УДК 517.929.4
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.9

Хусаінов Д.Я., д.ф.-м.н., проф.,
Шакотько Т.І., асистент

ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ В НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua
trachuk_85@ukr.net

D.Ya. Khusainov, PhD., Prof.,
T.I.Shakotko., assistant

STABILITY ESTIMATES IN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A SPECIAL KIND

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkovaav, 4d,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua,
trachuk_85@ukr.net

Проблемами теорії стійкості і, в частковому, використанню для цього другого методу Ляпунова, присвячено достатньо багато рабіт. Із основних можна відмітити наступні [1-7]. Основну увагу в цих роботах приділяється отриманню умов стій кості. В той же час при розв'язуванні ппрактичних задач важливим є отримання кількістних характеристик збіжності розв'язки до положення стійкості. В даній работі розглядаються ннелінійні скалярні диференціальні рівняння з нелінійністю спеціального виду (слабо нелінійні рівнянняя). Такого типу диференціальні рівняння зустрічаються при дослідження процесів в нейродинаміці [8,9]. В даній работі отриманні умови стійкості стаціонарного розв'язку скалярних рівнянь такого типу. А також знайдені характеристики збіжності процеса. Показано, що розв'язок задач стійкості тісно пов'язані з задачами оптимізації [10-12].

Quite a lot of works have been devoted to problems of stability theory and, in particular, to the use of the second Lyapunov method for this. The main ones are the following [1-7]. The main attention in these works is paid to obtaining stability conditions. At the same time, when solving practical problems, it is important to obtain quantitative characteristics of the convergence of solutions to an equilibrium position. In this paper, we consider nonlinear scalar differential equations with nonlinearity of a special form (weakly nonlinear equations). Differential equations of this type are encountered in the study of processes in neurodynamics [8,9]. In this paper, we obtain stability conditions for a stationary solution of scalar equations of this type. And also the characteristics of the convergence of the process are calculated. It is shown that the solution of stability problems is closely related to optimization problems [10-12]. Key words: mathematical model, stability, Lyapunov's second method, convergence, quadratic form.

Статтю представила д.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

1. Квадратична функція Ляпунова. Стійкість.

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння виду

$$\dot{x} = -ax + bF(x), \ a > 0. \tag{1.1}$$

Функція $F(x)$ неперервна і задовольняє умовам "**лінійного" обмеження**

$$|F(x)| \le K|x|. \tag{1.2}$$

Дослідження стійкості нульового положення рівноваги можна проводити за допомогою квадратичної функції Ляпунова

$$V(x) = hx^2, \ h > 0.$$

Повна похідна функції Ляпунова в силу (1.1) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = \\ = -2hax^2 + 2hxbF(x) \le 2h(-a + |b|K)x^2.$$

І, при виконанні умов

$$a - |b|K > 0,$$

повна похідна функції Ляпунова в силу рівняня (1.1) буде від'ємно визначеною і нульовий розв'язок глобально асимптотично стійким.

2.Оцінки збіжності. Нехай повна похідна функції Ляпунова від'ємно визначена. Тоді для неї має місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x) \le -2h(a-|b|K)x^2 = -2(a-|b|K)V(x).$$

Звідси отримуємо диференціальну нерівність

$$\frac{dV(x(t))}{V(x(t))} \le -2(a-|b|K)dt .$$

Проінтегруємо її і отримаємо

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))e^{-2(a-|b|K)(t-t_0)}.$$

Звідси випливає експоненційна оцінка збіжності розв'язків рівняння (1.1)

$$|x(t)| \le |x(t_0)|e^{-(a-|b|K)(t-t_0)}.$$

3. Функція Ляпунова типу Лур'є-Постнікова.

