MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 29, NO. 2, 2022
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions

L. Y. Bystrov[1], E. V. Kuzmin[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-78-91

[1]P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 06E30
Research article
Full text in Russian

Received May 4, 2022
After revision May 28, 2022
Accepted June 1, 2022

One of the problems of modern discrete mathematics is R. Dedekind problem on the number of monotone boolean functions. For other precomplete classes, general formulas for the number of functions of the classes had been found, but it has not been found so far for the class of monotone boolean functions. Within the framework of this problem, there are problems of a lower level. One of them is the absence of a general formula for the number of boolean functions of intersection MS of two classes — the class of monotone functions and the class of self-dual functions. In the paper, new lower bounds are proposed for estimating the cardinality of the intersection for both an even and an odd number of variables. It is shown that the election function of an odd number of variables is monotone and self-dual. The election function of an even number of variables is determined. Free election functions, which are functions with fictitious variables similar in properties to election functions, are introduced. Then the union of a set of election functions and a set of free election functions is considered, and the cardinality of this union is calculated. The resulting value of the cardinality is proposed as a lower bound for $|MS|$. For the class MS of monotone self-dual functions of an even number of variables, the lower bound is improved over the bounds proposed earlier, and for functions of an odd number of variables, the lower bound for $|MS|$ is presented for the first time.

Keywords: functions of election; self-dual boolean functions; monotone boolean functions; the Dedekind problem; boolean functions with fictitious variables; functions of free election; equilibrium sets; disjunctive normal form

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Leonid Y. Bystrov	orcid.org/0000-0002-0610-5466. E-mail: bystrovl0306@mail.ru undergraduate student, chair of theoretical informatics.
Egor V. Kuzmin correspondence author	orcid.org/0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru Professor, Doctor of Science.

Funding: This work was supported by P.G. Demidov Yaroslavl State University Project № VIP-016.

For citation: L. Y. Bystrov and E. V. Kuzmin, "Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 78-91, 2022.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 29, № 2, 2022
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Применение функций голосования для оценки числа монотонных самодвойственных булевых функций

Л. Ю. Быстров[1], Е. В. Кузьмин[1]
DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-78-91

[1]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 510.6
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 4 мая 2022 г.
После доработки 28 мая 2022 г.
Принята к публикации 1 июня 2022 г.

Одной из проблем современной дискретной математики является проблема Р. Дедекинда о числе монотонных булевых функций. Если для прочих предполных классов были найдены общие формулы числа функций этих классов, то для класса монотонных булевых функций этого сделать пока не удалось. В рамках этой проблемы существуют проблемы меньшего уровня, одной из которых является отсутствие общей формулы числа булевых функций пересечения MS двух классов — класса монотонных функций и класса самодвойственных функций. В данной работе предлагаются новые нижние границы для оценки мощности этого пересечения как для чётного, так и для нечётного количества переменных. Показывается, что функция голосования от нечётного числа переменных является монотонной и самодвойственной. Определяется функция голосования от чётного числа переменных. Вводятся функции свободного голосования — функции с фиктивными переменными, близкие по свойствам к функциям голосования. Рассматривается объединение множества функций голосования и множества функций свободного голосования. Вычисляется мощность этого объединения. Полученное значение мощности предлагается в качестве нижней границы для $|MS|$. Для класса MS монотонных самодвойственных функций от чётного числа переменных нижняя граница была улучшена по сравнению с границами, предложенными ранее, а для функций от нечётного числа переменных нижняя граница для $|MS|$ представлена впервые.

Ключевые слова: функции голосования; самодвойственные булевы функции; монотонные булевы функции; проблема Дедекинда; булевы функции с фиктивными переменными; функции свободного голосования; равновесные наборы; дизъюнктивная нормальная форма

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Леонид Юрьевич Быстров	orcid.org/0000-0002-0610-5466. E-mail: bystrovl0306@mail.ru студент, кафедра теоретической информатики.
Егор Владимирович Кузьмин автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru профессор, доктор физ.-мат. наук.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П.Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: L. Y. Bystrov and E. V. Kuzmin, “Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 78-91, 2022.

