УДК 539.3
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.6

Савельєва К. В.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Дашко О.Г.[1], к. ф.-м. н.

Взаємодія плоских пружних хвиль. Врахування квадратичної та кубічної нелінійності.

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057 м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: katerina1971s@gmail.com

K.V. Savelieva[1], Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher
O.G. Dashko[1], Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

Plane elastic wave interaction. Considering of quadratically and cubically nonlinearity

[1]S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: katerina1971s@gmail.com

Теоретично досліджується взаємодія пружних плоских гармонічних хвиль в матеріалі, нелінійні властивості якого описуються пружним потенціалом Мурнагана. Завдяки урахуванню залежності вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної та часу, записується та використовується запис повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі абсцис. Розглядається взаємодія поздовжніх хвиль з окремим урахуванням кубічної нелінійності. На основі кубічного рівняння руху вивчається взаємодія чотирьох гармонічних хвиль. Застосовується метод повільно змінних амплітуд, отримуються вкороченні та еволюційні рівняння, перші інтеграли цих рівнянь та запис закону збереження для комплекту чотирьох взаємодіючих хвиль. Проводиться аналогія між досліджуваними при урахуванні взаємодії трьох хвиль триплетами та квадруплетами, досліджуваними в розглянутому випадку, з урахуванням чотирьоххвильової взаємодії.

Ключові слова: гармонічна хвиля, кубічна нелінійність, пружний потенціал, плоска хвиля, квадруплет, чотирихвильова взаємодія.

The interaction of elastic plane harmonic waves in the material, the nonlinear properties of which are described by the elastic potential of Murnaghan, is investigated theoretically. The displacement vector is depended of only one spatial variable and time, a record of the complete system of equations for plane waves moves along the abscissa axis is recorded and used. The interaction of longitudinal waves with a separate considering cubic nonlinearity is investigated. On the basis of the cubic equation of motion, the interaction of four harmonic waves is studied. The method of slowly variable amplitudes is used. Firstly the two-wave interaction is investigated, then the interaction of four waves is described. Shorten and evolutionary equations are obtained, the first integrals of these equations and the record of the law of conservation for a set of four interacting waves are obtained. An analogy is made between the triplets studied when taking into account the interaction of three waves and the triplets investigated in the case under consideration, taking into account the four-wave interaction, quadruplets.

Key Words: harmonic wave, cubic nonlinearity, elastic potential, plane wave, quadruplet, four-wave interaction

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Постановка задачі

Предметом публікації є результати теоретичного дослідження нелінійного спотворення пружних плоских хвиль при їх поширенні у гіперпружному матеріалі. Для опису нелінійності деформування матеріалу було використано пружний потенціал Мурнагана [1,2,3] у вигляді

$$W=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\left(u_{1,1}\right)^2+\frac{1}{2}\mu\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+$$
$$+\left(\mu+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{3}A+B+\frac{1}{3}C\right)\left(u_{1,1}\right)^3+$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda+B)u_{1,1}\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+ \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{8}(\lambda+2\mu+A+2B)\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]^2+$$
$$+\frac{1}{8}(3A+10B+4C)\left(u_{1,1}\right)^2\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right],$$

де $\lambda,\mu -$ пружні сталі Ляме (другого порядку), $A,B,C -$ сталі Мурнагана (третього порядку). Таке представлення пружного потенціалу з урахуванням доданків четвертого порядку, як відомо [4,5], дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружному матеріалі [4,5], виходячи з повної системи рівнянь для плоских хвиль, що складається з трьох взаємопов'язаних рівнянь. Залежність вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної x_1 та часу t дає можливість подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі Ox_1. Нижче наведене і використовується тільки одне з них: для поздовжньої хвилі. При цьому вважається , що поперечні хвилі початково не збуджуються, і генерація цих хвиль поздовжніми не вивчається.

При окремому врахуванні виключно кубічної нелінійності (при цьому квадратичні ефекти взаємодії вважаються відомими і докладно описаними [1]), нелінійне хвильові рівняння для поздовжніх хвиль, згідно [4], має вигляд

$$\rho u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,11}=N_3u_{1,11}\left(u_{1,1}\right)^2, \qquad (2)$$

де $N_3=\frac{3}{2}(\lambda+2\mu)+6(A+3B+C)$.

Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах при трихвильовій взаємодії можуть утворюватися при деяких умовах хвильові триплети, в кубічно нелінійних середовищах при чотирихвильових взаємодіях можуть утворюватися за деяких умов хвильові квадруплети. Отже, розглядається взаємодія поздовжніх пружних хвиль, поширення яких описується рівнянням (2) при умові узгодженості частот.

