УДК 517.51
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.3

В.О. Волошина[1], *аспірант*

Про точну сталу в нерівності Дзядика для похідної від алгебраїчного полінома

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: victoria.voloshyna@yahoo.com

V.O. Voloshyna[1], *PhD student*

On exact constant in Dzyadyk inequality for the derivative of an algebraic polynomial

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: victoria.voloshyna@yahoo.com

Анотація. *Нерівність Бернштенйна*

$$\|T_n'\|_{C(R)} \leqslant n\|T_n\|_{C(R)}$$

умоложливила отримання конструктивної характеристики наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами T_n степеня n. Натомість, наслідок цієї нерівності для алгебраїчних поліномів P_n степеня n, а саме, нерівність

$$\|\varphi P_n'\| \leqslant n\|P_n\|,$$

де $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C([-1,1])}$ та $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, не розв'язує задачу отримання конструктивної характеристики наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами. Так само не розв'язує цю задачу і нерівність Маркова

$$\|P_n'\| \leqslant n^2\|P_n\|.$$

Більше того, не достатньо навіть наслідку нерівностей Бернштейна і Маркова:

$$\|\varphi_n P_n'\| \leqslant 2n\|P_n\|,$$

$$\text{де} \quad \varphi_n(x) := \sqrt{1-x^2+\frac{1}{n^2}}.$$

Вказану задачу, як і ряд інших теоретичних і практичних задач, розв'язує нерівність Дзядика

$$\|\varphi_n^{1-s} P_n'\| \leqslant c(s)n\|\varphi_n^{-s} P_n\|,$$

справедлива для кожного $s \in \mathbb{R}$. На відміну від нерівностей Бернштейна та Маркова, точна стала в нерівності Дзядика невідома для всіх $s \in \mathbb{R}$, але відома асимтотично точна стала для натуральних s: $c(s) = 1 + s + s^2$; а для $n \geqslant 2s, s \in \mathbb{N}$, відома навіть точна стала

$$c(n,s) = \left(1 + s\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - s.$$

В нашій замітці цей результат поширено на випадок $s \leqslant n < 2s$.

Ключові слова: Точна стала, нерівність Дзядика, алгебраїчні поліноми.

Abstract. *Bernstein inequality*

$$\|T_n'\|_{C(R)} \leqslant n\|T_n\|_{C(R)}$$

made it possible to obtain a constructive characterization of the approximation of periodic functions by trigonometric polynomials T_n of degree n. Instead, the corollary of this inequality for algebraic polynomials P_n of degree n, namely, the inequality

$$\|\varphi P_n'\| \leqslant n\|P_n\|,$$

where $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1,1]}$ *and* $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$*, does not solve the problem obtaining a constructive characterization of the approximation of continuous functions on a segment by algebraic polynomials. Markov inequality*

$$\|P_n'\| \leqslant n^2 \|P_n\|.$$

does not solve this problem as well. Moreover, even the corollary

$$\|\varphi_n P_n'\| \leqslant 2n \|P_n\|,$$

$$\textit{where} \quad \varphi_n(x) := \sqrt{1 - x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

of Bernstein and Markov inequalities is not enough. This problem, like a number of other theoretical and practical problems, is solved by Dzyadyk inequality

$$\|\varphi_n^{1-s} P_n'\| \leqslant c(s) n \|\varphi_n^{-s} P_n\|,$$

valid for each $s \in \mathbb{R}$*. In contrast to the Bernstein and Markov inequalities, the exact constant in the Dzyadyk inequality is unknown for all* $s \in \mathbb{R}$*, whereas the asymptotically exact constant for natural* s *is known:* $c(s) = 1 + s + s^2$*; and for* $n \geqslant 2s, s \in \mathbb{N}$*, even the exact constant is known:*

$$c(n,s) = \left(1 + s\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - s.$$

In our note, this result is extended to the case $s \leqslant n < 2s$*.*

Key Words: Exact constant, Dzyadyk inequality, algebraic polynomials.