Введение

Одной из проблем современной дискретной математики является проблема Рихарда Дедекинда о числе монотонных булевых функций [1]. Если для прочих предполных классов были найдены общие формулы числа функций от n переменных этих классов, то для класса монотонных булевых функций этого сделать пока не удалось. Применяемые различными исследователями подходы [2] к решению задачи Дедекинда не привели к точной оценке мощности множества монотонных булевых функций. В рамках данной проблемы существуют задачи меньшего уровня, одной из которых является отсутствие общей формулы числа булевых функций от n переменных пересечения класса монотонных функций и класса самодвойственных функций. Это пересечение классов далее будем обозначать MS.

Наиболее точные оценки для $|MS|$ были даны Л. Хавьяровой и Е. Томан [3]. Верхняя граница для нечётных n:

$$1 + \sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{i=1}^{\binom{n-1}{l-1}} \binom{\binom{n}{n-l}}{i}.$$

Верхняя граница для чётных n:

$$2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{i=1}^{\binom{n-1}{l-1}} \binom{\binom{n}{n-l}}{i}.$$

Нижняя граница для чётных n:

$$2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}}.$$

В данной статье предлагаются новые нижние границы для $|MS|$ как для чётного, так и для нечётного количества переменных. Рассматривается объединение E множества функций голосования E_S и множества функций свободного голосования E_F, мощность которого $|E|$ предлагается в качестве нижней границы для $|MS|$.

1. Основные понятия

Булева функция f^*, такая что $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, называется *двойственной* функцией к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Функция f называется *самодвойственной*, если $f = f^*$. Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Для двух наборов значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполнено *отношение предшествования* $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, если

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, имеет место неравенство

$$f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta}).$$

Обозначим через x^δ булеву функцию, равную $\overline{x}$ при $\delta = 0$ и x при $\delta = 0$:

$$x^\delta = \begin{cases} \overline{x}, & \delta = 0, \\ x & \delta = 1. \end{cases}$$

Выражение

$$K = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\delta_r}, \text{где } i_\nu \neq i_\mu, \nu \neq \mu$$

называется *элементарной конъюнкцией.* Число r называется *рангом элементарной конъюнкции* [4].

Импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что

$$K \vee f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Импликанта K функции f называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любой переменной из K получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращённой ДНФ* функции f [5].

2. Функции голосования

Функцией голосования называется булева функция, принимающая значение 1, когда в наборах значений переменных преобладают единицы, и принимающая значение 0, когда в наборах значений переменных преобладают нули. Можно считать, что такие функции описывают схему голосования, где решения принимаются большинством голосов [6]. Функции голосования являются одними из самых распространённых булевых функций, возникающих во многих задачах [7].

Определение 1. *Функция голосования от n переменных, где n — нечётное, представляет собой булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую следующим образом:*

$$f(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}), \\ 0, & q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}), \end{cases}$$

где $q_1(\tilde{\alpha})$ — количество единиц в наборе значений переменных $\tilde{\alpha}$, $q_0(\tilde{\alpha})$ — количество нулей.

x_1	x_2	x_3	$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_3x_2$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_3x_2$
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table 1. Function of election of 3 variables

Таблица 1. Функция голосования от 3 переменных

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция голосования, n — нечётное, тогда f является монотонной и самодвойственной.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый набор значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и сравнимый с ним набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, такой что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$. Значения, равные 1 в наборе $\tilde{\alpha}$, сохраняют значение единицы и в наборе $\tilde{\beta}$, поэтому $q_1(\tilde{\alpha}) \leqslant q_1(\tilde{\beta})$. Следовательно, по определению функции голосования имеем $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$, т. е. функция f является монотонной.

Если функция f на некотором наборе значений переменных принимает значение 1 ($q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha})$), то на противоположном наборе эта функция принимает значение 0 ($q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$). Следовательно, функция f обладает свойством самодвойственности. ■

Сохранив свойства монотонности и самодвойственности, определим функцию голосования от чётного числа переменных.

