A Tarefa de Clusterização por meio do Método de Lógica *Fuzzy* no Processo de *Data Mining*

José Márcio Cassettari Junior[1], Merisandra Côrtes de Mattos[2], Priscyla Waleska Targino de Azevedo Simões[2], Cristian Cechinel[3]

capitall1@gmail.com, {mem, pri}@unesc.net, ccechinel.unipampa@ufpel.edu.br

[1]Acadêmico do Curso de Ciência da Computação – Unidade Acadêmica de Ciências, Engenharias e Tecnologias – Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC) – Criciúma – SC

[2]Professora do Curso de Ciência da Computação – Unidade Acadêmica de Ciências, Engenharias e Tecnologias – Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC) – Criciúma – SC

[3]Professor do Curso de Engenharia da Computação – Unipampa/Bagé – Conselho Coordenador do Ensino, da Pesquisa e da Extensão – Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Pelotas – RS

Abstract. *The improvement of storage models made possible the creation of great databases, making necessary the use of techniques that assist the exploration of these information. Amongst the available ones, it is distinguished application of data mining concepts. This article demonstrates the mathematical modeling and implementation of the fuzzy logic algorithm Gustafson-Kessel for the clustering task, that has as objective to partition the different data in groups with similar characteristics, considering that the fuzzy logic assists in this process therefore makes possible to the elements to belong the distinct groups simultaneously.*

Keywords: Artificial Intelligence, Data Mining, Clustering Task, Fuzzy Logic, Gustafson-Kessel Algorithm.

Resumo. *O avanço dos modelos de armazenamento possibilitou a criação de grandes bases de dados, tornando-se necessário a utilização de técnicas que auxiliem a exploração destas informações. Dentre as disponíveis, destaca-se a aplicação das tarefas e métodos de data mining. Este artigo demonstra a modelagem matemática e implementação do algoritmo de lógica fuzzy Gustafson-Kessel para a tarefa de clusterização, que tem como objetivo particionar os diferentes dados em grupos com características semelhantes, considerando que a lógica fuzzy auxilia neste processo pois possibilita aos elementos pertencerem a grupos distintos simultaneamente.*

Palavras-chave: Inteligência Artificial, *Data Mining*, Tarefa de Clusterização, Lógica *Fuzzy*, Algoritmo Gustafson-Kessel.

1. Introdução

O grande volume de dados gerado pelas organizações necessita ser transformado em conhecimento a fim de beneficia-las. Neste caso, é comum estas instituições utilizarem métodos estatísticos, porém apenas estes cálculos matemáticos não são suficientes para descobrir informações e gerar conhecimento.

Considerando isto, surgiu o conceito de *data mining*, que implementa técnicas de Inteligência Artificial, Estatística, Banco de Dados e Aprendizado de Máquina, para descoberta de conhecimento relevante em diferentes bases de dados. O processo de *data mining* envolve tarefas e métodos que possuem características específicas e são aplicados conforme os objetivos da descoberta de conhecimento, em uma determinada base de dados [KANTARDZIC, 2003].

Estas tarefas e métodos de *data mining* encontram-se implementados em ferramentas, denominadas de *Shells*, as quais são utilizadas a fim de auxiliar na descoberta de padrões e relações relevantes. No entanto, grande parte destas aplicações são comerciais, tornando-se inviável para determinadas organizações [BERRY; LINOFF, 2004].

Dentre estas ferramentas, existe em desenvolvimento a *Shell* Orion *Data Mining Engine*, projeto o qual objetiva a construção de uma ferramenta de *data mining* gratuita. Até o momento, a *Shell* Orion possui implementados os módulos referentes as tarefas de associação pelo algoritmo *APriori*, de classificação pelos algoritmos ID3 e CART e de clusterização pelos algoritmos *K-Means* e *Kohonen*.

Além destes métodos, outros estão em fase de desenvolvimento, como por exemplo o algoritmo de classificação C4.5 e a tarefa de pré-processamento do processo de KDD, com o objetivo de aumentar as funcionalidades disponíveis na *Shell* Orion *Data Mining Engine*.