Аналіз поздовжніх хвиль за методом повільно змінних амплітуд. Вкорочені та еволюційні рівняння для двохвильової взаємодії

Загальна умова узгодженості частот, яка забезпечує взаємодію хвиль, має вигляд

$$\omega_4=\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3. \qquad (3)$$

Умова узгодженості хвильових векторів:

$$k_4=\pm k_1\pm k_2\pm k_3. \qquad (4)$$

Схема взаємодії хвиль із зазначеними загальними умовами узгодженості зазвичай коментується у нелінійній оптиці як генерація нової хвилі трьома різними хвилями накачування (pumping wave) або за будь-якою іншою схемою, яких, взагалі кажучи, може бути безліч. Зокрема, існує схема, що передбачає такий характер взаємодіючих хвиль: дві хвилі накачування, одна сигнальна та одна холоста хвиля (тут використовується термінологія нелінійної оптики, що відповідає так званій схемі обертання хвильового фронту). Починається розглядання схеми з дослідження двохвильової взаємодії для двох протилежно спрямованих однаково потужних хвиль великої амплітуди. Поширюючись в нелінійному середовищі, хвилі взаємодіють, що розглядається в рамках двохвильової взаємодії. Одночасно перпендикулярно до цих двох хвиль (вздовж осі аплікат) задається слабкий сигнал малої амплітуди. Слабкі хвилі аналізуються в рамках чотирихвильової взаємодії. Ефект загальної взаємодії полягає в тому, що амплітуди слабких хвиль зростають із часом необмежено.

Розглядання хвильової взаємодії відбувається на основі двох гіпотез:

По-перше, дві слабкі хвилі (signal waves) не впливають на дві потужні хвилі накачування (pumping waves). Тому потужні хвилі можуть розглядатися незалежно.

По-друге, потужні хвилі накачування впливають на слабкі сигнальні, і в аналізі взаємодії сигнальних хвиль необхідно враховувати усі чотири хвилі, з яких дві хвилі накачування вважаються вже відомими.

Таким чином, спочатку розглядається двохвильова взаємодія поздовжніх пружних хвиль. Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді

$$u\left(x_1,t\right)=A\left(x_1\right)e^{i\left(k_Ax_1-\omega_At\right)}-B\left(x_1\right)e^{i\left(k_Bx_1+\omega_Bt\right)}. \qquad (5)$$

Далі, за стандартною процедурою, треба: підставити (5) до (2); врахувати, що (5) – розв'язок рівняння (2) для будь-якої амплітуди; знехтувати другими похідними амплітуд, з міркувань відсутності зовнішнього припливу енергії у систему. Отримане вкорочене рівняння розділяється, врахуючи те, що впливом хвилі самої на себе можна знехтувати, враховуючи більш важливий взаємний вплив двох заданих хвиль. Вкорочене рівняння записується як два рівняння, шляхом окремого запису дійсної та уявної частини, при цьому враховується умова частотного синхронізму. В результаті маємо рівняння:

$$\frac{dA}{dx_1} = k_A k_B \left(2k_A + k_B\right) A^2 B e^{i\left(k_A + k_B\right)x_1};$$
$$\frac{dB}{dx_1} = k_A k_B \left(k_A + 2k_B\right) A B^2 e^{i\left(k_A + k_B\right)x_1}. \quad (6)$$

Далі, з урахуванням умов фазового синхронізму

$$k_A + k_B = 0,$$

записуються еволюційні рівняння

$$\frac{dA}{dx_1} = k_A^3 A^2 B, \quad \frac{dB}{dx_1} = k_A^3 A B^2.$$

Далі, з урахуванням рівності початкових амплітуд обох хвиль

$$A\left(x_1 = 0\right) = B\left(x_1 = 0\right) = A\left(x_3\right),$$

розв'язок нелінійної системи (4) можна записати у вигляді

$$A\left(x_1\right) = A^o\left(x_3\right) e^{-k_A^3\left(A^o(x_3)\right)^2 x_1};$$
$$B\left(x_1\right) = A^o\left(x_3\right) e^{k_A^3\left(A^o(x_3)\right)^2 x_1}. \quad (7)$$

Залежність амплітуд хвиль від координати x_3 означає, що в схемі дослідження розглядається пучок хвиль, і вздовж перетину цього пучка амплітуда хвилі неоднакова. З отриманого розв'язку витікає, що поздовжні хвилі зустрічаються в перетині $x_1 = 0$, в результаті чого відбувається їх взаємодія, по ходу якої частоти $\omega_A = \omega_B$ і швидкості хвиль зберігаються, а амплітуди змінюються синусоїдально з максимальною амплітудою A^o і періодом $T = \pi\left(\lambda + 2\mu\right) \big/ N_3 k_A^3 \left(A^o\right)^2$.

Хвиля накачування, таким чином, - це хвиля із сталою амплітудою, що зберігається за рахунок постійного накачування до неї енергії іншими хвилями-учасницями чотирихвильової взаємодії, яка досліджується окремо.

Аналіз чотирихвильової взаємодії поздовжніх хвиль за методом повільно змінних амплітуд.

