УДК 519.21 DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.1

Ю.С. Мішура[1], *д.ф.-м.н., професор*
О.М. Гопкало[2], *д-р філософії, асистент*
Г.С. Железняк[3], *аспірант*

Елементи дробового аналізу. Дробові інтеграли

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: yuliyamishura@knu.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: hopkalo.olha@gmail.com
[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: hanna.zhelezniak@gmail.com

Yu.S.Mishura [1], *Dr., Professor*
O.M. Hopkalo [2], *PhD, Assistant of Professor*
H.S. Zhelezniak [3], *PhD student*

Elements of fractional calculus. Fractional integrals

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: yuliyamishura@knu.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: hopkalo.olha@gmail.com
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: hanna.zhelezniak@gmail.com

Статтю присвячено базовим властивостям дробових інтегралів. Доведено їхню гельдеровість, неперервність за індексом інтегрування, властивості звужень дробових інтегралів. Наведено деякі приклади обчислення дробових інтегралів, дробові інтеграли від квадратично-інтегровних функцій.

Ключові слова: дробовий інтеграл, гельдеровість, неперервність за індексом інтегрування

The paper is devoted to the basic properties of fractional integrals. It is a survey of the well-known properties of fractional integrals, however, the authors tried to present the known information about fractional integrals as short and transparently as possible. We introduce fractional integrals on the compact interval and on the semi-axes, consider the famous Hardy-Littlewood theorem and other properties of integrability of fractional integrals. Among other basic properties, we consider Hölder continuity and establish to what extent fractional integration increases the smoothness of the integrand. Also, we establish continuity of fractional integrals according to the index of fractional integration, both at strictly positive value and at zero. Then we consider properties of restrictions of fractional integrals from semi-axes on the compact interval. Generalized Minkowsky inequality is applied as one of the important tools. Some examples of calculating fractional integrals are provided.

Key Words: fractional integral, Hölder property, continuity according to the fractional index.

1 Вступ

У цій статті викладено базові властивості дробових інтегралів. Стаття в основному має реферативний характер, але ми постарались викласти відомі властивості дробових інтегралів, разом з доведеннями, у максимально компактному та прозорому вигляді. Робота складається зі вступу та семи розділів, які містять означення та загальні властивості дробових інтегралів, гельдерову властивість дробових інтегралів, властивості звуження дробових інтегралів з прямої на компактний інтервал, неперервність дробових інтегралів відносно індексу інтегрування та деякі приклади обчислення дробових інтегралів.

2 Означення та загальні властивості дробових інтегралів

Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ та $\alpha > 0$. У більшості випадків нижче $\alpha < 1$, хоча це не є обов'язковою умовою. Визначимо лівосторонні та правосторонні дробові інтеграли Рімана-Ліувілля на (a, b) порядку α як

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

© Ю.С. Мішура, О.М. Гопкало, Г. С. Железняк 2022

та

$$(I_{b-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

відповідно.

Будемо казати, що функція $f \in \mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha})$ (символ $\mathcal{D}(\cdot)$ позначає область відповідного оператора), якщо відповідні інтеграли збігаються майже для всіх $x \in (a,b)$ (відносно міри Лебега). У цьому випадку також можна сказати, що ці інтеграли (або інші функції) збігаються м.с. (майже скрізь) відносно міри Лебега. Нехай $\mathbb{H}$ – деякий клас функцій. Кажуть, що $f \in \mathbb{I}_{a+(b-)}^{\alpha}(\mathbb{H})$ якщо $f(x) = (I_{a+(b-)}^{\alpha}h)(x)$, $x \in [a,b]$ м.с. відносно міри Лебега, та $h \in \mathbb{H}$. Відповідні класи функцій, визначені на $\mathbb{R}$, позначаються як $\mathbb{I}_{\pm}^{\alpha}(\mathbb{H})$.

Перше природне запитання: які функції належать до класу $\mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha})$? Відповідь дає наступна лема.

Лема 2.1. *Нехай $f \in L_1([a,b])$. Тоді*

(i) $f \in \mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha})$.

(ii) $I_{a+(b-)}^{\alpha}f \in L_1([a,b])$.

(iii) $\|I_{a+(b-)}^{\alpha}f\|_{L_1([a,b])} \le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L_1([a,b])}$.

