

Modellreduktion und Substrukturtechnik am Beispiel von modularen Schalentragerwerken aus ultrahochfestem Beton | Model order reduction and substructures – application to modular shell structures made of ultra-high performance concrete

- ▶ Lei Zhou, Jaan Simon, Stefanie Reese
- ▶ Institut für Angewandte Mechanik, RWTH Aachen University

1 Einleitung

Schalentragerwerke sind aufgrund ihres vorteilhaften Lastabtragverhaltens im Membranzustand sehr geeignet für die Herstellung leichter Tragwerke. Der Schwerpunkt dieses Projekts liegt auf der Entwicklung einer geeigneten numerischen Methode, um möglichst effizient statische und dynamische Berechnungen durchzuführen und damit den Entwurf zu erleichtern. Für Entwurf und Analyse wird eine neuartige Kombination von Substrukturtechnik und Modellreduktion eingesetzt, um den notwendigen Rechenaufwand zu minimieren.

Die Finite-Elemente-Analyse komplexer Strukturen erfordert eine hohe Rechenintensität, da Gleichungssysteme mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden gelöst werden müssen. Das ist besonders bei der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse der Fall. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, wird das globale System in viele Substrukturen unterteilt, die unabhängig voneinander untersucht werden. Die Rechenzeit lässt sich weiter reduzieren, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade einzelner Substrukturen verkleinert wird, so dass die Dimension des globalen Gleichungssystems ebenfalls deutlich kleiner wird. Dieses Ziel kann mit projektionsbasierter Modellreduktion erreicht werden, die auf der Substruktur-Ebene angewandt wird. Durch die Kombination von Modellreduktion und Substrukturtech-

1 Introduction

Shell structures are very suitable for the construction of lightweight structures, especially because of the load bearing behaviour in the membrane state. Based on this concept, the main focus of this project is to develop suitable numerical methods to carry out the static and dynamic analysis efficiently, with the target of simplifying the design. For the design and analysis, a new methodology has been developed which couples substructuring and model order reduction. This allows to reduce the degrees of freedom of the system as well as the computational effort significantly.

The finite element analysis of complex structures involves a high computational effort, since the equation system to be solved includes a large number of degrees of freedom. This holds particularly in non-linear finite element analysis. In order to reduce the numerical effort, the total system is subdivided into substructures which are analyzed separately from each other. The computing time can be further reduced, if the number of degrees of freedom of the substructure and thereby the dimension of the global equation system is decreased. This can be achieved by projection-based model order reduction applied at the level of the substructures. Through combination of the model order reduction and substructure techniques, a

nik wird eine recheneffiziente neue numerische Methode für die Strukturanalyse entwickelt.

computationally efficient numerical method is achieved.

2 Motivation

Häufig bestehen die betrachteten komplexen Strukturen aus vielen Teilen, die als Substrukturen bezeichnet werden, welche separat analysiert werden können (Bild 1). Für die Analyse der kompletten Struktur ist dann eine Kopplungsmethode erforderlich, um die Interaktion zwischen den Substrukturen zu betrachten.

2 Motivation

Frequently, complex structural systems consist of several parts, often called substructures, which can be analyzed separately, see Fig. 1. For the analysis of the complete structure, coupling methods are needed to consider the interaction between the substructures.

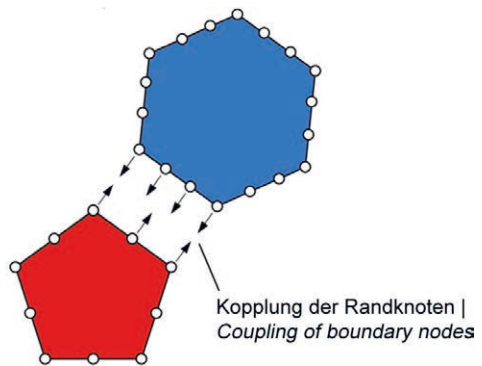
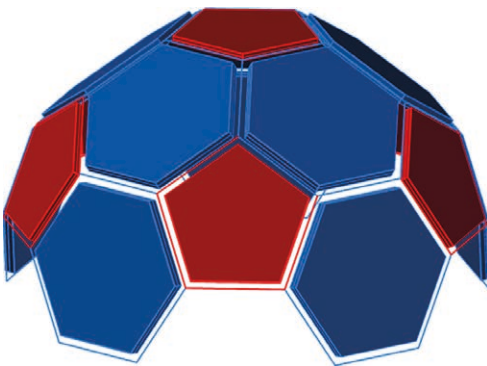


Bild 1: Typische modulare Struktur; links: geodätische Kuppel, rechts: Kopplung der Substrukturen | **Fig. 1:** Typical modular structure; left: geodesic dome, right: coupling of substructures

Die Modellreduktion (oder auch Modellordnungsreduktion, MOR), die auf das Gesamtsystem angewandt wird, kann die große Dimension des Gleichungssystems reduzieren. Eine weitere Herausforderung ist es, die MOR auf Substrukturen anzuwenden, um die Dimension einzelner Substrukturen zu reduzieren. Diese neue Methode wird als Modellreduktion von Substrukturen (MORS) bezeichnet.

Model order reduction (MOR) applied at the level of the complete structure can reduce the large dimension of the global equation system. Another challenging task is to apply model order reduction at the substructure level in order to reduce the dimension of the substructure individually. This method is denoted as model order reduction on substructures (MORS).

3 Konzept

Die Idee der MORS ist in Bild 2 schematisch dargestellt. Sie besteht aus drei wesentlichen Schritten: Dekomposition, Reduktion und Assemblierung. Zuerst wird das Gesamtsystem in eine Reihe von Substrukturen unterteilt. Danach werden diese Substrukturen auf eine jeweils kleinere Dimension reduziert. Diese

3 Concept

The concept of MORS is presented in Fig. 2. It consists of three steps: decomposition, reduction, and reassembly. First of all, a global structural system is decomposed into a number of substructures. Secondly, the substructures are reduced to smaller dimension. This can be carried out either individually for each substructure

Reduktion im zweiten Schritt kann entweder individuell für jede einzelne Substruktur (Strategie A) oder repräsentativ für eine Substruktur (Strategie B) durchgeführt werden. Abschließend werden die reduzierten Substrukturen zu einem reduzierten Gesamtmodell assembliert, um das originale Modell gut zu approximieren. Dabei ist Strategie B grundsätzlich zu bevorzugen, falls sie zu einem reduzierten Modell führt, welches das ursprüngliche Modell mit genügender Genauigkeit approximiert.

Die Kopplung zwischen Substrukturen kann als eine zusätzliche Bedingung auf den Rändern betrachtet werden. Die wesentliche Schwierigkeit besteht darin, eine geeignete Kopplungsmethode zu finden, um die Substrukturen mit nicht zusammenpassender Vernetzung zu koppeln. Darüber hinaus soll die Methode in der Lage sein, unterschiedlich reduzierte Substrukturen miteinander zu koppeln. Deshalb sollen drei Kopplungsfälle in der neuen Methode berücksichtigt werden: die Kopplung von (1) zwei reduzierten, (2) zwei nicht reduzierten oder (3) zwischen reduzierten und nicht reduzierten Substrukturen.

ture (strategy A) or only for one representative substructure (strategy B). The idea of strategy B is to build up a 'catalogue' of modules which can be put together in various ways to obtain different global systems. At last, the reduced substructures are reassembled to form a reduced order model which represents the original full order model in the best possible way. In fact, strategy B would be preferred, if it resulted into a reduced order model which approximates the original system with sufficient accuracy.

The coupling of the substructures is considered as additional condition on the boundaries and is thus independent of the reduction process. The main difficulty is to find a suitable coupling method to couple the reduced order substructures which might be discretized by non-matching meshes. Additionally, the method must be also capable of dealing with unreduced substructures. Therefore, all three coupling situations should be embedded into the new method: (1) the coupling of two reduced, (2) two unreduced, or (3) between reduced and unreduced substructures.