Определение 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — монотонная самодвойственная булева функция от n переменных, n — чётное, $q_1(\tilde{\alpha})$ — количество единиц в наборе значений переменных $\tilde{\alpha}$, $q_0(\tilde{\alpha})$ — количество нулей. Функция f называется функцией голосования, если*

$$q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}) \Longrightarrow f(\tilde{\alpha}) = 0 \text{ и } q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}) \Longrightarrow f(\tilde{\alpha}) = 1.$$

Покажем, каким образом функция голосования от n переменных, где n — чётное, определяется на наборах значений переменных, в которых количество единиц равно количеству нулей ($q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha})$). Назовём такие наборы *равновесными*. Например, для 4 переменных равновесными наборами будут 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	a_1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	a_2
0	1	1	0	a_3
0	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	0	0	0
1	0	0	1	$\overline{a_3}$
1	0	1	0	$\overline{a_2}$
1	0	1	1	1
1	1	0	0	$\overline{a_1}$
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Table 2. Function of election of 4 variables

Таблица 2. Функция голосования от 4 переменных

Пусть вектор $\tilde{\alpha}$ определяет некоторый равновесный набор значений переменных функции голосования от чётного числа переменных. *Переменные*, принимающие в этом наборе значение единицы, назовем *значимыми*. Рассмотрим для $\tilde{\alpha}$ сравнимые наборы.

Если хотя бы одна значимая переменная в сравнимом наборе $\tilde{\beta}$ принимает значение 0, то функция $f(\tilde{\beta})$ равна 0 ($q_0(\tilde{\beta}) > q_1(\tilde{\beta})$). Следовательно, имеем $f(\tilde{\beta}) \leqslant f(\tilde{\alpha})$.

Если хотя бы одна незначимая переменная сравнимого набора $\tilde{\gamma}$ принимает значение 1, то функция $f(\tilde{\gamma})$ равна 1 ($q_1(\tilde{\gamma}) > q_0(\tilde{\gamma})$). Получили, что $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\gamma})$.

Итак, независимо от выбора значения функции голосования на равновесном наборе функция сохраняет свойство монотонности. Тогда необходимо только потребовать, чтобы на противоположных равновесных наборах функция принимала противоположные значения, т. е. соблюдалось условие самодвойственности.

В Таблице 2 числа a_1, a_2, a_3 — это значения функции на первой половине равновесных наборов, и $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ — противоположные им значения функции на второй половине равновесных наборов. Функция f будет монотонной и самодвойственной при любых значениях a_1, a_2, a_3.

Заметим, что для систем голосования с чётным числом голосующих, где решения принимаются большинством голосов, в случае ничьи решение всё равно может быть принято, если одной половине голосующих отдать предпочтение. Половина, которой было отдано предпочтение, будет выигрывать в голосовании у другой половины, даже если все участники голосования поменяют свой выбор на противоположный. Это и называется условием самодвойственности.

Рассмотрим пример функции голосования от чётного числа переменных.

Пусть в нашей системе голосования имеется всего 2 голосующих: x_1, x_2. Решение принимается большинством голосов. Если оба голосующих проголосуют одинаково, то результат голосования будет однозначен:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \Longrightarrow f(x_1, x_2) = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \Longrightarrow f(x_1, x_2) = 1.$$

Если участники голосования проголосуют по-разному, то число голосов «за» будет равно числу голосов «против». Для того чтобы определить результат голосования, отдадим половине голосующих предпочтение. В данном примере существует только один способ разбиения общего числа голосующих на половины — по одному голосующему. Если мы отдадим предпочтение голосующему x_1, то функция результата голосования $f(x_1, x_2)$ на проблемных (равновесных) наборах будет определяться следующим образом:

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \Longrightarrow f(x_1, x_2) = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0 \Longrightarrow f(x_1, x_2) = 1.$$

Аналогичным образом можно отдать предпочтение голосующему x_2.

В первом случае, когда предпочтение было отдано x_1, получена функция $f(x_1, x_2) = x_1$, во втором — $f(x_1, x_2) = x_2$.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1$	$f(x_1, x_2) = x_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Table 3. Functions of election of 2 variables

Таблица 3. Функции голосования от 2 переменных

3. Количество функций голосования

Рассмотрим функции голосования от n переменных, где n — чётное.