Статтю представив д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН України, Шевчук І.О.

1 Вступ

Нехай $\mathcal{P}_n$ – простір алгебраїчних поліномів степеня $\leqslant n$, з дійсними коефіцієнтами, $\|f\| := \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ - рівномірна норма функції $f \in C[-1,1]$, k – натуральне число,

$$c(n,k) = \left(1 + k\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - k$$

та

$$\varphi_n(x) := \sqrt{1 - x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

Для $n \geqslant 2k$ в роботі [1] доведена наступна теорема 1.1.

В нашій замітці показано, що теорема 1.1 справедлива також для $n \geqslant k$.

Теорема 1.1. *Для кожних натуральних чисел k і $n \geqslant k$ та кожного полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконується нерівність*

$$\|P_n' \varphi_n^{1-k}\| \leqslant c(n,k) n \|P_n \varphi_n^{-k}\|. \tag{1}$$

В нерівності Дзядика [2, 3] (с. 262) стала $c(n,k)$ є точною, оскільки справедлива теорема 1.2. Теорема 1.2 доведена у [1], хоча сформульована там лише для $n \geqslant 2k$.

Теорема 1.2 ([1]). *Для кожних натуральних чисел k і $n \geqslant k$ знайдеться поліном $P_n \in \mathcal{P}$ такий, що*

$$\|P_n' \varphi_n^{1-k}\| = (n,k) n \|P_n \varphi_n^{-k}\|. \tag{2}$$

Нарешті зауважимо, що

$$c(n,k) \leqslant 1 + k + k^2 \qquad \text{і що}$$

$$c(n,k) \to 1 + k + k^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2 Обгрунтування справедливості теореми 1.1

Зафіксуємо $a \in (0,1), k \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}, n \geqslant k$. Позначимо через $\mathcal{T}_n$– простір тригонометричних поліномів

$$T_n = a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$$

степеня $\leqslant n$ з дійсними коефіцієнтами. Нехай $w = e^{it}, t \in \mathbb{R}$.

Слідуючи [1], позначимо

$$\rho(t) := |w^2 - a| = \sqrt{(1-a)^2 + 4a \sin^2 t}, \tag{3}$$

$$S(w) := w^{n-2k}(w^2-a)^k$$

та

$$Q(t) := \mathrm{Re}\, S\left(e^{it}\right),$$

- тригонометричний поліном степеня n, також

$$A(t) := \left|e^{2it} - \left(1-\frac{2k}{n}\right)a\right| =$$

$$\sqrt{\left(1-\left(1-\frac{2k}{n}\right)a\right)^2 + 4a\left(1-\frac{2k}{n}\right)\sin^2 t}.$$

Сформулюємо наступну лему.

Лема 2.1 ([1]). *Для полінома Q справджуються нерівності*

$$|Q(t)| \leqslant |S(e^{it})| = \rho^k(t), t \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

$$|Q'_{2n}(t)| \leqslant \left|\frac{d}{dt}S_n(e^{it})\right| = n\rho^{k-1}(t)A(t), t \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

Буде потрібне наступне уточнення теореми Бернштейна [1, стор. 498]. Нехай H_l – алгебраїчний поліном степеня l, який не має нулів зовні одиничного круга.

Теорема 2.1. *Якщо тригонометричний поліном T_n степеня $n \geqslant l/2$ задовольняє нерівність*

$$|T_n(t)| \leqslant |H_l(e^{it})|$$

для всіх дійсних значень t, то

$$|T'_n(t)| \leqslant |(n-l)H_l(e^{it}) + e^{it}H'_l(e^{it})|.$$

С. Н. Бернштейн [1, стор. 498] отримав цю теорему для випадку $n \geqslant l$, а для всіх $n \geqslant l/2$, теорема 2.1 випливає з теореми 2.2.