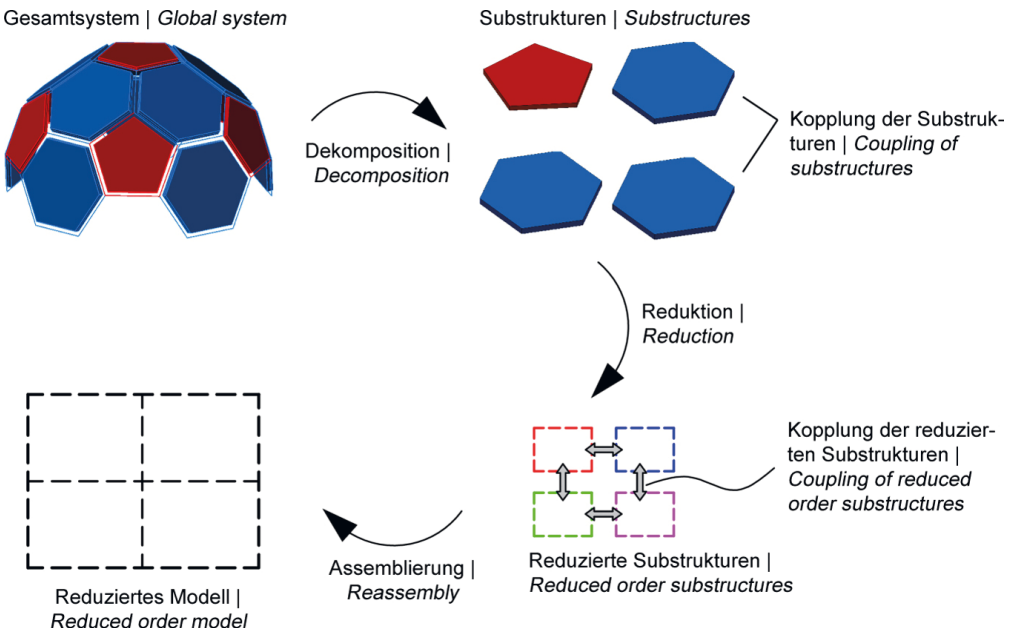


Bild 2: Konzept der Modellreduktion von Substrukturen (MORS) | **Fig. 2:** Concept of model order reduction on substructures (MORS)

In der Literatur werden unterschiedliche Kopplungsmethoden diskutiert, z. B. in der Standardliteratur [1] und [2] oder in [3]. Die sogenannte Standardkopplung koppelt die Randknoten der Substrukturen direkt. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die Ränder mit Hilfe Lagrange'scher Multiplikatoren streng zu koppeln. Die dritte Möglichkeit ist, mittels Kontaktalgorithmen, z. B. der sogenannten *Bonded Contact Method*, siehe bspw. [4]–[6], eine schwache Kopplung zu erreichen. Diese dritte Methode wird im vorliegenden Projekt angewendet.

In the literature, various types of coupling are discussed, e.g. in standard literature [1] and [2] or in [3]. The so-called standard coupling simply uses the boundary nodes of the substructures for the assembly of the equation system. It is also possible to couple the non-matching boundary nodes of two opposite surfaces by means of additional constraint equations, e.g. the multi-points constraint. The third possibility, which is applied in this project, is to use contact algorithms to hold the boundary nodes together, e.g. [4]–[6]. The proposed numerical method combines the model order reduction and substructure techniques by means of a contact method.

4 Numerische Formulierung

4 Numerical formulation

4.1 Nichtlineare Analyse mit gekoppelten Substrukturen

4.1 Nonlinear analysis with coupled substructures

Für nichtlineare quasi-statische Probleme lautet die maßgebende zu lösende Gleichung:

For nonlinear quasi-static problems, the equation to be solved reads:

$$\mathbf{G} := \mathbf{R}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{u}) - \mathbf{P} = 0 \tag{1}$$

Mit:

With:

- G** unausgeglichene Kraft
- u** unbekannter globaler Verschiebungsvektor
- R** innerer Kraftvektor ohne Kopplungsanteil
- P** äußerer Kraftvektor
- R_c** Kontaktkraft infolge der Kopplung der Substrukturen

- G** unbalanced force
- u** unknown global displacement vector
- R** internal force vector without the coupling contribution
- P** external force vector
- R_c** contact force due to the coupling of the substructures

Die Verwendung des Newton-Raphson-Algorithmus führt dann zum Gleichungssystem (2), das in jeder Iteration eines Lastinkrements zu lösen ist. Um die Gleichung zu vereinfachen, wurde auf die Angabe von Indizes verzichtet.

Applying the Newton-Raphson algorithm to solve the equation, one arrives at the equation system (2) which has to be solved in each iteration of one load step. It should be mentioned that the iteration index has been omitted for simplicity.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c) \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{G} \tag{2}$$

Mit:

With:

- K** Standard-Tangentensteifigkeitsmatrix
- K_c** Kontaktsteifigkeitsmatrix, sie beinhaltet den Kopplungsanteil.

- K** standard tangential stiffness matrix
- K_c** contact stiffness matrix with coupling contribution

4.2 Modellreduktion von Substrukturen (MORS)

Die Projektionsbasierte Modellreduktion von Substrukturen basiert auf der Approximation des unbekannt globalen Verschiebungsvektors \mathbf{u} durch

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \bigcup_{s=1}^{n_s} \hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \bigcup_{s=1}^{n_s} \Psi^{(s)} \mathbf{p}^{(s)} = \Psi \mathbf{p} \tag{4}$$

wobei $\hat{\mathbf{u}}$ der approximierten globale Verschiebungsvektor ist, der aus den approximierten Verschiebungsvektoren $\hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \Psi^{(s)} \mathbf{p}^{(s)}$ der Substrukturen zusammengesetzt ist. Der Vereinigungsoperator wird genutzt, um anzuzeigen, dass die approximierten Verschiebungsvektoren unabhängig voneinander sind. $\Psi^{(s)}$ ist die Projektionsmatrix mit der Dimension $n^{(s)} \times m^{(s)}$ und $\mathbf{p}^{(s)}$ ist der verallgemeinerte Koordinatenvektor mit Dimension $m^{(s)}$. Zum Schluss kann die Approximation einfach mit der globalen Projektionsmatrix Ψ und dem globalen verallgemeinerten Koordinatenvektor \mathbf{p} dargestellt werden.

Der inkrementelle globale Verschiebungsvektor kann entsprechend formuliert werden:

$$\Delta \mathbf{u} \approx \Delta \hat{\mathbf{u}} = \bigcup_{s=1}^{n_s} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \bigcup_{s=1}^{n_s} \Psi^{(s)} \Delta \mathbf{p}^{(s)} = \Psi \Delta \mathbf{p} \tag{5}$$

Die Galerkin-Projektion wird auf das inkrementelle Gleichungssystem angewendet, dies führt zu

$$\Psi^T \{(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c) \Psi \Delta \mathbf{p}\} = \Psi^T \{-\mathbf{G}\} \tag{6}$$

und schließlich zu dem reduzierten Gleichungssystem (7) mit dem inkrementellen verallgemeinerten Koordinatenvektor $\Delta \mathbf{p}$ als einziger Unbekannte.

$$(\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_c) \Delta \mathbf{p} = -\hat{\mathbf{G}} \tag{7}$$

4.2 Model order reduction on substructures (MORS)

Projection-based model order reduction at the substructure level means to approximate the unknown global displacement vector \mathbf{u} by means of

where $\hat{\mathbf{u}}$ is the approximated global displacement vector which consists of the approximated displacement vectors $\hat{\mathbf{u}}^{(s)} = \Psi^{(s)} \mathbf{p}^{(s)}$ of the substructures. The union operator is used to show that the approximated substructure displacement vectors are independent of each other. $\Psi^{(s)}$ is the projection matrix with the dimension $n^{(s)} \times m^{(s)}$. $\mathbf{p}^{(s)}$ is the generalized coordinate vector with dimension $m^{(s)}$. At the end, the approximation can be simply expressed in terms of Ψ and \mathbf{p} , which are the global projection matrix and the global generalized coordinate vector, respectively.