Чтобы получить равновесный набор значений переменных, необходимо ровно половине всех переменных присвоить значение 1, прочим переменным будет однозначно определено значение 0. Поэтому число равновесных наборов может быть вычислено с помощью комбинаторной формулы сочетаний без повторений из n по $\frac{n}{2}$:

$$C_n^{n/2} = \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{((\frac{n}{2})!)^2}.$$

Определим количество функций голосования от чётного числа переменных. На каждом неравновесном наборе значений переменных функция голосования задаётся однозначно. Тогда необходимо выбрать значения функции на равновесных наборах. Ввиду самодвойственности, достаточно выбрать значения функции только на половине равновесных наборов. Используя всё ту же формулу сочетаний без повторений, получаем

$$(C_2^1)^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}}.$$

Это же число было предложено Л. Хавьяровой и Е. Томан в качестве нижней границы $|MS|$ для чётных n [3]. Ими было показано, что наибольшее число элементарных конъюнкций, которое может содержать сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных, равно значению $\binom{n}{[n/2]}$. Далее ими был рассмотрен куб [4], соответствующий монотонной самодвойственной булевой функции от n переменных, где n — чётное, и было замечено, что, в силу самодвойственности, $\frac{\binom{n}{n/2}}{2}$ вершин на $\frac{n}{2}$-ом уровне соответствуют множеству вершин $\{\tilde{\alpha} : f(\tilde{\alpha}) = 1\}$, а другие $\frac{\binom{n}{n/2}}{2}$ вершин соответствуют множеству вершин $\{\tilde{\alpha} : f(\tilde{\alpha}) = 0\}$. Тогда число способов распределить $\binom{n}{n/2}$ вершин по этим двум множествам равно

$$2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}}.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_3x_2$	$x_1x_2 \vee x_1x_4 \vee x_4x_2$	$x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_4x_3$	$x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_4x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1x_4 \vee x_2x_3x_4$	$x_2x_1 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee\, x_2x_4 \vee x_1x_3x_4$	$x_3x_1 \vee x_3x_2 \vee$ $\vee\, x_3x_4 \vee x_1x_2x_4$	$x_4x_1 \vee x_4x_2 \vee$ $\vee\, x_4x_3 \vee x_1x_2x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Table 4. All functions of election of 4 variables

Таблица 4. Все функции голосования от 4 переменных

4. Функции голосования в решении проблемы Дедекинда

Назовём *почти равновесным* набор $\tilde{\alpha}$ значений переменных булевой функции от n переменных, где n — нечётное, для которого $q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha}) + 1$. Сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных с наибольшим числом элементарных конъюнкций может быть получена из равновесных наборов для чётных n и из почти равновесных наборов для нечётных n следующим образом:

1. Для каждого равновесного (почти равновесного) набора составляется элементарная конъюнкция из переменных, которым в данном наборе значений соответствует 1.
2. Полученные на шаге 1 элементарные конъюнкции соединяются дизъюнкцией.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 1 на наборах значений переменных, в которых $q_1(\tilde{\alpha}) \geqslant q_0(\tilde{\alpha})$, и равна 0 на наборах, в которых $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$. Данная функция представляет систему голосования, в которой решение будет принято, если хотя бы половина голосующих поддержат это решение.

В полученной ДНФ каждая элементарная конъюнкция представляет группу голосующих, число которых равно половине общего числа голосующих. Поэтому полученная ДНФ соответствует ДНФ функции f.

Полученная ДНФ является сокращённой ДНФ функции f, так как каждая её элементарная конъюнкция является простой импликантой. Если бы это было не так, то в описанной системе голосования был бы возможен случай принятия решения, когда более половины голосующих не поддержали его. Но это противоречит определению функции f, так как в этом случае $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$, но $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Булева функция, ДНФ которой не содержит отрицаний, является монотонной функцией, отличной от 0 и 1 [8]. Сокращённая ДНФ функции f не содержит отрицаний по построению. Следовательно, f — это монотонная функция.