Нехай функція $F(x)$ задовольняє так званим **«умовам сектора»**

$$0 < F(x) < Lx \text{, при } x > 0,$$

$$Lx < F(x) < 0 \text{, при } x < 0,\ F(0) = 0, \quad (3.1)$$

Такими функціями можуть бути, наприклад,

$$F(x) = \frac{1-e^{-\nu x}}{1+e^{-\nu x_1}},\ F(x) = arctgx .$$

Умови (3.1) можно записати в більш компактному вигляді однієї нерівності

$$[Lx - F(x)]F(x) > 0, \quad (3.2)$$

В цьому випадку функцію Ляпунова можна брати у вигляді типу Лур'є-Постнікова.

$$V(x) = hx^2 + \gamma\int_0^x F(s)ds,\ \gamma > 0. \quad (3.3)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3.1. Нехай існують параметри $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, при яких виконуються нерівності

$$2ha + (k - \gamma b) > 0,$$

$$2ha + (k - \gamma b) > \left(\tfrac{1}{2}\gamma a - hb - \tfrac{1}{2}kL\right)^2 \quad (3.4)$$

Тоді нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (1.1) буде асимптотично стійким.

Доведення. Неважко помітити, що функція $V(x)$ задовольняє двухстороннім нерівностям

$$hx^2 \le V(x) \le \left(h + \frac{1}{2}\gamma L\right)x^2, \quad (3.5)$$

тобто є додатньо визначеною функцією. Обрахуємо її повну похідну в силу (1.1). Отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [2hx(t) + \gamma F(x(t))]\dot{x}(t) =$$

$$[2hx(t) + \gamma F(x(t))] \times [-ax(t) + bF(x(t))] =$$

$$= -2hax^2(t) - \gamma aF(x(t))x(t) + 2hx(t)bF(x(t))$$

$$+ \gamma bF^2(x(t)) = -(x(t), F(x(t))) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримали квадратичну форму

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -z^T(t)C_1 z(t),\ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma - hb & -\gamma b \end{bmatrix}.$$

Для симетричної матриці

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

умовою додатньо визначеною є невід'ємність її власних чисел. Оскільки

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2),$$

$$\text{то } \lambda_{1,2}(C_1) = \tfrac{1}{2}[(c_{11} + c_{22}) \pm \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}].$$

І умови додатньо визначеності мають вигляд

$$c_{11} + c_{22} > 0,\ c_{11}c_{22} > c_{12}^2. \quad (3.6)$$

Для симетричної матриці

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma - hb & -\gamma b \end{bmatrix}$$

вони мають вигляд

$$2ha - \gamma b > 0,\ -2ha\gamma b > (\tfrac{1}{2}\gamma a - hb)^2.$$

Другу умову можна переписати у вигляді

$$(\gamma a + 2hb)^2 < 0$$

і вона не виконується. Таким чином, матриця C_1 не може бути додатньо визначеною.

Щоб зробити її додатньо визначеною, використаємо властивості (3.1) нелінійної функції $F(x)$ і представим повну похідну функції Ляпунова у вигляді

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =$$

$$= -\left(x(t), F(x(t))\right)\begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix} *$$
$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} +$$
$$+ k\left[Lx(t) - F(x(t))\right]F(x(t)) -$$
$$- k\left[Lx(t) - F(x(t))\right]F(x(t)), k > 0 .$$

Введемо перший доданок в квадратичну форму. Отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =$$
$$= -\left(x(t), F(x(t))\right) *$$
$$* \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix} *$$
$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} - k[Lx(t) - Fx(t)]F(x(t)).$$

Ввикористаємо “умови сектора” (3.2) і, відкинувши другий доданок, отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le$$
$$\le -\left(x(t), F(x(t))\right) *$$
$$* \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix} * .$$
$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix}$$

Таким чином, якщо матриця

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix}$$

буде додатньо визначеною, то повна похідна функції Ляпунова (3.3) буде від’ємно визначеною і на основі другої теореми Ляпунова положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ буде асимптотично стійким.

А для цього необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$2ha + (k - \gamma b) > 0$$
$$2ha(k - \gamma b) > \left(\tfrac{1}{2}\gamma a - hb - \tfrac{1}{2}kL\right)^2 \quad (3.7)$$

Зауваження 3.1 Неважко побачити, що суттєве значення, яке впливає на умови стійкості, має знак постійної b, який визначає зворотній зв’язок нелінійності.