The incremental global displacement vector is expressed accordingly:

The Galerkin projection is applied on the incremental equation system

which results into the reduced equation system (7) where the incremental generalized coordinate vector $\Delta \mathbf{p}$ is the only unknown.

Mit:

$\hat{\mathbf{G}} = \Psi^{(T)} \mathbf{G}$ reduzierter oder projizierter Restkraftvektor

$\hat{\mathbf{K}} = \Psi^{(T)} \mathbf{K} \Psi$ reduzierte Tangentialsteifigkeitsmatrix

$\hat{\mathbf{K}}_c = \Psi^{(T)} \mathbf{K}_c \Psi$ reduzierte Kontaktsteifigkeitsmatrix

With:

$\hat{\mathbf{G}} = \Psi^{(T)} \mathbf{G}$ reduced or projected residual force vector

$\hat{\mathbf{K}} = \Psi^{(T)} \mathbf{K} \Psi$ reduced tangential stiffness matrix

$\hat{\mathbf{K}}_c = \Psi^{(T)} \mathbf{K}_c \Psi$ reduced contact stiffness matrix

Nach der Lösung des Gleichungssystems kann der inkrementelle globale Verschiebungsvektor mit folgender Gleichung bestimmt werden:

After the equation system has been solved, the incremental global displacement vector is determined by means of the relation:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \Psi \Delta \mathbf{p} \tag{8}$$

Anschließend werden der globale Verschiebungsvektor aktualisiert und der Restkraftvektor analog zur Standardprozedur in der Finite-Elemente-Methode erneut berechnet, um die Konvergenz zu überprüfen.

Then the global displacement vector is updated and the residual force vector is recomputed for the convergence check in the standard finite element approach.

Die Formulierung zeigt eindeutig, dass die Klassifizierung der Knoten in interne und Randknoten nicht mehr nötig ist. Jede Substruktur kann mit ihren kompletten Moden approximiert werden. Im folgenden Abschnitt wird die Berechnung der Projektionsmatrix auf der Substrukturebene präsentiert.

The formulation shows clearly that the separation of the nodes into internal and boundary ones is not needed here. Each substructure can be approximated with its complete modes. In the next section the computation of the projection matrix is presented at the substructure level.

4.3 Strategien A und B der MORS-Methode

4.3 Strategies A and B of the MORS method

Die Snapshot-POD-Methode (vgl. [8]) wird auf der Substrukturebene durchgeführt, d. h. in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird die Offline-Berechnung durchgeführt, wobei die charakteristischen Verschiebungszustände als Snapshots gewählt werden. Die Snapshots werden in einer Matrix gespeichert, was nach einigen Rechenschritten inklusive einer Singulärwertzerlegung zur globalen Projektionsmatrix führt:

The snapshot-POD method (see [8]) at the substructure level is carried out in the standard way, i.e. in two steps. In the first step, an offline computation is carried out, where characteristic displacement states are chosen as snapshots. The latter are stored into a matrix which leads after several calculation steps including singular value decomposition to the global projection matrix:

$$\Psi^{(s)} = [\Phi_1^{(s)}, \dots, \Phi_m^{(s)}] \tag{9}$$

Basierend auf dieser Snapshot-POD-Methode auf Substrukturebene können zwei Strategien

Based on this snapshot-POD method at the substructure level, two strategies A and B for the

alle Substrukturen zum gleichen Level reduziert, d. h. $m^{(s)} = m^{(t)} = m^{(1)}$, da die Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade bereits in der Vorrechnung bestimmt werden muss.

Zusammenfassend gilt, dass die Vorrechnung der Strategie A rechenintensiver ist, aber dafür die Substrukturen mit unterschiedlicher Anzahl reduziert werden können ($m^{(s)} \neq m^{(t)}$). Deshalb wird Strategie A für Strukturen mit starken lokal auftretenden Nichtlinearitäten bevorzugt. Darüber hinaus ist für Strategie A eine größere Genauigkeit zu erwarten, da die Generierung der Snapshots auf dem Gesamtsystem basiert. Im Gegensatz dazu ist die Vorrechnung der Strategie B weniger rechenintensiv, aber dafür können alle Substrukturen nur mit einer einzigen Projektionsmatrix basierend auf den gleichen Freiheitsgraden reduziert werden. Solange die Strategie B nicht auf ein spezifisches globales System beschränkt ist, können die Substrukturen beliebig kombiniert werden. Diese Betrachtung macht Strategie B speziell attraktiv für Entwürfe, wenn die Genauigkeit einer Rechnung noch nicht die entscheidende Rolle spielt.

In folgenden Abschnitt wird die MORS mit beiden Strategien A und B anhand von zwei Beispielen präsentiert.

4.4 Numerische Beispiele

4.4.1 Anwendung der MORS auf einen Kragarm mit elasto-plastischer Verformung (Strategie A)

In diesem Beispiel wird die vorgestellte MORS-Methode in Strategie A auf einen Kragarm mit elasto-plastischem Verhalten angewendet. Die materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten werden gleichzeitig berücksichtigt. Der Kragarm mit der Geometrie $L \times H \times T = 160 \text{ mm} \times 8 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ wird in vier Substrukturen unterteilt (Bild 3). Das Material ist elasto-plastisch unter Berücksichtigung des Von-Mises-Fließkriteriums ohne Verfestigung. Hyperelastizität wird durch Verwendung logarithmischer Dehnung nach Hencky [9] erfasst. Die Materialparameter können Tabelle 1 entnommen werden.

all substructures are reduced to the same level, which means $m^{(s)} = m^{(t)} = m^{(1)}$ because the number of reduced degrees of freedom $m^{(1)}$ has to be determined in the precomputation.

In summary, the precomputation of strategy A is computationally expensive, but the substructures can be reduced with different numbers ($m^{(s)} \neq m^{(t)}$). Thus, the strategy A is preferred for structures with high nonlinearities. Further, due to the fact that the snapshot generation is based on the global system, it is to be expected that strategy A leads to better accuracies. On the contrary, the precomputation of the strategy B is computationally cheaper, but the substructures can only be reduced with the same reduced degrees of freedom based on the only projection matrix. Since the strategy B is not based on a specific global system, the substructures can be still combined in an arbitrary way. This makes strategy B especially attractive for design purposes where the accuracy of a computation does not play the most important role yet.

In the following section the MORS method with strategies A and B is presented by investigating two numerical examples.

4.4 Numerical examples

4.4.1 MORS on cantilever beam including plastic deformation (strategy A)

In this numerical example, the proposed MORS method with strategy A is applied to a cantilever beam containing elastoplastic material, considering both geometrical and material nonlinearities. A cantilever beam with the geometry of $L \times H \times T = 160 \text{ mm} \times 8 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ is subdivided into four substructures, see Fig. 3. The material is the standard material in FEAP which is based on the logarithmic strain energy function, which is also called Hencky strain energy [9]. The multiplicative decomposition of elastoplastic deformation is considered in this material model for considering large deformation. In addition, the von Mises yield criterion

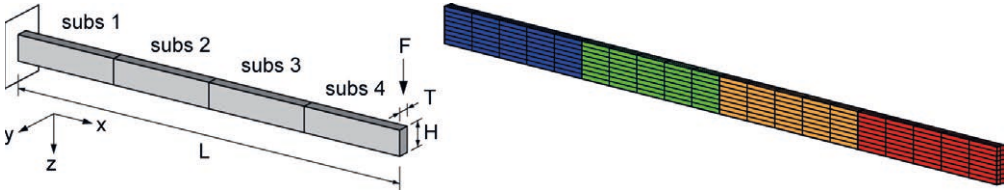


Bild 3: Geometrie und Dekomposition (links) sowie Modellierung eines Kragarms (FEAP-Modell mit vier Substrukturen, rechts) | Fig. 3: Geometry and decomposition (left) and finite element model of the cantilever beam (FEAP-model with four substructures, right)

Elastizitätsmodul Young's modulus	$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl Poisson's ratio	$\nu = 0,3$
Fließspannung Yield stress	$\sigma_y = 2.500 \text{ N/mm}^2$

Tabelle 1: Materialeigenschaften für die Modellierung des Kragarms | Table 1: Material properties for the modeling of the cantilever beam

Vorrechnung (Offline-Phase). Die rein elastische und elasto-plastische Vorrechnung werden separat durchgeführt. Die zugehörigen Kraft-Verformungskurven sind in Bild 4 dargestellt. Für den elastischen Fall werden 20 Snapshots gewählt, für den elasto-plastischen Fall 40.