Considerando isto, esta pesquisa consiste na implementação do método de lógica *fuzzy* pelo algoritmo Gustafson-Kessel para a tarefa de clusterização da *Shell* Orion, com o objetivo de expandir as diferentes maneiras de descoberta de conhecimento da ferramenta.

2. O Método de Lógica *Fuzzy* para a Tarefa de Clusterização

O processo de agrupar dados que possuem características similares em diferentes grupos é chamado de clusterização. Esta tarefa não necessita de exemplos ou classes pré-definidas para ser executada, pois a criação dos grupos acontece conforme são detectadas as informações que os dados possuem em comum [BERRY; LINOFF, 2004].

No entanto, quando a tarefa de clusterização é aplicada em grandes bases de dados, parte da informação pode estar localizada entre dois *clusters*. Nesta situação, existe a possibilidade destes dados serem forçados a pertencer a um grupo o qual não possua suas características, o que prejudica a execução da tarefa e por conseqüência, gera ambigüidade dos resultados obtidos [BEZDEK et al, 2005].

A fim de solucionar este problema existe, dentre os métodos de clusterização, o de lógica *fuzzy*, onde os elementos de um *cluster* podem pertencer a outros grupos ao mesmo tempo, dependendo dos graus de pertinência envolvidos [HÖPPNER et al, 1999].

Diferente da lógica booleana (que permite apenas os valores 0 e 1), a lógica difusa utiliza os conjuntos *fuzzy* para executar seus cálculos, os quais podem assumir valores intermediários, ou seja, valores entre 0 e 1. A teoria utiliza a função de grau de pertinência para identificar o quanto um elemento pertence a um conjunto [ZADEH, 1965].

Dentre os diferentes algoritmos de lógica *fuzzy*, o algoritmo Gustafson-Kessel se diferencia pela utilização de uma matriz de covariância em cada *cluster*, permitindo aos grupos assumirem diferentes formas e tamanhos.

3. O Algoritmo Gustafson-Kessel

Em 1979, na *IEEE Conference on Decision and Control* na cidade de San Diego, Califórina, Donald E. Gustafson e William C. Kessel publicaram o artigo *Fuzzy Clustering with Fuzzy Covariance Matrix*. Neste, eles descrevem uma modificação do tradicional algoritmo *Fuzzy C-Means* (FCM). A modificação descrita no artigo foi intitulada como Gustafson-Kessel (GK), devido ao nome de seus autores.

A principal alteração em relação ao FCM foi a troca da distância euclidiana por outra que encontra com maior precisão os grupos existentes. Considerando isto, os autores adotaram a distância de Mahalanobis, a qual implementa uma matriz de covariância entre os atributos disponíveis na base de dados. Esta matriz possui a função de calcular a relação entre as diferentes propriedades, a fim de possibilitar maior flexibilidade ao determinar os grupos encontrados [BEZDEK et al, 2005].

A matriz de covariância permite ao algoritmo Gustafson-Kessel encontrar *clusters* de formas geométricas independentes, ou seja, cada grupo possui suas próprias características de dimensões. Por isso, os resultados gerados pelo GK são, em geral, superiores em relação aos algoritmos tradicionais e ao FCM [GUSTAFSON; KESSEL, 1979].

Este algoritmo implementa o parâmetro *fuzzyficador* (m), o qual determina a *fuzzyficação* entre os elementos e seus protótipos. Se o valor de m for 1, não existirá esta relação de *fuzzyficação* entre dados e grupos, o que gera uma clusterização tradicional, onde cada elemento pertence exclusivamente a um *cluster*. Normalmente, é utilizado o valor 2 para este parâmetro, pois desenvolve uma *fuzzyficação* satisfatória entre elementos e *clusters* [COX, 2005].

O algoritmo Gustafson-Kessel permite apenas a utilização de valores numéricos, pelo fato de todo o processo de clusterização realizar somente operações matemáticas. Se for necessário a utilização de atributos nominais, estes devem ser convertidos em valores decimais [BEZDEK et al, 2005].

