu lieu. La méthode la plus couramment utilisée est la mesure de la constante diélectrique du mélange. Dans un milieu donné le volume molaire est relié à la constante diélectrique par l'équation de Clausius-Mosotti :

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4 \pi \alpha_p}{3 \Omega_M} \quad (2)$$

$\epsilon$ ,  $\alpha_p$  et  $\Omega_m$  désignent respectivement la constante diélectrique, la polarisabilité et le volume molaire du milieu. Il a été montré par Peshkov [92], et Boghosian et Meyer [88] que les polarisabilités de  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$  étaient égales. En mesurant la capacitance d'un condensateur contenant du mélange  $^3\text{He-He}$  II comme diélectrique, on peut en déduire les variations de densité du système.

Une autre méthode [93] consiste en l'absorption de neutrons lents par le composant  $^3\text{He}$  d'une solution. La section efficace d'absorption est de 3080  $b$  pour les neutrons utilisés d'énergie égale à 0,0745  $eV$ . L'interaction de ces neutrons avec  $^4\text{He}$  peut être négligée : la section efficace correspondante est de l'ordre de 1  $b$ . En mesurant le coefficient d'atténuation du jet de neutrons, on peut déterminer directement la densité numérique en  $^3\text{He}$ .

— Dans le second groupe d'expériences, des mélanges de concentration connue sont préparés et refroidis. Le passage par la transition de phase est noté en étudiant certaines propriétés dont le comportement varie brusquement en ce point. La séparation de phase a été observée directement [92] par l'étude de la vitesse du second son [94], de la densité [95] et de la chaleur spécifique [96]. La courbe de séparation de phase est caractérisée par le fait que la concentration et la température ne sont plus des variables thermodynamiques indépendantes :  $x_s = x(T)$ . L'analyse des différentes mesures conduit à une relation de la forme suivante :

$$x_s(T) = x_0 [1 + \zeta T^2] \quad (3)$$

Les différentes valeurs des paramètres  $x_0$  et  $\zeta$  de la littérature sont reproduites dans le tableau ci-dessous :

Références	$x_0$	$\zeta$
(89)	$6,37 \pm 0,05$	10,8
(26)	6,5	
(90)	$6,6 \pm 0,06$	9,3
(93)	$6,84 \pm 0,06$	$11,1 \pm 0,7$
(91)	$6,46 \pm 0,08$	9,9

L'incertitude expérimentale sur les paramètres  $x_0$  et  $\zeta$  est donc assez grande. Toutefois, au voisinage de  $T = 0,150$  K, les différentes mesures [89, 90, 91] ainsi que notre propre travail [26] fournissent des valeurs de  $x_s$  essentiellement concordantes. On peut donc en conclure que la courbe de séparation de phase est bien connue pour des valeurs de la température telles que  $0,1 \lesssim T \lesssim 0,2$  K ; elle est moins bien connue pour des valeurs inférieures de la température, en particulier pour  $T = 0$ , comme on peut le constater à la lecture du tableau ci-dessus. Ce point nous amènera, dans la suite de notre étude, à préciser la courbe de séparation de phase.

**II. Les résultats expérimentaux pour les grandeurs d'équilibre.** — Dans ce paragraphe, les différents résultats expérimentaux que nous utiliserons pour effectuer l'analyse numérique développée au chapitre suivant sont passés en revue d'une manière critique et détaillée. Certaines propriétés n'ont pas été considérées dans notre étude.

A basse température ( $T \ll T_F$ ) les propriétés de transport dépendent seulement, en raison du principe de Pauli, de la diffusion élastique des quasiparticules sur la surface de Fermi. Dans ce cas la particularité du potentiel dipolaire disparaît : W.L.Mc Millan [45] a montré que la contribution de ce potentiel à l'amplitude de diffusion était essentiellement localisée. Une étude complète des propriétés de transport a été effectuée par G. Baym *et al* [97], H. Hu et C. Pethick [98]. Nous comparerons, à la fin de cet article, les potentiels d'interaction obtenus par ces auteurs à nos propres résultats.

Nous n'avons pas retenu la vitesse du premier son dont les mesures [99] fournissent peu d'information directe sur la masse effective et le potentiel d'interaction des quasiparticules bien qu'elles reflètent l'interaction  $^3\text{He}$ -phonon [100].

La vitesse du second son a été mesurée dans des conditions expérimentales analogues par D. Edwards *et al* [53], et de Voogt *et al.* [101]. Les expériences réalisées par les premiers auteurs nous ont permis de déduire la valeur du paramètre  $\gamma$  qui intervient dans le spectre des quasiparticules libres (III.1). Comme ce paramètre a peu d'influence sur les propriétés autres que la vitesse du second son, nous avons retenu cette valeur (III.2) dans l'analyse qui suit. En ce qui concerne la vitesse du second son  $u_{II}$ , les résultats obtenus dans les références [53, 101] sont très différents. Les différences sont supérieures à la somme des erreurs expérimentales correspondantes. Or nous n'avons aucun critère, a priori, pour choisir entre les deux ensembles de résultats. Nous n'avons donc pas inclus la vitesse du second son dans les propriétés étudiées. Toutefois le travail récent effectué à la Bell [67] permet de tirer des conclusions mieux étayées que nous présenterons au paragraphe VI.2B, et où nous traiterons également de la chaleur spécifique.

Cette propriété a été mesurée par A.C. Anderson, J.C. Wheatley *et al.* [52] pour les valeurs suivantes de la concentration :  $x = 1,3 \%$  et  $x = 5 \%$ . L'interprétation des résultats indique que la chaleur spécifique de la solution se comporte comme celle d'un gaz de fermions libres, dont la masse effective varie avec la concentration :

$$\begin{aligned} x = 1,3 \% \quad \frac{m^*}{m_3} &= 2,38 \pm 0,04 \\ x = 5 \% \quad \frac{m^*}{m_3} &= 2,46 \pm 0,04 \end{aligned} \tag{4}$$

Ces résultats conduisent à une valeur de la masse  $m_0^*$  plus élevée que celle que l'on déduira de l'analyse des autres propriétés. Comme on peut le constater sur l'expression analytique (IV.27) de  $C$ , cette quantité ne dépend d'une manière à peu près exclusive que de  $m^*$ , la correction due au terme en  $V_2$  étant très faible ( $\lesssim 1 \%$ ). Les valeurs ci-dessus de  $m^*$  déduites de la référence [52] sont donc peu susceptibles d'ajustement : nous n'avons pas retenu cette propriété dans l'analyse numérique.

Les résultats expérimentaux que nous utiliserons pour effectuer cette analyse sont de deux sortes :

– les *premiers* concernent les propriétés mesurées en dehors de la courbe de séparation de phase : la pression osmotique, la susceptibilité magnétique et la chaleur de mélange de la solution ;

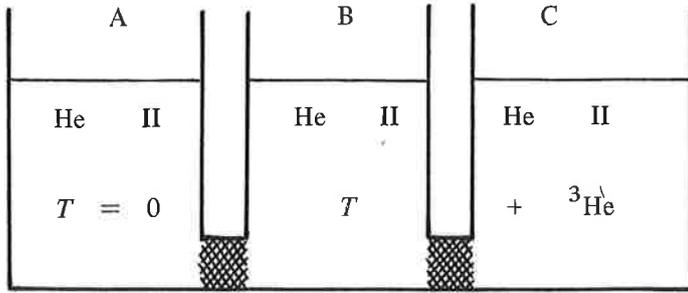
– les *seconds* sont relatifs aux propriétés mesurées sur la courbe de séparation de phase : la pression osmotique, la susceptibilité magnétique, la chaleur latente de changement de phase de  $^3\text{He}$  et la concentration saturante. A cette catégorie appartiennent également les grandeurs qui peuvent être déterminées, le long de la courbe de séparation de phase, à partir de mesures sur la phase concentrée : c'est le cas, notamment, du potentiel chimique et de l'entropie de  $^3\text{He}$  en solution.

#### A. Propriétés mesurées en dehors de la courbe de séparation de phase.

1) La pression osmotique. – a) Aspect expérimental : présentation des résultats .

La pression osmotique  $\Pi$  exercée par les atomes de  $^3\text{He}$  au sein de la solution, est très sensible aux interactions entre quasiparticules de  $^3\text{He}$ , surtout à très basse température. Elle constitue un bon critère de validité des théories microscopiques des solutions. Sa connaissance présente donc un intérêt fondamental.

Considérons le système physique suivant :



Trois récipients sont reliés entre eux par des superfuites, membranes semi-perméables ne laissant passer que l'hélium-4 superfluide. Le *premier*, A, contient de l'hélium-4 pur, au zéro absolu et à une certaine pression  $P_0$  ; le *second*, B contient également de l'hélium-4 pur, mais à une certaine température  $T$ . Le *troisième*, C, est rempli d'une solution de concentration  $x$  et à la même température  $T$ . Lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, les pressions sont telles que :

$$P_B = P_0 + P_F(T) \quad (5)$$

$$P_C = P_B + \Pi(P_C, T, x) = P_0 + P_F + \Pi.$$

$\Pi$  correspond à la pression osmotique des atomes de  $^3\text{He}$  et  $P_F$  désigne la pression fontaine qui est, comme nous l'avons montré [7], la pression des excitations de  $^4\text{He}$  ; la présence de la superfuite implique que le potentiel chimique de  $^4\text{He}$  soit le même dans les trois récipients :

$$\mu_4(P_0 + P_F + \Pi, T, x) = \mu_{40}(P_0 + P_F, T) = \mu_{40}(P_0, 0) \quad (6)$$

On se rend compte que, comme nous l'avons établi [7] [102] dans un précédent travail, la différentielle de  $\mu_4$  peut être écrite sous la forme :

$$d\mu_4 = \omega_{40}(P_0) d(P_C - P_F - \Pi) \quad (7)$$

$\omega_{40}$  désigne le volume de  $^4\text{He}$  pur à la pression  $P_0$  et au zéro absolu.

Ecrivons maintenant les conditions qui régissent l'équilibre mécanique et thermodynamique du système :

$$\left. \begin{array}{l} P_C = \text{cst} \\ \mu_4 = \text{cst} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Nous déduisons, à l'aide de la relation (7) que l'ensemble de ces deux contraintes équivaut à la condition :

$$d(P_F + \Pi) = 0 \quad (9)$$

soit  $P_F + \Pi = \text{cst}$

La quantité  $\Pi + P_F$  représente la pression osmotique totale du fluide normal. Elle reste constante lorsque la température et la concentration varient au sein de la solution.

Cette propriété a été prise en considération dans les mesures de pression osmotique réalisées à Orsay [26, 103] et décrites en détail dans la référence [103]. Le principe du fonctionnement de la jauge de pression osmotique utilisée dans ces expériences est dû à H. London [104] ; il repose sur les deux faits suivants :

– La pression osmotique totale du fluide normal est constante, lorsque le système se trouve à l'équilibre thermodynamique.

– La conductibilité de  $^4\text{He}$  pur est considérablement plus grande que celle de solutions même très diluées.

La jauge de pression osmotique est constituée de deux chambres ; l'une est refroidie en-dessous de 600 mK et l'autre, adiabatique, est reliée à la première par un tube capillaire dont un point est maintenu à une température d'environ 600 mK. La chambre adiabatique est alors chauffée jusqu'à ce que la pression fontaine devienne égale à la pression osmotique ; il s'établit dans le capillaire un courant de phonons qui chasse les atomes de  $^3\text{He}$  vers les parties froides. Ces phonons sont absorbés à 600 mK. Quand il n'y a plus d'atomes de  $^3\text{He}$  dans la chambre adiabatique, la conductibilité thermique vers le point isotherme augmente et l'on observe alors que la température du bulbe  $T_B$  devient indépendante de la puissance de chauffage : le système est à l'équilibre. Il y a alors une répartition bien distincte du fluide normal : – dans la chambre froide, il est uniquement constitué par les quasiparticules de  $^3\text{He}$  ; – dans la chambre adiabatique, seules les excitations de  $^4\text{He}$  représentent la composante du fluide normal ; la pression osmotique du fluide normal est donc égale à  $P_F$  dans le bulbe et à  $\Pi$  dans la chambre de mélange. Comme la pression osmotique totale du fluide normal est constante [9],  $\Pi + P_F = \text{cst}$ , la détermination de la pression fontaine fournit celle de la pression osmotique. La variation de la pression fontaine en fonction de la température a été récemment mesurée par M. Sudraud [105].

Les mesures de pression osmotique ont été effectuées pour quatre valeurs de la concentration :  $x = 2,2 \%$ ,  $x = 3,7 \%$ ,  $x = 5,2 \%$  et  $x = x_s = 6,5 \%$  ; les variations correspondantes de  $\Pi$  en fonction de la température sont représentées *figure 4* ; les valeurs de  $\Pi$  extrapolées, avec une bonne précision, à température nulle sont reproduites sur le tableau ci-dessous :

$x$	$\Pi (T = 0)$ mB
2,2 %	4,8
3,7 %	9,9
5,2 %	16,4
6,5 %	21,5

Ces valeurs ont en assez bon accord avec celles qui ont été obtenues par J. Landau et le groupe de l'Ohio [106] par une méthode manométrique directe [107] qui constitue un prolongement du travail de Tough et Wilson [108]. Les expériences ont été réalisées sous pression à :  $P = 0,26 - 0,52 - 10 - 20$  Atm. Nous avons extrapolé à pression nulle les mesures de  $\Pi$  effectuées à  $P = 0,26$  Atm ; pour cela, nous avons considéré le résultat établi expérimentalement par J. Landau selon lequel à température et concentration fixées la quantité  $(\Pi\Omega_{40})$  est pratiquement indépendante de la pression :

$$(\Pi\Omega_{40}) \Big|_{P=0,26} = (\Pi\Omega_{40}) \Big|_{P=0}$$

$$\text{où } \Omega_{40} (P = 0,16 \text{ Atm}) = 27,55 \text{ cm}^3/\text{mole}$$

$$\Omega_{40} (P = 0) = 27,58 \text{ cm}^3/\text{mole}$$

Ce résultat ne fait que confirmer la relation thermodynamique exacte :

$$\frac{\Omega_{4d} (T, P, a)}{\Omega_{40} (T, P - \Pi, 0)} = 1 - \frac{\partial \Pi (T, P, x)}{\partial P} \Big|_{T, x'} \quad (10)$$

où  $\Omega_{4d}$  est le volume molaire de  $^4\text{He}$  en solution.

Les valeurs de  $\Pi (P = 0)$  que nous avons ainsi déterminées peuvent être représentées par la formule :

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 T^2$$

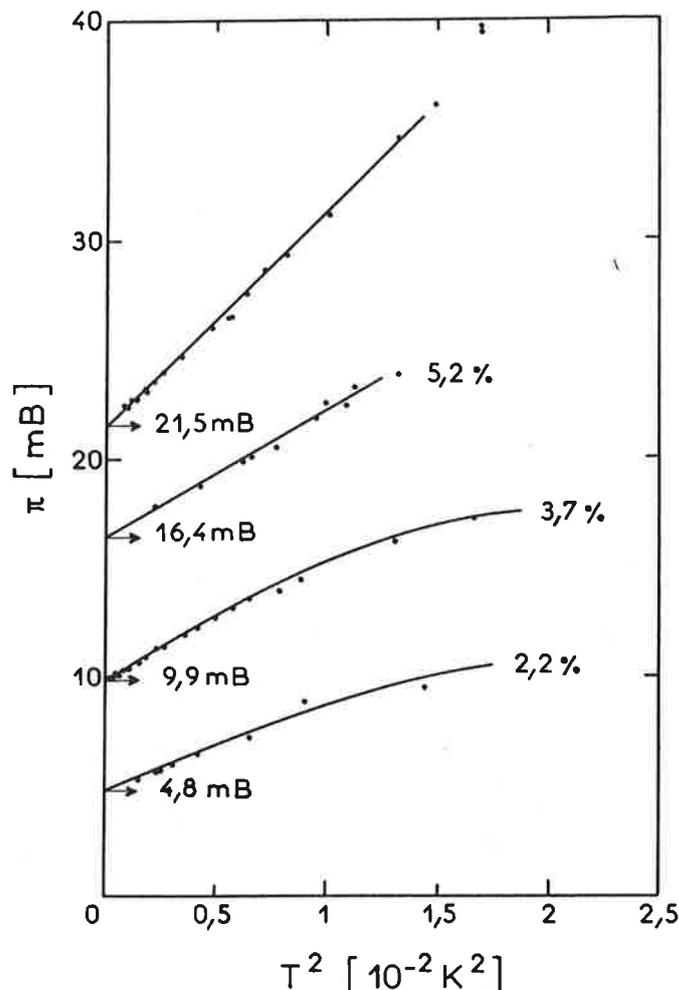


FIG. 4. — Pression osmotique en fonction du carré de la température d'après la référence [26].

Les résultats relatifs à  $\Pi_0$  et  $\Pi_1$  sont résumés dans le tableau ci-dessous :

$x$	$\Pi_0$ mB	$\Pi_1 10^{-4}$ mB/(mK) <sup>2</sup>
1,45 %	2,29	4,68
2,73 %	6,09	6,1
4,06 %	11,18	6,13
4,47 %	12,92	6,42
6,28 %	20,07	6,93

Les valeurs de  $\Pi_0$  et  $\Pi_1$  correspondant aux concentrations  $x = 4,06$  % et  $x = 6,28$  % sont plus précises que les autres car le nombre de points de mesure est plus grand.

Les mesures de pression osmotique des solutions très diluées ( $0,08$  %  $\lesssim x \lesssim 0,6$  %) ont été effectuées plus récemment au Technion par J. Landau et R. Rosenbaum [109].

b) *Analyse des résultats dans la limite  $T = 0$ . Détermination du potentiel  $\mu_3$  et de la quantité  $\left(n_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\right)$  :* nous avons rassemblé sur la figure 5 l'ensemble des résultats expérimentaux extrapolés à  $T = 0$ . Par les différents points de mesure on peut faire passer une courbe représentée par la fonction suivante :

$$\Pi(\xi) = 10^3 [3,23 \xi^{5/3} - 1,68 \xi^2 - 5,85 \xi^{8/3}], \quad (11)$$

$$\text{où } \xi = \frac{n_3}{n_{40}} = \frac{x}{1 + \alpha x}.$$

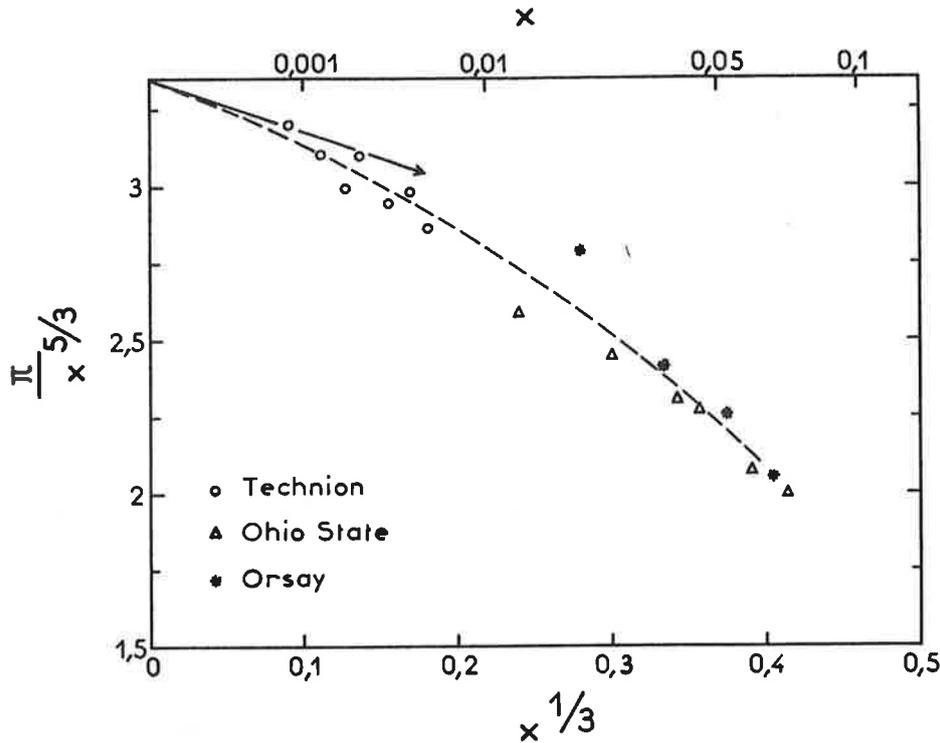


FIG. 5. — Valeurs extrapolées à  $T = 0$  de la pression osmotique, en millibar, divisées par  $x^{5/3}$  en fonction de  $x^{1/3}$  d'après les références [26 ; 106 ; 109]. La courbe en pointillé représente la relation (V.II).

La variation de la pression osmotique en fonction de la concentration est liée à celle du potentiel chimique  $\mu_3$  par la relation de Gibbs-Duhem qui s'écrit ici :

$$n_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right|_{T,P} = \left[ 1 - \frac{n_3 (1 + \alpha)}{n_{40}} \right] \left. \frac{\partial \Pi}{\partial n_3} \right|_{T,P} \quad (12)$$

Le résultat obtenu en portant (11) dans (12) au voisinage de la courbe de séparation de phase est le suivant ( $x_s = 6,5\%$ ) :

$$n_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right|_{n_{3s}} = 0,148 K \quad (13)$$

L'intégration de la relation de Gibbs-Duhem conduit à la valeur du potentiel chimique de l' $^3\text{He}$  :

$$\mu_3(n_3, 0, P) = \mu_3(0, 0, P) + \frac{1}{n_{40}} \int_0^{\xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi'} d\xi' - \frac{\Pi(1 + \alpha_0)}{n_{40}} \quad (14)$$

$\mu_3(0, 0, P)$  est l'énergie de liaison d'un seul atome de  $^3\text{He}$  présent dans le superfluide : c'est la quantité  $e_{30}$  introduite au deuxième chapitre (II.57).