In Bild 5 werden die tatsächlichen Verformungen jedes fünften Schritts dargestellt. Durch den Vergleich ist die plastische Verformung im zweiten Fall eindeutig zu sehen.

Während der Vorrechnung werden die Snapshots einzelner Substrukturen separat in einer sogenannten Snapshot-Matrix gespeichert. Anschließend wird für diese die Singulärwertzerlegung durchgeführt. Die zugehörigen singulären Werte aller Substrukturen zeigt Bild 6.

without hardening and the associated flow rule are taken into consideration in this material formulation. The corresponding material properties are given in Table 1.

Precomputation (offline phase). For this example the strategy A is applied. The purely elastic and elastoplastic precomputations are carried out separately, yielding the force-displacement curves shown in Fig. 4. For the elastic case, 20 snapshots are selected, while 40 snapshots are used for the elastoplastic case.

The deformations of both cases are plotted in Fig. 5. The plastic deformation is well captured.

The snapshot matrices of the four substructures are evaluated separately by means of singular value decomposition. The resulting eigenvalues are sorted, normalized, and truncated. The

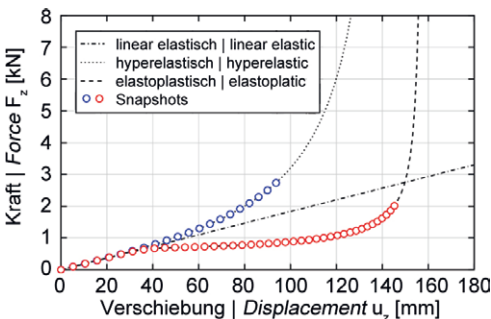


Bild 4: Kraft-Verschiebungskurve der Vorrechnung zur Bestimmung der Snapshots | Fig. 4: Force-displacement curves and snapshots

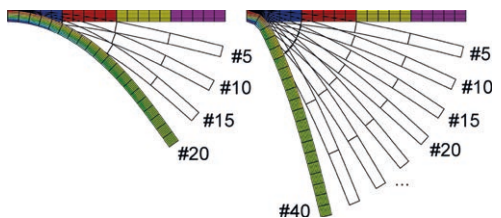


Bild 5: Verformungen für den elastischen Fall mit 20 Snapshots (links) und den elasto-plastischen Fall mit 40 Snapshots (rechts) | Fig. 5: Collected snapshots for the elastic case with 20 snapshots (left) and the plastic case with 40 snapshots (right)

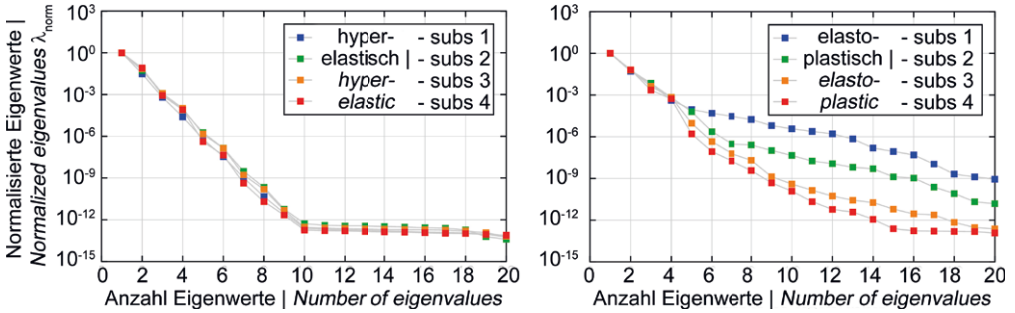


Bild 6: Singulärwertzerlegung für den elastischen (links) und den elasto-plastischen Fall | Fig. 6: Singular values of elastic (left) and elasto-plastic case (right)

Reduzierte Rechnung (Online-Phase). Für die reduzierte Rechnung in der Onlinephase wird die MORS für den elastischen und den elasto-plastischen Fall separat durchgeführt. Unterschiedliche Moden werden für alle Substrukturen gewählt. Die Kraft-Verschiebungskurven werden in Bild 7 dargestellt und verglichen.

Für den elastischen Fall sind vier Moden pro Substruktur notwendig, um ein gutes Ergebnis mit akzeptabler Genauigkeit zu erhalten. Im Gegensatz dazu sind für den elasto-plastischen Fall acht Moden erforderlich. Die Größe des Gleichungssystems in der reduzierten Rechnung beträgt nur 1 % des ursprünglichen Systems im elastischen bzw. 2 % im elasto-plastischen Fall.

Reduzierte Rechnung mit unterschiedlichen Freiheitsgraden. Im Folgenden wird eine adaptive Selektionsstrategie vorgestellt, welche durch die Wahl unterschiedlicher Anzahl von

20 most significant singular values of both cases are shown separately in Fig. 6.

Reduced computation (online phase). MORS is carried out on the cantilever beam for the elastic and elastoplastic cases separately, with the same number of modes for all substructures. The force-displacement curves are compared with the reference solution in Fig. 7.

For the elastic case, four modes per substructure are necessary to obtain a good result with acceptable accuracy. In contrast, eight modes are required for the elastoplastic case. The size of the equation system in the reduced calculation is only 1% of the original system in the elastic case and 2% in the elastoplastic case.

Reduced computation with different numbers of modes. In the following, an adaptive selection strategy is presented which, by selecting

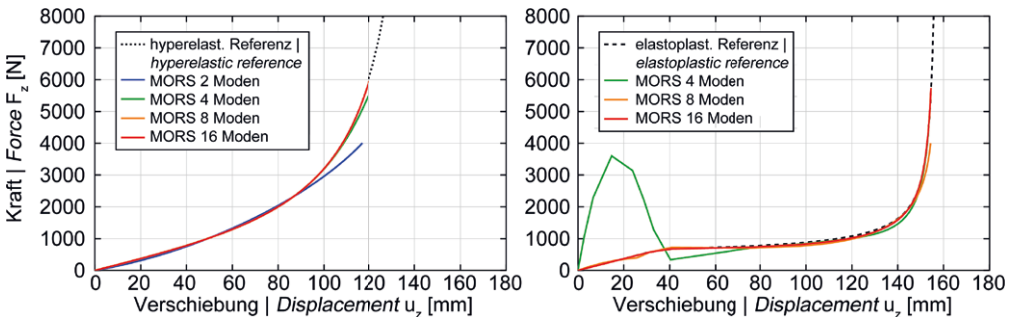


Bild 7: Reduzierte Rechnungen mit MORS und Vergleich der Genauigkeit; elastischer (links) und elasto-plastischer Fall (rechts) | Fig. 7: Reduced computation with MORS and comparison of accuracy; elastic (left) and elastoplastic case (right)

Moden für unterschiedliche Substrukturen dazu führt, dass jede Substruktur ungefähr die gleiche Genauigkeit aufweist. Das ist hier besonders für den elasto-plastischen Fall von Interesse.