Доведення. Нехай $f \in L_1([a,b])$. Для будь-якого $n \ge 1$ розглянемо $f_n(x) = (f(x)\wedge n)\vee(-n)$. Тоді $|f_n(x)| \le |f(x)|\wedge n$ і ми можемо застосувати теорему Фубіні:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|(I_{a+}^{\alpha}f_n)(x)\right| dx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f_n(t)dt\right| dx \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f_n(t)|dtdx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f_n(t)|\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}dxdt \le \\
&\le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_n\|_{L_1([a,b])} \le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L_1([a,b])}.
\end{aligned}$$

За теоремою Лебега про монотонну збіжність, $(I_{a+}^{\alpha}f_n)(x) \uparrow (I_{a+}^{\alpha}f)(x)$ майже всюди відносно міри Лебега, а також за лемою Фату

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|(I_{a+}^{\alpha}f)(x)\right| dx &\le \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|(I_{a+}^{\alpha}f_n)(x)\right| dx \le \\
&\le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L_1([a,b])}.
\end{aligned}$$

Аналогічним чином розглядається випадок з інтегралом $I_{b-}^{\alpha}f$. □

Зауваження 2.1. Лема 2.1 є частковим випадком більш загального результату. Дійсно, розглянемо, наприклад, дробовий інтеграл $(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$. Ми можемо розглядати дробовий інтеграл як згортку функцій $f(t)\mathbb{I}_{[a,b]}(t)$ та $g(t) = t^{\alpha-1}$. Тоді використовуючи теорему 1.3 з [6] можна довести наступний результат.

Лема 2.2. *Нехай $f \in L_p([a,b]), p \ge 1$, та $\alpha > 0$. Тоді $I_{a+(b-)}^{\alpha}f \in L_p([a,b])$, та*

$$\|I_{a+(b-)}^{\alpha}f\|_{L_p([a,b])} \le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L_p([a,b])}.$$

Доведення. Очевидно,

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} f(x-t)t^{\alpha-1}dt \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} |f(x-t)|t^{\alpha-1}dt,
\end{aligned}$$

звідки за допомогою узагальненої інтегральної нерівності Мінковського отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \left|(I_{a+}^{\alpha}f)(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b \left|\int_0^{x-a} |f(x-t)|\, t^{\alpha-1}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}\left\{\int_{a+t}^b |f(x-t)|^p\, t^{(\alpha-1)p}dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a} t^{\alpha-1}dt\left\{\int_a^{b-t} |f(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L_p([a,b])}.
\end{aligned}$$

□

Дробові інтеграли Рімана-Ліувілля на $\mathbb{R}$ визначаються як

$$(I_{+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt,$$

та

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty} f(t)(t-x)^{\alpha-1}dt,$$

відповідно.

Функція $f \in \mathcal{D}(I_{\pm}^{\alpha})$, якщо відповідні інтеграли збігаються майже для всіх $x \in \mathbb{R}$. Відповідно до [4], маємо включення $L_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I_{\pm}^{\alpha})$, $1 \le p < \frac{1}{\alpha}$. Більше того, виконується теорема Харді-Літлвуда.

Теорема 2.1 ([4]). *Нехай $1 \le p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Тоді оператори $I^{\alpha}_{\pm}$ обмежені від $L_p(\mathbb{R})$ до $L_q(\mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ та $q = p(1-\alpha p)^{-1}$. Це означає, зокрема, що для будь-якого $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ і $q = \frac{p}{1-\alpha p}$, існує константа $C_{p,q,\alpha}$ така, що*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(u)||x-u|^{\alpha-1} du\Big)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \le C_{p,q,\alpha}\|f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – вимірна функція.*

(i) *Дробове інтегрування має таку напівгрупову властивість:*
$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f = I^{\alpha+\beta}_{a+} f,\ \ I^{\alpha}_{b-} I^{\beta}_{b-} f = I^{\alpha+\beta}_{b-} f$$
для $f \in L_1([a, b])$. Якщо $\alpha + \beta \ge 1$, тоді ці рівності виконуються в будь-якій точці $x \in (a, b)$, в протилежному випадку вони викнуються для майже всіх $x \in (a, b)$.

(ii)
$$I^{\alpha}_{\pm} I^{\beta}_{\pm} = I^{\alpha+\beta}_{\pm} f$$
для $f \in L_p(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta > 0$ та $\alpha + \beta < \frac{1}{p}$.

(iii) *Нехай $f \in L_p([a, b])$, $g \in L_q([a, b])$, $p, q \ge 1$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 + \alpha$, або нехай $p > 1$, $q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Тоді маємо наведену нижче формулу інтегрування частинами для дробових інтегралів:*
$$\int_a^b g(x)(I^{\alpha}_{a+} f)(x)dx = \int_a^b f(x)(I^{\alpha}_{b-} g)(x)dx.$$
Нехай $f \in L_p(\mathbb{R})$, $g \in L_q(\mathbb{R})$, $p > 1, q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Тоді
$$\int_{\mathbb{R}} g(x)(I^{\alpha}_{+} f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(I^{\alpha}_{-} g)(x)dx. \tag{2.2}$$

Доведення. Всі ці формули можна довести подібним чином, тому доведемо лише одну з напівгрупових властивостей:

$$\begin{aligned}
&\left(I^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)du = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\beta-1}(t-u)^{\alpha-1} dtdu \\
&= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(x)(x-u)^{\alpha+\beta-1} du = \\
&= \left(I^{\alpha+\beta}_{a+} f\right)(x).
\end{aligned}$$