A la séparation de phase, nous obtenons :

$$\mu_3(n_3, 0, P) - e_{30} = 0,310 K \quad (15)$$

2) *La chaleur de mélange.* — Une grandeur parente du potentiel chimique est la chaleur de mélange, c'est-à-dire la quantité de chaleur mise en jeu lorsque l'on ajoute de l'hélium-3 à une solution de  $^3\text{He}$  dans He II. Cette propriété a été mesurée, à la pression de vapeur saturante, par P. Seligmann *et al.* [110], pour des températures voisines de 50 mK et des concentrations initiales en  $^3\text{He}$  variant de 0 à 6 %.

Les expériences sont effectuées dans un calorimètre relié par une impédance thermique à un réfrigérateur à dissolution fonctionnant à une température  $T \simeq 20$  mK. On ajoute des quantités connues de  $^3\text{He}$  à un mélange ; on mesure les températures initiale et finale ainsi que la chaleur communiquée au milieu. Comme la variation de l'énergie avec la température peut être déduite des mesures de chaleur spécifique, on détermine ainsi dans la limite  $T = 0$ , la variation de l'énergie de l'état fondamental ainsi que celle des potentiels  $\mu_3$  et  $\mu_4$  en fonction de la concentration.

De ces mesures de chaleur de mélange, on déduit, en particulier, le résultat suivant :

$$L_{30} - e_{30} = 0,312 \pm 0,007 K \quad (16)$$

$L_{30}$  désigne la chaleur latente par atome de  $^3\text{He}$  pur et  $e_{30}$  l'énergie de liaison d'un atome de  $^3\text{He}$  en solution à  $T = 0$ .

Le long de la courbe d'équilibre de phase, les potentiels  $\mu_{3c}$  et  $\mu_{3d}$  sont égaux ; dans le cas où  $T = 0$ , on a donc :

$$\mu_{3c}(T = 0) = \mu_{3d}(x_s, T = 0) \quad (17)$$

Or  $\mu_{3c}(T = 0)$  est égal à la chaleur latente  $L_{30}$  (car  $x_c$  est  $\simeq 1$ ).

Il en résulte que les valeurs (15) et (16) se réfèrent à la même quantité. L'accord entre les deux déterminations expérimentales peut être considéré comme très bon. Remarquons que ce résultat met en jeu essentiellement des concentrations élevées, proches de la concentration saturante, le poids des concentrations diluées étant faible. La valeur (15) pourra donc être considérée comme caractéristique des solutions voisines de la saturation ; c'est sur ces solutions que portera l'analyse numérique du paragraphe suivant.

3) *La susceptibilité magnétique de  $^3\text{He}$  en solution.* – Les expériences de D.L. Husa *et al.* [27] ont été effectuées pour des valeurs de la température  $T \gtrsim 350$  mK : le gaz de quasiparticules de  $^3\text{He}$  se trouve donc dans un régime semi-classique. A.I. Ahonen *et al.* [111] ont récemment mesuré la susceptibilité d'une solution à des températures suffisamment basses pour que  $\chi$  soit devenu indépendant de la température, comme le veut la relation de Pauli :

$$\chi = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{C}_c}{T_F(m^*)} \quad (18)$$

qui décrit la susceptibilité magnétique d'un gaz idéal de fermions de masse  $m^*$  à très basse température ;  $\mathcal{C}_c$  désigne la constante de Curie :  $\mathcal{C}_c = (\mu_M \hbar/2)^2 n_3/3 k_B$  et  $T_F$  est la température de Fermi du système.

Les concentrations des solutions étudiées sont :  $x = 0,088$ ,  $x = 0,051$  et  $x = 0,0153$  ; la pression sous laquelle sont effectuées les mesures varie de 0,16 à 20 B. Les résultats expérimentaux sont représentés sur la *figure 6* ;  $\chi$  étant donné en unité arbitraire, nous les avons mis, pour les exploiter, sous la forme suivante :

$$\left[ \frac{n_3}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n_3} \right]_{T=P=0}^{n_{3s}} = 0,5 \pm 0,12 \quad (19)$$

Cette valeur correspond à une concentration de 6,5 %, concentration au voisinage de laquelle se trouve le plus grand nombre de points expérimentaux.

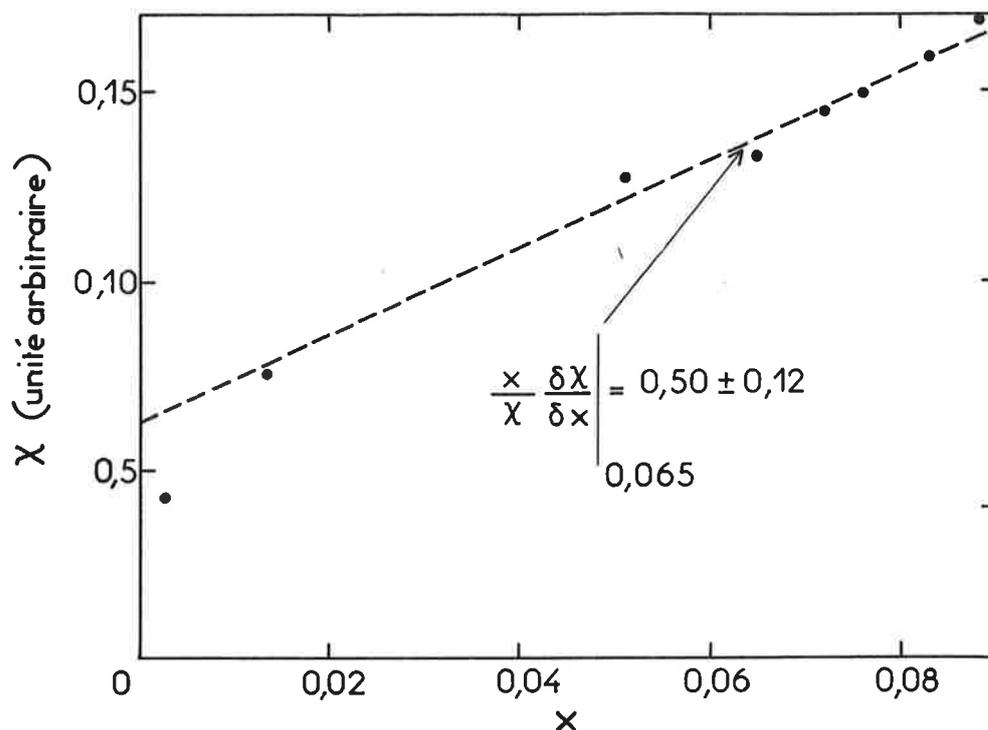


FIG. 6. — Susceptibilité magnétique de l' $^3\text{He}$  en solution, déterminée par RMN au voisinage de  $T = 0(\text{III})$ , en fonction de  $x$ . La susceptibilité étant mesurée d'une manière relative et donnée en unité arbitraire, seule la quantité  $x/\chi (\partial\chi/\partial x)$  peut être utilisée pour la comparaison avec la théorie.

### B. Propriétés mesurées sur la courbe de séparation de phase

1) *La pression osmotique.* — Dans le cadre des expériences effectuées à Orsay par D. Bloyet, P. Piéjus, J. Avenel et nous-mêmes [26, 103, 112, 113], la pression osmotique de  $^3\text{He}$  en solution dans  $^4\text{He}$  superfluide a été mesurée, avec grande précision, le long de la courbe de séparation de phase à  $P = 0$  et  $P = 1020$  mB. Les points de mesures obtenus à 0 mB sont les suivants :

$T_c$ (mK)	$\Pi$ (mB)	$T_c$ (mK)	$\Pi$ (mB)
33,52	23,34	66,82	26,58
41,27	23,92	100,81	31,92
53,65	25,06	116,44	35,05
54,64	25,17	127,36	37,5
56,44	25,36	128,33	37,72
62,22	26,02	141,28	40,87

Nous avons représenté l'ensemble de ces valeurs par l'expression numérique suivante :

$$\Pi_s = 22,4 + 1000 T^2 - 1200 T^4 \text{ en mB} \quad (20)$$

valable de 0 à 0,15 K.

La pression osmotique saturante a également été mesurée par J. Landau et coll. aux pressions extérieures [106] :  $P = 0,26$  Atm et  $P = 0,52$  Atm. Nous avons converti ces résultats en valeurs à pression nulle en nous aidant d'une relation de Clausius-Clapeyron qui sera établie plus loin. L'expression numérique  $\Pi_s(T)$  ainsi obtenue est la suivante :

$$\Pi_s = 22,6 + 1090 T^2 \text{ en mB} \quad (21)$$

Une extrapolation graphique directe à pression nulle conduit au résultat peu différent suivant :

$$\Pi_s = 22,4 + 1\,062 T^2 \text{ en mB}$$

Il convient, dans cette comparaison, de citer le travail de "pionnier" effectué par H. London *et al.* [104]. Ces auteurs ont rassemblé [114], en plus de leurs résultats, les différentes valeurs expérimentales [26, 104, 106] et les ont représentées, par l'expression :

$$\Pi_s = 22,8 + 1\,033 T^2 \text{ en mB} \quad (22)$$

La dernière mesure en date de  $\Pi_s$  est due à van de Klundert et col. [115]. Leurs résultats, après correction de  $P_F$  [105], peuvent se mettre sous la forme suivante ( $T < 0.2$  K).

$$\Pi_s = 23,0 + 861 T^2 - 420 T^4 \quad (23)$$

La comparaison graphique des expressions (20) à (23) en *figure 7*, montre une concordance à 2 % près des expériences les plus récentes sur la plage de température commune, de 20 à 150 mK. Ces expériences ont été répétées avec des conditions expérimentales-géométrie de jauge et dispositifs thermométriques-entièrement distinctes, et ce dans deux laboratoires différents. Nous considérons, dans la suite, que  $\Pi_s$  est représenté par l'expression (20) avec une précision supérieure à 2 %.

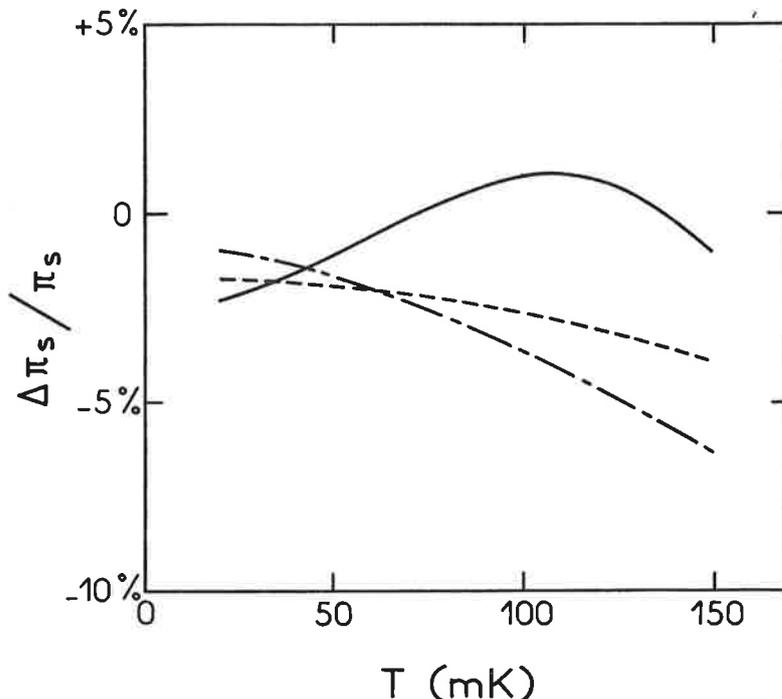


FIG. 7. — Comparaison entre différentes mesures de la pression osmotique saturante sous pression nulle. Les écarts relatifs proviennent des valeurs de ce travail moins les valeurs des références suivantes : — [115], - - - [114], et - - - [106], extrapolées à  $P = 0$  comme expliqué dans le texte.

2) *La susceptibilité magnétique.* — Nous allons considérer maintenant les mesures de susceptibilité saturante. La précision de ces mesures réalisées à l'*Institut d'Electronique Fondamentale* s'est avérée précieuse pour effectuer une détermination très fine des paramètres du modèle. La susceptibilité magnétique de la solution saturante à pression nulle a été mesurée par résonance magnétique nucléaire à l'aide d'un spectromètre [116]

permettant l'enregistrement très précis de l'amplitude des signaux de la précession libre à 1,5 MHz. La solution saturante, d'une concentration initiale de  $9,13 \times 10^{-2}$ , est refroidie jusqu'en dessous de 25 mK à l'aide d'un réfrigérateur à dissolution ; sa température est mesurée à mieux de 1 mK près par une jauge de pression osmotique calibrée au cours de la même descente en froid à l'aide d'un thermomètre à R.M.N. dans l'aluminium.

Les résultats des mesures, normalisés à l'unité au zéro absolu, sont portés en fonction de la température sur la *figure 8*. La dispersion des points expérimentaux est de l'ordre de 1,5 pour mille ; l'erreur systématique attendue est inférieure à un pour mille puisque l'amplitude du signal mesuré reste essentiellement constante de 25 mK à 250 mK. Les valeurs expérimentales moyennées sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

$T_{mK}$	$\chi_s(T)/\chi_s(0)$	$T_{mK}$	$\chi_s(T)/\chi_s(0)$
20	0,9999	90	0,9925
30	0,9998	100	0,9912
40	0,9995	110	0,990
50	0,999	120	0,9892
60	0,998	130	0,9890
70	0,996	140	0,9895
80	0,994	150	0,9905

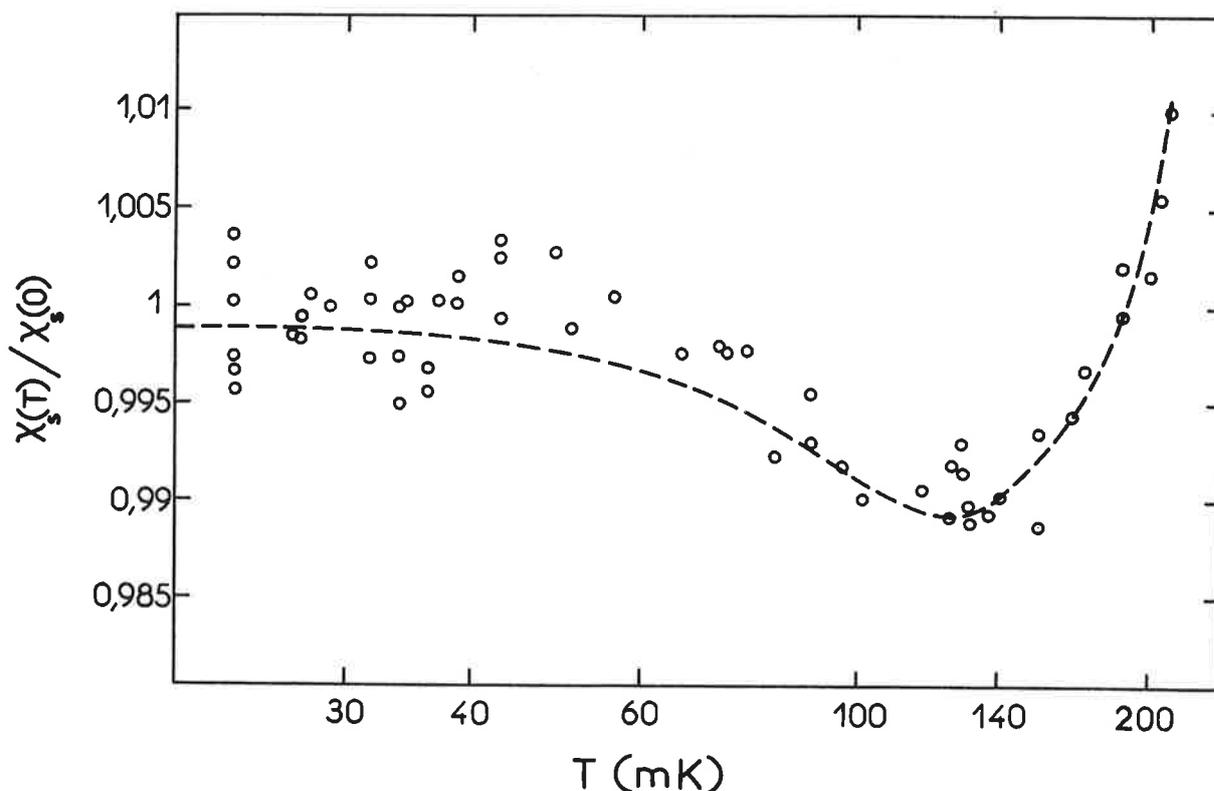


FIG. 8. — Susceptibilité magnétique normalisée à la susceptibilité à température nulle en fonction de la température, d'après la référence [71].

3) *La chaleur latente de changement de phase de  $^3\text{He}$ .* — Indiquons brièvement la signification de cette grandeur thermodynamique dans le cas des mélanges  $^3\text{He}$ -He II. A basse température, les excitations de  $^4\text{He}$  — constituées principalement par les phonons — sont très raréfiées ; l'entropie correspondante est donc très faible. On considère comme nous l'avons dit au chapitre II, le mélange comme un système à un composant ; le superfluide a comme principal effet d'altérer le volume occupé par les quasiparticules de  $^3\text{He}$ . La phase concentrée est, quant à elle, constituée d'hélium-3 à peu près pur. La séparation

du mélange en deux phases apparaît comme l'équilibre d'un quasi-liquide avec son quasi-gaz : la phase diluée en  $^3\text{He}$  joue le rôle du quasi-gaz et la phase concentrée, celle du quasi-liquide. La chaleur latente de dissolution  $Q$ , accompagne le passage de l'hélium-3 de la phase concentrée à la phase diluée et constitue l'analogie de la chaleur latente de vaporisation.

La chaleur latente de dissolution de  $^3\text{He}$  en solution dans He II a été mesurée par A. Gladun et V.P. Peshkov [117] ; le domaine de température exploré s'étend de  $T = 0,02\text{ K}$  à  $T = 0,7\text{ K}$  ; l'erreur expérimentale est estimée à 3 %. Nous avons reporté sur la *figure 9* leurs points de mesure aux températures  $T \lesssim 0,150\text{ K}$  ; les valeurs correspondantes de  $Q/T^2$  peuvent être représentées par l'expression numérique suivante :

$$\frac{Q}{T^2} = 80,2 - 790 T^2 \text{ en Joule/mole } ^3\text{He K}^2 \quad (24)$$

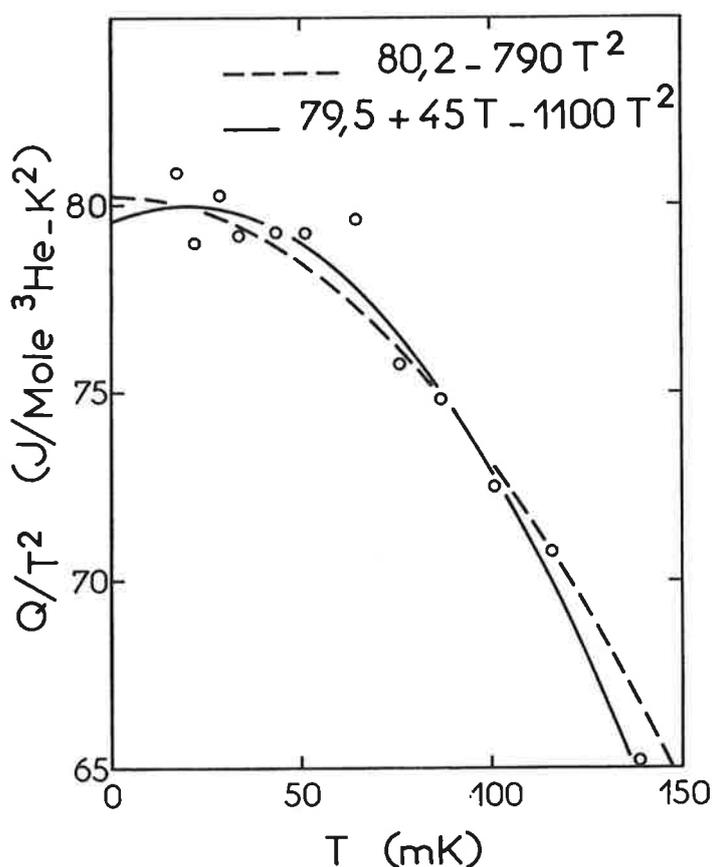


FIG. 9. – Chaleur latente de dissolution en fonction de la température d'après la référence [117]. La courbe en pointillé représente la relation quadratique (V.24). La courbe en plein provient d'un polynôme cubique dont la forme correspondrait à (V.27). L'incertitude expérimentale ne permet pas de trancher entre ces deux représentations et (V.24), plus simple, a été conservée.

