Ciencias, Vol. 03 (2019) (23-29)
ISSN 2521-537X Versión impresa
ISSN 2706-6320 Versión electrónica
DOI:

Geometría de las transformaciones lineales en el espacio euclidiano bidimensional. Parte 1.

Geometry of linear transformations in the bidimensional euclidian space. Part.1.

[1] Dionicio Milton Chávez-Muñoz

RESUMEN

Se muestran los fundamentos matemáticos de los espacios vectoriales, de las transformaciones lineales y de las matrices, para tratar la geometría de las transformaciones lineales en el espacio euclidiano bidimensional. Se someten figuras a transformaciones de ampliación, reducción y reflexión. Se describen aspectos cualitativos de las transformaciones. Se concluye que este hecho es observado y aplicado en la vida cotidiana, así como también en muchos aspectos de las ciencias en general.

Palabras clave: Geometría de las transformaciones lineales.

ABSTRACT

|28The mathematical foundations of vector spaces, linear transformations and matrices are given to treat the geometry of linear transformations in the two-dimensional Euclidean space. Figures undergo transformations of enlargement, reduction and reflection. Qualitative aspects of the transformations are described. It is concluded that this fact is observed and applied in everyday life as well as in many aspects of science in general.

Keywords: Geometry of the transformations lines.

INTRODUCCIÓN

La matemática tiene, como se sabe, múltiples aplicaciones en las diferentes ramas de las ciencias, se mostrará al lector cómo sucede este hecho y bajo que teorías se sustenta.

Lo que se conoce hasta ahora es la aplicabilidad de la geometría a las figuras planas, por ejemplo y sobre todo en las pantallas de los celulares, monitores, etc. Todo el sustento teórico de estos resultados está encapsulado en dispositivos electrónicos denominados chips.

En este estudio se muestra que las transformaciones lineales pueden aplicarse a figuras planas de dos dimensiones haciendo uso de las matrices de orden 2X2.

Para esto se desarrolla los fundamentos matemáticos correspondientes, luego se muestran figuras concretas que han sido sometidas a las transformaciones lineales y las matrices que hacen el trabajo matemático.

El trabajo concreto se puede hacer desde una forma manual con lápiz y papel, hasta el uso de software para mostrar las características cualitativas.
En este estudio se aplicará las transformaciones lineales para ampliación-reducción, reflexión a través de los ejes coordenados y combinaciones entre estas dos transformaciones anteriores.

[1]Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann de Tacna-Perú. E-mail: miltondioni@hotmail.com

Presentado: 12/07/19 **Aprobado:** 03/10/19

MÉTODOS

Este estudio tiene el concurso del autor que hará uso de material bibliográfico en físico y online, correspondiente a esta rama de la matemática como son las transformaciones lineales del álgebra lineal.

Como recursos materiales físicos se hace uso de bibliografía referente a las transformaciones lineales. Los recursos financieros corren a cargo del autor, del mismo modo los recursos técnicos y administrativos.

Entre los métodos teóricos a usar se tienen el bibliográfico, la inducción-deducción y el uso de software online, para este estudio.

RESULTADOS

Primero se definen los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y las matrices. Se aplican las transformaciones lineales a un cuadrilátero y a una parábola para mostrar sus características cualitativas. Por un lado, analíticamente haciendo uso de la teoría y luego gráficamente, haciendo uso de un software sencillo como el Excel.