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння (1.1) з параметрами $k > 0$, і нелінійної функції $F(x) = arctgx$. Припустимо $h = 10$ $\gamma = 2$. В цьому випадку L=1/2, а функція Ляпунова має вигляд

$$V(x) = 10x^2 + 2\int_0^{x_1} arctgx(s)ds .$$

Мажоранті обмеження для неї мають вигляд

$$10x^2 \le V(x) \le 12x^2 .$$

Її повна похідна вздовж розв’язків рівняння має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [20x(t) + 2arctgx(t)]x'(t) =$$
$$= [20x(t) + 2arctgx(t)] \times [-10x(t) + barctgx(t)]$$

Якщо її представити у вигляді квадратичної форми, то отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =$$
$$= -\left(x(t), arctgx(t)\right)\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ arctgx(t) \end{pmatrix}.$$

При $b < 0$ вона буде від’ємно визначеною квадратичною формою (це відповідає методу лінійного наближення). І положення рівноваги буде асимптотично стійким.

Нехай $b > 0$. Тоді квадратична форма не буде від’ємно визначеною. Представимо її у вигляді

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t)) = -\left(x(t), arctgx(t)\right)\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix} *$$
$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ arctgx(t) \end{pmatrix} +$$
$$+ k\left[\frac{1}{2}x(t) - F(x(t))\right]F(x(t)) - k\left[\frac{1}{2}x(t) - F(x(t))\right] *$$
$$* F(x(t)), k > 0$$

Введемо перший доданок в квадратичну форму

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -(x(t), F(x(t)))\begin{bmatrix} 200 & -\frac{1}{4}k \\ -\frac{1}{4}k & -2b+k \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} - k[x(t) - F(x(t))]F(x(t)).$$

Використовуючи умови сектора і відкинувши другий доданок, отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -(x(t), F(x(t)))\begin{bmatrix} 200 & -\frac{1}{4}k \\ -\frac{1}{4}k & -2b+k \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} x(t) \\ arctgx(t) \end{pmatrix}.$$

Як випливає їз (3.4) для додатньо визначеної матриці необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$200 - 2b + k > 0$$

$$200(k - 2b) > \frac{1}{16}k^2$$

Зауваження 2.2. Розглянемо вплив параметрів функції Ляпунова (3.3) і диференціального рівняння (1.1) на стійкість нульового розв'язку. Тут заданими (фіксованими) є параметри $a > 0$, $L > 0$, b, а параметрами (за рахунок яких можна задовольнити нерівність) є $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$. І задача дослідження стійкості зводиться до задачі оптимізації функції

$$\Phi(h,\gamma,k) = 2ha(k - \gamma b) - \left(\frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL\right)^2$$

$$\to \max$$

при обмеженнях

$$h > 0,\ \gamma > 0,\ 2ha + k - \gamma b > 0.\ k > 0.$$

4.Оптимізація. Розглянемо вплив параметрів функції рівняння (1.1) на визначення стійкості нульового розв'язку. Параметрами фіксованими, (заданими) є параметри системи, тобто. $a > 0$ і $L > 0$, а параметрами змінних, тобто. за рахунок яких можна задовольнити нерівність (3.4), є $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$. І задача дослідження стійкості зводиться до задачі знаходження цих параметрів, при яких максимізується функція змінних $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, тобто розглядається задача

$$\Phi(h,\gamma,k) = 2ha(k-\gamma) -$$

$$((\gamma a - kL)/2 - h)^2 \to \max$$

при обмеженнях

$$h > 0,\ \gamma > 0,\ k > 0,$$

Якщо існують параметри $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, при яких квадратична функція $\Phi(h,\gamma,k)$ буде додатньою, то нульовий розв'язок рівняння (1) буде асимптотично стійким.

В загальному випадку для задач великої розмірності умовам від'ємно визначеності функції Ляпунова є додатність відповідної матриці C, яка входить в матричне рівняння Ляпунова. Таким чином, як випливає із [10] отримуємо задачу квадратичної оптимизації з обмеженнями [10,11]. Для систем великої розмірності умови від'ємно визначеності повної похідної функції Ляпунова має вид додатності мінімального власного числа матриці, яке входить в рівняння Ляпунова. Як випливає із [12], мінімальне власне число симетричної додатньо визначеності матриці є опуклою функцією її елементів. Тому задача отримання умов стійкості зводиться до задачі випуклої оптимізації.