□

Лема 2.3. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $f \in L_p(\mathbb{R})(L_p([a, b])$, $p \ge 1$ та $I^{\alpha}_{\pm} f = 0$. Тоді $f(x) = 0$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ $(x \in [a, b])$.*

Доведення. Розглянемо інтервал $[a, b]$. Нехай $\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. Тоді для будь-якого $r \in [a, b]$ за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^r (r-z)^{-\alpha} \int_a^z (z-t)^{\alpha-1} f(t)dtdz = \\
&= \int_a^r f(t) \int_t^r (r-z)^{-\alpha}(z-t)^{\alpha-1} dzdt = \\
&= \int_a^r f(t)dt \cdot B(\alpha, 1-\alpha),
\end{aligned}$$

де $\int_a^r f(t)dt = 0$, отже, $f(t) = 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. □

3 Гельдерова властивість дробових інтегралів

Нехай $C^{\lambda}([a, b])$ – множина *гельдерових неперервних функцій* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ порядку λ, тобто

$$\mathbb{C}^{\lambda}([a, b]) = \Big\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \,\Big|\, \|f\|_{\lambda} := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{s,t\in[a,b]} |f(s) - f(t)|(t-s)^{-\lambda} < \infty \Big\}.$$

Іноді λ називають індексом Гельдера відповідної функції. Очевидно, що будь-яка функція індексу Гельдера λ на деякому інтервалі є одночасно функцією будь-якого меншого індексу Гельдера на цьому інтервалі (але не навпаки). Якщо індекс Гельдера дорівнює 1, то відповідна функція називається функцією Ліпшиця. Простір функцій Ліпшиця на інтервалі $[a.b]$ будемо позначати $Lip([a, b])(= C^1([a, b]))$, щоб не плутати його з простором $C^{(1)}([a, b])$ неперервно диференційовних функцій. Індекс Гельдера не може перевищувати 1, крім випадку, коли функція є деякою сталою.

Спочатку доведемо, що дробовий інтеграл перетворює інтегровну функцію у функцію Гельдера. Точніше, справедливий наступний результат.

Лема 3.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *та* $\alpha \ge \frac{1}{p}$. *Тоді* $\mathbb{I}^{\alpha}_{\pm}(L_p([a,b])) \subset \mathbb{C}^{\lambda}([a,b])$ *для будь-яких* $-\infty < a < b < \infty$ *та* $0 < \lambda \le \alpha - \frac{1}{p}$, *якщо* $\alpha \le \frac{1}{p}+1$ *та* $\mathbb{I}^{\alpha}_{\pm}(L_p([a,b])) \subset Lip([a.b])$, *якщо* $\alpha \ge \frac{1}{p}+1$.

Доведення. Нехай $a \le t_1 < t_2 \le b$. Тоді, враховуючи, що припущення $\alpha p > 1$ еквівалентне нерівності $(\alpha-1)q > -1$, тоді як припущення $\alpha \le 1+\frac{1}{p}$ еквівалентне нерівності $\alpha q - 2q + 1 < 0$, а також той факт, що для $\alpha q - 2q + 1 < 0$ $(u-t_1)^{\alpha q-2q+1} > u^{\alpha q-2q+1}$ і навпаки, ми можемо застосувати нерівності

$$\int_0^{t_1} (u-s)^{(\alpha-2)q} ds \le \frac{(u-t_1)^{\alpha q-2q+1}}{\alpha q-2q+1}, \quad \alpha q - 2q + 1 < 0,$$

та

$$\int_0^{t_1} (u-s)^{(\alpha-2)q} ds \le \frac{u^{\alpha q-2q+1}}{\alpha q-2q+1}, \quad \alpha q - 2q + 1 \ge 0,$$

та застосувати узагальнену нерівність Мінковського. Тоді у випадку $\alpha q - 2q + 1 < 0$ отримаємо оцінку

$$\left|\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right| \le$$
$$\le \left|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right| +$$
$$+ \left|\int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right) f(s)ds\right| \le$$
$$\le \left(\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{(\alpha-1)q} ds\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p([a,b])} +$$
$$+ |1-\alpha| \int_0^{t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} (u-s)^{\alpha-2} du\right) |f(s)|ds \le$$
$$\le \frac{(t_2-t_1)^{\alpha-1+\frac{1}{q}}}{((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}} \|f\|_{L_p([a,b])} + |1-\alpha| \times$$
$$\times \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{t_1} (u-s)^{(\alpha-2)q} ds\right)^{\frac{1}{q}} du \|f\|_{L_p([a,b])} \le$$
$$\le \left(\frac{1}{((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{|1-\alpha|}{|(\alpha-2)q+1|^{\frac{1}{q}}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)}\right)$$
$$\times (t_2-t_1)^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p([a,b])},$$