Далі розв'язок представляється у вигляді чотирьох поздовжніх хвиль з різними амплітудами, хвильовими числами та частотами

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{4} A_n\left(x_1\right) e^{i\varphi_n}, \varphi_n = k_n x - \omega_n t. \quad (8)$$

Вкорочене рівняння має вигляд

$$\sum_{n=1}^{4} k_n \frac{dA_n}{dx} e^{i\varphi_n} = \frac{-iN_3}{2\left(\lambda + 2\mu\right)} \sum_{m=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} k_k^2 k_m^2 A_k^2 A_m e^{i\left(2\varphi_k + \varphi_m\right)}. \quad (9)$$

Після цього вкорочені рівняння розділяються з урахуванням умови частотного синхронізму (3). Далі, послідовно, використовується умова синхронізму за хвильовими числами (4). В результаті записуються еволюційні рівняння, для яких приймається гіпотеза, згідно якій ефект самогенерації кожної з хвиль є менш значним, ніж хвильовий взаємовплив. В результаті отримуються еволюційні рівняння вигляду

$$A_1' = \mathrm{K}_1 \overline{A_2} A_3 A_4, A_2' = \mathrm{K}_2 \overline{A_1} A_3 A_4,$$
$$A_3' = \mathrm{K}_3 A_1 A_2 \overline{A_4}, A_4' = \mathrm{K}_3 A_1 A_2 \overline{A_3}. \quad (10)$$

В рамках реалізації схеми чотирихвильової взаємодії на основі результатів, отриманих вище за схемою двохвильової взаємодії, використовуються два останні рівняння з (10), і вони приймають більш простий вигляд, за формулою (7), звідки

$$A_1 A_2 = \left|A_1^o\right|^2;$$
$$A_3' = K_3 \left(A_1^o\right)^2 \overline{A}_4; A_4' = K_4 \left(A_1^o\right)^2 \overline{A}_3.$$

Шляхом ряду перетворень отриманих таким чином рівнянь, їх комплексного спряження та додавання, отримуються рівняння вигляду

$$I_1' = \mathrm{K}_1 \left(\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4 - A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right),$$
$$I_2' = \mathrm{K}_{12} \left(\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4 - A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right),$$
$$I_3' = \mathrm{K}_3 \left(-\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4 + A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right), \quad (11)$$
$$I_4' = \mathrm{K}_4 \left(-\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4 + A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right).$$

Тут здійснено перехід від амплітуд до інтенсивності хвиль з використанням позначення для інтенсивності окремої хвилі вигляду

$$\overline{A}_1 A'_1 + A_1 \overline{A}'_1 = \left(\left|A_1^o\right|^2\right)' = I_1'.$$

Можливість отримання перших інтегралів системи нелінійних еволюційних рівнянь (10) – співвідношень типу Менлі-Рова, та загального інтегралу енергії здійснюється за відомою процедурою. Загальний закон збереження енергії отримується у вигляді

$$\sum_{n=1}^{4}\left(\omega_m / K_m\right) I_m = const$$

шляхом множення m-го рівняння системи (11) на відповідну частоту ω_m та додавання результатів. Таким чином, у дослідженні отримано базу для подальших досліджень багатьох конкретних задач чотирихвильової взаємодії у кубічно нелінійному гіперпружному середовищі.

Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах при трихвильовій взаємодії можуть утворюватися при деяких умовах хвильові триплети, в кубічно нелінійних середовищах при чотирихвильових взаємодіях можуть утворюватися за деяких умов хвильові квадруплети.

Список використаних джерел

1. *Рущицький Я. Я.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я.Я. Рущицький, С.І. Цурпал. – К.: Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. *Achenbach J. D.* Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. *Cattani C.* Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure / C. Cattani, J. J. Rushchitsky. – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. *Rushchitsky J.J.* On the Self–Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / J.J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.
5. *Гузь А.Н.* Введение в механику нанокомпозитов / А.Н. Гузь, Я.Я. Рущицкий, И.А. Гузь.– К.: Академпериодика, 2010. – 398 с.
6. *Shen Y.R.* The principles of nonlinear optics / Y.R. Shen– New York: John Wiley, 1984.-560 p.
7. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials / J. J. Rushchitsky– Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
8. *Rushchitsky J. J.* Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J.J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
9. *Rushchitsky J. J.* Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech.– 2005.– Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
10. *Rushchitsky J. J.* Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825 – 833.
11. *Rushchitsky J .J.* On the Self–Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J., TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v materialah z mikrostrukturoyu*. Kyiv: Institut mehaniki im. S. P. Timoshenka.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids.* Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C., RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure.* Singapore-London: World Scientific.
4. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) On the Self–Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *Int. Appl. Mech.* 45 (1). pp. 73–93.
5. GUZ A.N., RUSHICKIJ J.J., GUZ I.A. (2010) *Vvedenie v mehaniku nanokompozitov*. Kyiv: Akademperiodika.
6. SHEN Y.R. (1984) *The principles of nonlinear optics.* New York: John Wiley.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials.* Heidelberg: Springer.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *Int. Appl. Mech.* 41 (5). pp. 701–712.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states. *Int. Appl. Mech.* 41 (6). pp. 831–840.
10. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution. *Int. Appl. Mech.* 41 (7). p. 825–833.
11. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) On the Self–Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *Int. Appl. Mech.* 45 (1). pp. 73–93.

Надійшла до редколегії 31.01.2022