Теорема 2.2 ([4]). *Нехай $R(z)$ - алгебраїчний поліном степеня n, що має всі нулі у $|z| \leqslant 1$ та $P(z)$ - алгебраїчний поліном степеня не вищого за степінь $P(z)$. Якщо*

$$|P(z)| \leqslant |R(z)| \qquad (6)$$

для $|z| = 1$, то для довільного $|\beta| \leqslant 1$ маємо

$$\left|\frac{zP'(z)}{n} + \beta\frac{P(z)}{2}\right| \leqslant \left|\frac{zR'(z)}{n} + \beta\frac{R(z)}{2}\right|, \qquad (7)$$

для $|z| = 1$.

Доведення теореми 2.1. Ми застосовуємо наступні аргументи Tamas Erdely та дякуємо професору Dany Leviatan за те, що він звернув на них нашу увагу. Отже, нехай P_{2n} та R_{2n} – алгебраїчні поліноми степеня $2n$, означені відповідно рівностями

$$T_n(t) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n} \quad \text{для} \quad z = e^{it}, \qquad \text{та}$$

$$R_{2n}(z) := z^{2n-l}H_l(z).$$

При цьому зауважимо, що R_{2n} є алгебраїчним поліномом, оскільки за умовою $n \geqslant l/2$. Зрозуміло, $|T_n(t)| \equiv |P_{2n}(e^{it})|$ та $|H_l(e^{it})| \equiv |R_{2n}(e^{it})|$, тому для полномів P_{2n} та R_{2n} виконується умова (6) теореми 2.2. Далі, оскільки, при $z = e^{it}$

$$T'_n(t) = iz\left(\frac{P'_{2n}(z)}{z^n} - \frac{nP_{2n}(z)}{z^{n+1}}\right) \quad \text{та}$$

$$\frac{zR'_{2n}(z)}{2n} - \frac{R_{2n}(z)}{2} =$$

$$\frac{1}{2n}\left(H'_l(z)z^{2n-l+1} + (n-l)H_l(z)z^{2n-l}\right),$$

то за теоремою 2.2 з $\beta = -1$ отримуємо

$$|T'_n(t)| = 2n\left|\frac{zP'_{2n}(z)}{2n} - \frac{P_{2n}(z)}{2}\right| \leqslant$$

$$2n\left|\frac{zR'_{2n}(z)}{n} + \beta\frac{R_{2n}(z)}{2}\right| =$$

$$|(n-l)H_l(e^{it}) + e^{it}H'_l(e^{it})|.$$

□

Список використаних джерел

1. *Галан В.Д., Шевчук І. О.* Точна стала в нерівності Дзядика для похідної від алгебраїчного полінома // Український математичний журнал. – 2017. – №5,Т.69. – С. 624-630.

2. *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip$\alpha(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке действительной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – 20. – С. 623 – 642.

3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

4. *Malik M.A., Vong M.C.* Inequalities concerning the derivative of polynomials. – Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie I1, Tomo XXXIV (1985), pp. 422-426.

References

1. HALAN, V.D. and SHEVCHUK, I.O. (2017). Exact Constant in Dzyadyk's Inequality for the Derivative of an Algebraic Polynomial. Ukrainian Mathematical Journal, 69(5), pp.624-630.
2. DZYADYK, V.K. (1966). O konstruktivnoj harakteristike funkcij, udovletvorjajushhih usloviju Lip$\alpha(0 < \alpha < 1)$ na konechnom otrezke dejstvitel'noj osi. Izv. AN SSSR. Ser. mat., 20, pp.623-642.
3. DZYADYK, V.K. (1977). Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami. Moskva: Nauka.
4. MALIK, M.A. and VONG, M.C. (1985). Inequalities concerning the derivative of polynomials. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie I1, Tomo XXXIV, pp.422-426.

Надійшла до редколегії 15.10.2021