Die Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade für die beiden Fälle, die separat mit der MORS analysiert werden, sind jeweils 32 und 41. Die Ergebnisse werden in Bild 8) präsentiert. Alle Rechnungen stimmen gut mit der Referenzlösung überein. Es ist bemerkenswert, dass trotz gleicher Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade der Fall mit 13/7/6/6 Moden pro Substruktur bessere Ergebnisse liefert als der Fall mit 8/8/8/8.

4.4.2 MORS mit einer Substruktur (Strategie B)

Im vorangegangenen Beispiel wurde die Vorrechnung am Gesamtsystem durchgeführt, d. h. Strategie A wurde verwendet. Deshalb hängen die Moden der Substrukturen stark von dem Verhalten des globalen Systems ab. Falls man eine modulare Struktur entwerfen möchte, ist es jedoch nicht möglich, mit einem globalen System anzufangen, da dieses noch zu konstruieren ist und daher noch nicht existiert. Die geeignete Strategie ist dann, die Vorrechnung auf Substrukturebene durchzuführen (Strategie B). Diese Strategie ist relevant für realistische Strukturen, die sehr komplex sind. Es müssen nur einige repräsentative Substrukturen ausgewählt werden, für die die Vorrechnung

different numbers of modes for different substructures, results in each substructure having approximately the same accuracy. This is of particular interest for the elastoplastic case.

The total numbers of reduced degrees of freedom for the two cases, which are analyzed separately with the MORS, are $m = 32$ and $m = 41$, respectively. The results are presented in Fig. 8), which show good agreement with the reference solution. Interestingly, by using the same number of reduced degrees of freedom (here $m = 32$), the choice with 13/7/6/6 modes per substructure gives more accurate results than the case with 8/8/8/8.

4.4.2 MORS with one substructure (strategy B)

In the previous example, the precomputation has been carried out on the global system (strategy A as mentioned in the introduction). Therefore, the modes of the substructures depend strongly on the behaviour of the global system. If one aims at a design method for modular structures, it is not reasonable to take the global system as starting point, because this has still to be designed and does not exist yet. It is then a suitable strategy to carry out the precomputation at the level of the substructures (strategy B). In systems of higher complexity as they are relevant for realistic applications, one would need to select representative substructures and carry out the offline precomputation for each of these sub-

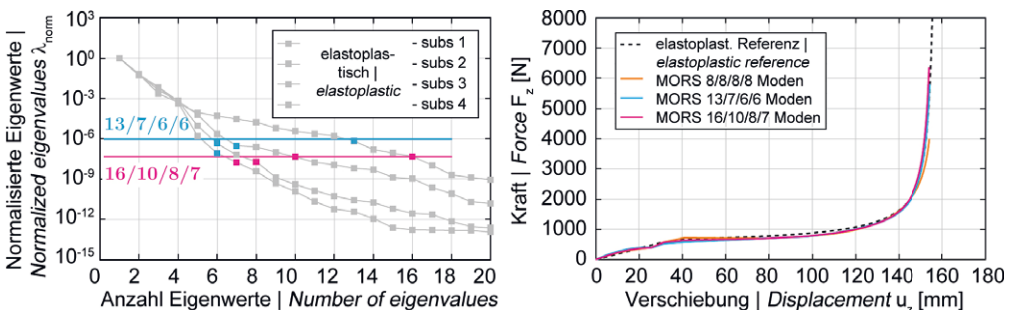


Bild 8: Reduzierte Rechnung mit unterschiedlicher Anzahl der Moden; links: zwei gewählte Fälle mit unterschiedlichen Moden, rechts: reduzierte Rechnung | **Fig. 8:** Reduced computation with different numbers of modes; left: two selected cases with different modes, right: MORS with different modes

in der Offline-Phase durchgeführt wird. Diese Substrukturen können dann zu beliebigen Gesamtsystemen zusammengesetzt werden. Der Hauptvorteil ist, dass in der Vorrechnung nicht das gesamte System untersucht werden muss. In der Onlinephase wird nur ein kleines reduziertes Gleichungssystem auf der globalen Ebene gelöst.

Vorrechnung der Substruktur. Eine Substruktur mit der Geometrie $L / H / T = 12,5 / 8,0 / 1,0$ [mm] wird als eine Grundsubstruktur gewählt (Bild 9, links). Die Materialeigenschaften entsprechen denen des vorherigen Beispiels. Für die Generierung von Biege-Moden wird eine lineare Flächenlast auf zwei gegenüberliegende Flächen der Substruktur aufgebracht (Bild 9, Mitte). Die Substruktur wird in FEAP mit $8 \times 8 \times 1$ -Brick-Elementen modelliert (Bild 9, rechts).

In der Vorrechnung werden acht Grundmoden berücksichtigt, die aus drei Starrkörper-Moden, einer Schub-Mode und je zwei Zug- und Biege-Moden bestehen. Die ersten sechs Moden werden mit vorgegebener Verformung gerechnet, die letzten zwei Biege-Moden mit Flächenbelastung (Bild 9, Mitte). Die acht Grundmoden werden im Bild 10 dargestellt.

Für den nichtlinearen Fall müssen die Grundmoden unter Berücksichtigung von großen Deformationen gerechnet werden. Das hat insbesondere einen signifikanten Einfluss auf die Biege-Moden, da die Spannungsverteilung anders ist als im linearen Fall. Die Richtung der Flächenlasten muss zusätzlich geändert werden, sodass schließlich vier Biege-Moden zu betrachten sind (Bild 11).

structures. The major advantage of strategy B is that the large global system does not have to be analyzed in the precomputation, instead only a few substructures are to be investigated.

Precomputation of the substructure. A substructure of cuboid shape with the geometry $L / H / T = 12.5 / 8.0 / 1.0$ [mm] is chosen as the basic substructure (Fig. 9, left). We use the same material parameters as in the previous example. For the generation of the bending modes, linear surface pressure is applied on the opposite sides of the basic substructure (Fig. 9, middle). The substructure is modeled in FEAP by $8 \times 8 \times 1$ brick elements (Fig. 9, right).

In the preliminary calculation eight basic modes are considered, which consist of three rigid body modes, one shear mode and two tension and two bending modes each. The first six modes are calculated with given deformation, the last two bending modes with surface loading (Fig. 9, middle). The eight basic modes are shown in Fig. 10.

In the nonlinear case, the basic modes must be calculated taking into account large deformations. This has in particular a significant influence on the bending modes, since the stress distribution is different than in the linear case. The direction of the surface loads must also be changed so that finally four bending modes can be considered (Fig. 11).

Together with the other six modes, ten nonlinear basic modes are considered in the precomputation. Each basic mode is computed with

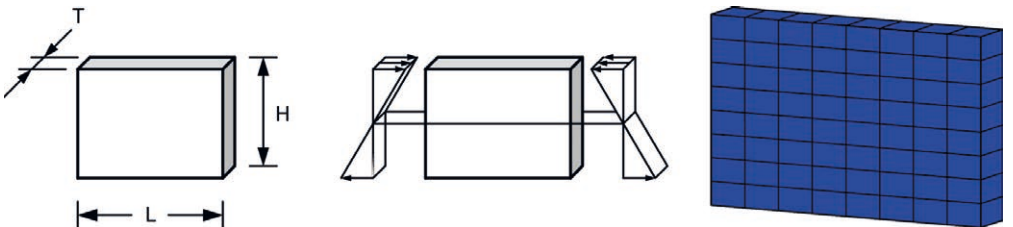


Bild 9: Substruktur als repräsentativer Baustein; links: Geometrie, Mitte: Flächenlast, rechts: FEAP-Modell | **Fig. 9:** Basic substructure; left: geometry, middle: area load, right: FEAP model