Число элементарных конъюнкций в полученной ДНФ равно числу равновесных (почти равновесных) наборов, то есть $\binom{n}{[n/2]}$.

Таким образом, показано, что сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных с наибольшим числом элементарных конъюнкций может быть получена из равновесных наборов для чётных n и из почти равновесных наборов для нечётных n. Л. Хавьярова и Е. Томан в своей работе получили число $\binom{n}{[n/2]}$, исходя из других рассуждений, хотя в приведённых ими примерах фактически находятся именно равновесные наборы и подсчитывается их количество [3].

Число $2^{\frac{\binom{n}{[n/2]}}{2}}$ встречается не только в статье [3]. Другие исследователи также обращались к этому числу для оценки мощности $|M|$ множества монотонных функций. В 1954 году это число было предложено Э. Н. Гильбертом в качестве нижней границы для $|M|$. В. К. Коробков использовал это число для установления верхней границы для $|M|$ [1]. Наиболее точные асимптотики, приведённые А. Д. Коршуновым, также были основаны на этом числе [9]. Можно предположить, что на протяжении всего времени существования проблемы Дедекинда её решение неявно основывалось на использовании функций голосования.

5. Функции свободного голосования и нижняя граница для $|MS|$

Определение 3. *Функцией свободного голосования назовём такую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, что*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \text{ где } g \text{ — функция голосования, } i_j \in \overline{1, n},\ j \in \overline{1, k},\ k < n.$$

Функция свободного голосования содержит переменные, которые не участвуют в формировании её значения (фиктивные переменные). В системах голосования фиктивными переменными обозначаются голосующие, воздерживающиеся от голосования или игнорирующее его.

x_1	$f(x_1) = x_1$
0	0
1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3) = x_1$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table 5. $f(x_1) = x_1$ — a function of election, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ — a function of free election

Таблица 5. $f(x_1) = x_1$ — функция голосования, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ — функция свободного голосования

Лемма 1. *Функция свободного голосования является монотонной и самодвойственной.*

Доказательство. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)$. Не нарушая общности рассуждений, положим, что первые k значений набора соответствуют фиктивным переменным.

Для любого сравнимого с $\tilde{\alpha}$ набором $\tilde{\beta}$, отличающимся от $\tilde{\alpha}$ только в первых k переменных, $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$. Условие монотонности не нарушено. Функция f — монотонная.

Если $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k, \dots, \bar{\alpha}_n) = 0$, так как фиктивные переменные не участвуют в формировании значения функции. Следовательно, функция свободного голосования является самодвойственной. ■

Итак, функция голосования и функция свободного голосования являются одновременно и монотонными, и самодвойственными. Это означает, что объединение E множества функций голосования E_S и множества функций свободного голосования E_F является подмножеством множества MS. Отсюда следует, что число $|E|$ может выступать в качестве нижней границы для $|MS|$.

Часть элементов множества E уже была подсчитана ранее. Число функций голосования для нечётного числа переменных $|E_{So}| = 1$, для чётного — $|E_{Se}| = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}}$. Далее также будут учитываться элементы множеств E_{Fe} и E_{Fo} функций свободного голосования от чётного и нечетного числа переменных соответственно. Рассмотрим, как между собой соотносятся множество функций голосования E_S и множество функций свободного голосования E_F.

Теорема 2. *Пусть $g(x_1, ..., x_n)$ — функция голосования от n переменных, где n — нечётное, тогда существует такая функция $f(x_1, \dots, x_{n+1})$, что f — функция голосования от чётного числа переменных и $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. К набору переменных $x_1, ..., x_n$ добавим переменную x_{n+1}. Построим функцию $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$.

Количества нулей и единиц в некотором наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ могли находиться в следующих отношениях:

1. $q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}) + 1$;
2. $q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha}) + 1$;
3. $q_0(\tilde{\alpha}) = q_1(\tilde{\alpha}) + 1$;
4. $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}) + 1$.