а у випадку $\alpha q - 2q + 1 \ge 0$ отримуємо, що

$$\left|\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right| \le$$
$$\le \left(\frac{(t_2-t_1)^{\alpha-\frac{1}{p}}}{((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{|1-\alpha| b^{\alpha-1-1/p}}{|(\alpha-2)q+1|^{\frac{1}{q}}}(t_2-t_1)\right)$$
$$\times \|f\|_{L_p([a,b])}.$$

Порівнюючи степені $(t_2-t_1)^{\alpha-\frac{1}{p}}$ та t_2-t_1 маємо, що в цьому випадку

$$\left|\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right| \le$$
$$\le C(t_2-t_1)$$

для деякого $C > 0$. □

Тепер доведемо, що дробовий інтеграл збільшує індекс Гельдера функції, тобто має місце наступний результат.

Теорема 3.1. *Нехай функція* $\varphi \in \mathbb{C}^{\lambda}([a,b])$. *Тоді для будь-якого* $\alpha > 0$

$$I^{\alpha}_{a+}(\varphi(\cdot) - \varphi(a)) \in \mathbb{C}^{\lambda+\alpha}([a,b])$$

якщо $\lambda + \alpha \le 1$ *та*

$$I^{\alpha}_{a+}(\varphi(\cdot) - \varphi(a)) \in Lip([a,b])$$

якщо $\lambda + \alpha > 1$.

Доведення. Нехтуючи сталим множником, розглянемо функцію

$$g(x) = \int_a^x (x-u)^{\alpha-1}(\varphi(u) - \varphi(a))du.$$

Тоді для будь-якого $a \le x < y \le b$ ми можемо вивести

$$g(y) - g(x) = \int_x^y (y-u)^{\alpha-1}(\varphi(u) - \varphi(x))du +$$
$$+ \int_x^y \Big[-(z-x)^{\alpha-1}(\varphi(x) - \varphi(z)) +$$
$$+ (z-a)^{\alpha-1}(\varphi(a) - \varphi(z)) +$$
$$+ (\alpha-1)\int_a^x (z-t)^{\alpha-2}(\varphi(t) - \varphi(z))dt\Big] dz. \tag{3.3}$$

Отже, враховуючи, що для будь-яких $u \le x \le y$ та $\beta > 0$ маємо нерівності $(y-u)^{\beta} - (x-u)^{\beta} \le (y-x)^{\beta}$ для $0 < \beta \le 1$ та $(y-u)^{\beta} - (x-$

$u)^\beta \le \beta(y-u)^{\beta-1}(y-x)$ для $1<\beta$, ми можемо діяти наступним чином:

$$
\begin{aligned}
&|g(y)-g(x)| \le C\int_x^y (y-u)^{\alpha-1}(u-x)du+\\
&+C\int_x^y (z-x)^{\alpha-1}(z-x)^\lambda dz+\\
&+C\int_x^y (z-a)^{\alpha-1}(z-a)^\lambda dz+\\
&+C\int_x^y\int_a^x (z-t)^{\alpha-2}(z-t)^\lambda dtdz \le\\
&\le C(y-x)^{\alpha+\lambda}+C\int_x^y (z-a)^{\alpha+\lambda-1}dz+\\
&+C\int_x^y \left|(z-x)^{\alpha+\lambda-1}-(z-a)^{\alpha+\lambda-1}\right| dz \le\\
&\le C(y-x)^{\alpha+\lambda}+C\left|(y-a)^{\alpha+\lambda}-(x-a)^{\alpha+\lambda}\right| \le\\
&\begin{cases}\le C(y-x)^{\alpha+\lambda}, & \text{if } \lambda+\alpha\le 1\\ \le C(y-x)^{\alpha+\lambda}, & \text{if } \lambda+\alpha>1,\end{cases}
\end{aligned}
$$

і теорему доведено. □

4 Дробові інтеграли від квадратично-інтегровних функцій

Звертаємо увагу читача на те, що результати цього підрозділу сформульовані для $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Лема 4.1. *Нехай $f\in\mathbb{C}^{(1)}([a,b])$. Тоді для деякого $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ існує така функція $\varphi\in L_2([a,b])$ що $f=I^\alpha_{a+(b-)}\varphi$, тобто $\mathbb{C}^{(1)}([a,b])\subset\mathbb{I}^\alpha_{a+(b-)}(L_2([a,b]))$. Те саме вірно, якщо ми замінимо $[a,b]$ на $\mathbb{R}$.*

Доведення. РОзглянемо компактний інтервал $[a,b]$. Запишемо формально співвідношення