4. Modelagem Matemática do algoritmo Gustafson-Kessel

Na demonstração dos cálculos utilizou-se uma base de dados que foi gerada com valores randômicos e possui dois elementos (x_1, x_2), sendo que cada um destes contém dois atributos (a, b). A Tabela 1 demonstra os valores desta base de dados.

Tabela 1. Base de dados utilizada na modelagem matemática do algoritmo

Atributos	x_1	x_2
a	5	10
b	5	20

Definidos os dados de entrada, deve-se escolher os valores dos parâmetros do algoritmo. Nesta etapa da pesquisa foram utilizados os seguintes valores:

a) **quantidade de *clusters***: especifica o número de grupos que será encontrado. Neste caso, optou-se pelo valor 2;

b) **parâmetro de *fuzzyficação* (*m*)**: determina o grau de *fuzzyficação* entre os elementos. Foi definido o número padrão do algoritmo, o valor 2;

c) **taxa de erro (*ε*)**: estipula a parada do algoritmo. Neste caso, foi utilizado o valor 10^{-05} (0.00001) apenas para exemplificar os cálculos de erro;

Inicialmente, deve-se atribuir os primeiros valores da matriz de pertinências *U*. Os valores inseridos (Tabela 2) também foram aleatórios, considerando a propriedade de soma das pertinências envolvidas, definida pelo somatório das pertinências de um elemento a todos os *clusters* deve ser igual a um:

$$\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1$$

Tabela 2. Matriz de pertinência utilizada na modelagem matemática do algoritmo

Atributos	x_1	x_2
c_1	0.19375	0.8388
c_2	0.80625	0.1612

1. Na primeira fase do algoritmo calcula-se o centro dos *clusters*, os quais devem ser encontrados por meio da seguinte equação:

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{p} \left(u_{ij}\right)^m x_j}{\sum_{j=1}^{p} \left(u_{ij}\right)^m}$$

Nesta equação, é feito um somatório de todas as matrizes disponíveis, onde cada matriz é multiplicada por sua respectiva pertinência em relação ao atual *cluster*, elevada ao grau de *fuzzyficação*. Todos estes valores são divididos pela soma de todas as pertinências envolvidas elevadas ao grau de *fuzzyficação*.

Considerando isto, tem-se com a substituição dos valores relacionados ao primeiro *cluster*:

$$c_1 = \frac{\left(u_{11}\right)^m \cdot x_1 + \left(u_{12}\right)^m \cdot x_2}{\left(u_{11}\right)^m + \left(u_{12}\right)^m} = \frac{0.19375^2 \cdot \begin{bmatrix} 5.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} + 0.8388^2 \cdot \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \end{bmatrix}}{0.19375^2 + 0.8388^2}$$

A operação de multiplicação das matrizes pelos seus graus de pertinência envolve todos os valores de cada matriz:

$$c_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.1877 \\ 0.1877 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.03585 \\ 14.07171 \end{bmatrix}}{0.03754 + 0.70359}$$

Por fim, os valores obtidos da soma entre as matrizes são divididos individualmente pela soma dos graus de pertinência:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 9.74674 \\ 19.24023 \end{bmatrix}$$

Executando o mesmo procedimento para o segundo *cluster*, encontra-se como resultado a seguinte matriz:

$$c_2 = \begin{bmatrix} 5.19219 \\ 5.57658 \end{bmatrix}$$

2. Após determinar os centros dos *clusters*, deve-se calcular as matrizes de covariância *fuzzy* de cada *cluster*, por meio da equação:

$$F_i = \frac{\sum_{j=1}^{p} \left(u_{ij}\right)^m \left(x_j - c_i\right)\left(x_j - c_i\right)^T}{\sum_{j=1}^{p} \left(u_{ij}\right)^m}$$

Nesta equação executa-se um somatório dos graus de pertinência elevados ao parâmetro de *fuzzyficação*. Este valor é multiplicado pela subtração entre os dados e os centros.