LOS ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN. Un conjunto $V \neq \phi$, junto a un Campo K y a dos operaciones, una de suma (+) y otra de multiplicación por un escalar (·), es denominado *espacio vectorial* si dicho conjunto $(V; K, +; \cdot)$ junto a las operaciones y el campo escalar K cumplen lo siguiente (Vega, 2004):

a) Existe una aplicación interna denominada suma. $+: V \times V \to V/\ (u; v) \to +(u; v) = u + v$ (La × indica producto cartesiano) y cumple los siguientes axiomas:

a1) Conmutativo. $\forall\ u; v \in V, u + v = v + u$

a2) Asociativo. $\forall\ u; v; w \in V \ \ ,\ \ u + (v + w) = (u + v) + w$

a3) Existencia de un elemento neutro aditivo. $\exists!\ \mathbf{0} \in$ V/ $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u, \forall\ u \in V$

a4) Existencia del elemento inverso aditivo. $\exists!\ "-u" \in V, \forall\ u \in V/\ u + (-u) = -u + u = \mathbf{0}$

b) Existe una aplicación externa denominada multiplicación por un escalar. $\cdot: K \times V \to V/\ (k; u) \to \cdot(k; u) = ku$, y cumple los siguientes axiomas:

b1) $\forall\ k; l \in K$ y $\forall\ u \in V,\ \ k(lu) = (kl)u$

b2) $\forall\ k; l \in K$ y $\forall\ u \in V,\ \ (k + l)u = ku + lu$

b3) $\forall\ k \in K$ y $\forall\ u; v \in V,\ \ k(u + v) = ku + kv$

b4) Existencia del elemento neutro multiplicativo. $\exists!\ "1" \in K/\ 1 \cdot u = u \cdot 1 = u, \forall u \in V$

OBSERVACIÓN. Existen muchos ejemplos de espacios vectoriales, pero aquí se pone énfasis en dos espacios vectoriales, a saber:

a) El espacio vectorial $(R^2; R, +; \cdot)$ sobre el campo escalar de los números reales R. Este cumple los ocho axiomas de la definición.

b) El espacio vectorial $(M_{2\times2}; R, +; \cdot)$ de las matrices de orden dos sobre el campo escalar de los números reales R.

LOS SUB-ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN. Sea $(V; K, +; \cdot)$ un espacio vectorial. Si $W \subset V$, $W \neq \phi$, se dice que W es un sub-espacio Vectorial de Vsi $(W; K, +; \cdot)$ cumple con las operaciones definidas para el Espacio Vectorial (Grossman, 2012).

OBSERVACIÓN

a) El espacio vectorial $(R^2; R, +; \cdot)$ sobre el campo escalar de los números reales R tiene como sub-espacios vectoriales triviales al $\{(0; 0)\}$ y al mismo $(R^2; R, +; \cdot)$.

Tiene como subespacios propios a las rectas que pasan por el origen de coordenadas $(0; 0)$ y son de la forma $W = \{(x; y) \in R^2/ax + by = 0\}$

b) El espacio vectorial $(M_{2\times2}; R, +; \cdot)$ de las matrices de orden dos sobre el campo escalar de los números reales, tiene como sub-espacios triviales al $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ y al mismo $(M_{2\times2}; R, +; \cdot)$

TRANSFORMACIONES LINEALES

DEFINICIÓN. Sean $(V; K, +; \cdot)$ y $(W; K, +; \cdot)$ dos espacios vectoriales. A la aplicación $T: V \to W$ se le llama *Transformación Lineal* u *Homomorfismo* si y solo si cumple las condiciones (Arce, 2003):

i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall\ u; v \in V$

ii) $T(ku) = kT(u), \forall\ k \in K$ y $\forall\ u \in V$

EJEMPLO 1. Mostrar que la aplicación $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = (-x; 2y)$ sobre el campo escalar $K = R$, es una transformación lineal.

En efecto. Debe cumplir las condiciones de la definición

i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall\ u; v \in R^2$

$T(u + v) \quad = T\big((x; y) + (z; w)\big) = T(x + z; y + w)$ $= (-(x + z); 2(y + w)) = (-x - z; 2y + 2w)$

$= (-x; 2y) + (-z; 2w) = T(x; y) + T(z; w)$

$= T(u) + T(v)$

ii) $T(ku) = kT(u), \forall\ k \in R$ y $\forall\ u \in R^2$

$T(ku)$ $=T\big(k(x;y)\big)$ $=T(kx;ky)$ $=(-kx;2ky)$ $=k(-x;2y)$ $=k\,T(x;y)=kT(u)$

De (i) y (ii), T es una transformación lineal.