В случаях 1 и 2 имеем $g(\tilde{\alpha}) = 1$, в 3 и 4 — $g(\tilde{\alpha}) = 0$. Так как q_1 и q_0 в наборах значений переменных $x_1, \dots, x_{n+1}$ не могли измениться более чем на 1, то для любых значений переменной x_{n+1} в случае 1 будет $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 1$, в случае 4 — $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 0$, а в случаях 2 и 3 $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1})$ может быть определена по-разному (равновесные наборы). На равновесных наборах функция f должна сохранять самодвойственность. Установим единичное значение функции f в случае 2, т. е. $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 1$, и нулевое значение в случае 3, т. е. $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 0$. Получим

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n).$$

■

Важным следствием Теоремы 2 является следующий факт.

Следствие 2.1. *Множество E_{Se} функций голосования от n переменных, где n — чётное, содержит функции свободного голосования, то есть пересечение $E_{Se} \cap E_{Fe}$ не пусто.*

Чтобы подсчитать $|E|$, разобьём множество E на 2 непересекающихся подмножества $E = E_S \cup V$, где $V = E_F \setminus \{E_S \cap E_F\}$. Тогда $|E| = |E_S| + |V|$.

Пересечение $E_{So} \cap E_{Fo}$ пусто, E_{So} содержит только одну функцию. Подсчитаем число функций, входящих в пересечение множеств функций голосования E_{Se} и функций свободного голосования E_{Fe}.

Функциями свободного голосования в общем числе функций голосования от n переменных, где n — чётное, являются функции голосования от $n - 1$ переменной. Число таких функций свободного голосования равно числу способов выбрать $n - 1$ переменную из n:

$$|E_{Se} \cap E_{Fe}| = C_n^{n-1} = n.$$

Подсчитаем отдельно $|V_e|$ — число функций свободного голосования от n переменных, не являющихся функциями голосования от n переменных, где n — чётное, и $|V_o|$ — число тех же функций от n переменных, где n — нечётное.

Множество E_{Se} представляет собой множество функций голосования от n переменных, где n — чётное. По Теореме 2 множество E_{Se} включает в себя функции голосования от $n - 1$ переменной. Множество V_e не пересекает E_{Se}. Поэтому V_e не содержит функций голосования ни от n переменных, ни от $n - 1$ переменной.

Число $|V_e|$ может быть найдено следующим образом:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i)C_n^{2i}) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2i-1} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i)C_n^{2i} + C_n^{2i-1}).$$

Вычисление $|V_e|$ разбивается на 2 части. В первой части суммируются все функции свободного голосования из множества V_e, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i$ переменных для каждого i. Во второй части суммируются функции голосования из множества V_e, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i - 1$ переменной для каждого i.

Для нечётного числа переменных определена только одна функция голосования. Число функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных соответствуют функциям голосования от $2i - 1$ переменной, равно числу способов выбрать $2i - 1$ переменную из n: C_n^{2i-1}.

Для чётного числа $2i$ переменных имеем $|E_{Se}^{2i}| = 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}}$ функций голосования, из которых $2i$ функций входят в пересечение $E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}$, т. е. являются функциями голосования от $2i - 1$ переменной (верхний индекс $2i$ указывает на то, что функции из указанных множеств — это функции от $2i$ переменных). Поскольку функции голосования от $2i - 1$ переменной подсчитываются отдельно (см. предыдущий абзац), то, чтобы не учитывать одни и те же функции дважды, на данном этапе они исключаются из рассмотрения:

$$|E_{Se}^{2i}| - |E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}| = 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i.$$

Число функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных соответствуют функциям голосования от $2i$ переменных и не входят в пересечение $E^{2i}_{Se} \cap E^{2i}_{Fe}$, равно числу способов выбрать $2i$ переменных из n, умноженное на число $(|E^{2i}_{Se}| - |E^{2i}_{Se} \cap E^{2i}_{Fe}|)$ для каждых $2i$ переменных:

$$(2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i) \cdot C^{2i}_n.$$

Как отмечалось ранее, множество V_e не содержит функции голосования ни от n переменных, ни от $n-1$ переменной, поэтому

$$i \in \overline{1, \frac{n}{2} - 1}, \;\; n \geqslant 4.$$

Просуммировав по i найденные ранее числа, получим формулу для вычисления $|V_e|$:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i)C^{2i}_n + C^{2i-1}_n).$$