A próxima multiplicação envolve a mesma subtração entre os dados e os centros, porém na forma transposta. Esta propriedade de matrizes determina a inversão de linhas por colunas. Considerando os valores do primeiro *cluster* e substituindo seus respectivos valores na equação, tem-se:

$$F_1 = \frac{\left(u_{11}\right)^m \cdot \left(x_1 - c_1\right) \cdot \left(x_1 - c_1\right)^T + \left(u_{12}\right)^m \cdot \left(x_2 - c_1\right) \cdot \left(x_2 - c_1\right)^T}{\left(u_{11}\right)^m + \left(u_{12}\right)^m}$$

$$F_1 = \frac{0.19375^2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 5.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.74674 \\ 19.24023 \end{bmatrix}\right) \cdot \left([5.0, 5.0] - [9.74674, 19.24023]\right) + 0.8388^2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.74674 \\ 19.24023 \end{bmatrix}\right) \cdot \left([10.0, 20.0] - [9.74674, 19.24023]\right)}{0.19375^2 + 0.8388^2}$$

Após a substituição dos números, subtrai-se os valores das matrizes individualmente conforme suas posições e efetua-se a multiplicação dos graus de pertinência com a primeira matriz encontrada:

$$F_1 = \frac{\begin{bmatrix} -0.17819 \\ -0.53456 \end{bmatrix} \cdot [-4.74674, -14.24023] + \begin{bmatrix} 0.17819 \\ 0.53456 \end{bmatrix} \cdot [0.25326, 0.75977]}{0.74112}$$

A criação da matriz acontece nesta etapa, onde utiliza-se a propriedade de multiplicação de matrizes. Esta operação determina que uma matriz *A* (*m* x *n*) somente pode ser multiplicada por uma matriz *B* (*n* x *p*). A matriz resultante será uma matriz (*m* x *p*).

É feito um somatório da multiplicação entre cada número de uma linha de *A* e cada valor de uma coluna de *B*, onde cada resultado será um elemento da nova matriz. Este processo se repete entre todas as linhas de *A* e todas as colunas de *B*.

$$F_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.84581 & 2.53744 \\ 2.53744 & 7.61232 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.04513 & 0.13538 \\ 0.13538 & 0.40615 \end{bmatrix}}{0.74112}$$

Por fim, encontra-se a matriz de covariância pelo somatório entre as matrizes e pela divisão de cada elemento individualmente pela soma dos graus de pertinência:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1.20215 & 3.60644 \\ 3.60644 & 10.81933 \end{bmatrix}$$

Aplicando as mesmas operações ao segundo *cluster*, tem-se:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.92403 & 2.77208 \\ 2.77208 & 8.31624 \end{bmatrix}$$

3. A próxima fase consiste no cálculo das distâncias dos elementos em relação aos *clusters*. A fim de atingir este objetivo, é utilizada a seguinte equação:

$$d^2(x_j, c_i) = (x_j - c_i)^T M_i (x_j - c_i)$$

Onde:

$$M_i = \sqrt[N]{\det(F_i)} F_i^{-1}$$

Considerando a equação acima, deve-se encontrar primeiro o valor da matriz de covariância modificada M_i. Inicialmente, calcula-se o determinante da matriz de covariância *fuzzy* a fim de facilitar o cálculo da matriz inversa.

3.1. Substituindo os valores da matriz do primeiro *cluster* no cálculo do determinante de uma matriz de (2x2), tem-se:

$$F_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.20215 & 3.60644 \\ 3.60644 & 10.81933 \end{bmatrix}$$

$$\det(F_1) = (a \cdot d) - (b \cdot c) = (1.20215 \cdot 10.81933) - (3.60644 \cdot 3.60644)$$

$$\det(F_1) = 0.0000480865$$

3.2. Após encontrar o determinante, deve-se calcular a matriz inversa da matriz de covariância *fuzzy*. Considerando os valores da matriz do primeiro *cluster*, obtém-se:

$$F_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.20215 & 3.60644 \\ 3.60644 & 10.81933 \end{bmatrix}$$

$$F_1^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det(F_1)} = \frac{\begin{bmatrix} 10.81933 & -3.60644 \\ -3.60644 & 1.20215 \end{bmatrix}}{0.0000480865}$$

$$F_1^{-1}=\begin{bmatrix} 224997.2445 & -74999.0122 \\ -74999.0122 & 24999.74005 \end{bmatrix}$$