Nous avons utilisé ce résultat pour obtenir la variation de la pression osmotique saturante en appliquant une relation de Clausius-Clapeyron modifiée : ceci sera décrit dans la suite de ce paragraphe. Nous avons également considéré ce résultat dans l'analyse numérique – développée au chapitre VI – pour déterminer l'entropie de  $^3\text{He}$  en phase diluée  $S_{3d}$ . En effet, la relation de définition de la chaleur latente de transition nous indique que :

$$Q = T [S_{3d} - S_{3c}] \quad (25)$$

Nous voyons qu'il est toutefois nécessaire, au préalable, de connaître l'entropie  $S_{3c}$  de  $^3\text{He}$  en phase concentrée pour déterminer  $S_{3d}$ .

4) L'entropie de  $^3\text{He}$  en phase concentrée. – En phase concentrée en-dessous de 0.15 K, l'hélium-3 a une concentration extrêmement voisine de l'unité ; ses propriétés sont très

peu différentes de celles de  $^3\text{He}$  pur. L'entropie peut être obtenue par intégration de la chaleur spécifique, en vertu de la relation thermodynamique :

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

L'histoire de la mesure de chaleur spécifique de l'hélium-3 constitue une longue page de la physique des très basses températures. Pour notre but immédiat, nous prendrons l'expression suivante [118] :

$$\frac{C}{nRT} = 3,00 (\pm 0,01) - (6,74 \pm 0,15) T \text{ à } 0,24 \text{ Atm.}$$

Ces valeurs sont ramenées à pression nulle à l'aide de la relation :

$$\frac{\partial C}{\partial P} = - \Omega_{30} T \left[ \lambda^2 + \lambda \left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right|_P \right]$$

Les mesures de A.C. Anderson *et al.* [119] fournissent le coefficient de dilatation thermique  $\lambda$  qui peut être représenté pour  $10 \text{ mK} < T < 150 \text{ mK}$ , par :

$$\lambda = - 0,12 T + 0,43 T^2 \text{ en } K^{-1}$$

L'expression de la chaleur spécifique à pression nulle est alors la suivante :

$$C = RT [2,99 \pm 0,01 - (6,65 \pm 0,15) T] \text{ Joule/mole } K \quad (26)$$

La présence du terme quadratique en  $T$  dans l'expression de la chaleur spécifique traduit une déviation du comportement de  $^3\text{He}$  par rapport à celui d'un liquide de Landau-Fermi ; dans ce dernier cas, en effet, la variation de la chaleur spécifique est linéaire en température pour  $T \ll T_F$  ( $T_F \cong 800 \text{ mK}$  à  $P = 0$  pour l'hélium-3). Une interprétation d'un tel comportement a été fournie par le modèle des *paramagnons* mis en avant par M.T. Béal-Monod *et al.* [120]. La correction quadratique à  $T$  est due à l'influence des fluctuations quasi-persistantes de spin ou paramagnons. Le même phénomène est responsable de la stabilisation de la phase  $A$  de l' $^3\text{He}$  superfluide [121]. Un grand succès de cette théorie a été de prédire les variations de la susceptibilité de  $^3\text{He}$  pur avec la température et la pression [122]. Remarquons toutefois que, si la présence du terme en  $T^2$  dans (26) paraît correspondre aux conceptions théoriques actuelles, elle n'a été observée que par le groupe de Wheatley. Les valeurs récentes obtenues par W.P. Halperin [123] au voisinage de la courbe de solidification ne semblent pas confirmer les résultats de Wheatley en ce qui concerne la dépendance en température de  $C$  ; elles indiqueraient plutôt que les valeurs (26) de la chaleur spécifique sont trop élevées de 5 à 7 % et que la pente de  $C/T$  est assez faible. Nous avons toutefois retenu les valeurs de Wheatley pour deux raisons : d'une part parce que cet auteur a refait plusieurs fois ses expériences, et d'autre part parce que la dépendance en  $T$  de  $C/T$  paraît bien fondée théoriquement.

La relation (26) permet de déterminer numériquement l'entropie et le potentiel chimique de l'hélium-3 en phase concentrée :

$$TS_{3c} = T \int_0^T \frac{C}{T'} dT' = 24,86 T^2 - 27,66 T^3 \text{ en J/Mole,} \quad (27)$$

$$\mu_{3c} - e_{30} = - \int_0^T S_{3c} dT' = - 12,43 T^2 + 9,21 T^3 \text{ en J/Mole.}$$

L'entropie  $S_{3d}$  de l'hélium-3 en phase diluée est obtenue en remplaçant dans l'expression (25) la chaleur latente de transition et l'entropie de  $^3\text{He}$  en phase concentrée par les expressions numériques correspondantes (24) et (27).

$$TS_{3d} = 105,06 T^2 - 27,66 T^3 - 790 T^4 \text{ en Joule/Mole.} \quad (29)$$

**3. Coherence thermodynamique des résultats expérimentaux.** — Nous nous proposons dans ce paragraphe de mettre en évidence la cohérence thermodynamique de certains des résultats expérimentaux qui viennent d'être présentés.

Pour cela nous montrerons d'abord qu'il est possible, le long de la courbe de séparation de phase, de relier certaines propriétés par des formules thermodynamiques simples : celles-ci permettront, en particulier, de déterminer les variations de la pression osmotique

saturante en fonction de la température et de la pression,  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_T$  et  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial T} \right|_P$ , et ainsi que

les variations de la concentration  $x_d$  en fonction de la pression  $\left. \frac{\partial x_d}{\partial P} \right|_T$ . Ces formules sont analogues à la relation de Clausius-Clapeyron.

Dans la première partie de ce paragraphe, nous établissons les formules en question. Nous les appliquons ensuite aux résultats expérimentaux : nous pourrions ainsi tester la cohérence que présentent entre eux ces différents résultats.

*A) Etablissement des relations de Clausius-Clapeyron modifiées.*

L'équilibre thermodynamique de la solution le long de la courbe de séparation de phase est représenté par les égalités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{3d}(T, P, x_d) &= \mu_{3c}(T, P, x_c), \\ \mu_{4d}(T, P, x_d) &= \mu_{4c}(T, P, x_c), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$x_c$  et  $x_d$  désignent respectivement les concentrations molaires en  $^3\text{He}$  de la solution dans les phases diluée et concentrée ; sur la courbe d'équilibre de phase elles dépendent uniquement de la pression et de la température. En conséquence, si l'on adopte la notation générale  $x_s$  pour désigner la concentration saturante dans l'une ou l'autre phase, on a :

$$\mu_i(T, P, x_s) = \mu_{i_s}(T, P) \quad \text{où} \quad i = 3 \text{ ou } 4 \quad (31)$$

Si l'on maintient la pression ou la température constante, on a les égalités suivantes entre dérivées :

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{ds}} &= \left. \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{cs}} \\ \left. \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{ds}} &= \left. \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{cs}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial P} \right|_{T, \text{ le long de } x_{ds}} &= \left. \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial P} \right|_{T, \text{ le long de } x_{cs}} \\ \left. \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \right|_{T, \text{ le long de } x_{ds}} &= \left. \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{cs}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Dans l'une ou l'autre phase les potentiels chimiques  $\mu_3$  et  $\mu_4$  varient conformément à la relation de Gibbs-Duhem

$$x d\mu_3 + (1 - x) d\mu_4 = 0 \quad \text{à température et pression constantes} \quad (34)$$

Dans la phase diluée le potentiel chimique  $\mu_{4d}$  est relié à la pression osmotique  $\Pi$  :

$$\Pi \simeq \frac{\mu_{4d}(T, P, 0) - \mu_{4d}(T, P, x_d)}{\Omega_{40}(T, P)} \quad (35)$$

La pression osmotique ne dépend également, le long de la courbe de séparation de phase, que de la pression et de la température

$$\Pi(T, P, x_d) = \Pi_s(T, P) \quad (36)$$

Une des conséquences de la relation (36) réside dans la formule suivante :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial T} \right|_P &= \left. \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{ds}} = - \frac{1}{\Omega_{40}} \left. \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \right|_{P, \text{ le long de } x_{ds}} \\ &= - \frac{1}{\Omega_{40}} \left. \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} \right|_{P, x_{cs}} \end{aligned} \quad (37)$$

Ces formules constituent l'ensemble des relations thermodynamiques auxquelles nous ferons appel pour réaliser l'extension de la relation de Clausius-Clapeyron aux solutions diluées de  $^3\text{He}$  dans  $\text{He II}$ .

Calculons  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial T} \right|_P$ , et pour ce faire, commençons par expliciter (32) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial T} \Big|_{P, x_d} + \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial x_d} \Big|_{T, P} \frac{\partial x_{ds}}{\partial T} \Big|_P &= \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial T} \Big|_{P, x_c} + \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial x_c} \Big|_{P, T} \frac{\partial x_{cs}}{\partial T} \Big|_P \\ \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \Big|_{P, x_d} + \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial x_d} \Big|_{T, P} \frac{\partial x_{ds}}{\partial T} \Big|_P &= \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} \Big|_{P, x_c} + \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial x_c} \Big|_{P, T} \frac{\partial x_{cs}}{\partial T} \Big|_P \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Nous multiplions ensuite les égalités (38) respectivement par 1 et  $\frac{(1-x_d)}{x_d}$  afin de pouvoir utiliser la relation (34) de Gibbs-Duhem en phase diluée ; ceci nous conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu_{3d}}{\partial T} + \frac{(1-x_d)}{x_d} \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \\ &= \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial T} + \frac{(1-x_d)}{x_d} \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} + \frac{\partial x_{cs}}{\partial T} \left[ \frac{\partial \mu_{3c}}{\partial x_c} + \frac{(1-x_d)}{x_d} \frac{\partial \mu_{4c}}{\partial T} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Faisons intervenir à nouveau la relation (34) en phase concentrée ainsi que les formules (37) ; le résultat est le suivant :

$$\left( \frac{1}{x_d} - \frac{1}{x_c} \right) \Omega_{40} \left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial T} \right|_P = S_{3d} - S_{3c} = \frac{Q}{T}. \quad (40)$$

Les notations suivantes ont été introduites :

$S_{3d}$  désigne l'entropie pour une mole de  $^3\text{He}$  en solution et est définie par la relation :

$$S_{3d} = - \left. \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial T} \right|_{P, x_d} - \frac{(1-x_d)}{x_d} \left. \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial T} \right|_{P, x_d} \quad (41)$$

$S_{3c}$  est définie par une relation équivalente côté concentré.  $\Omega_{40}$  est le volume molaire de  $^4\text{He}$  pur à la pression  $P$ . Ceci revient à négliger  $\kappa_{40} \Pi$  devant 1 ;  $\kappa_{40}$  est la compres-

bilité de  $^4\text{He}$  pur. La validité de cette approximation a été discutée dans la référence [103].

Passons maintenant à l'évaluation de  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_T$  qui s'effectue d'une manière strictement analogue au calcul précédent. L'équivalent de la relation (39) s'écrit maintenant :

$$x_c \omega_{3d} + (1 - x_c) \omega_{4d} + \left[ x_c \left. \frac{\partial \mu_{3d}}{\partial x_d} \right|_{T,P} + (1 - x_c) \left. \frac{\partial \mu_{4d}}{\partial x_d} \right|_{T,P} \right] \left. \frac{\partial x_{ds}}{\partial P} \right|_T = x_c \omega_{3c} + (1 - x_c) \omega_{4c}. \quad (42)$$

$\omega_{3c}$ ,  $\omega_{3d}$ ,  $\omega_{4c}$ ,  $\omega_{4d}$  sont les volumes partiels des deux composants dans chaque phase ; ils sont définis par les relations :

$$\omega_{i,d} = \left. \frac{\partial \mu_{i,d}}{\partial P} \right|_{T,x_d} \quad \omega_{i,c} = \left. \frac{\partial \mu_{i,c}}{\partial P} \right|_{T,x_c}, \quad i = 3, 4. \quad (43)$$

Le second membre de la formule (42) est le volume total de la solution en phase concentrée. Pour simplifier la formule (42) utilisons la relation (37) après avoir permuté les rôles de  $T$  et  $P$ , ainsi que la relation qui définit la pression osmotique :

$$\mu_4(T, P, x_d) = \mu_{40}(T, P - \Pi, 0).$$

Après quelques calculs, on obtient finalement :

$$\left( \frac{1}{x_d} - \frac{1}{x_c} \right) \Omega_{40} \left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_T = \frac{\Omega_c - \Omega_{40}}{x_c} - \frac{\Omega_d - \Omega_{40}}{x_d} \quad (44)$$

$\Omega_c$  et  $\Omega_d$  désignent respectivement les volumes molaires de la solution en phase concentrée et en phase diluée ; ils dépendent de la pression  $P$  et de la température  $T$ .

Terminons par l'évaluation de  $\left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T$  qui est effectuée en remarquant que la phase concentrée en  $^3\text{He}$  est à toute pression pratiquement constituée par  $^3\text{He}$  pur :  $x_c \simeq 1$ .  $x_s$  désigne ici  $x_{ds}$ . Ecrivons de nouveau l'égalité des potentiels chimiques de  $^3\text{He}$  :

$$\mu_{3d}(T, P, x_d) = \mu_{3c}(T, P, x_c) \simeq \mu_{3c}(T, P) \quad (45)$$

Le potentiel chimique  $\mu_{3d}$  peut également être exprimé par l'intégrale du volume partiel  $\omega_{3d}$  :

$$\mu_{3d}(T, P, x_d) = \mu_{3d}(T, 0, x_d) + \int_0^P \omega_{3d}(T, P', x_d) dP'. \quad (46)$$

De même pour  $\mu_{3c}$  :

$$\mu_{3c} = \mu_{3c}(T, 0) + \int_0^P \omega_{3c}(T, P') dP' \quad (47)$$

Tenant compte de la relation de définition du paramètre  $\alpha$ , nous remplaçons  $\mu_{3d}$  et  $\mu_{3c}$  par les expressions correspondantes (46) et (47) dans l'égalité (45). Pour obtenir la variation de  $x_s$  avec la pression, nous différencions la relation obtenue et nous trouvons le résultat :

$$\left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T = \frac{\omega_{3c} - (1 + \alpha) \omega_{40}}{(\partial \mu_{3d} / \partial x_s)_T} \quad (48)$$

Ayant établi les trois formules thermodynamiques pour  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_T$ ,  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial T} \right|_P$  et  $\left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T$ , nous allons maintenant considérer leur application aux résultats expérimentaux.

*B) Cohérence thermodynamique des données expérimentales sur la courbe de séparation de phase.*

Considérons d'abord les conséquences de la relation  $\left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T$ , (48). Les valeurs des volumes molaires mis en jeu  $\Omega_{30}$ ,  $\Omega_{40}$  à pression nulle, ainsi que celle du paramètre de BBP sont les suivantes (extrapolées à  $T = 0$ ) :

$$\Omega_{30} = 36,87 \text{ cm}^3/\text{mole} [124]$$

$$\Omega_{40} = 27,58 \text{ cm}^3/\text{mole}$$

$$\alpha = 0,284 \text{ pour } T = 0, x_s \simeq 0,065$$

Le dénominateur de la relation (48) s'évalue à l'aide du résultat (13). Nous obtenons ainsi le chiffre suivant :

$$\left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T = 0,76 \times 10^{-8} B^{-1} \quad (49)$$

La variation de la concentration saturante en fonction de la pression a été mesurée par J. Landau *et al.* [106] d'une part, G. Watson *et al.* [91] d'autre part. Les résultats de ces auteurs, résumés sur la *figure 10*, sont les suivants :

$$\text{réf. [91]} \left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T = 0,66 \times 10^{-8} B^{-1},$$

$$\text{réf. [106]} \left. \frac{\partial x_s}{\partial P} \right|_T = 0,86 \times 10^{-8} B^{-1} \quad (50)$$

La valeur (49) que nous avons obtenue est donc satisfaisante : elle se trouve être la moyenne des résultats expérimentaux !

Pour tirer les conséquences de la relation (44) donnant  $\partial \Pi_s / \partial P$ , nous sommes gênés dans notre évaluation numérique par le fait que, au voisinage du zéro absolu nous ne disposons que de deux points de mesure à 0 et 1 020 mB. Le calcul de  $\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_{P=0}$  ne

suffit pas, car les pressions auxquelles ces mesures ont été effectuées ne sont pas suffisamment rapprochées. Il faut également déterminer le premier terme correctif en pression. A pression nulle, l'expression (44) s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_{P=T=0} = \frac{x_d}{1-x_d} \left[ \frac{\Omega_c}{\Omega_{40}} - (1 + \alpha) \right] \quad (51)$$

Remplaçons dans (51) les différents paramètres par les valeurs correspondantes ; nous obtenons le résultat :

$$\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_{P=0, x_s=6,5\%} = 3,67 \times 10^{-3} \quad (52)$$

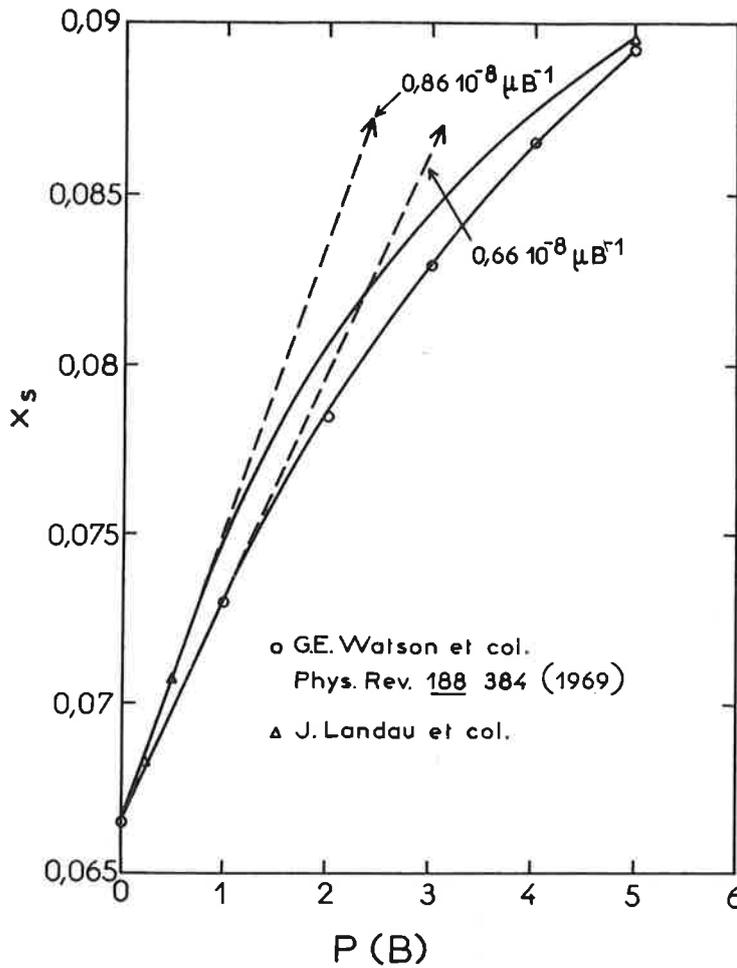


FIG. 10. — Concentration saturante en  $^3\text{He}$  à  $T = 0$  en fonction de la pression, d'après les références [91] et [106].

Evaluons maintenant le premier terme correctif en pression donné par l'expression suivante

$$\left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_{\delta P} = \left. \frac{\partial \Pi_s}{\partial P} \right|_{\delta P=0} + \delta P \left\{ \left( \frac{1}{1-x_d} \right)^2 \frac{\partial x_d}{\partial P} \left( \frac{\Omega_c}{\Omega_{40}} - 1 - \alpha \right) + \frac{x_d}{1-x_d} \left[ \frac{\Omega_c}{\Omega_{40}} (\kappa_{40} - \kappa_c) - \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \right\}$$

Les valeurs numériques des quantités que nous venons d'introduire sont les suivantes :

$$\frac{\partial x_d}{\partial P} = 0,78 \times 10^{-8} B^{-1}$$

$$\frac{\partial \Omega_c}{\partial P} \simeq -\kappa_c \Omega_c = 3,705 \times 10^{-8} [B^{-1}] \times \Omega_c,$$

$$\frac{\partial \Omega_{40}}{\partial P} = -\kappa_0 \Omega_{40} = 1,212 \times 10^{-8} [B^{-1}] \times \Omega_{40},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = -1,297 \times 10^{-8} B^{-1} \quad (54)$$

Les valeurs des coefficients de compressibilité proviennent des mesures de vitesse du son ; celle de  $\partial\alpha/\partial P$  est extraite d'un travail non publié d'Abraham *et al.* [87].