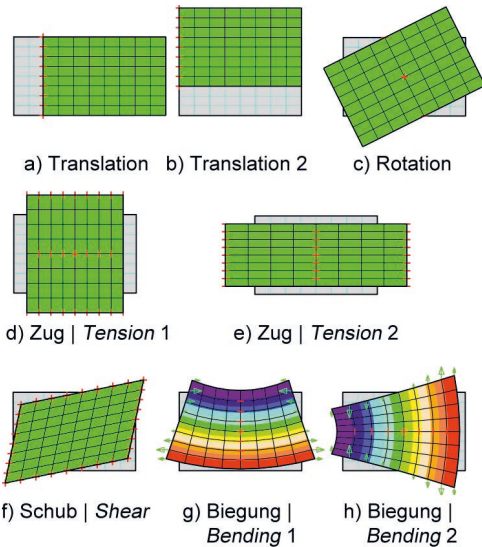
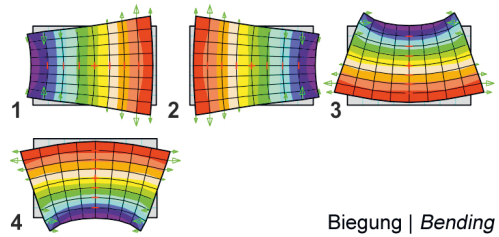


Bild 10: Deformation der 8 Grundmoden | Fig. 10: Deformation of 8 basic modes

Zusammen mit den anderen sechs Moden werden insgesamt zehn nichtlineare Grundmoden in der Vorrechnung berücksichtigt. Jeder Grundmode wird in fünf Lastschritten gerechnet, so dass jeweils fünf Snapshots gesammelt werden. Die Singulärwertzerlegung wird für 50 Snapshots durchgeführt. Die resultierenden singulären Werte sind in Bild 12 dargestellt.

Modellreduktion angewendet auf einen Z-förmigen Kragarm. Der betrachtete Z-förmige Kragarm besteht, wie in Bild 13 dargestellt, aus vier Substrukturen. Das Ziel dieses Beispiels ist, einen weiteren Vorteil der MORS-Methode in Strategie B zu zeigen. Wenn eine bedeutende Nichtlinearität in einer Substruktur auftritt, dann ist es erwünscht, diese Substruktur ohne Reduktion zu berechnen. Das ist speziell für modulare Strukturen mit komplexer Geometrie von Interesse. Die nicht reduzierten und die reduzierten Substrukturen müssen dann gekoppelt und gleichzeitig analysiert werden.

Das Verhalten der Substruktur 2 ist sehr komplex, so dass diese Substruktur ohne Reduktion gerechnet wird. Die restlichen Substrukturen 1, 3 und 4 werden – wie im vorherigen Beispiel



Biegung | Bending

Bild 11: Grundmoden in nichtlinearer Rechnung für Biegung | Fig. 11: Nonlinear bending modes of the basic substructure

5 load steps and thus 5 snapshots are collected. The singular value decomposition is then performed on the 50 collected snapshots and the singular values are shown in Fig. 12.

MORS of a Z-form cantilever beam. A Z-form cantilever beam is shown in Fig. 13, which consists of four substructures. The aim of this example is to show a further advantage of the MORS method with strategy B. If high nonlinearity occurs in one substructure, it is then desired to be computed in a standard way, in other words, without reduction. This is especially useful for modular structures with complex geometry. The unreduced and reduced substructures have to be coupled and analyzed simultaneously.

The connection of substructure 2 is very complex, so that it should be computed without reduction. The remaining three substructures 1, 3 and 4 are reduced with strategy B. In Fig. 14 the Cauchy stress component σ_{xx} and the stress error are compared with respect to different

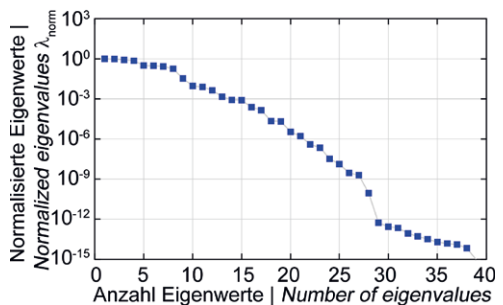


Bild 12: Singuläre Werte einer einzelnen Substruktur aus nichtlinearer Vorrechnung | Fig. 12: Singular values of a single substructure based on nonlinear calculations

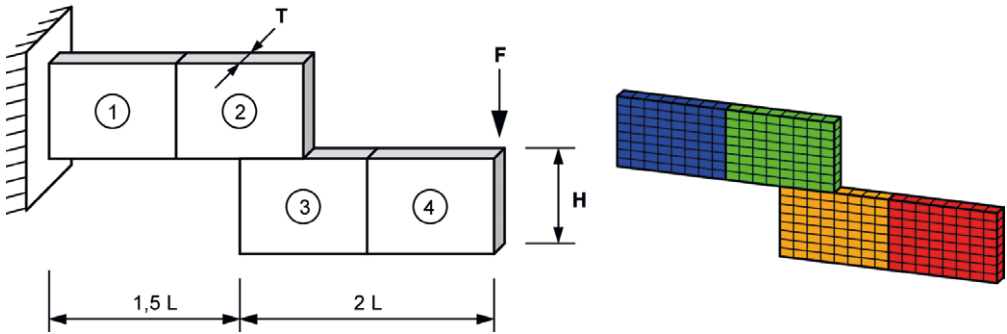


Bild 13: Modell und Vernetzung eines Z-förmigen Kragarms, links: Geometrie und Substrukturen, rechts: FEAP-Modell in 3D | **Fig. 13:** Model and mesh of cantilever beam in Z-form; left: geometry and substructures; right: 3D FEAP model

präsentiert – mit Strategie B reduziert berechnet. In Bild 14 werden jeweils die Verteilungen der σ_{xx} -Komponente der Cauchy-Spannung und der Spannungsfehler mit unterschiedlichem Reduktionslevel verglichen. Der Spannungsfehler ist hier definiert als $\eta = (\sigma_{xx} - \sigma_{xx,ref}) / \max(\sigma_{xx,ref})$, wobei σ_{xx} die Spannung in der reduzierten Rechnung und $\sigma_{xx,ref}$ die Spannung in der nicht reduzierten Rechnung sind. Die maximale Spannung in der Referenzlösung $\max \sigma_{xx,ref}$ wird gewählt, um die Spannungsfehler in unterschiedlich reduzierten Rechnungen zu vergleichen. Zusätzlich wird der Spannungsfehler mit gleicher Skalierung in der Legende dargestellt.

In der Darstellung der Spannung wird der Unterschied kaum deutlich. Mit zunehmender Anzahl der Moden reduziert sich der Spannungsfehler wie erwartet. Der maximale Spannungsfehler taucht nur in lokal eingeschränkten Bereichen auf. In diesem Beispiel werden die reduzierten und nicht reduzierten Substrukturen flexibel miteinander gekoppelt, was als ein weiterer Vorteil dieser Methode zu betrachten ist.

5 Zusammenfassung

In diesem Projekt wurde eine neue numerische Methode – Substrukturierung basierend auf „bonded contact“ in Kombination mit Modellreduktion (MORS) – entwickelt und auf nichtlineare quasi-statische Finite-Elemente-Analysen angewandt. Die zwei wesentlichen Ziele, zum

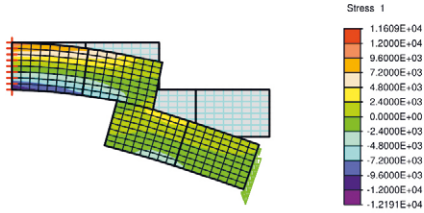
levels of reduction. The stress error is defined as $\eta = (\sigma_{xx} - \sigma_{xx,ref}) / \max(\sigma_{xx,ref})$, with σ_{xx} as the stress in the reduced computation and $\sigma_{xx,ref}$ the stress in the unreduced computation. The maximum stress in the reference solution $\max \sigma_{xx,ref}$ is considered for the comparison of the absolute value of the stress differences in different reduced computations. Additionally, the stress errors are also plotted with the same legends.