3.3. Ao encontrar o determinante e a matriz inversa, pode-se determinar a matriz de covariância modificada M_i. Substituindo os valores, considerando que N é o número de atributos da base (neste caso 2), obtém-se:

$$M_1=\sqrt[N]{\det(F_1)}\,F_1^{-1}$$

$$M_1=\sqrt[2]{0.0000480865}\cdot\begin{bmatrix} 224997.2445 & -74999.0122 \\ -74999.0122 & 24999.74005 \end{bmatrix}$$

$$M_1=\begin{bmatrix} 1560.24031 & -520.07962 \\ -520.07962 & 173.36035 \end{bmatrix}$$

3.4. Após encontrar a matriz de covariância modificada, pode-se calcular as distâncias dos elementos em relação ao primeiro *cluster*. Considerando o primeiro elemento (x_1), tem-se:

$$d^2(x_j,c_i)=(x_j-c_i)^T M_i (x_j-c_i)$$

$$d^2(x_1,c_1)=([5.0,5.0]-[9.74674,19.24023])\cdot M_1\cdot\left(\begin{bmatrix} 5.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 9.74674 \\ 19.24023 \end{bmatrix}\right)$$

A matriz de covariância modificada é uma matriz (2x2) e considerando as propriedades de multiplicação de matrizes, obtém-se:

$$d^2(x_1,c_1)=[-4.74674,-14.24023]\cdot\begin{bmatrix} -0.00168 \\ -0.00852 \end{bmatrix}=0.12933$$

Realizando o mesmo procedimento para os outros elementos e grupos, obtém-se:

$$d^2(x_2,c_1)=0.00037 \quad d^2(x_1,c_2)=0.00021 \quad d^2(x_2,c_2)=0.13106$$

4. Após encontrar os valores das distâncias, pode-se executar a próxima fase do algoritmo, a atualização das pertinências, definida pela seguinte equação:

$$u_{ij}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{d_{ij}^2}{d_{kj}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$$

O somatório da divisão das distâncias calcula a pertinência atualizada. Aplicando está formula ao primeiro *cluster* e ao elemento inicial, tem-se:

$$u_{11}=\frac{1}{\left(\frac{d_{11}^2}{d_{11}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}+\left(\frac{d_{11}^2}{d_{12}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$u_{11}=\frac{1}{\left(\frac{0.12933}{0.12933}\right)^{\frac{1}{2-1}}+\left(\frac{0.12933}{0.00021}\right)^{\frac{1}{2-1}}}$$

$u_{11} = 0.00162$

Considerando o mesmo processo para os outros elementos e *clusters*, encontra-se as outras pertinências, demonstradas na Tabela 3:

Tabela 3. Matriz de pertinências atualizada

Atributos	x_1	x_2
c_1	0.00162	0.99719
c_2	0.99838	0.00281

5. Encontrando as pertinências atualizadas, deve-se calcular o erro do algoritmo com o objetivo de parar sua execução. Isto é determinado pela seguinte condição:

$$\|U^{l} - U^{l-1}\| \leq \varepsilon$$

Substituindo as duas matrizes de pertinências, a anterior e a atual, tem-se:

$$\left\| \begin{bmatrix} 0.19375 & 0.8388 \\ 0.80625 & 0.1612 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00162 & 0.99719 \\ 0.99838 & 0.00281 \end{bmatrix} \right\| \leq 10^{-05}$$

$$\begin{bmatrix} 0.19213 & 0.15839 \\ 0.19213 & 0.15839 \end{bmatrix} \leq 0.00001$$

Neste caso nenhum valor é menor que o erro, o que resultaria em uma próxima iteração do algoritmo, até que esta condição de parada fosse verdadeira. Considerando a compreensão de todos estes cálculos, foi possível implementar o algoritmo Gustafson-Kessel no módulo de clusterização da *Shell* Orion.