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \tag{4.4}$$

помножимо на $(z-x)^{-\alpha}$ і проінтегруємо:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^z (z-x)^{-\alpha}f(x)dx=\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^z (z-x)^{-\alpha}dx\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt=\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^z \varphi(t)\int_t^z (z-x)^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}dxdt=\\
&=\frac{B(\alpha,1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\varphi(t)dt=\Gamma(1-\alpha)\int_0^z\varphi(t)dt,
\end{aligned}
$$

звідки для майже всіх z

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dz}\left(\int_a^z (z-x)^{-\alpha}f(x)dx\right)\\
&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(a)+\right.\\
&\left.\int_a^z\frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f'(x)dx\right)\\
&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(z-a)^\alpha}+\int_a^z (z-x)^{-\alpha}f'(x)dx\right).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Якщо $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ тоді $\varphi\in L_2([a,b])$, відповідно до леми Lemma 2.2. Тому, дійсно, виконується (4.4), $\mathbb{C}^{(1)}([a,b])\subset\mathbb{I}^\alpha_{a+(b-)}(L_2([a,b]))$. □

Наслідок 4.1. *Оскільки $\mathbb{C}^{(1)}([a,b])$ є щільним у $L_2([a,b])$, маємо, що простори $I^\alpha_{a+(b-)}(L_2([a,b]))$ є щільними в $L_2([a,b])$ для будь-якого $0<\alpha<\frac{1}{2}$.*

Позначимо $\mathbb{H}^\alpha_+([a,b])=\mathbb{I}^\alpha_{a+}(L_2([a,b]))$ ($\mathbb{H}^\alpha_-([a,b])=\mathbb{I}^\alpha_{b-}(L_2([a,b]))$ розглядається аналогічно). Визначимо в $\mathbb{H}^\alpha_\pm([a,b])$ норму

$$\|I^\alpha_{a+(b-)}h\|_{\mathbb{H}^\alpha_\pm([a,b])}:=\|h\|_{L_2([a,b])}.$$

Лема 4.2. *Для всіх $0<\alpha<\frac{1}{2}$ простори $\mathbb{H}^\alpha_\pm([a,b])$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^\alpha_\pm([a,b])}$ є гільбертовими.*

Доведення. Досить розглянути деяку послідовність Коші, наприклад, $I^\alpha_{a+}h_n$, і встановити її збіжність. Ми маємо, що h_n є послідовністю Коші в $L_2([a,b])$, отже, існує $f\in L_2([a,b])$ така що $\|f_n-f\|_{L_2([a,b])}\to 0, n\to\infty$. Тоді $I^\alpha_{a+}f\in\mathbb{H}^\alpha_+([a,b])$ та $I^\alpha_{a+}f_n\to I^\alpha_{a+}f, n\to\infty$ в $\mathbb{H}^\alpha_+([a,b])$. □

5 Звуження дробових інтегралів

Нехай $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – вимірна функція. Розглянемо її звуження на деякий інтервал $[a,b]$, де $-\infty\le a<b\le\infty$:

$$\varphi_{a,b}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Зокрема, позначимо $\varphi_+(x)=\varphi_{0,+\infty}(x)$.

Теорема 5.1. *Нехай $\varphi\in L_p(\mathbb{R})$ для деякого $p\in\left(1,\frac{1}{\alpha}\right)$. Тоді*

$$(I^\alpha_+\varphi)_+(x)=\left(I^\alpha_+\phi\right)(x), x\in\mathbb{R},$$

де $\phi \in L_p(\mathbb{R})$ і має вигляд

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha \frac{\varphi(-t)}{x+t} dt, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Доведення. Для початку, доведемо, що така функція $\phi \in L_p(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p dx +$$

$$+C \int_0^\infty x^{-\alpha p} \left| \int_0^\infty \frac{t^\alpha \varphi(-t)}{t+x} dt \right|^p dx.$$

Тепер достатньо знайти скінченну верхню межу для другого інтеграла. З цією метою застосуємо до нього узагальнену нерівність Мінковського. Враховуючи, що $\alpha < 1/p$, отримуємо наступну оцінку:

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p} dx \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha |\varphi(-t)| dt}{t+x} \right)^p =$$
$$= |t = xz|$$
$$= \int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty \frac{z^\alpha |\varphi(-xz)|}{1+z} dz \right)^p \leq$$
$$\leq C \left(\int_0^\infty \frac{z^\alpha}{1+z} \left(\int_0^\infty |\varphi(-xz)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$
$$= C \left(\int_0^\infty \frac{z^{\alpha - \frac{1}{p}}}{1+z} dx \right)^p \|\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Крім того, $(I_+^\alpha \phi)(x) = 0$ для $x \leq 0$. Розглянемо $x > 0$ і використаємо співвідношення (7.10):

$$(I_+^\alpha \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt =$$
$$+ \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty \left(\frac{z}{t}\right)^\alpha \frac{\varphi(-z)}{z+t} dz \right) dt$$
$$= \left(I_{0+}^\alpha \varphi\right) + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\Gamma(\alpha)} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^0 (-z)^\alpha \varphi(z) dz \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha}}{t-z} dt =$$
$$= \left(I_{0+}^\alpha \varphi\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (-z)^\alpha \varphi(z) \frac{(x-z)^{\alpha-1}}{(-z)^\alpha} dz =$$
$$= \left(I_{0+}^\alpha \varphi\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (x-z)^{\alpha-1} \varphi(z) dz =$$
$$= (I_+^\alpha \varphi)(x).$$