EJEMPLO 2. Mostrar que la aplicación $T:R^2\to R^2$ definida por $T(x;y)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre el campo escalar $K=R$, es una transformación lineal, siendo $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2×2 del espacio vectorial $(M_{2\times 2};R,+;\cdot)$

En efecto. Debe cumplir las condiciones de la definición.

i) $T(u+v)=T(u)+T(v),\ \forall\ u;v\in R^2$

$T(u+v)$ $=T\big((x;y)+(z;w)\big)=T(x+z;y+w)$ $=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a(x+z) & b(y+w) \\ c(x+z) & d(y+w) \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} ax+az & by+bw \\ cx+cz) & dy+dw) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} az & bw \\ cz & dw \end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}=T(u)+T(v)$

ii) $T(ku)=kT(u),\ \forall\ k\in R$ y $\forall\ u\in R^2$

$T(ku)$ $=T\big(k(x;y)\big)$ $=T(kx;ky)$ $=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix} a(kx) & b(ky) \\ c(kx) & d(ky) \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=kT(u)$

De (i) y (ii), T es una transformación lineal.

LAS MATRICES DE ORDEN 2×2

DEFINICIÓN. Una matríz es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en n filas y m columnas; en forma abreviada se escribe como: $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, donde

b) $E=2A-B=2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

=

c) $C=AB$ $=$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2(3)+0(0) & 2(4)+0(1) \\ -2(3)+4(0) & -2(4)+4(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

a_{ij} son los elementos siendo i la fila variando en $1\le i\le n$, y j la columna variando en $1\le j\le m$ (Costa, 2018).

OBSERVACIÓN. Las matrices arriba definidas forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales R y se le expresa como $(M_{n\times m};R,+;\cdot)$. Las matrices formando parte en la definición de las transformaciones lineales las convierten en aplicaciones con mejores propiedades geométricas entre los espacios vectoriales R^n.

OPERACIONES CON MATRICES

Se tienen las siguientes (Arce, 2003):

SUMA DE MATRICES. Si $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ y $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ son dos matrices de orden $n\times m$ entonces la suma es dada por: $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{n\times m}$. Los elementos se suman término a término.

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ. Si $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ es un matriz de orden $n\times m$ y $k\in R$ es un escalar, entonces el producto del escalar por la matriz es dado por: $kA=\left[ka_{ij}\right]_{n\times m}$. El escalar entra a multiplicar a cada elemento de la matriz.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES. Si $A=[a_{ir}]_{n\times p}$ es una matriz de orden $n\times p$ y $B=\left[b_{rj}\right]_{p\times m}$ es una matriz de orden $p\times m$ entonces la multiplicación de las matrices es dada por: $AB=C=\left[c_{ij}\right]_{n\times m}$ donde cada uno de sus elemento se obtiene de $c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}$. Cada fila de la matriz A se multiplica con cada columna de la matriz B; entonces la multiplicación sólo es posible si en número de columnas de A es igual al número de filas de B.

EJEMPLO 1. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de orden 2×2; calcular las nuevas matrices:

a) $D=A+B$ b) $E=2A-B$ c) $C=AB$

Solución.

a) $D=A+B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

a) Se usan transformaciones lineales $T:R^2\to R^2$ tales que $T(x;y)=(a;b)$ sobre el campo escalar$K=R$, siendo $(x;y)\in R^2$ como conjunto de partida y $(a;b)\in R^2$ en el conjunto de llegada. En general las transformaciones lineales deforman el espacio vectorial de partida en otro de llegada (Grossman, 2012).

b) Mediante las transformaciones lineales en el espacio euclidiano bidimensional se tendrán regiones o subespacios invariantes.

c) Se puede precisar los aspectos cualitativos de la deformación del espacio euclidiano bidimensional.