L'expression numérique de  $\partial\Pi_s/\partial P$  qui en résulte est alors :

$$\left. \frac{\partial\Pi_s}{\partial P} \right|_{\delta P} = 3,67 \times 10^{-3} - 0,976 \times 10^{-9} P \quad (P \text{ en barye}), \quad (55)$$

ce qui donne pour la pression osmotique saturante elle-même :

$$\Pi_s(P) = \Pi_s(0) + 3,67 P - 0,488 P^2 \quad (56)$$

Les résultats expérimentaux proviennent des mesures effectuées à l'*Institut d'Electronique Fondamentale* et par J. Landau *et al.* [106]. Nous considérons que les mesures que nous avons réalisées sont plus cohérentes car elles ont été faites au cours de la même descente en froid. Nous pensons que, bien que  $\Pi_s(T=0)$  ne soit pas connu à mieux que 1 %,  $\Delta\Pi_s(T=0)$  entre 0 et 1 B est déterminé avec une précision de l'ordre de 1 %. Les résultats de Landau ont été obtenus au cours de deux expériences différentes. L'analyse de nos mesures a conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_s(P=0) &= 23,37 \text{ mB}, \\ \Pi_s(P=1,02 B) &= 25,75 \text{ mB} \end{aligned} \quad (57)$$

Les résultats obtenus par le groupe de l'Ohio sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Pi(P=0,26 \text{ Atm}) &= 23,54 \text{ mB}, \\ \Pi(P=0,52 \text{ Atm}) &= 24,74 \text{ mB}. \end{aligned} \quad (58)$$

Les valeurs (57) et (58) sont portées sur la *figure 11* ainsi que la courbe définie par la relation (56). Comme on peut le voir sur la figure 11, les variations de  $\Pi_s$  en fonction de la pression, calculées pour  $x_d = 6,5$  %, conduisent à un bon accord avec les résultats expérimentaux. Les valeurs correspondant à 6,4 et 6,6 % seraient également peu éloignées du résultat expérimental. Le résultat de 6,8 % obtenu par les neutrons [93] pour  $x_s$  est exclu par cette comparaison, dont nous concluons que la meilleure valeur pour la concentration saturante en  $^3\text{He}$  à pression et température nulles est  $x_s = 6,5$  %.

Comme il a été établi au début de ce paragraphe, la quantité  $\left. \frac{\partial\Pi_s}{\partial T} \right|_P$  est reliée, le long de la courbe de séparation de phase, à la chaleur latente de transition  $Q$ . Au voisinage de  $T=0$ , la relation (40) se met sous la forme :

$$\left( \frac{1}{x_d} - 1 \right) \Omega_{40} \left. \frac{\partial\Pi_s}{\partial T} \right|_P = \frac{Q}{T}. \quad (59)$$

La relation (59) va nous permettre d'établir la cohérence des mesures de  $Q$  et de  $\Pi_s$ . Du résultat expérimental (20) on déduit l'expression de la quantité  $\partial\Pi_s/\partial T$  :

$$\frac{\partial\Pi_s}{\partial T} = 2000 T - 4800 T^3, \text{ [mB/K]}. \quad (60)$$

Le calcul de  $Q/T$  requiert la connaissance de la variation de la concentration  $x_s$  en fonction de la température. Comme nous le verrons ultérieurement, cette variation est bien représentée par la relation :

$$x_s(T) = 0,065 [1 + 8,25 T^2 + 17 T^3 - 35 T^4]. \quad (61)$$

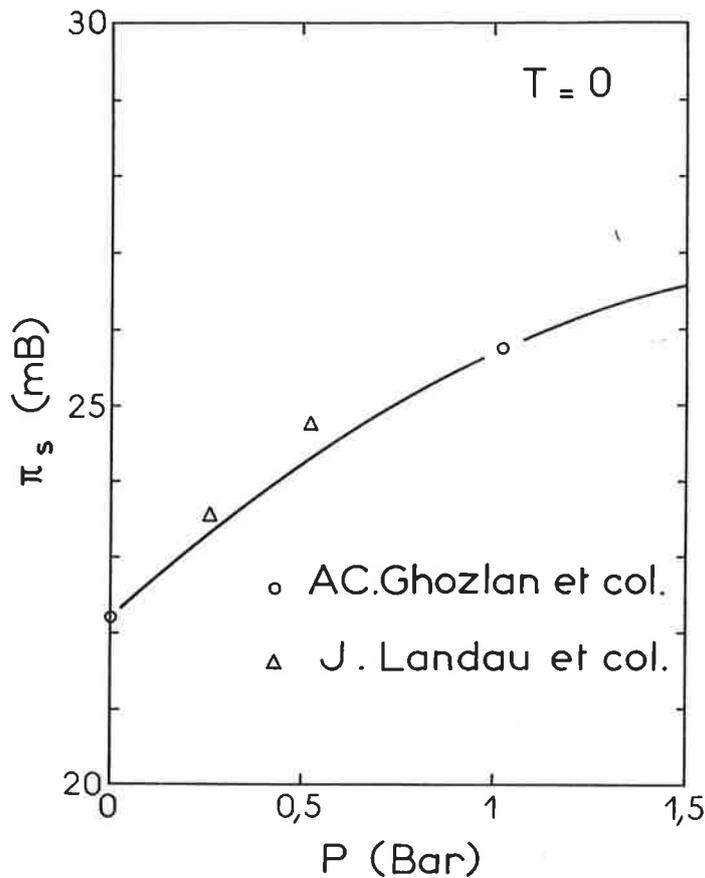


FIG. 11. — Pression osmotique saturante à  $T = 0$  en fonction de la concentration. Les points expérimentaux sont les valeurs (V.57) et (V.58), la courbe en trait plein est définie par la relation [56].

Les relations (59), (60) et (61) permettent le calcul de  $Q/T^2$ . Le résultat en est reproduit dans le tableau ci-dessous, qui contient également les valeurs expérimentales (11) représentées par la relation (24).

$T_{mK}$	$x_s \%$	$\frac{Q}{T^2}$ calculé	$\frac{Q}{T^2}$ expérimental
0	6,5	79,3	80,2
20	6,52	79,0	79,9
40	6,59	77,9	78,8
60	6,69	76	77,4
80	6,893	73,4	75,1
100	7,12	70,2	72,3
120	7,42	66,5	68,8
140	7,77	62,4	64,7
160	8,18	58,2	60
180	8,64	53,8	54,6
200	9,17	49,4	48,6

Pour commenter ce tableau, il nous faut faire intervenir les erreurs expérimentales : — la précision sur la pression osmotique est de l'ordre de 1,5 % :  $\left(\frac{\partial \pi_s}{\partial T}\right)$  est donc connu, au mieux, à 1,5 % près ; — la précision des mesures de Gladun et Pershkov [117] est de l'ordre de 3 %. Les recoupements entre les valeurs théoriques et expérimentales de  $Q/T^2$  se font à 3 % près : ils sont donc situés à l'intérieur des erreurs expérimentales.

Les conclusions de ce paragraphe sont les suivantes :

1) la cohérence thermodynamique des deux ensembles de mesures — pression osmotique et chaleur latente de transition — est donc établie.

2) Les valeurs de  $n_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right|_{T=0, x_s}$  et  $\frac{\partial x_s}{\partial P}$  sont compatibles entre elles à mieux de 10 % près.

3) La valeur 6,5 % pour  $x_s$  ( $T = 0, P = 0$ ) est cohérente avec l'évaluation de  $\partial \Pi_s / \partial P$ .

Avec ce dernier paragraphe nous avons épuisé les ressources de la thermodynamique. Nous allons maintenant faire appel à la mécanique statistique afin d'introduire l'influence de certaines propriétés expérimentales sur la courbe de séparation de phase — la susceptibilité magnétique de  $^3\text{He}$  et le potentiel chimique  $\mu_3$  — et de toutes les grandeurs thermodynamiques hors de la courbe de séparation de phase.

L'utilisation de la mécanique statistique implique nécessairement l'existence d'un modèle : nous avons décrit, au cours des chapitres III et IV, l'élaboration d'un tel modèle ; celui-ci fait intervenir un certain nombre de paramètres :  $m_0^*, V_0, V_1, V_2$ . Pour déterminer les valeurs de ces paramètres, nous nous proposons maintenant de relier entre elles toutes les grandeurs physiques dont nous venons de faire une présentation détaillée.

## VI. Les paramètres du modèle.

Dans ce chapitre, nous déterminons d'abord numériquement les valeurs des paramètres  $m_0^*, V_i^s$  mis en jeu dans le modèle décrit au chapitre III à l'aide des différents résultats expérimentaux exposés précédemment, à l'exclusion de ceux relatifs à la chaleur spécifique et à la vitesse du second son, que nous examinerons à part. Nous conclurons ce dernier chapitre par une comparaison entre les valeurs du potentiel d'interaction et de la masse effective que nous aurons obtenues avec, d'une part, celles des mêmes grandeurs évaluées à partir des propriétés de transport et, d'autre part, les différentes prévisions théoriques.

**VI.I. Détermination numérique des paramètres.** — La recherche des valeurs des quatre paramètres du modèle qui décrivent au mieux les différentes données expérimentales est un problème d'optimisation assez long et complexe. Pour le simplifier, nous nous sommes conformés aux prescriptions de F. Acton [125]. La technique que nous avons adoptée est fondée sur des considérations d'ordre géométrique ; nous n'avons pas effectué une recherche systématique du minimum de l'écart quadratique moyen. Nous avons préféré rechercher les plages de valeurs ( $m_0^*, V_i^s$ ) compatibles avec les résultats des mesures affectées de leur indétermination expérimentale. Le jeu final de paramètres résultera de la superposition des différents domaines de variation ainsi déterminés.

Les résultats expérimentaux, présentés au chapitre précédent, peuvent être rangés en deux catégories :

- ceux qui ont trait aux mesures effectuées à concentration  $x$  en  $^3\text{He}$  fixée ;
- ceux provenant de mesures effectuées sur la courbe de séparation de phase caractérisée par une relation univoque entre la température  $T$  et la concentration  $x$  ; cette circonstance diminue les sources d'erreurs expérimentales et constitue une des raisons pour lesquelles les expériences correspondantes sont plus précises que les autres.

Cette remarque nous a amenés à scinder l'analyse des résultats en deux temps :

- utiliser d'abord les propriétés mesurées à  $x$  constant pour en déduire les zones de compatibilité entre les valeurs des différents paramètres ;
- préciser ensuite, à l'aide des résultats expérimentaux obtenus sur la courbe de séparation de phase, les zones précédemment trouvées. Afin de simplifier les formules

ainsi que l'exposé des résultats, nous introduisons les notations suivantes, qui caractérisent des grandeurs sans dimension :

$$\bar{V}^* = -2m_0^* n_{40} \left[ V_1^s - \frac{V_2^s}{12} \right], \quad (1)$$

$$\bar{V}_2 = 2m_0^* n_{40} V_2^s, \quad (2)$$

$$\bar{V}_0 = -V_0^s \times 10^{+38} \text{ erg}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (3)$$

$$\bar{m}_0 = \frac{m_0^*}{m_3} \quad (4)$$

*A. Analyse des résultats expérimentaux extrapolés à  $T = 0$ .*

Pour effectuer la première analyse, il nous faut écrire les expressions algébriques des différentes propriétés étudiées, dans le cas particulier  $T = 0$ . Dans cette limite, la pression osmotique (II.54) est représentée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Pi(n_{30}, T = 0) = \frac{2}{5} n_{30} \mu_{Fo} \left[ 1 - \frac{5}{2} \bar{V}^* \xi_0 \right] + \frac{1}{2} V_0^s n_{30}^2 \\ - \frac{6}{35} \frac{n_3 \mu_{Fo}^2}{k_B \theta} - \frac{1}{8} \bar{V}_2 \mu_{Fo} n_{30} \xi_0, \end{aligned} \quad (5)$$

dans laquelle  $\mu_{Fo}$ ,  $n_{30}$  et  $\xi_0$  correspondent aux valeurs prises par  $\mu_F$ ,  $n_3$  et  $\xi$  dans la limite  $x = 6,5 \%$  ( $T = 0$ ). Le paramètre  $k_B \theta$  est relié au paramètre  $\gamma$  par la relation

$$k_B \theta = -\frac{3}{20 m_0^* \gamma},$$

$\theta$  vaut, pour la valeur (III.2) de  $\gamma$ , 17K.

Le potentiel chimique  $\mu_{3d}$  de l'hélium-3 en phase diluée est représenté, dans les mêmes conditions de température et de concentration, par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mu_{3d} = e_{30} + V_0^s n_{30} + \mu_{Fo} \left[ 1 - \bar{V}^* \xi_0 \right] - \frac{3}{10} \frac{\mu_{Fo}^2}{k_B \theta} \\ - \frac{3}{5} \mu_{Fo} \xi_0 \left[ \bar{V}^* + \frac{2}{3} (1 + \alpha) \right] - \frac{1}{5} \bar{V}_2 \xi_0 \mu_{Fo} \end{aligned} \quad (6)$$

Remarquons dans (6) la présence du terme  $\frac{2}{3}(1 + \alpha_0)$  : ce terme ne se trouve pas dans l'expression (IV.26). En effet, au chapitre précédent, nous avons déterminé le potentiel chimique  $\mu_3$  dans le système de variables thermodynamiques ( $T, n_3, \mu_4$ ). Or les propriétés des mélanges ont été mesurées en maintenant la pression extérieure  $P$  et non le potentiel chimique  $\mu_4$  constant. Il nous faut donc inclure dans l'expression (IV.26) un terme correctif pour tenir compte de ce changement de variable. Ce terme est évalué en remarquant qu'il est équivalent de maintenir  $P_0$  ou  $\mu_4$  constant ; ceci nous conduit à la relation :

$$\mu_3(T, P, n_3) \cong \mu_3(T, \mu_4, n_3) - (1 + \alpha_0) \frac{\Pi}{n_{40}} \quad (7)$$

Ce changement de variables n'affectera pas la pression osmotique. Cette grandeur est, en effet, déterminée en appliquant la relation (II.20) :

$$\Pi(T, \mu_4, n_3) = \int_0^{n_3} n'_3 \left. \frac{\partial \mu_3}{\partial n'_3} \right|_{T, \mu_4} dn'_3.$$

Considérons maintenant la variation de  $\mu_3$  en fonction de la densité numérique  $n_3$  ; nous la déduisons de l'expression générale (IV.26) du potentiel chimique après avoir tenu compte de la remarque précédente :

$$\left[ n_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right]_{n_{30}, T=0} = V_0^s n_{30} + \frac{2}{3} \mu_{Fo} \left[ 1 - \frac{5}{5} \bar{V}^* \xi_0 \right] - \frac{2}{5} \frac{\mu_{Fo}^2}{k_B \theta} - \mu_{Fo} \xi_0 \left[ \bar{V}^* + \frac{2}{3} (1 + \alpha_0) \right] - \frac{1}{3} \bar{V}_2 \xi_0 \mu_{Fo}. \quad (8)$$

Finalement la variation de la susceptibilité  $\chi$  de  ${}^3\text{He}$  avec la densité numérique de  ${}^3\text{He}$  provient de la formule générale (IV.42) et conduit à la relation suivante :

$$\left[ \frac{n_3}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n_3} \right]_{n_{30}, T=0} = \frac{\frac{2}{9} \frac{\mu_{Fo}}{n_{30}} \left[ 1 + 8 \bar{V}^* \xi_0 + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \xi_0 \right]}{-V_0 + \frac{2}{3} \frac{\mu_{Fo}}{n_{30}} \left[ 1 - 4 \bar{V}^* \xi_0 - \frac{1}{2} \bar{V}_2 \xi_0 \right]} \quad (9)$$

Les résultats expérimentaux qui correspondent aux expressions théoriques précédentes sont :

$$\Pi_{\text{ex}}(n_{30}, T=0) = 22,4 \text{ mB}$$

$$\mu_{\text{ex}}(n_{30}, T=0) = 0,310 \text{ K}$$

$$\left[ n_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} \right]_{n_{30}, T=0, \text{ex}} = 0,148 \text{ K} \quad (10)$$

$$\left[ \frac{n_3}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n_3} \right]_{n_{30}, T=0, \text{ex}} = 0,5$$

Le but de l'analyse des propriétés à  $T=0$  est de trouver les limites de variation de chaque paramètre, telles que les quatre conditions suivantes soient simultanément réalisées :

$$\left| \frac{\Pi_{\text{cal}} - \Pi_{\text{ex}}}{\Pi_{\text{ex}}} \right| = \text{Erreur } \Pi < 1,5 \%$$

$$\text{Erreur } \mu_3 < 2,2 \%$$

$$\text{Erreur } n_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3} < 8 \%$$

$$\text{Erreur } \frac{n_3}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n_3} < 20 \%$$

(11)

Cette procédure nous conduit aux résultats suivants :

1) En considérant les expressions algébriques de  $\Pi$  (5),  $\mu_3$  (6),  $n_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}$  (8), nous observons que les variations de  $\bar{V}^*$  et  $\bar{V}_2$  doivent être liées par la formule :

$$\Delta \bar{V}^* + \frac{1}{8} \Delta \bar{V}_2 = 0 \quad (12)$$

L'expression de  $\left(\frac{n_3}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n_3}\right)$  (9), dans laquelle ne figure pas le groupement  $\left(\bar{V}^* + \frac{\bar{V}_2}{8}\right)$ , était susceptible de limiter le champ d'application de la relation (12). Nous avons toutefois constaté, avec la méthode numérique précédente, que cette restriction n'est pas suffisante pour faire apparaître les valeurs limitant les domaines  $(\bar{V}^*, \bar{V}_2)$  explorés. Ceci est imputable au manque de précision des résultats expérimentaux.

2) L'existence de la relation (12) nous autorise à ne faire varier que trois paramètres : nous avons choisi de faire varier  $(\bar{m}_0, \bar{V}^*, \bar{V}_0)$  et de fixer  $\bar{V}_2 = \bar{V}_{20}$  (nous aurions pu, aussi bien, fixer  $\bar{V}^*$  et faire varier  $\bar{V}_2$ ).

Appliquant la méthode numérique précédente et fixant  $\bar{V}_2 = \bar{V}_{20}$ , nous obtenons dans l'espace  $(\bar{m}_0, \bar{V}_0, \bar{V}^*)$  le domaine de compatibilité à l'intérieur duquel doivent se trouver les paramètres pour satisfaire aux conditions expérimentales. Sur la figure (12) nous avons représenté ce domaine dans le plan  $(\bar{V}^*, \bar{V}_0)$  en prenant  $\bar{m}_0$  comme paramètre. A chaque valeur de  $\bar{m}_0$  correspond une coupe de ce domaine dans le plan  $(\bar{V}^*, \bar{V}_0)$ . La représentation de la figure 12 est valable pour la valeur  $\bar{V}_{20} = 0,4$ .

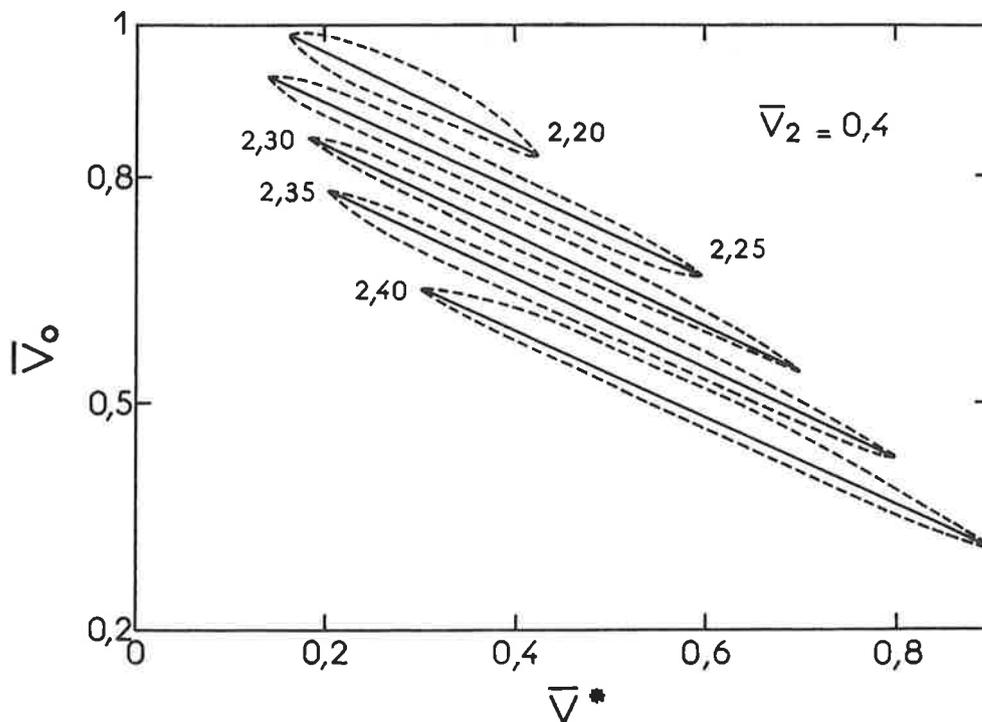


FIG. 12. — Domaines de valeurs possibles pour  $\bar{V}^*$  et  $\bar{V}_0$  satisfaisant aux conditions (VI-11) pour différentes valeurs de la masse effective  $\bar{m}_0^*$ , à  $\bar{V}_2$  fixé et égal à 0,4.

### B. Analyse des résultats expérimentaux sur la courbe de séparation de phase

Pour préciser plus avant les valeurs des paramètres, nous utilisons les résultats expérimentaux obtenus sur la courbe de séparation de phase et qui sont les suivants :

- la susceptibilité magnétique relative de  $^3\text{He}$  ;  $\chi_s(T)/\chi_s(0)$

- la pression osmotique,  $\Pi_s(T)$ ,
- la courbe de séparation de phase,  $x_s(T)$ ,
- le potentiel chimique de  $^3\text{He}$ ,  $\mu_{3s}(T)$ ,
- l'entropie de l' $^3\text{He}$ ,  $S_{3d}(T)$ .