□

6 Неперервність дробових інтегралів відносно α

Розглянемо поведінку дробових інтегралів як функцій від α.

Теорема 6.1. *Нехай $\varphi \in L_p([a,b])$ для деякого $p \geq 1$. Тоді дробові інтеграли $(I_{a+(b-)}^\alpha \varphi)$ неперервні по α на $[0,\infty)$ в $L_p([a,b])$. Більше того, вони неперервні на $(0,\infty)$ як функції з $L_p([a,b])$ в $L_p([a,b])$.*

Доведення. Нехай $\alpha, \alpha_0 > 0$. Розглянемо різницю

$$(I_{a+}^{\alpha_0} \varphi)(x) - (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) =$$
$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) \int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha_0 - 1} dt +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left((x-t)^{\alpha_0-1} - (x-t)^{\alpha-1} \right) \varphi(t) dt =:$$
$$=: (I\varphi)(x) + (J\varphi)(x).$$

Оцінимо окремо $\|(I\varphi)\|_{L_p([a,b])}$ та $\|(J\varphi)\|_{L_p([a,b])}$. Згідно з лемою 2.2,

$$\|(I\varphi)\|_{L_p([a,b])} \leq \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \|\varphi\|_{L_p([a,b])}. \tag{6.6}$$

Не обмежуючи загальності, припустимо, що функція φ набуває значення 0 за межами інтервалу $[a,b]$. Тоді

$$|J(x)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x-a} \left(z^{\alpha_0-1} - z^{\alpha-1} \right) \varphi(x-z) dz \right|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} z^{\alpha_0-1} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| |\varphi(x-z)| dz. \tag{6.7}$$

Використовуючи нерівність Мінковського, отримаємо оцінку

$$\|(J\varphi)\|_{L_p([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dz \times$$
$$\times \left(\int_a^b |\varphi(x-z)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dt \|\varphi\|_{L_p([a,b])}. \tag{6.8}$$

З (6.6) та (6.8) маємо

$$\|((I_{a+}^\alpha - I_{a+}^{\alpha_0})\varphi)\|_{L_p([a,b])} \leq$$
$$\leq \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \|\varphi\|_{L_p([a,b])} +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dz \|\varphi\|_{L_p([a,b])}.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність в останньому інтегралі можна здійснити граничний перехід при $\alpha \to \alpha_0$. Очевидно, $\left|1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)}\right| \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$. Отже,

$$\frac{\|(I^{\alpha}_{a+} - I^{\alpha_0}_{a+})\|_{L_p([a,b])}}{\|\varphi\|_{L_p([a,b])}} = 0.$$

Нехай тепер $\alpha_0 = 0$. Наше завдання – довести, що

$$\lim_{\alpha \to 0} \|(I^{\alpha}_{a+}\varphi) - \varphi\|_{L_p([a,b])} = 0.$$

Справді, аналогічно (6.7), перепишемо різницю наступним чином:

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) - \varphi(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)dt - \varphi(x) =$$
$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-a} (\varphi(x-t) - \varphi(x))t^{\alpha-1}dt +$$
$$+\varphi(x)\left(\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right) = (K\varphi)(x) + (L\varphi)(x),$$

звідси $\|(I^{\alpha}_{a+}\varphi) - \varphi\|_{L_p([a,b])} \le \|(K\varphi)\|_{L_p([a,b])} + \|(L\varphi)\|_{L_p([a,b])}$. Очевидно,

$$\|(L\varphi)\|^p_{L_p([a,b])} \le \int_a^b |\varphi(x)|^p \left|\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right|^p dx.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність в останньому інтегралі можна здійснити граничний перехід при $\alpha \to 0$. Отже, $\lim_{\alpha\to 0+} \|(L\varphi)\|^p_{L_p([a,b])} = 0$. Щоб оцінити $(K\varphi)$, припустимо, що φ – неперервно диференційовна. Тоді

$$|(K\varphi)(x)| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{b-a} t^{\alpha} \max_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)|dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$

рівномірно по x. Крім того, можна апроксимувати функцію $\varphi(x)$ послідовністю неперервно диференційовних функцій $\varphi_n(x)$ за нормою в $L_p([a,b])$. Тоді

$$\|(K\varphi)\|_{L_p([a,b])} \le \|(K(\varphi - \varphi_n))\|_{L_p([a,b])} +$$
$$+\|(K\varphi_n)\|_{L_p([a,b])}. \tag{6.9}$$