OBSERVACIÓN 1. En la naturaleza se pueden tener ideas de transformaciones lineales, como por ejemplo nuestra imagen en el espejo, el reflejo de un paisaje en un lago, la fotografía de una persona, entre otras.

OBSERVACIÓN 2. Cuando una transformación lineal $T:R^2\to R^2$ es definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre el campo escalar $K=R$, entonces según sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, T transforma cualitativamente elementos de R^2 de partida, en elementos de R^2 de llegada. Son transformaciones geométricas en R^2 (Costa, 2018).

OBSERVACIÓN 3. Con los casos que se exponen a continuación, se responde a la interrogante: ¿Cómo cambia la transformación lineal T al cuadrilátero de vértices $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$, $(1;-1)$ y a la parábola $y=x^2$ del espacio euclidiano bidimensional de partida, en el de llegada? Son cuatro casos estudiados:

CASO 1. ANULACIÓN E IDENTIDAD

EJEMPLO 1. (Anulación) Con la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x;y)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en el conjunto $\{(0;0)\}$ de R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero tiene vértices $(0;0)$, $(1;2)$, $(1;1)$, $(2;1)$

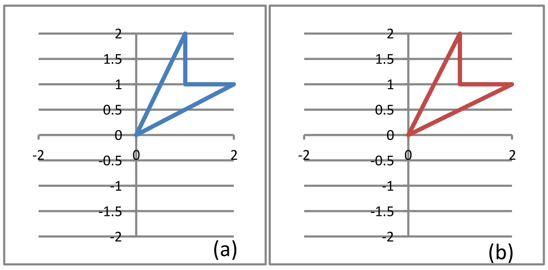

Figura N° 1. El cuadrilátero (a) se mantiene igual al cuadrilátero (b)

b) La parábola $y=x^2$ (Figura 2a), si $(x;y)\in R^2$ de partida, entonces $(x;x^2)\in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}=$

$$T\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

b) La parábola $y=x^2$, si $(x;y)\in R^2$, entonces $(x;x^2)\in R^2$, luego $T\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$

En las partes (a) y (b) de este ejemplo, tanto el cuadrilátero como la parábola han sido reducidos al único punto $\{(0;0)\}\subset R^2$.

EJEMPLO 2. (Identidad) Con la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x;y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en similares elementos en el conjunto R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero (Figura N° 1) tiene vértices $(0;0)$, $(1;2)$, $(1;1)$, $(2;1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\Rightarrow b=a^2$ es una parábola en el espacio R^2 de llegada (Figura 2b).

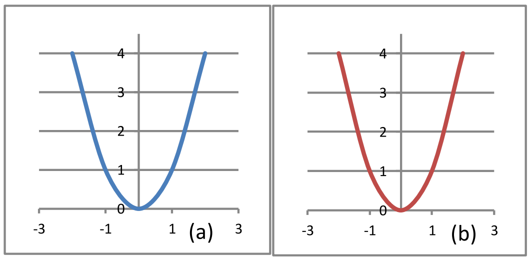

Figura N° 2. La parábola (a) $y=x^2$ se mantiene igual a la parábola (b) $b=a^2$.

CASO 2. EXPANSIÓN/REDUCCIÓN TOTAL

EJEMPLO 1. (Expansión total) Con la matriz $A=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$, $k>1$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida para $k=2$ por $T(x;y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en elemento expandidos (al doble) en el conjunto R^2 de llegada. En efecto:

a) El cuadrilátero (Figura 3a) de vértices $(0;0)$, $(1;2)$, $(1;1)$, $(2;1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}.$$

El cuadrilátero imagen (Figura 3b) tiene vértices $(0;0)$, $(2;4)$, $(2;2)$, $(4;2)$