Les expressions de ces différentes propriétés ont été déterminées au chapitre précédent ; il faut toutefois remplacer dans ces expressions la densité numérique  $n_3$  par la forme particulière qu'elle prend sur la courbe de séparation de phase :

$$n_3 = n_3(T) = n_{40} \left( \frac{x}{1 + \alpha x} \right) \text{ où } x_s = x(T)$$

Pour effectuer les calculs nous avons initialement remplacé  $x_s(T)$  par la formule que nous avons déterminée lors d'un précédent travail [70] [71] :

$$x_s(T) = 0,065 [1 + 8,4 T^2 + 9,4 T^3]$$

L'écart trouvé entre les valeurs extrêmes de  $\Delta\mu/\mu$  était de l'ordre de 10 % à 15 %. Nous avons alors fait varier les paramètres du modèle pour chercher celui qui était susceptible de réduire cet écart. Le résultat de cette recherche est qu'aucun des paramètres ( $\bar{m}_0$ ,  $\bar{V}_0$ ,  $\bar{V}^*$ ,  $\bar{V}_2$ ) n'agit sur la courbure de la fonction  $\Delta\mu/\mu_3(T)$  : leur seul effet réside dans une translation verticale de la courbe. Nous avons alors étudié l'influence de la courbe de séparation de phase, qui s'est révélée d'une importance primordiale. En effet, seul le terme en  $T^3$  dans la relation  $x_s(T)$  agit sur la courbure de  $\Delta\mu_3/\mu_3(T)$  : plus le coefficient de  $T^3$  est grand, plus la courbure est petite, donc plus petit sera l'écart entre les valeurs extrêmes de  $\Delta\mu_3/\mu_3$ . Considérant à la fois les résultats expérimentaux relatifs au potentiel chimique et à la concentration saturante, nous avons été amenés à mettre la courbe de séparation de phase sous la forme suivante :

$$x_s(T) = 0,065 [1 + 8,25 T^2 + 17 T^3 - 35 T^4] \quad (13)$$

Toutefois, à ce stade de l'analyse, les paramètres ( $\bar{m}_0$ ,  $\bar{V}_i$ ) n'ont pas encore pris leurs valeurs optimales ; lorsque ce sera le cas, les coefficients de la relation (13) devront être légèrement modifiés.

Nous avons analysé les valeurs expérimentales de l'entropie de la même manière que celles du potentiel chimique  $\mu_3$ .  $\bar{S}$  est principalement influencé par la masse effective  $m_0^*$ . La pression osmotique est sensible à trois paramètres :  $\bar{m}_0$ ,  $\bar{V}_0$ ,  $\bar{V}^*$ , et à un degré nettement moindre, au paramètre  $\bar{V}_2$ .

La recherche systématique des valeurs optimales des paramètres est effectuée de la manière suivante :

- Evaluation d'abord des écarts quadratiques moyens relatifs à  $\Pi$  et  $\mu_3$  ; en effet, les résultats expérimentaux étant représentés par des expressions numériques, cette tâche peut être effectuée sans compliquer le programme du calcul sur ordinateur.
- Recherche, ensuite, des valeurs des paramètres qui minimisent simultanément les deux écarts et qui sont compatibles avec les résultats obtenus au voisinage de  $T = 0$ .
- Contrôle, enfin, de ces valeurs sur les mesures de susceptibilité magnétique.

Cette procédure systématique nous a permis de sélectionner, pour chaque paramètre, une plage de valeurs très limitée. L'analyse de l'ensemble des propriétés à  $T = 0$  et sur la courbe de séparation de phase restreint donc la variation de paramètres aux domaines représentés sur la *figure 13*. Conformément aux résultats illustrés sur ce graphique le meilleur jeu de paramètres est ainsi :

$$\bar{m}_0 = 2,255, \quad \bar{V}_0 = 0,70, \quad \bar{V}^* = 0,53, \quad \bar{V}_2 = 0,4. \quad (14)$$

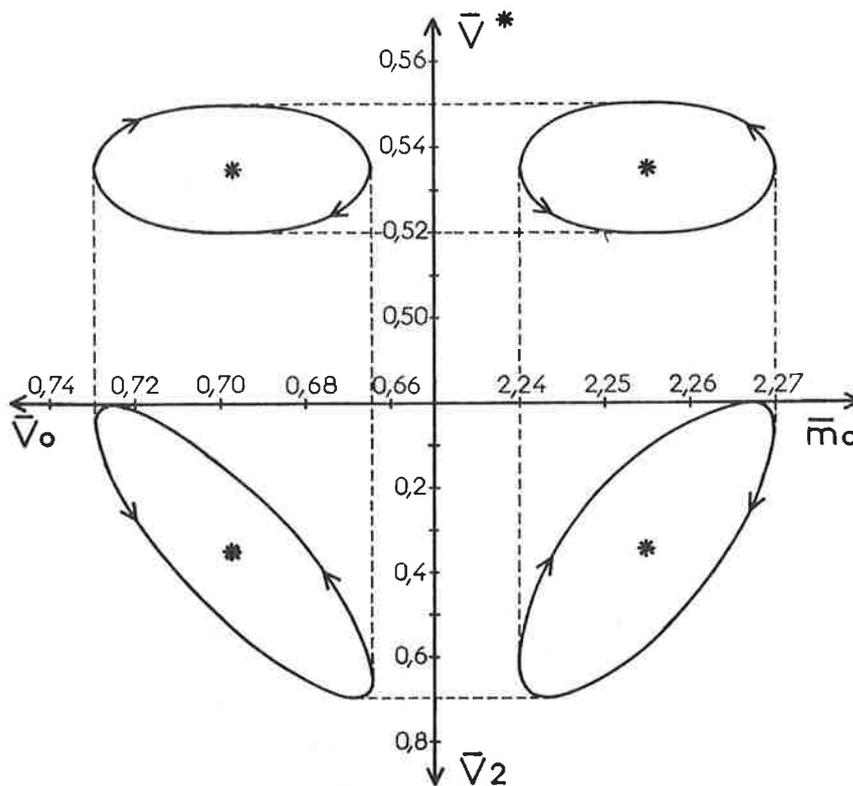


FIG. 13. — Projections du domaine de compatibilité final dans l'espace  $\bar{m}_0, \bar{V}_0, \bar{V}^*, \bar{V}_2$ . Les limites ont été représentées d'une manière idéalisée sous forme d'ellipses, seuls quelques points du contour exact ayant été déterminés.

Remarquons que les limites de variation des différents paramètres autour de ces valeurs médianes signifient que, par exemple, l'ensemble

$$\bar{m}_0 = 2,25 \quad \bar{V}_0 = 0,69 \quad \bar{V}^* = 0,52 \quad \bar{V}_2 = 0,2$$

représente également un jeu de valeurs possibles.

Nous avons, pour terminer, effectué une analyse plus fine de la courbe de séparation de phase en remplaçant dans l'expression de  $\mu_3$  les paramètres du modèle par leurs valeurs "optimales" ; le résultat que nous avons obtenu est le suivant :

$$x_s = 0,065 [1 + 7,95 T^2 + 18 T^3 - 10 T^4],$$

et les variations correspondantes de  $\Delta\mu_3/\mu_3$  et de  $\chi_s(T)/\chi_s(0)$  sont représentées sur les figures 14 et 15. La modification très faible de la courbe de séparation de phase ne change pas le résultat final (14) de notre analyse numérique. La courbe correspondant à la relation (15) est portée sur la figure 16 ainsi que les différents points expérimentaux.

**V.II. Chaleur spécifique et vitesse du second son.** — La chaleur spécifique et la vitesse du second son sont deux propriétés importantes des solutions isotopiques de l'hélium qui n'ont pas été prises en ligne de compte dans notre analyse de la situation expérimentale. Leur considération conduit à des difficultés que nous allons maintenant exposer, en commençant par la chaleur spécifique.

#### A. La chaleur spécifique

Les premières mesures de capacité calorifique de solutions  $^3\text{He}-^4\text{He}$  diluées dans la zone de température où l'hélium-3 est dégénéré ont été effectuées par D.O. Edwards *et al.* [51]. Des mesures plus précises pour des solutions à 1,3 et 5 %, s'étendant loin dans la région

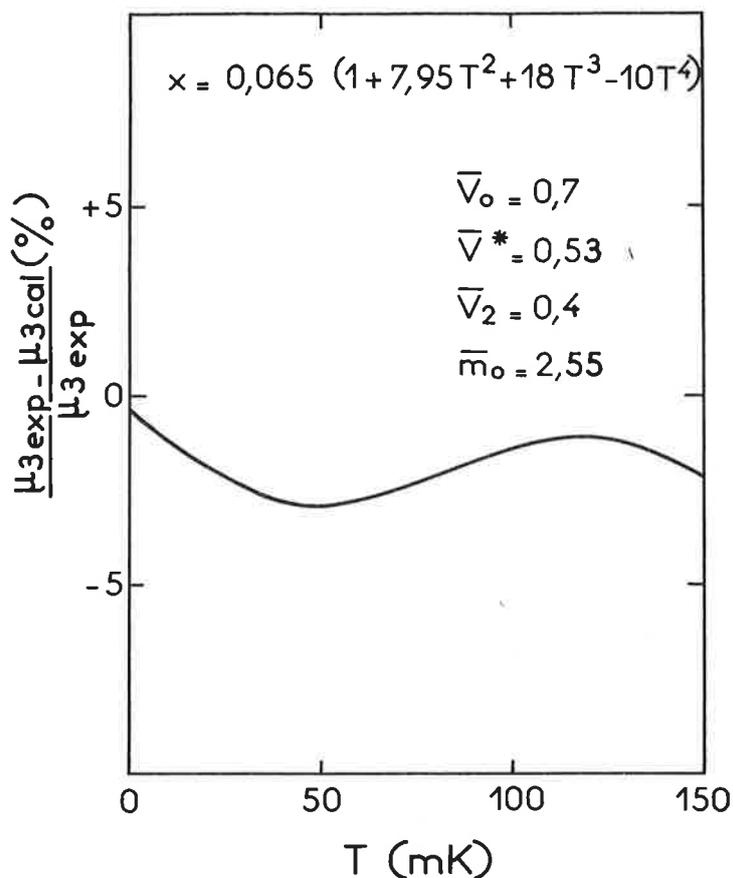


FIG. 14. – Ecart relatif entre le potentiel chimique expérimental (V.28) et les valeurs calculées à l'aide de la relation (IV.26), du meilleur jeu de valeurs des paramètres et de la courbe de séparation de phase définitive (VI.15).

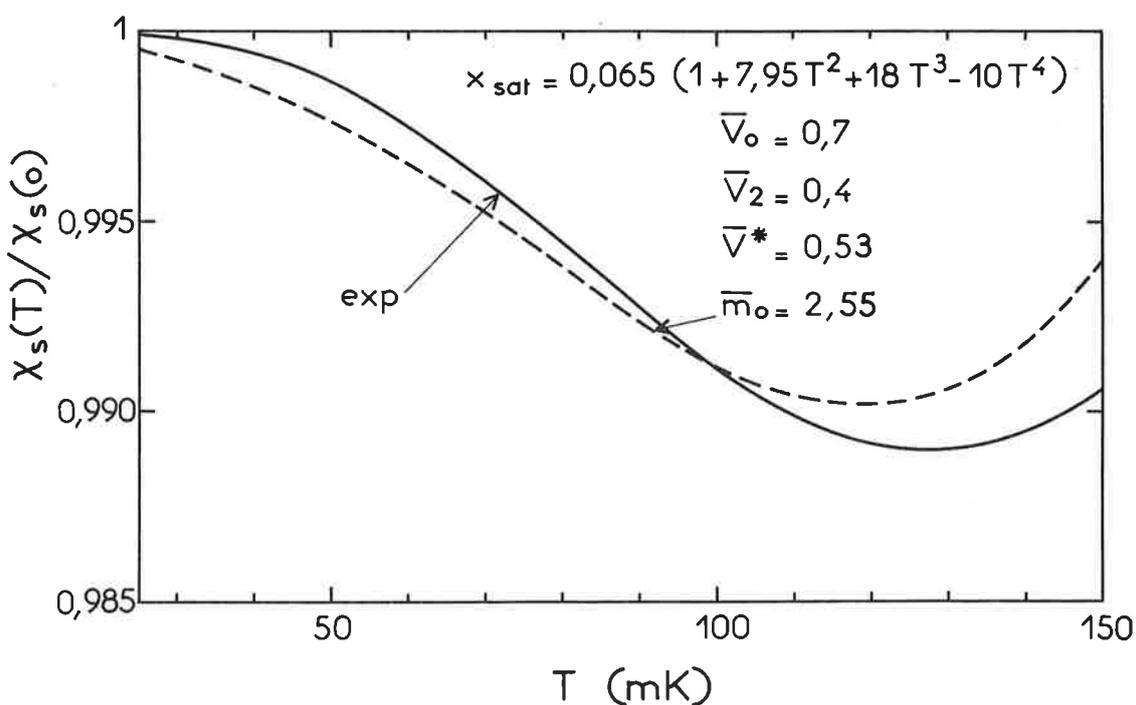


FIG. 15. – Susceptibilités relatives de la solution saturante mesurée, en trait plein, et calculée, en pointillé, avec les valeurs définitives des paramètres et de la courbe de séparation de phase.

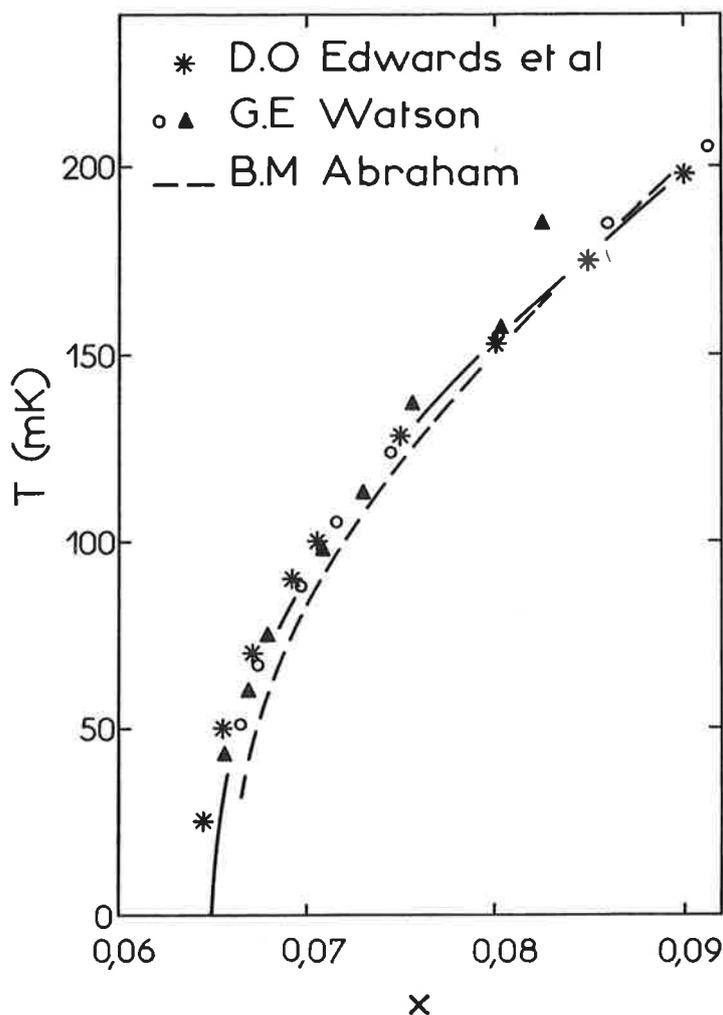


FIG. 16. — Température d'apparition de la phase riche en  $^3\text{He}$  en fonction de la concentration en  $^3\text{He}$  dans la phase diluée. Les points expérimentaux sont tirés des références [89] et [91]. La courbe en pointillé représente les résultats des mesures de B.M. Abraham et al. [90]. La courbe en trait plein correspond à la relation (VI.15).

de dégénérescence, ont été faites par W.R. Roach [52] dans le laboratoire de A.C. Anderson et J.C. Wheatley. Les résultats de ces deux ensembles de mesures sont reproduits sur la figure 2. Pour les solutions à 1,3 et 5 %, ils s'interprètent d'une manière remarquablement simple. La chaleur spécifique de ces solutions est identique, à la précision des mesures, à celle d'un gaz de Fermi idéal de même densité numérique et de masse effective

$$\frac{m^*}{m_3} = 2,38 \pm 0,04 \text{ pour } 1,3 \%,$$

$$\frac{m^*}{m_3} = 2,46 \pm 0,04 \text{ pour } 5 \%,$$

La chaleur spécifique a été calculée au chapitre IV et s'exprime par les relations (IV.27 et 28).

$$\mathcal{C}_{\Omega, \mu_4} = \mathcal{C}_F(m_{c.s}^*) - \frac{m_0^* V_2 T^2}{3} \int_0^{n_3} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_F}{\partial T^2} dn'_3 + \mathcal{C}_F^\gamma \quad (21)$$

La correction apportée par le passage de la variable  $\mu_4$  à la variable  $P$  dans l'expression de la chaleur spécifique a été étudiée par Ebner et Edwards [5]. Elle est au plus de quelques pour mille et par conséquent négligeable.

L'évaluation numérique directe des deux termes correctifs dans l'expression de  $C_{\Omega, \mu_4}$  montre que leur influence est faible (1-2 %).

L'analyse des auteurs de la référence [52] en terme d'une chaleur spécifique de Stoner est donc bien fondée théoriquement. Toutefois, la valeur de la masse effective à concentration nulle à laquelle ils aboutissent,

$$m_0^* \approx 2,34 m_3,$$

est incompatible avec la valeur de  $2,255 m_3$  que nous avons obtenue à partir des mesures de pression osmotique, de susceptibilité magnétique et des propriétés thermiques le long de la courbe de séparation de phase. La différence relative est de 4 %. Dans la zone de dégénérescence ( $T \ll T_F$ ), la chaleur spécifique varie comme  $m_{c,s}^*$ . Les valeurs calculées sont donc inférieures de 4 % aux valeurs mesurées. Il est intéressant de signaler que notre analyse numérique dont le détail se trouve dans la référence [74] donne un écart entre entropies calculée et mesurée sur la courbe de séparation de phase du même ordre et de même sens que celui que nous constatons sur la chaleur spécifique. Les mesures thermiques dévient des quantités calculées à partir de notre modèle d'une manière qui paraît donc systématique. Les déviations sont de l'ordre des erreurs expérimentales pour l'entropie au changement de phase, et nettement supérieures à l'incertitude indiquée par les auteurs des mesures calorimétriques directes [52] (1,7 %). La question se pose de savoir si ces déviations sont significatives ou, en d'autres termes, si les barres d'erreur de la référence [52] sont à prendre au pied de la lettre.

Le travail de la référence [52] repose sur deux techniques propres au laboratoire de J.C. Wheatley [126] :

- une échelle de température magnétique fondée sur la mesure de la susceptibilité électronique statique d'un sel de CMN (nitrate double de cérium et de magnésium) mis sous la forme d'un cylindre droit (hauteur et diamètre égaux).
- une méthode calorimétrique par substitution mise au point pour la détermination de la chaleur spécifique de l'hélium-3 pur.

Ces deux techniques ont été abondamment discutées dans la littérature. Commençons par l'échelle de température magnétique  $T^*$  utilisée par J.C. Wheatley avant 1973. Cette échelle est fondée sur la constatation empirique que si, pour un cylindre droit de CMN en poudre, on prend  $T^* = T$ ,  $T$  étant la température thermodynamique vraie, alors les propriétés de l'hélium-3 liquide (coefficient de self-diffusion, atténuation du son...) suivent des lois simples en fonction de la température. Par exemple, le coefficient de self-diffusion varie en  $T^{-2}$  de 40 à 3 mK. Cette règle empirique, qui semble faire abstraction à la fois du fait que le CMN a une température de Curie-Weiss finie et des corrections de champ démagnétisant, a été critiquée par certains auteurs [127, 128] et défendue par d'autres [129, 130]. Une comparaison directe avec d'autres dispositifs thermométriques [131] a permis à J.C. Wheatley de mieux étayer son échelle thermométrique et d'établir la validité de la loi  $T^* = T$  à quelques dixièmes de mK près au-dessus de 3 mK. Une telle incertitude peut avoir une incidence sur les mesures de capacité calorifique des mélanges, les points de mesure à basse température ayant un poids important pour la détermination de la pente au zéro absolu. Elle conduit à une sous-estimation de la température et une surestimation des intervalles de température : les effets combinés sont difficiles à évaluer mais peuvent être de l'ordre de 5 % sur les points les plus bas (2,75 mK).

Examinons maintenant brièvement la méthode calorimétrique de la référence [52]. La capacité calorifique déterminée expérimentalement comporte, en plus de celle de l'échantillon, celle du sel paramagnétique (CMN) servant à la réfrigération. Cette dernière est la plus importante en dessous de 5 mK et doit donc être connue avec grande

précision. Le même problème s'est posé pour la mesure de la chaleur spécifique de l'hélium-3 pur. Pour le résoudre, J.C. Wheatley a utilisé deux techniques. La première décrite à propos des mesures dans l' $^3\text{He}$  pur [132, 118] est une méthode de différence. Les capacités calorifiques de deux cellules contenant la même quantité de CMN et des quantités différentes d' $^3\text{He}$ , sont mesurées indépendamment, ce qui permet de déterminer séparément les capacités calorifiques des deux corps. La chaleur spécifique du CMN est trouvée varier en  $T^{*-2}$ . La deuxième méthode met à profit le fait que l' $^4\text{He}$  pur possède aux températures de quelques mK, une chaleur spécifique négligeable. La chaleur spécifique du CMN mesurée en présence d' $^4\text{He}$  n'est toutefois pas la même que celle déterminée en présence d' $^3\text{He}$ . En particulier, elle varie avec la température comme  $T^{*-1,7}$ . La chaleur spécifique du CMN mesurée par W. Roach en présence de mélange  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  tombe, en-dessous de 10 mK, approximativement entre les deux limites des isotopes purs, comme indiqué dans un article de J.C. Wheatley [133]. Ces effets donnent une latitude de plusieurs pour cent en-dessous de 10 mK pour effectuer des corrections systématiques sur la chaleur spécifique des mélanges. Ces effets thermiques anormaux sont en cours d'étude au CRTBT de Grenoble par B. Hébral [156].