The stress plots do not show the significant differences, which shows that strategy B can be applied successfully. By increasing the numbers of the modes the stress errors decrease as expected. The large stress errors are only located in small areas. The overall structural behaviors are well captured in all cases. In this example, the reduced and unreduced substructures are coupled flexibly and analyzed together which is a further considerable advantage.

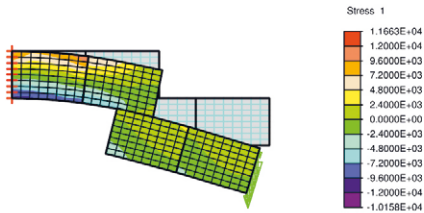
5 Conclusion

A novel method of model order reduction on substructures (MORS) is developed and applied in the context of nonlinear quasi-static analysis. Two main targets, namely the efficient reduction at the substructure level, and the flexible coupling of arbitrary substructures, are achieved.

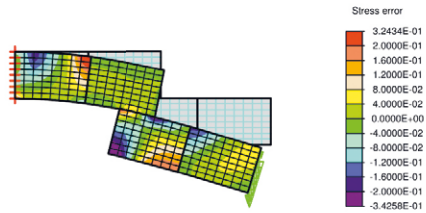
Considering the reduction as one main target, two strategies A and B were presented. Each



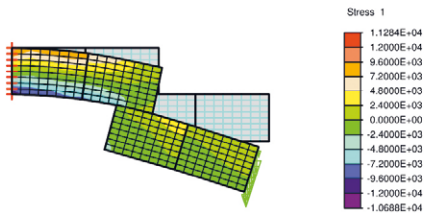
a) Originale Berechnung ohne MORS (Referenzlösung) | *Original calculation without MORS (reference)*



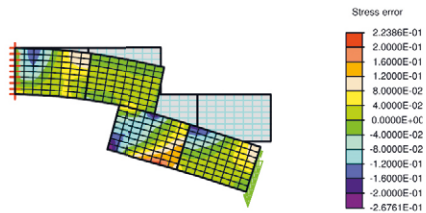
b) MORS mit 8 Moden | *MORS with 8 modes*



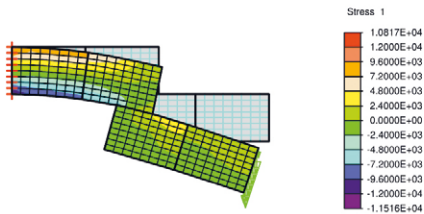
c) Spannungsfehler mit 8 Moden | *Stress error with 8 modes*



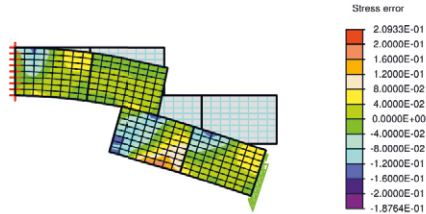
d) MORS mit 16 Moden | *MORS with 16 modes*



e) Spannungsfehler mit 16 Moden | *Stress error with 16 modes*



f) MORS mit 32 Moden | *MORS with 32 modes*



g) Spannungsfehler mit 32 Moden | *Stress error with 32 modes*

Bild 14: MORS mit verschiedenen Moden | Fig. 14: MORS with different modes

einen die effiziente Reduktion auf Substrukturebene und zum anderen die flexible Kopplung beliebiger Substrukturen, wurden erreicht.

Für die Reduktion werden zwei Strategien A und B präsentiert. Beide Strategien haben Vor- und Nachteile. Strategie A basiert auf der Vorrechnung des globalen Systems. Der Aufwand in der Vorrechnung ist deshalb nicht vernachlässigbar.

of them has its own advantages and disadvantages. Strategy A relies on the precomputation of the global system. The effort in the precomputation is high, but the substructures can be individually reduced with a small number of unknowns. On the contrary, the strategy B demands only the precomputation of one substructure or a few substructures, which is computationally very cheap, but the reduction

Die Substrukturen können individuell zu einer kleinen Dimension reduziert werden. Im Gegensatz dazu erfordert die Strategie B nur die Vorrechnung einer einzigen Substruktur oder weniger Substrukturen. Die Vorrechnung ist einfach, aber das reduzierte System zeigt größere Abweichungen zum Originalsystem als bei Strategie A. Die Strategie A ist für schon entworfene Strukturen geeignet, insbesondere für die Analyse von Strukturen mit höheren Nichtlinearitäten. Die Strategie B ist insbesondere in der Designphase eines Systems von Interesse. Darüber hinaus können beide Strategien, wie in den numerischen Beispielen präsentiert, durch zusätzliche numerische Erweiterungen verbessert werden. In Strategie A können die Moden adaptiv selektiert werden, um das gleiche Level der Genauigkeit zu erreichen. In Strategie B ermöglicht die Kopplung von reduzierten und nicht reduzierten Substrukturen eine Verbesserung der Ergebnisse.

Einige numerische Beispiele mit Berücksichtigung hyperelastischen und elasto-plastischen Materialverhaltens und großer Deformationen wurden präsentiert. Die Beispiele zeigen, dass die auf der Snapshot-POD basierende MORS-Methode für die nichtlineare Analyse mit materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten sehr gut geeignet ist.

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung des Projekts Nr. 257611820 innerhalb des Schwerpunktprogramms SPP 1542.

is less efficient. Strategy A is preferred for already designed structures with high nonlinearities. Strategy B is especially suitable in the design stage. Furthermore, both strategies are improved with additional treatments, which are shown in the numerical examples. In strategy A, an adaptive selecting method can be applied to achieve the same level of accuracy in all substructures. In strategy B, the coupling of reduced and unreduced substructure is capable to improve the results so that errors can be noticeably reduced.

Numerical examples including hyperelastic and elastoplastic material behaviour as well as large deformation are presented. The examples show that the proposed snapshot-POD based MORS method is well suited for nonlinear analyses considering material as well as geometrical nonlinearities.

Acknowledgement

The authors would like to thank the German Research Foundation (DFG) for funding the project (number 257611820) within the Priority Programme SPP 1542.

Literatur | References

- [1] Wriggers, P.: Computational Contact Mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006
- [2] Laursen, T.: Computational Contact and Impact Mechanics. Berlin, New York, Heidelberg: Springer, 2002
Wriggers, P.; Zavarise, G.: Computational contact mechanics. Encyclopedia of computational mechanics (2004), 195–226 – DOI: <https://doi.org/10.1002/0470091355.ecm033>
- [3] Zhou, L.; Reese, S.: Substructuring through bonded contact and a study of convergence. In: Elgeti, S.; Simon, J.-W. (Hrsg.): Proc. of the 3rd ECCOMAS Young Investigators Conf. on Computational Methods in Applied Sciences and 6th GACM Coll. on Computational Mechanics (YIC GACM 2015), 20.–23.07.2015 in Aachen, 2015, S. 268–271 – DOI: 10.13140/RG.2.1.4187.3761
- [4] Zhou, L.; Reese, S.: A computationally efficient numerical method for the analysis of a geodesic dome using modular plane shell substructures. In: KIVI (Hrsg.): Future Visions – Proc. of the Int. Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symp. 2015, 17.–20.08.2015 in Amsterdam (Niederlande), 2015, Beitrag Nr. IASS2015-520449, publ. auf USB-Stick: 15 S.
- [5] Hesch, C.; Betsch, P.: Isogeometric analysis and domain decomposition methods. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 213 (2012), S. 104–112 – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.12.003>
- [6] Zhou, L.; Simon, J.; Reese, S.: Proper orthogonal decomposition for substructures in non-linear finite element analysis – coupling by means of tied contact. Archive of Applied Mechanics 88 (2018) 11, S. 1975–2001
- [7] Radermacher, A.; Bednarczyk, B. A.; Stier, B.; Simon, J.; Zhou, L.; Reese, S.: Displacement-based multiscale modeling of fiber-reinforced composites by means of proper orthogonal decomposition. Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences 3 (2016) 1, 23 S. – DOI: 10.1186/s40323-016-0082-8
- [8] De Souza Neto, E. A.; Perić, D.; Owen, D. R. J.: Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. John Wiley & Sons Ltd., 2008