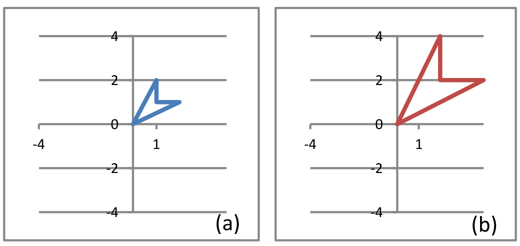

Figura N° 3. El cuadrilátero (b) se duplica con respecto al cuadrilátero (a)

b) La parábola $y = x^2$ (Figura 4a), si $(x; y) \in R^2$ de partida, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow b = \frac{a^2}{2}$ es una parábola expandida (al doble) en el espacio R^2 de llegada (Figura 4b).

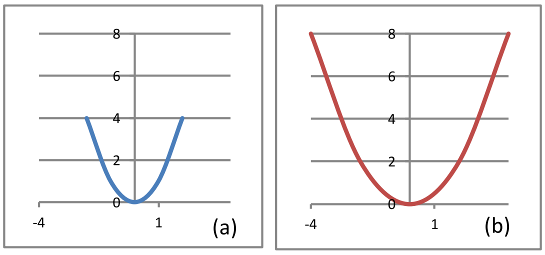

Figura N° 4. La parábola (b) $b = \frac{a^2}{2}$ se duplica con respecto a la parábola (a) $y = x^2$.

EJEMPLO 2. (Reducción total) Con la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $0 < k < 1$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida para $k = 0.5$ por $T(x; y) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x \\ 0.5y \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en elementos reducidos (a la mitad) en el conjunto R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero tiene vértices $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(1; 1)$, $(2; 1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

El cuadrilátero imagen tiene vértices $(0; 0)$, $(0{,}5; 1)$, $(0{,}5; 0{,}5)$, $(1; 0{,}5)$.

b) La parábola $y = x^2$, si $(x; y) \in R^2$ de partida, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5x \\ 0{,}5x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow b = 2a^2$ es una parábola en R^2 de llegada.

OBSERVACIONES. Si $T: R^2 \to R^2$ es definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre el campo escalar $K = R$:

1. Con la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k > 1$, T permite realizar una expansión horizontal; y, con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $k > 1$, T permite realizar una expansión vertical.

2. Con la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $0 < k < 1$, T permite realizar una reducción horizontal; y, con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $0 < k < 1$, T permite realizar una reducción vertical.

CASO 3. **LA REFREXIÓN**.

EJEMPLO 1. (Reflexión en X) Con la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida en elementos reflejados con respecto al eje real $X = R$ en el espacio R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero (Figura 5a) tiene vértices $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(1; 1)$, $(2; 1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

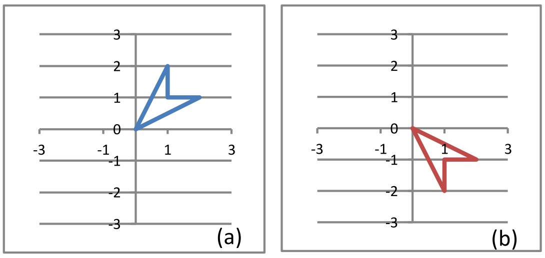

Figura N° 5. El cuadrilátero (a) se refleja en el cuadrilátero (b) con respecto al eje X.

b) La parábola $y = x^2$ (Figura 6a), si $(x; y) \in R^2$, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow b = -a^2$ es una parábola en el espacio R^2 de llegada (Figura 6b).

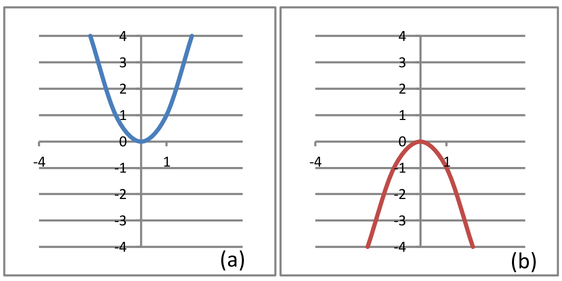

Figura N° 6. La parábola (a) $y = x^2$ se refleja en la parábola (b) $b = -a^2$ con respecto al eje X.