Terminons en rappelant que les mesures récentes de chaleur spécifique de  $^3\text{He}$  pur sous pression de W.P. Halperin [123] donnent, à 27,3 B, des valeurs inférieures d'environ 7 % à celles de W.R. Abel *et al.* [132]. Nous considérons donc que l'écart de 4 % entre les valeurs de la masse effective issue directement des mesures thermiques et celle de notre analyse n'est probablement pas significatif.

### B. La vitesse du second son

La densité du fluide normal  $\rho_n$  est une quantité qui donne également accès à la connaissance de la masse effective  $m_0^*$ . Sa détermination expérimentale peut être effectuée soit directement par la méthode de disques oscillants inventée par E. Andronikasvili [124], soit par l'intermédiaire de la vitesse du second son. La première méthode a fait l'objet d'une tentative non publiée chez Henry Fairbank à l'*Université de Duke* [134] et des mesures de V.I. Sobolev et B.N. Esel'son [56] qui ne s'étendent en température que jusque vers 450 mK. Le second son dans les mélanges  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  a, par contre, donné lieu à de nombreuses études. La vitesse du second son est la quantité qui donne le plus directement la masse inertielle  $m_I$ . La détermination expérimentale de cette grandeur a été effectuée ces dernières années à l'*Université de l'Ohio* [53, 135], à *Duke* [136, 140], à *Leyde* [141, 101] et finalement à la *Bell*, d'où vient le travail le plus récent [67]. Ces mesures, que nous allons brièvement passer en revue, ne sont pas compatibles entre elles, au contraire des mesures de pression osmotique et des autres quantités thermodynamiques mais présentent des écarts allant jusqu'à 10 %. Nous allons procéder à un examen critique des conditions expérimentales. Mentionnons dès à présent que la comparaison des données expérimentales avec les valeurs du second son calculées dans le cadre du modèle étudié et avec le jeu de valeurs [14] nous permettra de trancher en faveur des mesures de D.O. Edwards *et al.* [53]. Les mesures de R.B. Kummer *et al.* [67], contemporaines du présent travail, vont dans le même sens.

Nous commençons la description des expériences par celles effectuées à l'*Université d'Ohio* [53]. Elles visent à mesurer la vitesse de propagation du 2<sup>e</sup> son et, d'une manière accessoire, son atténuation dans des solutions  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  pour des concentrations allant de 0,14 à 6,3 % à des températures comprises entre 30 mK et 0,6 K. La méthode utilisée est une mesure de temps de vol dont le principe est fondé sur l'analogie exacte entre l'onde de second son et la propagation d'une perturbation de pression osmotique au sein du mélange [102]. Les ébranlements acoustiques sont communiqués au gaz de quasi-

particules au moyen d'une membrane poreuse transparente à la composante superfluide mais dont les pores ont un diamètre inférieur à la profondeur de pénétration visqueuse de la composante normale à la pulsation  $\omega$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_n \omega}}$$

Ainsi le fluide normal suit le mouvement de la membrane poreuse alors que le superfluide reste au repos. L'onde osmotique se propage dans un tuyau d'un diamètre  $d = 1,0$  cm et d'une longueur  $L = 2,4$  cm. Elle est reçue par un capteur électrostatique identique au transducteur d'émission. L'analyse détaillée du fonctionnement de cette cellule de second son a été faite par R.A. Sherlock et D.O. Edwards [142]. Le temps de vol est défini comme séparant le temps de l'émission, d'une durée très brève, du temps d'arrivée du front de l'onde. Il s'agit donc de la mesure d'une vitesse de phase qui n'est égale à la vitesse du son que pour une onde voyageant dans un milieu infini et non dispersif. Des arguments très généraux [143] montrent que la vitesse de propagation observée dans un tuyau est supérieure à celle en milieu libre. Il en est de même en cas de dispersion de l'onde par le milieu. Ces effets sont couramment rencontrés dans les mesures acoustiques par impulsions [144]. Les corrections introduites dépendent de la longueur d'onde  $\lambda$ , de la géométrie du tuyau  $L\lambda/d^2$  et des conditions de réflexion aux parois. Des erreurs correspondant à des déphasages de  $\lambda/4$  peuvent apparaître. Les longueurs d'onde variant de 0,1 à 0,3 cm, l'imprécision sur la vitesse de propagation peut aller de 1 à 3 %. Les auteurs de la référence [53] éliminent une partie de ces incertitudes en calibrant leur jauge sonique dans de l'hélium-4 pur entre 1,1 et 1,7 K à l'aide des chiffres de vitesse de second son de Peshkov [145] dont les mesures ont été très récemment confirmées à environ 0,5 % au-dessus de 1,2 K par I. Rudnick *et al.* [146]. Pour résumer cette discussion, nous notons :

- que le fait de prendre le front d'arrivée de l'onde de second son peut conduire à une surestimation, à cause des effets de diffraction et de dispersion, de la vitesse de propagation.

- qu'une comparaison avec les mesures de Peshkov dans l'hélium pur autorise à penser que ces effets sont de l'ordre de 1 %, dans le sens d'un ralentissement de la vitesse de propagation.

- qu'en retenant le chiffre de  $\pm 1$  % cité par les auteurs de la référence [53] pour les incertitudes de marquage des temps, il vient une marge d'erreur probable de + 1 %, - 2 % pour les valeurs de la vitesse de propagation du second son pour les solutions de concentration supérieure à 0,5 %. Des erreurs de dispersion plus importantes apparaissent aux plus basses concentrations.

Donc notre examen critique confirme, tout en élargissement légèrement les barres d'erreur, le bien-fondé de l'analyse de N.R. Brubaker *et al.* [53]. Leurs mesures semblent bien exactes à 1 ou 2 % près. La valeur de  $m_0^*$  tirée de ces mesures [135]  $2,28 m_3$ , est en bon accord avec celle trouvée dans le présent travail,  $2,26 m_3$ .

Ce bon accord est toutefois remis en cause par l'étude récente de W. de Voogt [101]. Cet auteur a effectué des mesures de propagation d'impulsions de chaleur dans l'hélium-4 pur et dans des solutions d'assez grande dilution (de  $10^{-4}$  à  $10^{-2}$ ) entre 1,2 K et 60 mK. L'analyse des mesures conduit à des valeurs de la vitesse du second son, et donc de la masse inertielle, en profond désaccord avec celle de N. Brubaker *et al.* [53]. La masse inertielle est trouvée ne pas dépendre de la température ni de la concentration et valoir  $2,54 \pm 0,05 m_3$ . D'autre part, la vitesse du second son dans l'hélium-4 pur obtenue par

W. de Voogt est très significativement inférieure en dessous de 1 K, à celle donnée par V.P. Peshkov, l'écart dépassant 10 % en dessous de 0,7 K [145]. Ces anomalies nous ont poussés à effectuer un examen serré du travail de la référence [101]. Le point le plus litigieux de la méthode utilisée dans ce travail nous paraît être la définition du temps d'arrivée du signal thermique propagé au sein du liquide. L'impulsion de chaleur initiale est assez brève (10  $\mu$ s) pour bien définir le temps de départ. Les effets dispersifs créent une déformation de l'impulsion au cours de sa propagation. Le signal reçu comporte un front d'une raideur moyenne, un maximum, une décroissance plus évasée suivie parfois d'une excursion négative. Le temps d'arrivée du signal est défini par de Voogt comme correspondant au maximum. Cette définition se fonde en partie sur une étude expérimentale de la propagation d'impulsions de chaleur dans  $^4\text{He}$ -pur dans des tubes de différente géométrie effectuée par H.C. Kramers [147], d'autre part, sur une analyse hydrodynamique due à R.B. Dingle [148]. Cette analyse part de la remarque que la réponse d'un système acoustique à une impulsion en forme de pic de Dirac s'écrit, d'une manière générale, comme une intégrale de Fourier :

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\omega \left( t - \frac{x}{s_{II}(\omega)} \right) \right\} d\omega \quad (15)$$

$S(x, t)$  représente la forme de l'impulsion à la distance  $x$  de l'émetteur, au temps  $t$ . La vitesse du second son  $s_{II}(\omega)$  dépend de la fréquence par l'intermédiaire d'effets dissipatifs  $\beta_{II}$  :

$$s_{II}^2(\omega) = s_{II0}^2 + i\omega \beta_{II} \quad (16)$$

Le paramètre  $\beta_{II}$  qui intervient dans la partie imaginaire de la vitesse est relié au coefficient d'atténuation du son par :

$$\text{Im}(\omega/s_{II}) = \alpha_{II} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^2}{s_{II0}^3} \right) \beta_{II} \quad (17)$$

Un développement asymptotique de l'intégrale définissant  $S(x, t)$  conduit à la représentation suivante :

$$S \simeq \left( \frac{s_{II}^3}{2\pi x \beta_{II}} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{(t - x/s_{II})^2 s_{II}^3}{2\beta_{II} x} \right\} \quad (18)$$

La forme de l'impulsion reçue est gaussienne dans cette approximation ; le maximum à  $t = x/s_{II}$  correspond au temps d'arrivée vrai. La première correction à ce temps d'arrivée va comme  $9\beta_{II}^2/8s_{II}x$ . Cette correction se trouve être petite. La justesse de l'analyse de Voogt en est ainsi à première vue confirmée. Néanmoins, il faut observer :

1) que la forme de l'impulsion de second son à niveau du récepteur n'est en rien semblable à la gaussienne (18),

2) que l'influence des termes dissipatifs, regroupés dans (16) et (17) n'est pas prise en compte d'une manière exacte,

3) que le détail des conditions initiales de l'impulsion de chaleur joue sur la forme du signal reçu. En particulier, R. Guernsey et col. [149] ont montré que le rebond vers les températures plus froides qui suit le signal possède une explication simple.

Le problème de l'analyse de la forme de l'impulsion thermique reçue a été considéré par un certain nombre d'auteurs intéressés par la propagation de paquets de phonons dans  $^4\text{He}$  solide [150, 151] ou liquide [152]. Plusieurs mécanismes dissipatifs peuvent

intervenir dans l'amortissement du second son. La conduction thermique qui est due aux phonons et dont le coefficient est  $\kappa = 1/3 \mathcal{C}_{ph} s_I^2 \tau_R$ , domine dans l' $^4\text{He}$  liquide pur. ( $\mathcal{C}_{ph}$  est la chaleur spécifique des phonons se propageant à la vitesse  $s_I$  pendant un temps  $\tau_R$ ). La viscosité des quasi-particules  $^3\text{He}$  constitue le mécanisme prépondérant à basse température dans les mélanges [53]. Ce mécanisme peut être caractérisé par un temps de relaxation  $\tau$ . Suivant S.J. Rogers [153], l'équation qui régit la propagation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - s_{II}^2 \nabla^2 T + \frac{1}{\tau_R} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\tau(s_I^2 - s_{II}^2)}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T) = 0 \quad (19)$$

Pour trouver le régime transitoire qui suit l'envoi d'un pic d'énergie dans l'émetteur, il faut ajouter à cette équation, avant d'en prendre la transformée de Laplace, des termes de source. Ces termes mettent en jeu non seulement la puissance émise  $W(t)$  mais aussi sa dérivée  $\partial W/\partial t$ . L'existence dans  $W(t)$  de deux fronts raides de montée et de descente donne naissance à deux pics de signes opposés dans  $\partial W/\partial t$ . Nous admettrons comme plausible le résultat de la référence [151] selon lequel, lorsque la dispersion de l'onde est causée par les mécanismes intrinsèques de dissipation, la forme du signal reçu au temps  $t$  et à la distance  $x$  est représentée par l'expression suivante :

$$\delta T(x, t) = A_1 [\exp(-x_1^2) - \exp(-x_2^2)] + A_2 \int_{x_1}^{x_2} \exp(-x^2) dx$$

$$x_1 = \left(t - \frac{x}{s_{II}}\right) \left(\frac{s_{II}^3}{2\beta_{II}x}\right)^{1/2}, x_2 = \left(t - \theta - \frac{x}{s_{II}}\right) \left(\frac{s_{II}^3}{2\beta_{II}x}\right)^{1/2} \quad (20)$$

Le premier terme de (20) provient de  $\partial W/\partial t$ , le second, de  $W$ .  $\theta$  est la durée de l'émission, supposée de forme presque carrée. Les deux constantes  $A_1$  et  $A_2$  dépendent du détail des processus d'émission et de propagation. L'expression (20) est, comme on le voit, considérablement plus compliquée que la forme gaussienne (18). L'incidence de la différence entre (18) et (20) sur les résultats de l'analyse de Woogt n'a pas été déterminée et nous ne pouvons en tirer des conclusions définitives sur la référence [101].

Le travail très récent effectué à la Bell par R.B. Kummer, V. Narayanamurti et R.C. Dynes [67] permet, bien qu'aucune comparaison n'y soit faite avec celui de Woogt, de trancher en faveur de la référence [53]. R.B. Kummer *et al.* ont étudié la propagation balistique des phonons et la transition vers le régime de second son dans les mélanges dilués d' $^3\text{He}$  dans l' $^4\text{He}$  à l'aide d'émetteur à couche mince et de bolomètres supra-conducteurs ultra-rapides. Les durées d'émission des impulsions sont de l'ordre de 0,2 à 1  $\mu\text{s}$  et le temps de réponse du bolomètre récepteur inférieur à 10  $\text{ns}$ . Le signal reçu est analysé en prenant pour point de départ l'équation (19). La vitesse du second son obtenue est, au moins à tension de vapeur saturante et aux températures supérieures à 0.2 K, en bon accord avec celle de N. Brubaker [53].

En résumé, les mesures de vitesse de second son de N. Brubaker [53], confirmées par celles de R. Kummer [67], et également corroborées d'une manière indirecte par les mesures aux neutrons comme il a été expliqué au paragraphe III.1, nous paraissent pouvoir être retenues dans l'immédiat. Il importe néanmoins de savoir si une analyse numérique plus fouillée peut réduire les divergences entre ces mesures et celles de W. de Woogt [101].

**V.III. — Conclusions sur la valeur des paramètres.** — Les résultats établis au cours de ce chapitre permettent de déduire un certain nombre de conclusions.

La valeur du paramètre  $m_0^* = 2,255 m_3$ , caractérisant la limite  $m^*(x \rightarrow 0)$  de la masse effective, est en excellent accord avec les valeurs obtenues par D.O. Edwards et R.A. Sherlock [135],  $m_0^* = (2,28 \pm 0,04) m_3$ , à partir de la vitesse du second son, J. Landau *et al.* [106],  $m_0^* = (2,23 \pm 0,04) m_3$ , et E. Varoquaux [103],  $m_0^* = 2,26 m_3$ , à partir de la pression osmotique. Il n'en est pas de même si l'on considère la valeur de  $m_0^*$  déduite des mesures de chaleur spécifique de A. Anderson *et al.* [52],  $m_0^* = 2,34 m_3$ . Notons également que H. Brucker *et al.* [155] ont réanalysé à partir du modèle théorique de Disatnick et Brucker [6] les mesures de second son de N. Brubaker [53] et ont obtenu  $m_0^* = 2,19 m_3$ .

Le paramètre d'interaction à moment nul s'écrit, par l'intermédiaire des relations (III.24) et (III.27) :

$$V_0 = V_0^s - V_0^a = 2 V_0^s$$

et sa valeur est  $-1,4 \times 10^{-38} \text{ erg} \times \text{cm}^3$ . Elle est assez proche de celle qui a été déduite de l'analyse des propriétés de transport par C. Ebner et K.A. Kuenhold [154],  $V_{0_{K.E}} = -1,2 \times 10^{-38} \text{ erg} \times \text{cm}^3$ . Notre résultat est également proche de l'évaluation théorique de BBP [4],  $V_{0_{BBP}} = -1,45 \times 10^{-38} \text{ erg} \times \text{cm}^3$ , indiquant ainsi que  $V_{0_{BBP}}$  rend très bien compte des résultats expérimentaux à pression nulle. Un calcul récent a été effectué par G. Baym [43] pour prendre en considération les termes correctifs à  $V_{BBP}$  d'ordre supérieur. L'influence de ces corrections est d'au plus 10 % en comparaison du terme principal  $V_{0_{BBP}} \simeq -\alpha^2 m_4 s^2 / n_{40}$ . Dans l'état actuel de l'avancement de la théorie, l'accord que nous observons est plus que satisfaisant.

La valeur du paramètre  $V_1 = -1,0 \text{ cm}^3 \text{g}^{-1}$ , caractérisant le comportement "local" du potentiel d'interaction, est proche du résultat obtenu par Y. Disatnick et H. Brucker [6],  $V_1 = -1,15 \text{ cm}^3 \text{g}^{-1}$ , et inférieure à la valeur de  $V_1$  déterminée par E. Varoquaux [103],  $V_{1_E} = -1,5 \text{ cm}^3 \text{g}^{-1}$ . La valeur de  $V_1$ , issue de notre analyse, est très inférieure à celle que nous obtenons en "localisant" à température nulle l'amplitude de diffusion de C. Ebner et K. Kuenhold [154] :  $V_{1_{K.E}} = -4,2 \text{ cm}^3 \text{g}^{-1}$ . Cette comparaison brutale risque toutefois d'être fallacieuse, le modèle d'Ebner et Kuenhold visant à rendre compte des propriétés de transport et ne comportant pas de termes non-locaux.

La contribution au potentiel dipolaire due à l'interaction par échange de phonon a été évaluée par BBP :

$$V_{dip} = A_d \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{m_4 n_{40} q^2} \text{ où } A_d = \left[ 1 + \alpha + \frac{m_0^* - m_3}{m_4} \right]^2$$

Les valeurs de  $A_d$  théorique,  $A_d = 1,7$ , et déduite des mesures de la masse inertielle,  $A_d = 3,8 \pm 1$ , sont bien plus élevées que celle que nous obtenons,  $A_d = 2 m_4 n_{40} V_2 = 0,28$ .

Cette différence peut être imputable, en partie, au terme scalaire  $V_3$ . En effet la valeur expérimentale de  $A_d$  est déduite de la variation de la masse inertielle en fonction de la concentration. Or l'expression de cette grandeur,

$$\frac{m_I}{m_0^*} = \left[ 1 - 2 \gamma p_F^2 - m_0^* n_3 \left( V_3 + \frac{V_2}{3} \right) \right],$$

indique que les paramètres  $V_2$  et  $V_3$  interviennent de la même manière. Toutefois si le terme scalaire était entièrement responsable du désaccord observé, la valeur qu'il devrait

prendre pour compenser cet effet serait de :  $V_3 = 5,1 \text{ cm}^3 \text{g}^{-1}$ . Nous observons que cet ordre de grandeur n'est pas comparable à celui des paramètres  $V_1$  et  $V_2$  et paraît bien élevé pour être plausible : nous nous serions attendu à des contributions comparables de  $V_2$  et  $V_3$ . Une autre explication possible du désaccord observé est que le potentiel dipolaire est écranté lorsque la concentration augmente. Une tentative visant à tenir compte des effets de concentration a été réalisée récemment par H.H. Fu et C. Pethick [98]. Une représentation diagrammatique des processus responsables de la dépendance du potentiel en concentration met en évidence le rôle prépondérant joué par les effets d'écran. Ces effets sont liés au terme en  $q^2$  du potentiel. En effet si  $V$  dépendait peu de  $q^2$ ,  $V = V_0 + \epsilon q^2$  où  $\epsilon$  est un nombre petit, la transformée de Fourier dans l'espace réel d'un tel potentiel serait une fonction  $\delta(r)$ . La probabilité de trouver trois particules au même endroit étant très faible, les effets d'écran sont négligeables car ils mettent en jeu des collisions à trois particules. Que deviennent les effets d'écran si le coefficient du terme en  $q^2$  n'est plus très petit ? Pour évaluer leur influence, comparons la portée du potentiel  $a \simeq 2 \text{ \AA}$ , à la distance moyenne interparticules pour une solution de concentration  $x \simeq 6,5 \%$ ,  $\langle r \rangle \simeq 9 \text{ \AA}$ . Nous en concluons que pour des potentiels d'interaction dont la portée est de l'ordre de  $2 \text{ \AA}$ , on doit s'attendre à des effets d'écran faibles. L'analyse numérique développée au paragraphe VI.1 ne permet de tirer aucune conclusion sur ces effets de renormalisation du potentiel, car les propriétés d'équilibre y ont été considérées pour des valeurs de la concentration voisines de  $x \simeq 6,5 \%$ . Une analyse semblable, avec une telle précision, n'aurait pu être effectuée pour des valeurs de la concentration  $x \simeq 0,5 \%$  en raison du manque de données expérimentales.

Il aurait été également très intéressant de disposer d'un nombre significatif de résultats relatifs aux propriétés des solutions mesurées sous pression. Le jeu de paramètres correspondant ( $m_0^*$ ,  $V_i$ ) aurait permis de tester l'influence de la pression sur le potentiel effectif d'interaction. En particulier il est intéressant de vérifier si le bon accord que nous avons obtenu à pression nulle avec  $V_{0(BBP)}$  est toujours observé à pression élevée.