Bildnachweise | Picture credits

Alle Bilder | All figures: Lei Zhou

Projektdaten | Project data

Allgemeine Angaben | General information

Modellreduktion und Substrukturtechnik am Beispiel von modularen Schalentragwerken aus ultrahochfestem Beton

Model reduction and substructure technique – application to modular shell structures made of ultra-high performance concrete

Antragstellerin Applicant:	Prof. Dr.-Ing. habil. Stefanie Reese Professorin und Institutsleiterin Professor and head of institute
DFG-Geschäftszeichen DFG reference number:	RE 1057/32-1 (Projektnummer Project number: 257611820)
Adresse Address:	RWTH Aachen University, Institut für Angewandte Mechanik (ifam), Mies-van-der-Rohe-Straße 1, 52074 Aachen
Kontakt Contact:	+49 241 80 25001 stefanie.reese@rwth-aachen.de www.ifam.rwth-aachen.de
Berichts-/Förderzeitraum Reporting/funding period:	10/2014–12/2017
Team Team:	Lei Zhou Jaan Simon

Projektbezogene Publikationen | Project related publications

- Zhou, L.; Simon, J. W.; Reese, S.: Proper orthogonal decomposition for substructures in non-linear finite element analysis – coupling by means of tied contact. *Archive of Applied Mechanics* 88 (2018) 11, S. 1975–2001 – DOI: 10.1007/s00419-018-1427-1
- Radermacher, A.; Bednarczyk, B. A.; Stier, B.; Simon, J. W.; Reese, S.: Displacement-based multiscale modeling of fiber-reinforced composites by means of proper orthogonal decomposition. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 3 (2016) 1, 29, 23 S. – DOI: 10.1186/s40323-016-0082-8
- Zhou, L.; Reese, S.: Substructuring through bonded contact and a study of convergence. In: Elgeti, S.; Simon, J. W. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd ECCOMAS Young Investigators Conf. on Computational Methods in Applied Sciences and 6th GACM Coll. on Computational Mechanics (YIC GACM 2015)*, 20.–23.07.2015 in Aachen, 2015, S. 268–271 (online publiziert) – urn:nbn:de:hbz:82-rwth-2015-039806
- Zhou, L.; Reese, S.: A computationally efficient numerical method for the analysis of a geodesic dome using modular plane shell substructures. *Future Visions – Proc. of the Int. Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symp. 2015*, 17.–20.08.2015 in Amsterdam (Niederlande), 2015, Beitrag Nr. IASS2015-520449, publ. auf USB-Stick, 15 S.
- Reese, S.; Kastian, S.; Zhou, L.: Proper Orthogonal Decomposition – APOD / MORS and a quite different topic: forecasting. Keynote lecture, 4th Int. Workshop on Reduced Basis, POD and PGD Model Reduction Techniques, 08.–10.11.2017 in Sevilla (Spanien), 2017
- Reese, S.; Kochmann, J.; Rezaei, S.; Wulfinghoff, S.; Zhou, L.; Cavaliere, F.; Simon, J.; Radermacher, A.: Multi-scale modeling using finite elements, fast Fourier transforms and proper orthogonal decomposition in production and medical technology. Plenary lecture, *Computational Modelling of Multi-Uncertainty and Multi-Scale Problems (COMUS)*, 12.–14.09.2017 in Porto (Portugal), 2017
- Reese, S.; Zhou, L.; Kastian, S.; Simon, J. W.; Radermacher, A.: Proper orthogonal decomposition at finite strains – APOD / MORS / FE*POD. 14th Int. Conf. on Computational Plasticity (COMPLAS 2017), 05.–07.09.2017 in Barcelona (Spanien), 2017
- Zhou, L.; Simon, J. W.; Reese, S.: Model order reduction on the substructure level applied in nonlinear static and dynamic analysis. 2nd Exploratory Workshop on Applications of Model Order Reduction Methods in Industrial Research and Development, 10.03.2017 in Luxembourg (Luxemburg), 2017
- Zhou, L.; Simon, J. W.; Reese, S.: A novel POD-based model order reduction at the substructure level for non-linear structural analysis. 3rd Workshop on Model Reduction of Complex Dynamical Systems (MODRED 2017), 11.–13.01.2017 in Odense (Denmark), 2017

- Zhou, L.; Simon, J. W.; Reese, S.: Nonlinear POD-based Model Order Reduction on the substructures with bonded contact for the interface coupling problems. Poster by Conf. on Data-driven Model Order Reduction and Machine Learning (MORML 2016), 30.03.–01.04.2016 in Stuttgart, 2016
- Reese, S.; Bednarczyk, B.; Kochmann, J.; Radermacher, A.; Simon, J. W.; Wulfinghoff, S.; Zhou, L.: Displacement-based multiscale modelling and substructuring by means of POD. keynote lecture, 3rd Workshop on Reduced basis, Proper Orthogonal Decomposition & Proper Generalized Decomposition, Nov. 2015 in Paris (Frankreich), 2015 – Vortrag | Oral presentation
- Zhou, L.; Reese, S.: Shell structure analysis with model order reduction and substructure techniques. 3rd ECCOMAS Young Investigators Conf. and 6th GACM Colloquium, 20.–23.07.2015 in Aachen, 2015 – Vortrag | Oral presentation
- Zhou, L.; Reese, S.: Model order reduction and substructure techniques through bonded contact. 9th European Solid Mechanics Conference (ESMC9), 06.–10.07.2015 in Madrid (Spanien), 2015 – Vortrag | Oral presentation

Folgeprojekte | Follow-up projects

- Modellreduktion in Raum und Parameterdimension – Schädigungs-basierte Modellierung polymorpher Unschärfen im Zusammenhang mit Robustheit und Zuverlässigkeit | Model order reduction in space and parameter dimension – towards damage-based modeling of polymorphic uncertainty in the context of robustness and reliability

Antragstellerin Applicant:	Prof. Dr.-Ing. habil. Stefanie Reese
Förderer Funding:	Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) / SPP 1886
Laufzeit Period:	01.10.2016–31.12.2022

- A01: Eine neue Methodologie zur Übertragung effizienter Lastabtragsmechanismen aus der Natur auf Strukturen aus Carbonbeton | A01: A new methodology to transfer efficient mechanisms of load transmission from nature to structures made of carbon reinforced concrete

Antragsteller:in Applicants:	Prof. Dr.-Ing. habil. Stefanie Reese, Prof. Dr.-Ing. habil. Jaan Simon (ifam, RWTH Aachen University)
Förderer Funding:	Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) / SFB/TRR 280
Laufzeit Period:	seit since: 01.07.2020

- B05: Kopplung von intrusiven und nichtintrusiven lokal zerlegten Modellreduktionsverfahren für schnelle Simulationen von Straßensystemen | B05: Coupling of intrusive and non-intrusive locally decomposed model order reduction techniques for rap-id simulations of road systems

Antragstellerin Applicant:	Prof. Dr.-Ing. habil. Stefanie Reese
Förderer Funding:	Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) / SFB/TRR 339
Laufzeit Period:	seit since: 01.01.2022

Sonstige Aktivitäten | Special activities

- Organisation eines Minisymposiums „Model order reduction with emphasis on non-linear and multi-scale problems“ bei der COMPLAS 2017, 05.–07.09.2017 in Barcelona (Spanien) | Organization of a mini symposium “Model order reduction with emphasis on non-linear and multi-scale problems“ at COMPLAS 2017, 05.–07.09.2017