EJEMPLO 2. (Reflexión en Y) Con la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en elemento reflejados con respecto al eje real $Y = R$ en el espacio R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero tiene vértices $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(1; 1)$, $(2; 1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El cuadrilátero imagen tiene vértices $(0; 0)$, $(-1; 2)$, $(-1; 1)$, $(-2; 1)$.

b) La parábola $y = x^2$, si $(x; y) \in R^2$, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow b = a^2$ es una parábola en el espacio R^2 de llegada.

OBSERVACIONES. Si $T: R^2 \to R^2$ es definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre el campo escalar $K = R$:

1. Con la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, T permite realizar una reflexión respecto a la recta $y = x$.

2. Con la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, T permite realizar una reflexión respecto a la recta $y = -x$.

CASO 4. COMPOSICIÓN DE CASOS 2 Y 3.

OBSERVACIóN 1. Si se combina una expansión total y luego una reflexión con respecto al eje real $X = R$, entonces con la matriz $B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ con $k > 1$, se hace la expansión total y con la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ se hace la reflexión con respecto al eje real $X = R$; entonces con la matriz multiplicación en este orden $A = CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$ se hace la transformación conjunta. La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ -ky \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en elemento con expansión total y luego reflejado con respecto al eje real $X = R$ en el espacio R^2 de llegada.

EJEMPLO 1. (Expansión-Reflexión) Con la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ se hace la expansión total al doble y con la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ se hace la reflexión con respecto al eje real $X = R$ en este orden; entonces con la matriz multiplicación en este orden $A = CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ se hace la transformación conjunta. La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida, en elemento con expansión total al doble y luego reflejado con respecto al eje real $X = R$ en el espacio R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero (Figura 7a) tiene vértices $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(1; 1)$, $(2; 1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

El cuadrilátero imagen (Figura 7b) tiene vértices $(0; 0)$, $(2; -4)$, $(2; -2)$, $(4; -2)$

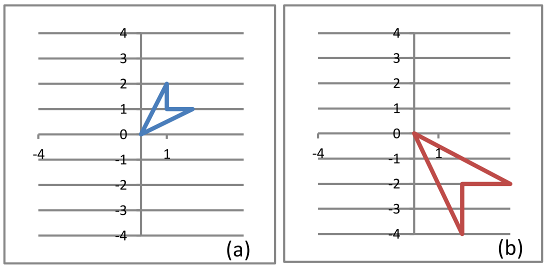

Figura N° 7. El cuadrilátero (a) se refleja en el cuadrilátero (b) con respecto al eje X y además se duplica.

b) La parábola $y = x^2$ (Figura 8a), si $(x; y) \in R^2$, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow b = -\frac{a^2}{2}$ es una parábola en el espacio R^2 de llegada (Figura 8b).

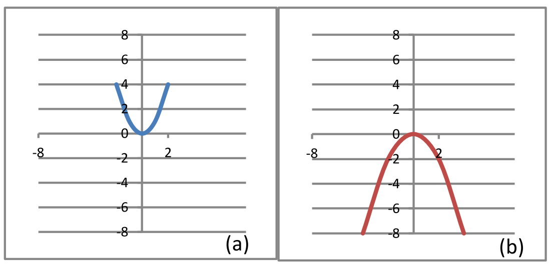

Figura N° 8. La parábola (a) $y = x^2$ se refleja en la parábola (b) $b = -\frac{a^2}{2}$ con respecto al eje X y además de duplica.