5. Resultados

O algoritmo foi implementado na *Shell* Orion *Data Mining Engine* e foi testado com uma base de dados contendo 96 registros e 45 atributos de pacientes com sepse da UTI do Hospital de Clínicas de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Utilizando os mesmo parâmetros de entrada da modelagem matemática, selecionou-se alguns atributos da base a fim de obter-se os resultados do algoritmo.

Após executar o algoritmo, os resultados podem ser visualizados em forma gráfica (Figura 1), onde é demonstrado os grupos encontrados por meio de *Principal Component Analysis* (PCA). Este método realiza a transformação de uma base de dados contendo *n* dimensões em uma matriz de 2 dimensões, por meio de sucessivas decomposições dos dados, com o objetivo de possibilitar a projeção dos elementos em um gráfico.

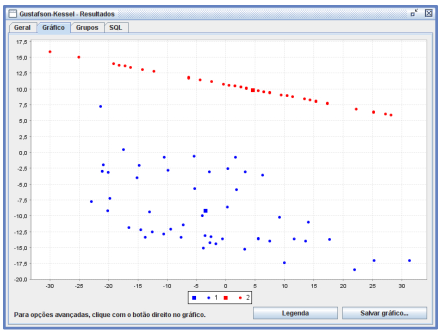

Figura 1. Gráfico construído por meio de PCA pelo algoritmo Gustafson-Kessel

A Figura 2 demonstra o resumo da clusterização pelo algoritmo Gustafson-Kessel, onde foram encontrados dois grupos. De acordo com o atributo de saída selecionado (*gravidad*), o primeiro *cluster* possui dados de pacientes com características graves e em estado de choque (valores 2 e 3), enquanto o segundo apresenta os 3 tipos de estados disponíveis na base (valores 1, 2 e 3). Estes dados obtidos pela clusterização podem ser exportados em um arquivo de texto, por meio do botão *Salvar resumo*.

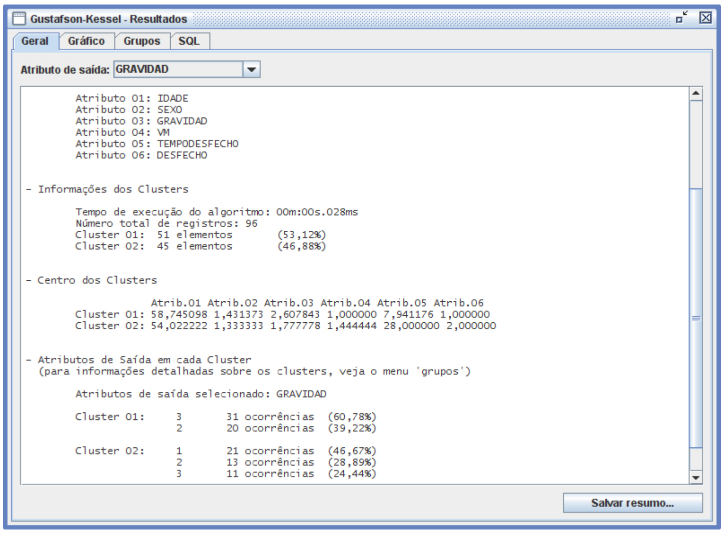

Figura 2. Resumo da clusterização do algoritmo Gustafson-Kessel

A análise dos resultados também pode ser feita por meio de uma estrutura de árvore. Esta funcionalidade foi desenvolvida com o objetivo de facilitar a navegação entre os diferentes *clusters* encontrados, a fim de possibilitar a análise individual dos dados existentes. O início da árvore contém os grupos encontrados e a quantidade de elementos.