A notre avis, les expériences cruciales de chaleur spécifique devraient être refaites à pression nulle comme à pression plus élevée et les mesures de second son par impulsion de chaleur réanalysées afin de lever les doutes qui subsistent respectivement sur les valeurs de la masse effective  $m_0^*$  et des contributions non-locales du potentiel d'interaction. Comme nous l'avons noté, des mesures précises de la susceptibilité sont précieuses pour la détermination des paramètres du potentiel effectif. Etant donné que la connaissance imparfaite de la concentration constitue la limite à la précision de ces mesures, il pourrait être intéressant de les jumeler à des mesures de pression osmotique effectuées dans la même cellule sur le même mélange pour minimiser les erreurs sur  $x$ . Finalement, des expériences de disques oscillants qui permettent de déterminer la densité du fluide normal pourraient être réalisées à des températures inférieures à  $0,2 \text{ K}$  pour confirmer les résultats des mesures de second son.

En conclusion, nous avons effectué une approche systématique d'une description phénoménologique des interactions entre quasiparticules de  $^3\text{He}$  en solution. Cette approche nous a conduits à un modèle qui prend en considération toutes les formes possibles du caractère non-local du potentiel. La forme (III.7) de l'amplitude de diffusion est la plus générale à l'ordre deux dans les moments. Sa dépendance dans les vitesses se retrouve soit dans une approche de l'interaction par échange de phonon, soit par un traitement de perturbation en  $N(0)V(q=0)$  où  $N(0)$  représente la densité d'états à la surface de Fermi. Le modèle phénoménologique que nous avons choisi est général et met en évidence l'existence de deux termes non locaux distincts : le terme dipolaire et le terme scalaire. Le résultat du calcul montre que ces contributions jouent des rôles diffé-

rents : l'influence du potentiel dipolaire se manifeste à la fois sur les propriétés thermodynamiques et hydrodynamiques, tandis que celle du terme scalaire n'apparaît que dans les propriétés hydrodynamiques. Ces résultats sont vrais quels que soient les systèmes microscopiques. La simplicité de notre modèle a permis le développement d'une paramétrisation unifiée des différentes propriétés d'équilibre des solutions. Les expressions obtenues, valables à toute température, ont permis de relier l'ensemble des résultats expérimentaux entre eux à l'aide d'un petit nombre de paramètres.

### Bibliographie

- [1] Daunt (J.G.), Edwards (D.O.). – *Phys. Rev.*, 1961, 124, 680.
- [2] Landau (L.D.), Pomeranchuk (I.). – *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1948, 59, 669. Pomeranchuk (I.). – *Sov. Phys. JETP*, 1949, 19, 42.
- [3] London (F.). – *Superfluids Vol. II*, Dover, New-York, 1964 ; Taconis (K.W.), R. de Bruyn Oubter in *Prog. Low Temp. Phys.*, (Vol. 4), (ed. Gorter (C.J.)), North-Holland, Amsterdam, 1964. Ch. IV ; Khalatnikov (I.M.), Introduction to the theory of superfluidity, W.A. Benjamin, New-York, 1965 ; Wilks (J.), The properties of liquid and solid helium, Clarendon Press, Oxford, 1967, Ch. IX ; Emery (V.J.), in *Quantum Fluids*, (ed. N. Wiser), Amit (D.J.), Gordon & Breach, New-York, 1970, Ch. XV ; Wheatley (J.C.) in *Prog. low Temp Phys.* (Vol. 6), (ed. C.J. Gorter) North Holland, Amsterdam, 1970, Ch. III ; Baym (G.), in the helium liquids, (ed. J. Armitage), Farquhar (I.), Academic Press, London, 1975, Ch. IX.
- [4] Bardeen (J.), Baym (G.), Pines (D.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1966, 17, 372 ; *Phys. Rev.*, 1967, 156, 207.
- [5] Ebner (C.), Edwards (O.). – *Phys. Rep.*, 1971, 1, 77.
- [6] Disatnik (Y.), Brucker (H.). – *J. low Temp. Phys.*, 1972, 7, 501.
- [7] Ghozlan (A.C.). – *J. Phys.*, 1972, 33, 415.
- [8] Baym (G.), Pethick (C.) in the *Physics of liquid and solid helium*, (ed. K. Bennemann, J. Ketterson), Wiley, New-York (to be published).
- [9] Cet article est fondé en partie sur le travail de thèse de Doctorat d'Etat de Ghozlan (A.), Orsay, 1976.
- [10] Callen (H.B.). – *Thermodynamics*, Wiley, New-York, 1965, Ch. 5.
- [11] Khalatnikov (I.M.). – An introduction to the theory of superfluidity, Benjamin, New-York, 1965.
- [12] Ebner (C.). – Ph. D. Thesis, Illinois, 1967.
- [13] Varoquaux (E.). – C.R. du Colloque Franco-soviétique de Bakouriani (1968), Tbilissi, 1969, T. I ; C.R. Acad. Sci. (Paris) B 266, 893 (1968).
- [14] Seiden (J.). – *J. Phys.*, 1969, 30, 267.
- [15] On peut également citer le travail de Emery (V.), *J. Low Temp. Phys.*, 1970, 3, 499, dont le résultat est, dans la limite que nous considérons ici, identique à celui obtenu par Seiden (J.). Dans une critique des travaux antérieurs au sien, Emery (V.) a cru pouvoir conclure des différences que nous mettons en évidence dans (II.22) à l'existence d'inexactitudes dans les expressions de la pression osmotique obtenues dans les références [12] et [13]. Cette conclusion est erronée : les différentes constructions de la thermodynamique, à l'aide de différents jeux de variables d'état, sont équivalentes entre elles. Les identifications avec les modèles microscopiques conduit toutefois à des résultats différents pour les interactions. A cet égard, le choix de la forme de l'énergie libre effectué par Emery (V.) (son équation 3) n'est pas cohérent avec celui du jeu de variable  $(T, n, x)$ . Parmi les autres imperfections de cet article, nous relevons que le développement (6) de l'énergie d'interaction n'est pas en puissance entière de  $x$ , les termes d'échange contribuant à partir de  $x^{8/3}$ .  
Finalement, l'assertion suivant laquelle la pression osmotique n'est pas sensible aux interactions effectives entre  $^3\text{He}$  est démentie par les évaluations numériques détaillées des chapitres V et VI.
- [16] Ce point est examiné en détail au Ch. IV lors de la comparaison avec le travail de Disatnik et Brucker.
- [17] Guggenheim (E.A.). – *Mixture O.U.P.*, Oxford, 1952 ; Duclaux (J.). – *Pression osmotique*, Hermann, Paris, 1936.
- [18] Mc. Millan (W.G.), Mayer (J.E.). – *J. Chem. Phys.*, 1945, 13, 276 ; voir aussi Hill (T.L.), *Statistical Mechanics*, Mc Graw-Hill, New-York, 1956, Ch. VI.
- [19] Landau (L.D.). – *Sov. Phys. J.E.T.P.*, 1941, 5, 71.
- [20] Kirkwood (J.G.), Buff (F.B.). – *J. Chem. Phys.*, 1951, 19, 774 ; voir aussi Hill (T.L.), *loc. cit.*, p. 113 et 262.
- [21] Ceci s'applique en particulier aux solutions diluées pour lesquelles les corrélations spatiales sont connues.
- [22] Kubo (R.). – *Progress in Physics : Many-body problems*, Benjamin (W.A.), New-York, 1969.

- [23] Gorkov (L.P.), Pitaevskii (L.P.). – *Sov. Phys. JETP*, 1958, 6, 486.
- [24] Ganguly (B.N.), Griffin (A.). – *Can. J. Phys.*, 1968, 46, 1895.
- [25] Huang (K.). – *Statistical Mechanics*, J. Wiley, New-York, 1963.
- [26] Ghozlan (A.C.), Piéjus (P.), Varoquaux (E.). – *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 1969, 269 B, 344.
- [27] Husa (D.L.), Edwards (D.O.), Gaines (J.R.). – *Phys. Lett.*, 1966, 17, 372.
- [28] Landau (L.), Lifchitz (E.). – *Mécanique des Fluides*, Mir, Moscou, 1971, Ch. XVI.
- [29] Chester (G.V.). – *Phys. Rev.*, 1955, 100, 446.
- [30] Prigogine (I.), Bellemans (A.), Mathot (V.). – *The molecular theory of solutions*, North-Holland, Amsterdam, 1957.
- [31] Prigogine (I.), Bingen (R.), Bellemans (A.). – *Physics*, 1954, 20, 633.
- [32] Cummings (F.W.), Hyland (G.J.), Rowlands (G.). – *Phys. Lett.*, 1970, 31 A, 465.
- [33] London (F.). – *Loc. cit.*, p. 26.
- [34] Landau (L.), Lifchitz (E.). – *Physique Statistique*, Mir, Moscou, 1967, Ch. XII.
- [35] Scatchard (G.). – *Trans. Faraday Soc.*, 1937, 33, 160.
- [36] Baym (G.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1966, 17, 952.
- [37] Campbell (L.J.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19, 156.
- [38] Une forme d'hamiltonien d'interaction semblable à (71) a également été considérée par Emery (V.J.), *Phys. Rev.*, 1966, 148, 138 ; 1967, 161, 194.
- [39] Pines (D.), Nozières (P.). – *The theory of quantum liquids*, Benjamin (W.A.), New-York, 1966, § 4.6, voir aussi Pines (D.).
- [40] Gavoret (J.), Nozières (P.). – *Ann. Phys.*, 1964, 28, 349.
- [41] Comparer à l'équation (65) de l'article de BBP [4].
- [42] *Loc. cit.*, p. 245.
- [43] Baym (G.). – *J. low Temp. Phys.*, 1975, 18, 335.
- [44] Citons, entre autres : Nagata (T.), Soda (T.), Sawada (K.). – *Prog. Theor. Phys.*, 1967, 38, 1023 ; Tsuzuki (T.), Tsuneto (T.). – *Prog. Theor. Phys.*, 1967, 38, 745 ; Stenholm (S.), Terr Haar (D.). – *Physica*, 1968, 38, 133 ; Stenholm (S.T.). – *Physica*, 1968, 38, 608 ; Van Leeuwen (J.M.J.), Cohen (E.G.D.). – *Phys. Rev.*, 1968, 176, 385 ; Saam (W.F.). – *Ann. Phys.*, 1969, 53, 219, 239 ; Bowley (R.M.). – *J. Low T. Phys.*, 1972, 7, 185 ; 1972, 8, 259 ; 1973, 10, 481 ; Khalatnikov (I.M.). – *Sov. Phys. JETP*, 1969, 28, 1014 ; Ostgaard (E.). – *Phys. Rev.*, 1970, A1, 1048.
- [45] Mc Millan (W.L.). – *Phys. Rev.*, 1968, 175, 266 ; 1969, 182, 299.
- [46] Feenberg (E.). – *Theory of Quantum Fluids*, Academic Press, New-York, 1969, Ch. 8.
- [47] Feynman (R.P.). – *Phys. Rev.*, 1953, 91, 1291 et 1301 ; 1954, 94, 262 et in *Prog. Low. Temp. Phys. (Vol. 1)*, (ed. Gorter (C.J.)), North-Holland, Amsterdam, 1954, Ch. II. Feynman (R.P.), Cohen (M.). – *Phys. Rev.*, 1956, 102, 1189.
- [48] Woo (Chia-Wei), Tan (Hing-Tat), Massey (W.E.). – *Phys. Rev.*, 1969, 185, 287 ; 1970, A1, 519.
- [49] Cependant Massey (W.E.) et Moo Bin Yim. – *Phys. Rev.*, 1973, 8A, 2741 ont cru pouvoir en déduire que l'importance des corrections du deuxième ordre en  $n_3$  altère le résultat de BBP, en accord avec une suggestion de Eckstein (S.G.), Eckstein (Y.), Kuper (C.G.), Ron (A.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1970, 25, 97. L'argumentation de ces derniers auteurs est erronée, comme les développements du paragraphe II.4 permettent de le montrer aisément. Voir Varoquaux (E.), *Thèse Orsay*, 1971.
- [50] Graf (E.H.), Lee (D.M.), Reppy (J.D.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19, 417 ; Roberts (T.R.), Sydorik (S.G.). – *Phys. Fluids*, 1960, 3, 895 ; Brewer (D.F.), Keyston (J.R.G.). – *Phys. Lett.*, 1962, 1, 5 (1962) ; Keyston (J.R.G.), Laheurte (J.P.). – *Phys. Lett.*, 1967, 24A, 132 ; Schermer (R.I.), Passell (D.), Rorer (D.C.). – *Phys. Rev.*, 1968, 173, 277 ; Ghozlan (A.C.), Piéjus (P.), Varoquaux (E.J.A.). – Voir réf. [26], voir aussi le paragraphe V.1A.
- [51] Edwards (D.O.), Brewer (D.F.), Seligmann (P.), Skertic (M.), Yaqub (M.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1965, 15, 773.
- [52] Anderson (A.C.), Edwards (D.O.), Roach (W.R.), Sarwinski (R.E.), Wheatley (J.C.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1966, 17, 367 ; Roach (W.R.). – *Thèse*, Illinois, 1966.
- [53] Brubaker (N.R.), Edwards (D.O.), Sarwinski (R.E.), Seligmann (P.), Sherlock (R.A.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1970, 25, 715 ; *J. Low. Temp. Phys.*, 1970, 3, 619.
- [54] Sobolev (V.I.), Esel'son (B.N.). – *J.E.T.P. Lett.*, 1973, 18, 403.
- [55] Dyumin (N.E.), Esel'son (B.N.), Budavskii (E.Ya.), Serbin (I.A.). – *Sov. Phys. JETP*, 1969, 29, 406.
- [56] Sobolov (V.I.), Esel'son (B.N.). – *Sov. Phys. JETP*, 1971, 33, 132.
- [57] Surko (C.M.), Slusher (R.E.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 30, 1111.
- [58] Woerner (R.L.), Rockwell (D.A.), Greytak (T.J.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 30, 1114.
- [59] Rowe (J.M.), Price (D.L.), Ostrowski (G.E.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 31, 510.
- [60] Varma (C.M.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 45 A, 301.
- [61] Stephen (M.J.), Mittag (L.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 31, 923.
- [62] Aldrich (C.H.). – *Thèse*, Illinois, 1974.

- [63] Bagchi (A.), Ruvalds (J.). – *Phys. Rev.*, 1973, 8A, 1973.
- [64] Ruvalds (J.), Slinkman (J.), Rajagopal (A.K.), Bagchi (A.). – *Phys. Rev.*, 1977, 16 B, 2047.
- [65] Bhatt (R.N.). – (A paraître).
- [66] Hilton (P.A.), Scherm (R.), Stirling (W.G.). – *J. Low. Temp. Phys.*, 1977, 27, 851.
- [67] Kummer (R.B.), Narayanamurti (V.), Dynes (R.C.). – *Phys. Rev.*, 1977, 16B, 1046.
- [68] Bartley (D.L.), Wong (V.K.), Robinson (J.E.). – *J. Low Temp. Phys.*, 1973, 12, 71.
- [69] Ebner (C.). – *Phys. Rev.*, 1971, 3A, 1201.
- [70] Ghozlan (A.C.), Varoquaux (E.J.). – *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 1975, 280 B, 189.
- [71] Ghozlan (A.C.), Bloyet (D.), Varoquaux (E.), Vibet (C.). – *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 1975, 280 B, 259.
- [72] Woo (Chia-Wei). – *Phys. Rev.*, 1971, A3, 2141.
- [73] Emery (V.J.). – *Phys. Rev.*, 1966, 148, 138 ; 1967, 161, 194.
- [74] Ghozlan (A.). – *Thèse*, Orsay, 1977.
- [75] Landau (L.). – *Sov. Physics JETP*, 1959, 35, 70.
- [76] Saam (W.F.). – *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1969, 53, 239, 299.
- [77] Ce changement de variable a pour but de faciliter le calcul de  $\mu_3$ , qui est obtenu directement en lieu et place de  $z_3$  dans le système initial.
- [78] McDougall (J.), Stoner (E.C.). – *Phil. Trans.*, 1938, 237, 67 ; Stoner (E.C.). – *Phil. Mag.*, 1938, 25, 883. Pour les fonctions de Fermi d'ordres supérieurs, voir Beer (A.C.), Chase (M.N.), Choquart (P.F.). – *Helv. Phys. Acta*, 1955, 28, 529.  
L'intégrale incomplète de  $F_{1/2}^2(\eta)$  a été étudiée par Varoquaux (E.). – *Thèse*, Orsay, 1971.
- [79] Landau (L.D.), Lifshitz (E.). – *Physique statistique*, Mir, Moscou, 1967.
- [80] Silin (V.P.). – *Sov. Phys. JETP*, 1957, 6, 387, 985 ; 1958, 7, 486.
- [81] Wilson (A.H.). – *Theory of metals*, C.U.P., Cambridge, 1965.
- [82] Ghozlan (A.). – *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle*, Orsay, 1970.
- [83] Ces calculs figurent dans la *thèse* de Ghozlan (A.), Orsay, 1977.
- [84] Yaniv (A.). – *J. Low Temp. Phys.*, 1973, 13, 105.
- [85] Les expressions de  $F^0s$  et  $n_4$  sont données dans la *thèse* de Ghozlan (A.) ainsi qu'une comparaison détaillée avec les travaux de Disatnik et Brucker et d'Ebner et Edwards.
- [86] Kerr (E.C.), Taylor (R.D.). – *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1964, 26, 292.
- [87] Abraham (B.M.), Brandt (O.G.), Eckstein (Y.). – *Proc. of the 12<sup>th</sup> low temperature Physics Conference* (Kyoto, 1970), p. 161.
- [88] Boghosian (C.), Meyer (H.). – *Phys. Lett.*, 1967, 25A, 352.
- [89] Ifft (E.M.), Edwards (D.O.), Sarwinski (R.E.), Skertic (M.M.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19, 831. Edwards (D.O.), Ifft (E.M.), Sarwinski (R.E.). – *Phys. Rev.*, 1969, 172, 380.
- [90] Abraham (B.M.), Brandt (O.G.), Eckstein (Y.), Munarin (J.), Baym (G.). – *Phys. Rev.*, 1969, 188, 309.
- [91] Watson (G.E.). – *Thèse*, (Cornell 1969). Watson (G.E.), Reppy (J.D.), Richardson (R.C.). – *Phys. Rev.*, 1969, 188, 384.
- [92] Peshkov (V.P.). – *Sov. Phys. JETP*, 1958, 6, 645. Zinov'eva (K.N.), Peshkov (V.P.). – *Sov. Phys. JETP*, 1958, 5, 1025 ; 1960, 10, 22.
- [93] Schermer (R.I.) et al. – Réf. [50].
- [94] Roberts (T.R.), Sydoriak (S.G.). – *Voir réf. [50]*.
- [95] Kerr (E.C.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1964, 12, 185.
- [96] De Bruyn Ouboter (R.), Taconis (K.W.), Le Pair (C.), Beenakker (J.J.M.). – *Physica*, 1960, 26, 859.
- [97] Baym (G.), Ebner (C.). – *Phys. Rev.*, 1968, 170, 346 ; Baym (G.), Saam (W.F.). – *Phys. Rev.*, 1968, 171, 172 ; Baym (G.), Ebner (C.), Saam (W.F.). – *Phys. Rev.*, 1968, 173, 306.
- [98] Fu (H.H.), Pethick (C.J.). – *Phys. Rev.*, 1976, B14, 3837.
- [99] Abraham (B.M.), Eckstein (Y.), Ketterson (J.B.), Kuchnir (M.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1968, 20, 251.
- [100] Baym (G.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 18, 71.
- [101] De Voogt (W.J.P.), Kramers (H.C.). – *Physica*, 1976, 84B, 328 ; De Voogt (W.J.P.), De Haas (J.B.M.), Wiebes (J.), Kramers (H.C.). – *Physica*, 1976, 84B, 315 ; De Voogt (W.J.P.). – *Thèse*, Leyde, 1976.
- [102] Ghozlan (A.), Varoquaux (E.). – *Phys. Lett.*, 1969, 30A, 426.
- [103] Varoquaux (E.). – *Thèse*, Orsay, 1971.
- [104] London (H.), Phillips (D.), C.R. Commission 1. – *Institut International du Froid*, (Tokyo, 1970), p. 95.
- [105] Sudraud (M.), Varoquaux (E.). – *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 1974, B278, 921 ; 1977, B284, 551 ; *Phys. Lett.*, 1976, 59A, 287 ; 1977, 62A, 416 et à paraître dans *Physica B*.
- [106] Landau (J.), Tough (J.T.), Brubaker (N.R.), Edwards (D.O.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1969, 23, 283 ; *Phys. Rev.*, 1970, 2A, 2472.
- [107] Landau (J.), Tough (J.T.), Brubaker (N.R.), Edwards (D.O.). – *Rev. Sci. Inst.*, 1970, 41, 444.
- [108] Wilson (M.F.), Tough (J.T.). – *Phys. Rev.*, 1970, 1A, 483.