Полученную формулу можно упростить:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i)C^{2i}_n + C^{2i-1}_n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C^{2i}_n - 2i \cdot C^{2i}_n + C^{2i-1}_n).$$

Введём обозначение $p = C^{2i-1}_n$:

$$p = C^{2i-1}_n = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i+1)!}.$$

Общую сумму можно разделить на 2 части: содержащую и не содержащую множитель p.

$$2i \cdot C^{2i}_n = 2i \cdot \frac{n!}{(2i)!(n-2i)!} = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i)!} = (n-2i+1)p;$$

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C^{2i}_n - (n-2i+1)p + p) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C^{2i}_n + (2i-n)p).$$

Часть суммы, содержащую множитель p, разделим также на 2 части, каждую из которых подсчитаем отдельно.

$$(2i-n)p = (2i-1)p + (1-n)p = (2i-1)C^{2i-1}_n + (1-n)C^{2i-1}_n =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(2i-2)!(n+1-2i)!} + (1-n)C^{2i-1}_n = n \cdot C^{2i-2}_{n-1} + (1-n)C^{2i-1}_n.$$

В ходе вычислений неоднократно используется результат суммирования $\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C^{2i}_n$:

$$(1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C^i_n = 0; \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C^{2i}_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C^{2i+1}_n; \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C^{2i}_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} C^i_n = 2^{n-1}.$$

Подсчитаем первую часть суммы с множителем p:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C^{2i-2}_{n-1} = C^0_{n-1} + C^2_{n-1} + \ldots + C^{n-4}_{n-1} = (\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C^{2i}_{n-1}) - C^{n-2}_{n-1} = 2^{n-2} - n + 1.$$

Подсчитаем вторую часть суммы с множителем p:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2i-1} = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-3} = (\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1}) - C_n^{n-1} = 2^{n-1} - n.$$

Подставим полученные результаты в часть суммы с множителем p:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2i-n)p = n(2^{n-2} - n + 1) + (1-n)(2^{n-1} - n) = (2-n)2^{n-2}.$$

Число $|V_e|$ может быть представлено в виде:

$$|V_e| = (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C_n^{2i}.$$

Теперь подсчитаем число $|V_o|$. E_{So} не пересекает E_{Fo}, поэтому множество V_o представляет собой множество функций свободного голосования от n переменных.

Вычисление значения $|V_o|$, также как и вычисление $|V_e|$, разбивается на 2 этапа: суммирование функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i$ переменных для каждого i, и суммирование функций голосования, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i-1$ переменной для каждого i.

Множество V_o не содержит функцию голосования от n переменных, поэтому

$$i \in \overline{1, \frac{n-1}{2}}, \;\; n \geqslant 3.$$

Проводя аналогичные подсчёту $|V_e|$ вычисления, найдём число $|V_o|$:

$$p = C_n^{2i-1} = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i+1)!};$$

$$|V_o| = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} - 2i)C_n^{2i} + C_n^{2i-1}) = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}((2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C_n^{2i} + (2i-n)p).$$

Рассмотрим часть суммы с множителем p:

$$(2i-n)p = n \cdot C_{n-1}^{2i-2} + (1-n)C_n^{2i-1};$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n-1}^{2i-2} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-3} = (\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2i}) - C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-2} - 1;$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i-1} = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} = (\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1}) - C_n^n = 2^{n-1} - 1.$$

Подставим полученные результаты в часть суммы с множителем p:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(2i-n)p = n(2^{n-2} - 1) + (1-n)(2^{n-1} - 1) = (2-n)2^{n-2} - 1.$$

Число $|V_o|$ может быть представлено в виде:

$$|V_o| = (2-n)2^{n-2} - 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} \cdot C_n^{2i}.$$

Числа $|V|$ и $|E_S|$ нам известны, поэтому можно подсчитать $|E| = |E_S| + |V|$.