Застосуємо узагальнену нерівність Мінковського до першого доданка в (6.9), матимемо

$$\|K(\varphi - \varphi_n)\|_{L_p([a,b])} \le \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \|\varphi - \varphi_n\|_{L_p([a,b])} \to 0$$

при $n \to \infty$, рівномірно при $\alpha \in [0,1]$. Щодо другого доданка, то для довільного $x \in [a,b]$ та для довільного фіксованого n маємо

$$|(K\varphi_n)(x)| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^{b-a} t^{\alpha} \max |\varphi'_n(t)|dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

при $\alpha \to 0$, звідки $\|(K\varphi_n)\|_{L_p([a,b])} \to 0$ при $\alpha \to 0$, що й доводить теорему. □

Зауваження 6.1. За теоремою 2.7 [4], збіжність

$$\lim_{\alpha\to 0} (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = \varphi(x)$$

виконується для майже всіх $x \in [a,b]$.

Розглянемо деякі приклади обчислення дробових інтегралів.

7 Обчислення деяких дробових інтегралів

Приклад 7.1. Нехай $f(x) = x^{\beta}, \beta > -1$. Тоді

$$\left(I^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta} dt =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

Приклад 7.2. Нехай $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda > 0$. Тоді

$$\left(I^{\alpha}_{+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt =$$
$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\alpha-1} dz =$$
$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1} d\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^{\alpha}}.$$

Приклад 7.3. Нехай $a = 0, b = 1, \beta > 0, \gamma > \beta$, $f(s) = s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma}$. Тоді для довільного $t \in$

$(0,1)$ мають місце наступні перетворення:

$$\left(I_{0+}^{\gamma-\beta} f\right)(t) =$$
$$= \int_0^t (t-s)^{\gamma-\beta-1} s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma} ds = |s = tz| =$$
$$= t^{-1} \int_0^1 (1-z)^{\gamma-\beta-1} z^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} - z\right)^{-\gamma} dz =$$
$$= \left| z = \frac{u/t}{1/t - 1 + u} \right| =$$
$$= t^{-1} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{1-t+tu}\right)^{\gamma-\beta-1} \times$$
$$\times \left(\frac{u}{1-t+tu}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{t}\frac{u}{1-t+tu}\right)^{-\gamma} \times$$
$$\times \frac{1-t+tu-ut}{(1-t+tu)^2} du =$$
$$= t^{-1} \int_0^1 \left(\frac{1-t+tu-u}{1-t+tu}\right)^{\gamma-\beta-1} \times$$
$$\times \frac{u^{\beta-1}}{(1-t+tu)^{\beta-1}} \frac{(1-t)^\gamma}{t^{-\gamma}(1-t+tu)^{-\gamma}} \times$$
$$\times \frac{1-t}{(1-t+tu)^2} du = t^{\gamma-1} \times$$
$$\times \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} u^{\beta-1} (1-t)^{-\gamma+1} \times$$
$$\times t^\gamma (1-t+tu)^{-\gamma+\beta+1-\beta+1+\gamma-2} du =$$
$$= t^{\gamma-1}(1-t)^{-\beta} \int_0^1 (1-u)^{\gamma-\beta-1} u^{\beta-1} du =$$
$$= t^{\gamma-1}(1-t)^{-\beta} B(\gamma-\beta, \beta) =$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\gamma-1}}{(1-t)^\beta}.$$

Як наслідок, для $f(s) = s^{\beta-1}(b-s)^{-\gamma}$, $b > 1$

$$\int_0^1 (1-s)^{\gamma-\beta-1} s^{\beta-1}(b-s)^{-\gamma} ds =$$
$$= b^{-1} \int_0^{1/b} (1-z)^{-\gamma} z^{\beta-1} (1/b - s)^{\gamma-\beta-1} dz$$
$$= b^{-1} B(\gamma-\beta, \beta) \frac{(1/b)^{\gamma-1}}{(1-1/b)^\beta} =$$
$$= b^{\beta-\gamma}(b-1)^{-\beta} B(\gamma-\beta, \beta).$$

Тому для довільних $x > 0, a > 0, 0 < \alpha < 1$

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha} (t+a)^{-1} dt =$$
$$= x^{-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} (s + a/x)^{-1} ds$$
$$= x^{-1} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (a/x + 1 - s)^{-1} ds =$$
$$= |\gamma = 1, \beta = \alpha, b = a/x + 1|$$
$$= x^{-1} (a/x+1)^{\alpha-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{-\alpha} B(1-\alpha, \alpha) =$$
$$= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{(a+x)^{\alpha-1}}{a^\alpha}. \tag{7.10}$$