- [109] Landau (J.), Rosenbaum (R.). – *J. Low Temp. Phys.*, 1973, 11, 483.
- [110] Seligman (P.), Edwards (D.O.), Sarminski (R.E.), Tough (J.T.). – *Phys. Rev.*, 1969, 181, 415.
- [111] Ahonen (A.I.), Paalanen (M.A.), Richardson (R.C.), Takano (Y.). – *J. Low Temp. Phys.*, 1976, 25, 733.
- [112] Ghozlan (A.C.), Avenel (J.), Bloyet (D.), Varoquaux (E.). – *C.R. Acad. Sc. (Paris)*, 1972, 275B, 403.
- [113] Ghozlan (A.C.), Bloyet (D.), Varoquaux (E.). – *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, 1972, 275B, 375.
- [114] London (H.), Phillips (D.), Thomas (G.P.) in Proc. LT XI (ed. Allen (J.F.), Finlayson (D.M.), McCall (D.M.), St Andrews, 1969, p. 649.
- [115] Van de Klundert (L.J.M.), Bos (M.R.E.), Van der Meij (J.A.M.), Steffens (H.A.). – *A paraître*. La comparaison effectuée dans ce travail (voir la figure 2) utilise la formule (V.20) au-delà de son domaine de validité, limité à environ 150 mK.
- [116] Bloyet (D.), Ghozlan (A.), Piéjus (P.), Varoquaux (E.). – *Low Temp. Phys.* (LT XIII, ed. Timmerhaus (F.D.), O'Sullivan (W.J.), Hammel (E.F.). – *Pergamon Press*, New-York, 1974, p. 503 ; Avenel (O.), Bloyet (D.), Piéjus (P.), Varoquaux (E.), Vibet (C.). – *Trans. IEEC*, 1976, IM.25, 352.
- [117] Gladun (A.), Peshkov (V.P.). – *Sov. Phys. JETP*, 1972, 35, 965.
- [118] Mota (A.C.), Platzeck (R.P.), Rapp (R.), Wheatley (J.C.). – *Phys. Rev.*, 1969, 177, 266.
- [119] Anderson (A.C.), Reese (W.), Wheatley (J.C.). – *Phys. Rev.*, 1963, 130, 495.
- [120] Béal-Monod (M.T.), Ma (S.K.), Fredkin (D.R.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1968, 20, 929.
- [121] Anderson (P.W.), Brinkman (W.F.). – *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 30, 1108.
- [122] Ramm (H.), Pedroni (P.), Thompson (J.R.), Meyer (H.). – *J. Low Temp. Phys.*, 1970, 2, 539.
- [123] Halperin (W.P.), Archie (C.N.), Rasmussen (F.B.), Alvesalo (T.A.), Richardson (R.C.). – *Phys. Rev.*, 1976, B13, 2124.
- [124] Wilks (J.). – *The properties of Liquid and Solid Helium*, Oxford, 1967.
- [125] Acton (F.S.). – *Numerical Methods that work*, Harper, 1970.
- [126] Abel (W.R.), Anderson (A.C.), Black (W.C.), Wheatley (J.C.). – *Physics*, 1965, 1, 337.
- [127] Abraham (B.M.), Eckstein (Y.). – *Phys. Rev. Letters*, 1968, 20, 649.
- [128] Phillips (N.F.), Thorp (T.L.), Triplett (B.B.). – *Phys. Lett.*, 1973, 43A, 285.
- [129] Anderson (A.C.). – *Phys. Rev. Letters*, 1968, 20, 1474.
- [130] Mess (K.W.), Lubbers (J.), Niesen (L.), Huishamp (W.J.). – *Physica*, 1969, 41, 260.
- [131] Webb (R.A.), Giffard (R.P.), Wheatley (J.C.). – *Low Temp. LT 13*, Plenum Press, New-York, 1974, 517.
- [132] Abel (W.R.), Anderson (A.C.), Black (W.C.), Wheatley (J.C.). – *Phys. Rev.*, 1966, 147, 111.
- [133] Wheatley (J.C.). – *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 1966, A6, 210, 15.
- [134] *Communication privée à Varoquaux (E.)*.
- [135] Sherlock (R.A.), Edwards (D.O.). – *Phys. Rev.*, 1973, A8, 2744.
- [136] Lynton (E.A.), Fairbank (H.A.). – *Phys. Rev.*, 1950, 80, 1043.
- [137] King (J.C.), Fairbank (H.A.). – *Phys. Rev.*, 1954, 93, 21.
- [138] Elliot (S.D.), Fairbank (H.A.). – *Low Temperature Physics and Chemistry*, Dillinger (J.R.) Ed., Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1958, 180.
- [139] McClintock (P.V.E.), Mueller (K.H.), Guyer (R.A.), Fairbank (H.A.). – *Proc. of the Seventh International Conf. on Low T. Phys.*, (Allen (J.), Finlayson (D.), McCall (D.) Eds), St-Andrews, Scotland, 1968, 379.
- [140] Sandiford (D.J.), Fairbank (H.A.). – *Phys. Rev.*, 1967, 162, 192.
- [141] Niels-Hakkenberg (C.G.), Meermans (L.), Kramers (H.C.). – *Proc. of the Eight International Conf. on Low Temperature Phys.*, Davies (R.O.) Ed. (London, 1962), 45.
- [142] Sherlock (R.A.), Edwards (D.O.). – *Rev. Sci. Inst.*, 1970, 41, 1603.
- [143] Brillouin (L.). – *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, New-York, 1960, p. 142.
- [144] Beyer (R.T.), Letcher (S.V.). – *Physical Ultrasonics Academic Press*, New-York 1969 p. 85.
- [145] Peshkov (V.P.). – *Sov Phys., JETP*, 1960, 11, 580. Peshkov (V.P.) *J. Phys. (USSR)* 1946, 10, 389. (Traduction dans Hélium 4, Z.M. Galasiewicz, Pergamon Press, Oxford, 1971, p. 166).
- [146] Heiserman (J.), Hulin (J.P.), Maynard (J.), Rudnicjk (I.). – *Phys. Rev.*, 1976, B 14, 3862.
- [147] Kramers (H.C.), van Peski-Tinbergen (T.), Wiebes (J.), van den Burg (F.A.W.), Gorter (C.J.). – *Physica*, 1954, 20, 743.
- [148] Dingle (R.B.). – *Physica*, 1952, 14, 841.
- [149] Guernsey (R.W.), Luszczynski (K.), Mitchell (W.C.). – *Cryogenics* 1967, 7, 110. Guernsey (R.W.), Luszczynsky (K.). *phys. Rev.* 1971, 3A, 1052.
- [150] Ackerman (C.C.), Guyer (R.A.). – *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1968, 50, 128.
- [151] Trefny (J.U.), Guo (C.J.), Fox (J.N.). – *J. Low Temp. Phys.* 1977, 29, 533.
- [152] Worthington (T.), Yan (J.), Trefny (J.U.). – *J. Low Temp. Phys.* 1976, 22, 293.
- [153] Rogers (S.J.). – *Phys. Rev.* 1971, B3, 1440.
- [154] Brucker (H.), Disatnik (Y.), Meyuhas (R.). – *J. Low Temp. Phys.* 1976, 24, 193.
- [155] Kuenhold (K.), Ebner (C.). – *Phys. Rev.* 1974, A9, 2724.

[156] Hébral (B.). – *Thèse*, Grenoble, 1978.

[157] Il nous a été signalé par D.O. Edwards que la forme dipolaire (III.8) que nous avons retenue dans l'amplitude de diffusion,

$$(\vec{p} \cdot \vec{q}) (\vec{p}' \cdot \vec{q}) / q^2$$

n'est pas entièrement satisfaisante si l'on se place sur le plan de la signification de cette quantité en théorie quantique des collisions. La difficulté provient de ce qu'elle n'est pas convenablement symétrisée. Il convient de considérer simultanément le processus de diffusion  $\vec{p}, \vec{p}' \rightarrow \vec{p} - \vec{q}, \vec{p}' + \vec{q}$  et le processus inverse  $\vec{p} - \vec{q}, \vec{p}' + \vec{q} \rightarrow \vec{p}, \vec{p}'$ . Le terme dipolaire qui correspond à un hamiltonien de départ hermitien s'écrit donc :

$$\frac{\left[ \left( \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{q} \right) \cdot \vec{q} \right] \left[ \left( \vec{p}' + \frac{1}{2} \vec{q} \right) \cdot \vec{q} \right]}{q^2}$$

Cette remarque ne s'applique pas à l'amplitude de diffusion complète (III.7) qui est symétrique par rapport au renversement du temps. On voit d'ailleurs, en développant les deux expressions ci-dessus, qu'elles diffèrent par un terme en  $q^2$  et un terme en  $(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{q}$ . Par conservation de l'énergie au premier ordre, on a l'égalité  $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{q}$ . Les deux termes en question se regroupent avec la contribution en  $q^2$  incluse dans (III.7).

\*

## Appendice

(liste des principaux symboles).

$a$	Longueur de collision (II.50, 51, 52).
$b$	Coefficient de couplage entre premier et second sons (IV. 58, 59)
$c$	Concentration massique en $^3\text{He}$ (IV.57) $c = m_3 N_3 / (m_3 N_3 + m_4 N_4)$
$c$	Capacité calorifique par unité de volume $F$ – d'un gaz de Fermi idéal
	$c_F = k_B n_3 \left[ \frac{5}{2} \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{9}{2} \frac{F_{1/2}}{F - 1/2} \right]$
$c_{\mu 4}$	à potentiel chimique de $^4\text{He}$ constant (IV.27)
$c_c$	Constante de Curie (V.18)
$E$	Energie interne de la solution
	$E = TS - P\Omega + \mu_4 N_4 + \mu_{\uparrow} N_{\uparrow} + \mu_{\downarrow} N_{\downarrow}$
$\varepsilon$	Energie par unité de volume
	$\varepsilon = E/\Omega$
	$\varepsilon_F$ – d'un gaz de Fermi idéal
	$\varepsilon_F = k_B T n_3 F_{3/2}/F_{1/2}$
	$\varepsilon^{\text{os}}$ – énergie osmotique, fonction de $\mathfrak{F}$ , $n_3$ , $\mu_4$
	$\mathfrak{F}^{\text{os}} = \mathfrak{F}^{\text{os}} + T$
	$\varepsilon_{40}^{\text{os}}$ – définie par (IV-7)
$e_{30}$	Energie de liaison d'un atome d' $^3\text{He}$ isolé dans un bain d' $^4\text{He}$ pur (à $P = 0$ , environ 2,8 K par rapport au vide) (II.57, III.1).
$F$	Energie libre de Helmholtz (II.1)
$\mathfrak{F}$	Energie libre par unité de volume (II.3)
	$\mathfrak{F}^{\text{os}}$ – osmotique (II.15)
$F_l^{S,a}$	Paramètres de Landau
	$F_1^S$ – de chaleur spécifique (IV.30)
	$F_0^a$ – de susceptibilité magnétique (IV.45)
$f_{p\sigma, p'\sigma'}$	
$f^{\uparrow\uparrow}, f^{\downarrow\downarrow}, f^{\uparrow\downarrow}$	Paramètres du développement de Landau de l'énergie (III.22)
$f^{S,a}$	
$F_k(\eta)$	Fonctions de Fermi

$$F_k(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{t^k dt}{e^{t-\eta} + 1}$$

$g_{\alpha\beta}(r)$	Fonctions de distributions radiales (II.30) pour une solution contenant $N_\alpha$ particules d'espèce $\alpha$ , aux sites $\vec{r}_{\alpha}$ et $N_\beta$ particules d'espèces $\beta$ aux sites $\vec{r}_{\beta}$
	$g_{\alpha\beta}(r_{1\alpha}, r_{1\beta}) = \frac{1}{n_\alpha n_\beta} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \delta(r_{\alpha1} - r_{\alpha}) \delta(r_\beta - r_{\beta}) \right\rangle$
$H$	Champ magnétique
$\hbar$	Constante de Planck ( $1,0545 \times 10^{-27}$ erg.s.)
$\mathcal{H}$	Hamiltonien (II.71)
$k_B$	Constante de Boltzmann ( $1,3805 \times 10^{-16}$ erg K $^{-1}$ )
$k_F$	Vecteur d'onde de Fermi. Pour des fermions de densité totale $n_3$ , de spin 1/2
	$k_F = (3\pi^2 n_3)^{1/3}$
$L_{30}$	Chaleur latente de ${}^3\text{He}$ (V.16)
$M$	Moment magnétique (IV.36)
$m_4$	Masse d'un atome d' ${}^4\text{He}$ ( $6,677 \times 10^{-24}$ g)
$m_3$	Masse d'un atome d' ${}^3\text{He}$ ( $5,008 \times 10^{-24}$ g)
$m^*$	Masse effective des quasi-particules d' ${}^3\text{He}$ en solution
	$m_0^*$ - à concentration évanescence (III.1) $A P = 0$ , $m_0^* = 2,255 m_3$
	$m_{cs}^*$ - masse effective "chaleur spécifique" (IV.19)
	$m_L$ - masse effective locale (IV.11)
$m_I$	Masse inertielle, reliée à la densité du fluide normal :
	$m_I = n_3 / \rho_n$
$m_c$	Masse cristalline (IV.30)
$N$	Nombre total de particules
	$N_{\alpha,\beta,4,3,\uparrow,\downarrow}$ - d'espèces $\alpha,\beta$ , d' ${}^4\text{He}$ , d' ${}^3\text{He}$ , de quasiparticules de spin $\uparrow,\downarrow$ ,
$n$	densité numérique totale de particules
	$n_{\alpha,\beta,4,3,\uparrow,\downarrow}$ - d'espèces $\alpha,\beta$ , d' ${}^4\text{He}$ , d' ${}^3\text{He}$ , de quasiparticules de spin $\uparrow,\downarrow$
	$n_{40}$ - d' ${}^4\text{He}$ pur, (à $P = T = 0$ , $0,0218 \text{ \AA}^{-3}$ ).
	$n_{p\sigma}$ - de quasi-particules dans l'état quantique $p,\sigma$ .
$P$	Pression hydrostatique
$P_F$	Pression fontaine (dans ${}^4\text{He}$ pur)
$P_0$	Pression fictive définie par (IV.7)
$\vec{P}$	Moment du centre de masse de deux quasi-particules entrant en collisions (III.12)
$P_\ell(\cos \theta)$	Polynôme de légende d'ordre $\ell$
$p, p'$	Moment cinétique
$p_F$	Moment de Fermi $p_F = \hbar k_F$
$q$	Moment échangé lors d'une collision
$Q$	Chaleur latente de dissolution (V.24)
$S$	Entropie
	$S_{3d}$ , entropie d'une mole d' ${}^3\text{He}$ en solution diluée (V.41)
	$S_{3c}$ , entropie d'une mole d' ${}^3\text{He}$ en solution concentrée
$S_{44}, S_{33}, S_{34}$	Facteurs de structure de la solution
	Entropie par unité de volume
$s$	Vitesse du son (premier son quand la confusion n'est pas possible)
	$s_{40}$ - de l' ${}^4\text{He}$ pur
	$s_I$ - du premier son
	$s_{II}$ - du second son (IV.57)
$T$	Température
$T_F$	Température de Fermi
$t_{\sigma\sigma'}(p, p', q)$	Amplitude de diffusion
$t_0, t_1, t_2, t_3$	Paramètres de l'amplitude de diffusion (III.27)
$V(q)$	Potentiel effectif d'interaction binaire
	$V_i^{s,a}$ - paramètres du potentiel effectif d'interaction binaire, symétrique ou anti-symétrique de spin.
$\bar{V}_0, \bar{V}^*, \bar{V}_2$	Paramètres utilisés dans l'analyse numérique, définis par VI, 1, 2, 3
$V_{\text{dip}}$	Potentiel d'interaction dipolaire II.82 et II.83.
$V_{\text{comp}}$	Potentiel d'interaction de déformation II.73.
$V_{\text{BBP}}$	Potentiel effectif d'interaction de BBP II.88
$w$	Probabilité (II.57)

$x$	Concentration molaire en $^3\text{He}$ dans la phase diluée $x = N_3/(N_3 + N_4)$ $x_\uparrow, x_\downarrow$ - d' $^3\text{He}$ $\uparrow, \downarrow$ $x_s$ - saturante en $^3\text{He}$ $x_0$ - saturante en $^3\text{He}$ à $T = 0$ $x_d$ - dans la phase diluée quand la confusion est possible $x_c$ - dans la phase concentrée
$z$	Fonction de partition
$z_3, z_\uparrow, z_\downarrow$	Potentiels chimiques des quasiparticules constituées par la substitution d'un atome d' $^4\text{He}$ par un atome d' $^3\text{He}$ , (II.3)
$\alpha$	Paramètre de BBP (II.12) $\alpha_0$ - à concentration nulle - $\alpha_0(T = P = 0) = 0,290$
$\beta$	$1/k_B T$
$\beta_{ik}$	Coefficients du développement de $S$ (II.58)
$ \beta $	Déterminant de la nature d'éléments $\beta_{ik}$
$ \beta_{ik} $	Cofacteur de l'élément $\beta_{ik}$
$\gamma$	Coefficient de déviation par rapport au spectre parabolique (III.1)
$\gamma_{\alpha\beta}$	Fonctions de corrélations réduites (II.31)
$ \gamma $	Déterminant de la matrice d'éléments $\gamma_{\alpha\beta}$
$ \gamma_{\alpha\beta} $	Cofacteur de l'élément $\gamma_{\alpha\beta}$
$\gamma_t$	Fonction de corrélation pour la densité numérique totale $n$
$\gamma_{44}$	Pour l' $^4\text{He}$ pur (II.36)
$\gamma_\uparrow$	Pour $n, n_\uparrow$
$\gamma_{\uparrow\uparrow}$	Pour $n_\uparrow, n_\uparrow$
$\gamma_{\uparrow\downarrow}$	Pour $n_\uparrow, n_\downarrow$
$\gamma', \gamma'', \gamma_F$	Notations simplifiées (II.37)
$\delta_{\alpha\beta}$	Symbole de Kronecker
$\epsilon(p)$	Energie d'une quasi particule de moment $p$ (III.1)
$\eta$	$\mu_F/k_B T$
$\theta$	relié à $\gamma$ : $(k_B\theta)^{-1} = -20 m_0^* \gamma/3$
$\kappa$	Compressibilité (II.10) $\kappa_{40}$ -de l' $^4\text{He}$ pur (II.11) $(1,212 \times 10^{-8} \text{ barye}^{-1} \text{ à } T \text{ et } P = 0)$
$\lambda$	Dilatation thermique
$\mu$	Potentiel chimique $\mu_4$ - du composant $^4\text{He}$ (II.4) $\mu_3, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ du composant $^3\text{He}$ , $^3\text{He}_\uparrow, ^3\text{He}_\downarrow$ $\mu_{\alpha, \beta}$ - du composant $\alpha, \beta$ $\mu_F$ - du gaz de Fermi idéal de spin 1/2. Au zéro absolu : $\mu_F = \hbar^2 (3\pi^2 n_3)^{2/3} / 2m_0^*$ $\mu_{3c}, \mu_{3d}$ - de $^3\text{He}$ en solution concentrée de $^3\text{He}$ , diluée en $^3\text{He}$ $\mu_{4c}, \mu_{4d}$ - de $^4\text{He}$ solution concentrée en $^3\text{He}$ , diluée en $^3\text{He}$
$\xi$	$\xi = n_3/n_{40} = x/(1 + \alpha x)$
$\Pi$	Pression osmotique de l' $^3\text{He}$ en solution dans $^4\text{He}$ $\Pi_s$ - pression osmotique des solutions saturantes
$\pi$	Nombre 3,1416
$\rho$	Densité en $\text{g/cm}^3$ $\rho_n$ - de la composante normale $\rho_s$ - de la composante superfluide $\rho^*$ - intervient dans la formule du second son (IV.57)
$\rho_{4q}, \rho_{3q}$	opérateurs fluctuations de densité (II.71)
$\sigma$	indice de spin
$\tau$	temps de relaxation $\tau_R$ - associé aux mécanismes résistifs
$\Phi(\vec{q}, \omega)$	fonction de réponse densité-vitesse (II.79)
$\chi$	susceptibilité magnétique (II.45) $\chi_F$ - du gaz de Fermi idéal (IV.43) $\chi_s$ - de la solution saturée
$\chi(q, \omega)$	fonction de réponse vitesse-vitesse (II.79)
$\psi(\vec{q}, \omega)$	fonction de réponse vitesse-vitesse (II.79)
$\Omega$	volume $\Omega_M$ - volume molaire (V.I) $\Omega_{40}$ - volume molaire de l' $^4\text{He}$ pur $(27,58 \text{ cm}^3/\text{mole} \text{ à } T = P = 0)$

- $\Omega_{30}$  – volume molaire de l' $^3\text{He}$  pur (36,87 cm<sup>3</sup>/mole à  $T = P = 0$ )  
 $\Omega_{4d}$  – volume d'une mole d' $^4\text{He}$  en solution
- $\omega$  volume par atome  
 $\omega_{40}$  – de l' $^4\text{He}$  pur  
 $\omega_{4d,c}$  – de l' $^4\text{He}$  en solution diluée en  $^3\text{He}$ , concentrée en  $^3\text{He}$  (V.43)  
 $\omega_{3d,c}$  – de l' $^3\text{He}$  en solution diluée en  $^3\text{He}$ , concentrée en  $^3\text{He}$  (V.43)  
 $\omega_{\uparrow,\downarrow}$  – de l' $^3\text{He}$   $\uparrow,\downarrow$   
 $\omega_{\alpha}$  – du composant  $\alpha$  (II.54)

*(Manuscrit reçu en juin 1978)*