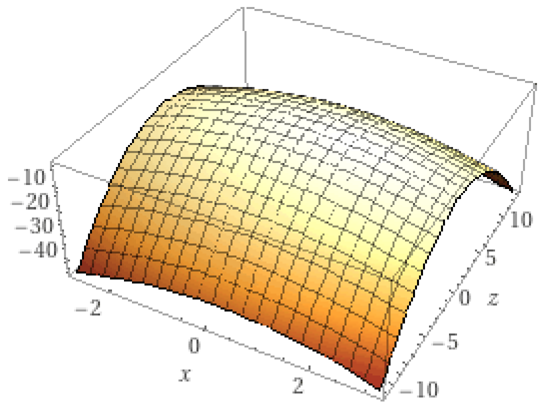

Рис.4.1

Повернемось до прикладу 3.1 . Для нього функція $\Phi\ (h,\gamma,k)$ має вигляд

$$\Phi\ (h,\gamma,k) = 2ha(k-\gamma) - \left(\frac{\gamma a - kL}{2} - h\right)^2.$$

Як бачимо, навіть для одновимірного випадку побудувати графік не можливо. Для того, щоб продемонструвати, те що задача дослідження стійкості з отриманної функції Ляпунова можна поступити наступним чином

Фіксуємо величину $\gamma = 0.1$ і отримаємо залежність

Φ (h, 0.1, k) = $-h^2 - 0.25 - \frac{1}{4k^2} + 15hk + 0.5k$
Графік даної функції зображено на рисю 4.1.
де Φ=z, h=x, k=y.

Неважко помітити, що функція в області $\gamma > 0, k > 0$ має додатні значення. Таким чином нульове положення рівноваги асимптотично стійке.

Література

1.*Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. – М., Наука, 1967. – 224,
2.*Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М., Наука, 1970. – 240 с.
3.*Валеев К.Г.* Построние функций Ляпунова. – Киев, наукова думка, 1981. – 412 с.
4.*Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М., Наука, 1967. – 472 с.
5.*Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л., Гос. издат. тех.-теорю лит., 1950. – 471 с.
6.*Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М., Наука, 1966. – 532 с.
7.*Перестюк М.О., Чернікова О.С.* Теорія стійкості. – ВПЦ «Київський університет", 2012. – 103 с.
8.Архангельский В.И. Нейронные сети в системах автоматизации/ В.И.Архангельский, И.Н. Богаенко, Г.Г. Грабовский, Н.А. Рюмшин. – Киев: «Техника», 1999. - 364 с. (ВА 590706)
9.Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин. М: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
10.*Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация – К., Наукова думка, 1989. – 208 с.
11.*Werner Kratz.* Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory/ - Berlin: AcademieVerlagGmbh, 1995. – 293 pp.
12.*Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М., Наука, 1976. – 352 с.

REFERENCES

1.BARBASHIN EA (1967) Introduction to the theory of sustainability. - M., Nauka, 224p..
2.BARBASHIN EA (1970) Lyapunov functions. M., Nauka, 240 p.
3.VALEEV KG (1981) Construction of Lyapunov functions. - Kiev, Scientific Opinion, 412 p.
4. DEMIDOVICH BP (1967) Lectures on the mathematical theory of stability. - M., Nauka, 472 p.
5.LYAPUNOV AM (1950) The general problem of stability of movement. - M.-L., Gos. issue. Tech.-Theory Lit., 1950. - 471 p.
6. MALKIN IG (1966) Theory of stability of motion. M., Nauka, 532 p.
7. PERESTYUK MO, CHERNIKOVA OS (2012) Sustainability theory. - Ukrainian Orthodox Church "Kyiv University", 103 p.
8. ARKHANGELSKY VI (1999) Neural networks in automation systems Rum-shin. - Kiev: "Technology", 364 p. (VA 590706)
9. HAIKIN S. (2006) Neural networks: full course, 2nd edition M: Williams Publishing House, 1104 p.
10. SHORE NZ, STETSENKO SI (1989) Quadratic extremal problems and undifferentiable optimization , K., Naukova Dumka, 208 p.
11.WERNER KRATZ (1995) Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory, Berlin: AcademieVerlagGmbh, 293 pp.
12. BELLMAN R. (1976) Introduction to the theory of matrices. M., Nauka, 352 p.

Надійшло до редколегії 10.11.2021 р.