OBSERVACIÓN 2. Si se combina una reducción total y luego una reflexión con respecto a la recta real $y = -x$, entonces con la matriz $B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ con $0 < k < 1$, se hace la reducción total a la mitad y con la matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ se hace la reflexión con respecto a la recta real $y = -x$ en este orden; entonces con la matriz multiplicación en este orden $A = CB$ $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$ se hace la transformación conjunta. La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ky \\ -kx \end{bmatrix}$ transforma elementos d e R^2 de partida, en elementos con reducción total y luego reflejado con respecto a la reta real $y = -x$ en el espacio R^2 de llegada.

EJEMPLO 2. (Reducción-Reflexión) Con la matriz $B = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ se hace la reducción total a la mitad y con la matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ se hace la reflexión con respecto a la recta real $y = -x$, en este orden; entonces con la matriz multiplicación en este orden $A = CB$ $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$ se hace la transformación conjunta. La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x; y) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -0{,}5y \\ -0{,}5x \end{bmatrix}$ transforma elementos de R^2 de partida en elemento con reducción total a la mitad y luego reflejado con respecto a la recta real $y = -x$ en el espacio R^2 de llegada.

a) El cuadrilátero de vértices $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 0)$, $(1; -1)$, aplicando T:

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

El cuadrilátero imagen tiene vértices $(0; 0)$, $(-1; -0{,}5)$, $(-0{,}5; -0{,}5)$, $(-0{,}5; -1)$

b) La parábola $y = x^2$, si $(x; y) \in R^2$, entonces $(x; x^2) \in R^2$, aplicando T: $T\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -0{,}5x^2 \\ -0{,}5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow a = -2b^2$ es una parábola en el espacio R^2 de llegada.

DISCUSIÓN

Los resultados muestran que las transformaciones lineales son aplicables a cualquier figura plana y se ven los cambios cualitativos en el espacio euclidiano bidimensional (Howard, 1994). Las transformaciones mostradas son de ampliación, reducción y reflexión a través de los ejes coordenados, y combinaciones entre estos casos presentados; en forma similar se pueden ver si solo se muestra la transformación lineal (Grossman, 2012). Se ha usado el Excel para concretar la gráfica y se ha consultado bibliografía referente a transformaciones lineales, en especial las que se pueden aplicar a curvas, figuras y regiones planas (Gonzales, 2016). Estos resultados pueden ampliarse usando otros temas más avanzados de las transformaciones lineales.

No se ha vislumbrado conflicto de interés alguno con los resultados que se presentan. Así mismo la fuente de financiamiento está a cargo de autor.

CONCLUSIONES:

PRIMERA: La aplicación de las transformaciones lineales ha permitido observar características cualitativas en las figuras, como la ampliación, reducción y reflexión cuando son aplicadas en el espacio euclidiano R^2.

SEGUNDA: La composición de transformaciones lineales produce una nueva transformación lineal y características cualitativas combinadas en el espacio euclidiano R^2.

RECOMENDACIONES

PRIMERA: Usando temas más avanzado de las transformaciones lineales $T: R^2 \to R^2$ permitirá estudiar otras características cualitativas, por ejemplo, usando los espacios cociente.

SEGUNDA: Se puede ampliar este estudio al espacio euclidiano tridimensional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Gonzales, Luisa (2016). *Geometría de las transformaciones lineales de* .Consultado en https://prezi.com/qw3sqzdmyatm/geometria-de-las-transformaciones-lineales-de-r2-en-r2/ el 15 de septiembre del 2019.

Grossman, Stanley y Flores, José (2012). *Álgebra Lineal*. 7ma edición. México: McGRAW-HILL.

Howard, Anton (1994). *Introducción al Álgebra Lineal*. 3ra edición. México: LIMUSA. Noriega Editores.

Arce S., Carlos, Castillo E., William y Gonzáles V., Jorge (2003). *Álgebra Lineal*. Costa Rica: Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

Chávez Vega, Carlos (2012). *Álgebra Lineal*. Lima Perú: Editorial MOSHERA S.R.L.

Costa V., Rossignoli R., Sorichetti C. y Vampa V. (2018). *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Argentina: Editorial de la Universidad de la Plata.