Приклад 7.4. Нехай $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – вінерівський процес. Оскільки траєкторії W неперервні м. н., для довільного $\alpha > 0$ існує дробовий інтеграл

$$\left(I_{0+}^\alpha W\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} W_t dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha dW_t, x \geq 0,$$

і останній інтеграл є вінерівським, тобто інтегралом від невипадкової функції відносно вінерівського процесу. Це гауссовий процес з середнім

$$\mathsf{E}\left(I_{0+}^\alpha W\right)(x) = 0$$

і коваріацією

$$cov\left(\left(I_{0+}^\alpha W\right)(x), \left(I_{0+}^\alpha W\right)(y)\right) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \int_0^{x \wedge y} (x-t)^\alpha (y-t)^\alpha dt,$$

для довільних $x, y \geq 0$.

Інтеграл $(I_{0+}^\alpha W)$ – частковий випадок гауссовських процесів, які є інтегралами з сингулярними ядрами. Детально вони розглянуті в роботах [1, 2, 3, 5]. Крім того, випадковий процес $X_x = \int_0^x (x-t)^\alpha dW_t, x \geq 0$ існує не тільки для $\alpha > 0$, але і для $\alpha > -1/2$, оскільки його існування залежить від збіжності інтеграла $\int_0^x (x-t)^{2\alpha} dt$. Процес X називається дробовим броунівським рухом Ліувілля.

Висновки

В статті розглянуто базові властивості дробових інтегралів, причому доведення наведено у найбільш простій і прозорій формі. Для подальшого знайомства з темою рекомендуємо книги та статті [4] – [10].

Список використаних джерел

1. *Baudoin F.* Equivalence of Volterra processes / F. Baudoin, D. Nualart // Stochastic Process. Appl. (107), 2003. – 2. – P. 327–350.
2. *Mishura Yu.* Gaussian processes with Volterra kernels / Yu. Mishura, G. Shevchenko, S. Shklyar // URL: https://arxiv.org/pdf/2001.03405.pdfmath.
3. *Mishura Yu.* Gaussian Volterra processes with power-type kernels / Yu. Mishura, S. Shklyar // Mod. Stoch. Theory Appl., 2022.
4. *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives (Vol. 1) / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, 1993.
5. *Sottinen T.* Stochastic Analysis of Gaussian Processes via Fredholm Representation / T. Sottinen, L. Viitasaari // Int. Journ. of Stoch. An. 2016. – DOI: 10.1155/2016/8694365, URL: http://dx.doi.org/10.1155/2016/8694365.
6. *Stein E. M.* Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32 / E. M. Stein, G. Weiss. – Princeton University press, 2016.
7. *Das S.* Functional Fractional Calculus – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20545-3
8. *Butzer P.L.* An introduction to fractional calculus / P.L. Butzer, U. Westphal // Applications of Fractional Calculus in Physics, pp. 1-85, 2000. URL: https://doi.org/10.1142/9789812817747.0001
9. *Anastassiou G. A.* Constructive Fractional Analysis with Applications – Springer Nature, 2021.
10. *Anastassiou G. A.* Generalized Fractional Calculus: New Advancements and Applications – Springer, 2021.

References

1. *BAUDOIN, F., NUALART, D.* (2003) Equivalence of Volterra processes // *Stochastic Processes and their Applications.* Vol. 107, No. 2, p. 327–350.
2. *MISHURA, YU., SHEVCHENKO, G., SHKLYAR, S.* Gaussian processes with Volterra kernels. URL: https://arxiv.org/pdf/2001.03405.pdfmath.
3. *MISHURA, YU., SHKLYAR, S.*(2022) Gaussian Volterra processes with power-type kernels. // *Mod. Stoch. Theory Appl.*.
4. SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I. (1993) Fractional integrals and derivatives (Vol. 1). *Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science.*
5. *SOTTINEN, T., VIITASAARI, L.* (2016) Stochastic Analysis of Gaussian Processes via Fredholm Representation // *International Journal of Stochastic Analysis.* DOI: 10.1155/2016/8694365, URL: http://dx.doi.org/10.1155/2016/8694365.
6. *STEIN, E. M., WEISS, G.* (2016) Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32. *Princeton University press.*
7. *DAS S.* (2011) Functional Fractional Calculus. – *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20545-3
8. *BUTZER, P.L., WESTPHAL, U.* (2000) An introduction to fractional calculus // *Applications of Fractional Calculus in Physics*, pp. 1-85. URL: https://doi.org/10.1142/9789812817747.0001
9. *ANASTASSIOUS, G. A.*(2021) Constructive Fractional Analysis with Applications. *Springer Nature.*
10. *ANASTASSIOUS, G. A.*(2021) Generalized Fractional Calculus: New Advancements and Applications. *Springer.*

Received: 11.01.2022