Пусть $|E_e|$ — количество всех функций голосования от n переменных (включая все функции свободного голосования), где n — чётное, а $|E_o|$ — количество всех функций голосования от n переменных, где n — нечётное.

$$|E_e| = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + |V_e| = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}};$$

$$|E_o| = 1 + |V_o| = 1 + (2-n)2^{n-2} - 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} = (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}}.$$

После всех преобразований получим:

$$|E_e| = 2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}}; \qquad |E_o| = (2-n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}};$$

где $|E_e|$ — нижняя граница для $|MS|$ для чётных n, а $|E_o|$ — нижняя граница для $|MS|$ для нечётных n.

В качестве примера использования полученных формул вычислим значение $|E_e^4|$ для функций от 4 переменных:

$$|E_e^4| = 2^{\frac{\binom{4}{2}}{2}} + |V_e^4| = 8 + |V_e^4|;$$

$$|V_e^4| = (2-4)2^{4-2} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{3}{2}\right]} \binom{4}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} = -8 + \sum_{i=1}^{1} \binom{4}{2i} 2^{\frac{\binom{2i}{i}}{2}} = -8 + 6 \cdot 2 = 4;$$

$$|E_e^4| = 8 + 4 = 12.$$

Таблицы истинности 8 из 12 функций от 4 переменных множества E_e^4 были построены ранее в Таблице 4. В Таблице 6 представлены оставшиеся 4 функции.

Заключение

В данной работе показано, что функция голосования от нечётного числа переменных является монотонной и самодвойственной. Приведено описание того, как может быть определена функция голосования от чётного числа переменных. Функции с фиктивными переменными, близкие по свойствам к функциям голосования, были названы функциями свободного голосования. Затем было рассмотрено объединение E множества функций голосования и множества функций свободного голосования. Была найдена мощность множества E. Полученное значение $|E|$ предложено в качестве нижней границы для $|MS|$. Для класса монотонных самодвойственных функций от чётного числа переменных нижняя граница была улучшена по сравнению с границами, предложенными ранее, а для функций от нечётного числа переменных нижняя граница дана впервые.

Функции голосования могут быть полезны не только для оценки числа $|MS|$, но и для оценки мощности всего класса монотонных булевых функций. Есть основания полагать, что функции голосования неявно использовались исследователями, пытающимися найти решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций. Поэтому дальнейшие исследования функций голосования остаются актуальными для решения данной проблемы.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Table 6. Functions of free election of 4 variables from the set E_e^4

Таблица 6. Функции свободного голосования от 4 переменных из множества E_e^4

References

[1] D. J. Kleitman, "On Dedekind's Problem: The Number of Monotone Boolean Functions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 21, no. 3, pp. 677–682, 1969.

[2] L. Y. Bystrov and V. S. Rublev, "Bulevy funkcii, ne prinadlezhashchie predpolnym klassam", *Zametki po informatike i matematike*, vol. 13, pp. 22–26, 2021.

[3] L. Haviarova and E. Toman, "The Number of Monotone and Self-Dual Boolean Functions", *JAMSI*, vol. 10, no. 2, pp. 93–111, 2014.

[4] S. V. Yablonskiy, *Introduction into discrete mathematics*, 5th ed. HSE, 2008.

[5] G. P. Gavrilov and A. A. Sapozhenko, *Zadachi i uprazhneniya po diskretnoj matematike*. Fizmatlit, 2005.

[6] A. A. Rubchinskiy, *Diskretnye matematicheskie modeli. Nachal'nye ponyatiya i standartnye zadachi: uchebnoe posobie*. Direct-Media, 2014.

[7] D. N. Zhuk, "Ot dvuznachnoj k k-znachnoj logike", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, vol. 22, no. 1, pp. 131–149, 2018.

[8] V. N. Semenchuk, *Diskretnaya matematika. Kurs lekcij.* Francysk Skaryna Homiel State University, 2007.

[9] A. D. Korshunov, "Reshenie problemy dedekinda o chisle monotonnyh bulevyh funkcij", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 233, no. 4, pp. 543–546, 1977.