Ao expandir um *cluster* e algum dos elementos, pode-se visualizar o conteúdo de cada dado, considerando os valores inseridos nos atributos de entrada. Também pode-se visualizar o número do elemento em relação ao banco de dados, por meio da opção *Mostrar número do elemento*, e o grau de pertinência deste elemento em relação aos grupos encontrados, utilizando a opção *Mostrar pertinências*. A Figura 3 demonstra a estrutura de árvore gerada pelo algoritmo.

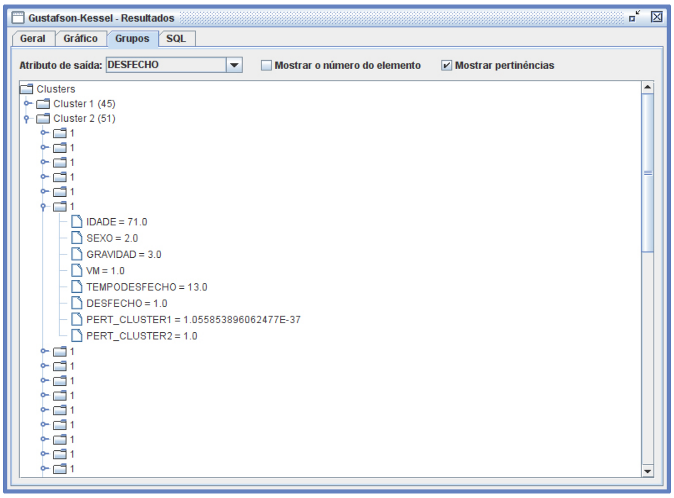

Figura 3. Árvore de grupos gerada pelo algoritmo Gustafson-Kessel

Além disto, pode-se exportar os resultados em um arquivo com formato *Structured Query Language* (SQL), permitindo a inserção dos dados em outras tarefas de *data mining*, como por exemplo a classificação, com o objetivo de melhor a descoberta de conhecimento.

6. Considerações Finais

A complexa tarefa de descoberta de novos conhecimentos em bases de dados pode ser simplificada utilizando-se os conceitos de *data mining*. Considerando suas diversas tarefas e métodos, esta técnica possibilita as organizações vantagem competitiva no que se refere a exploração de diferentes informações e no auxílio a tomada de decisão.

Entre as tarefas existentes, esta pesquisa fundamentou-se no entendimento da clusterização, especificamente sobre o algoritmo Gustafson-Kessel, o qual possibilita a identificação de grupos de diferentes formas e dimensões, por implementar a teoria da lógica *fuzzy*, que permite aos elementos pertencerem a diversos grupos simultaneamente, aumentando a precisão no particionamento dos dados.

Após a compreensão do método e a implementação do algoritmo Gustafson-Kessel na *Shell* Orion, foram executados alguns testes os quais demonstraram seu funcionamento correto, particionando os grupos corretamente devido a utilização das matrizes de covariância *fuzzy*, as quais determinam as dimensões de cada *cluster.*

Referências

BERRY, M. J. e LINOFF, G. (2004), Data mining techniques: for marketing, sales, and customer relationship management, Wiley Publishing.

BEZDEK, J., KELLER, J., KRISNAPURAM, R. e PAL, N. (2005), Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing, Springer.

COX, E. (2005), Fuzzy modeling and genetic algorithms for data mining and exploration, Morgan Kaufmann.

GUSTAFSON, D. E. e KESSEL, W. C. (1979), “Fuzzy clustering with fuzzy covariance matrix”, Proceedings of the IEEE Control and Decision Conference, San Diego, p. 761-766.

HÖPPNER, F., KLAWONN, F., KRUSE, R. e RUNKLER, T. (1999), Fuzzy cluster analysis: methods for classification, data analysis, and image recognition, John Wiley & Sons.

KANTARDZIC, M. (2003), Data Mining: Concepts, Models, Methods, and Algorithms, John Wiley & Sons.

ZADEH, L. A. (1965), “Fuzzy Sets”, Information and Control, p. 338-353.